

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
УПРАВЛЕНИЯ
КРУПНО-
МАСШТАБНЫМ
ВОДНЫМ
ОБЪЕКТОМ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВОСТОЧНО-СИБИРСКИЙ ФИЛИАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
УПРАВЛЕНИЯ
КРУПНОМАСШТАБНЫМ
ВОДНЫМ ОБЪЕКТОМ

Ответственный редактор
канд. физ.-мат. наук *Г. Н. Константинов*



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1987



4913

Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом/Анохин Ю. А., Горетко А. Б., Дамешек Л. Ю. и др.— Новосибирск: Наука, 1987.

Монография содержит оригинальные результаты исследований по проблемам мониторинга природной среды, регионального водохозяйственного планирования, комплексной оценки влияния хозяйственной деятельности на водные объекты, нормирования гидрохимических воздействий, моделирования воздействия загрязняющих веществ на гидробионтов. Приведены новые математические модели и методы решения широкого круга задач управления водными ресурсами применительно к условиям бассейнов оз. Байкал, Азовского моря, Терско-Кумского региона.

Книга предназначена для географов, экологов, математиков, биологов и других специалистов, занимающихся системным анализом проблем использования и охраны водных ресурсов.

Авторы: Ю. А. Анохин, А. Б. Горетко, Л. Ю. Дамешек, С. В. Бердников, В. И. Гурман, Ю. А. Домбровский, А. Н. Ермолов, В. Ю. Запорожец, В. Г. Ильичев, Г. Н. Константинов, С. И. Меньшиков, А. Х. Остромильский, В. Г. Пряжинская, О. Н. Пуляевская, А. Д. Ригун, И. А. Хранович, Т. В. Чемезова, В. М. Шнайман

Рецензенты *В. А. Батулин, В. В. Буфал*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вода играет важнейшую и разнообразную роль в жизни и деятельности людей. Это определяет сложный характер проблемы управления водными ресурсами, выдвигает ее на одно из первых мест в ряду основных проблем научно-технического прогресса. При решении задач управления водными ресурсами большое значение имеют математические методы и модели.

Модели и методы планирования водохозяйственных систем, ориентированные на распределение объемов потребления воды, а также описания процесса формирования стока и водообмена разрабатываются давно, и в настоящее время сложилась устойчивая система водохозяйственных расчетов. Однако в последние два десятилетия в связи с увеличением антропогенной нагрузки на водные ресурсы круг задач значительно расширился и включает уже различные вопросы управления качеством водных ресурсов, влияния загрязнений на гидробионтов, функционирования водных экосистем и т. п., что требует как адаптации существующих методов, так и разработки новых. Разнообразие прикладных задач породило множество подходов к решению указанных проблем, базирующихся на различных концепциях, не охватывающих, как правило, всего комплекса проблем управления водными ресурсами. Вместе с тем ясно, что методы и модели управления таким универсальным ресурсом, каким является вода, должны быть также универсальными и охватывать весь круг вопросов, начиная от оперативного управления и заканчивая разработкой долгосрочных схем комплексного использования ресурсов. Следовательно, нужна система математических моделей, согласованная с процессами сбора информации о состоянии водных ресурсов и методами решения задач управления ими. Накопленный опыт исследований в этом направлении представлен в данной коллективной монографии, в работе над которой приняли участие сотрудники лаборатории автоматизации мониторинга природной среды и климата Госкомгидромета и АН СССР, сектора системного анализа Института водных проблем АН СССР, Института механики и прикладной математики и кафедры математического обеспечения ЭВМ и АСУ Ростовского

университета, кафедры теории систем и лаборатории исследования систем управления Иркутского университета, Вычислительного центра АН СССР и Иркутского вычислительного центра СО АН СССР.

В книге рассмотрены вопросы разработки комплексного регионального мониторинга и его практической реализации для региона озера Байкал. Представлены основные концепции создания системы эколого-экономических расчетов «Регион» и некоторые иллюстрации ее работы применительно к водным ресурсам. Рассмотрены математические аспекты нормирования выбросов в бассейне реки и управления каскадом водохранилищ, проблемы формализации механизмов влияния загрязняющих веществ на динамику экосистем и задачи управления водными ресурсами Азовского моря. Обсуждены принципы создания математического аппарата для исследования проблем регионального водохозяйственного планирования, структура соответствующей системы математических моделей и методов их построения.

Представленные в монографии результаты не охватывают, конечно, всего многообразия задач управления водными ресурсами и могут рассматриваться лишь как первый шаг на пути создания единой схемы, связывающей процессы наблюдения (сбора информации), моделирования и управления применительно к водным ресурсам.

ПРОБЛЕМА НАБЛЮДЕНИЯ И СБОРА ДАННЫХ О ПОВЕДЕНИИ КРУПНЫХ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ

§ 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МОНИТОРИНГА

В последние десятилетия чрезвычайно существенными стали изменения состояния биосферы под влиянием антропогенных факторов. Они могут происходить весьма быстро; может оказаться, что такие изменения, происходящие в некоторых частях биосферы за несколько лет или десятилетий, будут сравнимы с результатами естественных изменений, происходящих за целые исторические эпохи.

Естественные изменения состояния окружающей природной среды фиксируются существующими в разных странах геофизическими службами. С целью выделения антропогенных изменений на фоне естественных природных колебаний была предложена организация специальных наблюдений по заранее подготовленной программе, которую принято называть мониторингом. Мониторинг включает в себя следующие основные элементы [Израэль, 1980]:

- 1) наблюдение за факторами, воздействующими на окружающую природную среду, и за состоянием среды;
- 2) оценку фактического состояния природной среды;
- 3) прогноз состояния окружающей природной среды и оценку прогнозируемого состояния.

Таким образом, мониторинг включает в себя наблюдение, оценку и прогноз и не включает управление качеством окружающей среды и деятельностью человека. Однако очевидно, что для правильной организации управления качеством окружающей природной среды совершенно необходимым условием является организация системы мониторинга.

Система мониторинга может охватывать отдельные районы (локальный мониторинг), крупные регионы (региональный мониторинг) и земной шар в целом (глобальный мониторинг).

Национальным мониторингом называется система мониторинга в рамках одного государства; такая система отличается от глобального мониторинга не только масштабами, но и тем, что основной ее задачей является получение информации и оценка состояния среды в национальных интересах [Израэль и др., 1978].

В СССР национальной системой мониторинга является Общегосударственная служба наблюдений и контроля за уровнями загрязнения объектов окружающей среды, созданная в соответствии с Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 29 декабря 1972 года на базе организаций Государственного комитета СССР по гидрометеорологии и контролю природной среды при участии заинтересованных министерств и ведомств [Израэль и др., 1978]. Задачами службы являются наблюдение, контроль и оценка уровней загрязнения атмосферы, почвы, водных объектов по физическим, химическим и гидробиологическим (для водных объектов) показателям. Сеть пунктов службы организована в столицах союзных и автономных республик, краевых и областных центрах, в крупных промышленно-экономических центрах, на водных объектах и в сельскохозяйственных зонах, подверженных загрязнению промышленными выбросами, сбросами сточных вод, ядохимикатами и другими загрязняющими веществами. Система наблюдений организована также в фоновых районах СССР, она является составной частью Глобальной системы мониторинга окружающей среды, создаваемой в рамках Программы ООН по окружающей среде (ЮНЕП).

Основным принципом организации наблюдений в каждом пункте является их комплексность, что предусматривает проведение сопутствующих метеорологических и гидрологических наблюдений. Для сопоставимости данных наблюдений за уровнем загрязнения объектов окружающей среды (воздух, атмосферные выпадения и осадки, почвы, воды суши и морей, донные отложения) все методики проведения работ являются едиными и обязательными для Общегосударственной службы [Израэль и др., 1978].

§ 2. МОНИТОРИНГ ОЗЕРА БАЙКАЛ

Практическая реализация принципов мониторинга (оценки и прогнозирования) для региона оз. Байкал наталкивается на значительные трудности, которые носят, по-видимому, фундаментальный характер. Суть дела в том, что для столь сложной, многокомпонентной системы, какой является регион оз. Байкал, чрезвычайно трудно описать и формализовать все множество относящихся сюда элементов и взаимодействий между ними. Нам неизвестны работы, где бы эта проблема была удовлетворительно решена, и ключ к ее решению, по нашему мнению, — в поэтапном, итеративном построении формализованного описания, в разработке имитационной системы моделей, описывающих как распространение загрязняющих веществ в атмосфере и природных водах (включая реки и акваторию озера), так и реакцию экосистем на загрязнение. На этом пути нами была разработана балансовая модель циркуляции загрязняющих веществ в природных средах региона [Анохин и др., 1976], играющая важную «органи-

зующую» роль при разработке и внедрении систем мониторинга в регионе оз. Байкал.

При оценке состояния природной среды в регионе надо исходить из того, что благодаря значительным усилиям, предпринимаемым хозяйственными органами по выполнению известных постановлений партии и правительства по Байкалу, достигнуты некоторые положительные результаты по стабилизации и предотвращению негативных изменений в состоянии озера. Вместе с тем поступление загрязняющих веществ в природные среды региона продолжается.

Поэтому чрезвычайно актуальными остаются усовершенствование и оптимизация существующих систем наблюдения за загрязнением окружающей среды, разработка практически полезных методов анализа и обобщения информации, прогнозирования состояния природных сред с целью использования этих результатов хозяйственными и планирующими органами. Особое значение имеет постановка этих задач в долгосрочном плане, на перспективу в 20—25 лет.

Прежде всего следует уточнить, какое место система мониторинга должна занимать в общей проблеме оптимального управления антропогенным воздействием на состояние природной среды в регионе оз. Байкал. Разумеется, принципы построения систем импактного мониторинга, создаваемых для наблюдений и контроля загрязнений в локальном масштабе, т. е. вблизи источников загрязнения, отличаются от принципов построения систем регионального или глобального мониторинга, целью которых являются наблюдение и оценка состояния окружающей среды в местах, удаленных от непосредственного влияния источников, т. е. в фоновых районах.

Однако, к сожалению, критерий удаленности от источников не является вполне удовлетворительным для выделения фоновых районов, что связано с процессами крупномасштабного (регионального и глобального) распространения загрязняющих веществ. Поэтому необходимо уточнить понятия «фоновый район», «фоновые уровни загрязнения».

Это можно сделать, если при описании пространственно-временной картины распределения загрязняющих веществ в природных средах использовать язык математической статистики и под «фоновым загрязнением» понимать случайную величину (или функцию), параметры распределения которой определяются по данным исследований. На этом пути, в применении к озеру Байкал, удастся, используя статистические критерии, определить устойчивые характеристики зон влияния источников загрязнения (площадь, объем загрязненной водной массы), а также неустойчивые характеристики, такие как, например, конфигурация зоны влияния. Тогда фоновые районы озера естественным образом определяются как районы, не входящие в зоны влияния отдельных источников, хотя и подверженные общему антропогенному давлению регионального и глобального характера. Отметим, что при

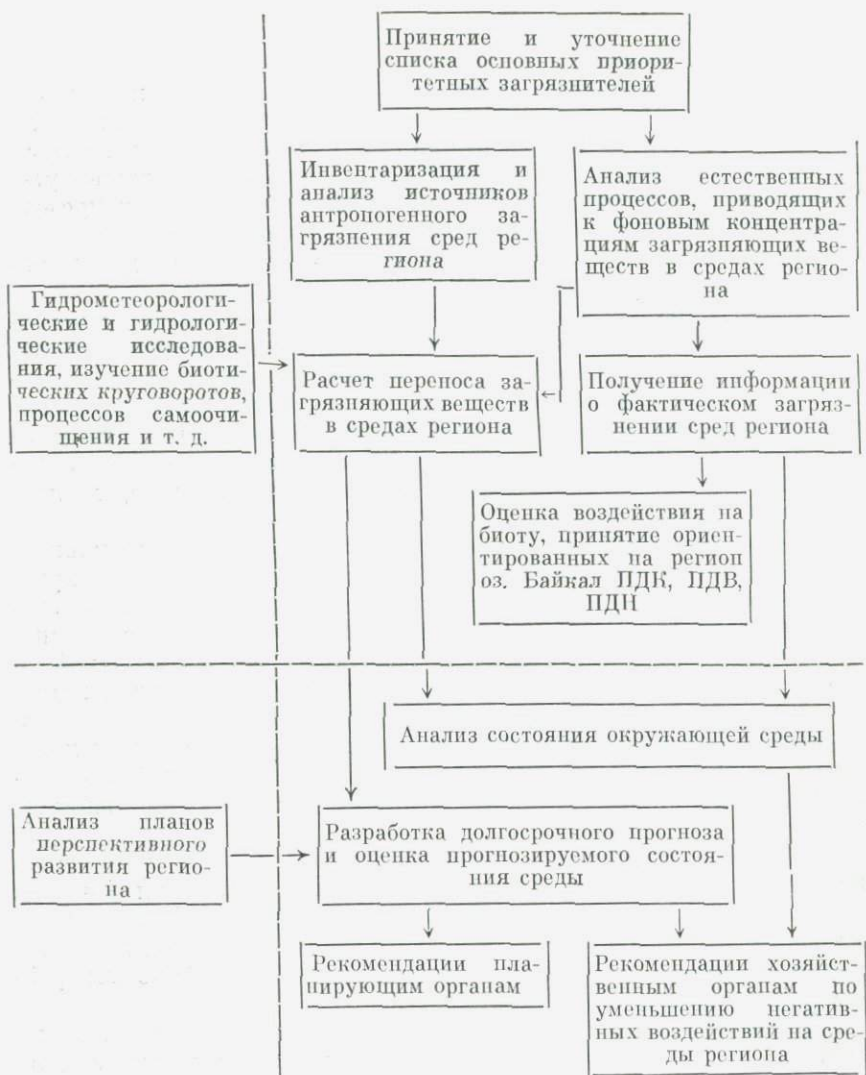


Схема 1.1. Схема комплексного фонового мониторинга состояния оз. Байкал.

таким подходе фоновые районы охватывают подавляющую часть (90%) территории региона и водной массы озера.

Ниже обсуждается принципиальная схема комплексного фонового мониторинга состояния оз. Байкал (схема 1.1). Можно выделить следующие основные цели комплексного фонового мониторинга:

1) объективная оценка современного состояния озера и региона в целом;

2) составление долгосрочных прогнозов влияния хозяйственной деятельности в регионе на состояние геофизических сред, и в первую очередь воды оз. Байкал.

Упомянутые оценки и прогнозы используются для выработки рекомендаций по уменьшению нежелательных воздействий на природные среды региона.

Конечные цели системы мониторинга (см. схему 1.1) связаны с целями и задачами планирующих и хозяйственных органов, которые используют ее результаты и влияют на ее функционирование. Вместе с тем функционирование системы мониторинга неразрывно связано с исследованиями целого ряда геофизических, гидрометеорологических, биологических организаций. Хотя указанные исследования могут не входить непосредственно в систему мониторинга, необходима продуманная координация усилий ученых этих специальностей для достижения целей мониторинга.

Прежде всего необходимо произвести детальную инвентаризацию и анализ источников антропогенного загрязнения, а также исследовать естественные процессы, приводящие к формированию фоновых концентраций загрязняющих веществ в средах региона. Следует уточнить список приоритетных, наиболее важных по влиянию на озеро загрязняющих веществ. Наконец, необходимо изучить основные пути переноса приоритетных загрязняющих веществ в природных средах региона и на основе анализа гидрометеорологической и гидрологической информации разработать соответствующие математические модели, позволяющие оценивать интенсивность процессов переноса и давать теоретическую картину пространственно-временного распределения концентраций загрязняющих веществ в воде озера Байкал и других геофизических средах региона.

Параллельно следует совершенствовать систему отбора проб, методики их анализа для получения достаточной и надежной информации о фактическом загрязнении сред региона. Сравнение расчетных данных с результатами наблюдений позволяет, с одной стороны, оценить адекватность используемых моделей, с другой — сформулировать рекомендации по совершенствованию системы наблюдений.

Основным результатом, имеющим важное народнохозяйственное значение, являются конкретные рекомендации по уменьшению негативного воздействия на природные среды региона.

Остановимся на характеристике системы наблюдений на Байкале. Контроль за качеством вод осуществляется в приустьевых участках 24 рек и в истоке р. Ангары. Контролируемые реки составляют 83% всей приточности озера. Отбор проб производится 5—7 раз в год с учетом гидрологического режима рек, и воды анализируются на 38 химических показателей.

Состав атмосферных осадков и атмосферных выпадений контролируется круглогодично на семи станциях побережья озера и одной фоновой (Хамар-Дабан) по 17 показателям; кроме того, в

конце марта проводится отбор снежных проб, позволяющих оценить количество химических веществ, выпадающих на отдельные районы поверхности озера и побережья за зимний период. Загрязнение атмосферы контролируется в Байкальске, Селенгинске, Листвянке и Слюдянке 3 раза в сутки по многим (от 7 до 25) показателям. В Селенгинске, Байкальске и Слюдянке загрязнение воздуха обусловлено выбросами местных предприятий, в Листвянке контролируется загрязнение воздушных масс, переносимых на акваторию озера вдоль долины р. Ангары от городов Черемхово, Свирск, Усолье-Сибирское, Ангарск, Иркутск. Повторяемость соответствующих направлений ветров достигает 53% за год. Временная динамика загрязнения атмосферы за 1969—1979 гг. показывает, что средние годовые концентрации примесей испытывают колебания, коррелирующие с изменениями годовых повторяемостей неблагоприятных гидрометеорологических условий. Наблюдается также связь с мероприятиями БЦБК, направленными на сокращение выбросов. Максимальное загрязнение воздуха всеми примесями наблюдалось в 1971 г., затем максимумы (в 2—3 раза ниже первого) наблюдались в 1977 и 1979 гг. По всем примесям, кроме окиси углерода и хлора, загрязнение воздуха в среднем за десятилетие заметно снизилось.

Химический состав водной толщи озера контролируется в 182 точках по 5 горизонтам (0,5, 25—50, 75—100, 200 м и придонный слой). Пробы анализируются по 38 показателям, из которых 12 — показатели гидрохимического режима, 16 — микроэлементов и 10 — загрязнения вод. Распределение точек (вертикалей) по озеру неравномерно: по центральной осевой линии от его южной оконечности до северной распределено 30 точек; в районах портов — 6; в районе Нижнеангарск — Северобайкальск — 15, у истока Ангары — 10, на Селенгинском мелководье — 56, в районе БЦБК — 65. Съемки проводятся 4 раза в год, что диктуется основными гидрологическими и гидробиологическими фазами режима озера.

Отметим, что переход к качественно более высокому уровню мониторинга требует прежде всего объединения усилий различных организаций на основе единой программы работ. Это было бы первым шагом в реализации программно-целевого подхода к решению описанных выше задач и достижению целей мониторинга. Указанная единая программа работ должна быть частью народнохозяйственного плана.

Интересные возможности расширения и углубления исследований связаны с научно-организационным укреплением существующей системы биосферных заповедников и станций фонового мониторинга на территории СССР. В частности, это касается и станции, созданной на Байкале в районе Баргузинского заповедника. Развитие этого направления работ особенно перспективно в долгосрочном плане с целью выявления возможных отдаленных последствий влияния хозяйственной деятельности на состояние окружающей природной среды.

§ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЙ НА ОКРУЖАЮЩУЮ СРЕДУ В РЕГИОНЕ ОЗ. БАЙКАЛ. ТРЕБОВАНИЯ К ИНФОРМАЦИИ

В настоящее время не вызывает сомнения необходимость учета изменений в состоянии окружающей среды, являющихся следствием хозяйственной деятельности и в первую очередь поступления в окружающую среду загрязняющих веществ. Особенно это справедливо, когда речь идет о таком уникальном объекте, как оз. Байкал.

Для учета подобных изменений в состоянии окружающей среды при текущем и перспективном планировании хозяйственной деятельности требуется [Анохин, Остромогильский, 1980; Антоновский, Семенов, 1978]:

(1) для различных вариантов планов хозяйственного развития определять соответствующие им объемы поступления загрязняющих веществ в окружающую среду — воздушную, водную, почву;

(2) по данным об источниках загрязнения определять вызванные им изменения состояния атмосферы, гидросферы, почвы;

(3) по данным об изменении состояния атмосферы, гидросферы, почвы определять соответствующие изменения в состоянии природных экосистем — комплексов взаимодействующих биологических видов, рассматриваемых в единстве со средой их обитания;

(4) оценивать состояние природной среды в целом и экосистем — ее элементов, т. е. необходимо иметь критерий, позволяющий судить о предпочтительности одного состояния перед другим.

Совокупность исследований в рамках проблем (1) — (4) обладает рядом специфических особенностей. Во-первых, это исследование комплексные, требующие объединения усилий широкого круга специалистов (физиков, биологов, математиков, экономистов и др.) различных областей знания, находящихся на различных стадиях формализации, обладающих разными научно-исследовательскими традициями. Возможно, это объясняет тот факт, что в рамках проблем (1) — (4) исследования ведутся крайне неравномерно: какие-то вопросы изучены достаточно подробно, а другие остаются практически не изученными.

Во-вторых, решение названных проблем нельзя отложить на будущее, в расчете на то, что естественный путь развития указанных выше наук приведет к возникновению требуемой теории. Это процесс длительный, в то время как уже сейчас имеется необходимость в принятии научно обоснованных решений при планировании хозяйственной деятельности, что обуславливает необходимость одновременной разработки фундаментальных и прикладных аспектов рассматриваемых проблем и создания соответствующих математических моделей.

Всякая математическая модель природного объекта создается для получения с ее помощью ответов на определенный круг во-

просов. Специфика этих вопросов определяет и специфику применяемых моделей. Поэтому представляется полезным провести некоторую классификацию моделей в зависимости от целей, поставленных исследователями. Все модели, используемые при решении проблем (1) — (4), можно разделить на исследовательские, дескриптивные (описательные) и имитационные.

Исследовательские модели претендуют на проникновение в механизмы изучаемого явления. Примерами такого рода моделей, на наш взгляд, являются гидродинамическая модель течений в оз. Байкал [Власова, 1978; Цветова, 1977], модель циркуляции атмосферы в регионе оз. Байкал [Аргучинцев, 1977], модели пелагического сообщества оз. Байкал [Модели..., 1978].

Дескриптивные модели строятся без проникновения в суть изучаемых явлений и предназначены для свертывания и компактного представления экспериментальных данных. Например, если мы имеем дело с результатами наблюдений, записанными в некую матрицу, то эти данные можно представить, скажем, с помощью метода главных компонент, и если окажется, что преобладающая часть суммарной дисперсии падает на первые компоненты, то получится существенное сжатие экспериментального материала. Может оказаться, что первые компоненты легко интерпретируются теоретически. Здесь важно подчеркнуть, что в дескриптивных моделях редукция данных происходит без проникновения в механизм, их порождающий. Такое свернутое представление данных, естественно, обостряет интуицию исследователя. Примеры подобных моделей дают многочисленные применения статистических методов (например, [Кожова, Мельник, 1977]). К таким моделям относятся на наш взгляд и модели, основанные на принципе самоорганизации [Ивахненко, 1975].

Подчеркнем важность имитационных моделей, которые мы определяем как модели, прямо направленные на прогноз и оценку состояний внешней природной среды и воздействия на нее. Что касается Байкала и его бассейна, то реализованных имитационных моделей в указанном выше смысле очень мало. Большинство моделей здесь исследовательские и дескриптивные.

Рассмотрим кратко существующие модели, которые используются или могут быть использованы при анализе влияния хозяйственной деятельности на окружающую среду, т. е. при решении проблем (1) — (4).

Оценка источников загрязнения. Практически все исследователи, занимающиеся прогнозом и изучением распространения загрязнений [Динамика..., 1981; Математическое моделирование..., 1979], рассматривают источники как внешние входы своих моделей, полагая, что достоверная и полная информация об источниках может быть получена из данных официальной статистики, поставляемой предприятиями. В настоящее время информация об источниках загрязнения составляется по предприятиям (форма 2 ТП-воздух) или с помощью гидрохимических бюллетеней (загрязнение воды). Недостатками этих данных являются отсут-

ствие достоверной информации о поступлении многих загрязняющих веществ, отсутствие единой методики оценки этих поступлений. Последнее особенно важно при сравнении влияния различных источников. Существующая система инвентаризации источников не учитывает всех возможных источников. Далее, важно, что при разработке региональных моделей информация об источниках нужна не по предприятиям, а в агрегированном виде. Вопросы агрегирования подобной информации практически не изучены. В качестве примера возможного решения этих вопросов сошлемся на работу Анохина и др. [1981], где была проведена оценка поступлений ряда тяжелых металлов в атмосферу при сжигании угля для Иркутска, Ангарска и некоторых других городов Байкальского региона с целью оценки антропогенного потока тяжелых металлов из атмосферы на зеркало озера.

Модели распределения загрязнения в окружающей среде. Априори можно выделить следующие пути поступления загрязняющих веществ в воды оз. Байкал: поступление с водами основных рек (Селенга, Верх. Ангара, Баргузин, Холодная), выпадение из атмосферы с твердыми и жидкими осадками, смыв с прилегающих территорий, подземный сток.

Модель, предложенная в работе Анохина и др. [1981], может быть использована при оценке объемов поступлений загрязняющих веществ из атмосферы на зеркало озера. Следует также указать модель В. К. Аргучинцева [1977], результаты расчета которой можно использовать при оценке распространения в атмосфере загрязняющих веществ. Имеются различные подходы [Галкин, 1980] к построению моделей переноса загрязняющих веществ в водотоках. Применение камерной модели распространения загрязняющих веществ в р. Селенге [Математическое моделирование..., 1979] к конкретным веществам (нефтепродуктам и фенолам) показало, что для расчета важны процессы взаимодействия этих загрязняющих веществ с дном и учет смыва с прилегающих территорий. Указанные процессы изучены очень слабо. Поэтому при оценке поступления загрязняющих веществ с водами рек мы попытались произвести указанную оценку, опираясь на экспериментальные данные о концентрациях в устьях рек и объеме стока, и сразу обнаружилась справедливость высказанных выше предположений относительно неполноты инвентаризации антропогенных поступлений в реку. Последнее затрудняет учет антропогенного влияния и приводит к невысокой точности оценок в силу небольшого количества имеющихся данных.

Что касается моделей для оценки смыва загрязняющих веществ, то подходы к их построению только намечаются [Анохин и др., 1976]. Наибольшее количество имеющихся моделей посвящено распространению загрязняющих веществ в водной толще озера. Это камерные [Математическое моделирование..., 1979; Оптимальное управление..., 1980] и диффузионные [Галкин, 1980; Динамика..., 1981] модели, в которых сравнительно хорошо учитываются перенос загрязнений вследствие водообмена и сла-

бо (или совсем не учитываются) процессы деструкции и осадения на дно.

Модели водной экосистемы оз. Байкал. За последние годы в разных организациях было разработано несколько моделей [Модели..., 1979] экосистемы пелагиали оз. Байкал разной степени дезагрегации. Имеются модели динамики отдельных компонент экосистемы фитопланктона, зоопланктона, рыбы [Галкин, 1980], цель которых — количественная оценка состояния водной экосистемы, прогнозирование ее изменения под влиянием вылова рыбы и загрязнения воды биогенными веществами. Эти воздействия рассматриваются в моделях как внешние параметры. Влияние других загрязняющих веществ, таких как нефтепродукты, тяжелые металлы и др., поступление которых в воды озера имеет место, не учитывается. Причинами этого, по-видимому, являются отсутствие информации о влиянии указанных загрязняющих веществ на состояние экосистемы и незначительность антропогенного вклада в концентрации указанных веществ в озере (конечно, имеется в виду Байкал в целом, а не отдельные его зоны).

Указанные модели опираются на имеющуюся (довольно обширную) информацию о текущем состоянии экосистемы оз. Байкал и его изменениях. Наличие обширной информации обусловило и успешное использование дескриптивных прогностических моделей.

Критерии оценки. Здесь, на наш взгляд, работы находятся в зачаточном состоянии. Такое положение касается не только состояния оз. Байкал, но и состояния окружающей среды вообще, особенно когда речь идет об относительно небольших антропогенных воздействиях. Подходы здесь только намечаются [Израэль, 1980].

Существуют работы [Модели..., 1981; Оптимальное управление..., 1980], в которых предлагаются концепции и формальное представление в рамках единой эколого-экономической системы совокупности моделей, основанных на единой информационной базе. Такой концепции нельзя отказать в стройности и логичности. Однако следует учитывать огромные трудности наполнения формальной схемы реальной информацией. Очевидно, что именно реальная информация, ее наличие или отсутствие, ее качество являются решающими факторами при построении и использовании математических моделей для решения проблем (1) — (4). Разнородность этой информации, разнородность природных процессов, подлежащих учету при построении моделей, составляют, на наш взгляд, основные трудности реализации предложенной концепции. Здесь нам хочется подчеркнуть не только определяющую роль (при построении модели) количества и качества имеющейся информации, но и влияние самого процесса моделирования на совершенствование системы сбора информации. На наш взгляд, без такого взаимодействия невозможно успешное продвижение в решении проблем (1) — (4).

Остановимся кратко на понятии прогноза, как, на наш взгляд, его следует понимать при решении проблем (1) — (4).

Долгосрочное прогнозирование (на период свыше 20 лет) состояния оз. Байкал — сложная в методологическом отношении проблема. Эта сложность обусловлена прежде всего тем, что проверка такого прогноза возможна только через 20 лет. Но отсюда вовсе не следует, что научное обоснование прогноза невозможно. Моделируя на ЭВМ сложные системы, мы прогнозируем их поведение в ситуациях, ранее не наблюдавшихся. Логические основы такого прогноза ясны: предполагается, что, хотя моделируемая система сложна, она есть результат взаимодействия множества более простых, достаточно хорошо изученных процессов.

Использование математической теории случайных процессов для прогноза основано на теории стационарных случайных процессов. Не вдаваясь в строгое определение стационарности, заметим, что, по существу, это предположение означает неизменность во времени механизмов и внешних условий, определяющих исследуемые процессы, т. е. в нашем процессе нет никакого временного дрейфа. Это очень серьезное ограничение, ведь все реально наблюдаемые процессы (учитывая временной горизонт прогноза) существенно нестационарны. Итак, строго научный подход возможен, но при этом должны выполняться требования о детерминированности и изученности процессов, а где этого нет, мы должны быть уверены в неизменности механизмов, определяющих случайные процессы в течение всего временного горизонта прогноза.

С точки зрения целей мониторинга самым существенным фактором, определяющим все прогнозируемые параметры, является хозяйственная деятельность в регионе. Ее прогнозирование не входит в задачи мониторинга. Поэтому в рамках системы мониторинга можно лишь провести анализ существующих тенденций, основанный на перспективных планах развития экономики региона. Эти тенденции можно экстраполировать в будущее и показать, что может гипотетически произойти, если в действие не вступят новые механизмы или не будут приняты новые решения. Но ниоткуда не следует, что тенденции, выявленные сегодня, останутся неизменным в будущем. И здесь следует отметить, что оправданность прогноза не является в нашем случае определяющим показателем его качества, как это имеет место, например, в метеорологии. Главным позитивным моментом разрабатываемого прогноза считается выявление таких тенденций, которые могут привести к нежелательным последствиям. Такой прогноз называется негативным [Налимов, 1972]. Выявление нежелательных тенденций позволяет вовремя принять нужные решения. Таким образом, разрабатываемые модели позволяют проанализировать ситуацию и рассмотреть варианты решения возникающих проблем.

Остановимся на некоторых результатах анализа данных о содержании различных веществ в воде озера Байкал и в атмосферных осадках. Использовались данные по семнадцати гидрохимическим показателям, полученные Гидрохимическим институтом и Иркутским управлением Госкомгидромета в результате анализа

проб воды, отобранных на реперном (срединном) разрезе за 13 лет проведения гидрохимических съемок с пяти горизонтов в различные гидрологические сезоны года. Цель обработки данных — оценить повторяемость, вариабельность этих показателей в целом по озеру в зависимости от горизонта, гидрологического сезона и котловины озера. Аналогичная задача ставилась для данных о содержании ряда микроэлементов в воде. Для достижения указанной цели использовался аппарат классического дисперсионного анализа. Кратко поясним метод обработки.

Рассмотрим r взаимно независимых случайных выборок $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i})$ из r генеральных совокупностей со средними μ_i и дисперсиями σ_i^2 , $i = 1, 2, \dots, r$. Тогда если i -я выборка имеет объем n_i , то выборочные средние и дисперсии равны

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}; \quad S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Эти r выборок можно рассматривать как объединенную выборку с выборочной средней и дисперсией:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i \bar{x}_i; \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} ((n-2) S_0^2 + (r-1) S_A^2),$$

$$\text{где } n = \sum_{i=1}^r n_i, \quad S_0^2 = \frac{1}{n-r} \sum_{i=1}^r (n_i - 1) S_i^2, \quad S_A^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

Статистики S_0^2 (суммарная дисперсия) и S_A^2 измеряют расстояние внутри выборок и между выборками соответственно. Математические ожидания оценок при условии $\sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, \dots, r$, равны [Антоновский, Семенов, 1978]:

$$\text{для } S_A^2 \quad \sigma^2 + \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r n_i (\mu_i - \bar{\mu})^2, \quad \text{для } S_0^2 \quad \sigma^2.$$

Для оценки значимости различий средних между группами (т. е. для проверки гипотезы $\mu_i = \bar{\mu}$, $i = 1, 2, \dots, r$) можно воспользоваться критерием $F = S_A^2 / S_0^2$. Если величина F значительно больше единицы, то это говорит о наличии статистического различия между средними различных выборок. Для оценки значимости отличия F от единицы можно воспользоваться таблицами F -критерия при 5%- и 1%-ном уровне значимости.

Приведем некоторые результаты обработки данных по описанному методу. В качестве каждой из r выборок рассматривались значения одного гидрохимического показателя в поверхностном слое, полученные в течение одной гидрохимической съемки. Сравнение с табличными значениями F -критерия на 1%-ном уровне значимости не позволяет принять гипотезу о равенстве средних значений показателей по различным съемкам. Последнее

Таблица 1.1

Средние и среднеквадратичные отклонения гидрохимических показателей для различных горизонтов

Показатель	0,5 м		25—50 м		75—100 м		100 м		Придонный слой	Объединенная выборка
1	2		3		4		5		6	7
рН	8,0	35	8,0	31	7,9	30	7,8	21	7,8	79
	0,3		0,4		0,4		0,6		0,5	0,4
O ₂	11,9	88	12,1	79	—		—		11,9	11,9
	1,9		1,7						1,7	1,8
Σ	91,8	89	90	81	89,4	78	89,3	60	89,3	90
	12,1		3		2,9		2,3		2,8	6,3
Взв.	4,5	114	4,3	108	4,4	91	4,3	80	2,0	4,5
	1,2		1,3		1,5		1,2		2,0	1,5
ХПК	4,17	46	3,87	46	3,83	45	3,76	36	4,0	3,94
	1		1,4		1,1		0,9		1,3	1,2
NO ₂ ⁻	0,002	119	0,001	111	0,001	93	0,001	81	0,001	0,001
	0,001		0,001		0,001		0,001		0,002	0,001
NO ₃ ⁻	0,018	117	0,022	109	0,027	92	0,029	81	0,03	0,025
									0,03	0,025
NH ₄ ⁺	0,043	117	0,036	109	0,036	91	0,033	79	0,043	0,039
	0,032		0,03		0,03		0,03		0,035	0,032
PO ₄ ⁻³	0,007	118	0,007	111	0,008	93	0,008	81	0,009	0,008
	0,005		0,004		0,005		0,004		0,006	0,005
Si	0,7	118	0,7	111	0,7	92	0,7	81	0,8	0,7
	0,2		0,2		0,2		0,2		0,2	0,2
Cl ⁻	0,3	118	0,8	111	0,7	93	0,7	81	0,8	0,8
	0,3		0,1		0,1		0,1		0,1	0,2
SO ₄ ⁻²	6,0	116	5,9	110	6,0	89	5,8	79	6,0	5,9
	0,7		0,6		0,6		0,6		0,6	0,7
HCO ₃	63,7	26	63,5	24	63,0	24	62,7	23	62,3	63,3
	4,2		3,2		3,7		3,4		4,1	3,7

1	2		3		4		5		6		7	
Mg ⁺²	3,9	26	3,7	24	3,6	24	3,6	23	3,7	26	3,7	123
	0,6		0,5		0,6		0,7		0,7		0,6	
Ca ⁺²	15,6	26	15,3	24	15,3	24	15,3	23	15,5	26	15,4	123
	1,3		0,9		0,9		0,8		1,2		1,0	
Na ⁺	2,3	27	2,7	25	2,9	24	2,5	23	2,5	27	2,6	126
	0,8		0,9		1,1		0,9		1,0		1,0	

Примечание. Верхнее число — среднее, нижнее — среднев квадратическое отклонение показателя, сбоку — количество значений, по которым они рассчитывались.

говорит о важности учета временного хода при изучении изменчивости показателей. Далее в качестве каждой из r выборок рассматривались значения гидрохимических показателей в съемках за 1977 г. Даже визуально можно заметить, что средние всех показателей, кроме нефтепродуктов, по горизонтам одинаковы (табл. 1.1). Оценка по F -критерию показывает, что различия в средних значениях концентраций нефтепродуктов статистически значимы на 1%-ном уровне. Для остальных показателей значимых различий нет.

Обрабатывались также данные по двадцати микроэлементам, полученные в результате анализа проб снега, отобранных на реперном разрезе во время снегосъемок 1979 и 1980 гг. При этом было проведено:

сопоставление потоков микроэлементов из атмосферы, рассчитанных по простой модели переноса [Анохин и др., 1981], с теми, которые определяются по данным снегосъемок;

применение процедуры факторного анализа с последующей интерпретацией найденных факторов.

Представляется, что таким образом можно будет узнать источники поступления в окружающую среду определяемых микроэлементов. Сопоставление двух оценок потоков микроэлементов, полученных разными способами, показало вполне удовлетворительное согласие [Анохин и др., 1981]. Последнее дает основание утверждать, что для неизмеряемых элементов модельные оценки отражают суть дела. Таким образом, можно сформулировать требования к чувствительности методов измерения, если понадобится измерять эти элементы.

В заключение отметим, что вышеприведенный анализ существующих моделей природных процессов в регионе оз. Байкал, количество и качество имеющейся информации дают основание утверждать, что в настоящее время вряд ли возможен долгосрочный прогноз в абсолютных значениях состоянии водной экосистемы Байкала (поля концентраций загрязняющих веществ, гидро-

химических показателей, гидробионтов и т. п.). Но с помощью подобных моделей, на наш взгляд, возможна оценка нежелательных тенденций, обусловленных именно антропогенными воздействиями. Необходимость более точного учета этих тенденций вызывает необходимость выработки рекомендаций по совершенствованию системы наблюдений за состоянием озера.

Повышение качества информации о состоянии озера, в свою очередь, повышает научную обоснованность прогнозов, полученных с помощью разрабатываемых моделей. Такое взаимодействие между системой наблюдений и теми блоками системы мониторинга, которые ответственны за прогноз и оценку, является необходимым условием достижения главной цели мониторинга — выработки научно обоснованных рекомендаций по ограничению антропогенных воздействий на состояние оз. Байкал.

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОЙ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА КАЧЕСТВО ВОДНЫХ РЕСУРСОВ В РЕГИОНЕ И НОРМИРОВАНИЯ ГИДРОХИМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В настоящей главе рассматриваются принципы построения системы эколого-экономических расчетов (СЭЭР) и отдельные аспекты ее использования для оценки влияния хозяйственной деятельности на качество водных ресурсов в регионе, управления качеством и нормирования гидрохимических воздействий.

Под системой эколого-экономических расчетов понимается развитый программно-информационный комплекс, реализованный на современных ЭВМ и позволяющий региональным плановым органам эффективно принимать обоснованные плановые и управленческие решения на основе детальных количественных оценок. Основной составляющей системы моделей является природно-экономическая модель (ПЭМ), описывающая все многообразие объектов и процессов в реальной эколого-экономической системе с помощью сравнительно небольшого числа терминов: продукт, ресурс, выпуск, потребление, восстановление и т. п. Эта модель должна давать обозримую картину протекающих в регионе процессов и допускать теоретическое исследование.

Наряду с природно-экономической агрегированной моделью СЭЭР содержит более детальные модели отдельных крупных блоков региональной системы, таких как блоки использования ресурсов, транспорта, лесных ресурсов, уникального объекта и т. д.,

и целый ряд частных моделей, предназначенных для решения локальных задач. Модели и алгоритмы решения различных задач: прогноза, параметрического анализа, идентификации, оптимизации, нормирования и агрегирования, реализованные в виде отдельных пакетов прикладных программ, объединяются в информационно-программный комплекс (ИПК) «Регион», обеспечивающий решение любой задачи СЭЭР на заданной информации на любой из имеющихся или вновь включенных моделей и обладающий развитой структурой сервисного обслуживания пользователей.

Вопросы построения СЭЭР и методы решения различных задач с помощью данной системы подробно обсуждаются в монографиях «Модели управления природными ресурсами» [1981], «Взаимодействие природы и хозяйства Байкальского региона» [1981], «Планирование и прогнозирование природно-экономических систем» [1984]. Здесь же мы рассмотрим лишь те аспекты построения СЭЭР, разработки алгоритмов в решении задач и создании информационно-программного обеспечения, которые связаны с качеством водных ресурсов в регионе.

§ 1. МОДЕЛИ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ «РЕГИОН»

Эколого-экономическая модель «Регион». Традиционный подход к анализу и планированию хозяйственного развития территориально-производственных систем до недавнего времени не предусматривал глубокого комплексного изучения воздействия их на природную среду и обратной ее реакции на воздействие народного хозяйства. В настоящее время масштабы этого влияния так велики, что при перспективном планировании развития региона обе системы — хозяйственную и природную — нужно рассматривать как единое целое. В результате резко возрастает разнообразие путей и средств решения как экономических, так и экологических задач, что требует всесторонней и углубленной проработки намечаемых решений в рассматриваемой сфере, многовариантных расчетов, прогнозов и оценок последствий. Эффективное решение этих задач возможно лишь средствами системного анализа, математического и машинного моделирования, современной теории управления, позволяющих вести исследование сложных проблем, объединяя знания и опыт различных специалистов. В основе такого подхода должна лежать достаточно полная система моделей, предназначенных для решения задач прогнозирования состояния природных ресурсов, планирования экономического развития региона и управления природными ресурсами, нормирования антропогенных воздействий на природную среду.

В системе эколого-экономических расчетов (СЭЭР) «Регион» в качестве такой модели используется двухуровневая природно-

экономическая модель (ПЭМ). Она описывает взаимодействие всех компонентов природы и хозяйства региона и состоит из

— обобщенного уравнения межотраслевого баланса, в котором допускается выпуск продукта по различным технологиям и явно выделены затраты на восстановление природных ресурсов,

$$Mv = Av + Bu + A^{(z)}z + B^{(z)}w + p + v^i - v^e; \quad (2.1.1)$$

— уравнений динамики фондов основных и ресурсовосстановительных отраслей

$$\frac{dX}{dt} = u, \quad 0 \leq v \leq V(t, X, R), \quad (2.1.2)$$

$$\frac{dX^{(z)}}{dt} = w, \quad 0 \leq w \leq Z(t, X^{(z)}, R); \quad (2.1.3)$$

— уравнения динамики природных ресурсов

$$\frac{dR}{dt} = Q(R - R_*) - (Cv + Du) - Fp - D^{(z)}w + Jz + aN + r^i - r^e. \quad (2.1.4)$$

Здесь v, p — векторы выпусков и конечного потребления продуктов соответственно; u, w — скорости капиталовложений на развитие основных и ресурсовосстановительных отраслей; z — интенсивность восстановления ресурсов; $X, X^{(z)}$ — стоимость фондов основных и восстановительных отраслей; V, Z — производственные функции; R — вектор показателей состояния природных ресурсов, содержащий как объемные так и качественные характеристики; M — технологическая матрица; A — матрица коэффициентов прямых затрат в производственном потреблении; B — матрица коэффициентов фондообразующих затрат; $A^{(z)}$ — матрица удельных затрат продукции на восстановление ресурсов; $B^{(z)}$ — матрица коэффициентов фондообразующих затрат ресурсовосстановительных отраслей; Q — матрица взаимных влияний показателей состояния природных ресурсов; $C, D, D^{(z)}, F$ — матрицы удельных ресурсных затрат при выпуске продукции, развитии фондов основных и ресурсовосстановительных отраслей, непроизводственном потреблении соответственно; J — диагональная матрица с элементами $I_{ii} = 1$, если восстановление ресурса i приводит к увеличению показателя R_i , и $I_{ii} = -1$ в противном случае; a — вектор удельных ресурсных затрат, связанных с населением N . Пространственные эффекты в модели учитываются путем деления региона на районы, каждый из которых описывается уравнениями (2.1.1) — (2.1.4). Слагаемые v^i, v^e и r^i, r^e характеризуют потоки продуктов и ресурсов в данный район и из него соответственно. Уравнение (2.1.4) описывает изменение состояния ресурсов под воздействием хозяйственной деятельности. Естественная (невозмущенная) динамика состояния ресурсов предполагается известной и равной $R_*(t)$. Эта модель предназначена для всестороннего учета взаимодействия отраслей про-

изводства и природных ресурсов на региональном уровне. Она содержит сравнительно небольшое число агрегированных показателей, характеризующих динамику развития основных и ресурсо-восстановительных отраслей и природного комплекса (векторы X , $X^{(z)}$, R). Природный комплекс должен быть представлен показателями, характеризующими состояние воды, воздуха, земельных угодий, лесных, минеральных и биологических ресурсов.

Для интерпретации агрегированных решений и решения локальных задач, связанных с отдельными видами ресурсов, предназначены модели второго уровня, описывающие более подробно каждый вид природных ресурсов. Структура моделей второго уровня аналогична структуре уравнения (2.1.4):

$$\frac{dR^{(i)}}{dt} = Q^{(i)}(R^{(i)} - R_*^{(i)}) - (C^{(i)}v + D^{(i)}u) - F^{(i)}p - D^{(z)(i)}w + J^{(i)}z + a^{(i)}N + r^{i(i)} - r^{e(i)} + Q^{(b)(i)}(R - R_*). \quad (2.1.5)$$

Вектор $R^{(i)}$ содержит набор показателей, характеризующих i -й вид природных ресурсов. Все слагаемые в правой части уравнения (2.1.5), кроме последнего, имеют такой же смысл, как и в уравнении (2.1.4). С помощью матрицы $Q^{(b)(i)}$ учитывается взаимодействие с моделью верхнего уровня и, таким образом, описывается влияние всех ресурсов, учитываемых в модели верхнего уровня, на i -й ресурс. Такое опосредованное описание взаимодействия ресурсов позволяет значительно сократить количество коэффициентов, подлежащих определению при построении моделей конкретных объектов.

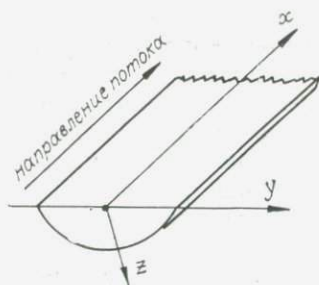
Водные ресурсы на верхнем уровне могут характеризоваться средневзвешенной концентрацией примесей, подсчитываемой по формуле

$$R = \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{S_i},$$

где C_i и S_i — текущая и предельно допустимая концентрации вещества i . На втором уровне это уже более широкий набор показателей: концентрации взвешенных веществ, биогенных элементов, кислорода; показатель биохимической потребности в кислороде; средневзвешенные концентрации примесей, объединенных по лимитирующему (органолепгическому, общесанитарному и токсикологическому) показателю вредности; концентрации нефтепродуктов, фенолов, синтетических поверхностно-активных веществ и т. п.

В каждом регионе существуют природные объекты, которые уникальны и являются предметом особой заботы и охраны. Их следует описывать отдельно. В бассейне озера Байкал таким объектом является экосистема озера. Модель антропогенных возмущений экосистемы (МАНЭ) озера Байкал построена по той же схеме, что и уравнение (2.1.4), и описывает динамику показате-

Рис. 2.1. Ориентация потока в пространстве.



лей, характеризующих качество воды и все основные элементы, участвующие в круговороте вещества и энергии на всех трофических уровнях экосистемы [Взаимодействие..., 1981].

Проблемы идентификации представленных здесь моделей подробно рассмотрены в книге [Эколого-экономические системы..., 1987].

Модели переноса примесей в реках. Обе модели верхнего уровня описывают состояние водных ресурсов с помощью показателей, осредненных по достаточно крупным районам. При определении коэффициентов этих моделей, интерпретации результатов, а также решении различных задач, таких, например, как задача нормирования, требуется более детальное пространственное описание состояния водных ресурсов. Прежде всего это математические модели, описывающие процессы переноса примесей в реках. Наибольшее распространение при их описании получило уравнение турбулентной диффузии [Караушев, Скакальский, 1979]:

$$\frac{\partial(\omega S)}{\partial t} + \frac{\partial(QS)}{\partial x} - D_x \frac{\partial^2(\omega S)}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2(\omega S)}{\partial y^2} - D_z \frac{\partial^2(\omega S)}{\partial z^2} + F(x, y, z, S) + g(t, x, y, z) = 0. \quad (2.1.6)$$

Здесь $S(x, y, z)$ — концентрация примеси в точке x, y, z ; $\omega(x)$ — «живое» сечение потока в точке x ; $Q(x)$ — расход воды в точке x ; D_x, D_y, D_z — коэффициенты дисперсии; $F(x, y, z, S)$ — функция, описывающая процесс деструкции неконсервативного вещества; $g(t, x, y, z)$ — интенсивность поступления примеси в точке (x, y, z) в момент времени t . Направление осей по отношению к потоку показано на рис. 2.1.

Эффективность применения данного уравнения при расчете смещения сточных вод в окрестности их выпуска доказана весьма убедительно. Вместе с тем при описании процесса распространения примесей для всей реки или водосборного бассейна, включающего систему рек и большое число источников поступления примесей, использование уравнения (2.1.6) становится затруднительным и может привести к неоправданному усложнению задачи. Во многих практических случаях оказываются полезными более простые модели, которые можно получить, используя уравнение (2.1.6) при соответствующих предположениях.

В последнее время широкое применение находят «камерные» модели, в основу построения которых заложен принцип дискретизации пространственных переменных. Все моделируемое пространство подразделяется на относительно однородные области (ка-

меры), в пределах которых состояние моделируемого показателя характеризуется средним значением. Каждая камера связана с соседними потоками вещества. Предполагается, что вещество, пересекая границу камеры, мгновенно перемешивается в пределах всей камеры. Размеры камер при этом могут быть достаточно большими. В данном случае можно говорить об аппроксимации сложной распределенной модели другой — дискретной по пространственным переменным — моделью, менее точной, но более простой. Принимаемые предположения, на первый взгляд, кажутся достаточно грубыми, не имеющими физического обоснования. Тем не менее такие модели можно успешно применять в том случае, когда конечной целью моделирования является получение осредненных характеристик по пространству.

Моделирование распределения примеси вдоль русла реки. Допустим, нужно построить распределение вдоль русла всей реки средней по ее сечению концентрации примеси. Получить его можно, если построить пространственную картину распространения примеси на основе распределенной модели и осреднить полученные значения по сечению реки. Другой путь состоит в построении сосредоточенной модели, оперирующей сразу требуемой осредненной характеристикой. Этот путь представляется более рациональным, так как соответствующие модели, как правило, проще, чем в первом случае. Продемонстрируем такой подход на примере многослойной модели распространения примесей в реках.

Допустим, что $D_y = D_z = D_x = 0$ и функции F, g не зависят от переменных t, y, z . Под переменной $S(x)$ будем понимать среднюю концентрацию в точке x . Предположим далее, что загрязнение, поступающее в точке x , мгновенно перемешивается по всему сечению реки. Имеется M источников поступления примеси, которые расположены в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, M$. Обозначим $S_i(x)$ среднюю концентрацию примеси в точке $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда из уравнения (2.1.6) получим

$$\frac{dS_i}{dx} = -\frac{1}{Q(x)} \frac{dQ(x)}{dx} S_i - \frac{1}{v(x)} F(x, S_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \quad (2.1.7)$$

$$S_i(x_i) = \frac{u_i}{q_i + Q_i} + \frac{Q_i}{q_i + Q_i} S_{i-1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad S_0(x_1) = S_\phi. \quad (2.1.8)$$

Здесь $u_i = q_i C_i$ — интенсивность i -го источника; q_i — расход сточных вод; C_i — концентрация примеси в сточных водах i -го источника; C_ϕ — фоновая концентрация для 1-го источника. Соотношение (2.1.8) представляет собой формулу полного перемешивания сточных вод [Методические основы..., 1981]. Таким образом, распределение примеси вдоль русла реки описывается дискретно-непрерывными уравнениями (2.1.7) — (2.1.8).

Если $D_x \neq 0$, то вместо уравнения (2.1.7) получим систему

$$\frac{dS_i}{dx} = P_i;$$

Пусть теперь $D_x \neq 0$. Разделим поток по вертикали на n слоев. Обозначим $S_{ij}(x)$ концентрацию вещества в слое j в точке $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Индекс $j=1$ соответствует поверхностному слою, $j=n$ — придонному. Ограничимся пока рассмотрением лишь участка $[x_i, x_{i+1}]$. Индекс i при этом в обозначениях переменных опустим. Будем считать, что скорость перетока вещества из слоя j в слой $j+1$ пропорциональна концентрации вещества в слое j и, наоборот, из слоя $j+1$ в j пропорциональна S_{j+1} . Уравнения модели тогда принимают вид (для простоты полагаем $D_x = 0$)

$$\frac{dS_1}{dx} = -\frac{1}{Q_1} \frac{dQ_1}{dx} S_1 - \frac{F(x, S_1)}{v_1} + \frac{1}{v_1} [\gamma_1^2 S_2 - \delta_2^1 S_1]; \quad (2.1.9)$$

$$\frac{dS_j}{dx} = -\frac{1}{Q_j} \frac{dQ_j}{dx} S_j - \frac{F(x, S_j)}{v_j} + \frac{1}{v_j} [\gamma_j^{j-1} S_{j-1} + \gamma_j^{j+1} S_{j+1} - \delta_{j-1}^j S_j - \delta_{j+1}^j S_j], \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (2.1.10)$$

$$\frac{dS_n}{dx} = -\frac{1}{Q_n} \frac{dQ_n}{dx} S_n - \frac{F(x, S_n)}{v_n} + \frac{1}{v_n} [\gamma_n^{n-1} S_{n-1} - \delta_{n-1}^n S_n]. \quad (2.1.11)$$

Здесь v_j — скорость потока воды в слое j ; коэффициенты γ_j^i характеризуют приток вещества из слоя i в слой j ; δ_i^j — отток вещества из слоя j в слой i . Так как количество вещества, перешедшего в слой $j-1$ из слоя j на отрезке единичной длины, равно количеству вещества, ушедшего из слоя j в слой $j-1$, то справедливо равенство

$$\gamma_{j-1}^j S_j Q_{j-1} = \delta_{j-1}^j S_j Q_j.$$

Отсюда получим

$$\delta_{j-1}^j = \gamma_{j-1}^j \frac{Q_{j-1}}{Q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.12)$$

Аналогично

$$\delta_{j+1}^j = \gamma_{j+1}^j \frac{Q_{j+1}}{Q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.13)$$

Подставляя соотношения (2.1.12) — (2.1.13) в уравнения (2.1.9) — (2.1.11), получим математическую модель, имеющую $2n-2$ неопределенных коэффициента. Так как эта модель описывает процесс диффузии, то при условиях, когда расход воды Q и скорость v не зависят от x , внешние условия стационарны, а вещество консервативно, система (2.1.9) — (2.1.11) должна приходиться в стационарное состояние $S_j = \bar{S}$, $j = 1, \dots, n$, т. е. при достаточно больших x должно наблюдаться полное перемешива-

ние вещества. Следовательно, коэффициенты $\gamma_{j-1}^j, \gamma_j^{j+1}$, $j = 1, \dots, n$, должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 - \gamma_2^1 \frac{Q_2}{Q_1} &= 0; \\ \gamma_j^{j-1} + \gamma_j^{j+1} - \gamma_{j-1}^j \frac{Q_{j-1}}{Q_j} - \gamma_{j+1}^j \frac{Q_{j+1}}{Q_j} &= 0, \quad j = 2, \dots, n-1; \\ \gamma_n^{n-1} - \gamma_{n-1}^n \frac{Q_{n-1}}{Q_n} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Отсюда коэффициенты γ_j^{j+1} , $j = 1, 2, \dots, n-1$, можно выразить через коэффициенты γ_{j+1}^j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, следующим образом:

$$\gamma_j^{j+1} = \frac{Q_{j+1}}{Q_j} \gamma_{j+1}^j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.1.15)$$

Подставляя значения γ_j^{j+1} в уравнения (2.1.9)–(2.1.11), приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{dS_1}{dx} = \varphi(x, S_1) + \frac{1}{v_1} \frac{Q_2}{Q_1} \gamma_2^1 (S_2 - S_1); \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_j}{dx} = \varphi(x, S_j) + \frac{1}{v_j} \left[\gamma_j^{j-1} (S_{j-1} - S_j) + \frac{Q_{j+1}}{Q_j} \gamma_{j+1}^j (S_{j+1} - S_j) \right], \\ j = 2, 3, \dots, n-1; \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$$\frac{dS_n}{dx} = \varphi(x, S_n) + \frac{1}{v_n} \gamma_n^{n-1} (S_{n-1} - S_n). \quad (2.1.18)$$

Здесь

$$\varphi(x, S_j) = -\frac{1}{Q_j} \frac{dQ_j}{dx} S_j - \frac{F(x, S_j)}{v_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть сечение потока имеет форму трапеции (рис. 2.2), где ширина реки равна $2B$, глубина — H . Отрезок $[0, H]$ оси z разобьем точками $h_0 = 0, h_1, \dots, h_n = H$ на n отрезков $[h_{j-1}, h_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, каждому из которых соответствует j -й слой с площадью сечения ω_j , $j = 1, 2, \dots, n$. На рис. 2.2 $j = 3$. Величину ω_j трудно вычислить.

$$\omega_j = 2B(h_j - h_{j-1}) - \frac{B}{2H}(h_{j-1}^2 + h_j^2), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.19)$$

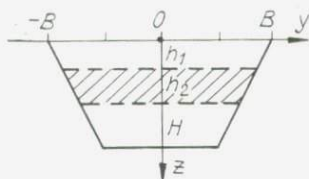
Так как $Q_j = v_j \omega_j$,

$$Q_j = v_j B \left[2(h_j - h_{j-1}) - \frac{1}{2H}(h_{j-1}^2 + h_j^2) \right].$$

Тогда при условии равенства скоростей потока в различных слоях получим

$$\frac{Q_{j+1}}{Q_j} = \frac{2H(h_{j+1} - h_j) - h_{j+1}^2 - h_j^2}{2H(h_j - h_{j-1}) - h_j^2 - h_{j-1}^2}. \quad (2.1.20)$$

Рис. 2.2. Поперечное сечение потока.



Перейдем теперь к определению оставшегося $(n - 1)$ -го коэффициента γ_{j+1}^j , $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Пусть x^1 — длина зоны перемешивания источника выбросов примеси, $S(x, y, z)$ — распределение примеси, отвечающее стационарному источнику выбросов, расположенному в точке $(0, 0, 0)$. Обозначим $\bar{S}_j(x)$ среднюю концентрацию примеси в слое j в точке x :

$$\bar{S}_j(x) = \frac{1}{\omega_j} \int \int_{\Omega_j} S(x, y, z) dy dz.$$

Здесь Ω_j — область, ограниченная прямыми

$$z = h_{j-1}, \quad z = h_j, \quad y = -\frac{B}{2H} z + B, \quad y = \frac{B}{2H} z - B.$$

На рис. 2.2 область Ω_2 заштрихована.

Считая, что фоновая концентрация равна нулю, а выброс мгновенно перемешивается в пределах верхнего слоя, получим следующие начальные условия для уравнений (2.1.16) — (2.1.18):

$$S_1(0) = \frac{u}{q+Q}, \quad S_j(0) = 0, \quad j = 2, \dots, n. \quad (2.1.21)$$

Обозначим $S_j(x, \gamma)$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, решение уравнений (2.1.16) — (2.1.18) с начальными условиями (2.1.21), отвечающее $\gamma = (\gamma_2^1, \dots, \gamma_n^{n-1})$. Коэффициенты γ_{j+1}^j , $j = 1, 2, \dots, n - 1$, определим таким образом, чтобы функционал

$$I(\gamma) = \int_0^{x_1} \sum_{j=1}^n (S_j(x, \gamma) - \bar{S}_j(x))^2 dx \quad (2.1.22)$$

принимал наименьшее значение, т. е. таким образом, чтобы решение уравнений (2.1.16) — (2.1.18) наилучшим образом аппроксимировало средние концентрации в слое, соответствующие решению уравнения (2.1.16).

Выпишем более подробно соответствующую задачу. Пусть вещество консервативно, величины v , B , H не зависят от переменной x и в точке $(0, 0, 0)$ имеется пассивный стационарный выпуск сточных вод с интенсивностью u . В этом случае решение уравнения (2.1.6) имеет вид [Основы прогнозирования..., 1982]:

$$S(x, y, z) = \frac{u}{x \sqrt{D_x D_z}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{y^2 v}{4D_y x} - \frac{z^2 v}{4D_z x}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{B \sqrt{v}}{4 \sqrt{D_z x}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{H \sqrt{v}}{4 \sqrt{D_y(x)}}\right)}.$$

Здесь $\operatorname{erf}(z) = \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$.

Вычислим среднюю концентрацию в слое j в точке x :

$$\bar{S}_j(x) = \frac{u}{x \sqrt{D_x D_z} \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{B \sqrt{v}}{4 \sqrt{D_z x}} \right) \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{H \sqrt{v}}{4 \sqrt{D_y x}} \right)} \times \\ \times \int_{\Omega_j} \exp \left(-\frac{y^2 v}{4 D_y x} - \frac{z^2 v}{4 D_z x} \right) dy dz. \quad (2.1.23)$$

Вычисляя интеграл по y , из (2.1.23) получим

$$\bar{S}_j(x) = \frac{u}{x \sqrt{D_x D_y} \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{B \sqrt{v}}{4 \sqrt{D_z x}} \right) \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{H \sqrt{v}}{4 \sqrt{D_y x}} \right)} \times \\ \times \int_{h_{j-1}}^{h_j} \left[\exp \left(-\frac{z^2 v}{4 D_z x} \right) \left[\operatorname{erf} \left(\left[B - \frac{B}{2H} z \right] \sqrt{\frac{v}{4 D_y x}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{erf} \left(\left[\frac{B}{2H} z - B \right] \sqrt{\frac{v}{4 D_y x}} \right) \right] dz. \quad (2.1.24)$$

Функция $\bar{S}_j(x)$ определяет среднюю концентрацию, полученную из «точного» решения (2.1.6). Коэффициенты γ будем определять так, чтобы решение «приближенной» модели (2.1.16) — (2.1.18) было наиболее близко к $\bar{S}_j(x)$. Так как при принятых предположениях $\varphi(x, S_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то задача состоит в минимизации на траекториях системы (2.1.16) — (2.1.18) функционала (2.1.22), где функция $\bar{S}_j(x)$ определена выражением (2.1.24).

Решая эту задачу, получим параметры γ_{j+1}^j , $j = 1, 2, \dots, n$, соответствующие участку $[0, x^*]$ или любому участку реки с подобными внешними условиями.

Выищем окончательно уравнения модели для всей реки. Имеем

$$\frac{dS_{i1}}{dx} = \varphi(x, S_{i1}) + \frac{1}{v_1(x) Q_2(x)} \gamma_2^1 (S_{i2} - S_{i1}); \quad (2.1.25)$$

$$\frac{dS_{ij}}{dx} = \varphi(x, S_{ij}) + \frac{1}{v_j(x)} \left[\gamma_j^{j-1} (S_{i-1} - S_{ij}) + \frac{Q_{j+1}(x)}{Q_j(x)} \gamma_{j+1}^j (S_{ij+1} - S_{ij}) \right], \\ j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (2.1.26)$$

$$\frac{dS_{in}}{dx} = \varphi(x, S_{in}) + \frac{1}{v_n(x)} \gamma_n^{n-1} (S_{in-1} - S_{in}); \quad (2.1.27)$$

$$S_{ij}(x_i) = \frac{u_i}{q_i + Q_i} + \frac{Q_i}{q_i + Q_i} S_{i-1,j}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, M_x \\ j = 1, 2, \dots, n, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.1.28)$$

Уравнения (2.1.25) — (2.1.28) задают распределение примеси в каждом слое j вдоль русла всей реки:

$$S_j(x) = S_{ij}(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

В точках x_i , соответствующих источникам выбросов, функция $S_j(x)$ претерпевает разрыв в силу предположения о мгновенном перемешивании выбросов по всему сечению реки. Алгоритмы решения многих задач в случае разрывных функций оказываются неприемлемыми, и приходится строить непрерывные аппроксимации этих функций. В данном случае целесообразнее видоизменить уравнения (2.1.25) — (2.1.28) так, чтобы их решения давали нужные нам непрерывные решения. Для этого достаточно предположить, что источник находится не в точке x_i , а распределен вдоль русла реки на участке $[x_i, x_i + l_i]$ и его интенсивность в каждой точке равна

$$g_i(x) = u_i / (l_i \omega_i).$$

По-прежнему будем считать, что вещество, поступающее в точке, мгновенно перемешивается по всему сечению. Вместо уравнений (2.1.7) — (2.1.8) будем использовать уравнение

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{Q(x)} \frac{dQ}{dx} S - \frac{1}{v(x)} F(x, S) + \sum_{i=1}^M \chi_i(x) \frac{u_i}{l_i Q_i}, \quad (2.1.29)$$

$$S(0) = S_0.$$

Здесь

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_i + l_i], \\ 0, & x \notin [x_i, x_i + l_i]. \end{cases}$$

Величина l_i не должна превышать длины зоны достаточно полного перемешивания для i -го источника. При уменьшении l_i будет возрастать точность аппроксимации разрывного решения в точке x_i . Соотношение между моделями вида (2.1.7) — (2.1.8) и (2.1.29) проиллюстрируем на простом примере. Пусть рассматривается участок реки длиной 15 км. На всем участке расход воды и конфигурация русла не меняются. В начале участка и через 10 км расположены два источника выбросов примеси с расходами сточных вод $q = q_1 = q_2 = 10 \text{ м}^3/\text{с}$ и концентрацией примеси в них, равной $1 \text{ г}/\text{м}^3$. Расход речной воды составляет $1000 \text{ м}^3/\text{с}$. Функция $F(x, S) = -kS$, $k = 0,0001 \text{ л}/\text{с}$. Фоновая концентрация $C_\phi = 0$.

График решения уравнений (2.1.7) — (2.1.8) показан на рис. 2.3

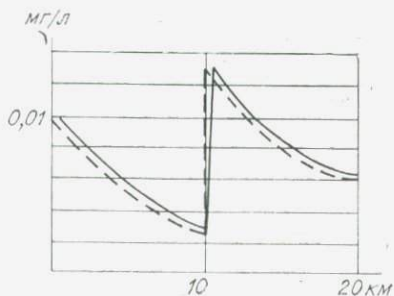


Рис. 2.3. Непрерывное (сплошная линия) и дискретно-непрерывное (пунктирная) решения.

пунктирной линией, а решение уравнения (2.1.29) — сплошной.

Запишем теперь уравнение для многослойной модели, предполагая, что источники выбросов расположены на поверхности воды:

$$\frac{dS_1}{dx} = \varphi_1(x, S_1) + \frac{1}{v_1(x)} \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \gamma_2^1 (S_2 - S_1) + \sum_{i=1}^M \chi_i(x) \frac{u_i}{l_i Q_1(x)}; \quad (2.1.30)$$

$$\frac{dS_j}{dx} = \varphi_j(x, S_j) + \frac{1}{v_j(x)} \left[\gamma_j^{j-1} (S_{j-1} - S_j) \frac{Q_{j+1}(x)}{Q_j(x)} \gamma_{j+1}^j (S_{j+1} - S_j) \right] \\ j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (2.1.31)$$

$$\frac{dS_n}{dx} = \varphi_n(x, S_n) + \frac{1}{v_n(x)} \gamma_n^{n-1} (S_{n-1} - S_n); \\ S_j(0) = S_j^\Phi, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.32)$$

Здесь S_j^Φ — фоновая концентрация в слое j для первого источника.

Распространение примесей в системе рек. Пусть рассматриваются N рек, перенумерованных по следующему принципу. Основной реке присвоим номер 0. Притоки основной реки, реки 0, будем называть притоками 1-го порядка, притоки притоков 1-го порядка назовем притоками 2-го порядка и т. д., притоки притоков $(n-1)$ -го порядка назовем притоками n -го порядка.

Перенумеруем притоки 1-го порядка, присвоив им номера 1, 2 и т. д., причем номер 1 — первому притоку, считая от устья реки 0, номер 2 — второму притоку, считая от устья реки 0 и т. д. Далее перенумеруем притоки 2-го порядка, начиная с притоков реки 1, по тому же принципу, по которому перенумерованы притоки основной реки — реки 0, а затем притоки реки 2, притоки реки 3 и т. д. Далее перенумеруем притоки 3-го порядка и т. д.

Систему рек представим графом-деревом, которое обозначим D . Вершины графа — реки с соответствующими номерами. Ребра графа показывают связи между реками. Обозначим через σ множество вершин дерева D : $\sigma = \{0, 1, 2, \dots, M\}$. Для дерева D введем характеристику $\Xi(D)$, определяющую его однозначно [Оре, 1968]. Обозначим через β_0 первую концевую вершину в σ , через $E_0 = (\sigma_0, \beta_0)$ соответствующее концевое ребро; удалив из D ребро E_0 и вершину β_0 , получим новое дерево D_0 . Для D_0 найдется концевая вершина β_1 с ребром $E_1 = (\sigma_1, \beta_1)$. Эта редукция повторяется, пока после удаления ребра $E_{M-2} = (\sigma_{M-2}, \beta_{M-2})$ не останется единственное ребро $E_{M-1} = (\sigma_{M-1}, \beta_{M-1})$, соединяющее две оставшиеся вершины. Тогда характеристика $\Xi(D) = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{M-1})$ однозначно определяется деревом D . Каждая вершина σ_i появляется в $\Xi(D)$ $(\rho(\sigma_i) - 1)$ раз (здесь $\rho(\sigma_i)$ — число ребер, инци-

дентных вершине σ_i). Вершины, не вошедшие в $\Xi(D)$, являются концевыми. Наоборот, каждая характеристика $\Xi(D)$ определяет дерево D с помощью обратного построения. Если дана $\Xi(D)$, то находится первая вершина β_1 в σ , которая не содержится в $\Xi(D)$. Это определяет ребро $E_0 = (\sigma_0, \beta_0)$. Далее удаляем вершины σ_0 из $\Xi(D)$ и β_0 из σ и продолжаем построение для остающихся чисел. Получающийся в результате граф является деревом D . Каждая река рассматривается на участке $[0, L_i]$. Точка L_i соответствует устью реки i .

Поясним схему формирования модели на примере уравнения (2.1.29). Процесс перемешивания вод основной реки и притока будем описывать так, как описывается перемешивание сточных вод. Пусть $S_j(x)$ — концентрация вещества в точке x реки j , $j = 0, 1, \dots, N-1$. В точках x_{kj} расположены источники выбросов примеси в реку j , $k = 1, 2, \dots, M_j$. Интенсивность этих источников обозначим u_{kj} . В точках y_{mj} в реку j впадает приток с номером m . Интенсивность поступления примеси с водами этого притока равна $S_m(L_m) \cdot Q_m(L_m)$. Тогда

$$\frac{dS_j}{dx} = -\frac{1}{Q_j(x)} \frac{dQ_j}{dx} S_j - \frac{1}{v_j(x)} F(x, S_j) + \sum_{k=1}^{M_j} \chi_{kj}(x) \frac{u_{kj}}{l_{kj} Q_j(x_k)} +$$

$$+ \sum_{m \in I(j)} \bar{\chi}_{mj}(x) \frac{S_m(L_m) Q_m(L_m)}{\bar{l}_m [Q_j(y_{mj}) + Q_m(L_m)]}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.1.33)$$

$$\chi_{kj}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{kj}, x_{kj} + l_{kj}], \\ 0, & x \notin [x_{kj}, x_{kj} + l_{kj}]; \end{cases}$$

$$\bar{\chi}_{mj}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [y_{mj}, y_{mj} + \bar{l}_{mj}], \\ 0, & x \notin [y_{mj}, y_{mj} + \bar{l}_{mj}], \end{cases}$$

где $I(j)$ — множество вершин графа D , смежных с вершиной i , или, иначе, множество номеров рек, впадающих в реку j . Уравнение (2.1.33) интегрируется в соответствии с алгоритмом восстановления дерева по характеристике $\Xi(D)$.

Находим первую концевую вершину в σ . В уравнении (2.1.33) для этой вершины последнее слагаемое отсутствует, и его можно проинтегрировать. Выбирая следующую вершину в соответствии с алгоритмом восстановления, получим либо снова концевую вершину, либо вершину, инцидентную тем вершинам, для которых уравнение (2.1.33) уже проинтегрировано. Иначе говоря, к моменту интегрирования уравнений динамики для очередной реки известны концентрации вещества в устьях всех ее притоков.

Камерная нестационарная модель. Рассмотрим теперь случай, когда в пределах выделенных камер внешние условия одинаковы, но могут изменяться с течением времени. Обозначим $S_i(t)$ среднюю концентрацию вещества в пределах i -й камеры; $k_i(t)$ — константу скорости распада в ячейке i в момент времени t ;

$\beta_i(t)$ — коэффициент, учитывающий отток примесей с водами i -й ячейки в ячейку, расположенную ниже по течению; $b_{ij}(t)$ — коэффициент, учитывающий приток вещества с водами ячейки j , расположенной выше по течению от ячейки i ; $I(i)$ — номера ячеек, расположенных непосредственно перед ячейкой i выше по течению; $u_i(t)$ — скорость изменения концентрации вещества в ячейке из-за внешнего поступления примеси. Тогда

$$\frac{dS_i}{dt} = -k_i(t) S_i(t) - \beta_i(t) S_i(t) + \sum_{j \in I(i)} b_{ij}(t) S_j(t) + u_i(t).$$

Если будем предполагать, что поступающее вещество мгновенно распределяется по всему участку, тогда

$$u_i(t) = g_i(t)/V_i,$$

где $g_i(t)$ — интенсивность поступления примеси в ячейку i , а V_i — объем воды в данной ячейке.

Зависимость перечисленных констант от времени отражает наличие соответствующей зависимости для температуры, расхода воды и т. п.

Практика расчетов показала, что более удовлетворительное описание процесса переноса можно получить, учитывая формирование донных осадков.

Выделим дополнительно два слоя: поверхностные воды и придонный слой, в котором формируются донные осадки. Концентрацию вещества в поверхностном и придонном слоях на участке i будем обозначать соответственно S_{i1} и S_{i2} . Динамику концентраций в каждом слое будем описывать уравнением вида (2.1.33), добавив к ним слагаемые, характеризующие перераспределение вещества между слоями.

Уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{S}_{i1} &= -k_i(t) S_{i1} - \beta_i(t) S_{i1} + \sum_{j \in I(i)} b_{ij} S_{j1} - \gamma_i(t) S_{i1} + c_i(t) S_{i2} + u_i; \\ \dot{S}_{i2} &= -k_i^d(t) S_{i2} - \beta_i^d(t) S_{i2} + \sum_{j \in I(i)} b_{ij}^d(t) S_{j2} - \gamma_i^d(t) S_{i2} + c_i^d(t) S_{i1}, \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Коэффициенты k_i^d , β_i^d , b_{ij}^d имеют такой же смысл, что и в модели (2.1.33). Остальные коэффициенты учитывают изменения концентрации: $\gamma_i(t)$ — в поверхностном слое из-за переноса вещества в придонный слой в момент времени t ; $\gamma_i^d(t)$ — в придонном слое из-за переноса части вещества в поверхностный слой в момент времени t ; $c_i(t)$ — в поверхностном слое за счет поступления вещества из придонного слоя; $c_i^d(t)$ — в придонном слое за счет поступления вещества из поверхностного слоя. Отметим, что между коэффициентами γ_i и c_i^d имеется связь. Речь идет о переносе вещества из поверхностного в придонный слой, и, естественно, масса вещества, ушедшего из поверхностного слоя, совпадает

с массой вещества, пришедшего в придонный слой. Однако из-за различия объемов придонного и поверхностного слоев соответствующее изменение концентрации будет разным. Коэффициент c_i^d можно выразить через γ_i следующим образом: $c_i^d = V_i \gamma_i / V_i^d$. Здесь V_i и V_i^d — объемы поверхностного и придонного слоев. Аналогичное соотношение имеет место и между коэффициентами c_i и γ_i^d , а именно: $\gamma_i^d = V_i c_i / V_i^d$. Коэффициенты β_i , β_i^d , b_{ij} , γ_i , c_i определяются по формулам [Дамежек, 1984]

$$\beta_i^d = \frac{p_i^d v_i^d}{V_i^d}, \quad \beta_i = \frac{p_i v_i}{V_i}, \quad b_{ij} = \frac{p_j v_j}{V_i},$$

$$\gamma_i = \frac{\hat{p}_i^d v_i^d}{V_i}, \quad c_i = \frac{\hat{p}_i v_i}{V_i},$$

где \hat{p}_i^d — площадь дна i -й ячейки; \hat{v}_i^d — скорость поступления загрязняющего вещества из придонного слоя в поверхностный; \hat{v}_i^d — скорость оседания примеси из поверхностного слоя в придонный.

При построении камерной многослойной модели состояние воды в каждой ячейке будем характеризовать вектором, компонентами которого являются значения выбранных показателей состояния. Обозначим этот вектор $S_{ij}(t)$, где j указывает на номер выделенного участка по длине реки, а i — на номер слоя в этом участке. Индекс j изменяется от 0 до N_T . Уравнения модели имеют вид

$$\frac{dS_{0j}}{dt} = f_{0j}(S_{0j}) - \beta_{0j}(t) S_{0j} + \sum_{s \in I(0,j)} b_{0j}^s(t) S_{0s} - \gamma_{1j}^0(t) S_{0j} + \gamma_{0j}^1(t) S_{1j} + \frac{g_{0j}(t)}{V_{0j}}; \quad (2.1.34)$$

$$\frac{dS_{ij}}{dt} = f_{ij}(S_{ij}) - \beta_{ij}(t) S_{ij} + \sum_{s \in I(i,j)} b_{ij}^s(t) S_{is} - (\gamma_{(i-1)j}^i(t) + \gamma_{(i+1)j}^i(t)) S_{ij} + \gamma_{ij}^{(i-1)}(t) S_{(i-1)j} + \gamma_{ij}^{i+1}(t) S_{(i+1)j} + \frac{g_{ij}(t)}{V_{ij}},$$

$$i = 1, 2, \dots, N_B - 1; \quad (2.1.35)$$

$$\frac{dS_{NBj}}{dt} = f_{NBj}(S_{NBj}) - \beta_{NBj}(t) S_{NBj} + \sum_{s \in I(N_B j)} b_{NBj}^s(t) S_{NBs} + \gamma_{NBj}^{(N_B-1)}(t) S_{(N_B-1)j} + \gamma_{(N_B-1)j}^{N_B}(t) S_{NBj} + \frac{g_{NBj}(t)}{V_{NBj}}, \quad j = 0, 1, \dots, N_T, \quad (2.1.36)$$

где β_{ij} — коэффициент, учитывающий отток примеси с водами ячейки ij в ячейку, расположенную ниже по течению; $I(i, j)$ —

номера участков, расположенных выше по течению реки, таких участков может быть несколько, если река рассматривается вместе с притоками; b_{ij}^{ks} — коэффициент, учитывающий приток вещества с водами ячейки, расположенной перед ячейкой ij выше по течению; V_{ij} — объем ячейки ij ; g_{ij} — интенсивность поступления примеси в ячейку ij ; f_{ij} — функции, учитывающие процесс распада примесей и взаимодействия их между собой, $i = 0, 1, \dots, N_B$, $j = 0, 1, \dots, N_T$.

Камерная модель предназначена для прогнозирования динамики загрязнения при изменяющихся во времени внешних условиях и может использоваться для выявления тенденций в изменении загрязнения реки при долгосрочных прогнозах интенсивностей функционирования источников выбросов.

Уравнения (2.1.34) — (2.1.36), (2.1.25) — (2.1.28) и (2.1.29) описывают динамику распространения одного вещества. Аналогично им можно записать уравнения, описывающие динамику совокупности веществ. При этом показатель состояния S_{ij} нужно считать вектором, вектор-функции f_{ij} описывают динамику взаимодействия веществ между собой, все остальные коэффициенты — диагональные матрицы.

Использование перечисленных математических моделей связано с решением различных задач, которые можно разделить на три крупные группы. Это задачи, отвечающие в данном случае на следующие вопросы.

1. Каково будет качество воды, если будут реализованы те или иные внешние условия: температура воды, выбросы вещества и т. д.?

2. Как нужно распорядиться выбором тех или иных управляемых параметров, например интенсивностей выбросов, с тем чтобы реализовать заданные условия?

3. В каких пределах могут изменяться те или иные параметры модели, при соблюдении которых обеспечивается приемлемое качество воды?

На первый вопрос отвечает группа задач прогнозирования качества воды. С ответом на второй и третий вопросы связаны задачи оптимизации и нормирования соответственно.

Подсистема водных ресурсов в СЭЭР «Регион». Задача прогнозирования состоит в получении общей оценки влияния хозяйственной деятельности в регионе на экосистему оз. Байкал и включает в себя следующие подзадачи: прогнозирование сезонного распределения загрязнения в реках бассейна оз. Байкал в зависимости от гидрологического режима рек; прогнозирование качества воды в реках в зависимости от хозяйственной деятельности в регионе при долгосрочных периодах планирования; прогнозирование динамики примеси вблизи источника выброса; прогнозирование поступления и распределения примеси по акватории озера; прогнозирование влияния экономики на экосистему озера Байкал.

При решении первой подзадачи предполагается, что промежуток времени сравнительно небольшой, скорость поступления за-

грязняющих веществ в реку и гидрологические характеристики реки практически не меняются во времени, т. е. постоянны. Цель — получить схемы распределения загрязнения вдоль русла реки при заданных интенсивностях выбросов. Для этого наиболее целесообразно использовать стационарную по времени модель распространения примеси вдоль русла реки.

Решение второй подзадачи направлено на получение общей оценки загрязнения воды, соответствующей долгосрочному прогнозу (10—20 лет) поступления примеси. При этом внутригодовая динамика гидрологического режима принимается в соответствии со средним многолетним, а межгодовые изменения гидрологического режима и интенсивности поступления примеси считаются заданными. Таким образом, для больших периодов времени целесообразно использовать камерные нестационарные модели.

При решении третьей подзадачи используется более подробная модель распространения примеси на достаточно малом участке и небольшом промежутке времени. Таковой является модель распространения примеси в потоке, записанная в частных производных.

Для решения четвертой подзадачи необходимо знать концентрацию примеси в устье реки. Она может быть получена с помощью модели переноса примеси вдоль русла. Дальнейшее решение можно получить с помощью модели переноса примеси по акватории озера.

Для решения пятой подзадачи используется модель возмущений экосистемы озера Байкал, описывающая влияние загрязнения на отдельные элементы экосистемы озера.

Поясним взаимосвязь различных моделей этой системы при решении одной из наиболее крупных задач — общей оценки влияния хозяйственной деятельности в регионе на экосистему оз. Байкал.

Первая группа моделей дает количественную, вторая — качественную характеристику водных ресурсов. Для Байкальского региона более остро стоит проблема качества воды. Поэтому на первое место выдвигаются модели второй группы.

Таким образом, группа моделей, описывающих динамику качества воды, состоит из следующих блоков:

1) стационарной модели распространения примеси в реке, предназначенной для описания динамики загрязнения вдоль русла реки при стационарных внешних условиях, которые выполняются для небольших промежутков времени;

2) камерной нестационарной модели распространения примеси вдоль русла реки, позволяющей получать динамику распределения примеси вдоль русла реки для больших промежутков времени;

3) распределенной модели рассеивания примеси вдоль русла реки, предназначенной для более точного представления динамики загрязнения вблизи источника выброса, для расчета зоны перемешивания и створа достаточного перемешивания;

- 4) модели переноса вещества в озере, предназначенной для описания динамики распространения примеси по акватории озера;
- 5) модели антропогенного возмущения экосистемы озера Байкал, описывающей динамику основных компонент экосистемы озера под воздействием экономического развития региона.

Подсистема «Водные ресурсы» работает следующим образом. Выбирается конкретный сценарий развития экономики региона. Требуется оценить воздействие этого сценария на водные ресурсы. Из модели «Регион» получаем информацию о поступлении загрязнений в водную среду в результате реализации выбранного сценария. Затем решается задача дезагрегирования. Информация о поступлении загрязнения, полученная из модели «Регион» с привлечением дополнительной информации о расположении источников выбросов в бассейнах рек, распределяется согласно плотности промышленных предприятий. Таким образом, получаем распределение поступления примесей по руслу реки. Далее по моделям 1—5 решаются различные задачи: прогнозирования, внутригодового распределения загрязнения в реках бассейна озера Байкал, распространения примесей в реках в зависимости от стока (расхода воды) для различных по водности лет, прогнозирования качества воды в реках на 10—20 лет вперед, прогнозирования поступления примеси с реками в озеро, распределения этой примеси по акватории озера, оценки влияния выбранного сценария развития региона на экосистему озера Байкал.

§ 2. КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА СОСТОЯНИЕ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ В РЕГИОНЕ

Весь комплекс моделей «Регион» ориентирован прежде всего на оценку влияния хозяйственной деятельности на природные ресурсы при формировании долгосрочных программ развития региона. Варианты программ развития могут быть подготовлены экспертами вне комплекса моделей либо получены путем решения оптимизационных задач по заданному критерию. Здесь мы проиллюстрируем первый случай — анализ готовых программ развития региона.

Совокупность информационных единиц, характеризующих программу развития региона в терминах моделей, будем называть сценарием развития региона.

Формирование долгосрочных программ развития с использованием ИПК «Регион» распадается на следующие три крупных этапа: разработку и обоснование различных вариантов хозяйственной деятельности в регионе; формирование сценариев и их анализ с использованием моделей; выбор варианта, подлежащего реализации.

Схему анализа сценариев развития поясним на примере Байкальского региона [Взаимодействие..., 1981]. Дадим краткое описание сценариев развития [Батурина и др., 1984].

Сценарии развития. За исходную базу была принята сложившаяся хозяйственная структура на момент завершения десятой пятилетки (отчетные данные за 1980 г.). Сценарии развития строились как с учетом интересов и структуры отдельных районов, так и региона в целом. В качестве основного варианта развития хозяйственного комплекса любого из выделенных районов принято инерционное развитие, основанное на перенесении ранее сложившихся тенденций с учетом коррективов, вносимых условиями одиннадцатой пятилетки. Рассмотрим содержание сценариев для отдельных районов региона.

Сценарии для района р. Верх. Ангара. Для данного района предусматриваются различные варианты развития добывающей отрасли. Варианты учитывают строительство Холодненского ГОКа. Ряд сценариев предусматривает создание одновременно с Холодненским Орехитканского ГОКа и освоение месторождения сыпхритов (алюминиево-калиевое сырье). Кроме того, варианты развития отличаются объемами затрат на капитальное строительство в связи с различными масштабами и темпами сооружения БАМа.

Сценарии для района р. Баргузин. В основном хозяйство района бассейна р. Баргузин ориентировано на освоение сельскохозяйственных угодий долины реки в качестве базы для обеспечения сельскохозяйственной продукцией зоны БАМа. Малозначительные отличия вариантов заключаются в различных масштабах организации ремонта эксплуатируемых в районе машин и оборудования, занятых в сельскохозяйственном производстве, лесопереработке и лесоэксплуатации.

Сценарии для района р. Селенга. Эти варианты различаются структурой добывающих предприятий, т. е. структурой освоения месторождений минеральных ресурсов. Сценарии учитывают создание Ошурковского ГОКа на месторождении апатитов, Холбольджинского и Тунгуйского угольных разрезов. Кроме того, в сценариях предусматривается создание Черемшанского ГОКа на месторождении кварцитов, а также рудников Наранский (флюориты), Ойпогорский (молибден) и Татарский ключ (известняки). Сценарии различаются и темпами развития второй очереди Гусинозерской ТЭС, ТЭС на тунгуйских углях, Улап-Удэнской ТЭС на холбольджинских углях.

Некоторые различия между сценариями связаны с разными масштабами и структурами лесопереработки и промышленности стройматериалов.

Сценарии для района Южного Байкала. Структура хозяйственного комплекса Южного Байкала определяется в основном целлюлозно-бумажной промышленностью и транспортом. На перспективу каких-либо коренных изменений не предусматривается, поэтому во всех сценариях он имеет идентичные тенденции развития.

Результаты расчетов. В результате расчетов по модели верхнего уровня наряду с другими показателями формируется общая

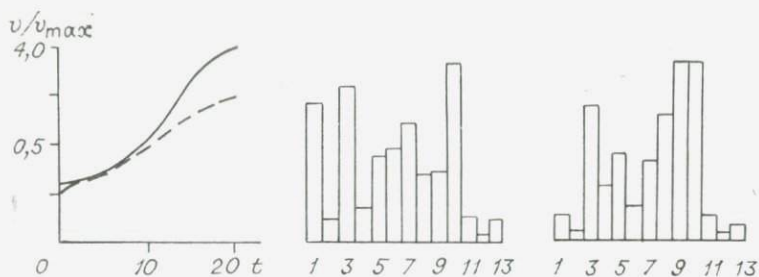


Рис. 2.4. Общие характеристики сценариев развития региона.

a — выпуски продукции, нормированные относительно своего максимального значения (сплошная линия — «активный» сценарий, пунктирная — «нейтральный»); *b* и *в* — диаграммы, характеризующие структуру производства по 13 отраслям для «активного» и «нейтрального» сценариев соответственно.

оценка загрязнения, а также информация об объемах поступления примесей в водную среду, которые определяются как интенсивностью производства продукции, так и процессами взаимодействия и состояния таких ресурсов, как лес и почва. На основе дополнительной информации о размещении производства эти объемы распределяются между конкретными источниками сбросов.

С помощью модели (2.1.6) аналогичным путем можно оценить поступление веществ в водоемы по расширенному набору показателей. В случае проведения расчетов без учета сезонной динамики входная информация для модели возмущения экосистемы Байкала формируется непосредственно по данным модели верхнего уровня. Для расчета темпов поступления примесей в озеро Байкал с водами рек в зависимости от сезонных колебаний расхода воды и других внешних характеристик используются модели (2.1.30) — (2.1.32) и (2.1.33). На основе расчетов по модели антропогенных возмущений экосистемы оз. Байкал оценивается влияние заданного развития отраслей на экосистему озера Байкал, кроме того, степень загрязнения речной и озерной воды.

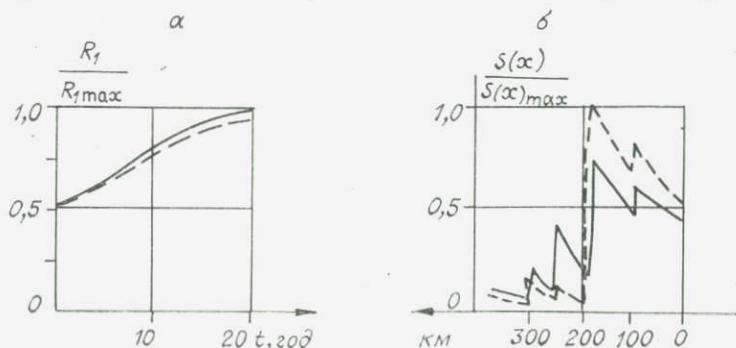


Рис. 2.5. Характеристики загрязнения воды: приведенное загрязнение воды в регионе (*a*) и распределение примеси вдоль русла р. Селенги в летние месяцы (*б*).

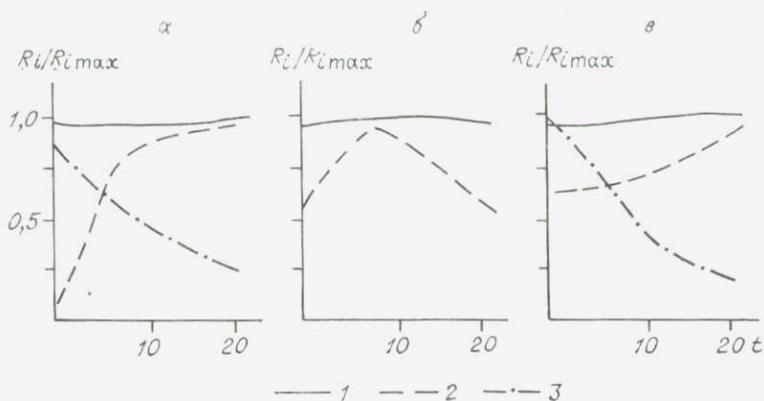


Рис. 2.6. Характеристики состояния экосистемы озера.

a — концентрации (1 — биогенных элементов, 2 — нефтепродуктов, 3 — органического вещества); *b* — биомасса (1 — микроорганизмов, 2 — зообентоса); *v* — численность (1 — омуля, 2 — голомянки, 3 — желтокрылки). Показатели состояния нормированы относительно своих максимальных значений.

В качестве иллюстрации рассмотрим два сценария: «активный», ориентированный на преимущественное развитие добывающей промышленности, и «нейтральный», предусматривающий преимущественное развитие легкой промышленности и машиностроения (рис. 2.4). Оба сценария не предполагают дополнительных капитальных вложений на развитие очистных сооружений и увеличение степени очистки стоков. Вся исходная информация о модели верхнего уровня содержится в книге «Взаимодействие природы и хозяйства Байкальского региона» [1981].

На рисунке 2.5 приведены результаты расчетов по модели верхнего уровня. На рисунке 2.5, *б* показано распределение примесей вдоль русла р. Селенги для летнего периода. На рис. 2.6 показаны некоторые характеристики состояния экосистемы озера, соответствующие данным сценариям.

Для оценки влияния хозяйственной деятельности на водные ресурсы модели подсистемы водных ресурсов могут быть использованы самостоятельно, без взаимодействия с моделью верхнего уровня. В этом случае необходима информация об источниках загрязнения. Продemonстрируем

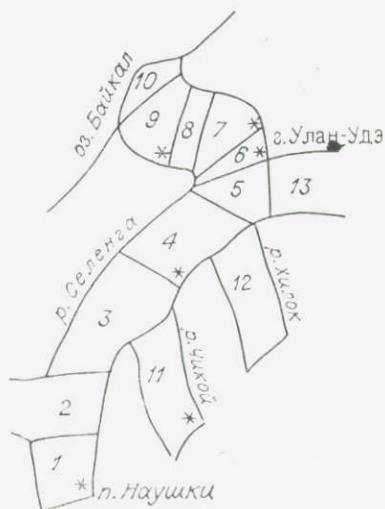


Рис. 2.7. Разбиение русла р. Селенги на районы. Звездочками помечены места сброса загрязнений.

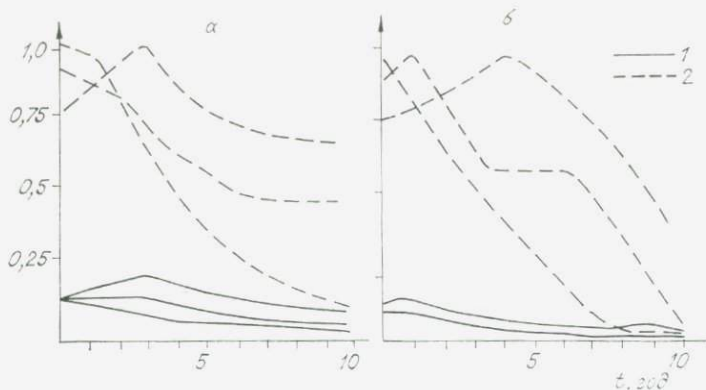


Рис. 2.8. Нормированные на свои максимальные значения концентрации нефтепродуктов (а) и фенолов (б) в р. Селенге летом (1) и зимой (2) при 1-м, 2-м, 3-м сценариях в 9-й ячейке.

использование моделей подсистемы для оценки влияния различных сценариев развития экономики на качество вод р. Селенги.

Рассмотрим вначале камерную однослойную модель (2.1.34). Участок реки от пос. Наушки до устья разделим на 13 районов (рис. 2.7). Так как биохимические процессы, происходящие в воде, сильно зависят от температуры, расхода воды, различаются по сезонам, то целесообразно рассматривать два сезона — летний (апрель — октябрь) и зимний (ноябрь — март). Первым месяцем будем считать апрель, двенадцатым — март. В качестве загрязнителей выбраны нефтепродукты и фенолы. Константы распада этих веществ выбраны соответственно в $0,07 \text{ сут}^{-1}$ и $0,8 \text{ сут}^{-1}$ в летний период и $0,005 \text{ сут}^{-1}$ и $0,1 \text{ сут}^{-1}$ в зимний.

Расчеты по данной модели проводились по трем сценариям, различающимся по степени воздействия на водную среду: 1 — минимальное, 2 — среднее, близкое к реальному, 3 — максимальное. Сценарий в данном случае задает интенсивность источников выбросов и период времени [Кириенко и др., 1982]. Результаты расчетов — прогнозные оценки качества вод р. Селенги на 10 лет в 9-й ячейке (рис. 2.8) — в целом указывают на тенденцию к снижению уровня загрязнения в р. Селенге. Однако для зимнего и летнего периодов эти показатели заметно различаются, что объясняется разной самоочищающей способностью водотока по сезонам года.

§ 3. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ И НОРМИРОВАНИЯ АНТРОПОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Проблема управления качеством водных ресурсов. Интенсивное развитие промышленности и сельского хозяйства, рост населенных пунктов и городов приводят к резкому увеличению водопотребления и оказывают существенное влияние на состоя-

ние водных ресурсов. Действие антропогенных факторов на природные воды приводит к изменениям характеристик гидрологического режима водных объектов и качества природных вод вследствие их истощения и загрязнения [Авакян и др., 1977; Шикломанов, 1979]. Поэтому увеличение антропогенной нагрузки на водные объекты не может быть бесконтрольным и должно тщательно планироваться.

Вопросы управления качеством поверхностных вод интенсивно начали рассматриваться лишь в последние 10—15 лет [Аппель, Кумсиашвили, 1978]. Сейчас уже имеются модели, предназначенные как для планирования водоохраных мероприятий с учетом использования и регулирования стока (см. гл. 4), так и для прогнозирования качества водных ресурсов [Рациональное использование..., 1981].

Остановимся на рассмотрении некоторых проблем управления качеством водных ресурсов в речных бассейнах, расположенных в регионах с особым режимом природопользования. Эти регионы от обычных отличаются более жесткими природоохранными требованиями без исключения их природных ресурсов из хозяйственного оборота [Викулов, 1982]. К таким регионам относится и Байкальский. Проблема распределения водных ресурсов здесь не является определяющей, поэтому сосредоточим внимание лишь на вопросах качества.

Качество воды определяется несколькими процессами: самоочищения, формирования стока, антропогенного загрязнения из различных источников выбросов вдоль русел рек и в результате выноса загрязнений с поверхности водосбора. Наиболее «гибкими» параметрами, позволяющими управлять качеством воды, являются интенсивности функционирования источников загрязнения. В процессе работы предприятия или очистных сооружений на формировании этого показателя сказывается большое число труднорегулируемых факторов. Фактически интенсивность выбросов может резко меняться в течение коротких промежутков времени. Поэтому в практике планирования принят другой показатель — предельно допустимые сбросы (ПДС), который нужно рассматривать как основное управляющее воздействие в процессе формирования качества воды.

Задача планирования с учетом водоохраных мероприятий содержит, в отличие от обычной, ряд дополнительных ограничений, отражающих различные требования, направленные на сохранение водных ресурсов. Содержание загрязняющих веществ в водоемах регламентируется их предельно допустимыми концентрациями (ПДК) [Каминский, 1980; Красовский и др., 1982]. При этом предполагается, что загрязнение в пределах ПДК допустимо и не приводит к существенным отрицательным последствиям*.

* Существуют и другие подходы, отвергающие использование ПДК в качестве подобных критериев. Мы не будем останавливаться на их рассмотрении. Отметим лишь, что предлагаемый здесь подход применим и в таких случаях.

Сложившаяся практика планирования такова. Для каждого источника разрабатываются ПДС, при соблюдении которых концентрации загрязняющих веществ в водоеме не превышают ПДК. Дальнейшее планирование на предприятиях осуществляется затем с учетом дополнительных ограничений на интенсивность выбросов загрязнений. Такой подход оправдан, так как он существенно упрощает процедуру разработки плана. Непосредственно в процессе планирования производства продукции должно быть оценено влияние выбрасываемых веществ на состояние водных ресурсов и требуемые ограничения учтены на этапе разработки ПДС. Таким образом, осуществляется декомпозиция исходной сложной задачи планирования с учетом состояния водных ресурсов на три более простые задачи: разработка ПДК, разработка ПДС, планирование с ограничениями на интенсивность выбросов.

Рассмотрим более подробно соотношение между собой двух последних задач. В случае, когда на данном водоеме или водотоке находится всего один источник выбросов, при такой декомпозиции не возникает неоднозначных решений. Ситуация меняется, если имеется несколько источников выбросов. Поясним ее на примере рек. Одним из параметров для расчета ПДС является фоновая концентрация, т. е. концентрация загрязнения выше сброса сточных вод данного источника. Она определяется числом и интенсивностью аналогичных источников выбросов, расположенных выше по течению реки. Простое распространение схемы декомпозиции приводит к тому, что каждому источнику выбросов разрешается загрязнить реку до уровня ПДК. В густонаселенных и экономически развитых бассейнах рек фоновая концентрация для источников, расположенных в нижнем течении реки, оказывается близкой к ПДК, что неизбежно приводит к установлению очень жестких норм выбросов для данного источника на фоне относительно свободных норм для источников выбросов в верхнем течении реки. Таким образом, ПДС в бассейне одной реки связаны между собой и конкретное их сочетание определяет различные условия производства для промышленных предприятий, находящихся в этом бассейне. Самоочищающая способность реки — это своеобразный природный ресурс, которым коллективно пользуются все промышленные предприятия и населенные пункты в бассейне реки. Следовательно, и распределять этот ресурс должен в соответствии с экономическими критериями. Например, из условия максимума суммарного валового выпуска продукции в бассейне реки либо какого-нибудь другого критерия экономической эффективности. Введение такого критерия при решении задачи расчета ПДС более правильно отражает условия задачи планирования производства с учетом качества водных ресурсов.

Таким образом, задача расчета ПДС должна решаться в целом для всего бассейна реки в соответствии с критериями экономической эффективности производства в регионе. С этой точки зрения более целесообразно рассчитывать ПДС в комплексе для всего бассейна реки с учетом прогнозируемых расходов воды в

ней и пересчитывать их в оперативном режиме, что позволит фактически управлять качеством воды, создавая, например, благоприятные условия для нереста рыб или более благоприятные условия производства на том или ином предприятии и т. д.

Таким образом, речь здесь идет не о фиксированных на продолжительное время нормативах сбросов, а о параметрах единой системы управления качеством воды в бассейне, позволяющих гибко реагировать на изменение всех условий функционирования системы. На некоторых аспектах разработки программно-математического обеспечения системы управления качеством воды мы остановимся в § 4 этой главы.

Комплексный расчет ПДС. Рассмотрим наиболее простой вариант комплексного расчета ПДС некоторого вещества для источников выбросов, расположенных в бассейне одной реки.

Пусть вдоль русла реки i имеется M источников выбросов с номерами $0, 1, \dots, M-1$, расположенных в точках l_0, l_1, \dots, l_{M-1} , причем источник выбросов с номером 0 находится в верхнем течении реки, а с номером $M-1$ — в нижнем. Обозначим ω_i ПДС для i -го источника; q_i, Q_i — расход сточных вод и реки в месте выпуска сточных вод соответственно; C_i, S_i — концентрацию нормируемого вещества в сточных водах и речной воде выше выпуска сточных вод; $P_i(S_i, Q_i, C_i, q_i)$ — концентрацию вещества в конце зоны перемешивания i -го источника; m_i — длину зоны перемешивания источника i . Тогда на участке $[x_i + l_i, x_{i+1}]$ концентрация вещества в реке $S(x)$ вычисляется по формуле [Основы..., 1982]

$$S(x) = \frac{\exp\left(-\frac{k_i}{w_i}(x - x_i - l_i)\right)}{1 + \frac{a_i(x - x_i - l_i)}{q_i + Q_i}} P_i(S_i, Q_i, C_i, q_i),$$

где k_i — константа скорости ассимиляции вещества; w_i — средняя скорость потока на участке $[x_i + l_i, x_{i+1}]$; a_i — коэффициент, учитывающий приток расхода воды на участке $[x_i + l_i, x_{i+1}]$. Обозначим $\alpha_i = \frac{a_i(x_{i+1} - x_i - l_i)}{q_i + Q_i}$, $\beta_i = \frac{k_i}{w_i}(x_{i+1} - x_i - l_i)$. Тогда концентрация вещества выше выпуска сточных вод $(i+1)$ -го источника подсчитывается по формуле

$$S_{i+1} = \frac{\exp(-\beta_i)}{1 + \alpha_i} P_i(S_i, Q_i, C_i, q_i), \quad i = 0, 1, \dots, M-1; \quad (2.3.1)$$

$$S_0 = S_\phi. \quad (2.3.2)$$

Здесь S_ϕ — фоновая концентрация, т. е. концентрация вещества выше выпуска сточных вод источника выбросов в верхнем течении реки.

Концентрация C_i связана с ПДС i -го источника соотношением $C_i = \omega_i/q_i$. Из условия неперевышения ПДК в конце зон переме-

плавания каждого из источников получаем ограничения на параметры ω_i

$$P_i \left(S_i, Q_i, \frac{\omega_i}{q_i}, q_i \right) \leq \text{ПДК}, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (2.3.3)$$

которые в данном случае обеспечивают соблюдение требований к качеству воды во всех точках реки.

Пусть функция $\kappa(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M-1})$ характеризует предпочтительность одного набора норм ω_i перед другим, а ω_i^{\min} — минимально возможные интенсивности источников сбросов, $i = 0, 1, \dots, M-1$. Задача расчета ПДС состоит в следующем: требуется максимизировать функцию $\kappa(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M-1})$ при условиях

$$P_i \left(S_i, Q_i, \frac{\omega_i}{q_i}, q_i \right) \leq \text{ПДК}, \quad \omega_i^{\min} \leq \omega_i; \quad (2.3.4)$$

$$S_{i+1} = \frac{\exp(-\beta_i)}{1 + \alpha_i} P_i \left(S_i, Q_i, \frac{\omega_i}{q_i}, q_i \right), \quad S_0 = S_\Phi, \quad i = 0, 1, \dots, M-1.$$

Для получения конкретной расчетной схемы нужно построить функции κ .

Простое разбавление. Для малых рек концентрацию ниже выпуска сточных вод приближенно можно подсчитать по формуле полного перемешивания [Методические основы..., 1981]. Тогда

$$P_i(S_i, Q_i, C_i, q_i) = \frac{q_i}{q_i + Q_i} C_i + \frac{Q_i}{q_i + Q_i} S_i \quad (2.3.5)$$

и формула (2.3.1) принимает вид

$$S_{i+1} = \gamma_i q_i S_i + \gamma_i Q_i S_i, \quad \gamma_i = \frac{\exp(-\beta_i)}{(1 + \alpha_i)(q_i + Q_i)},$$

или

$$S_{i+1} = \gamma_i \omega_i + \gamma_i Q_i S_i, \quad i = 0, 1, \dots, M-2.$$

Отсюда получаем

$$S_{i+1} = \gamma_i \omega_i + \sum_{h=0}^{i-1} \left(\prod_{j=h}^i \gamma_j \right) \left(\prod_{j=h+1}^i Q_j \right) \omega_h + \left(\prod_{j=0}^i \gamma_j Q_j \right) C_\Phi.$$

Здесь символом $\prod_{j=1}^i \gamma_j$ обозначено произведение $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i$. Теперь в явном виде можно выписать ограничения (2.3.3). Имеем

$$\frac{\omega_0}{q_0 + Q_0} + \frac{Q_0}{q_0 + Q_0} C_\Phi \leq \text{ПДК}; \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i+1}}{q_{i+1} + Q_{i+1}} + \frac{Q_{i+1}}{q_{i+1} + Q_{i+1}} \left[\gamma_i \omega_i + \sum_{h=0}^{i-1} \left(\prod_{j=h}^i \gamma_j \right) \left(\prod_{j=h+1}^i Q_j \right) \omega_h + \right. \\ \left. + \left(\prod_{j=0}^h \gamma_j Q_j \right) C_\Phi \right] \leq \text{ПДК}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Определим более конкретно критерий κ . Пусть v_i — максимально возможное при данной технологии производства и очистки стоков загрязнение, приходящееся на каждую тысячу рублей произведенной продукции в пункте i в единицу времени. Тогда $v_i = \omega_i / \nu_i$ и суммарный валовой выпуск продукции в бассейне реки в единицу времени равен

$$\kappa(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M-1}) = \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\omega_i}{\nu_i}. \quad (2.3.8)$$

Отметим, что данный вариант критерия не единственный. Можно определять ПДС исходя из условия минимума затрат на создание соответствующих очистных сооружений или каких-либо других целей нормирования.

Таким образом, в рассматриваемом случае задача расчета ПДС представляет собой задачу линейного программирования максимизации функции (2.3.8) при ограничениях (2.3.4), (2.3.6), (2.3.7).

Расчет перемешивания на основе уравнения турбулентной диффузии. Применение формулы (2.3.5) правомерно лишь для малых рек, и то в достаточно ограниченном числе случаев. Если, например, требования к качеству воды должны быть выполнены не в конце зоны перемешивания, а в некотором контрольном створе, расположенном ближе к источнику выбросов, то указанная в предыдущем пункте схема расчета ПДС оказывается неприменимой. Рассмотрим ее модификацию для этого случая. Пусть требуется установить нормы сбросов таким образом, чтобы максимальная концентрация в контрольном створе $x_i^{\text{контр}} \in (x_i, x_i + l_i)$ i -го источника не превышала ПДК. Процесс перемешивания будем описывать с помощью уравнения турбулентной диффузии (2.1.6).

Рассмотрим участок реки $[x_i, x_i + l_i]$ в пределах зоны достаточно полного перемешивания. Пусть S_i — концентрация вещества в речной воде выше места выпуска сточных вод. При отсутствии выбросов распределение концентрации на участке $[x, x_i + l_i]$ будет иметь вид

$$\widehat{S}_i(x, y, z) = \frac{\exp\left(-\frac{k_i}{w_i}(x - x_i)\right)}{1 + \frac{a_i(x - x_i)}{Q_i}} S_i.$$

Если интенсивность источника равна ω_i , то распределение концентрации будет иметь вид (см. формулу (2.1.23))

$$S_i(x, y, z, \omega_i, \widehat{S}_i) = \widehat{S}_i(x, y, z) + \frac{\omega_i}{(x - x_i) \sqrt{D_x D_z}} \frac{\exp\left(-\frac{y^2 \omega_i}{4D_z(x - x_i)} - \frac{z^2 \omega_i}{4D_z(x - x_i)}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{B \sqrt{\omega_i}}{4 \sqrt{D_z}(x - x_i)}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{A \sqrt{\omega_i}}{4 \sqrt{D_y}(x - x_i)}\right)}. \quad (2.3.9)$$

Максимальная концентрация \bar{S}_i в контрольном створе будет равна

$$\bar{S}_i(\omega_i, \hat{S}) = \max_{(y,z) \in \Omega} S_i(x_i^{\text{контр}}, y, z, \omega_i).$$

Тогда параметр ω_i должен удовлетворять условию

$$\bar{S}_i(\omega_i, \hat{S}_i) \leq \text{ПДК}. \quad (2.3.10)$$

Концентрация S_i , а следовательно, и \hat{S}_i , зависит от интенсивностей источников выбросов, расположенных выше источника i . Эту зависимость можно описать следующим образом. В пределах зоны перемешивания распределение будем описывать по формуле (2.3.9), с учетом пространственного распределения, а за пределами зоны перемешивания — по более простой формуле для средней по сечению концентрации:

$$S_{\text{ср}}(x) = \frac{\exp\left(-\frac{k_i}{w_i}(x - x_i + l_i)\right)}{1 + \frac{a_i(x - x_i + l_i)}{q_i + Q_i}} S_{\text{ср}}^i(x_i + l_i, \omega_i, \hat{S}_i).$$

Тогда, с учетом ранее введенных обозначений, будем иметь

$$S_{i+1} = \frac{\exp(-\beta_i)}{1 + \alpha_i} S_{\text{ср}}^i(x_i + l_i, \omega_i, \hat{S}_i);$$

$$S_{\text{ср}}^i(x, \omega_i, \hat{S}_i) = \hat{S}_i + \frac{\omega_i}{(x - x_i) \sqrt{D_x D_z}} L_i;$$

$$L_i = \int_{\Omega} \frac{\exp\left(-\frac{y^2 w_i}{4 D_y l_i} - \frac{z^2 w_i}{4 D_z l_i}\right)}{\text{erf}\left(\frac{B \sqrt{w_i}}{4 \sqrt{D_z l_i}}\right) \text{erf}\left(\frac{H \sqrt{w_i}}{4 \sqrt{D_y l_i}}\right)} dy dz.$$

Таким образом, имеем

$$S_{i+1} = \frac{\exp(-\beta)}{1 + \alpha_i} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{k_i}{w_i} l_i\right)}{1 + \frac{a_i l_i}{Q_i}} S_i + \frac{\omega_i}{l_i \sqrt{D_x D_z}} L_i; \quad (2.3.11)$$

$$S_0 = S_{\Phi}, \quad i = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (2.3.12)$$

Из неравенства (2.3.10) получим

$$\frac{\exp\left(-\frac{k_i}{w_i} l_i\right)}{1 + \frac{a_i l_i}{Q_i}} S_i + \frac{\omega_i}{l_i \sqrt{D_x D_z}} \leq \text{ПДК},$$

$$\text{где } \hat{L}_i = \max_{(y,z) \in \Omega} \frac{\exp\left(-\frac{y^2 w_i}{4D_y \gamma_i} - \frac{z^2 w_i}{4D_z \gamma_i}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{B\sqrt{w_i}}{4\sqrt{D_z \gamma_i}}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{H\sqrt{w_i}}{4\sqrt{D_y \gamma_i}}\right)}; \quad \bar{\gamma}_i = x_i^{\text{контр}} - x_i.$$

Далее, аналогично предыдущему случаю, задача сводится к задаче линейного программирования. Аналогично можно получить расчетную схему и для других вариантов расположения источника выбросов.

Нормирование в системе рек. В предыдущем пункте при более детальном описании процесса перемешивания примеси в окрестности источников выбросов его описание на участках между источниками выбросов остается достаточно упрощенным. Задача может быть решена более точно, если и на этих участках использовать уравнение турбулентной диффузии. Однако алгоритм ее решения окажется очень сложным, особенно если рассматривать реку вместе с притоками. Более целесообразно использовать для этой цели модели вида (2.1.30) — (2.1.32) или (2.1.33) для системы рек.

В § 1 настоящей главы уравнения записаны для одного вещества. Аналогично можно записать уравнения для набора веществ с учетом их взаимодействия между собой. Пусть качество воды характеризуется набором из m показателей S_1, S_2, \dots, S_m и в водоем поступает m загрязняющих веществ из M источников с интенсивностью $u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{km}, k = 0, 1, \dots, M - 1$. Через S будем обозначать вектор с компонентами S_1, S_2, \dots, S_m , а через u_k — вектор с компонентами $u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{km}$. Запишем аналог уравнения (2.1.29). В данном случае $F(x, S)$ — вектор-функция, описывающая процесс ассимиляции веществ с учетом их взаимодействия. Вместо уравнений (2.1.29) будем иметь систему

$$\frac{dS_i}{dx} = -\frac{1}{Q(x)} \frac{dQ}{dx} S_i - \frac{1}{v(x)} F_i(x, S) + \sum_{k=1}^M \gamma_k(x) \frac{u_{ki}}{l_k Q_k},$$

$$S_i(0) = S_0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В векторной форме эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{Q(x)} \frac{dQ}{dx} ES - \frac{1}{v(x)} F(x, S) + \sum_{k=1}^M B_k(x) u_k.$$

Здесь E — единичная матрица размерностью $(m \times m)$, $B_k(x)$ — диагональная матрица с элементами

$$b_k^{ii}(x) = \gamma_k(x)/(l_k Q_k), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Запишем в векторной форме уравнения многослойной модели (2.1.32) — (2.1.33) для случая m компонент загрязнений. Обозначим $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ векторы средних концентраций примесей в со-

ответствующих слоях, а через S вектор размерности $(m \times n)$, состоящий из подвекторов $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$. Тогда распределение примесей вдоль русла реки можно описать уравнением

$$\frac{dS}{dt} = A(x)S - F(x, S) + \sum_{k=1}^M B_k(x)u_k, \quad (2.3.13)$$

$$S(0) = S^\Phi. \quad (2.3.14)$$

Здесь $A(x) - (n \times m)$ -матрица, имеющая вид

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x)E & a_{12}(x)E & O & \dots \\ a_{21}(x)E & a_{22}(x)E & a_{23}(x)E & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots \\ \dots & O & O & \dots & O & O \\ \dots & O & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{jj-1}(x)E & a_{jj}(x)E & a_{jj+1}(x)E & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & O & O & O & \dots & a_{nn-1}(x)E & a_{nn}(x)E \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11}(x) = -\frac{1}{Q_1(x)} \frac{dQ_1}{dx} - \frac{1}{v_1(x)} \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)} \gamma_2^1, \quad a_{12} = \frac{1}{v_1(x)} \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \gamma_2^1,$$

$$a_{jj}(x) = -\frac{1}{Q_j(x)} \frac{dQ_j}{dx} - \frac{1}{v_j(x)} \left(\gamma_j^{j-1} + \frac{Q_{j+1}(x)}{Q_j(x)} \gamma_{j+1}^j \right),$$

$$a_{jj+1}(x) = \frac{1}{v_j(x)} \frac{Q_{j+1}(x)}{Q_j(x)} \gamma_{j+1}^j, \quad Q_{jj-1}(x) = \frac{1}{v_j(x)} \gamma_j^{j-1}, \quad j = 2, \dots, n-1,$$

$$a_{nn-1}(x) = \frac{1}{v_n(x)} \gamma_n^{n-1}, \quad a_{nn}(x) = \frac{1}{Q_n(x)} \frac{dQ_n}{dx} - \frac{1}{v_n(x)} \gamma_n^{n-1};$$

O обозначает блок размерности $(m \times m)$, состоящий из нулевых элементов

$$F(x, S) = (F_1(x, S_1), F_2(x, S_2), \dots, F_n(x, S_n))';$$

$B_i(x) - ((n \times m) \times m)$ -блочная матрица вида

$$B_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\chi_i(x)}{l_i Q_1(x_i)} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В частном случае, когда процесс ассимиляции веществ описывается линейными функциями $F_i(x, S_i) = K_i(x)S_i$, уравнение

(2.3.13) линейно относительно S и u_i и имеет вид

$$\frac{dS}{dx} = A(x)S - K(x)S + \sum_{i=1}^M B_i(x)u_i, \quad (2.3.15)$$

где $K(x)$ — матрица размерностью $((n \times m) \times (n \times m))$, состоящая из n блоков $K_i(x)$, расположенных по диагонали.

Сформулируем в общем виде задачу расчета ПДС для источников выбросов с использованием модели (2.3.13) — (2.3.14). Пусть задано множество $X(x)$ из евклидова пространства размерности $n \times m$, характеризующее множество допустимых состояний реки в точке x . В частности, это множество может иметь вид

$$X(x) = \{S: \bar{S}_j \leq \text{ПДК}_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n\},$$

т. е. в каждом слое j концентрации загрязняющих веществ не превышают предельно допустимых концентраций (ПДК). Вместе с тем это множество может быть определено иначе, например из условия, что максимальная концентрация в контрольных створах не превысит ПДК. Предельно допустимые сбросы вещества j источника i обозначим ω_i^j . Через ω_i будем обозначать вектор, составленный из компонент $\omega_i^1, \dots, \omega_i^m$, а через ω — вектор, составленный из подвекторов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$. Обозначим:

$$U(\omega) = \{u = (u_1, \dots, u_M)': 0 \leq u_i^j \leq \omega_i^j, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, M}\},$$

Λ — множество $\omega \geq 0$ таких, что при любом $u \in U(\omega)$ решение системы (2.3.13) — (2.3.14) при всех x будет удовлетворять условию $S(x) \in X(x)$, т. е. множество таких предельно допустимых сбросов, при которых нормы на качество воды не будут нарушены.

Пусть задана функция $\mu(\omega)$ — критерий выброса норм. Тогда задача расчета ПДС состоит в максимизации функции μ на множестве Λ . Эта задача относится к классу задач нормирования воздействий на динамические системы [Константинов, 1983]. Методы ее решения можно получить на основе принципа оптимальности В. Ф. Кротова. Сформулируем основное утверждение об описании множества Λ . Пусть множество $X(x)$ имеет вид

$$X(x) = \{S: H(S, x) \geq 0\},$$

где $H(S, x)$ — r -мерная вектор-функция. Обозначим: Φ — семейство r -мерных функций $\varphi(S, x, \tau)$, непрерывных и непрерывно дифференцируемых по своим переменным;

$$\mu(x, \tau, \omega) = \sup_{\substack{S \in R^{n \times m} \\ u \in U(\omega)}} \left\{ \varphi'_s(S, x, \tau) \left[A(x)S - F(x, S) + \sum_{i=1}^M B_i(x)u_i \right] + \varphi_x(S, x, \tau) \right\};$$

$$m(\tau) = \inf_{S \in R^{n \times m}} [R(S, \tau) + \varphi(S, \tau, \tau) - \varphi(S_\Phi, 0, \tau)].$$

Здесь через $R^{(n \times m)}$ обозначено евклидово пространство размерности $(n \times m)$, операции \sup и \inf понимаются как покомпонентные.

Утверждение. Включение $\omega \in \Lambda$ имеет место, если существует функция $\varphi \in \Phi$ такая, что функция $\mu(x, \tau, \omega)$ интегрируема по x на отрезке $[0, \tau]$ и выполнены неравенства

$$m(\tau) - \int_0^{\tau} \mu(x, \tau, \omega) dx \geq 0 \quad (2.3.16)$$

при всех $\tau \in T$.

В случае нелинейных систем на основе этого утверждения можно построить алгоритм последовательного решения задачи.

В случае линейных систем вида (2.2.15) и линейной функции $H(S, x) = H_0(x)S + h_0(x)$ требуемую функцию φ можно построить. Она имеет вид $\varphi(S, x, \tau) = \Psi(x, \tau)S$, где матрица Ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi(x, \tau)}{\partial x} = -\Psi(x, \tau)[A(x) - K(x)],$$

$$\Psi(\tau, \tau) = -H_0(\tau).$$

Неравенство (2.2.16) тогда принимает вид

$$\Psi(0, \tau) S_{\Phi} + \int_0^{\tau} \left[\max_{u \in U(x)} \Psi(x, \tau) \sum_{k=1}^M B_k(x) u_k \right] dx \leq h_0(x).$$

Или, если вычислить максимум,

$$\Psi(0, \tau) S_{\Phi} + \sum_{k=1}^M \left(\int_0^{\tau} |\Psi(x, \tau) B_k(x)|^+ dx \right) \omega_k \leq h_0(\tau). \quad (2.3.17)$$

Здесь через $|C|^+$ обозначена матрица, полученная из матрицы C заменой всех отрицательных элементов нулевыми.

Таким образом, если выполнены неравенства (2.3.17) при всех $\tau \in T$, то $\omega \in \Lambda$ и, следовательно, при данных предельно допустимых сбросах требования к качеству воды не будут нарушены во всех точках реки. Таким образом, задача установления ПДС в данном случае сведена к максимизации функции $\kappa(\omega)$ при ограничениях (2.3.17) и $\omega \geq 0$. Эта задача может быть решена с помощью алгоритма последовательного улучшения [Константинов, Сидоренко, 1984].

Перейдем теперь к описанию метода решения задачи расчета ПДС в целом для всего бассейна реки. В общем случае динамику примеси в системе рек можно описать с помощью сети операторов.

Пусть имеется система N рек, описываемая деревом D . Качество воды в каждой из них характеризуется вектором S^i . На реке i имеется k_i источников загрязнений с интенсивностями u_j^i , $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Каждая из рек рассматривается на участке $[0, \bar{x}_j]$, где точка \bar{x}_j соответствует устью реки j .

Процесс распространения примесей будем описывать уравнениями

$$\frac{dS^i}{dx} = A^i(x) S^i - F^i(x, S^i) + \sum_{h=1}^{M_i} B_h^i(x) u^h + \sum_{j \in I(i)} D_j^i(x, \Theta_{ij}) S^j(\bar{x}_j),$$

$$x \in T_i = [0, \bar{x}_i]. \quad (2.3.18)$$

Здесь матрица $D_j^i(x)$ имеет блочную структуру,

$$D_j^i(x, \Theta_{ij}) = \begin{bmatrix} \chi_{ij}(x) \frac{Q_1^j(\bar{x}_j)}{Q_1^i(\Theta_{ij})} E \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \chi_{ij}(x) \frac{Q_n^j(\bar{x}_j)}{Q_n^i(\Theta_{ij})} E \end{bmatrix},$$

$\Theta_{ij} \in [0, \bar{x}_i]$ — точка впадения реки j в реку i .

Пусть для каждой реки заданы множества $X_i(x)$, $x \in T_i$, допустимых состояний и определена функция $\kappa(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1})$ — критерий выбора норм.

Совокупность норм $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ является допустимой, если при любых интенсивностях выброса веществ $u^i \in U(\omega^i)$ решение уравнений (2.3.18) удовлетворяет при всех $x \in T_i$ включению $S^i(x) \in X_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Иначе говоря, нормы ω^i , $i = 0, 1, \dots, N-1$ допустимы, если при любых воздействиях u^i в пределах множеств $U(\omega^i)$ состояние рек будет находиться в допустимых пределах $X_i(x)$. Множество допустимых норм обозначим Λ .

Задача нормирования состоит в максимизации функции κ на множестве Λ . Множество Λ можно приближенно описать, проводя рассуждения по следующей схеме. Будем сначала рассматривать все притоки реки i как самостоятельные источники выбросов и попытаемся установить нормы выбросов на них наравне со всеми другими источниками. В свою очередь, для рек, являющихся притоками, кроме уже оговоренных требований к качеству воды, дополнительно потребуем выполнения ограничений на вынос загрязняющих веществ в устье реки, установленных на предыдущем этапе. При таком подходе все же сохраняется зависимость норм выбросов для источников, расположенных на притоках, от норм выбросов, установленных для основной реки. В предлагаемой далее схеме эту зависимость удастся устранить и, таким образом, обеспечить равные условия выбора норм для всех источников выбросов. Для этой цели нам потребуется достаточно сложный аппарат, связанный с качественной теорией систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наряду с системой (2.3.18) будем рассматривать систему

$$\frac{dS^i}{dx} = A^i(x) S^i - F^i(x, S^i) + \sum_{h=1}^{M_i} B_h^i(x) u_h^i + \sum_{j \in I(i)} D_j^i(x, \Theta_{ij}) w^j, \quad (2.3.19)$$

считая величины w^j интенсивностями «дополнительных» источников загрязнений, соответствующих реке j . Сформулируем вспомогательную задачу нормирования для реки i . Множество допустимых состояний определим следующим образом:

$$Y_i(x) = \begin{cases} X_i(x), & x \in [0, \bar{x}_i], \\ X_i(x) \cap \{S^i: \alpha_i \leq S^i(\bar{x}_i) \leq \beta_i\} \end{cases}$$

и введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{Y}(\alpha, \beta) = \{y: \alpha \leq y \leq \beta\}, \quad \alpha, \beta, y \in R^n.$$

Вспомогательная задача состоит в следующем: требуется построить множество таких параметров $(\alpha^j, \beta^j, \omega^i)$, $j \in I(i)$, чтобы при любых интенсивностях $u^i \in U(\omega^i)$ и $w^j \in \mathcal{Y}(\alpha^j, \beta^j)$ решение уравнения (2.3.19) удовлетворяло условию $S^i(x) \in Y_i(x)$ при всех $x \in T$. Множество этих параметров обозначим Λ_i . Это множество можно описать, воспользовавшись утверждением 1.

Пусть имеются функции $\varphi_i(x, \tau, S^i) \in \Phi$, $\Psi_{ij}(x, S^i)$ и $\bar{\Psi}_{ij}(x, S^i)$ — n -мерные вектор-функции, обладающие свойствами, аналогичными свойствам функций из Φ . Обозначим P^i, γ^i, δ^i векторы, составленные из подвекторов $w^j, \alpha^j, \beta^j, j \in I(i)$;

$$\mu_i(x, \tau, u^i, w^j, \varphi) = \sup_{S^i \in R^n} \left\{ \frac{\partial \varphi(x, \tau, S^i)}{\partial S^i} \left[A^i(x) S^i - F^i(x, S^i) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{M_i} B_k^i(x) u_k^i + \sum_{j \in I(i)} D_j^i(x, \Theta_{ij}) w^j \right] + \frac{\partial \varphi(x, \tau, S^i)}{\partial t} \right\};$$

$$W_i(\tau, \omega^i, \gamma^i, \delta^i; \varphi) = \sup \left\{ \int_0^\tau \mu_i(x, \tau, u^i, w^j; \varphi) dx: \right.$$

$$u^i \in U(\omega^i), \quad w^j \in \mathcal{Y}(\alpha^j, \beta^j), \quad j \in I(i) \Big\};$$

$$w_{i0}(\tau) = \inf_{S^i \in R^n} [S^i(\bar{x}_i) - \underline{\Psi}_{ij}(\bar{x}_i, S^i) + \underline{\Psi}_{ij}(0, S^i)];$$

$$\underline{w}_{ij} = \inf_{S^i \in R^n} [S^i(\bar{x}_i) - \underline{\Psi}_{ij}(\bar{x}_i, S^i) + \underline{\Psi}_{ij}(0, S^i)];$$

$$\bar{w}_{ij} = \inf_{S^i \in R^n} [-S^i(\bar{x}_i) - \bar{\Psi}_{ij}(\bar{x}_i, S^i) + \bar{\Psi}_{ij}(0, S^i)].$$

В соответствии с утверждением набор $\omega^i, \gamma^i, \delta^i$ принадлежит множеству Λ_i , если существуют функции $\varphi_{i0}, \underline{\Psi}_{ij}, \bar{\Psi}_{ij}, j \in I(i)$, такие, что выполнены неравенства

$$w_{i0}(\tau) - W_i(\tau, \omega^i, \gamma^i, \delta^i; \varphi_{i0}) \geq 0, \quad (2.3.20)$$

$$w_{ij} - W_i(\bar{x}_i, \omega^i, \gamma^i, \delta^i, \underline{\Psi}_{ij}) - \alpha_i \geq 0, \quad (2.3.21)$$

$$\bar{w}_{ij} - W_i(\bar{x}_i, \omega^i, \gamma^i, \delta^i, \bar{\Psi}_{ij}) + \beta_i \geq 0. \quad (2.3.22)$$

Неравенства (2.3.21) — (2.3.22) связывают между собой нормы

на функции интенсивности источников выбросов реки j с «дополнительными» нормами α_j на интенсивность поступления примесей из реки j как из притока. Параметры α_i и β_i следует выбирать таким образом, чтобы при фиксированных значениях ω^j , $j \in I(i)$, α_j было наибольшим, а β_i наименьшим из возможных значений, удовлетворяющих неравенствам (2.3.21) — (2.3.22). Тогда

$$\alpha_i = W_i(\bar{x}_i, \omega^i, \gamma^i, \delta^i; \underline{\psi}_{ij}) - \underline{w}_{ij}, \quad (2.3.23)$$

$$\beta_i = -W_i(\bar{x}_i, \omega^i, \gamma^i, \delta^i; \bar{\psi}_{ij}) - \bar{w}_{ij}. \quad (2.3.24)$$

Рассмотрев вспомогательные задачи для всех i , получим систему неравенств (2.3.20) и равенств (2.3.23) — (2.3.24), связывающих между собой параметры ω^i , $\gamma^i = \{\alpha^j\}$, $\delta^i = \{\beta^j\}$, $j \in I(i)$. Из равенств (2.3.23) — (2.3.24) дополнительные параметры α^j , β^j можно исключить. Для этого нужно «двигаться» по вершинам графа D , начиная с конечных. Для них выражение W_i не будет зависеть от параметров α^j , β^j , так как данные реки притоков не имеют. При переборе вершин в соответствии с алгоритмом восстановления дерева по его характеристике на каждом шаге функции W_i будут зависеть от уже ранее определенных параметров α^j , β^j . Таким образом, они будут найдены как функции от ω^j , соответствующих источникам выбросов, расположенных на притоках 1-го, 2-го и т. д. порядков для реки i . Подставляя эти функции в неравенства (2.3.20), получим условия принадлежности норм ω^i , $i = 0, 1, \dots, N-1$, множеству Λ . Доказательство этого утверждения приведено в работе Л. Ю. Дамешек, Г. Н. Константинова [1983].

Пусть теперь функции $F^i(x, S^i)$ и $H^i(x, S^i)$ линейны; $F^i(x, S^i) = K^i(x)S^i$, $H^i(x, S^i) = H_0^i(x)S^i + h_0^i$; функции φ_{i0} , $\underline{\psi}_{ij}$, $\bar{\psi}_{ij}$ имеют вид

$$\varphi_{i0}(x, \tau, S^i) = \Psi_{i0}(x, \tau)S^i, \quad \underline{\psi}_{ij}(x, S^i) = \Psi_{ij}(x)S^i, \quad \bar{\psi}_{ij}(x, S^i) = -\Psi_{ij}(x)S^i, \text{ где матрица } \varphi_{i0} \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$\frac{\partial \varphi_{i0}(x, \tau)}{\partial x} = -\varphi_{i0}(x, \tau) [A^i(x) - K^i(x)]$$

с условием

$$\varphi_{i0}(\tau, \tau) = -H_0^i(\tau),$$

а матрица Ψ_{ij} — уравнению

$$\frac{d\Psi_{ij}(x)}{dx} = -\Psi_{ij}(x) [A^i(x) - K^i(x)]$$

с условием

$$\Psi_{ij}(\bar{x}_i) = E.$$

В этом случае неравенства (2.3.20) — (2.3.22) имеют вид

$$\begin{aligned} h_0^i(\tau) \Psi_{i0}(0, \tau) S_\Phi^i - \sum_{k=1}^{M_i} W_{i0k}(\tau) \omega_k^i - \\ - P_{i0}^N(\tau) \sum_{j \in I(i)} \beta^j - P_{i0}^H(\tau) \sum_{j \in I(i)} \alpha^j \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Psi_{ij}(0) S_{\Phi}^i - \sum_{h=1}^{M_i} W_{ijh}(\tau) \omega_h^i - P_{ij}^n(\tau) \sum_{j \in I(i)} \beta^j - \\
& - P_{ij}^n(\tau) \sum_{j \in I(i)} \alpha^j - \alpha^i \geq 0; \\
& \Psi_{ij}(0) S_{\Phi}^i - \sum_{h=1}^{M_i} W_{ijh}(\tau) \omega_h^i + P_{ij}^n(\tau) \sum_{j \in I(i)} \alpha^j - \\
& - P_{ij}^n(\tau) \sum_{j \in I(i)} \beta^j + \beta^i \geq 0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$W_{ijh}(\tau) = \int_0^{\tau} M_{ijh}(x, \tau) dx;$$

$$P_{ij}^p(\tau) = \int_0^{\tau} \Psi_{ij}^p(x) dx, \quad p = H, B;$$

$$M_{ijh}(x, \tau) = |\Psi_{ij}(x, \tau) B_h^i(x)|^+;$$

матрицы $\Psi_{ij}^H(x)$ ($\Psi_{ij}^B(x)$) составлены из матрицы $\Psi_{ij}(x)$ заменой положительных (отрицательных) элементов нулевыми соответственно.

Обоснование метода решения задачи в линейном случае дано Л. Ю. Дамешек [1984].

Нормирование выбросов в бассейне р. Селенги.

Рассмотрим задачу расчета ПДС источников загрязнений, расположенных на советском участке р. Селенги. Будем рассматривать семь крупных источников загрязнения (рис. 2.9). Отметим, что в данном случае притоки — реки Джиды, Хилок, Чикой и Уда — рассматриваются как источники загрязнения. Необходимая информация об этих источниках приведена в табл. 2.1.

Пусть для каждого источника выбросов определены коэффициенты α_i , $i = 1, 2, \dots, 7$, характеризующие взаимные приоритеты между источниками. Эти коэффициенты определяются в зависимости от важности того или иного предприятия, производственных



Рис. 2.9. Схема расположения источников выбросов, принятая при расчетах.



Рис.2.10. Схема расположения источников выбросов в бассейне р. Селенги, принятая в расчетах (а) и граф взаимосвязей рек бассейна (б).

условий на нем и т. п. Функция χ имеет вид

$$\chi(\omega) = \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_7 \omega_7.$$

Требуется установить ПДС для каждого источника так, чтобы функция χ была максимальной и при этом концентрация вещества не превышала ПДК во всех точках реки.

Таблица 2.1

Характеристики источников загрязнений р. Селенги

Источник загрязнения	Расстояние от пос. Наушки, км	Расход воды в реке, м ³ /с	Скорость течения реки, км/ч	Расход сточных вод, км ³ /ч	Норма выбросов, т/год
1. Пос. Наушки	0	744	4,2	$0,43 \cdot 10^{-6}$	8,6
2. Р. Джида	50	948	4,6	$0,61 \cdot 10^{-6}$	1,6
3. Р. Чикой	116	1143	4,6	$0,17 \cdot 10^{-2}$	12,3
4. Р. Хилек	145	1228	4,2	$0,86 \cdot 10^{-3}$	2,8
5. Г. Улан-Удэ	237	1249	4,5	$0,27 \cdot 10^{-3}$	18,5
6. Пос. Селенгинск	326	1255	4,7	$0,51 \cdot 10^{-5}$	3,4
7. Пос. Кабанск	346	1259	4,6	$0,3 \cdot 10^{-5}$	1,2

Таблица 2.2

Характеристики системы источников загрязнений

Источник загрязнений	Расстояние до устья, км	Расход воды в реке, км ³ /ч	Скорость реки, км ³ /ч	Расход сточных вод, км ³ /ч	ПДС, т/ч
1. Бичура, р. Хилек	160	$0,23 \cdot 10^{-3}$	2,5	$0,3 \cdot 10^{-6}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$
2. Онохой, р. Уда	30	$0,24 \cdot 10^{-3}$	2,9	$0,7 \cdot 10^{-6}$	$0,23 \cdot 10^{-5}$
3. Петровск, р. Баляга	30	$0,05 \cdot 10^{-3}$	1,1	$0,2 \cdot 10^{-4}$	$0,1 \cdot 10^{-5}$
4. Улан-Удэ, р. Селенга	152	$3,4 \cdot 10^{-3}$	5,2	$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \cdot 10^{-4}$

Для расчетов использовалась двухслойная модель вида (2.1.30) — (2.1.32). Константа скорости распада вещества принята равной $0,003 \text{ ч}^{-1}$, ПДК = 50 т/км^3 . Расход воды Q и скорость v аппроксимировались кусочно-линейными функциями. Расчеты проводились по схеме, указанной в предыдущем пункте. Результаты приведены в табл. 2.1.

Вторая задача решена для системы рек: Селенга, Хилук, Баляга, Уда (рис. 2.10), на каждой из которых находится по одному источнику выбросов. Исходные данные и результаты расчетов приведены в табл. 2.2.

§ 4. АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ

Рассмотрим информационные проблемы, связанные с контролем за состоянием водных ресурсов и задачами управления их качеством, ориентируясь на регионы, в которых объем водных ресурсов не лимитирован и особое внимание уделяется именно качеству воды. К таким регионам, в частности, относится Байкальский. В этих условиях оперативное планирование использования водных ресурсов практически не осуществляется, а лишь контролируются поступление и содержание вредных веществ в воде водоемов. Усиление охраны водных ресурсов в бассейнах рек приводит к уменьшению загрязненности вод, но вступает в противоречие с дальнейшим развитием промышленности. Поэтому нагрузка на водные ресурсы, как правило, на пределе самоочищающей способности рек. В этих условиях увеличение промышленного производства, сопровождающееся постоянным улучшением качества водных ресурсов, вряд ли возможно без оперативного контроля за выбросами в бассейне, регулирования их в зависимости от состояния вод, оптимизации мероприятий, направленных на снижение выбросов, рационального размещения новых производств. Информация контролирующих организаций должна оперативно обрабатываться, и в зависимости от состояния водных ресурсов в бассейне реки должны приниматься оперативные меры по предотвращению нежелательных ситуаций. Реализация таких задач связана с обработкой больших объемов информации, что возможно лишь с применением ЭВМ. Положительный опыт такой работы накоплен в Енисейском бассейновом управлении. В данном параграфе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с разработкой автоматизированной системы контроля антропогенных воздействий на водные ресурсы (СКАВВР).

Система ориентирована на решение следующих задач:

оперативное обеспечение заинтересованных организаций информацией о состоянии водных ресурсов и функционировании источников выбросов;

разработка комплексных норм предельно допустимых выбросов и осуществление на их основе оперативного управления качеством водных ресурсов;

прогнозирование состояния водных ресурсов в зависимости от проведения различных водохозяйственных мероприятий и размещения новых производств;

расчет оптимального размещения производства, развития очистных сооружений и в конечном итоге, при объединении с водохозяйственными задачами, формирование оптимальных схем комплексного использования водных ресурсов речных бассейнов.

Создание информационной базы и оперативная обработка информации могут служить основой для внедрения первой очереди АСУ. Вторая очередь должна предусматривать внедрение системы оперативного управления и прогнозирования состояния водных ресурсов, расчета комплексных норм предельно допустимых сбросов. Формирование оптимальных комплексных схем рационального использования водных ресурсов составляет основу для создания третьей очереди системы.

Первый этап внедрения системы должен предусматривать: составление сводного бюллетеня состояния реки, бюллетеней нарушений ПДК, сводных бюллетеней водопотребления, сбросов сточных вод и поступления примесей в водную среду, регулярных бюллетеней нарушения норм сбросов; оперативное составление схемы загрязненности реки; комплексный расчет предельно допустимых сбросов.

Сводный бюллетень нарушений ПДК может составляться как по данным фактических измерений, имеющимся в системе, так и на основе расчетов по моделям при заданных интенсивностях функционирования источников сбросов. Оперативное составление схемы загрязненности реки осуществляется на основе моделей с использованием гидрологических данных и информации о сбросах. На схеме должны быть указаны степень загрязненности реки, подробные расчетные характеристики загрязнения, информация о поступлении примесей. Она должна служить основой для принятия решений по предотвращению нежелательных ситуаций в реке. В соответствии с основами водного законодательства Союза ССР и союзных республик государственный учет вод включает измерение и первичный учет количества поверхностных и подземных вод, количества и качества сбрасываемых в них вод, регистрацию водопользователей. Государственный учет ресурсов поверхностных вод, наблюдение за их режимом и качеством обеспечивает Государственный комитет СССР по гидрометеорологии и контролю природной среды (Госкомгидромет). Аналогичные функции в отношении подземных вод выполняет Министерство геологии СССР. Первичный учет забираемых из водных объектов и сбрасываемых в них вод, определение химического состава сбрасываемых вод осуществляют государственные, кооперативные и общественные предприятия, являющиеся водопользователями. Контроль за правильностью первич-



Схема 2.1. Общая схема информационных потоков в системе.

ного учета и учет использования вод на основе отчетности водопользователей осуществляется Министерством мелиорации и водного хозяйства СССР, в бассейнах рек — бассейновыми управлениями. В случае, когда сброс вод осуществляется через очистные сооружения коллективного пользования, учет сбрасываемых вод и их состава осуществляется на очистных сооружениях. Таким образом, информация о водопользовании и состоянии вод формируется организациями Госкомгидромета, Министерства геологии, бассейновыми управлениями и водопользователями. Долгосрочные прогнозы гидрологического режима, поступления примесей и другие данные на длительную перспективу формируются плановыми органами, научными и проектными организациями. Общая схема информационных потоков в системе показана на схеме 2.1.

Вся информация концентрируется и обрабатывается информационной подсистемой, которая состоит из базы данных, алгоритмов, осуществляющих обработку информации, и создана на основе системы управления базами данных ИНЕС [Арлазаров, Емельянов, 1982] и автоматизированной системы моделирования, разрабатываемой в лаборатории исследования систем управления ИГУ им. А. А. Жданова [Планирование..., 1984].

Остановимся на описании данных в СКАВВР. Они представлены с помощью двух независимых баз данных. Для решения информационных задач, формирования сводных таблиц и т. п. используется база данных, структура которой отражает связи исходной информации. При разработке структуры этой БД учитывались следующие требования:

возможность быстрого поиска данных по заданным ключевым признакам (название реки, название водопоста, дата выполнения измерений);

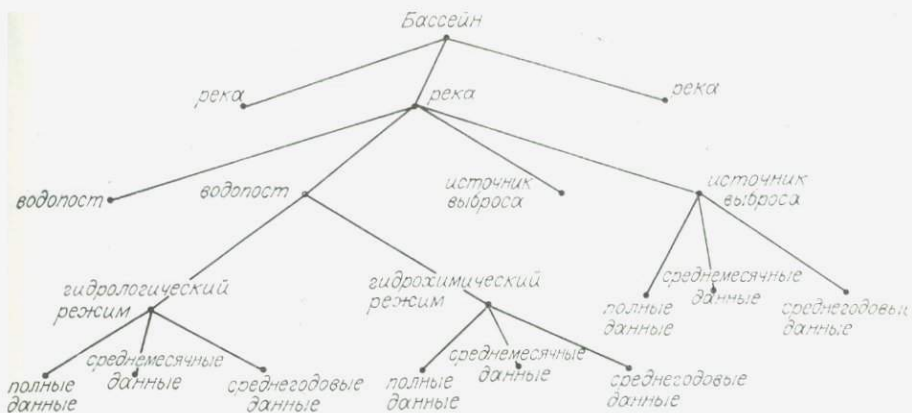


Рис. 2.11. Структура БД системы контроля качества воды р. Селенги.

возможность корректировки и удаления данных;
 возможность удобного и наглядного просмотра информации на экране терминала или АЦПУ.

Примером БД информационных задач может служить БД системы контроля за качеством воды р. Селенги (рис. 2.11). В этом случае для хранения и обработки информации используются средства ИНЕС. Для хранения и обработки результатов вариантных расчетов по моделям используются БД АСМ (рис. 2.12) и ее средства обмена информацией. В некоторых случаях могут быть использованы и средства ИНЕС.

Использование автоматизированной СКВВР для решения информационных задач позволяет обеспечить процесс подготовки

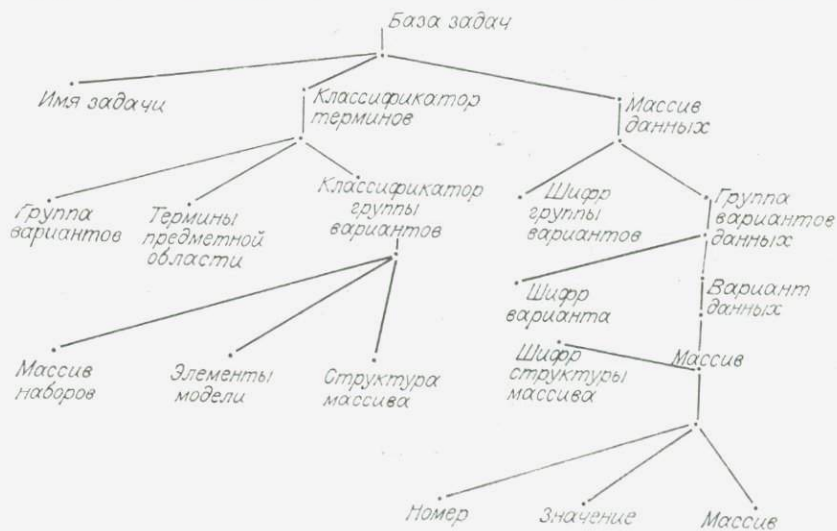


Рис. 2.12. Структура БД АСМ.

отчетов о состоянии и использовании водных ресурсов на любой момент времени. Такая система внедряется в несколько этапов:

I — создание описания входных форм документов (макет ввода);

II — создание описания выходных данных документов (макет вывода);

III — подключение программных моделей, реализующих формирование выходных документов;

IV — ввод информации в БД системы из регистрационных журналов при каждом измерении параметров;

V — проведение расчетов на ЭВМ, получение отчетных форм;

VI — введение архивной системы.

Первые три этапа выполняются опытными программистами, знакомыми со СКАВВР и ИНЕС. Предусмотрены стандартные формы документов, такие, как форма 2ТП-водхоз. Этап IV должен выполняться подготовленным оператором регулярно после каждого измерения параметров, определенных во входных формах. Этап V выполняется по мере поступления запросов. Предусмотрен диалоговый режим работы системы, ориентированный на конечного пользователя и не требующий длительного обучения работе с системой. Этап VI выполняется администратором СКАВВР средствами архивной системы ИНЕС. Архив системы должен иметь два раздела: оперативный архив, т. е. информация, находящаяся на томах прямого доступа, сохраняется на МЛ для восстановления; старый архив, информация за предыдущие отчетные периоды, хранящаяся только на магнитных лентах.

Система контроля антропогенных воздействий на водные ресурсы накладывает следующие требования к вычислительной технике:

использование процессора ЕС ЭВМ;

объем оперативной памяти не менее 300;

наличие устройств внешней памяти на съемных магнитных дисках и магнитных лентах;

наличие терминалов типа 7920.

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ С ГИДРОБИОНТАМИ

В настоящей главе обсуждаются вопросы, связанные с проблемой загрязнения водных экосистем веществами, обладающими высокой токсичностью по отношению к водным организмам и высокостабильными в водной среде. К этой группе веществ относятся прежде всего соединения тяжелых металлов, стойкие пестициды, такие как ДДТ, ПХБ и другие.

§ 1. НАКОПЛЕНИЕ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ГИДРОБИОНТАХ

Впервые специалисты обратили внимание на проблему накопления высокостабильных соединений в гидробионтах в связи с наблюдаемыми случаями массовой гибели рыбацких птиц после обработки водоемов ТДЕ (соединение типа ДДТ для борьбы с комарами [Hunt, Bishoff, 1960, цит. по: Рамад, 1981]). В результате быстрой миграции ТДЕ по пищевой цепи уровень содержания этого чрезвычайно токсичного вещества в тканях птиц достигал величины 2500 млн^{-1} , а из 1000 гнездящихся пар после обработки препаратом осталось 30, и те были почти стерильными.

Этот пример отрицательного воздействия загрязнения на фауну водоемов не единичен и показывает необходимость внимательного анализа процессов аккумуляции токсичных веществ и последствий кумулятивного токсикоза.

Общая стратегия моделирования накопления загрязняющих веществ (ЗВ) в экосистеме в применении к соединениям тяжелых металлов рассмотрена в работе [Jørgensen, 1979]. Ниже рассматривается обобщение этой схемы моделирования для водной экосистемы с произвольной трофической структурой.

Основные процессы, определяющие накопление ЗВ в гидробионтах конкретного вида, связаны прежде всего с системой пищевых отношений в данной экосистеме. Именно структура трофических взаимодействий определяет пути миграции ЗВ в экосистеме.

Другим источником накопления ЗВ в гидробионтах является потребление непосредственно из воды (рис. 3.1). Важность этого процесса уменьшается с ростом трофического уровня гидробионтов. Если продуценты потребляют ЗВ только из воды и тем самым увеличивают концентрацию в 10^3 — 10^8 раз, то для зоо-

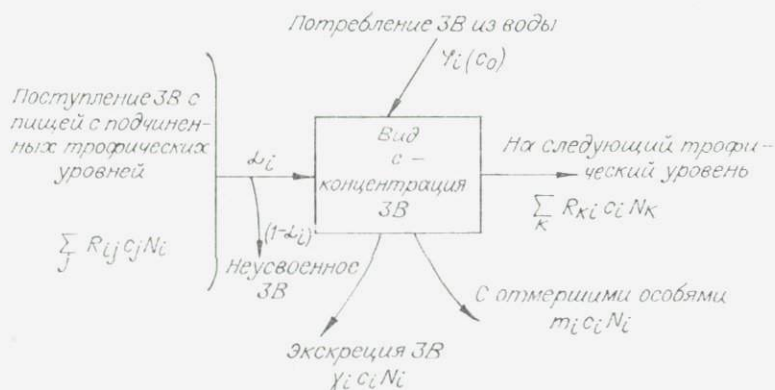


Рис. 3.1. Основные процессы, определяющие накопление ЗВ на определенном трофическом уровне (пояснения в тексте).

планктона оба процесса сопоставимы, а рыбы и птицы накапливают ЗВ преимущественно за счет питания.

Снижению количества ЗВ в гидробионтах определенного вида способствуют смертность, экскреция ЗВ, поступление на вышестоящие трофические уровни. Все эти процессы принимаются во внимание при моделировании миграции ЗВ в экосистеме.

Математическая модель. Рассмотрим некоторый вид i , занимающий определенное положение в трофической структуре экосистемы. Это значит, что существует набор видов, которыми i -й вид питается, — I_i , а сам вид i служит пищей другим видам — $\{I_h; i \in I_h\}$. Баланс загрязняющего вещества в гидробионтах i -го вида может быть описан следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{d(N_i c_i)}{dt} = & \left(\sum_{j \in I_i} R_{ij} c_j \right) \alpha_i N_i - m_i c_i N_i - \\ & - \sum_{h: i \in I_h} R_{hi} c_i N_h + \varphi_i(c_0) N_i - \gamma_i c_i N_i, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где N_i — биомасса i -го вида; c_i — концентрация ЗВ в гидробионтах i -го вида; R_{ij} — частичный удельный рацион или количество биомассы j -го вида, потребляемое единицей биомассы i -го вида; m_i — интенсивность отмирания особей i -го вида; $\varphi_i(c_0)$ — функция, описывающая интенсивность потребления ЗВ из воды; c_0 — концентрация токсиканта в среде, выведение пропорционально содержанию ЗВ в гидробионтах, т. е. величине $c_i N_i$, описывается параметром γ_i . Коэффициент α_i показывает интенсивность ассимиляции ЗВ из пищи.

Уравнения (3.1.4) совместно с уравнениями, адекватно моделирующими динамику видов в экосистеме, и уравнениями для ЗВ в среде позволяют описывать миграцию токсичных веществ в водоеме.

Рассмотрим некоторые свойства уравнения (3.1.4).

Накопление в стационарной экосистеме. В условиях стационарной экосистемы, когда $dN/dt = 0$, справедливо равенство

$$P_i = m_i N_i^* + \sum_{h: i \in I_h} R_{hi} N_h^*, \quad (3.1.2)$$

где P_i — продукция i -го вида, а N_i^* — стационарные биомассы каждого вида. Часто соотношение (3.1.2) можно считать выполняющимся для среднегодовых условий.

Уравнение (3.1.4) при учете (3.1.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} c_i = \sum_{j \in I_i} R_{ij} c_j \alpha_i + \varphi_i(c_0) - \left(\frac{P_i}{N_i^*} + \gamma_i \right) c_i. \quad (3.1.3)$$

При условии, что содержание ЗВ в воде не изменяется, можно получить значения равновесных концентраций (c_i^*) для каж-

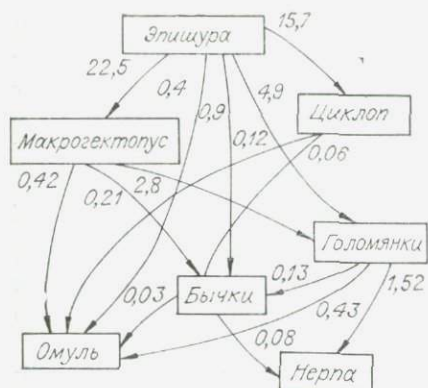


Рис. 3.2. Схема трофических отношений в экосистеме оз. Байкал. Возле стрелок показаны годовые частичные рационы (ккал/(м²·год)), рассчитанные В. В. Селютиним и Н. С. Задорожной.

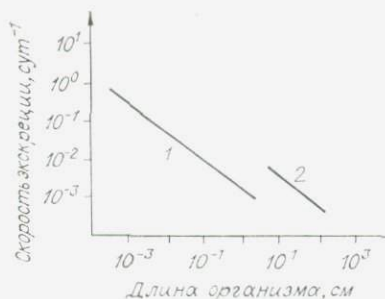


Рис. 3.3. Зависимость интенсивности экскреции (сут⁻¹) от линейного размера (см) организмов [Irgensen, 1979].

1 — для рыб, млекопитающих и птиц; 2 — для фито- и зоопланктона.

дого вида:

$$c_i^* = \frac{\sum_j R_{ij} c_j^* \alpha_i + \Phi_i(c_0)^*}{P_i/N_i^* + \gamma_i} \quad (3.1.4)$$

Соотношение (3.1.4) было применено для оценки накопления ЗВ непосредственно по пищевой сети для экосистемы озера Байкал (рис. 3.2).

Предполагалось, что поступление ЗВ из воды отсутствует, т. е. $\Phi_i(c_0) = 0$, а токсикант из организма не выводится ($\gamma_i = 0$). Коэффициенты ассимиляции принимались равными единице ($\alpha_i = 1$) для всех видов.

Данные по среднегодовым величинам продукции и биомассы каждого вида приведены в табл. 3.1. Частичные рационы рассчитаны В. В. Селютиним и Н. С. Задорожной (см. рис. 3.2).

Были подсчитаны коэффициенты накопления ЗВ в каждом виде по отношению к уровню содержания токсиканта в эпишуре:

$$KH_i = c_i^*/c_1^*, \quad i = 2, \dots, 7.$$

Таблица 3.1

Характеристики гидробионтов [Афанасьева, 1975; Коряков, 1975; Поигунов, 1975; Кожов, 1972]

Вид	Годовой рацион, ккал/м ² год	Продукция, ккал/м ² год	Среднегодовая биомасса, ккал/м ²	Средняя длина гидробионтов, см
Эпишура	407	80	6,0	0,16
Циклоп	15,7	3,4	0,3	0,2—0,6
Макрогектопус	22,5	4,7	3,1	3—4
Голомянки	8,1	2,95	3,69	10—16
Бычки	1,34	0,23	0,23	10—12
Омуль	1,8	0,3	1,5	30—40
Нерпа	1,6	0,22	1,26	165

Коэффициенты накопления по отношению к содержанию ЗВ в эпинуре с учетом (А) и без учета (Б) выведения из организма для разных коэффициентов ассимиляции (α_i)

Вид	А				Б			
	$\alpha_i = 1$	$\alpha_i = 0,8$	$\alpha_i = 0,5$	$\alpha_i = 0,05$	$\alpha_i = 1$	$\alpha_i = 0,8$	$\alpha_i = 0,5$	$\alpha_i = 0,05$
Эпинура	3,93—4,23	3,14—3,43	1,96—2,14	0,197—0,214	4,62	3,69	2,31	—
Циклоп	4,07—4,20	3,27—3,36	2,04—2,10	0,204—0,21	4,79	3,23	2,39	0,23
Макрогектопус	2,27—2,81	1,56—1,93	0,74—0,91	0,038—0,046	6,20	4,24	4,97	0,24
Голомянки	4,63—5,20	3,20—3,57	1,56—1,72	0,097—0,104	12,99	8,61	3,91	0,094
Бычки	3,90—5,03	2,43—3,40	0,96—1,18	0,025—0,030	24,21	14,34	5,06	0,21
Омуль	9,65—11,81	5,31—6,49	1,57—1,91	0,008—0,010	47,59	25,92	7,50	0,009
Нерпа								0,036

Содержание ЗВ в нерпе и омуле, которые замыкают трофическую структуру экосистемы оз. Байкал, может в 47 и 24 раза соответственно превышать концентрацию токсичного вещества в эпинуре (табл. 3.2). Увеличение концентрации ЗВ в гидробионтах называется «биологическим усилением», и модель качественно правильно отражает этот эффект.

Время, за которое концентрация ЗВ достигает 99% от равновесной, примерно равно величине $T_i = 4(P_i/N_i^* + \gamma_i)^{-1}$, время «насыщения» всей экосистемы не меньше $\max T_i$. Для экосистемы оз. Байкал эта величина равна 23 годам.

Выведение и ассимиляция ЗВ гидробионтами. Параметры γ_i и α_i могут существенно искажать характер накопления ЗВ. Рассмотрим, как влияет коэффициент ассимиляции металлов гидробионтами на динамику накопления в экосистеме оз. Байкал. В работе [Irgensen, 1979] предлагается использовать данные по способности тканей адсорбировать эту категорию ЗВ, при этом металлы можно разделить на три группы (табл. 3.3). Мы провели расчет коэффициентов накопления (K_{N_i}) при следующих значениях коэффициентов ассимиляции ЗВ: $\alpha_i = 0,8$ для первой группы металлов, $\alpha_i = 0,5$ и $\alpha_i = 0,05$ для второй и третьей (см. табл. 3.2). Для таких металлов, как Cd, Fe, Zn, накопления вообще не происходит.

Для металлов Pb, Hg, Co, Cu, соединения которых являются наиболее токсичными, принцип «биологического усиления» сохраняется. Однако

Метаболизм металлов в человеческом организме
[Spector, 1956]

Способность элементов адсорбироваться через стенки кишок	Элемент
I Больше 70%	K, Li, Na, Ag
II 5—70%	Co, Cu, Ni, Pb, Hg, Ca, Sn
III Меньше 5%	Cd, Al, Cl, Fe, Zn, Cr

эту группу металлов необходимо более подробно дифференцировать, чтобы понять, для каких металлов накопления не наблюдаются.

Другим важным параметром, определяющим уровень накопления на данном трофическом уровне, является экскреция ЗВ. Из соотношения (3.1.4) видно, что выделение ЗВ приводит к снижению равновесной концентрации и, кроме того, может уменьшить время «насыщения». По данным об экскреции Cd в работе [Jørgensen, 1979] построена зависимость интенсивности выведения от длины организма. Эта зависимость может быть аппроксимирована прямой с угловым коэффициентом, равным 0,75 (рис. 3.3).

Принимая во внимание линейные размеры гидробионтов оз. Байкал (см. табл. 3.1), мы рассчитали интенсивность экскреции ЗВ для каждого вида, а также время «насыщения» с учетом выведения (табл. 3.4). Выведение незначительно изменяет время «насыщения» гидробионтов нижних трофических уровней (эпишура, циклоп, макрогектопус) и приводит к значительному сокращению этого периода для рыб и хищных организмов. Время «насыщения» всей экосистемы уменьшается при этом до 13 лет.

Т а б л и ц а 3.4

Интенсивность экскреции, рассчитанная по зависимости выведения Cd от длины гидробионтов (а). Рассчитанные времена 99%-ного «насыщения» каждого вида с учетом (б) и без учета (в) экскреции ЭВ гидробионтами

Вид	Год ⁻¹		
	а	б	в
Эпишура	2,34	0,255	0,3
Циклоп	1,98—0,87	0,30—0,33	0,35
Макрогектопус	0,26—0,21	2,25—2,32	2,6
Голомянки	1,15—0,81	2,05—2,48	5,0
Бычки	1,15—1,01	1,86—1,99	4,0
Омуль	0,51—0,41	5,63—6,56	20,0
Нерпа	0,14	12,7	22,9

Вместе с тем значительно изменяется и уровень накопления ЗВ в видах, замыкающих трофическую сеть экосистемы оз. Байкал. Коэффициент накопления для омуля и нерпы уменьшился примерно в 4—5 раз при максимальном коэффициенте ассимиляции ЗВ.

Коэффициент накопления Zn в тканях, коже и костях бычков по отношению к содержанию его в эпинуре, по данным В. А. Ветрова [Ветров и др., 1982], колеблется в интервале 0,1—0,5, что хорошо согласуется с расчетными КН при 5%-ной усвояемости из пищи (см. табл. 3.2).

Влияние аккумуляции токсичных веществ на структуру экосистемы. Существующие результаты токсикологических экспериментов показывают связь смертности с уровнем содержания ЗВ в воде. Обширные сведения по концентрациям, при которых смертность особей достигает 50% (LC₅₀), приведены в работе С. А. Патина [1979].

Характерной особенностью рассматриваемой группы поллютантов является высокая миграционная способность в водной экосистеме, благодаря чему их концентрации в воде чрезвычайно низки и, как правило, не превышают ПДК. Поэтому вопрос о применимости данных токсикологических экспериментов для анализа воздействия на экосистему остается открытым. Более правильно связывать смертность с концентрацией поллютантов в организме, однако подобного рода данные в нашем распоряжении отсутствуют.

С. В. Бердников с соавторами [1982] исследовал структурные изменения в экосистеме при наличии кумулятивных эффектов, приводящих к росту смертности пропорционально содержанию ЗВ в организмах. Аналогичные вопросы обсуждали В. В. Алексеев и А. О. Кокорин [1982] для экосистемы с более сложной структурой пищевых отношений (два трофических уровня, по два вида на каждом), однако авторы применяют гипотезу непосредственного воздействия пестицидов в воде на смертность. Мы предполагали, что экосистема имеет вид пищевой цепи, т. е. каждый трофический уровень представлен одним доминирующим видом. Для описания динамики такой трофической структуры использовалась следующая модель [Свирижев, Логофет, 1978]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R &= Q - V(R_0) N_1; \\ \frac{d}{dt} N_i &= K_i V_i(N_{i-1}) N_i - m_i N_i - V_{i+1}(N_i) N_{i+1}, \\ & i = 2, \dots, n-1; \\ \frac{d}{dt} N_n &= K_n V_n(N_{n-1}) N_n - m_n N_n, \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

где R — ресурс, используемый экосистемой; N_i — биомассы видов; n — число видов в экосистеме; $V_i(N_{i-1})$ — трофические функции эквивалентные удельным рационам — R_i ; m_i — смертность;

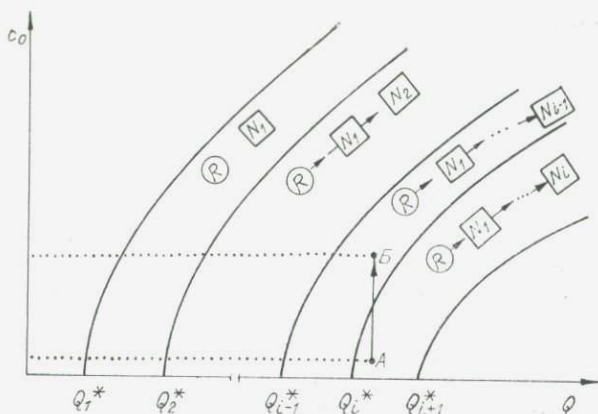


Рис. 3.4. Связь структуры (длины трофической цепи экосистемы) с используемым ресурсом (Q) и уровнем ЗВ в нем (c_0). Перемещение экосистемы из точки A в точку B из-за загрязнения среды приводит к элиминации верхних трофических уровней.

K_i — к. п. д. переработки пищи в биомассу i -го вида; Q — скорость поступления ресурса в систему.

Предполагалось, что смертность гидробионтов линейно возрастает с увеличением концентрации ЗВ в организмах, т. е. $m_i = m_i^0 + \delta_i c_i$, где δ_i — параметр воздействия, m_i^0 — естественная смертность.

Кроме этого, мы считали, что поступающий ресурс содержит ЗВ в концентрации c_0 , которая накапливается по трофической цепи в соответствии с (3.1.1).

Показано [Свирижев, Логофет, 1978], что ресурс Q можно разделить на пересекающиеся интервалы величинами $Q_i^*, Q_i^* < Q_{i+1}^*$ и в каждом интервале (Q_i^*, Q_{i+1}^*) может существовать трофическая цепь длины i . Условие устойчивости и существования стационарных решений системы (3.1.5) совместно с (3.1.1) позволяет определить связь входного уровня загрязнения (c_0) с интенсивностью поступления ресурса (Q). Рост уровня загрязнения поступающего ресурса приводит к сокращению длины трофической сети (рис. 3.4), при этом, независимо от избирательности токсического воздействия, элиминации подвержены виды, занимающие верхнее положение в трофической пирамиде.

Рассмотренная выше схема позволяет получить оценку накопления ЗВ в водной экосистеме на основе данных экологических характеристик каждого вида и той структуры пищевых отношений, которая сложилась в экосистеме. Это позволяет заранее понять последствия антропогенного загрязнения водоема.

Такие оценки будут тем более точны, чем больше натуральных наблюдений будет в нашем распоряжении.

§ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ АНТРОПОГЕННОГО ВЛИЯНИЯ НА ФИТОЦЕНОЗ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые аспекты загрязнения водоемов стойкими веществами, связанные с функционированием планктонного фитоценоза.

Многочисленные примеры нарушений нормального развития альгофлоры в ответ на нарушение сбалансированности стока биогенных элементов убеждают в том, что сообщества фито-планктона являются одним из наиболее чувствительных к загрязнению звеньев экосистемы.

Результаты экспериментов по определению воздействия соединений тяжелых металлов [Патин, 1979] и хлорорганических соединений [Wurster, 1968] на одноклеточные водоросли в культуре свидетельствуют о возможности прямого влияния этих загрязняющих веществ (ЗВ) при концентрациях, которые уже сейчас могут наблюдаться в некоторых водоемах. Так, авторы работы [Костяев и др., 1980], анализируя результаты своих исследований по воздействию цинка и кобальта на синезеленую водоросль *Anabaena spiroides*, а также результаты работы [Аникушина и др., 1978], отмечают, что токсические концентрации ряда металлов меньше принятых ПДК (табл. 3.5).

Анализируя результаты влияния тяжелых металлов (ТМ) на природные сообщества фитопланктона в условиях, максимально приближенных к естественным, ряд исследователей [Патин, 1979; СЕРЕХ..., 1975, цит. по: Мартин, 1979; Носов и др., 1981] указывают на сложные структурные и динамические изменения в функционировании модельного планктонного фитоценоза, к которым приводят фазовые реакции клеток на присутствие в среде токсичных веществ.

Вместе с тем Л. П. Брагинский [1977], рассматривая безуспешные попытки найти эффективный альгицид для борьбы с «цветением» воды, показывает, что планктонный фитоценоз обладает набором буферных систем, от клеточных до биоценологических, что способствует значительной устойчивости этого звена водной экосистемы.

Таблица 3.5

Влияние ионов металлов на *Anabaena spiroides*

Ионы металлов	Токсическая концентрация, мг-ион/л	ПДК в воде***, мг-ион/л	Ионы металлов	Токсическая концентрация, мг-ион/л	ПДК в воде***, мг-ион/л
Cd ²⁺	0,0025 *	0,05	Cu ²⁺	0,0075 *	0,010
Co ²⁺	0,0025 **	0,010	Pb ²⁺	0,0500 *	0,100
Zn ²⁺	0,0050 **	0,010			

* По [Аникушина и др., 1978].

** По [Костяев и др., 1980].

*** По [Правила ..., 1975].

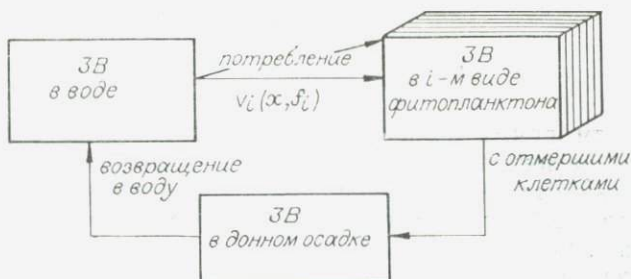


Рис. 3.5. Принятая при моделировании схема миграции загрязняющих веществ в системе вода — фитоценоз — донные осадки — вода.

В этой связи математическое моделирование является эффективным методом исследования возможных последствий загрязнения водоемов стойкими поллютантами.

Математическая модель. Для анализа воздействия тяжелых металлов (ТМ) на планктонный фитоценоз рассмотрим следующую схему миграции ТМ в водоеме (рис. 3.5).

Клетки фитопланктона аккумулируют доступные им формы ТМ из воды. При этом отношение содержания ТМ в клетках в 10^3 — 10^6 раз превышает концентрацию в воде (см., например, [Морозов, Патин, 1976]).

Накопленные фитопланктоном ТМ вместе с отмершими клетками поступают в донные отложения, где параллельно с минерализацией фитогенного органического вещества происходит переход ТМ в воду.

Миграцию ТМ в цепи вода — фитопланктон — донные отложения можно описать следующими балансовыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_i V_i(x, f_i) + kx_d, \\ \dot{z}_i &= V_i(x, f_i) - m_i z_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{x}_d &= \sum_i m_i z_i - kx_d. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Здесь x — концентрация ТМ в воде; f_i — плотность i -го вида фитопланктона; z_i — общее содержание ТМ в фитопланктоне в единице объема ($z_i = c_i f_i$, c_i — концентрация ТМ в единице биомассы фитопланктона); x_d — общее содержание ТМ в донных отложениях; m_i — интенсивность отмирания клеток i -го вида фитопланктона; k — скорость перехода ТМ из донных отложений в воду. Предполагается, что этот процесс протекает в соответствии с кинетикой первого порядка.

Потребление ТМ из воды i -м видом водорослей описывается функцией $V_i(x, f_i)$. Для системы (3.2.1) справедливо соотношение

$$\dot{x} + \sum_i \dot{z}_i + \dot{x}_d = 0$$

$$x + \sum_i z_i - x_d = \text{const.} \quad (3.2.2)$$

Обозначим сумму, стоящую слева в выражении (3.2.2), через M . Эта величина представляет собой общий запас ТМ в системе. Здесь мы не учитываем внешние стоки ТМ в водоем, кроме этого, не рассматриваем процесс безвозвратного захоронения ТМ в донных отложениях, выделяя процессы взаимодействия фитоценоза с поллютантами.

Используя (3.2.2), можно исключить последнее уравнение из (3.2.1):

$$\dot{x} = - \sum_i V_i(x, f_i) + k \left(M - \sum_i z_i - x \right), \quad (3.2.3)$$

$$\dot{z}_i = V_i(x, f_i) - m_i z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Систему (3.2.3) необходимо дополнить моделью динамики фитоценоза.

Для целей данного исследования при анализе динамики изолированной популяции фитопланктона будем рассматривать модель

$$\dot{f} = f(\varepsilon(f) - m), \quad (3.2.4)$$

где f — плотность плактона, m — смертность, скорость роста $\varepsilon(f)$ — монотонно возрастающая функция плотности, а также более традиционную при исследовании фитопланктона модель [Домбровский, 1977]:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= f(\varepsilon(s) - m), \\ \dot{s} &= -k_1 \varepsilon(s) f + k_2 d, \\ \dot{d} &= m f - k_2 d. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Здесь f , s , d — плотность фитопланктона, минеральная и органическая формы лимитирующего рост биогенного элемента соответственно; k_1 , k_2 — параметры; скорость роста $\varepsilon(s)$ — возрастающая функция концентрации минеральной формы нутриента.

Система (3.2.4) [Свирижев, Логофет, 1978] и система (3.2.5) [Домбровский, 1977] имеют не более двух стационарных режимов, один из которых соответствует нулевой плотности фитопланктона, и не имеют замкнутых траекторий в фазовой плоскости.

В том случае, когда воздействие ТМ непосредственно связано с биогенными элементами, мы будем дополнять систему (3.2.3) моделью (3.2.5), в противном случае будем рассматривать уравнение (3.2.4).

При анализе воздействия ТМ на фитоценоз дополним систему

(3.2.3) моделью конкуренции, ограничив рассмотрение двумя видами:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= f_1(\varepsilon_1(f_1, f_2) - m_1), \\ \dot{f}_2 &= f_2(\varepsilon_2(f_1, f_2) - m_2). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Здесь оба вида оказывают друг на друга отрицательное влияние, но система (3.2.5) допускает их совместное существование при определенном наборе параметров. Отметим, что традиционный для фитопланктона подход потребовал бы от нас введения по крайней мере двух независимых факторов, что существенно повысило бы размерность системы (3.2.6).

Потребление ТМ фитопланктоном. Потреблению ТМ клетками фитопланктона предшествует процесс адсорбции на клеточных оболочках [Саяев, 1969]. Клетки фитопланктона представляют собой специфический адсорбент с сильно развитой поверхностью, примерно 2000 см на 1 г сырой массы [Патин, Морозов, 1981]. При этом поверхность, способная адсорбировать ТМ, непрерывно увеличивается вследствие роста клеток. Поэтому валовое потребление ТМ из воды зависит от продуктивных характеристик фитопланктона.

Здесь мы не будем подробно останавливаться на конкретных механизмах проникновения ТМ из внеклеточного пространства внутрь клетки, тем более что этот процесс еще мало изучен. Укажем только на значительную роль рН и содержания Са в среде и клетках [Mierle, Stokes, 1976; Марчулене и др., 1978].

Будем считать, что равновесие между клеткой и средой наступает достаточно быстро и, следовательно, удельное потребление может быть задано функцией $\varphi_i(x)$, определяющей количество ТМ на единицу биомассы фитопланктона.

Функция $\varphi_i(x)$ — результат динамического равновесия между поглощением ТМ из среды и экскрецией их обратно в воду и напоминает изотерму адсорбции, т. е. может быть задана в виде уравнения Фрейндлиха $\varphi_i(x) = cx^{1/m}$, где c, m — эмпирические параметры. Очень часто $\varphi_i(x)$ может быть аппроксимирована линейной зависимостью $\varphi_i(x) = cx$, справедливой при малых x .

При больших концентрациях ТМ в воде характер зависимости удельного потребления, по-видимому, должен отличаться от процесса механической адсорбции вследствие влияния ТМ на клетку. Так, показано, что ТМ нарушают проницаемость клеточных мембран [Костяев и др., 1980], что может привести к снижению потребления.

Таким образом, кинетика потребления ТМ фитопланктоном задается следующим образом:

$$V_i(x, f_i) = \varphi_i(x) \varepsilon_i f_i. \quad (3.2.7)$$

Влияние ТМ на фитопланктон. Микроэлементы играют важную роль в биологических процессах. Металлы входят в состав ферментов, и одна из важных функций, которую они выполняют,

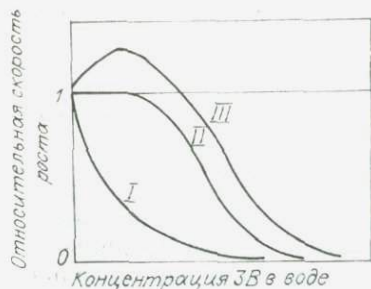


Рис. 3.6. Типы влияния тяжелых металлов и интенсивность ассимиляции c^{14} .

железные металлы являются [Брукс, 1982].

состоит в их способности катализировать скорости реакции за счет стабилизации образующихся отрицательных зарядов. Скорость реакции может увеличиваться в 10^4 — 10^6 раз [Фершт, 1980, с. 67—69]. Вместе с тем при больших концентрациях тяжелыми ингибиторами ферментов

Можно выделить следующие типы фазовых реакций клеток фитопланктона на присутствие токсикантов в среде исходя из результатов влияния ТМ на интенсивность ассимиляции c^{14} (рис. 3.6). Первый тип соответствует сильному ингибированию этого процесса. Для второго типа характерно незначительное влияние при малых концентрациях с ингибированием при больших. Третий тип отличается от второго характерной стимуляцией потребления c^{14} при малых концентрациях.

Таким образом, скорость роста фитопланктона в зависимости от концентрации в среде для разных типов воздействия обладает следующими свойствами.

I тип:

$$а) \varepsilon(x, \cdot) \geq 0, \quad (3.2.8a)$$

$$б) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} < 0, \quad (3.2.8б)$$

$$в) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} > 0, \quad (3.2.8в)$$

при $x \geq 0$.

Здесь и далее точкой обозначены другие факторы, влияющие на скорость роста.

II тип:

$$а) \varepsilon(x, \cdot) \geq 0, \quad (3.2.9a)$$

$$б) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \leq 0, \quad (3.2.9б)$$

$$в) \exists x_1 > 0: \quad (3.2.9в)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} < 0 \text{ при } x < x_1,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} > 0 \text{ при } x > x_1.$$

III тип:

$$а) \varepsilon(x, \cdot) \geq 0 \text{ при } x \geq 0, \quad (3.2.10a)$$

$$б) \exists x_2 > 0: \quad (3.2.10б)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} > 0 \text{ при } x < x_{2*}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \leq 0 \text{ при } x > x_{2*}$$

в) аналогично (3.2.9в). (3.2.10в)

Так как свойствам (3.2.8) — (3.2.10) удовлетворяет широкий класс функций, рассмотрим зависимости, которые можно получить из предположения о влиянии ТМ на кинетику ферментативных реакций. Обоснованность такого рассмотрения определяется тем, что «отравление какого-либо фермента, участвующего в важном метаболическом процессе, приостановит весь процесс и окажет глубокое, а иногда и летальное действие на организм» [Диксон, Уэбб, 1966].

По Моно [Monod, 1942], скорость роста в зависимости от концентрации биогенного элемента задается в виде

$$\varepsilon^*(s) = \frac{\mu s}{k_M + s}, \quad (3.2.11)$$

где μ — максимальная скорость роста; k_M — константа Михаэлиса.

Тяжелые металлы могут изменять как k_M (конкурентное влияние), так и μ (неконкурентное влияние). При этом скорость роста зависит от концентрации ТМ следующим образом:

$$\text{а) } \varepsilon(s, x) = \mu s / (s + k_M(1 + x/\beta)), \quad (3.2.12\text{а})$$

$$\text{б) } \varepsilon(s, x) = \mu s / (s + k_M(1 + x/\beta_1)/(1 + x/\beta_2)) \quad (3.2.12\text{б})$$

при влиянии на k_M и

$$\text{а) } \varepsilon(s, x) = \mu s / ((s + k_M)(1 + x/\beta)), \quad (3.2.13\text{а})$$

$$\text{б) } \varepsilon(s, x) = \mu(1 + x/\beta_1) \cdot s / ((s + k_M)(1 + x/\beta_2)) \quad (3.2.13\text{б})$$

при влиянии на величину μ , где β_1, β_2 — параметры. Отметим, что при $\beta_1 < \beta_2$ в (3.2.12б) и (3.2.13б) ТМ оказывают стимулирующее действие. Если $\beta_1 > \beta_2$, то происходит частичное ингибирование, так как при $x \rightarrow \infty$ получаем $\varepsilon(s, \infty) = \mu\beta_2 s / \beta_1 \cdot (s + k_M)$, $\varepsilon(s, \infty) = \mu s / (s + k_M\beta_2/\beta_1)$.

Для модели (3.2.4) зависимость скорости роста от плотности задается в виде

$$\varepsilon(f) = \mu / (k_f + f) \quad (3.2.14)$$

и предполагается воздействие ТМ только на μ .

Первый тип воздействия (3.2.8) реализуется с помощью (3.2.12) и (3.2.13) при $\beta_1 > \beta_2$. Второй и третий типы воздействия можно получить путем комбинирования стимулирующего и ингибирующего влияния, например:

$$\varepsilon(f, x) = \frac{\mu}{(k_f + f)(1 + x/\beta_3)} \cdot \frac{1 + x/\beta_1}{1 + x/\beta_2}, \quad \beta_1 < \beta_2. \quad (3.2.15)$$

Условия (3.2.96) и (3.2.106) позволяют получить связь между параметрами $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, которая характеризует каждый из этих двух типов воздействия.

Динамические режимы при воздействии ТМ на изолированную популяцию фитопланктона. Объектом исследования здесь является система

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= -W(\bar{x}, \bar{f}) + w(1 - \bar{z} - \bar{x}), \\ \dot{\bar{z}} &= W(\bar{x}, \bar{f}) - \bar{z}, \\ \dot{\bar{f}} &= \bar{f}(\Psi(\bar{x}, \bar{f}) - 1),\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

в безразмерных переменных

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x/M, \quad \bar{z} = z/M, \quad \bar{f} = f/k_f, \quad \tau = mt, \\ w &= k/m, \quad \Psi(\bar{x}, \bar{f}) = \varepsilon(x, f)/m, \quad W(\bar{x}, \bar{f}) = V(x, f)/m,\end{aligned}$$

где t — время; k_f — характерный размер для фитопланктона. Все другие обозначения введены ранее.

В системе (3.2.16) всегда существует равновесие при нулевой плотности фитопланктона (черточки у безразмерных переменных мы опускаем)

$$f^* = 0, \quad x^* = 1, \quad z^* = 0,\tag{3.2.17}$$

а также возможны положительные стационарные решения вида

$$f^* > 0, \quad z^*, x^* > 0, \quad z^* + x^* < 1.\tag{3.2.18}$$

Условие устойчивости равновесного состояния (3.2.17) имеет вид

$$\Psi(1, 0) < 1.\tag{3.2.19}$$

Для исследования устойчивости равновесия (3.2.18) рассмотрим характеристическое уравнение системы (3.2.16):

$$\begin{aligned}\lambda^3 + (1 + A + w + D)\lambda^2 + ((D + A)(1 + w) + DA + A + w - Bc)\lambda + \\ + D(A(1 + w) + w) - Bc(1 + w) = 0,\end{aligned}$$

где $A = \partial W / \partial x$, $B = \partial W / \partial f$, $c = -f^* \partial W / \partial x$, $D = -f^* \partial \Psi / \partial f$ — производные функции $W(x, f)$ и $\Psi(x, f)$ взяты в точке (3.2.18).

Устойчивость стационарной точки (3.2.18) определяется критерием Рауса — Гурвича, а именно выполнением условий:

$$\text{а) } 1 + w + A + D > 0,\tag{3.2.20а}$$

$$\text{б) } D \left(A + \frac{w}{1+w} \right) - Bc > 0,\tag{3.2.20б}$$

$$\begin{aligned}\text{в) } (1 + w + A + D)((D + A)(1 + w) + DA + A + w - Bc) - \\ - D(A(1 + w) + w) + Bc(w + 1) > 0.\end{aligned}\tag{3.2.20в}$$

Мы предполагали ранее, что скорость роста убывает с ростом плотности фитопланктона, т. е. всегда $D > 0$. Кроме того,

с ростом фитопланктона валовое потребление ТМ не уменьшится, $B \geq 0$.

Возможны следующие ситуации.

1. В точке равновесия $c < 0$ (стимуляция). Тогда $A = 0$ в силу (3.2.7) и условия (3.2.20) выполняются независимо от величины D . Равновесие (3.2.20) асимптотически устойчиво.

2. В точке равновесия $c > 0$ (ингибирование). В зависимости от вида функции $W(x, f)$ величина A может быть больше или меньше нуля. Если $A > 0$, можно показать, что при выполнении (3.2.20б) будет выполняться и (3.2.20в). Если $A < -w/(1+w)$, то равновесие будет неустойчивым. В интервале $0 > A > -w/(1+w)$ устойчивость сильно зависит от конкретных стационарных значений.

Рассмотрим следующие конкретные функции для скорости роста и потребления:

$$\varepsilon(x, f) = \mu / ((k_f + f)(1 + x/\beta)), \quad V(x, f) = cx\varepsilon(x, f)f,$$

где μ — максимальная скорость роста, или в безразмерных переменных

$$\Psi(x, f) = p / (1 + f)(1 + \eta x), \quad W(x, f) = \gamma x \Psi(x, f)f, \quad (3.2.21)$$

$$\gamma = ck_f, \quad p = \mu/m, \quad \eta = M/\beta.$$

Стационарные состояния (3.2.18) определяются уравнениями

$$x^* = 1 / (1 + Rf^*), \quad R = \gamma(w + 1)/w, \quad z^* = \gamma x^* f^*, \quad (3.2.22)$$

$$R(f^*)^2 + (1 + \eta - R(p - 1))f^* + \eta - (p - 1) = 0.$$

Отметим, что из $f^* > 0$ следует $x^* > 0$, $z^* > 0$, $z^* + x^* < 1$.

Рассмотрим параметрический портрет системы в координатах (R, η) . Коэффициент η зависит от общего содержания ТМ в водоеме (M) и параметра ингибирования β . Параметр R связан с коэффициентом γ , который в литературе называется коэффициентом накопления и зависит от соотношения скоростей возвращения ТМ из фитогенной формы и смертности фитопланктона w . При этом всегда $R > \gamma$. В области параметров I (рис. 3.7) существует и устойчиво одно равновесие типа (3.2.18). Стационарное состояние с нулевой плотностью планктона будет в этой области I неустойчивым. Граница между областями I, II, III определяется из условия (3.2.19), которое для (3.2.21) принимает вид $\eta > (p - 1)$. В области II положительных решений вообще нет. В области III есть два положительных решения, устойчивым будет равновесие с большей плотностью планктона. Таким образом, в области параметров III мы наблюдаем появление триггерного режима. Границы между рассматриваемыми областями зависят только от кинетических параметров фитопланктона — максимальной скорости роста μ и смертности m .

Обозначим точку пересечения границ области III через $R_{кр} = p/(p - 1)$. Рассмотрим параметр η как бифуркационный. При

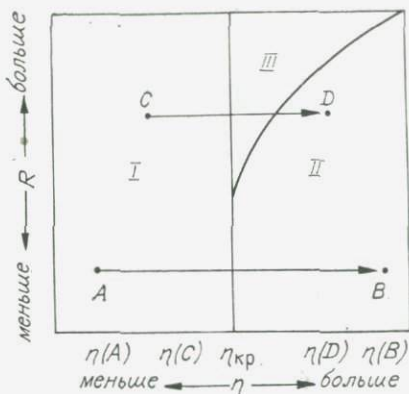


Рис. 3.7. Параметрический портрет динамических режимов изолированной популяции фитопланктона при воздействии тяжелыми металлами.

изменении η от $\eta(A)$ до $\eta(B)$ для $R < R_{кр}$ стационарная плотность планктона уменьшается и при $\eta = \eta_{кр} = p - 1$ становится равной нулю (рис. 3.8, а). При этом все ТМ переходят в воду (рис. 3.8, б). При изменении η от $\eta(c)$ до $\eta(D)$ для $R > R_{кр}$ происходит уменьшение f^* до тех пор, пока линия СВ не пересечется с границей между II и III областями; в этой точке положительные стационарные состояния — устойчивое (сплошная линия) и неустойчивое (пунктирная линия) — исчезают и система «скачком» переходит в точку (3.2.17) (рис. 3.8, в, г). Таким образом, когда $R > R_{кр}$, система даже при наличии условий устойчивости неблагоприятного равновесия (3.2.17) обладает достаточным запасом устойчивости в виде области притяжения равновесия (3.2.18).

Рост параметра η связан с увеличением общего уровня содержания ТМ в водоеме. Предположим, что величина M увеличивается, но очень медленно. Какие адаптационные возможности появляются у популяции одноклеточных для компенсации роста загрязнения? Первый путь связан с адаптацией к поллютанту, т. е. с изменением константы ингибирования β с целью уменьшения подавляющего воздействия. Другая возможность состоит в увеличении параметра γ . Это может произойти путем увеличения удельной поверхности клеток, а также снижения интенсивности экскреции ТМ. Так как при уменьшении размера клеток удельная поверхность, как правило, увеличивается, то адаптация должна приводить к преимуществу фитопланктона с более мелким диаметром клеток. К аналогичному выводу пришел Б. У. Фрост [1980] при модельном анализе воздействия загрязнения среды на скорость дыхания водорослей.

Как мы отмечали ранее, популяция водорослей может существовать и тогда, когда уровень загрязнения превышает критический. Здесь возможна следующая ситуация. Концентрация ТМ ниже ПДК, что, в соответствии с принятыми нормами контроля качества воды по этому показателю, не дает причин для беспокойства. Однако некоторое возмущение может вывести систему из области притяжения равновесия (3.2.18), и тогда концентрация ТМ в воде «сразу» станет больше ПДК, а следовательно, контроль качества воды по этому показателю не является эффективным. Для адекватной оценки уровня загрязнения водоема

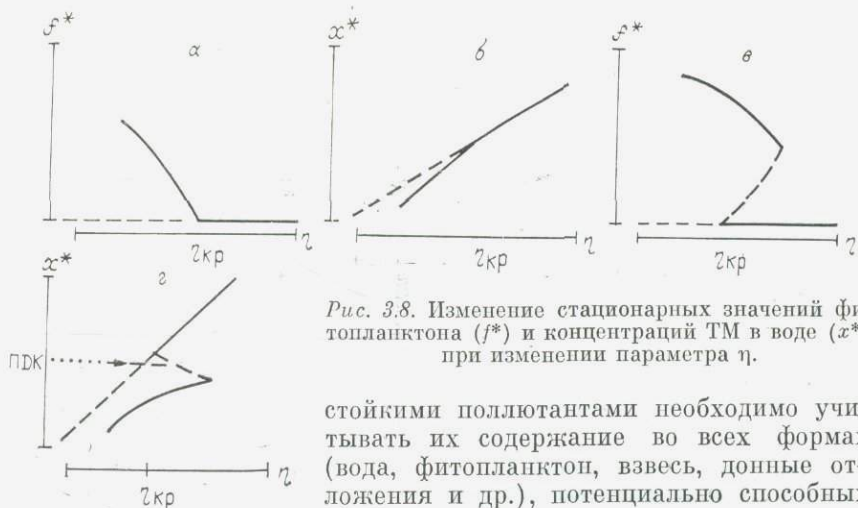


Рис. 3.8. Изменение стационарных значений фитопланктона (f^*) и концентраций ТМ в воде (x^*) при изменении параметра η .

стойкими поллютантами необходимо учитывать их содержание во всех формах (вода, фитопланктон, взвесь, донные отложения и др.), потенциально способных загрязнить водную среду.

Для определения критического уровня загрязнения ТМ в водоеме могут быть использованы экспериментальные данные о влиянии ТМ на скорость роста одноклеточных водорослей в культуре и условие (3.2.19). Точка пересечения экспериментального графика воздействия с прямой $y = m/\mu$ (рис. 3.9) дает нам величину $M_{кр}$, умножив которую на объем водоема, получаем критический уровень ТМ в водоеме.

Рассмотрим теперь модель (3.2.3) и (3.2.5), а скорость роста в виде (3.2.13а):

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= f(\varepsilon(s, x) - m), \\
 \dot{s} &= -k_1 \varepsilon(s, x) f + k_2 (N - s - f), \\
 \dot{x} &= -cx \varepsilon(s, x) f + k(M - z - x), \\
 \dot{z} &= cx \varepsilon(s, x) f - mz, \\
 N &= d + s + f, \\
 M &= x_d + z + x,
 \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

где N — общее содержание биогенных элементов, а другие обозначения введены ранее. На параметрическом портрете в осях (N, η) (рис. 3.10) получаются те же области, что и в предыдущем случае. Отметим, что применение вместо (3.2.13а) зависимости (3.2.12а) не изменяет параметрический портрет системы в этих осях.

В системе (3.2.23) есть два параметра управления — общее содержание лимитирующего элемента N и общий уровень загрязнения водоема ТМ. Увеличение уровня биогенного элемента в водоеме может компенсировать воздействие ТМ, и наоборот. Это дает возможность эффективного управления ростом альгофлоры водоема, не имеющего рыбохозяйственного значения, с помощью соединений ТМ как альгицидного средства.

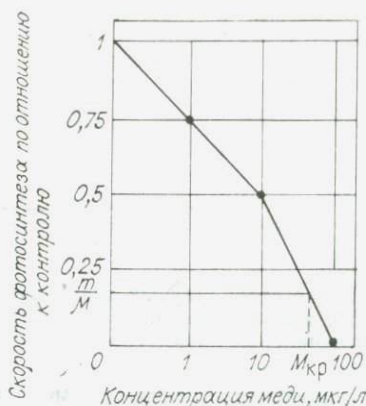


Рис. 3.9. Пример определения критического уровня загрязнения по результатам экспериментального воздействия медью на скорость фотосинтеза *Gyrodinium fissum*. Экспериментальные данные взяты из работы С. А. Патина [1979, с. 117].

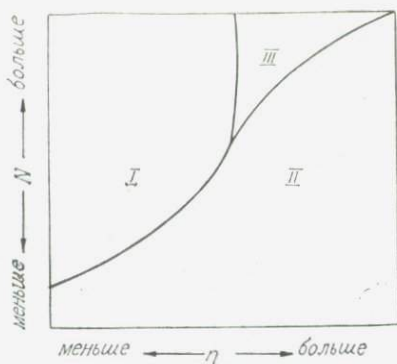


Рис. 3.10. Параметрический портрет системы фитопланктон — биогенный элемент — тяжелый металл.

Рассмотренные выше модели показывают, что учет загрязнения как фактора развития популяции фитопланктона приводит к увеличению числа стационарных решений и, следовательно, к усложнению динамического поведения. Отметим, что мы не рассматривали здесь возможность появления более сложных динамических режимов типа предельных циклов и др.

Мы рассматривали поведение изолированной популяции фитопланктона при воздействии одного типа ЗВ. Понятно, что рассмотренная выше схема моделирования применима в случае нескольких типов ТМ при условии отсутствия прямого взаимодействия между ними. Это дает возможность исследовать средствами ЭВМ динамическое поведение системы «фитоценоз — ТМ» при различных гипотезах о характере совместного действия разных ТМ на рост одноклеточных водорослей.

Влияние на фитоценоз. Результаты взаимодействия ТМ с изолированной популяцией фитопланктона нельзя экстраполировать на совокупность популяций вследствие существования фактора межвидовой конкуренции. Однако предыдущий этап необходим, так как «конкуренция регулирует распределение видов способами, которые нельзя понять без учета поведения видов в отсутствие конкуренции» [Уиттекер, 1980].

Для исследования влияния ТМ на фитоценоз рассмотрим модифицированную модель Лотки — Вольтерра (3.2.6):

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= f_1(\varepsilon_1(f_1, f_2) - m_1), \\ \dot{f}_2 &= f_2(\varepsilon_2(f_1, f_2) - m_2), \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

$$\varepsilon_1(f_1, f_2) = \varepsilon_1 \left(\frac{k_1 - f_1 - \alpha_1 f_2}{k_2} \right),$$

$$\varepsilon_{21}(f_1, f_2) = \bar{\varepsilon}_2 \left(\frac{k_2 - f_2 - \alpha_2 f_1}{k_2} \right),$$

где f_i — плотность i -го вида фитопланктона; $\bar{\varepsilon}_i$ — максимальная скорость роста; m_i — смертность; α_i — параметры конкуренции.

Модель (3.2.24) отличается от модели Лотки — Вольтерра выделением процесса отмирания. Если $m_i = 0$, то k_i называются «емкостью среды». При $m_i \neq 0$ эта характеристика заменяется на

$$\delta_i = k_i \frac{\bar{\varepsilon}_i/m_i - 1}{\bar{\varepsilon}_i/m_i}; \quad \bar{\varepsilon}_i > m_i.$$

Исход конкуренции в данной модели следующий:

- 1) $\alpha_1 < \delta_1/\delta_2$, $\alpha_2 > \delta_2/\delta_1$ — выживает вид f_1 ,
 - 2) $\alpha_1 > \delta_1/\delta_2$, $\alpha_2 < \delta_2/\delta_1$ — выживает вид f_2 ,
 - 3) $\alpha_1 > \delta_1/\delta_2$, $\alpha_2 > \delta_2/\delta_1$ — выживает или f_1 или f_2 ,
 - 4) $\alpha_1 < \delta_1/\delta_2$, $\alpha_2 < \delta_2/\delta_1$ — выживают оба вида.
- (3.2.25)

Влияние ТМ на фитопланктон в условиях его конкуренции может быть связано с изменением скорости роста, параметров δ_i или направлено на ослабление межвидовой конкуренции.

Понятно, что это приводит к разнообразному динамическому поведению системы, хотя в конечном итоге результат может быть сформулирован в виде одного из четырех утверждений вида (3.2.25).

Рассмотрим одну из возможных ситуаций. Соединение ТМ влияет на скорость роста вида 1, но им не потребляется. Вид 2 ассимилирует ТМ, однако является к нему толерантным. Математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= \bar{\varepsilon}_1 \frac{f_1}{1 + x/\beta} \cdot \frac{(k_1 - f_1 - \alpha_1 f_2)}{k_1} - m_1 f_1, \\ \dot{f}_2 &= \bar{\varepsilon}_2 f_2 \frac{k_2 - f_2 - \alpha_2 f_1}{k_2} - m_2 f_2, \\ \dot{x} &= -\gamma x \varepsilon_2(f_2, f_1) f_2 + w(M - x - z) \\ \dot{z} &= \gamma x \varepsilon_2(f_2, f_1) f_2 - m_2 z, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

где z — содержание ЗВ в виде 2 фитопланктона.

Пусть $\alpha_1 < \delta_1/\delta_2$. В этом случае вид f_1 имеет преимущества перед f_2 , так как либо он выживает, либо оба вместе.

Загрязнение водоема ТМ при таком соотношении параметров конкуренции приводит к следующим последствиям.

Если ранее вид 2 в основном «проигрывал» виду 1 в конкурентной борьбе, то сейчас существует некоторый критический уровень загрязнения водоема поллютантом, превышение которого приводит к выживанию только вида 2. При дальнейшем росте уровня загрязнения поведение системы регулируется теми же

механизмами, что и без конкуренции. Таким образом, воздействие ТМ и других стойких поллютантов на фитоценоз приводит к изменению исхода конкуренции, т. е. к перестройке всего фитоценоза, сужению области притяжения одних стационарных состояний и расширению других, появлению дополнительных стационарных точек.

Проведенное здесь исследование влияния ТМ на фитоценоз водных экосистем позволяет сделать следующие выводы.

Высокостабильные в водной среде загрязняющие вещества следует рассматривать как фактор, зависящий от плотности фитопланктона. Это связано со способностью альгофлоры снижать содержание этих соединений в воде.

При необходимости учитывать в моделях динамики ЗВ их воздействие на биоту следует принимать во внимание усложнение динамического поведения, например появление дополнительных стационарных режимов.

Рассмотренная выше схема моделирования, а также принятый способ описания воздействия ТМ на фитопланктон дают возможность (но только в рамках высказанных гипотез) изучить популяционный и биоценотический отклик на загрязнение водной среды.

Данная схема моделирования может быть полезной и при анализе воздействия нескольких видов ЗВ.

Для водоемов со слабой проточностью контроль качества воды по ПДК для таких ЗВ, как тяжелые металлы, не является эффективным, так как динамику системы определяет суммарное содержание ЗВ в воде, взвеси, фитопланктоне, донных отложениях и других формах, потенциально способных загрязнить воду.

Для водоемов, не имеющих рыбохозяйственного значения, ТМ могут быть достаточно эффективным средством борьбы с «цветением» воды, наравне с управлением уровнем биогенных элементов.

Воздействие ТМ на сообщества фитопланктона приводит к изменению исхода конкуренции и, следовательно, структурным изменениям для всей экосистемы. При этом заранее результат межвидовой конкуренции не всегда ясен.

§ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ САМООЧИЩЕНИЯ В АЗОВСКОМ МОРЕ

Азовский бассейн представляет собой крупнейший агропромышленный комплекс юга СССР. Современная технология производственных процессов предусматривает значительное водопотребление. В этой связи в Азовском бассейне имеют место, с одной стороны, дефицит водных ресурсов, а с другой — загрязнение природных вод сельскохозяйственными и промышленно-бытовыми сточными водами. Это привело к резкому ухудшению

водной среды в данном регионе, и в частности в Азовском море [Раткович и др., 1980].

Важнейшие факторы, определяющие гидрохимическое состояние водоема, следующие:

- 1) объем поступления загрязняющих веществ (ЗВ) в море;
- 2) объем поступления пресных вод с речным стоком и связанные с ним процессы разбавления;
- 3) процессы химической и биохимической деструкции ЗВ;
- 4) процессы биологического самоочищения моря, возникающие из-за потребления ЗВ водными организмами, фитопланктоном и т. д.

В настоящей работе рассматривается модель, в которой детально описываются первые три из указанных факторов. Такая модель дает возможность достаточно простым образом получать верхние оценки запасов ЗВ при различных режимах поступления ЗВ в Азовское море.

Модельные эксперименты позволяют, с одной стороны, сравнить эффективность конкретных водохозяйственных мероприятий, намечаемых на перспективу в Азовском бассейне, а с другой — определить общие динамические закономерности, обусловленные характером протекания и взаимосвязью гидрологических и гидрохимических процессов в море.

Отметим, что предлагаемая ниже модель может послужить основой для построения более тонких моделей, учитывающих и процессы биологического самоочищения. Предложенный принцип моделирования основных кинетических характеристик процесса самоочищения (ПС) может быть положен в основу методологии моделирования в силу комплексного учета совокупности различных внешних факторов, влияющих на интенсивность ПС и не зависящих от конкретного водоема.

Структура модели. В модели рассматриваются пять характерных для Азовского бассейна ЗВ: нефтепродукты, фенолы, СПАВ, пестициды (на примере пропанида), а также органические вещества (оцениваемые по величине биохимического потребления кислорода — БПК₅). Эти вещества, называемые неконсервативными, в достаточно короткие интервалы времени теряют свою токсичность, подвергаясь химическим и биохимическим превращениям.

В Азовском море выделяются два подрайона: Таганрогский залив и собственно море с однородными пространственными характеристиками, различающиеся солевым и температурным режимами, глубоководностью и объемом, условиями воздействия пресного стока. Поэтому все выходные характеристики осредняются для указанных подрайонов при более детальном районировании Азовского моря и учете влияния прилегающих устьев рек Дона и Кубани, а также проливной зоны Черного моря (рис. 3.11).

Введем в рассмотрение матрицу концентраций ЗВ в момент времени t , обозначив ее $x^t = \{x_{ij}^t\}$, $i = 1, 5$ — индекс вещества, $j = 1, 10$ — номер района.



Рис. 3.11. Схема районирования и источников поступления ЗВ в Азовском море.

Функционирование модели состоит в преобразовании заданного начального состояния x^0 с учетом процессов поступления ЗВ со стоками рек, сточными водами городов, а также процессов разбавления, биохимической деструкции, ветрового перемешивания, седиментации и адсорбции (рис. 3.12).

Преобразование $x^t \rightarrow x^{t+h}$ с временным шагом, равным 5 сут, представляет собой суперпозицию функций кинетики и баланса ЗВ: $x^{t+h} = F_2(F_1(x^t))$, где x^t, x^{t+h} — векторы концентраций ЗВ в моменты времени t и $t+h$ соответственно; $F_2(z) = Az + p^t/Q^t - cz$ — функция баланса ЗВ, здесь $A = A(Q^t, Os, Is, W, t)$ — матрица перетоков между районами в момент времени t (структура этой матрицы приведена в работе [Экспериментальные исследования..., 1980]), определяемая объемом стока рек Дона и Кубани, объемами осадков (Os) и испарений (Is) с акватории моря, ветровой деятельностью (W); p^t — вектор точечных поступлений некоторого вида ЗВ со стоками рек и сбросами городов в момент времени t ; c — константа седиментации; $F_1(x^t) = x^t E$ — функция кинетики ЗВ, здесь E — диагональная матрица, имеющая вид $E = \{e_{ij}\}$, $i, j = 1, 5$.

$$e_{ij} = \begin{cases} \exp(-k_i h), & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

где $k_i = k_i(TE, s, O_2, t)$ — компонента вектора скорости биохимической деструкции (константа распада), определяемая в момент времени t температурой воды (TE), солевым (s) и кислородным (O_2) режимами.

При построении вектора k [Сурков и др., 1977] принято исходить из максимальных величин скоростей распада (k_0), полученных при наличии оптимальных внешних условий, а затем за-

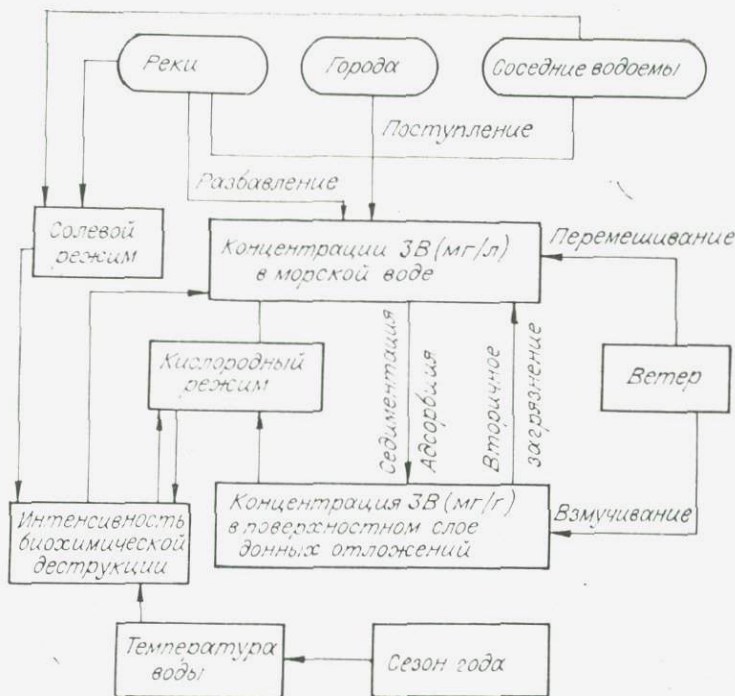


Рис. 3.12. Схема динамики неконсервативных ЗВ, поступающих в водоем.

давать поправочные множители, показывающие изменение коэффициента распада при отклонении внешних условий от оптимальных. Таким образом,

$$k = k_0 \varphi_1(TE, t) \varphi_2(s, t) \varphi_3(O_2, t) \varphi_4(t),$$

где $\varphi_i(i, t)$, $i = 1, 4$ — поправочные множители, зависящие от отклонения i -го фактора от оптимального значения. Множители задаются таблично (табл. 3.6, 3.7), для $i = 1, 2, 4$ $\varphi_3(O_2, t)$ — кусочно-линейная функция,

$$\varphi_3(O_2, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } O_2 > 5 \text{ мг/л,} \\ 0, 1, & \text{если } O_2 < 5 \text{ мг/л.} \end{cases}$$

Описанная модель является одним из блоков («Качество вод») имитационной системы «Азовское море» [Описание ИС..., 1976].

Эксперименты с моделью. Самоочищающая способность Азовского моря определяется двумя взаимодополняющими факторами — гидрологическими процессами разбавления и гидрохимическим распадом ЗВ.

Рассмотрим по отдельности вклад каждого из указанных процессов.

Оценка биохимического периода полураспада (T_b). Пусть задан некоторый начальный запас ЗВ в Азовском море. Определим

Таблица 3.6

Аппроксимация функциональной зависимости коэффициентов распада Φ_1 (TE, t) для различных видов ЗВ *

Загрязнитель	Температура воды, °С	Зависимость коэффициента распада от температуры, сут ⁻¹
Нефтепродукты	TE ≤ 0	0,41 (TE/10) ² + 0,016 (TE/10) 0,006 (TE/10) ² + 0,027 (TE/10) - 0,006
	0 < TE ≤ 10	
	TE > 10	
Фенолы	TE ≤ 20	0,35 (1,09) ^{TE-20}
	TE > 20	1,54 lg (TE) - 1,66
СПАВ	TE ≤ 10	0,126 (1,12) ^{TE-10} 0,0264 (TE) - 0,138 1,193 lg (TE) - 1,162
	10 < TE ≤ 20	
	TE > 20	
Органические вещества по БПК ₅	Для всех значений TE	0,2 (1,047) ^{TE-20}
Пестициды	TE ≤ 0	0 0,2 TE 0,0168 TE + 0,032
	0 < TE ≤ 10	
	TE > 10	

* Аналитические зависимости получены сотрудниками НИИМ и ПМ О. А. Зениной и И. А. Зениной по эмпирическим данным Гидрохимического института.

время полураспада ЗВ при условии отсутствия водо- и массообмена с другими водоемами, водотоками и окружающей средой:

	ТЗ	СМ
Нефтепродукты	6558,95	5608,59
Фенолы	1887,05	1938,88
СПАВ	397,41	771,971
БПК	491,655	632,29

Периоды полураспада, являющиеся осредненной характеристикой интенсивности распада, зависящей от множества внешних факторов, для всех видов ЗВ имеют большие значения для собственно моря (СМ), чем для Таганрогского залива (ТЗ). Это яв-

Таблица 3.7

Зависимость коэффициентов распада основных видов ЗВ от солености воды s, сут⁻¹

Загрязнитель	Интервалы солености, ‰					
	0-3,9	3,9-5,9	5,9-7,88	7,88-8,5	8,5-11	11-30
Нефтепродукты	0,4906	0,3339	0,2531	0,2024	0,1686	0,0833
Фенолы	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,056
СПАВ	0,2706	0,228	0,138	0,1279	0,0897	0,0633
Пестициды	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
БПК ₅	0,41	0,32	0,21	0,18	0,08	0,06

* Данные АзНИИРХа.

Таблица 3.8

Зависимость коэффициентов распада от времени года

Номер пятидневки	$K, \text{сут}^{-1}$	Номер пятидневки	$K, \text{сут}^{-1}$
1—9	0,3	38—49	1,0
10—17	0,5	50—55	0,8
18—28	0,7	56—68	0,6
29—37	0,8	69—73	0,3

ление обусловлено тем, что море по сравнению с заливом имеет большую начальную соленость и, следовательно, процессы распада в СМ идут менее интенсивно, чем в ТЗ.

Вклад гидрологических факторов в ПС. Предположим, что объем годового стока рек Дона и Кубани (Q)

постоянен и зафиксирован на некотором уровне, а поступление ЗВ в Азовское море отсутствует (табл. 3.8).

Введем понятие — обобщенный период полураспада ЗВ как время уменьшения начального запаса ЗВ вдвое в результате биохимического распада, разбавления и оттока в Черное море. Получены зависимости обобщенных периодов распада ($T_{об}$) от объема стока (рис. 3.13). Соответствующие им коэффициенты самоочищения в широком смысле представлены в табл. 3.9. В связи с тем, что среднегодовая величина разности между осадками и испарениями на акватории Азовского моря составляет около 21 км^3 , то при годовом объеме речного стока, близком к указанной величине, преобладает водообмен из Черного моря в Азовское. Поэтому на кривых зависимости обобщенных периодов полураспада (а следовательно, и для констант распада) от объема стока наблюдается характерный излом.

Таблица 3.9

Коэффициенты самоочищения в широком смысле в зависимости от величины суммарного годового стока рек Дона и Кубани для Таганрогского залива и собственно моря (в предположении незагрязненности поступающих черноморских вод)

Сток, км^3	Район	$K, \text{сут}^{-1}$			
		Гептаспродукты	Фенолы	АБ	БПК ₅
10	Залив	0,000489	0,000664	0,00198	0,00118
	Море	0,000480	0,000648	0,00102	0,00109
20	Залив	0,000657	0,000968	0,00217	0,00192
	Море	0,000485	0,000654	0,00102	0,00109
30	Залив	0,000982	0,001034	0,00236	0,00227
	Море	0,000490	0,000660	0,00103	0,00114
40	Залив	0,001047	0,001081	0,00254	0,00261
	Море	0,000495	0,000665	0,00108	0,00116
50	Залив	0,001091	0,001114	0,00264	0,00282
	Море	0,000634	0,000671	0,00113	0,00191
60	Залив	0,001129	0,001139	0,00271	0,00296
	Море	0,000659	0,000676	0,00121	0,00248

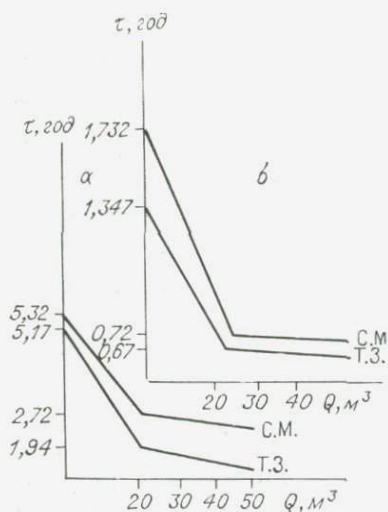


Рис. 3.13. Зависимость обобщенных периодов полураспада ЗВ от суммарного годового объема стока рек Дона и Кубани.

а — фенолов; б — БПК₅.

Угол наклона кривой до точки, соответствующей $Q = 21 \text{ км}^3$, больше, что объясняется более жесткой зависимостью солёности от объема пресного стока при $Q < 21 \text{ км}^3$.

Легко доказать, что $T_{об} = \ln 2 \frac{T_{\delta} \cdot T_{\Gamma}}{T_{\delta} + T_{\Gamma}}$, T_{Γ} — период са-

моочищения моря до половины начального запаса ЗВ только за

счет гидрологических процессов разбавления и выноса массы ЗВ в Черное море. Из сравнения результатов экспериментов вытекает, что вклад процессов разбавления в процессе самоочищения Азовского моря является очень существенным. Так, например, при суммарном годовом стоке $Q = 20 \text{ км}^3$ общее время полураспада (в среднем по морю) для нефтепродуктов в 4,8 раза меньше, чем период биохимического полураспада.

О компенсации загрязнения речным стоком. Пусть заданы величины z — годовой объем поступления в море ЗВ и Q — годовой объем речного стока. Асимптотическое модельное исследование позволяет определить стационарные значения c — концентраций ЗВ при определенных параметрах z и Q . Таким образом, имеет место соотношение $c_i = f_i(z_i Q)$, где $z_i \in [3,36, 13,4]$ тыс. т., $Q \in [21,50] \text{ км}^3$, $i = 1,5$ — номер ЗВ.

Функции f_i являются, очевидно, убывающими по Q и возрастающими по z . Линии уровня функции c_i представляют собой кусочно-линейные функции в плоскости (z_i, Q) . Отметим, что тангенс угла наклона звеньев ломаных $\text{tg } \alpha = \frac{\Delta z_i}{\Delta Q}$ может быть истолкован как мера взаимовлияния двух факторов на уровень концентрации c_i . Иными словами, увеличение объема поступления ЗВ может компенсироваться увеличением дотации стока. Причем для того, чтобы концентрация ЗВ оставалась на некотором фиксированном уровне, приходится осуществлять дотацию стока тем большую, чем ниже уровень концентрации. Экспериментально установлено, что большим значениям концентраций соответствуют и большие углы наклона изолиний функций c_i .

Назовем определяющим фактором функции $c_i = f_i(z_i Q)$ ту переменную, незначительное изменение которой требует существенного изменения другой для сохранения некоторого уровня $c_i = \text{const}$.

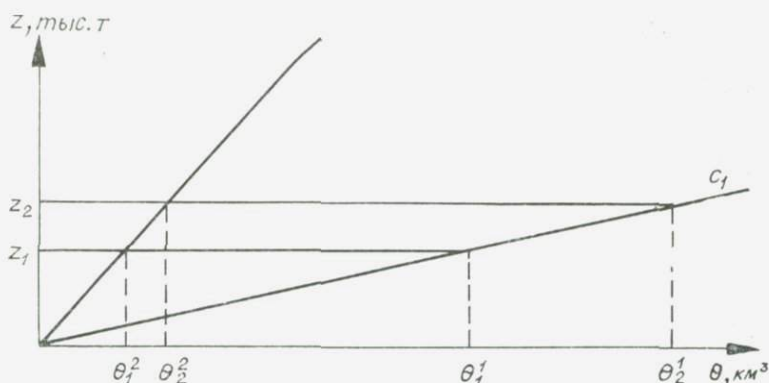


Рис. 3.14. Переход роли определяющего фактора от объема стока к объему сброса ЗВ при уменьшении концентраций ЗВ.

Итак, при бóльших углах наклона, т. е. при бóльших значениях концентраций ЗВ, определяющим фактором является сток, при меньших — сброс загрязнений (рис. 3.14).

Для оценки влияния на качество воды Азовского моря обеспеченности пресным стоком проведены расчеты с использованием прогнозных рядов стока р. Дон, предоставленных институтом «Союзгипроводхоз» (рис. 3.15). Сток р. Кубань принимался постоянным и равным $9,67 \text{ км}^3$. Оказалось, что характер изменения среднегодовых концентраций ЗВ полностью соответствует варьированию дотаций стока р. Дон (ср. рис. 3.15 и 3.16), а следовательно, наилучшим вариантом дотации является до 2005 г. четвертый, а с 2005 г. — третий, а наихудшим — первый в течение всего прогнозного периода.

На основании имитационных экспериментов с моделью «Качество вод» была проведена экологическая экспертиза следующих намечаемых на перспективу крупных водных проектов.

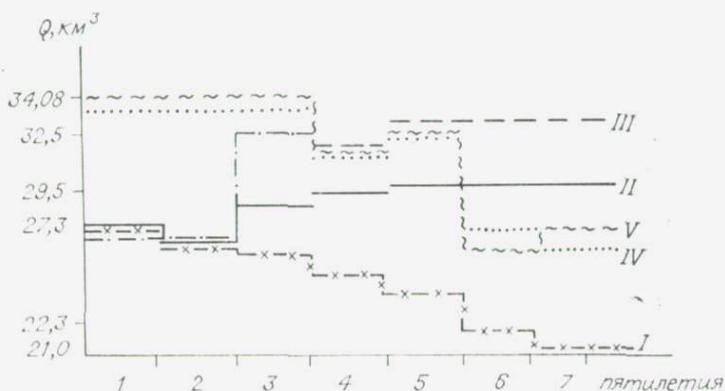


Рис. 3.15. Многолетний вариант прогноз q суммарного стока рек Дона и Кубани (Q) по данным института «Союзгипроводхоз».

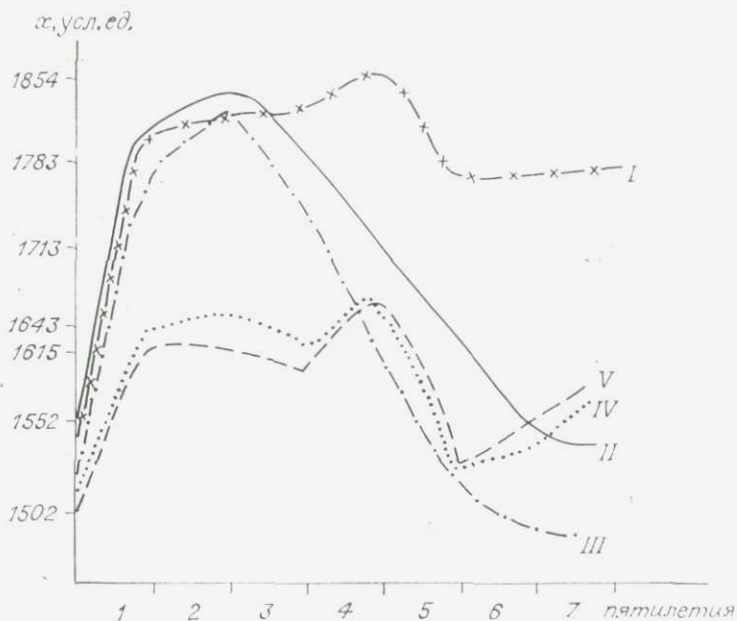


Рис. 3.16. Многолетний вариантный прогноз динамики концентраций нефтепродуктов при пяти различных вариантах стока.

Таганрогская дамба. Рассматривались шесть вариантов сужения гирла Таганрогского залива, когда ширина открытой части залива принимает значения $\text{Ш} = 26$ (современное состояние), 20, 15, 10, 5, 3 км. В Таганрогском заливе максимальные концентрации устанавливаются к 2030 г. для всех видов неконсервативных ЗВ при максимальном перекрытии ($\text{Ш} = 3$ км). Это явление обусловлено увеличением скорости деструкции ЗВ в связи с распреснением Таганрогского залива при уменьшении Ш . Данный биохимический процесс настолько силен, что вполне компенсирует гидрологические процессы аккумуляции ЗВ в заливе при уменьшении.

Так, для нефтепродуктов в стационарных условиях максимальное перекрытие дает улучшение на 0,48 ПДК.

В собственно море вследствие того, что соленость остается практически неизменной, качество воды не изменяется.

Для определения влияния критических условий на качество воды проведен эксперимент при условии, что суммарный годовой объем стока рек Дона и Кубани колеблется в пределах 17,6—19,4 км³, а уровень поступления ЗВ в море высок до 2000 г. После 2000 г., по оценкам экспертов, объем сброса ЗВ должен уменьшиться примерно в 2,5 раза. При этих условиях загрязнение залива до 2000 г. существенно возрастает при его перекрытии, так как воды залива даже в условиях распреснения не способны переработать поступающие ЗВ, а их вынос из залива в мо-

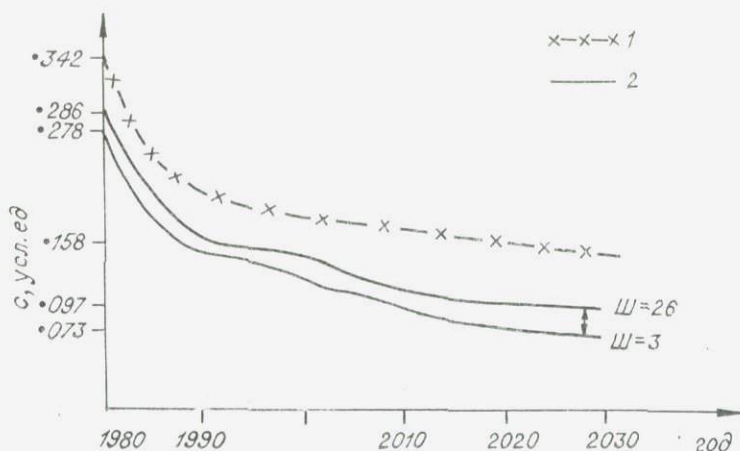


Рис. 3.17. Прогноз концентраций нефтепродуктов при разной ширине открытой части залива (Π , км) для собственно моря и Таганрогского залива.

1 — различие практически отсутствует; 2 — разность стационарных концентраций при $\Pi=26$ и $\Pi=3$ км составляет 0,48 ПДК.

ре затруднен. И только после 2000 г. при уменьшении сброса ЗВ будет наблюдаться снижение ЗВ в заливе (рис. 3.17). Следовательно, проект сужения гирла залива при малом речном стоке ($Q < 21$ км³) малоэффективен в условиях большой нагрузки на залив, поскольку способность экосистемы залива к самоочищению весьма ограничена. В этой связи для улучшения условий нагула и нереста ценных промысловых рыб в данном районе необходимо проводить и другие мероприятия (рис. 3.18).

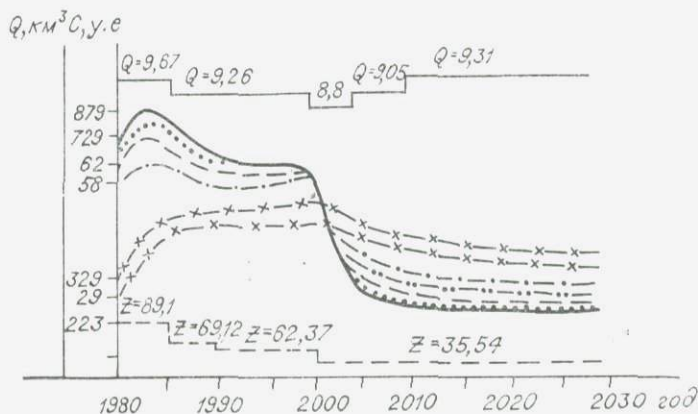


Рис. 3.18. Прогноз концентраций БПК₅ в Таганрогском заливе и собственно море при разных вариантах ширины (Π , км) открытой части залива, прогнозного поступления (z , тыс. т) и стока р. Дон (Q , км³).

Динамика средних по Азовскому морю концентраций ЗВ при разных режимах работы Керченского гидроузла (КГ)

Режим КГ	Год	Концентрации ЗВ (усл. ед.)				
		Нефтепродукты	Фенолы	СПАВ	Пестициды	Органическое вещество по БПК ₅
Открыт	1990	0,229	0,00199	0,051	0,00052	0,126
	2000	0,023	0,00042	0,019	0,00009	0,0087
Полностью закрыт	1990	0,044	0,00048	0,021	0,000034	0,0292
	2000	0,0186	0,00030	0,013	0,000049	0,0163

Керченский гидроузел. При возможном регулировании водообмена Черного и Азовского морей исследовано влияние на качество воды Азовского моря экстремальных режимов работы Керченского гидроузла: 1) свободный водообмен через Керченский пролив; 2) пролив полностью перекрыт плотиной. При втором эксперименте, как показали расчеты, качество воды примерно в 1,5 раза лучше, чем при первом, по всем ингредиентам, кроме БПК₅ (табл. 3.10). Это объясняется интенсификацией процесса биохимического распада при уменьшении солености моря и эффектом разбавления в случае малой нагрузки на водоем: по прогнозу ВНИИВО, суммарный ежегодный сброс в море нефтепродуктов составляет 20—16 тыс. т.; фенолов — 0,05—0,04 тыс. т.; СПАВ — 2,8—1,9 тыс. т.; пестицидов — 0,086—0,005 тыс. т. Сброс же органических веществ по БПК₅ составляет 88,7—62 тыс. т. Это, при наличии перекрытия Керченского пролива плотиной (вследствие отсутствия выноса БПК₅ в Черное море) вызывает увеличение концентраций БПК₅ по сравнению с результатами первого эксперимента.

Из сказанного сделаем выводы.

1. Описанные имитационные эксперименты с моделью качества воды позволили оценить влияние гидрологических и биохимических факторов на процессы самоочищения в Азовском море.

2. Проведенное исследование взаимосвязи суммарного поступления ЗВ в море и дотации суммарного стока рек может быть использовано для управления качеством воды в Азовском море путем регулирования объема речного стока и улучшения степени очистки сточных вод, поступающих в водоем.

3. Модель позволяет проводить прогнозные расчеты качества воды по наиболее распространенным в море ЗВ при различных вариантах водохозяйственной деятельности на территории водосборного бассейна.

4. Оценка влияния гидротехнических сооружений на качество воды Азовского моря позволила сделать вывод о целесообразности их строительства при одновременном проведении мероприятий по улучшению очистки вод, сбрасываемых в море.

ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ И ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ КАСКАДОМ ВОДОХРАНИЛИЩ

Рассмотрим задачу об управлении каскадом водохранилищ при децентрализованном управлении, т. е. в случае, когда управление каждым водохранилищем осуществляется самостоятельно, на основе знаний об объеме наполнения лишь своего водохранилища. Задача формулируется в терминах дифференциальных игр и решается в некотором классе стратегий, называемых в дальнейшем стратегиями-соглашениями. Содержательный смысл их в следующем. До начала процесса централизованно выбираются ограничения на пуск воды из каждого водохранилища. Набор таких ограничений называется стратегией-соглашением. Далее управление каждым водохранилищем ведется самостоятельно, так, чтобы достичь своих целей при любых действиях других водохранилищ и любых возможных притоках.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На реке с притоками имеется n некоторым образом занумерованных водохранилищ. Сопоставим этой системе ориентированный граф, который будем считать прадеревом (см. [Берж, 1962]), т. е. ориентированным деревом, из каждой вершины которого, кроме одной, выходит только одна дуга. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество его вершин, а R — множество дуг, причем дуга (i, j) принадлежит R тогда и только тогда, когда j -е водохранилище расположено непосредственно ниже i -го по течению. Пример каскада водохранилищ изображен на рис. 4.1.

Обозначим $\delta(i) = \{j \in N \mid (j, i) \in R\}$ множество водохранилищ, расположенных непосредственно выше i -го; $\sigma(i) = \{i \in N \mid \text{существует путь из вершины } j \text{ в вершину } i\} \cup \{i\}$ — множество водохранилищ, расположенных выше i -го, включая i -е; обозначим также $\xi(i)$ такой номер из N , что $(i, \xi(i)) \in R$, т. е. $\xi(i)$ — номер водохранилища, расположенного непосредственно ниже i -го.

Пусть B есть матрица размерности $n \times n$ с элементами

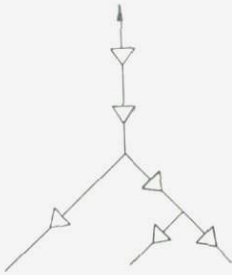
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ -1, & \text{если } j \in \delta(i), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и пусть $b_i \in R^n$ — строка матрицы B с номером i , $i \in N$.

Введем также следующие обозначения:

x_i — объем воды в i -м водохранилище в текущий момент вре-

Рис. 4.1. Пример каскада водохранилищ.



мени; v_i — приток в i -е водохранилище; u_i — попуск (сброс) из i -го водохранилища.

Будем считать, что приток в i -е водохранилище может быть произвольным, удовлетворяющим условиям

$$q'_i(t) \leq v_i \leq q''_i(t),$$

где $q'_i(t)$, $q''_i(t)$ — ограниченные, интегрируемые по Риману функции времени, $i \in N$. Попуск также ограничен условиями

$$p'_i \leq u_i \leq p''_i, \quad i \in N.$$

Будем считать, что p'_i , p''_i не зависят от времени, хотя все результаты останутся в силе и в случае, когда p'_i , p''_i — ограниченные интегрируемые функции, $i \in N$.

Динамика процесса в каскаде водохранилищ описывается простейшими балансовыми уравнениями

$$\dot{x}_i = v_i + \sum_{j \in \delta(i)} u_j - u_i = v_i - \langle b_i, u \rangle, \quad i \in N.$$

В действительности попуск u_i из верхнего водохранилища попадает в нижнее водохранилище не мгновенно, а через некоторое время. Однако реально управление ведется дискретным образом с большими периодами, на которых управление u_i постоянно. Поэтому можно моменты смены управлений установить так, что начало периода на нижнем водохранилище будет совпадать с моментом, когда попуск от начала периода на верхнем водохранилище дойдет до нижнего.

Факторы испарения и отбора воды на орошение могут быть учтены в управлении v_i .

Обозначим m'_i и m''_i соответственно верхний и нижний допустимые объемы наполнения i -го водохранилища, $i \in N$.

Таким образом, задачу управления каскадом водохранилищ можно сформулировать в виде дифференциальной игры, в которой противник — природа.

Задача I.

$$\dot{x} = v - Bu,$$

$$v \in Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in R^n \mid q'(t) \leq v \leq q''(t)\},$$

$$u \in P \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in R^n \mid p' \leq u \leq p''\}, \quad t \in [t_0, \Theta].$$

Цель первого игрока (распоряжающегося управлением u) —

удержать движение $x[t]$ на множестве

$$M = \{x \in R^n \mid x_i \in [m'_i, m''_i], i \in N\}$$

при любых управляющих воздействиях противника, т. е. при любых возможных притоках.

§ 2. ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Предположим, что выбор управления u делается на основе знаний об объеме воды во всех водохранилищах, т. е. $u_i = u_i(t, x_1, \dots, x_n)$. Эту ситуацию можно интерпретировать как сосредоточение управления в едином центре. Определим множество точек $x_* \in R^n$ таких, что из позиции (t_*, x_*) как из начальной, первый игрок может удержать движение $x[t]$ на множестве M вплоть до момента Θ . Для этого поступим следующим образом. Пусть $\mathcal{U}_0(t)$ — множество точек $x_* \in R^n$ таких, что из начальной позиции (t_*, x_*) можно удержать движение $x[t]$ на множестве M в случае, если противник заранее фиксирует свое управление $v(t)$, зависящее только от времени; $x_* \in \mathcal{U}_0(t_*)$ тогда и только тогда, когда для любого $T \in [t_*, \Theta]$ и $v(t)$ найдется $u(t)$ такое, что

$$x(T) = x_* + \int_{t_*}^T v(t) dt - B \int_{t_*}^T u(t) dt \in M.$$

Следовательно,

$$\mathcal{U}_0(t_*) = \bigcap_{T \in [t_*, \Theta]} \left[\left(M + B \int_{t_*}^T P dt \right) * \left(- \int_{t_*}^T Q(t) dt \right) \right].$$

Здесь $A * C \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{c \in C} (A - c)$ — геометрическая разность множеств A и C из R^n [Понтрягин, 1967], $\int_{t_*}^T P dt$, $\int_{t_*}^T Q(t) dt$ — интегралы от многозначных отображений [Благодатских, 1979].

Точно так же можно определить по индукции

$$\mathcal{U}_h(t_*) = \bigcap_{T \in [t_*, \Theta]} \left[\left(\mathcal{U}_{h-1}(T) + B \int_{t_*}^T P dt \right) * \left(- \int_{t_*}^T Q(t) dt \right) \right],$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_h(t_*) &= \bigcap_{T \in [t_*, \Theta]} \left[\left(\mathcal{U}_{h-1}(T) + \left\{ x_* \in R^n \mid \begin{pmatrix} B^{-1} \\ -B^{-1} \end{pmatrix} x \leq \right. \right. \right. \\ &\leq \left. \left. \left. \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \int_{t_*}^T P dt \right) \right) * \left\{ x \in R^n \mid \begin{pmatrix} -E \\ E \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \int_{t_*}^T q(t) dt \right\} \right], \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \dots, \mathcal{U}_{-1} = M, t_* \in [t_0, \Theta], \quad (4.2.1)$$

$$p = (p', p'') = (p'_1, \dots, p'_n, p''_1, \dots, p''_n),$$

$$q(t) = (q'(t), q''(t)) = (q'_1, \dots, q'_n, q''_1, \dots, q''_n).$$

Выражения вида $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ здесь и в дальнейшем означают блочную матрицу соответствующей размерности, E — единичная матрица $n \cdot n$; O — нулевая матрица $n \cdot n$.

Содержательно множество $\mathcal{U}_k(t_*)$ состоит из точек $x_* \in R^n$ таких, что из начальной позиции (t_*, x_*) первый игрок может удержать движение $x[t]$ на множестве M , если второй игрок получает информацию о фазовых координатах системы не более k раз.

Положим $\mathcal{U}(t_*) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}_k(t_*)$, $t_* \in [t_0, \Theta]$; по аналогии с [Ченцов, 1976] можно показать, что $\mathcal{U}(t_*)$ есть искомое множество начальных позиций.

Согласно (4.2.1), множество $\mathcal{U}_0(t_*)$ представляет собой многогранник вида $\langle g, x \rangle \leq a_c(g, t)$, $g \in G$, где G — множество векторов, нормальных к граням многогранника $\mathcal{U}_0(t)$. Поскольку операция геометрического вычитания не меняет грани многогранника, то множество G есть множество векторов, нормальных к граням многогранника

$$M + \left\{ x \in R^n \left| \begin{pmatrix} B^{-1} \\ -B^{-1} \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \right|_{i_*}^T p dt \right\}. \quad (4.2.2)$$

Правая часть $a_c(g, t)$ есть решение дифференциального уравнения (для доказательства см. [Меньшиков, Меньшикова, 1983] и [Красовский, Субботин, 1974, с. 162, лемма 40.1])

$$a_c(g, \Theta) = \max_{x \in M} \langle g, x \rangle;$$

$$\dot{a}_c(g, t) = \begin{cases} c(g, t), & \text{если } a_c(g, t) < a_c(g, \Theta), \\ \max(c(g, t), 0) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$c(g, t) = \min_{u \in P} \langle -Bu, g \rangle + \max_{v \in Q(t)} \langle v, g \rangle.$$

Множество G найдено в § 4 настоящей главы.

§ 3. ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Предположим, что управление u_i выбирается лишь на основе знания об объеме x_i воды в i -м водохранилище. Это означает, что стратегией первого игрока является набор функций $(u_1(t, x_1), \dots, u_n(t, x_n))$; такие стратегии будем называть де-

централизованными. Основная проблема состоит в построении множества $\mathcal{W}^\circ(t_*)$ таких векторов $x_* \in R^n$, что из начальной позиции (t_*, x_*) разрешима задача I в децентрализованных стратегиях. Для этого сузим множество децентрализованных стратегий до класса стратегий, которые в дальнейшем будем называть стратегиями-соглашениями. Обозначим $\mathcal{W}_*^\circ(t_*)$ множество векторов x_* таких, что из начальной позиции (t_*, x_*) задача I разрешима в стратегиях-соглашениях. Ниже (§ 6) доказано совпадение множеств $\mathcal{W}_*^\circ(t_*)$ и $\mathcal{W}^\circ(t_*)$, $t_* \in [t_0, \Theta]$.

Определение. Стратегией-соглашением называется интегрируемая вектор-функция

$$\pi(t) = (\pi'(t), \pi''(t)) = (\pi_1'(t), \dots, \pi_n'(t), \pi_1''(t), \dots, \pi_n''(t)),$$

определенная на отрезке $[t_*, \Theta]$, $t_* \in [t_0, \Theta]$ и удовлетворяющая соотношению

$$p_i' \leq \pi_i'(t) \leq \pi_i''(t) \leq p_i'', \quad t \in [t_*, \Theta], \quad i \in N.$$

Стратегии-соглашению $\pi(t)$ сопоставим децентрализованную стратегию $(u_1(t, x_1), \dots, u_n(t, x_n))$ следующим образом: $u_i(t, x_i)$ есть экстремальная позиционная стратегия к максимальному u -стабильному мосту (см. [Красовский, Субботин, 1974]) в задаче $2i$.

Задача $2i$.

$$\dot{x}_i = v_i + \sum_{\delta(i)} u_j - u_i.$$

$u_i \in [\pi_i'(t), \pi_i''(t)]$ — управление игрока, цель которого — удержать движение $x_i[t]$ на множестве $[m_i', m_i'']$; $v_i \in [q_i'(t), q_i''(t)]$ и $u_j \in [\pi_j'(t), \pi_j''(t)]$, $j \in \delta(i)$ — управление противника.

В смысле указанного соответствия множество стратегий-соглашений можно считать подклассом децентрализованных стратегий.

Содержательно игра в стратегиях-соглашениях происходит так. До начала процесса при известной начальной позиции (t_*, x_*) централизованно выбирается соглашение $\pi(t)$ и сообщается на все водохранилища каскада. Далее управление i -м водохранилищем осуществляется самостоятельно в рамках предписанных ограничений $\pi_i'(t) \leq u_i \leq \pi_i''(t)$; про остальные водохранилища известно лишь то, что их управления стеснены ограничениями

$$\pi_j'(t) \leq u_j \leq \pi_j''(t), \quad j \neq i; \quad i \in N.$$

Пусть фиксировано соглашение $\pi(t)$, рассмотрим дифференцируемые функции $y_i'(t)$, $y_i''(t)$ такие, что

$$\begin{aligned} y_i'(t) &\leq -m_i', \quad \dot{y}_i'(t) \geq \langle b_i, \pi'(t) \rangle - q_i'(t), \\ y_i''(t) &\leq m_i'', \quad \dot{y}_i''(t) \geq \langle -b_i, \pi''(t) \rangle + q_i''(t), \\ y_i''(t) + y_i'(t) &\geq 0; \quad t \in [t_*, \Theta]. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Тогда, если $-y_i'(t_*) \leq x_{*i} \leq y_i''(t_*)$, то из начальной позиции

(t_*, x_{*i}) разрешима задача 2i (дифференциальная игра в одномерном пространстве). Следовательно,

$$\mathcal{W}_*^*(t_*) = \bigcup_{Y_+(t_*)} \left\{ x_* \in R^n \mid \begin{pmatrix} -E \\ E \end{pmatrix} x_* \leq y \right\},$$

где $Y_+(t_*)$ — множество таких векторов $y_* \in R^{2n}$, что найдется соглашение $\pi(t)$ и функция

$$y(t) = (y'(t), y''(t)) = (y'_1(t), \dots, y'_n(t), y''_1(t), \dots, y''_n(t)),$$

удовлетворяющая неравенствам (4.3.1) для всех $i \in N$, такая, что $y(t_*) = y_*$.

Созим множества $Y_+(t_*)$ и $\mathcal{W}_*^*(t_*)$. Пусть

$$\mathcal{W}_{**}^*(t) = \bigcup_{Y(t_*)} \left\{ x_* \in R^n \mid \begin{pmatrix} -E \\ E \end{pmatrix} x_* = y \right\} \subset \mathcal{W}_*^*(t_*),$$

где $Y(t_*) = \{y_* \in R^{2n} \mid \exists \pi(t) \text{ и } y(t) \text{ удовлетворяют}$

$$p' \leq \pi'(t) \leq \pi''(t) \leq p'', \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \\ -E & -E \end{pmatrix} y(t) \leq \begin{pmatrix} -m' \\ m'' \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \pi(t) + \begin{pmatrix} -q' \\ q'' \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_*, \theta], \quad y(t_*) = y_*\}.$$

В дальнейшем (теорема 1) для доказательства $\mathcal{W}_*^*(t_*) = \mathcal{W}_{**}^*(t_*)$ будет доказано, что $\mathcal{W}_{**}^*(t_*) = \mathcal{W}^*(t_*)$, $t_* \in [t_0, \theta]$.

Преобразуем множество $Y(t_*)$:

$$Y(t_*) = \left\{ y_* \in R^{2n} \mid \exists y(t): \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \\ -E & -E \end{pmatrix} y(t) \leq \begin{pmatrix} -m' \\ m'' \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \bar{0} & -B^{-1} \\ -B^{-1} & 0 \\ B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} \dot{y}(t) \leq \begin{pmatrix} p'' \\ -p' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B^{-1}q'' \\ B^{-1}q' \\ B^{-1}(q'' - q') \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. t \in [t_*, \theta], \quad y(t_*) = y_* \right\}.$$

Таким образом, $Y(t_*)$ так же, как и $\mathcal{U}_0(t_*)$, можно представить в виде пересечения

$$Y(t_*) = \bigcap_{T \in [t_*, \theta]} \left[\left\{ y \in R^{2n} \mid \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \\ -E & -E \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} -m' \\ m'' \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ y \in R^{2n} \left| \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ B^{-1} & 0 \\ -B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \int_{t_*}^T p dt + \right. \\
& \left. + \left[\begin{pmatrix} 0 & -B^{-1} \\ B^{-1} & 0 \\ -B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} \int_{t_*}^T q(t) dt \right] \right\} = \bigcup_{T \in [t_*, \Theta]} \{ y \in R^{2n} \mid \langle h, y \rangle \leq \\
& \leq a(h, t_*, T), h \in H \}. \tag{4.3.2}
\end{aligned}$$

Здесь H — множество векторов, нормальных к граням многогранника, полученного сложением множеств в квадратных скобках; $a(h, t_*, T)$ — правая часть ограничений.

§ 4. СЛОЖЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

В этом параграфе будет получено явное выражение для множеств G и H векторов, нормальных к граням многогранников $\mathcal{U}_0(t_*)$ и $Y(t_*)$ соответственно. Для этого задача сложения многогранников сводится к задаче нахождения образующих конусов (4.4.7) и (4.4.6).

Для получения G требуется сложить многогранники вида

$$\left\{ x \in R^n \left| \begin{pmatrix} E \\ -E \end{pmatrix} x \leq a_1 \right. \right\} + \left\{ x \in R^n \left| \begin{pmatrix} B^{-1} \\ -B^{-1} \end{pmatrix} x \leq a_2 \right. \right\}, \tag{4.4.1}$$

где a_1, a_2 — некоторые векторы размерности $2n$.

Для получения H нужно выполнить сложение многогранников вида

$$\left\{ y \in R^{2n} \left| \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \\ -E & -E \end{pmatrix} y \leq a_1 \right. \right\} + \left\{ y \in R^{2n} \left| \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \\ -B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix} y \leq a_2 \right. \right\}, \tag{4.4.2}$$

где a_1, a_2 — векторы размерности $3n$.

Множество, определяемое по формуле (4.4.1), состоит из векторов x , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} E \\ -E \end{pmatrix} x_1 \leq a_1, \quad \begin{pmatrix} B^{-1} \\ -B^{-1} \end{pmatrix} x_2 \leq a_2, \\
& x = x_1 + x_2.
\end{aligned}$$

Исключив x_2 , приходим к системе линейных неравенств:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & 0 \\ -B^{-1} & B^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.4.3)$$

Таким образом, для получения множества (4.4.1) достаточно спроектировать многогранник (4.4.3) на пространство переменных x . Согласно [Черников, 1968], для этого нужно найти все образующие конуса

$$[(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} E \\ -E \\ -B^{-1} \\ B^{-1} \end{pmatrix}] = 0, \quad (4.4.4)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \geq 0, \beta = (\beta_1, \beta_2) \geq 0, \alpha_s, \beta_s \in R^n, s = 1, 2.$$

Между образующими (α^0, β^0) конуса (4.4.8) и векторами $g \in G$ существует взаимно однозначное соответствие

$$(\alpha^0, \beta^0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B^{-1} \\ -B^{-1} \end{pmatrix} = g. \quad (4.4.5)$$

Обозначим через e_i вектор из R^n , у которого i -я координата равна 1, а остальные 0, а также $e_J \in R^n$ вектор, у которого j -я координата равна 1, если $j \in J$, и 0 в противном случае, $J \subset N$. В матрице B^{-1} i -я строка равна $e_{\sigma(i)}$, следовательно, конус (4.4.8) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{1i} - \alpha_{2i}) e_i = \sum_{i=1}^n (\beta_{1i} - \beta_{2i}) e_{\sigma(i)}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \quad (4.4.6)$$

Проведя аналогичные рассуждения для многогранника (4.4.2), получим конус

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha_{1i} - \alpha_{3i}) e_i &= \sum_{i=1}^n (\beta_{1i} - \beta_{3i}) e_{\sigma(i)}, \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_{2i} - \alpha_{3i}) e_i &= \sum_{i=1}^n (\beta_{2i} - \beta_{3i}) e_{\sigma(i)}, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

для которого соотношение

$$(\alpha^0, \beta^0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \\ -B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix} = \bar{h} \quad (4.4.8)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством образующих конуса и множеством H векторов, нормальных к граням многогранника (4.4.2).

Определение. Назовем вектор (α, β) из конуса (4.4.6) (из конуса (4.4.7)) вырожденным, если найдется $i \in N$ такое, что $\alpha_{si} > 0$, $s = 1, 2$ ($s = 1, 2, 3$) или $\beta_{si} > 0$, $s = 1, 2$ ($s = 1, 2, 3$).

Лемма 1. Вырожденной образующей конуса (4.4.6) (конуса (4.4.7)) соответствует в смысле (4.4.5) (в смысле (4.4.8)) нулевой вектор.

Обозначим для конуса (4.4.8)

$$\varphi_i = \alpha_{1i} - \alpha_{2i}, \quad \Psi_i = \beta_{1i} - \beta_{2i}, \quad i \in N, \quad (4.4.9)$$

и для конуса (4.4.7)

$$\begin{aligned} \varphi_{1i} &= \alpha_{1i} - \alpha_{3i}, & \varphi_{2i} &= \alpha_{2i} - \alpha_{3i}, \\ \Psi_{1i} &= \beta_{1i} - \beta_{3i}, & \Psi_{2i} &= \beta_{2i} - \beta_{3i}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Тогда формулы (4.4.6) и (4.4.7) примут вид

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i e_i = \sum_{i=1}^n \Psi_i e_{\sigma(i)}, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_{1i} e_i = \sum_{i=1}^n \Psi_{1i} e_{\sigma(i)}, \quad (4.4.11)$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{2i} e_i = \sum_{i=1}^n \Psi_{2i} e_{\sigma(i)}. \quad (4.4.12)$$

Соотношение (4.4.9) (соотношение (4.4.10)) устанавливает взаимно однозначное соответствие между невырожденными векторами (α, β) из конуса (4.4.6) (из конуса (4.4.7)) и векторами (φ, Ψ) , удовлетворяющими соотношению (4.4.11) (соотношению (4.4.12)).

Назовем $J = \{i \in N \mid \varphi_i \neq 0\}$ носителем вектора (φ, Ψ) для конуса (4.4.6) и $J = \{i \in N \mid (\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) \neq (0, 0)\}$ — носителем вектора (φ, Ψ) для конуса (4.4.7). Множество J называется связным, если для любых $i_1, i_2 \in J$ существует номер $i_3 \in J$ такой, что существуют путь из i_1 в i_3 и путь из i_2 в i_3 , принадлежащие J .

Для связного J обозначим

$$\delta(J) = \{j \in N \mid \exists i \in J, j = \delta(i), j \notin J\} -$$

множество вершин, расположенных непосредственно выше множества J ;

$$\sigma(J) = \{j \in N \mid \exists i \in J, j = \sigma(i), j \notin J\} -$$

множество вершин, расположенных выше множества J . Если J — связное множество, то существует единственный номер $i \in J$ такой, что $\xi(i) \notin J$; обозначим его $\xi(J)$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. Если вектор (α, β) — невырожденная образующая конуса (4.4.10) (конуса 4.4.11), то носитель J соответствующего вектора (φ, Ψ) есть связное множество.

Лемма 3. $G = \{\pm e_J, J$ — любое связное множество}.

Обозначим $d^1 = (1, 1)$, $d^2 = (-1, 0)$, $d^3 = (0, -1)$ точки из R^2 . Под произведением $d \cdot a$, где $d = (d_1, d_2) \in R^2$, $a \in R^n$, будем понимать вектор $(d_1 a, d_2 a) \in R^{2n}$.

Определение. Назовем набор подмножеств (J_0, I_1, I_2) нормальным разложением связного множества $J \subset N$, если выполнены следующие условия:

1) $J_k, k \in I_1, k \in I_2$ — связное множество, J_0 — также связное множество;

$$2) J_0 \cup \left(\bigcup_{k \in I_1} J_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \in I_2} J_k \right) = J;$$

3) Множества $J_0, J_k, k \in I_1, k \in I_2$ попарно не пересекаются.

Лемма 4. $h \in H$ тогда и только тогда, когда

$$h = -d^j \cdot e_{J_0} + \sum_{k \in I_1} d^{s_1} \cdot e_{J_k} + \sum_{k \in I_2} d^{s_2} \cdot e_{J_k}, \quad (4.4.13)$$

где (J_0, I_1, I_2) — любое нормальное разложение любого связного $J \subset N$ и $\{s, s_1, s_2\} = \{1, 2, 3\}$.

Доказательство лемм 2—4 основывается на представлении каждого вектора, не являющегося образующей конуса, в виде суммы векторов из этого конуса.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА $\mathscr{W}^{**}(t_*)$

В § 3 множество $\mathscr{W}^{**}(t_*)$ определялось так:

$$\mathscr{W}^{**}(t_*) = \left\{ x_* \in R^n \mid \exists y \in Y(t_*), \begin{pmatrix} -E \\ E \end{pmatrix} x_* = y \right\},$$

где $Y(t_*) = \bigcap_{T \in [t_*, \theta_1]} Y_T(t_*)$, $Y_T(t_*) = \{y \in R^{2n} \mid \langle h, y \rangle \leq a(h, t_*, T), h \in H\}$ (см. (4.3.2)).

Обозначим

$$\mathscr{W}^{**}(t_*, T) = \left\{ x \in R^n \mid \exists y \in Y_T(t_*), \begin{pmatrix} -E \\ E \end{pmatrix} x = y \right\},$$

тогда $\mathscr{W}^{**}(t_*) = \bigcap_{T \in [t_*, \theta_1]} \mathscr{W}^{**}(t_*, T)$;

$$\begin{aligned} \mathscr{W}^{**}(t_*, T) &= \left\{ x \in R^n \mid \left\langle \begin{pmatrix} -E \\ E \end{pmatrix} x, h \right\rangle \leq a(h, t_*, T), h \in H \right\} = \\ &= \{x \in R^n \mid \langle x, (-E, E)h \rangle \leq a(h, t_*, T), h \in H\}. \end{aligned}$$

В настоящем параграфе показано, что часть неравенств, входящих в описание многогранника $\mathcal{W}_{**}(t_*, T)$, является следствием других и, значит, может быть отброшена.

Зафиксируем связное множество $J \subset N$ и его некоторое нормальное разложение (J_0, I_1, I_2) . Рассмотрим неравенства

$$\langle (-E \ E) h_0, x \rangle \leq a(h_0, t_*, T) \quad (4.5.1)$$

и

$$\langle (-E \ E) h_{lk}, x \rangle \leq a(h_{lk}, t_*, T), \quad k \in I_l, \quad l = 1, 2, \quad (4.5.2)$$

где $h_0 = -(1, 1) e_{J_0} + \sum_{k \in I_1} (-1, 0) e_{J_k} + \sum_{k \in I_2} (0, -1) e_{J_k}$;

$$h_{1k} = (-1, 0) e_{J_k}, \quad k \in I_1;$$

$$h_{2k} = (0, -1) e_{J_k}, \quad k \in I_2.$$

Вычислив правые части неравенств, можно показать, что неравенство (4.5.1) является следствием неравенства (4.5.2).

Рассмотрим неравенства

$$\langle (-E \ E) h_0, x \rangle \leq a(h_0, t_*, T); \quad (4.5.3)$$

$$\langle (-E \ E) h_*, x \rangle \leq a(h_*, t_*, T). \quad (4.5.4)$$

Аналогичным образом можно показать, что неравенство (4.5.3) является следствием неравенства (4.5.4) при

$$h_0 = (1, 0) e_{J_0} + \sum_{k \in I_1} (1, 1) e_{J_k} + \sum_{k \in I_2} (0, -1) e_{J_k};$$

$$h_* = (1, 0) e_{J_*} + \sum_{k \in I_1} (1, 1) e_{J_k}$$

и при

$$h_0 = (0, 1) e_{J_0} + \sum_{k \in I_1} (1, 1) e_{J_k} + \sum_{k \in I_2} (-1, 0) e_{J_k};$$

$$h_* = (0, 1) e_{J_*} + \sum_{k \in I_1} (1, 1) e_{J_k}.$$

Здесь $J_* = J_0 \cup (\bigcup_{k \in I_2} J_k)$.

Итак $\mathcal{W}_{**}(t_*, T)$ можно представить в виде

$$\mathcal{W}_{**}(t_*, T) = \{x \in R^n \mid \langle (-E \ E) h, x \rangle \leq a(h, t_*, T), h \in H_*\},$$

где H_* состоит из вектора вида

$$h = (1, 0) e_{J_0} + \sum_{k \in I_1} (1, 1) e_{J_k}; \quad (4.5.5)$$

$$h = (0, 1) e_{J_0} + \sum_{k \in I_1} (1, 1) e_{J_k}; \quad (4.5.6)$$

$$h = (1, 1) l_J, \quad (4.5.7)$$

если набор (J_0, I, \emptyset) является нормальным разложением некоторого связного множества $J \subset N$.

Таким образом,

$$\mathcal{W}_{**}(t_*) = \bigcap_{[t_*, \Theta]} \{x \in R^n \mid \langle (-E \ E)h, x \rangle \leq a(h, t_*, T), h \in H_*\}.$$

§ 6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ СТРАТЕГИЙ И СТРАТЕГИЙ-СОГЛАШЕНИЙ

Чтобы установить совпадение $\mathcal{W}(t_*)$ и $\mathcal{W}_{**}(t_*)$, достаточно доказать вложение $\mathcal{W}(t_*) \subset \mathcal{W}_{**}(t_*)$. Для этого в настоящем параграфе будет использовано понятие квазистратегий в дифференциальных играх, введенное в работах [Ченцов, 1976; Субботин, Ченцов, 1981].

Для нашей задачи потребуется специальное определение децентрализованных квазистратегий.

Для всякого $i \in N$ обозначим $Q_{[t_*, \Theta]}^i$ совокупность всех измеримых на $[t_*, \Theta]$, по Борелю, функций $v_i(t)$ таких, что $q_i'(t) \leq v_i(t) \leq q_i''(t)$, $t \in [t_*, \Theta]$. Обозначим $Q_{[t_*, \Theta]}^{(i)}$ совокупность всех наборов $(v_j(t), j \in \sigma(i))$, где $v_j(t) \in Q_{[t_*, \Theta]}^j$, $j \in \sigma(i)$. Также обозначим $P_{[t_*, \Theta]}^{(i)}$ совокупность всех измеримых на $[t_*, \Theta]$, по Борелю, функций $u_i(t)$ таких, что $P_i' \leq u_i(t) \leq P_i''$, $t \in [t_*, \Theta]$.

Децентрализованной квазистратегией в нашей задаче назовем набор отображений $\alpha_i: Q_{[t_*, \Theta]}^{(i)} \rightarrow P_{[t_*, \Theta]}^{(i)}$, $i \in N$, удовлетворяющий следующему условию (условию физической осуществимости): пусть $t^* \in [t_*, \Theta]$, $v_i^k \in Q_{[t_*, \Theta]}^i$, $k = 1, 2$. Почти всюду на $[t_*, t^*]$, $v_i^{(1)}(t) = v_i^{(2)}(t)$, $i \in N$. Тогда для $u_i^k = \alpha_i(v_i^k)$, $j \in \sigma(i)$, $k = 1, 2$, выполнено соотношение $u_i^{(1)}(t) = u_i^{(2)}(t)$ почти всюду на $[t_*, t^*]$, $i \in N$.

Движением, отвечающим децентрализованной квазистратегии $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и программному управлению противника $(v_1(t), \dots, v_n(t))$, назовем набор функций $x_i(\cdot) = x_i(\cdot, t_*, x_{*i}, \alpha, v)$, являющихся решением уравнения

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t) - u_i(t) + \sum_{j \in \delta(i)} u_j(t)$$

с начальным условием $x_i(t_*) = x_{*i}$, $i \in N$. Здесь

$$u_i(\cdot) = \alpha(v_j(\cdot)), j \in \sigma(i), i \in N.$$

Рассуждением, аналогичным приведенному в работе [Субботин, Ченцов, 1981, с. 24 и 170—175], можно показать, что если задача об удержании движения из начальной позиции (t_*, x_*) разрешима в позиционных стратегиях вида

$$u_i = u_i(t, x_j, j \in \sigma(i)), i \in N,$$

то она разрешима и в децентрализованных квазистратегиях. (Оп-

ределение движений в позиционных стратегиях указанного вида аналогично определению движений в работе [Красовский, Субботин, 1974, с. 33].) Тогда из разрешимости задачи в стратегиях $u_i = u_i(t, x_i)$ тем более будет следовать ее разрешимость в децентрализованных квазистратегиях. Таким образом, остается проверить обратное утверждение: из разрешимости задачи I из начальной позиции (t_*, x_*) в децентрализованных квазистратегиях следует ее разрешимость в стратегиях-соглашениях.

Теорема 1. Задача 1 из начальной позиции (t_*, x_*) разрешима в децентрализованных стратегиях тогда и только тогда, когда она разрешима в стратегиях-соглашениях.

Доказательство. Достаточно доказать, что множество таких x_* , что из начальной позиции (t_*, x_*) разрешима задача 1 в децентрализованных квазистратегиях, не шире $W_{**}(t_*)$.

Предположим противное, т. е. предположим, что найдется начальная точка (t_*, x_*) такая, что существует децентрализованная квазистратегия, разрешающая задачу 1, однако $x_* \notin W_{**}(t_*)$. Последнее означает, что существует такой момент $T \in [t_*, \theta]$, что $x_* \in W_{**}(t_*, T)$. Из этого, в свою очередь, следует, что найдется вектор $h \in H_*$ такой, что

$$\langle (-E \ E) h, x \rangle > a(h, t_*, T) \quad (4.6.1)$$

(см. предыдущий пункт).

Векторы из H_* имеют вид (4.5.5) — (4.5.7), для каждого из этих типов векторов получим противоречие с неравенством (4.6.1). Предположим, что в неравенстве (4.6.1) вектор h имеет вид (4.5.7), т. е. $h = (1, 1)e_J$ для некоторого связного множества J . Тогда (4.6.1) запишется так:

$$\begin{aligned} a(h, t_*, T) = & \langle e_J, (m'' - m') - \int_{t_*}^T (q''(t) - q'(t)) dt \rangle + \\ & + \left\langle e_{\xi(J)}, \int_{t_*}^T (p'' - p') dt \right\rangle < 0. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Для квазистратегии α и стратегии противника $(v_1(t), \dots, v_n(t))$ обозначим $u_i(\cdot) = \alpha_i(v_j(\cdot), j \in \sigma(i))$, $i \in N$. При $i \in J$, по определению движений в квазистратегиях,

$$x_i(T) = x_{*i} + \int_{t_*}^T v_i(t) dt - \int_{t_*}^T u_i(t) dt + \sum_{j \in \delta(i)} \int_{t_*}^T u_j(t) dt.$$

Просуммировав по $i \in J$, получим

$$\begin{aligned} \langle e_J, x(T) \rangle = & \left\langle e_J, x_* + \int_{t_*}^T v(t) dt \right\rangle + \left\langle e_{\delta(J)}, \int_{t_*}^T u(t) dt \right\rangle - \\ & - \left\langle e_{\xi(J)}, \int_{t_*}^T u(t) dt \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Рассмотрим два набора программных управлений противника:

$$v_i^{(1)}(t) = v_j^{(2)}(t) = v_i^*(t) \in Q_{[t_*, \Theta]}^i, \quad i \in \sigma(J);$$

$$v_i^{(1)}(t) = q_i'(t), \quad v_i^{(2)}(t) = q_i''(t), \quad i \in J, \quad t \in [t_*, T],$$

для остальных i $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}$ — произвольные функции из $Q_{[t_*, \Theta]}^i$. Положим $u_i^k(\cdot) = \alpha_i(v_j^k(\cdot), j \in \sigma(i)), k = 1, 2$. Для $i \in \delta(J)$ $u_i^{(k)}(\cdot) = \alpha_i(v_j^k(\cdot), j \in \sigma(i)) = \alpha_i(v_j^*(\cdot), j \in \sigma(i))$, так как $\sigma(i) \subset \sigma(J)$. Следовательно, $u_i^{(1)}(t) = u_i^{(2)}(t)$ почти всюду на $[t_*, T]$; обозначим $u^*(t)$ функцию, почти всюду равную $u_i^k(t), k = 1, 2, t \in [t_*, T]$.

При $v = v^{(1)}$ из соотношения (4.6.3) вытекает

$$\begin{aligned} \langle e_J, x^{(1)}(T) \rangle &= \left\langle e_J, x_* + \int_{t_*}^T q'(t) dt \right\rangle + \left\langle e_{\delta(J)}, \int_{t_*}^T u^*(t) dt \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle e_{\xi(J)}, \int_{t_*}^T u^{(1)}(t) dt \right\rangle \geq \langle e_J, m' \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично при $v = v^{(2)}$

$$\begin{aligned} \langle e_J, x^{(2)}(T) \rangle &= \left\langle e_J, x_* + \int_{t_*}^T q''(t) dt \right\rangle + \left\langle e_{\delta(J)}, \int_{t_*}^T u^*(t) dt \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle e_{\xi(J)}, \int_{t_*}^T u^{(2)}(t) dt \right\rangle \leq \langle e_J, m'' \rangle. \end{aligned}$$

После вычитания выписанных неравенств получим

$$\begin{aligned} \left\langle e_{\xi(J)}, \int_{t_*}^T (u^{(2)}(t) - u^{(1)}(t)) dt \right\rangle - \left\langle e_J, \int_{t_*}^T (q''(t) - q'(t)) dt \right\rangle \geq \\ \geq \langle e_J, m'' - m' \rangle. \end{aligned}$$

Однако при любой квазистратегии α

$$\int_{t_*}^T (u_i^{(2)}(t) - u_i^{(1)}(t)) dt \leq \int_{t_*}^T (p_i'' - p_i') dt, \quad i \in N.$$

Приходим к противоречию с (4.6.2).

Для векторов h вида (4.5.5) и (4.5.6) доказательство аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема не только устанавливает совпадение множеств $\mathcal{W}^?(t_*)$ и $\mathcal{W}^{?,*}(t_*)$, но и показывает, что информационная структура, в которой для управления каждым водохранилищем используется знание об объеме воды во всех вышележащих водохранилищах, не имеет никаких преимуществ перед структурой, в которой известен только объем данного водохранилища.

§ 7. СРАВНЕНИЕ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО
И ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для фиксированных моментов времени $t_* \in [t_0, \Theta]$ и $T \in [t_*, \Theta]$ обозначим

$$\mathcal{U}_0(t_*, T) = \left(M + B \int_{t_*}^T P dt \right)^* - \left(- \int_{t_*}^T Q(t) dt \right). \quad (4.7.1)$$

Согласно определению множества $\mathcal{U}_0(t_*)$ (см. § 2 настоящей главы),

$$\mathcal{U}_0(t_*) = \bigcap_{[t_*, \Theta]} \mathcal{U}_0(t_*, T).$$

Множество G , найденное в § 4, состоит из векторов, нормальных к граням многогранника из правой части (4.7.1). Следовательно,

$$\mathcal{U}_0(t_*, T) = \{x_* \in R^n \mid \langle g, x_* \rangle \leq a_c(g, t_*, T), g \in G\}.$$

После преобразований можно получить такое представление множества $\mathcal{U}_0(t_*, T)$:

$$\begin{aligned} \langle e_J, x_* \rangle \leq a_c(e_J, t_*, T) &= \left\langle e_J, m'' - \int_{t_*}^T q''(t) dt \right\rangle + \\ &+ \left\langle e_{\delta(J)}, - \int_{t_*}^T p' dt \right\rangle + \left\langle e_{\xi(J)}, \int_{t_*}^T p'' dt \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

$$\begin{aligned} \langle -e_J, x_* \rangle \leq a_c(-e_J, t_*, T) &= \left\langle e_J, -m' + \int_{t_*}^T q'(t) dt \right\rangle + \\ &+ \left\langle e_{\delta(J)}, \int_{t_*}^T p'' dt \right\rangle + \left\langle e_{\xi(J)}, - \int_{t_*}^T p' dt \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

где J — произвольное связное множество.

По теореме 1, $\mathcal{W}^a(t_*) = \bigcap_{[t_*, \Theta]} \mathcal{W}^{a**}(t_*, T)$. Кроме того, при доказательстве теоремы 1 вычислены функции $a(h, t_*, T)$. Этим можно воспользоваться для получения следующего представления множества $\mathcal{W}^{a**}(t_*, T)$:

$$\langle e_J, x_* \rangle \leq a_c(e_J, t_*, T) + \sum_{h \in I} \left\langle e_{J_h}, (m'' - m') - \int_{t_*}^T (q'' - q') dt \right\rangle, \quad (4.7.4)$$

$$\langle -e_J, x_* \rangle \leq a_c(-e_J, t_*, T) + \sum_{h \in I} \left\langle e_{J_h}, (m'' - m') - \int_{t_*}^T (q'' - q') dt \right\rangle, \quad (4.7.5)$$

$$0 \leq \left\langle e_J, (m'' - m') - \int_{t_*}^T (q'' - q') dt \right\rangle + \left\langle e_{\xi(J)}, \int_{t_*}^T (p'' - p') dt \right\rangle, \quad (4.7.6)$$

где J — произвольное связанное множество, а (J, I, \emptyset) — нормальное разложение множества $J \cup \left(\bigcup_{h \in I} J_h \right)$.

Из сравнения представлений (4.7.2), (4.7.3) и (4.7.4), (4.7.5) можно сделать следующие выводы.

1. $\mathcal{W}^\rho(t) \subset \mathcal{U}_0(t)$, $t \in [t_0, \Theta]$.

2. $\mathcal{W}^\rho(t)$ и $\mathcal{U}_0(t)$ — многогранники с параллельными гранями (т. е. множества нормалей к граням совпадают).

3. При $m_i'' > m_i'$, $i \in N$ существует момент времени $t_n < \Theta$ такой, что $\mathcal{W}^\rho(t_*) = \mathcal{U}_0(t_*)$, $t_* \in [t_M, \Theta]$. Действительно, момент

$$t_M = \max_{i \in N} \min \left\{ t' \mid (m_i'' - m_i') \geq \int_{t_1}^{\Theta} (q''(t) - q'(t)) dt, \quad \forall t_1 \geq t' \right\}$$

обладает указанным свойством.

Для множества $\mathcal{W}^\rho(t_*)$ так же, как и для множества $\mathcal{U}_0(t_*)$, (см. § 2) можно построить представление в виде дифференциальных уравнений для правых частей неравенств:

$$\mathcal{W}^\rho(t_*) = \{x_* \in R^n \mid \langle e_J, x_* \rangle \leq d(e_J, I, t_*),$$

$\langle -e_J, x_* \rangle \leq d(-e_J, I, t_*), 0 \leq d_J(t_*)$, J — любое связанное множество, (J, I, \emptyset) — нормальное разложение};

$$d(e_J, I, \Theta) = \langle e_J, m'' \rangle + \sum_{h \in I} \langle e_{J_h}, m'' - m' \rangle, \quad (4.7.7)$$

$$d(-e_J, I, \Theta) = \langle e_J, -m' \rangle + \sum_{h \in I} \langle e_{J_h}, m'' - m' \rangle, \quad (4.7.7')$$

$$d_J(\Theta) = \langle e_J, m'' - m' \rangle, \quad (4.7.8)$$

$$\dot{d}(\pm e_J, I, t) = \begin{cases} f(\pm e_J, I, t), & \text{если } d(\pm e_J, I, t) < d(\pm e_J, I, \Theta), \\ \max(f(\pm e_J, I, t), 0) & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (4.7.9)$$

$$\dot{d}_J(t) = \begin{cases} f_J(t), & \text{если } d_J(t) < d_J(\Theta), \\ \max(f_J(t), 0) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.7.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(e_J, I, t) &= \langle e_J, q'' \rangle + \langle e_{\delta(J)}, p' \rangle - \\ &- \langle e_{\xi(J)}, p'' \rangle + \sum_{h \in I} \langle e_{J_h}, q'' - q' \rangle, \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

$$\begin{aligned} f(-e_J, I, t) &= \langle e_J, -q' \rangle + \langle e_{\xi(J)}, p'' \rangle + \\ &+ \langle e_{\delta(J)}, p' \rangle + \sum_{h \in I} \langle e_{J_h}, q'' - q' \rangle, \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

$$f_J(t) = \langle e_J, q'' - q' \rangle + \langle e_{\xi(J)}, p'' - p' \rangle, \quad t \in [t_0, \Theta]. \quad (4.7.13)$$

Представление (4.7.7) — (4.7.13) можно считать полным описанием множества $\mathcal{W}^\rho(t)$.

§ 8. СЛУЧАЙ ДВУХ ПЛОТИН. ПРИМЕР

Ситуация с двумя водохранилищами, стоящими одно выше другого, имеет по сравнению с общим случаем ряд интересных особенностей. Например, множество векторов, нормальных к граням многогранника $\mathcal{U}(t)$, совпадает с множеством векторов, нормальных к граням многогранника $\mathcal{U}_0(t)$. Это следует из леммы 5.

Лемма 5. Пусть $A_k = \{x \in R^2 \mid \langle a^{(i)}, x \rangle \leq a_i^k, i = 1, \dots, m\}$, $k = 1, 2$, — многогранник из R^2 . Тогда

$$A_1 + A_2 = A = \{x \in R^2 \mid \langle a^{(i)}, x \rangle \leq a_i, i = 1, \dots, m\}.$$

В то же время для случая трех и более водохранилищ множество векторов, нормальных к граням многогранника $\mathcal{U}(t)$, вообще говоря, шире, чем множество G . Это связано с тем, что утверждение леммы 5 не справедливо для пространства размерности больше двух.

Другая особенность каскада из двух водохранилищ состоит в том, что для множества $\mathcal{W}^p(t_*)$ имеются лишь две возможности: либо $\mathcal{W}^p(t_*) = \mathcal{U}_0(t_*)$, либо $\mathcal{W}^p(t_*)$ пусто.

Следующий пример показывает, что уже для каскада из трех водохранилищ найдутся позиции $x_* \in \mathcal{U}(t_*)$ такие, что $x_* \in \mathcal{W}^p(t_*) \neq \emptyset$.

Пример. Каскад состоит из трех последовательно расположенных водохранилищ (рис. 4.2). Объемы водохранилищ: $x_{*2} \in [m'_2, m''_2] = [-2, 2]$, $x_{*3} \in [-2, 2]$, в первом водохранилище объем воды не ограничен.

Управления (попуски из водохранилищ) таковы:

$$u_1 \in [p'_1, p''_1] = [-3, 3], u_2 \in [-1, 1], u_3 \in [-1, 1].$$

Заданы также множества возможных управлений противника (притоки), не зависящие от времени:

$$v_1 \in [q'_1(t), q''_1(t)] = [0, 0], v_2 \in [-3, 3], v_3 \in [-3, 3].$$

Пусть $\Theta = 0$, вычислим момент обрыва множества $\mathcal{W}^p(t_*)$ $t_M = \max_{J \subset N} \min \{t' \mid d_J(t) > 0 \quad \forall t \geq t'\}$, J — любое связное подмножество N (см. представление (4.7.6) — (4.7.13));

$$d_{\{3\}}(t) = d_{\{2\}}(t) = 4 + 4t;$$

$$d_{\{2, 3\}}(t) = 8 + 10t.$$

Следовательно, $t_M^- = -\frac{4}{5}$.

При $t = -\frac{4}{5}$ множества $\mathcal{W}^p\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\mathcal{U}\left(-\frac{4}{5}\right)$ в плоскости (x_2, x_3) изображены на рис. 4.3. Множество $w\left(-\frac{4}{5}\right)$ не пусто, так как из точки $x_{*2} = 0$, $x_{*3} = 0$, $t_* = -\frac{4}{5}$ можно удерживать



Рис. 4.2. Каскад трех водохранилищ.

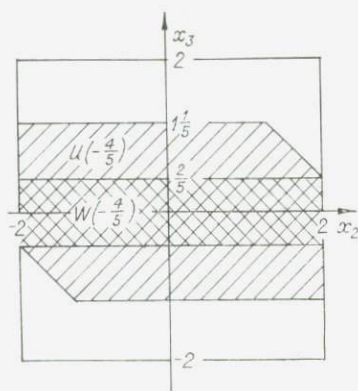


Рис. 4.3. Множества $W\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $U\left(-\frac{4}{5}\right)$.

движение внутри $[-2, 2] \times [-2, 2]$ с помощью следующих стратегий-соглашений:

$$\begin{aligned} \pi_1'(t) = \pi_1''(t) = 0, \pi_2'(t) = \\ = -\frac{1}{2}, \pi_2''(t) = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\pi_3'(t) = -1, \pi_3''(t) = 1, t \in \left[-\frac{4}{5}, 0\right].$$

Централизованные позиционные стратегии

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \begin{cases} 3, & \text{если } x_2 \leq -2, \\ -3 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ u_2(t, x) &= \begin{cases} -1, & \text{если } x_3 \geq 2 + t, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ u_3(t, x) &= \begin{cases} -1, & \text{если } x_3 \geq 2 + t, \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

обеспечивают решение задачи 1 из начальной позиции $x_{*2} = -2$, $x_{*3} = 1\frac{1}{5}$, $t_* = -\frac{4}{5}$. Однако с помощью стратегий-соглашений удержать движение из этой точки нельзя.

Таким образом, множество $\mathcal{W}\left(-\frac{4}{5}\right)$ не пусто и не совпадает с $U\left(-\frac{4}{5}\right)$.

§ 9. ПОСТРОЕНИЕ СТРАТЕГИЙ-СОГЛАШЕНИЙ

В заключение приведем план, по которому для начальной позиции $x_* \in \mathcal{W}^0(t_*)$ можно построить стратегию-соглашение, разрешающую задачу 1.

1. Множество $Y(t)$ имеет вид

$$\langle h, y \rangle \leq a(h, t), \quad h \in H.$$

Множество H найдено в § 4; правые части неравенств можно найти, решив следующие дифференциальные уравнения:

$$a(h, \Theta) = \max_{z \in Z_1} \langle h, z \rangle,$$

$$Z_1 = \left\{ z \in R^{2n} \left| \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \\ -E & -E \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} -m' \\ m'' \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\},$$

$$\dot{a}(h, t) = \begin{cases} c(h, t), & \text{если } a(h, t) < a(h, \Theta), \\ \max(c(h, t), 0) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$c(h, t) = \max_{z \in Z_2} \langle -h, z \rangle,$$

$$Z_2 = \left\{ z \in R^{2n} \left| \begin{pmatrix} 0 & -B^{-1} \\ -B^{-1} & 0 \\ B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} p'' \\ -p' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{-1} q'' \\ -B^{-1} q' \\ B^{-1} (q' - q'') \end{pmatrix} \right. \right\}.$$

2. Построим функцию $y(t) \in Y(t)$, $t \in [t_*, \Theta]$ следующим образом:

$$y(t_*) = \begin{pmatrix} -x_* \\ x_* \end{pmatrix}.$$

Обозначим $H_0(t) = \{h \in H \mid \langle h, y(t) \rangle = a(h, t)\}$. Если множество $H_0(t)$ пусто, то $\dot{y}(t)$ может быть взято произвольно из множества Z_2 . Если H_0 не пусто, то $\dot{y}(t) = z_0$, где вектор $z_0 \in R^{2n}$ таков, что $\langle h, z_0 \rangle = \max_{z \in Z_2} \langle h, z \rangle$ для всех $h \in H_0$. По построению множества $Y(t)$ такой вектор найдется.

3. Положим

$$\pi'_i(t) = \langle -(b^{-1})_i, \dot{y}'(t) + q'(t) \rangle, \text{ если } y'_i < -m'_i,$$

$$\pi'_i(t) = \langle -(b^{-1})_i, q'(t) \rangle \text{ в противном случае;}$$

$$\pi''_i(t) = \langle (b^{-1})_i, -\dot{y}''(t) + q''(t) \rangle, \text{ если } y''_i(t) < m''_i,$$

$$\pi''_i(t) = \langle (b^{-1})_i, q''(t) \rangle \text{ в противном случае.}$$

Здесь $(b^{-1})_i$ — i -я строка матрицы B^{-1} .

Указанные стратегии-соглашения обеспечат решение задачи 1 из начальной позиции (t_*, x_*) .

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РЕГИОНАЛЬНОМ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННОМ ПЛАНИРОВАНИИ

В последние 15 лет большое количество работ как за рубежом, так и у нас в стране было посвящено задаче оптимального планирования системы очистных сооружений речного бассейна. Рассматривалась задача с фиксированными расходами воды в выделенных створах и при известных нагрузках на очистные сооружения (ОС), в которой требуется выбрать степени очистки, обеспечивающие заданные ограничения на качество воды и минимизирующие суммарные затраты на очистку сточных вод по бассейну. Несомненна ценность такого подхода, учитывающего коллективный характер загрязнения водной среды и позволяющего достичь значительного экономического эффекта. Понятна и его ограниченность, поскольку как нагрузка на очистные сооружения, так и расчетный расход в этих моделях являются фиксированными и зачастую малообоснованными параметрами модели.

Описаны три этапа исследований, которые позволяют последовательно решать следующие вопросы:

1. Обосновать объемы мелиоративного строительства с точки зрения потребностей народного хозяйства и особенно сельского хозяйства в целом.

2. Выбрать параметры водохозяйственной системы (ВХС) при двух предпосылках:

а) предполагается, что вода условно чистая и затраты на водоохрану косвенно учтены в народнохозяйственных затратах, а требования по качеству воды будут выполнены за счет ограничений на попуски. При этом выбираются состав и емкости водохранилищ, площади оросительных систем, мощности прочих включенных в рассмотрение потребителей;

б) развитие ВХС планируется с прямым учетом качества воды.

3. Выработать правила управления системой и обосновать параметры ВХС на имитационной модели.

Рассмотрены модели планирования водоохраных мероприятий речного бассейна с учетом вопросов регулирования и использования стока. Предлагаемая модель отличается, во-первых, явным учетом аспектов водоохраны, включая экономические показатели, и, во-вторых, неявной ориентацией на речные бассейны с преобладанием промышленного использования вод, в то время как модель размещения в § 2 ориентирована на оптимизацию ирригационного водопотребления.

§ 1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРОБЛЕМ

Системные исследования включают структуризацию проблемы и обоснование используемых математических методов. Создание системы взаимодействующих моделей основано на выделении уровней планирования во времени, территориальной схематизации и упорядочивании соподчинения моделей.

Иерархическая структура математических методов в водном хозяйстве

Динамические и стохастические особенности водохозяйственных задач, характер учета пространственных и временных уровней обуславливают необходимость применения всего арсенала математических методов оптимизации, а также методов имитации и оценочных расчетов при решении различных задач. Не все методы в достаточной степени развиты и нашли применение при исследовании проблем водного хозяйства (рис. 5.1).

Наличие «белых пятен» на рис. 5.1 объясняется не только сложностью и неразработанностью соответствующего математического аппарата, но и, что самое важное, недостаточно разработанным формализованным описанием оптимального развития и функционирования ВХС. Последним объясняется также малая доля применения уже разработанного аппарата.

Современный отечественный и зарубежный опыт свидетельствует о наибольшем распространении линейных моделей при изучении многих задач водного хозяйства и особенно при оценке общих путей его развития, определении объемов водопотребления. Применяются также дискретные стохастические модели динамического программирования, учитывающие вероятностный характер процессов.

Совсем мало известно попыток применения аппарата теории игр, а также моделей оптимального управления в задачах с распределенными параметрами. В то же время многие физические процессы, такие как движение наземных и подземных вод, хорошо описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Методы решения таких задач развиты, постоянно совершенствуются и довольно широко используются при исследовании некоторых задач водохозяйственного планирования.

Детальное изучение отдельных вариантов развития и функционирования ВХС выполняется на имитационных моделях. Имитационные модели могут включать весьма большое число параметров с описанием взаимосвязей между ними, не требуют введения критерия оптимальности для многоцелевых по существу задач. Недостатками их являются чрезмерно большой объем входных данных и потребность в анализе и обработке вне модели результатов расчета.

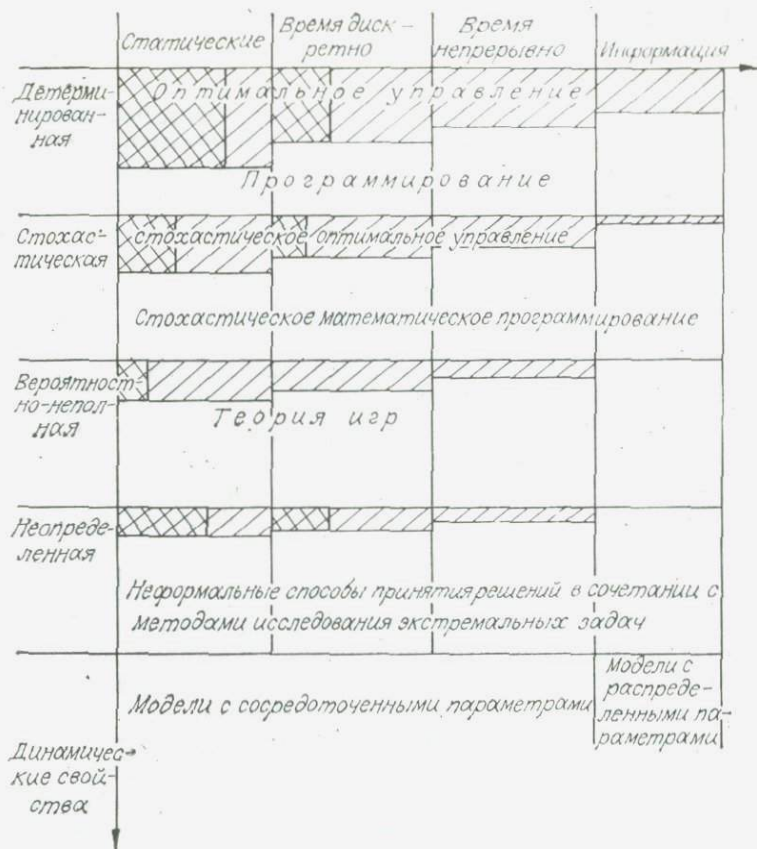


Рис. 5.1. Иерархия оптимизационных моделей по динамическим и стохастическим свойствам.

На горизонтальной оси указан характер учитываемой информации о ВХС, на вертикальной — динамические свойства моделей, характер учета параметров и времени. В соответствующих квадратах указаны классы экстремальных задач, простая и двойная штриховка отражают примерно работоспособность математического аппарата вообще и применимость его в водохозяйственных задачах в частности.

Построение показателей эффективности функционирования системы и включение их в число условий задачи помогает упорядочить общее исследование, хотя может привести к некоторому сужению допустимой области. Модели такого типа, где некоторый функционал или функционалы подсчитываются наряду с проверкой прочих условий, принято называть оценочными.

Оптимизационные модели предназначены для определения оптимальной стратегии развития и функционирования ВХС. В эти модели закладывается описание всего множества стратегий, обеспечивается возможность их сравнения, и по определенному правилу выбирается оптимальная стратегия. В зависимости от цели исследования, точности описания изучаемых процес-



Рис. 5.2. Система математических моделей планирования крупных ВХС.

сов и характера принятых упрощений оптимизационные модели оказываются линейными, выпуклыми или многоэкстремальными (рис. 5.2). Следует отметить, что в силу комплексности проблем, изучаемых в водном хозяйстве, и недостаточной изученности сложных природных процессов при исследовании реальных задач приходится идти на упрощение математических моделей из-за недостаточности или ненадежности исходной информации. В целом совершенствование соответствующих математических методов и их реализации на ЭВМ, дальнейшее исследование закономерностей развития и функционирования ВХС и повышение адекватности их математического описания позволяют расширить область применимости каждого типа моделей. Общее развитие знаний и увеличение информационного обеспечения может привести также и к возможному изменению самого типа модели, т. е. к замене ее класса.

Важной особенностью ВХС является существование сети, по которой перемещаются потоки воды и примесей. Геометрическое начертание сети соответствует схематическому изображению системы. Задачи оптимизации ВХС могут рассматриваться при этом как потоковые задачи на этой сети. Такой подход позволяет привлечь к исследованию эффективные методы анализа и решения потоковых задач.

Однако в задачах функционирования и развития ВХС присутствует значительное число ограничений общего вида и по использованию различного рода ресурсов и требования на объем производства продукции водоемкими отраслями. Наличие ограничений общего вида нарушает «потоковость» задачи и требует исследований по созданию эффективных методов решения подобных «смешанных» задач.

Построение единой модели, описывающей процесс развития и функционирования водного хозяйства, представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Однако, если бы такая модель была создана, трудности ее исследования и решения сделали бы эту модель «неподъемной». Поэтому возникает необходимость разбиения системы водного хозяйства на подсистемы, всего процес-

са планирования на подпроцессы, т. е. необходимость построения взаимосвязанных моделей этих подсистем и подпроцессов — иерархической совокупности моделей.

При построении совокупности моделей принят примат моделей принятия решений о функционировании и развитии водного хозяйства над информационной подсистемой. Это положение обусловлено необходимостью знать, какая информация и в каком виде потребуется для принятия решения. Конечно, существует и обратная связь, выражающаяся в необходимости приспособления моделей к имеющейся информации в целях оперативного исследования задачи без проведения дополнительных изысканий или научно-исследовательских работ по получению недостающей информации. Иерархия моделей строится с учетом территориального районирования и временного уровня, а также в соответствии с типами используемых математических моделей.

Уровни планирования во времени

Информация о параметрах и связях в системе водного хозяйства, об условиях ее развития и функционирования с течением времени становится более достоверной. Поэтому обоснование решений и их коррекция должны осуществляться с минимально допустимой заблаговременностью на базе «наиболее свежей» информации. Заблаговременность определяется характером рассматриваемых альтернатив и информацией о них. Поэтому сроки планирования в моделях развития водного хозяйства совпадают со сроками, принятыми в народном хозяйстве, и составляют месяц, квартал, год, пятилетие, пятнадцать лет и т. д.

При обосновании периодов планирования в водном хозяйстве приходится учитывать долгосрочность сооружения, освоения и функционирования водохозяйственных объектов, а также социальные и экологические последствия осуществляемых мероприятий. Указанные процессы требуют рассмотрения периода времени в 50 лет и более. Характер обих прогнозов подобной длительности для основных показателей экономического развития таков, что речь может идти не о детальном планировании, а лишь о перспективном прогнозировании. Модели перспективного прогнозирования имеют оценочный характер и реализуются приближенными балансовыми методами.

Исследование задач долгосрочного планирования на 10—15 лет может вестись уже на базе оптимизационных моделей. При этом планирование на 15 лет осуществляется на основе перспективных планов развития народного хозяйства; 10-летнее планирование должно быть более точным, чтобы обоснованно составлять планы на текущее и следующее пятилетие.

Среднесрочные и краткосрочные планы на 5 лет, 1 год и меньшие периоды времени разрабатываются с большей детализацией.

Отличие водного хозяйства от других отраслей состоит в тесной связи и взаимодействии с быстропротекающими стохастиче-

скими физическими процессами. Это обуславливает необходимость рассмотрения недельных и суточных интервалов при решении некоторых задач управления.

Территориальное соподчинение моделей

Уровни территориального соподчинения моделей планирования водного хозяйства начинаются со страны в целом, а закончены могут быть такими территориальными единицами, как природно-климатическая зона в республике, крае или отдельная оросительная система. Задачи верхнего уровня решают общие вопросы развития водного хозяйства страны, такие как определение пропорций развития и размещения основных водопотребляющих отраслей, оценка водопотребления и водоотведения в разные периоды планирования. На более низких уровнях изучаются задачи эксплуатации и развития отдельных функциональных систем как единого хозяйственного целого.

Система математических моделей должна обеспечить возможность обоснования вариантов требований, предъявляемых отраслями народного хозяйства к водному хозяйству, с дифференциацией по экономическим и водохозяйственным районам. В результате расчетов должны быть определены также возможности водоснабжения рассматриваемых районов, а может быть, и их частей за счет естественных ресурсов и перебросок. При этом сравниваются различные виды водных ресурсов в их взаимосвязи.

Исследование системы математических моделей должно обеспечить целостное представление о развитии водного хозяйства во времени и пространстве. Поэтому в рассмотрение включаются ключевые взаимозависимости между отдельными элементами водохозяйственных систем. Закономерности взаимосвязей отдельных элементов в системе превалируют при этом над изучением элементов, как таковых, и закономерностей внутри них, поэтому модели элементов типа отдельных предприятий образуют нижний уровень иерархии моделей.

Территориальное районирование определяет объекты исследования моделей на каждом уровне, а также число вертикальных уровней и горизонтальных связей иерархии. Районирование должно проводиться таким образом, чтобы погрешность, получаемая за счет замены глобальной модели водного хозяйства системой иерархически связанных моделей, была бы наименьшей. Территориальные единицы, выбранные для модели любого уровня, должны обеспечить достижение основных целей исследования, а именно определение главных направлений развития водного хозяйства в зависимости от различных факторов. Так как число водоемких производств в стране достаточно велико и исчисляется десятками, то определение общих пропорций водоемких отраслей для страны в целом на любой период планирования с учетом уже существующих производств требует выделения достаточно крупных территориальных единиц, обладающих,

однако, достаточной однородностью условий и обеспеченностью исходной информацией.

Так, однотипность решения вопросов водообеспечения диктует выделение бассейнов крупных рек; однотипность природных и экономических характеристик делает естественным деление на экономические районы. Районирование по указанным принципам обеспечивает полноту использования плановых показателей развития народного хозяйства, ресурсных данных, а позднее — экономическую трактовку полученных результатов.

В соответствии с принятым районированием проводится агрегирование или, наоборот, разукрупнение исходной информации.

§ 2. СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ ПЛАНИРОВАНИЯ ВОДНОГО ХОЗЯЙСТВА РЕГИОНА

Для решения проблемы регионального водохозяйственного планирования рассматривается система математических моделей развития водного хозяйства региона, включающая оптимизационные модели общего плана водопользования и потоковую, а также имитационную агрегативную модель и процедуры согласования решений, получаемых в этих моделях. Оптимизационные модели являются статическими, детерминированными. Динамические и стохастические особенности поступления и использования воды учитываются в имитационной модели.

Принята трехэтапная последовательность планирования водного хозяйства региона, предложенная в работах В. Г. Пряжинской, И. Л. Храновича [1979]; В. Г. Пряжинской, И. Л. Храновича, В. М. Шнаймана [1982].

Первый этап заключается в нахождении общего плана водопользования, минимизирующего совокупные народнохозяйственные затраты при ограничениях на выпуск продукции и имеющиеся ресурсы. Модель описывается задачей линейного программирования общего вида, включает основные водопотребляющие отрасли и оперирует агрегированными по районам характеристиками. Рассмотрение задачи первого этапа позволяет сузить множество допустимых планов развития водного хозяйства и сформировать задачи второго этапа.

Потоковая модель второго этапа более детально отражает топологическую структуру и эффект перемещения и использования воды в регионе. Модель описывается многоэкстремальной транспортной задачей на графе с усилением в дугах, состоящей в минимизации затрат с учетом получаемого эффекта от использования воды и ущербов, обусловленных отклонением объемов подаваемой воды от оптимальных. В результате исследования потоковой модели устанавливаются оптимальные уровни развития отдельных элементов водохозяйственной системы.

Взаимобусловленность линейной и потоковой моделей предопределяет необходимость согласования их оптимальных планов.

Это осуществляется при помощи задачи коррекции, оптимальный вектор которой уточняет решение задачи второго этапа и приводит вновь полученный вектор в допустимое множество задачи первого этапа.

Более детальное изучение отдельных вариантов развития водного хозяйства осуществляется на рассматриваемой на третьем этапе агрегативной имитационной модели, структура которой определяется структурой потоковой модели. При проведении имитационных экспериментов проверяется реализуемость сформированного водохозяйственного плана, а также строятся правила управления водохозяйственной системой.

Описанные модели совместимы программно и информационно. Взаимосвязь моделей при решении задачи регионального водохозяйственного планирования показана на рис. 5.2.

Задачи оптимального размещения водоемких сельскохозяйственных производств

Модель первого этапа является моделью размещения водоемких производств (модель А). Модель включает основные водопотребляющие отрасли сельского хозяйства и оперирует агрегированными данными о потребностях в основных видах продукции, урожайностях, продуктивности животноводства, о ресурсах воды, земли, рабочей силы, показателями издержек, экологическими ограничениями и пр. Модель позволяет проанализировать альтернативные варианты развития экономики региона, обосновать размещение водоемких производств по подрайонам, оценить потребности в регулировании стока, сопоставить водопотребление и экономические издержки при определенном соотношении используемых водных ресурсов из поверхностных и подземных источников, а также при переброске их из других районов. Удовлетворение потребностей в воде несельскохозяйственных потребителей рассматривается вне модели, т. е. как экзогенный фактор.

Агрегирование информации в модели выполняется в соответствии с принятым агроэкономическим районированием. Для речного бассейна районирование заключается в выделении крупных административных единиц (автономных республик, областей и т. п.). Внутри них выделяются агроэкономические зоны — территории с однородными физико-географическими и технико-экономическими условиями. В качестве временной единицы планирования используется год.

Объемы производства сельскохозяйственной продукции в агроэкономических зонах и регионе в целом задаются извне. Они либо рассчитываются на основе прогнозов роста населения на планируемые периоды времени и рациональных норм питания с учетом национальных и социальных особенностей, либо могут быть получены из решения соответствующей задачи в масштабах страны. Задания по производству продукции по региону в целом

должны отражать и интересы народного хозяйства страны. Поэтому производство каждого вида продукции в регионе имеет две составляющие — «внутрирегиональную» и «народнохозяйственную». «Народнохозяйственная» составляющая производится в районах с наиболее благоприятными физико-географическими и технико-экономическими условиями, объем ее определяется в результате решения задачи.

В модели учитываются ресурсы земель различной категории в каждой агроэкономической зоне. Они включают богарные, орошаемые и пригодные к орошению земли и различаются по величине затрат на их освоение. Кроме того, выделяются площади сенокосов и пастбищ. В процессе решения задачи возможна трансформация земель из одного вида в другой. Так, земли, пригодные к орошению, включают, как правило, все богарные площади, а также часть сенокосов и пастбищ и т. д.

Данные о водных ресурсах включают объем эксплуатационных запасов подземных вод и поверхностных водных ресурсов для ирригации в условиях регулирования стока и без него. Указываются состав планируемых к строительству водохранилищ, величины их полезной отдачи, приуроченность районов к отдельным водохранилищам, а также возможные объемы внутри- и межрегиональных перебросок стока.

Определен состав богарных и орошаемых культур, заданы их проектные урожайности, оросительные нормы (при разных условиях обеспеченности осадками), ограничения севооборотного характера. Заданы состав отраслей животноводства, их продуктивность, удельная потребность в кормах, объемы производства продукции каждого вида. Заданы экономические показатели — сельскохозяйственные издержки в расчете на 1 га каждой возделываемой культуры; удельные затраты в животноводстве; стоимость 1 га нового орошения и реконструкции земель существующего орошения, затраты на перевод земель из одной категории в другую, зависимость удельных приведенных затрат на строительство водохранилищ от их полезной отдачи, затраты на реализацию 1 км³ перебросок. Водопотребление отраслей, учитываемых в задаче, предполагается безвозвратным. Изменчивость стока учитывается расчетами на несколько значений стока заданной расчетной обеспеченности. Аналогичным образом выполняются вариантные расчеты для разных обеспеченностей осадками.

Математическая постановка задачи представлена в работе В. Г. Пряжинской с соавторами [1981]. Каждому административному району изучаемого региона сопоставлен номер j . В свою очередь, каждая административная единица делится на R_j агроэкономических зон с разными уровнями продуктивности и затрат. Каждой зоне сопоставлен номер r , $1 \leq r \leq R_j$, а общерегиональным переменным и ограничениям — индекс R .

Переменные задачи подразделяются на шесть групп, включающих основные отрасли сельскохозяйственного производства, а также водные и земельные ресурсы.

Каждая составляющая первой группы переменных X_{ij}^r обозначает площадь, занимаемую отдельной сельскохозяйственной культурой i ; $i \in I_1$ — количество сельскохозяйственных культур, входящих в рассматриваемую задачу, $j \in J$, $J = (1, 2)$, где индекс 1 относится к богарным культурам, а индекс 2 — к орошаемым.

Вторая группа переменных y_i^r обозначает поголовье i -го вида скота и птицы в зоне r . Здесь $i \in I_2$ — количество видов скота и птицы, учитываемых в данной задаче.

Третья группа переменных W^r относится к ресурсам поверхностных вод, дифференцируемым по зонам r . Индекс i сопоставляется рекам или группам рек, а также действующим или проектируемым водохозяйственным объектам (гидроузлам, водохранилищам), множество которых обозначается I_3 , $i \in I_3$.

Четвертая группа переменных $W_{\rho l}^r$ характеризует возможные переброски стока на этапе l из зоны ρ в зону r , причем возможен случай внешних по отношению к данному региону перебросок. Экономические показатели их обозначаются $C_{W_{\rho l}}^r$.

Пятая группа переменных S_j^r , $j \in J$, представляет собой земельные ресурсы разного вида (богарные и орошаемые). Каждая из этих величин ограничена соответствующим земельным фондом. При решении задачи предполагается возможность перевода земель из одного вида в другой.

Шестая группа переменных S_j^r , $j \in J$, представляет собой земельные ресурсы разной категории, в частности требующие для сельскохозяйственного использования материальных затрат на реконструкцию и освоение по видам земель. Каждая из этих величин ограничена соответствующим земельным фондом, включающим земли действующих оросительных систем, в том числе и реконструируемые, которые должны использоваться в первую очередь, а также вновь осваиваемые ирригационные площади, целесообразность использования которых определяется в результате оптимизации.

Приведенные капитальные и эксплуатационные затраты на реконструкцию орошаемых земель или на новое мелпоративное строительство обозначаются C_{jQ}^r . Их значения при расчетах приняты в соответствии с проектными проработками.

Экономические показатели затрат на водохозяйственные объекты C_{iW}^r определяются по действующим объектам эксплуатационными издержками, а по новым — удельными приведенными затратами.

Показатели удельных приведенных затрат в растениеводстве определяются сельскохозяйственными издержками и обозначаются C_{ijx}^r , причем

$$C_{ijx}^r = \frac{[(N_{ijx}^r Z_{ijx} + P_{ijx}^r + R_{ijx}^r + H_{ijx}^r + B_{ijx}^r + F_{ijx}^r) \lambda_{1ijx}^r - M_{ijx}^r] \lambda_{2ijx}^r}{a_{ijx}^2},$$

где C_{ijx}^r — удельные приведенные затраты на производство

сельскохозяйственной культуры в r -й зоне; N_{ijx}^r — норма высева семян для i -й культуры; Z_{ijx} — цена посадочного и посевного материала; P_{ijx}^r — стоимость удобрений и ядохимикатов; R_{ijx}^r — стоимость транспортной тары в расчете на единицу урожая; a_{ijx}^r — урожайность i -й сельскохозяйственной культуры; H_{ijx}^r — затраты на возделывание i -й культуры; B_{ijx}^r — затраты на уборку урожая; F_{ijx}^r — затраты на мелиоративные мероприятия (для орошаемых культур); λ_{1ijx}^r — коэффициент накладных расходов, учитывающий расходы на содержание административно-управленческого персонала и прочие сопутствующие затраты; M_{ijx}^r — затраты на урожай будущих лет; λ_{2ijx}^r — коэффициент распределения затрат на основную продукцию.

Уравнения, связывающие в модели рассматриваемые переменные, также представлены несколькими группами.

Первая группа уравнений отражает условия баланса производства и потребления продукции сельского хозяйства.

Обозначим a_{ijx}^r урожайность сельскохозяйственных культур, $a_{i\eta y}^r$ — продуктивность η -го вида животноводческой продукции, $\eta \in N$, $|N| = 8$, — количество видов животноводческой продукции, а A_i^r , A_η^r , A_i^f , A_η^f , A_i^R , A_η^R — соответствующие потребности в продукции вида i или η в регионе, республике и зоне (индексы R , f и r соответственно).

Тогда ограничения, обеспечивающие баланс основных видов сельскохозяйственной продукции для региона, республики и зоны, записываются в виде

$$\sum_{s \in S} \sum_{j \in J} a_{ijx}^r x_{ij}^r \geq A_i^s, \quad \sum_{r \in S} \sum_{i \in I_2} a_{i\eta y}^r y_i^r \geq A_\eta^s, \quad i \in I_1, \quad s = r, f, R, \quad \eta \in N. \quad (5.2.1)$$

Задания по производству сельскохозяйственной продукции рассчитываются на основе прогноза роста населения на планируемые периоды времени и научно обоснованных норм питания. Эти данные позволяют оценить потребности республик и зон в продуктах питания. Задания по производству сельскохозяйственной продукции в целом по региону отражают интересы народного хозяйства страны и, как правило, превышают «внутренние» потребности. Поэтому объем производства каждого вида продукции в регионе имеет две составляющие — внутрирегиональную и народнохозяйственную. Дополнительная продукция должна производиться в зонах с наиболее благоприятными природными и технико-экономическими условиями.

Перспективные урожайности сельскохозяйственных культур, возделываемых на богаре, a_{ij}^r ($j = 1$) рассчитывались на основе экстраполяции фактических темпов роста урожайности на перспективу по зонам с различной влагообеспеченностью с учетом данных краевых и республиканских опытных станций.

Методом скользящей средней выявлено, что периодический ряд лет — шестилетка — с достаточной полнотой усредняет годы с различными погодными условиями. Коэффициент среднегодового прироста урожайности K_{i1}^r определяется по формуле

$$K_{i1}^r = (a_{i1k}^r - a_{i1n}^r) / n \cdot a_{i1n}^r,$$

где a_{i1n}^r — средняя фактическая урожайность i -й культуры за начальное шестилетие; a_{i1k}^r — средняя фактическая урожайность i -й культуры за конечное шестилетие; n — число лет между средними точками начальной и конечной шестилеток.

Ожидаемый уровень урожайности i -й культуры находится по формуле

$$a_{i1}^r = a_{i1cp}^r \left[1 + \frac{K_{i1}^r (n - 6)}{2} + K_{i1}^r \tau \right], \quad r \in R,$$

где a_{i1cp}^r — средняя фактическая урожайность i -й культуры за n лет; τ — число лет между планируемым периодом и последним годом, за который известна фактическая урожайность i -й культуры.

Урожайность сельскохозяйственных культур при орошении a_{ij}^r ($j = 2$) определяется из соотношения:

$$a_{i2}^r = a_{i1}^r + m_i^r \Delta a_i^r + q_i^r / \lambda_i^r,$$

где a_{i1}^r — плановая урожайность i -й культуры на богаре; m_i^r — количество влагозарядковых поливов по зонам увлажнения; Δa_i^r — прибавка урожайности от одного влагозарядкового полива; q_i^r — оросительная норма i -й культуры; λ_i^r — коэффициент водопотребления, [$\text{м}^3 / (\text{ц} \cdot \text{га})$].

Следующая группа уравнений представляет собой балансы использования воды в каждой зоне:

$$\sum_{i,j} q_i x_{ij}^r - V^r \left[\sum_{i \in I_3} W_i^r + \sum_l W_{\rho l}^r \right] \leq 0, \quad r \in R, \quad (5.2.2)$$

где q_i^r — оросительная норма культуры i -го вида; V^r — коэффициент использования воды в r -й зоне, $0 < V^r < 1$.

Кроме того, должны выполняться балансовые ограничения по водным ресурсам как по видам источников, так и по региону в целом:

$$\sum_{r \in R} \sum_{i \in I_3} W_i^r + \sum_l \sum_{r \in R} W_{\rho l}^r \leq \bar{W}, \quad \sum_{r \in R} W_{\rho l}^r \leq \bar{W}_{\rho l}, \quad \sum_{r \in R} \bar{W}_i^r \leq \bar{W}_i^r, \quad (5.2.3)$$

где \bar{W} — максимальный суммарный объем водных ресурсов региона, который может использоваться на орошение; \bar{W}_i^r — максимальная полезная отдача i -го вида источника водных ресурсов; $\bar{W}_{\rho l}$ — максимально допустимый объем переброски стока из бассейна ρ в бассейн l .

Оросительные нормы для различных сельскохозяйственных культур вычисляются по интегральным значениям дефицитов водного баланса, определенных биоклиматическим методом, который освещен в работе С. М. Алпатьяева [1967].

Ограничения, связанные с обеспечением санитарных, рыбохозяйственных и прочих попусков, записываются в виде неравенства типа

$$\sum_{r \in R} \sum_{i \in I_3} W_i^r \geq \widehat{W}, \quad (5.2.4)$$

где \widehat{W} — величина максимальной годовой потребности учитываемых факторов.

Кроме того, для каждой агроэкономической зоны должны выполняться следующие соотношения:

а) балансы кормов

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij\mu}^r x_{ij}^r - \sum_{i \in I_2} a_{i\mu} y_i^r \geq 0, \quad (5.2.5)$$

где μ — индекс кормов определенного типа; $a_{ij\mu}^r$ — продуктивность i -й кормовой культуры по μ -му виду кормов в зоне r ; $a_{i\mu}$ — потребность структурной головы скота вида i в кормах с индексом μ ;

б) ограниченность земельных ресурсов и возможность перевода земель из одного вида в другой учитывается следующими условиями:

$$\sum_{i \in I_1} \Theta_{ij}^r x_i^r - S_j^r = 0, \quad S_j^r \leq \bar{S}_j^r, \quad j \in J, \quad r \in R, \quad (5.2.6)$$

$$\sum_{j \in J_1} Q_j^r - S_2^r = 0, \quad Q_j^r \leq \bar{Q}_j^r, \quad Q_1^r + Q_2^r = Q_0^r. \quad (5.2.7)$$

Здесь Θ_{ij}^r — коэффициенты приведения, учитывающие земли, находящиеся под паром, причем $Q_{ij}^r > 1$ для культур, возделываемых на богаре, $Q_{ij}^r = 1$ для орошаемых культур; Q_0^r — земля существующего орошения, часть из которой (Q_2^r) предполагается реконструировать. Равенство (5.2.7) означает необходимость полного использования земель существующего орошения. \bar{S}_j^r — ресурсы земли каждого вида (богарные и орошаемые),

$$\sum_{j \in J} \xi_j \bar{S}^r \leq \bar{S}^r, \quad (5.2.8)$$

где \bar{S}^r — земельный фонд r -й зоны; ξ_j — коэффициент потерь при переводе богарных земель в орошаемые.

В модель включен также ряд севооборотных условий, задающих долевую структуру посевных площадей ведущих сельскохозяйственных культур в зонах и определяющих специализацию зоны. Они могут быть записаны в виде

$$\beta_{j\alpha}^r \sum_{i \in I_\alpha} x_{ij}^r - S_j^r = 0, \quad j \in J, \quad \alpha \in A, \quad S_j^r \leq \bar{S}_j^r, \quad (5.2.9)$$

где I_α — множество культур, входящих в условие α ; A — мно-

жество условий вида (5.2.2) — (5.2.9); $\beta_{j\alpha}^r$ — коэффициенты, учитывающие севооборотные условия.

Четвертая группа уравнений учитывает ограниченность трудовых ресурсов зоны или республики:

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_1} t_{ij}^r x_{ij}^r + \sum_{i \in I_2} t_{iy}^r y_i^r + \sum_{j \in J_2} t_{jq}^r Q_j^r \leq T_1, \quad (5.2.10)$$

Здесь t_{ij}^r — представляет собой удельные нормативы трудовых затрат на обработку посевной площади, занятой под культуру i , а t_{iy}^r — аналогичные нормативы для обслуживания единицы поголовья животноводческой продукции в зоне r ; t_{jq}^r — трудозатраты, связанные с обустройством площадей орошения.

Уравнением

$$\sum_{r \in R} \left[\sum_{j \in J_1} K_{jq}^r Q_j^r + \sum_{i \in I_2} K_{iW}^r W_i^r + \sum_i K_{iW}^r W_{\rho l}^r \right] \leq K \quad (5.2.11)$$

ограничиваются суммарные капитальные затраты K на водохозяйственное строительство. Здесь $K_{jq}^r, K_{iW}^r, K_{eW}^r$ — капитальные затраты в расчете на соответствующий вариант использования земли и воды.

Помимо ограничений (5.2.4) — (5.2.11) должны выполняться также условия неотрицательности всех переменных.

В области удовлетворения указанных условий отыскивается минимум совокупных приведенных народнохозяйственных затрат F , где

$$F = \sum_{r \in R} \left[\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_1} c_{ij}^r x_{ij}^r + \sum_{i \in I_2} c_{iy}^r y_i^r + \sum_{j \in J_1} c_{jq}^r Q_j^r + \sum_{i \in I_2} c_{iW}^r W_i^r + \sum_j c_{W\rho l}^r W_{\rho l}^r \right]. \quad (5.2.12)$$

Исследование задачи заключается в проведении расчетов по модели (5.2.1) — (5.2.12) и подготовке вариантов для принятия решений.

Сформулированная задача имеет блочную структуру.

Матричная формализация имеет вид:

найти

$$\min F(z) \quad (5.2.13)$$

на множестве G_1 , определяемом ограничениями

$$Az \leq B. \quad (5.2.14)$$

Условия (5.2.14) отражают потребность в продукции сельского хозяйства, промышленности и других отраслей, ограниченность водных, трудовых, финансовых, земельных ресурсов, экологические ограничения и др.

Допустимый вектор z задачи образован составляющими Q, x . Вектор Q включает в себя в качестве координат водные ресурсы всех типов: поверхностные, подземные, перебрасываемые из других районов. Вектор x характеризует площади орошения, мощ-

ности промышленных, гидроэнергетических предприятий и пр., а также показатели отраслей, которые разделены на группы в соответствии с водопотреблением, продуктивностью и затратами. В сельском хозяйстве могут учитываться отдельные культуры растениеводства, отрасли животноводства и т. п. В промышленности аналогично выделяются существующие и планируемые отрасли со значительным водопотреблением. Таким образом, вектор $z = Q$, x состоит из двух составляющих: Q — «вода» и x — «не вода». Соответственно выделяются составляющие вектора удельных затрат $c = c_q, c_x$. Система ограничений (5.2.14) имеет структуру

$$A_1X + A_2Q \leq B$$

с матрицами нормативов затрат и продуктивностей A_1 и A_2 и вектором ограничений B , составляющие которого отражают задания по выпуску продукции, финансовые, трудовые, земельные, водные и другие ресурсы.

Пример расчета. Сформулированная задача решалась для условий Терско-Кумского региона.

Административно регион включает часть Ставропольского края и четыре автономные республики: Кабардино-Балкарскую, Северо-Осетинскую, Чечено-Ингушскую и Дагестанскую, которые подразделяются на пятнадцать природно-климатических зон. В гидрологическом плане регион относится к бассейнам рек Терек, Кума, Сулак, Самур.

Численность населения в рассматриваемой зоне составляет около 3 млн. чел., из них около 60% проживает в сельской местности. Ежегодный прирост населения в современных условиях достигает 2%.

Основными водопотребителями являются сельское и рыбное хозяйство (соотношение на перспективу 60 и 36% соответственно).

Сельское хозяйство региона имеет животноводческо-растениеводческое направление. Животноводство, в особенности овцеводство, развито в основном в горной части территории, растениеводство — в предгорной и равнинной зонах.

Ведущее место в растениеводстве принадлежит зерновым и кормовым культурам. Мелиоративный фонд региона составляет 2,6 млн. га. Оросительные системы охватывают в настоящее время площадь около 0,66 млн. га. При регулировании стока речных бассейнов региона площадь орошаемых земель, по проектным проработкам, предполагается довести до 1,2 млн. га.

В математической модели для решения водохозяйственных проблем Терско-Кумского бассейна предусматривается возможность сооружения водохранилищ на Тереке и основных его притоках. Из них Горное, Малкинское, Горько-Балкипское, Терско-Урухское регулируют сток для покрытия дефицита в створе Терско-Кумского канала (г. Моздок). Три водохранилища — Аргунское, Сунженское и Терское — регулируют сток Сунжи и Те-

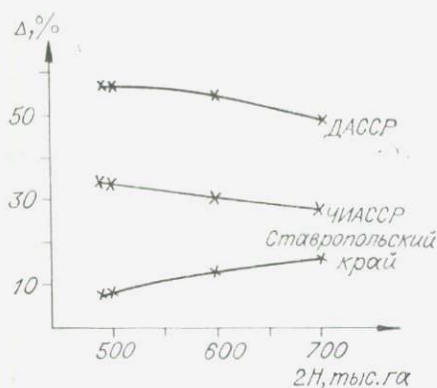


Рис. 5.3. Распределение орошаемых земель по административным единицам.

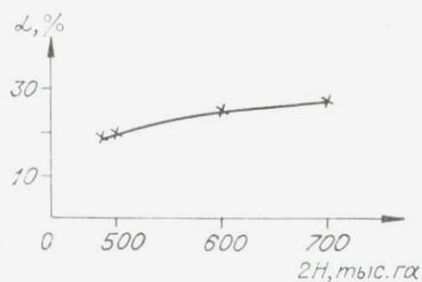


Рис. 5.4. Использование мелиоративного фонда в регионе.

пускос. В водном балансе региона учитываются водные ресурсы рек Самур, Сулак и Кума, а также возможность переброски части стока Волги.

Для удовлетворения требований рыбного хозяйства (в соответствии с проектными проработками) в модель включены ограничения относительно комплекса верховых водохранилищ Малкинского и Курпского, а также Малкинского и Терско-Урухского, отдача которых в совокупности должна составлять не менее 700 млн. м³, с тем чтобы обеспечить необходимые попуски в районе Моздока.

Водопотребление предполагается безвозвратным. Расчеты проведены на год 75%-ной обеспеченности условий естественного увлажнения и стока. Задача имеет блочную структуру и содержит 555 переменных и 624 ограничения. Ее решение осуществлено на ЭВМ ЕС-1033 с использованием работы [Пакет..., 1978].

Проведена серия расчетов, позволяющих оценить изменение основных показателей плана развития ирригационного строительства при различных вариантах прироста площадей орошения. Расчеты носят методический характер. Проведен анализ четырех основных вариантов, отличающихся значениями площадей нового орошения. В варианте 1 площади нового орошения составляют 453,6 тыс. га, в варианте 2 — 500 тыс. га, в варианте 3 — 600 тыс. га и в варианте 4 — 700 тыс. га. Общие площади орошения в регионе составляют соответственно 1122, 1160, 1260 и 1360 тыс. га. В процессе расчета сопоставлялись величины приведенных затрат F , водопотребление W на орошение и состав водохранилищ, имеющих ирригационное назначение, соотношение площадей богарных ($S_б$) и орошаемых ($S_ор$) земель и распределение их по республикам и региону в целом, а также структура использования водных ресурсов и отраслей растениеводства и животноводства.

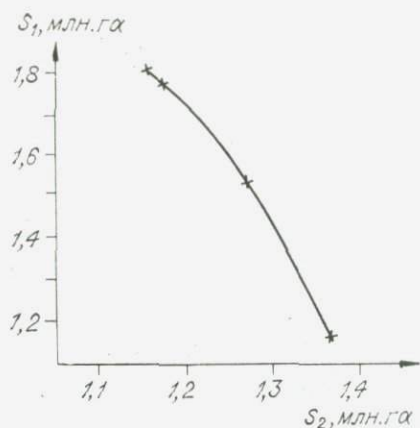


Рис. 5.5. Характер сокращения бо- гарных земель.

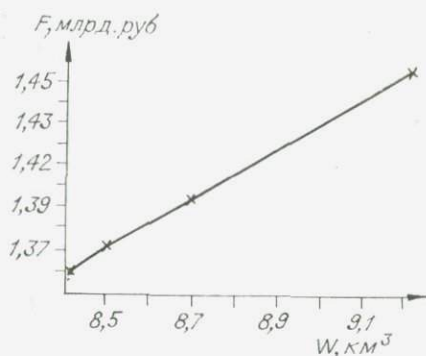


Рис. 5.6. Изменение приведенных за- трат в зависимости от водопотреб- ления.

Результаты расчетов представлены на рис. 5.3 — 5.6.

Предварительный анализ проведенных расчетов, а также сравнение их с проектными проработками показали эффективность применения модели в практике водохозяйственного проектирования на уровне «Схем комплексного использования водных ресурсов бассейнов рек и крупных экономических районов страны».

Потоковые модели оптимального развития водохозяйственной системы

Сложность проблемы развития ВХС, когда требуется оценить огромное число возможных вариантов развития, обусловила использование для ее решения оптимизационных моделей, в которых сравниваются все предлагаемые проектировщиком варианты. В данном параграфе рассматриваются оптимизационные модели развития ВХС, основанные на традиционном в водохозяйственном планировании потоковом подходе. В этих моделях ВХС изображается сетью $\Gamma(I, S)$, геометрическое начертание которой согласуется со схематическим изображением моделируемой системы. Элементы сети обладают собственными характеристиками, их взаимодействие осуществляется при перемещении потоков, соответствующих потокам воды и примесей в моделируемой системе. Привлекательность потокового описания развития ВХС обусловлена естественной связью с описываемой ситуацией, наглядностью представления проблемы и возможностью эту наглядность формализовать. Наглядность потокового представления и простота структуры допустимого множества соответствующей экстремальной задачи помогают анализировать задачу и строить эффективные методы ее решения в виде последовательного преобразования потоков.

Особенности потокового описания ВХС, в которых учитываются распределение водных ресурсов и регулирование качества воды, выделяют модели развития ВХС из всех потоковых моделей. В этом случае присутствующие в модели разнородные потоки, соответствующие в ВХС различным примесям, взаимодействуют. Модели, учитывающие распределение воды и регулирование ее качества, включают как частный случай описание развития ВХС с условно чистой водой. Эти модели не имеют аналогов в других системах и, отражая более общую ситуацию, являются более сложными.

Далее обсуждаются две потоковые модели, описывающие развитие ВХС в статической детерминированной постановке. Модель с однородным потоком описывает развитие ВХС с условно чистой водой, качество воды и водоохранные мероприятия в ней учитываются неявно, заданием ограничений. В модели с неоднородным потоком, соответствующим потокам воды и примеси, качество воды и водоохранные мероприятия являются искомыми переменными. Модель развития ВХС, в которой описываются вода и примеси, содержит модель развития ВХС с условно чистой водой как частный случай.

Потоковые модели планирования ВХС применялись и ранее [Великанов, Коробова, 1972; Экономическая оптимизация, 1974; Воропаев, Киселев, 1976; Деменчук и др., 1976; Кузин, Станишевский, 1978; Бостанджогло и др., 1979]. Модели, рассматриваемые в данном разделе, являются развитием упомянутых работ.

Построение математической модели развития ВХС, в которой совместно рассматриваются распределение водных ресурсов и регулирование качества поверхностных вод, также основывается на представлении этой системы как потоковой. Рассматриваемая в данном разделе модель развития ВХС, в которой не только осуществляется распределение воды, но и регулируется качество поверхностных вод, представляет собой расширение статического аналога ранее описанной модели [Пряжинская, Хранович, 1978].

Модель 1 (вода условно чистая). Потоковая модель описывается задачей математического программирования на сети $\Gamma(I, S)$, элементы которой соответствуют элементам ВХС. Потоки дуг $q_s, s \in S$, соответствуют потокам воды в ВХС.

Водотоки и водопользователи изображаются на $\Gamma(I, S)$ дугами с усилением, поток на входе которых связан с потоком на выходе соотношением $q_s^k = k_s q_s$, где k_s — коэффициент усиления, характеризующий возврат воды в систему, $1 \geq k_s \geq 0$. Если водопользователь возвращает всю использованную воду, то $k_s = 1$; если используется вся забираемая вода, $k_s = 0$; остальные случаи лежат между этими предельными.

Водохранилища в модели изображаются как источники. Источники располагаются в вершинах $\Gamma(I, S)$, которые характеризуются величинами потоков $b_i^0 \geq 0$. Значение b_i^0 соответствует максимальному количеству воды, которое может быть изъято из источ-

ника за рассматриваемый период времени. Для водохранилища b_i^0 соответствует величине его полезной отдачи.

Потоки в модели удовлетворяют закону неразрывности

$$\sum_{s \in S_i^+} k_s q_s - \sum_{s \in S_i^-} q_s + b_i^0 = 0, \quad i \in I, \quad (5.2.15)$$

где S_i^+ и S_i^- — множества дуг, соответственно исходящих из i -й вершины и заходящих в нее. Кроме того, на величины потоков в дугах наложены ограничения снизу и сверху:

$$\Lambda_s \geq q_s \geq \lambda_s \geq 0. \quad (5.2.16)$$

Физическая природа λ_s и Λ_s различна для различных дуг. Их значения соответствуют ограничениям объемов поставляемой, накапливаемой и протекающей воды, а также границам потребностей водопользователей.

В задаче I, описывающей модель I, каждый элемент $s \in S$ характеризуется функцией затрат $f_s(q_s)$, в которую включаются приведенные затраты на сооружение и эксплуатацию, а также эффект от использования воды. Функция $f_s(q_s)$ образуется из конечного множества a_s функций $f_{s\alpha}$ (число элементов a_s равно числу рассматриваемых вариантов развития s -го элемента):

$$f_{s\alpha}(q_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_s = 0, \\ p_{s\alpha} + \bar{f}_{s\alpha}(q_s), & \text{если } q_s > 0. \end{cases}$$

Здесь $p_{s\alpha}$ — постоянная составляющая затрат в α -м варианте развития s -го элемента, $\bar{f}_{s\alpha}$ — соответствующая функция затрат функционирования. Для существующих переконструируемых сооружений $p_{s\alpha} = 0$.

Результирующая функция затрат элемента строится как нижняя огибающая функция f_s :

$$f_s^*(q_s) = \min_{\alpha \in a_s} f_{s\alpha}(q_s).$$

Функции $f_s(q_s)$ образуют функцию затрат ВХС

$$f(q) = \sum_{s \in S} f_s(q_s). \quad (5.2.17)$$

Задача I состоит в минимизации определяемой равенством (5.2.17) функции $f(q)$ на множестве G_I , выделяемом системой ограничений (5.2.15), (5.2.17), которая в векторной записи имеет вид

$$D_A q \leq d_A.$$

Матрица D_A состоит из матрицы инцидентий сети $\Gamma(I, S)$ с заданным усилением в дугах и единичной матрицы, соответствующей двусторонним ограничениям (5.2.16) на потоки в дугах. Вектор d_A включает потоки в вершинах b_i^0 и ограничения на потоки в дугах Λ_s, λ_s .

Задача I описывает развитие ВХС в условиях, когда вода считается условно чистой. Условия защиты вод от загрязнения и экологические требования учитываются заданием ограничений снизу λ_s на величины потоков дуг, которые могут соответствовать необходимым санитарным, рыбохозяйственным и рекреационным попускам.

Модель II (воды и примеси). Задача II планирования развития ВХС, в которой не только распределяются водные ресурсы, но и регулируется их качество, формируется на той же сети $\Gamma(I, S)$. В ней ограничения на потоки воды дополняются законами перемещения примесей в системе и требованиями к качеству водных ресурсов. Структура функции цели φ задачи II аналогична структуре функции f . В φ учитываются также капитальные и эксплуатационные затраты очистных сооружений и затраты, обусловленные использованием воды различного качества.

Допустимое множество G_{II} задачи II выделяется системой ограничений (5.2.15), (5.2.16) и следующими условиями, отражающими учет качества воды в явном виде. Закон неразрывности потока примесей представлен в виде уравнений баланса масс примесей

$$\sum_{s \in S_i^+} k_s q_s y_s^{hl} - \sum_{s \in S_i^-} q_s y_s^l + b_i^l = 0, \quad l \in L, \quad (5.2.18)$$

в которых b_i^l соответствует объему примеси l -го вида, поступающей в i -ю вершину, y_s^l и y_s^{hl} обозначают соответственно концентрации l -й примеси на входе и выходе s -й дуги, L — множество видов примесей.

Дуги, изображающие водопользователей с очистными сооружениями и без них, в соответствии с физической картиной их функционирования описываются различными видами зависимостей между концентрациями примесей на входах и выходах. Эти зависимости для дуг, изображающих водотоки и водопользователей без очистных сооружений и образующих множество $S_1 \subset S$, предполагаются линейными:

$$y_s^{hl} = \sum_{\gamma \in L} a_s^{\gamma l} y_s^\gamma, \quad l \in L, \quad (5.2.19)$$

с неособенными матрицами взаимного влияния $a_s = \{a_s^{\gamma l}, \gamma, l \in L\}$. Между концентрациями примесей на входах и выходах дуг, изображающих водопользователей с очистными сооружениями и образующих множество $S_{11} = S \setminus S_1$, функциональная связь типа (5.2.19) отсутствует, так как в зависимости от режимов функционирования очистных сооружений при одних и тех же значениях y_s могут быть получены различные значения y_s^h . Концентрации y_s и y_s^h дуг множества S_{11} взаимосвязаны через затраты на функционирование.

Описание взаимосвязанных в ВХС воды и примесей включает требование совпадения состава разнородного потока на входах дуг, исходящих из одной вершины:

$$y_s^l = y_{s'}^l, \quad s, s' \in S_i^-, \quad l \in L, \quad i \in I, \quad (5.2.20)$$

что соответствует неизбежности вместе с водой получать также находящиеся в ней примеси.

Множество видов примесей L делится на подмножества L_p по лимитирующему показателю. Например, загрязняющие вещества можно разделить на три группы: санитарно-токсикологические, общесанитарные и органолептические. К каждому из подмножеств L_p предъявляются требования к качеству воды

$$\sum_{l \in L_p} \sigma_s^l y_s^l \leq 1, \quad \sum_{l \in L_p} \sigma_s^{hl} y_s^{hl} \leq 1, \quad p \in P, \quad \bigcup_{p \in P} L_p = L, \quad (5.2.24)$$

в которых σ_s^l и σ_s^{hl} — величины, обратные предельно допустимым концентрациям l -й примеси в потоках на входе \bar{y}_s^l и выходе \bar{y}_s^{hl} s -й дуги. Кроме того, на величины концентраций накладываются ограничения снизу

$$y_s^l \geq \underline{y}_s^l \geq 0, \quad y_s^{hl} \geq \underline{y}_s^{hl} \geq 0. \quad (5.2.22)$$

Условия (5.2.22) предъявляют более жесткие требования к y , чем превышение предельно допустимых концентраций всех примесей порознь. Из этих условий в силу неотрицательности концентраций, удовлетворяющих соотношениям (5.2.22), следует, что $y \leq \bar{y}$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пределы изменения концентраций примесей \underline{y} и \bar{y} отражают требования к объекту ВХС как элементу окружающей среды. В их формировании учитываются в основном условия функционирования водопользователей, требования которых взаимосвязаны с охраной водной среды и прилегающих территорий.

Функциональная взаимосвязь степеней очистки различных примесей в очистных сооружениях, взаимное влияние примесей при их использовании в задаче II описываются в виде комплексов примесей с их концентрациями на входах и выходах дуг:

$$u_s = \sum_{l \in L} \beta_s^l y_s^l, \quad u_s^h = \sum_{l \in L} \beta_s^{hl} y_s^{hl}. \quad (5.2.23)$$

В (5.2.23) коэффициенты β_s^l и β_s^{hl} — неотрицательные числа, отражающие значимость l -й примеси в комплексах s -й дуги. Концентрации примесей должны принадлежать технологическому диапазону

$$\bar{u}_s \geq u_s \geq \underline{u}_s, \quad \bar{u}_s^h \geq u_s^h \geq \underline{u}_s^h. \quad (5.2.24)$$

В задаче II водотоки и водопользователи без очистных сооружений характеризуются функциями затрат от потоков на входах дуг и концентраций комплексов примесей в них $\varphi_s(q_s, u_s)$. Функ-

ции $\varphi_s(q_s, u_s)$ образуются из функций

$$\varphi_{s\alpha}(q_s, u_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_s, u_s = 0, \\ p_{s\alpha} + \bar{\varphi}_{s\alpha}(q_s, u_s), & \text{если } q_s \cup u_s > 0, \end{cases}$$

составляющие которых $p_{s\alpha}$ и $\bar{\varphi}_{s\alpha}$ играют ту же роль, что $p_{s\alpha}$ и $\bar{f}_{s\alpha}$ в $f_{s\alpha}$, и имеют аналогичный им смысл. $\varphi_s(q_s, u_s)$ формируются из $\varphi_{s\alpha}(q_s, u_s)$ аналогично $f_s(q_s)$ из $f_{s\alpha}(q_s)$ как их нижние огибающие

$$\varphi_s(q_s, u_s) = \min_{\alpha \in a_s} \varphi_{s\alpha}(q_s, u_s).$$

В задаче II затраты водопользователей с очистными сооружениями $\Phi_s(y_s, u_s, u_s^h)$ зависят от потоков на входах и концентраций комплексов на входах и выходах дуг и представимы в виде $\Phi_s = \varphi_s(q_s, u_s) + \varphi_s^h(q_s, u_s^h)$. Функции φ_s и φ_s^h формируются точно так же, как φ_s для водотоков и водопользователей без очистных сооружений. Представление $\varphi_s(q_s, u_s, u_s^h)$ в виде суммы функций $\varphi_s(q_s, u_s)$ и $\varphi_s^h(q_s, u_s^h)$ означает независимое описание вариантов строительства и реконструкции водопользователей и их очистных сооружений.

Таким образом, задача II состоит в минимизации функции затрат

$$\varphi(q, u, u^h) = \sum_{s \in S} \varphi_s(q_s, u_s) + \sum_{s \in S_{II}} \varphi_s^h(q_s, u_s^h) \quad (5.2.25)$$

на множестве G_{II} , выделяемом системой ограничений (5.2.15), (5.2.16), (5.2.18) — (5.2.24), которая в векторной записи имеет вид

$$D_B(q, u, u^h) \leq d_B.$$

В потоковой модели, описываемой задачами I или II, оптимально используются водные ресурсы региона без учета ограничений, порождаемых заданиями по выпуску продукции и ограниченностью используемых «неводных» ресурсов. Она является моделью, балансирующей потенциальные возможности ВХС региона на основе производственных функций отдельных водопользователей.

Рассмотренные модели не включают в явном виде ограничения непотокового характера, отражающие задания по выпуску продукции, ограниченность трудовых, финансовых и других ресурсов. При включении этих условий в виде ограничений, линейных или билинейных в задачу I или билинейных в задачу II, все свойства задач остаются в силе, однако с увеличением числа непотоковых ограничений наглядность потокового представления падает, а трудоемкость решения задачи увеличивается.

Решение задач. Рассматриваемые потоковые задачи многоэкстремальны, т. е. в них существуют локальные минимумы. В задаче I ищется минимум невыпуклой функции (5.2.17) на выпуклом множестве G_I , выделяемой линейными ограничениями

(5.2.15), (5.2.16). Многоэкстремальность задачи II обусловлена не только невыпуклостью целевой функции (5.2.25), но и нелинейными ограничениями типа равенства (5.2.18), порождающими невыпуклость допустимого множества G_{II} . Общих методов решения задач такого класса не существует, однако использование специфики потокового формализма, в котором ВХС рассматривается как система из взаимодействующих объектов, каждый из которых характеризуется одной (задача I) либо двумя (задача II) переменными, позволяет построить методы их решения.

Решение многоэкстремальных задач I и II сводится к нахождению оптимальных векторов конечной последовательности оценочных выпуклых задач на сети $\Gamma(I, S)$, которые формируются в соответствии с методом, детализирующим схему ветвей и границ. Выпуклые задачи с задачной погрешностью аппроксимируются решаемыми линейными, которые для задачи I оказываются обобщенными транспортными, для задачи II — общего вида. В результате применения этого метода получаются векторы, которым соответствуют значения целевого функционала, отличающегося от оптимального не более чем на заданную величину. В задаче I этот вектор принадлежит допустимому множеству, в задаче II — выходит за допустимое множество не более чем на заданную погрешность. Этот подход подробно описан в работе [Кацнельсон, Храпович, 1979] для решения задачи I и в работе [Пряжинская, Храпович, 1978] для решения задачи II.

Взаимосвязь задач первого и второго этапов. Если в задаче первого этапа учесть структуру поступления, доставки, очистки и использования воды, т. е. провести районирование региона в соответствии с топологической структурой ВХС, то ограничения (5.2.16) будут включать условия (5.2.22) либо линеаризованные условия (5.2.21). В этом случае задача I будет содержать в себе задачу II (А либо Б) с линеаризованным целевым функционалом и линеаризованными ограничениями.

Если ограничения (5.2.16) применить к водным ресурсам и дополнить ими задачу второго этапа (А либо Б), то она будет содержать задачу (5.2.15), (5.2.16), но не будет потоковой.

Задача, которая включала бы (5.2.15), (5.2.16) и (5.2.21), (5.2.22) как частные случаи, была бы многоэкстремальной задачей математического программирования общего вида с большим числом переменных и ограничений. Методы анализа и решения задач такого типа отсутствуют. Поэтому естественно строить решение задачи развития водного хозяйства региона на основе взаимоувязки решений задач первого и второго этапов, которая должна содержать правила перехода от одной задачи к другой и корректировки получаемых решений.

В соответствии с зональной и потоковой схематизацией ВХС водная составляющая первого этапа Q может быть представлена как линейное преобразование потока q второго этапа

$$Q = Tq. \quad (5.2.26)$$

Это преобразование связывает задачи первого и второго этапов и используется в корректировке их решений.

Схема взаимоувязки решений. На первом этапе рассматривается семейство задач $\{I_\delta\}$, которые получаются из исходной задачи I при возмущениях ее условий, возникающих из-за неопределенности или неточности исходных данных. На основании исследования множества оптимальных векторов $\{z_\delta\}$ семейства $\{I_\delta\}$ выделяются включаемые в задачу второго этапа элементы ВХС, которые входят в решение хотя бы одной из задач I_δ , т. е. соответствующие им ненулевые переменные принадлежат $\bigcap_\delta z_\delta$. Про-

изводится потоковая структуризация ВХС. Так, вместо рассматриваемых на первом этапе орошаемых сельскохозяйственных культур на втором этапе в качестве элемента ВХС выступает оросительная система или группа систем, относящихся к данному створу. Формируются ограничения, образуемые матрицей D_Δ и вектором d_Δ . Для каждого элемента ВХС строится функция затрат $f_s(q_s)$ либо $\Phi_s(q_s, u_s, u_s^h)$ и для всей задачи — функция затрат системы $f(q)$ либо $\varphi(q, u, u^h)$.

На втором этапе решается задача Π_A либо Π_B , из ее оптимального вектора выделяется составляющая q^{II} , соответствующая потокам воды в ВХС. По q^{II} в соответствии с преобразованием (5.2.26) определяется вектор $Q^{II} = Tq^{II}$. Заменой в оптимальных векторах первого этапа z_δ их водной составляющей Q_δ на Q^{II} формируется вектор $\bar{z}_\delta = Q^{II}$, x_δ . Если векторы $\bar{z}_\delta \in G_I^\delta$, т. е. выполняются условия (5.2.16) для соответствующей задачи семейства, то этот вектор принимается за оптимальный и процесс решения заканчивается. В противном случае, когда $\bar{z}_\delta \notin G_I^\delta$, строится и исследуется задача коррекции решения задачи второго этапа, которая состоит в определении такой коррекции Δq , чтобы вектору $q^{II} + \Delta q$ соответствовала потоковая составляющая \bar{Q}^{II} , порождающая векторы $\tilde{z}_\delta = \bar{Q}^{II}$, x_δ из допустимых множеств G_I^δ задач первого этапа.

Так как вектор \tilde{z}_δ — допустимый вектор задачи I_δ , то в силу (5.2.14) и (5.2.26)

$$A_\delta [T(q^{II} + \Delta q), x_\delta] \leq B_\delta.$$

В силу линейности оператора T эти ограничения преобразуются в условия для определения вектора Δq вида

$$R_\delta \Delta q \leq r_\delta, \quad (5.2.27)$$

которые должны выполняться для всех δ . Здесь матрица R_δ образована из элементов матрицы A_δ , соответствующих вектору Q_δ с учетом действия оператора T , а вектор r_δ характеризует выход \tilde{z}_δ за допустимое множество G_I^δ . Коррекция Δq принадлежит пересечению множеств, выделяемых условиями (5.2.27), которое в силу их линейности задается системой линейных равенств и неравенств

$$R \Delta q \leq r. \quad (5.2.28)$$

Допустимое множество задачи коррекции G_Δ в зависимости от того, задача Π_A или задача Π_B решается на втором этапе, выделяется системой ограничений

$$R\Delta q \leq r, \quad D_A(q^{II} + \Delta q) \leq d_A \quad (5.2.29)$$

либо

$$R\Delta q \leq r, \quad D_B(q^{II} + \Delta q, u^{II}, u^{kII}) \leq d_B. \quad (5.2.30)$$

Любая коррекция $\Delta q \in G_\Delta$ приводит вектор $\tilde{Q}^{II} = T(q^{II} + \Delta q)$ в допустимые множества G_T^0 . В соответствии с выбранным критерием из множества G_Δ допустимых коррекций выбирается наилучшая.

Приведем несколько постановок задач оптимальной коррекции, считая наилучшей коррекцию Δq , наименее отдаленной от поточковой составляющей q^{II} , т. е. коррекцию с наименьшей нормой.

Задача А. Попадание в допустимое множество G_I в пространстве с нормой, равной сумме модулей координат Δq , т. е.

$$\|\Delta q\| = \sum_{s \in S} |\Delta q_s|.$$

Задача коррекции сводится к задаче линейного программирования: найти

$$\min \sum_{s \in S} u_s$$

при ограничениях

$$\Delta q \in G_\Delta, \quad -u \leq \Delta q \leq u.$$

Задача Б. Попадание в допустимое множество G_I в пространстве с евклидовой нормой $\|\Delta q\| = \left[\sum_{s \in S} (\Delta q_s)^2 \right]^{1/2}$; эквивалентна задаче квадратичного программирования

$$\min_{\Delta q \in G_\Delta} \sum_{s \in S} (\Delta q_s)^2.$$

Задача В. Определение коррекции Δq , которая учитывает целевую функцию задачи (5.2.15) — (5.2.17) в линейном приближении, состоит в минимизации функционала $\sum_{s \in S} \frac{\partial f_s(q_s^{II})}{\partial q_s} \Delta q_s$ на множестве G_Δ .

Если допустимое множество G_Δ задачи коррекции пусто либо получающаяся погрешность превосходит допустимую, то пересматривается постановка задачи первого этапа. Цикл решения проблемы оптимального развития водного хозяйства региона повторяется.

Заметим, что задачи определения оптимальной коррекции не обязательно решать, важно найти допустимую коррекцию $\Delta q \in G_\Delta$ и уметь оценить вносимую ею погрешность.

Агрегативная модель региональной водохозяйственной системы

Рассмотрим агрегативный подход к построению имитационной модели региональной водохозяйственной системы. Подобная модель может использоваться:

для оценки основных показателей работы системы и формирования правил управления при проектировании новых водохозяйственных систем (например, в составе системы моделей планирования водного хозяйства для проверки реализуемости разработанного водохозяйственного плана [Пряжинская и др., 1982]);

для первоначального формирования и оценки множества допустимых вариантов построения водохозяйственного плана (оценка водохозяйственных балансов, возможных мест расположения и объемов водохранилищ и т. д.) для последующего включения в модели развития водного хозяйства [Пряжинская, Хранович, 1979];

для оценки изменений в уже существующих водохозяйственных системах, связанных с изменением гидрологических характеристик под влиянием хозяйственной деятельности, включением новых пользователей в состав водохозяйственного комплекса, строительством новых водохозяйственных объектов и т. д.;

для построения моделей оперативного управления водохозяйственной системой.

Наиболее важные требования, предъявляемые к моделям водохозяйственных систем, заключаются в следующем.

1. Отображение моделью системы произвольной структуры, а также возможность достаточно простого изменения структуры системы в процессе работы с моделью. Реализация этой возможности особенно важна в задачах проектирования.

2. Непосредственное отображение динамики событий, происходящих в водохозяйственной системе (начало и окончание временного интервала, наполнение и сработка водохранилищ, переход на другую зону диспетчерского графика и т. д.).

3. Унифицированное описание алгоритмов функционирования каждого элемента системы для построения эффективных программ моделирования на ЭВМ. При этом уникальность каждой водохозяйственной системы как природного объекта заключается в основном в реализации целей ее функционирования и единственности структуры, но не уникальности ее элементов. Стандартизации поддаются такие функции системы, как распределение воды между пользователями и перераспределение водного потока во времени водохранилищем.

Однако имеющийся опыт построения имитационных моделей водохозяйственных систем не в полной мере реализует вышеприведенные требования. Известны модели, разработанные для одиночных водохранилищ комплексного назначения [Пойзнер, 1978], каскадов водохранилищ [Водоэнергетические расчеты..., 1969] или водохозяйственных систем, структура которых жестко задана [Во-

ропаев и др., 1980]. Изменение структуры водохозяйственной системы приведет к изменению программы моделирования или ее отдельных моделей. Поэтому при моделировании стараются упростить структуру исследуемой водохозяйственной системы, зачастую за счет чрезмерного агрегирования информации и неучета некоторых природных процессов, что, в свою очередь, может привести к неадекватности описания объекту моделирования.

Далее, события, происходящие в водохозяйственной системе, в моделях, описываемых в упомянутых работах, привязаны к началу или окончанию временного интервала внутри периода моделирования, т. е. моделирующие алгоритмы реализованы по так называемому «принципу Δt » [Бусленко, 1978], что для достаточно адекватного описания системы требует малого шага моделирования и зачастую ведет к значительному увеличению времени счета и избыточному количеству информации, используемой в модели. Альтернативой этому подходу является «событийный» принцип построения моделирующего алгоритма, используемый в настоящей работе.

Унификация описания элементов водохозяйственной системы целесообразна для упрощения процесса программирования и отладки модели, для облегчения внесения изменений в систему, а также реализации различных правил управления системой. Таким образом, попытка удовлетворения вышеперечисленным требованиям при построении модели приводит к использованию специальных средств моделирования (языки моделирования, пакеты прикладных программ), облегчающих процесс построения программирования и исследования модели.

Сравнительный анализ средств моделирования показывает, что, например, языки моделирования (НЕДИС [Система..., 1975], GPSS [Нейлор, 1975], СИМУЛА [Яковлев, 1975] и др.), упрощающие процесс построения модели, не решают проблемы простоты изменения структуры системы в процессе моделирования, проблем анализа системы и т. д. Проблемно-ориентированные пакеты прикладных программ имеют применение в достаточно узкой предметной области и не могут быть использованы при проявлении новых свойств у известных систем.

Комплексное решение проблем, возникающих в процессе создания модели, возможно лишь в том случае, если модель построена на базе имитационной системы, имеющей в своей основе достаточно общее математическое описание. Подобное описание должно выполнять несколько функций, в том числе, что особенно важно для настоящей работы, служить основой для математического описания моделируемых процессов и явлений и для машинной программы функционирования модели.

Вышеперечисленные требования выполнены в рамках агрегативного подхода, развитого Н. П. Бусленко и его школой [Бусленко, 1976, 1978]. Кроме того, агрегативный подход позволяет исследовать такие свойства модели, как устойчивость, чувствительность и т. д., проводить направленные эксперименты, локаль-

ную оптимизацию [Емельянов, Каланников, 1981]. Существует также возможность создания проблемно-ориентированных библиотек, автономной отладки каждого агрегата модели и т. д.

Пользователю системы, специалисту в данной области знаний, дается возможность проверить соответствие структуры исследуемой системы структуре агрегативной модели.

Формализованное описание функционирования водохозяйственной системы на основе агрегативного подхода. В соответствии с методологией агрегативного моделирования проводится структуризация водохозяйственной системы, т. е. выделяются структурные элементы и схема сопряжения между ними. В рамках решаемых задач целесообразно выбирать элементы «Створ», «Водохранилище» и «Внешняя среда».

«Створ» представляет собой элемент, соответствующий используемому в проектировании водохозяйственному створу, т. е. точке русла реки, к которой условно привязаны определенные пользователи водохозяйственной системы и в которой вычисляется баланс между поступлением и расходом воды. «Створ» осуществляет функцию распределения воды между пользователями системы по определенным правилам.

Элемент «Водохранилище» обеспечивает расходование воды в недостаточные и аккумуляцию ее в избыточные по водности периоды.

Элемент «Внешняя среда» представляет собой генератор гидрологических рядов в истоках частей речного бассейна в соответствии с известными гидрологическими моделями [Сванидзе, 1977]. Этот элемент моделирует приток воды в истоках рек, составляющих водохозяйственную систему, и является конечным элементом, на котором замыкается водный поток, выходящий из системы (сбросы в море, переброска воды в другие системы и т. д.).

Процесс построения имитационной модели водохозяйственной системы можно условно разбить на два этапа. На первом этапе описывается алгоритм работы каждого элемента системы в терминах КЛА на основе физических законов, соотношений и эвристических правил с выделением типов событий, происходящих на каждом элементе. Для водохозяйственной системы динамика функционирования каждого элемента представляется в виде балансовых соотношений, описывающих поступление и расход воды. Далее выделяются множество входных и выходных клемм каждого агрегата, типы входных и выходных сигналов с указанием номера клеммы, на которую поступает данный тип входного сигнала, и номера выходной клеммы, с которой снимается данный тип выходного сигнала. Описанные таким образом элементы с помощью схемы сопряжения объединяются в модель водохозяйственной системы. Далее на основе результатов моделирования вычисляются показатели работы системы. Однако эти показатели не удовлетворяют ограничениям на работу системы в целом. Поэтому в имитационную модель необходимо ввести устройство, управляющее работой системы при помощи эвристических правил,

формулируемых в процессе исследования. Для створа это означает выбор наиболее рационального правила распределения воды, а для водохранилища правила управления реализуются в виде так называемых «диспетчерских графиков», традиционно используемых при проектировании водохозяйственных систем [Крицкий, Менкель, 1952; Резниковский, Рубинштейн, 1974]. После такой «корректировки» моделирование проводится заново, и по его результатам вновь подсчитываются показатели работы системы.

Процесс функционирования системы будем рассматривать на периоде времени T , который поделен на интервалы продолжительностью Δt_i каждый. На каждом интервале параметры модели (сток, водопотребление и т. д.) предполагаются постоянными. Обозначим число этих интервалов через I .

Водохранилище. Пусть для каждого водохранилища системы заданы: W_{\max} — максимальный объем воды в водохранилище; W_{\min} — минимальный объем воды в водохранилище; $Q_i(t)$ — расход воды из водохранилища на i -м интервале моделирования ($1 \leq i \leq I$), он может быть равен гарантированному расходу Q_i^r , повышенному расходу Q_i^n , пониженному расходу Q_i^p , бытовому расходу при наполнении водохранилища до W_{\max} или сработке его до W_{\min} ; $P(W, t)$ — функция потерь из водохранилища на испарение и фильтрацию. Ее вид зависит от места расположения водохранилища, его конфигурации, объема и т. д., задается обычно табличным путем; $\pi(t)$ — приток воды в водохранилище, поступающий от вышерасположенных створов или водохранилищ, по руслу реки, каналам, осадки на поверхность водохранилища и т. д.

«События», происходящие на элементе «Водохранилище», на первом этапе построения модели соответствуют началу и окончанию временного интервала, а также моментам наполнения водохранилища до W_{\max} или сработке его до W_{\min} . В соответствии с этим уравнение баланса воды в водохранилище можно записать следующим образом:

$$W(t) = \begin{cases} W(t_0) + [\pi_i(t) - P_i(W, t) - Q_i(t)](t - t_0), & W_{\min} < W(t) < W_{\max}, \\ \left. \begin{matrix} W_{\max} \\ W_{\min} \end{matrix} \right\} Q_i(t^*) = \pi_i(t^*) - P_i(W, t^*), & Q_{\min} \leq Q_i(t) \leq Q_{\max}. \end{cases} \quad (5.2.31)$$

Время наступления следующего события на элементе «Водохранилище» \tilde{t} определится следующим образом:

$$\tilde{t} = \min \left\{ \sum \Delta t_i, t^* \right\},$$

где

$$t^* = \begin{cases} (W_{\max} - W(t)) / (\pi_i(t) - P_i(W, t) - Q_i(t)), & \pi_i(t) > P_i(W, t) - Q_i(t), \\ (W(t) - W_{\min}) / (Q_i(t) - P_i(W, t) - \pi_i(t)), & \pi_i(t) \leq P_i(W, t) - Q_i(t). \end{cases} \quad (5.2.32)$$

Элемент «Створ». Алгоритм, моделирующий работу элемента «Створ», представляет собой алгоритм распределения воды между пользователями системы в соответствии с некоторыми правилами. При этом различаются два основных случая распределения воды: при избытке и при дефиците водных ресурсов.

Пусть K — число пользователей, относящихся к данному створу. Они разделены на J приоритетных групп по их народнохозяйственной значимости. Тогда k -му пользователю поставим в соответствие номер его приоритетной группы j . Множество пользователей в каждой приоритетной группе обозначим через k_j . Разделим множество пользователей в каждой приоритетной группе на две категории. К первой, использующей воду без отъема из реки, можно отнести санитарно-гигиеническую службу русла реки, рыбное хозяйство (нерестовый транзит), гидроэнергетику и т. д. Ко второй категории, использующей воду с отбором из речного русла, относятся ирригация, промышленность, коммунальное водоснабжение и т. д. Обозначим множество пользователей первой категории через J'_n , а множество пользователей второй категории через J''_n . Требование на воду пользователя k_j обозначим через α_{ik_j} . Тогда для j -й группы требование на воду для пользователей первой категории $\max_{k_j \in J'_n} \{\alpha_{ik_j}\}$, а второй $\sum_{k_j \in J''_n} \alpha_{ik_j}$.

Суммарные требования в створе для пользователей первой категории можно записать следующим образом: $\alpha'_i = \max_j \left\{ \max_{k_j \in J'_n} \{\alpha_{ik_j}\} \right\}$, а второй категории $\alpha''_i = \sum_j \sum_{k_j \in J''_n} \alpha_{ik_j}$. Пусть на вход элемента «Створ»

поступает поток воды $q_i(t)$. Обозначим через $\gamma'_i(t)$ и $\gamma''_i(t)$ потоки воды, поступающие к пользователям соответственно первой и второй категории. Тогда основное управление для элемента «Створ», выражающее баланс между поступлением и расходом воды, запишется так:

$$q_i(t) = \gamma'_i(t) + \gamma''_i(t). \quad (5.2.33)$$

Основные типы событий, происходящих на элементе «Створ», — начало и окончание временного интервала.

Рассмотрим правила распределения воды для различных случаев.

1. Избыток водных ресурсов:

$$q_i(t) \geq \alpha'_i + \alpha''_i,$$

каждый пользователь получает воду в соответствии со своей заявкой. Избыток воды сбрасывается в водоток:

$$\alpha'_i = \gamma'_i(t), \quad \gamma'_i(t) = q_i(t) - \gamma''_i(t), \quad \gamma'_i(t) \leq \overline{\gamma'_i(t)}, \quad \gamma''_i(t) \leq \overline{\gamma''_i(t)},$$

где $\overline{\gamma'_i(t)}$ и $\overline{\gamma''_i(t)}$ представляют собой максимальные пропускные способности русла реки, каналов и т. д.

2. Дефицит водных ресурсов:

$$q_i(t) < \alpha'_i + \alpha_i.$$

В этом случае по полной норме обеспечивается лишь часть приоритетных групп, множество которых обозначим через S . Пусть S' — множество приоритетных групп, которые обеспечиваются по полной норме без изъятия из реки, а S'' — множество приоритетных групп, которые обеспечиваются по полной норме с изъятием из реки. Тогда алгоритм распределения воды в створе представим следующим образом. Вычисляется

$$\Delta q_i(t) = q_i(t) - \max_{k_i \in S'} \alpha_{ik_j} - \sum_{k_j \in S''} \alpha_{ik_j}, \quad \gamma_{ik_j}(t) = \alpha_{ik_j} \quad (5.2.34)$$

так, чтобы $\Delta q_i(t) > 0$. Для остальных групп пользователей ($k_j \in J \setminus S$)

$$\gamma_{ik_j}(t) = \Delta q_i(t) \cdot \beta_{ik_j}$$

и дефицит водных ресурсов $d_{ik_j}(t) = \alpha_{ik_j}(t) - \gamma_{ik_j}(t)$. Коэффициенты β_{ik_j} могут быть определены или назначены различными способами. Основное условие, которому они должны удовлетворять:

$$\sum_{k_j \in J \setminus S} \beta_{ik_j} = 1.$$

Количество «выходов» элемента «Створ» равно числу пользователей системы. Выходной сигнал, соответствующий расходу возвращаемой воды, в общем случае определяется следующим образом:

$$y_{ik_j}(t) = \gamma_{ik_j}(t) \cdot \eta_{k_j} \cdot \varepsilon(t - \tau_k),$$

где $\varepsilon(t - \tau_k) = 1$ при $t \geq \tau_k$ и $\varepsilon(t - \tau_k) = 0$ при $t < \tau_k$, τ_k — время запаздывания возвратных вод, η_{k_j} — коэффициент возврата, $0 \leq \eta_{k_j} \leq 1$.

Рассмотрим показатели качества работы системы, которые должны определяться в процессе моделирования. К ним относятся:

- 1) показатель надежности работы системы

$$P\{d_{ik_j}(t) > 0\} \leq P_n, \quad (5.2.35)$$

где P_n — показатель нормативной надежности;

- 2) ограничение по глубине дефицитов воды

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} d_{ik_j}(t) dt \leq \bar{d}_{ik_j} \quad \text{или} \quad d_{ik_j}(t) \leq d_{ik_j}^*(t); \quad (5.2.36)$$

- 3) ограничение по объему недооставленной воды, т. е.

$$\int_0^T d_{ik_j}(t) dt \leq \bar{D}_{k_j}; \quad (5.2.37)$$

4) ограничение по продолжительности дефицитного периода

$$\max_t \{t: d_{ik_j}(t) > 0\} \leq \bar{t}_{ik_j}; \quad (5.2.38)$$

5) обеспеченность отдачи водохранилища

$$P \{Q_i(t) < Q_i^r\} < P_Q. \quad (5.2.39)$$

Используя соотношения (5.2.31) — (5.2.33) и показатели качества функционирования системы (5.2.35) — (5.2.39), можно сформулировать задачу моделирования региональной водохозяйственной системы следующим образом.

Пусть водохозяйственная система представляет собой сложную стохастическую потоковую систему, состоящую из взаимодействующих элементов типа «Створ» и «Водохранилище», функционирование которых описывается соотношениями (5.2.31) — (5.2.33). Требуется построить такой алгоритм функционирования системы, чтобы выполнялись неравенства (5.2.34) — (5.2.37).

Однако в водохозяйственном проектировании для получения удовлетворительных результатов моделирования использование соотношений (5.2.31) — (5.2.33) недостаточно для выполнения неравенств (5.2.35) — (5.2.39). Для предотвращения глубоких дефицитов, например, лучше заранее немного уменьшить отдачу водохранилища. При этом увеличится продолжительность дефицита и уменьшится его глубина. Поэтому требуется построить алгоритм управления, с помощью которого производится управление водохозяйственной системой.

При решении задач проектирования водохозяйственных систем алгоритм управления реализуется в виде диспетчерских графиков для каждого водохранилища системы. Диспетчерский график реализует управляющую функцию вида $Q_i(t) = f(W, t)$, т. е. график зависимости отдачи водохранилища от его наполнения и времени.

Использование модели (5.2.31) — (5.2.33) приводит к упрощению существующей методики построения диспетчерских графиков, особенно в части построения диспетчерских графиков для каскадно расположенной системы водохранилищ. Вначале строится диспетчерский график для верхнего водохранилища, затем, используя его, строят диспетчерский график для нижележащего по течению водохранилища и т. д. На языке агрегативного моделирования такая процедура соответствует замене агрегата одного типа («Водохранилище» без диспетчерских графиков) другим («Водохранилище» с диспетчерским графиком).

Примерный вид диспетчерского графика для водохранилища сезонного регулирования показан на рис. 5.7. Кривая *a* называется противобросной линией, кривая *b* — противоперебойной линией, а кривая *в* — линией ограничений. Кривая *l* представляет собой график $W(t)$ для маловодного года при работе водохранилища без диспетчерского графика. Водохранилище в этом случае срабатывает до W_{\min} в момент времени t^* . Этому случаю соответствует уменьшение вододачи в нижний бьеф гидроузла.

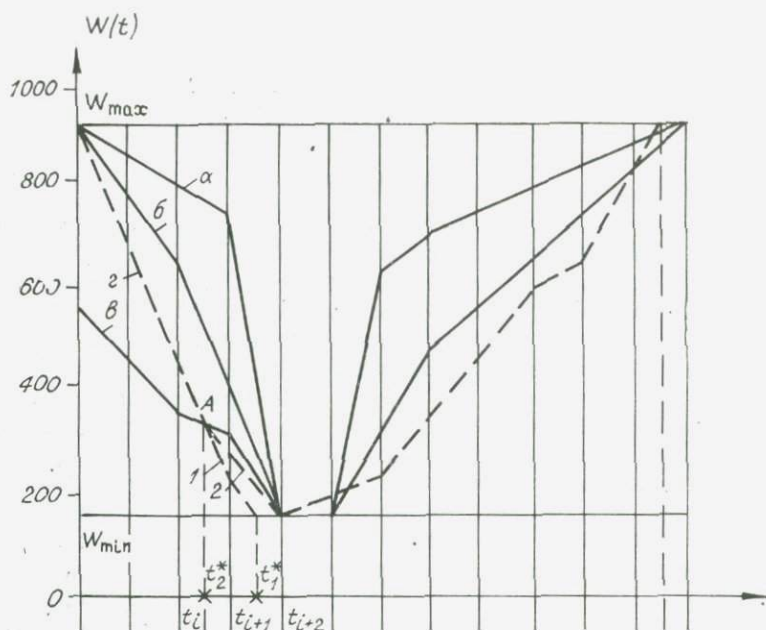


Рис. 5.7. Диаграмма работы водохранилища.

$\alpha - \epsilon$ — линии диспетчерского графика, z — линия $W = W(t)$ (t — без диспетчерских графиков, z — с диспетчерскими графиками).

Из графика изменения потребностей пользователей в створе нижнего бьефа водохранилища и пропуска воды в нижний бьеф водохранилища (рис. 5.8) видно, что на интервале $[t_1^*, t_{i+2}]$ в створе возникает значительный дефицит. При наличии диспетчерского графика линия $W(t)$ пересекает диспетчерскую линию в точке A и дефицит возникает раньше, в момент t_2^* , будучи более длительным, но зато менее глубоким. Построенный диспетчерский график соответствует разбиению пространства состояний элемента «Водохранилище» ($W(t), t$) на подобласти, граница каждой из которых описывается уравнением

$$u_i^p(t) = W_i^p + \frac{W_{i+1}^p - W_i^p}{\Delta t} (t - t_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i=0, 1, \dots, I-1, \quad (5.2.40)$$

где p — номер диспетчерской линии, а W_i^p — ордината диспетчерской линии. Тогда для p -й диспетчерской зоны, ограниченной соответственно p -й и $(p+1)$ -й диспетчерской линией, аналогично уравнению (5.2.31) запишем:

$$W^p(t) = W^p(t_0) + [\pi_i(t) - P_i(W, t) - Q_i^p(t)](t - t_0), \\ W_{\min} < u_i^p(t) \leq W^p(t) \leq u_i^{p+1}(t) < W_{\max}, \quad (5.2.41)$$

$$W^p(t_2^*) = W_{\max} \quad \text{или} \quad W^p(t_2^*) = W_{\min}, \quad Q_i^p(t_2^*) = \pi_i(t_2^*) - p_i(W, t_2^*).$$

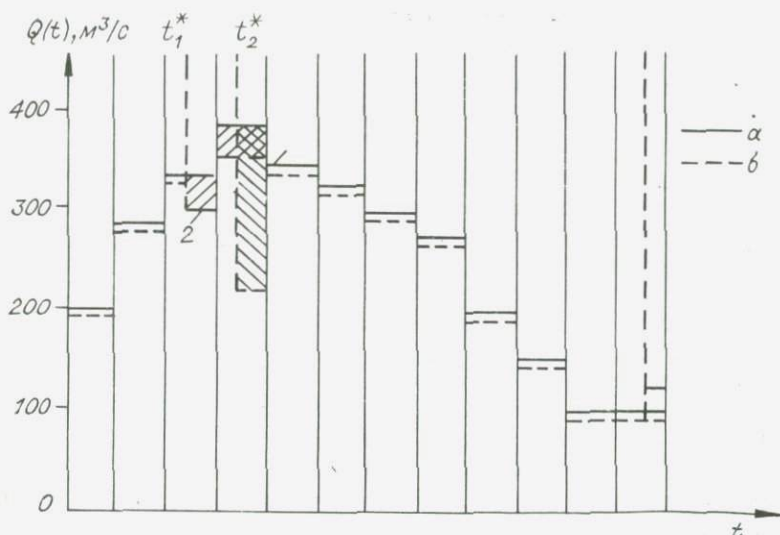


Рис. 5.8. График потребностей $Q_1(t)$ и расходов $Q_2(t)$ в створе водохозяйственной системы.

а — потребности в воде пользователей в створе; б — расходы в створе.

При изменении объема водохранилища $W(t)$ до значения, соответствующего другой диспетчерской зоне, отдача водохранилища меняется и становится равной величине отдачи в этой области $Q_i^{p+1}(t)$. Время перехода t_2^* в другую область определяется совместным решением уравнений (5.2.40) и (5.2.41) и равно

$$t_2^* = t_0 + \frac{W(t_0) - W_i^p + \Psi_{i+1}^p(t_{i+1} - t_0)}{\Psi_{i+1}^p - [\pi_i(t_2^*) - P_i(W, t_2^*) - Q_i^p(t_2^*)]}, \quad (5.2.42)$$

где $\Psi_{i+1}^p = \frac{W_i^p - W_{i+1}^p}{\Delta t}$.

При $\Psi_{i+1}^p = 0$ и $W_i^p = W_{\max}$ или $W_i^p = W_{\min}$ формула (5.2.42) превращается в формулу (5.2.33). При этом переход в другую диспетчерскую зону произойдет, если $t_2^* < t_{i+1}$. Рассматриваемую ситуацию иллюстрирует точка А на рис. 5.7.

Агрегативное описание элементов водохозяйственной системы

Описание работы КЛА «Водохранилище». При описании работы элементов водохозяйственной системы в виде КЛА в данной работе будем рассматривать только существенные координаты состояния, т. е. те, которые определяют тип события, происходящего в агрегате.

Описание КЛА «Водохранилище» без диспетчерских графиков. Состояние КЛА описывается вектором (v, z_v) , где v — вектор

основных координат, а z_v — вектор дополнительных координат. $v = (v_1, v_2, v_3)$, где v_1 — номер временного интервала Δt ; v_2 — признак начала временного интервала; v_3 — признак состояния водохранилища (0 соответствует $W(t) = W_{\min}$, $1 - W(t) = W_{\max}$ и $2 - W_{\min} < W(t) < W_{\max}$); $z_v = (z_{v_1}, z_{v_2}, \dots, z_{v_{I+1}})$, где $z_{v_1} = W(t)$ ($z_{v_2}, \dots, z_{v_{I+1}}$) — значения отдачи воды из водохранилища на i -м интервале. Остальные координаты отражают параметры модели, хранение которых в массиве координат агрегата удобно при программировании модели. КЛА имеет одну входную клемму, на которую поступает приток воды, и — в данной модели — одну выходную клемму, по которой поступает расход в нижний бьеф водохранилища.

В процессе работы КЛА получает сигналы — расходы от предыдущих агрегатов в начале (I тип) и внутри (II тип) интервала Δt . При получении сигнала I типа изменяется отдача воды из водохранилища и производится пересчет координаты z_{v_1} , при получении сигнала II типа производится лишь пересчет координаты z_{v_1} .

На выход КЛА поступают также сигналы двух типов — заданная отдача и отдача, равная бытовому притоку при $W(t) = W_{\max}$ или $W(t) = W_{\min}$. При этом изменяется значение координаты v_3 , т. е. вырабатывается признак достижения минимального или максимального объема.

Типы событий на КЛА — начало временного интервала (I), достижение W_{\max} (II) или W_{\min} (III).

Описание КЛА «Водохранилище» при построенных диспетчерских графиках. Это описание принципиально не отличается от вышеприведенного, однако в векторе основных координат координата v_3 может иметь столько значений, сколько выделено зон диспетчерского графика.

Дополнительные координаты, кроме описанных, могут содержать отметки линий диспетчерского графика, а также значения отдач водохранилищ для каждой из зон. При попадании координаты z_{v_1} на границу диспетчерской зоны происходит изменение выходного сигнала. Типы событий на КЛА в этом случае — начало временного интервала (I), достижение W_{\max} (II), W_{\min} (III), а также переход на другую зону диспетчерского графика (IV).

Описание работы КЛА «Створ». Состояние КЛА «Створ» описывается вектором $z = (v, z_v)$, где v — вектор основных координат, а z — дополнительных, $v = (v_1, \dots, v_{\lfloor v_3 \rfloor + 4})$; v_1 — номер временного интервала; v_2 — число пользователей, относящихся к данному створу; v_3 — число приоритетных групп пользователей в створе; $v_4, \dots, v_{\lfloor v_3 \rfloor + 3}$ — число пользователей в каждой приоритетной группе; $v_{\lfloor v_3 \rfloor + 4}$ — число пользователей, возвращающих воду в тот же створ.

Вектор дополнительных координат $z_v = z_{v_1}$ — время до окончания интервала Δt . КЛА «Створ» имеет одну входную и v_1 вы-

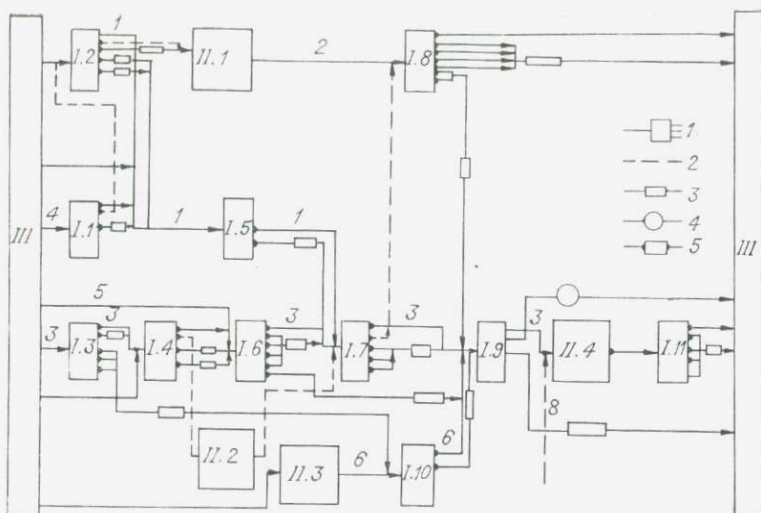


Рис. 5.9. Агрегативная схема водохозяйственной системы бассейна р. Терек. 1 — створ; 2 — речное русло; 3 — магистральный канал; 4 — поток возвратных вод с оросительных систем; 5 — водозабор в рыбохозяйственные водоемы; 6 — водохранилище.

Створы: I.1 — Заюково, I.2 — Каменноостоекое, I.3 — Орджоникидае, I.4 — Эльхотово, I.5 — Прохладный, I.6 — Котляревская, I.7 — Моздок, I.8 — створ Терско-Кумского канала, I.9 — Степное, I.10 — Брагуны, I.11 — Каргалинская. Водохранилища: II.1 — Отказненское, II.2 — Крупское, II.3 — Суиженское, II.4 — Низовое. III — внешняя среда. Русла рек и крупные каналы: 1 — р. Малка, 2 — р. Кума, 3 — р. Терек, 4 — р. Баксан, 5 — р. Урух, 6 — р. Суижа, 7 — Терско-Кумский канал, 8 — канал Сулак — Терек.

ходных клемм. На входную клемму поступают данные о расходе воды, притекающей к створу, с выходных клемм снимается значение расхода воды, возвращаемого в речную сеть.

В процессе работы КЛА «Створ» получает сигналы двух типов — расход воды от предыдущих агрегатов в начале (I тип) и внутри временного интервала (II тип). При получении сигнала I типа изменяются значения потребностей пользователей, соответствующие другому интервалу, при получении сигнала II типа (это свидетельствует об изменении режима работы водохранилища) меняется количество воды, поступающее к створу. При этом изменяется сигнал на выходе агрегата и пересчитывается координата z_{v1} .

Типы событий на КЛА «Створ» — начало временного интервала (I тип) и поступление сигнала внутри временного интервала от других агрегатов (II тип).

Моделирование работы водохозяйственной системы бассейна р. Терек с помощью агрегативной имитационной системы. Разработанная модель использовалась для исследования водохозяйственной системы бассейна р. Терек.

Бассейн р. Терек расположен в Восточном Предкавказье и его составляют бассейны рек Терек, Сулак, Самур, Кума. Самая крупная река, Терек, от истока до г. Орджоникидзе носит горный

характер, ниже течет по предгорной равнине, разветвляясь в устье на рукава. Основной потребитель стока бассейна р. Терек — орошаемое земледелие. Основные площади орошаемых культур расположены в равнинной части бассейна. Дефициты воды возникают с апреля по июнь, так как в это же время должен получать воду второй основной потребитель стока Терека — рыбное хозяйство. Вода требуется как для нерестового транзита осетровых пород рыб, так и для питания рыбохозяйственных водоемов. Прохождение ежегодного паводка на Тереке создает опасность наводнений в низовьях реки из-за большого количества наносов, выносимых речным стоком.

Решение перечисленных проблем Терека технически осуществимо лишь при строительстве системы водохранилищ сезонного регулирования на Тереке и его притоках. При этом решаются следующие задачи:

- хозяйственное регулирование стока;
- паводковое регулирование стока;
- регулирование стока наносов путем аккумуляции их в водохранилищах;
- использование водохранилищ в энергетических целях в режиме, подчиненном использованию воды для ирригации и рыбного хозяйства.

Агрегативная схема бассейна р. Терек (рис. 5.9) содержит 11 створов и 4 водохранилища, из которых только одно — Отказненское — существует в настоящее время, а остальные намечаются к строительству.

При построении модели выделены три приоритетные группы пользователей в створе — обеспечение санитарной проточности в руслах рек и магистральных каналах и водоснабжение (I группа), рисовые оросительные системы в дельте Терека (II группа); остальные оросительные системы и рыбное хозяйство (III группа).

В бассейне р. Терек выделено 40 оросительных систем, из них 5 рисовых. Оросительные системы «привязаны» к основным водохозяйственным створам, для каждой из них указан створ водозабора и створ возврата воды.

Нерестовые транзиты предусматриваются для створов Моздок, Степное, Каргалинская. Водозаборы для нужд рыбного прудового хозяйства предусмотрены в створе Степное.

Водоохранилища в системе используются для следующих целей: Курское — для покрытия дефицитов стока в створе Моздок, Отказненское — в створе Кумо-Маньчского канала, Сунженское — для устранения дефицитов в створе Степное и Каргалинская, а Низовое имеет противопаводковое назначение и ликвидирует дефициты у оросительных систем в низовьях бассейна.

Представленная диаграмма работы водохранилища $W(t)$, соответствующий ей график водоподдачи в нижний бьеф и потребности пользователей в створе нижнего бьефа ($Q_1(t)$, $Q_2(t)$) (см. рис. 5.7) построены для Курского водохранилища и створа Моздок для одного из маловодных лет.

Построенная модель обеспечивает:

1) определение средней за интервал величины водоподачи на оросительные системы, среднего расхода на нерестовый транзит и в рыбохозяйственные водоемы, надежности водоподачи для основных водопользователей, обеспеченности отдачи из каждого водохранилища системы;

2) построение правил управления системой в виде диспетчерских графиков;

3) выбор наиболее рационального правила распределения воды в створе;

4) проведение имитационных экспериментов при различных вариантах структуры системы для обоснования плана развития водного хозяйства бассейна.

Предложенная модель была реализована на базе агрегативной имитационной системы [Калашников и др., 1980]. Настройка модели для целей моделирования осуществлена с помощью программы SOST и схемы сопряжения, задающей структуру системы. Модель достаточно универсальна и позволяет решать задачи моделирования сложных водохозяйственных систем комплексного назначения. Требуемый объем памяти для проведения вычислений — 240 К, время расчета одной реализации — 40 с на ЭВМ ЕС-1040. Программа написана на языке ПЛ-1.

Проведенные эксперименты с моделью показали эффективность построения моделей водохозяйственных систем на основе агрегативного подхода.

Согласование оптимизационной и имитационной потоковых моделей

Процедура согласования оптимизационной и имитационной моделей основана на построении некоторой эквивалентной задачи функционирования ВХС и согласовании ее решения с имитационной.

Модель функционирования водохозяйственной системы при выбранном в результате решения задач I и II этапа варианте развития в динамической постановке (дискретном времени) может быть описана задачей определения потоков $V_s^0(t)$ дуг и запасов $W_i^0(t)$ хранилищ графа $\Gamma(J, S)$, минимизирующей целевую функцию за рассматриваемый период T

$$F^\Theta = \sum_{s \in S} F_s^\Theta(V_s(t), t \in T) + \sum_{i \in I} F_i^\Theta(W_i(t), t \in T) \quad (5.2.43)$$

на множестве G_i^0 , определяемом ограничениями для $i \in J$, $s \in S$ и $t \in T$:

$$W_i(t+1) - W_i(t) + \sum_{s \in S_i^+} k_s V_s(t) - \sum_{s \in S_i^-} V_s(t) + b_i(t) = 0; \quad (5.2.44)$$

$$0 \leq \underline{V}_s^\Theta(t) \leq V_s(t) \leq \bar{V}_s^\Theta(t); \quad (5.2.45)$$

$$0 \leq W_i^\ominus(t) \leq W_i(t) \leq \bar{W}_i^\ominus(t); \quad (5.2.46)$$

$$W_i(T) = W_i(0). \quad (5.2.47)$$

В задаче (5.2.43) — (5.2.47) водохранилища рассматриваются как единое целое с водопользователями, использующими воду водохранилищ без ее отведения, качество функционирования которых зависит от объема воды в них. К таким пользователям относятся водный транспорт, рекреация, рыбное хозяйство и т. п. Переменные параметры задачи (5.2.43) — (5.2.47) имеют тот же смысл, что и в задаче (5.2.15) — (5.2.17).

Задача (5.2.43) — (5.2.47) в силу ее сложности в работе не решается. Ее приближенное решение определяется в результате взаимодействия имитационной модели со статическим аналогом задачи (5.2.43) — (5.2.47), в котором переменными выступают потоки $q_s = \sum_{t \in T} V_s(t)$. Соответственно динамические ограничения $\bar{V}_s^\ominus(t)$ и $V_s^\ominus(t)$ на величины потоков в дугах $\Gamma(J, S)$ заменяются на $\lambda_s^\ominus = \sum_{t \in T} V_s^\ominus(t)$ и $\Lambda_s^\ominus = \sum_{t \in T} \bar{V}_s^\ominus(t)$. Динамическим потокам $b_i(t)$ в вершинах $\Gamma(J, S)$ в задаче II соответствуют статические потоки вершин $b_i^1 = \sum_{t \in T} b_i(t)$. Водоохранилища характеризуются отдачами b_i^2 . В итоге статические потоки в вершинах $\Gamma(J, S)$ равны $b_i = b_i^1 + b_i^2$. Слагаемые F_i^\ominus, F_s^\ominus целевого функционала в статической задаче (5.2.15) — (5.2.17) аппроксимируются функциями

$$\bar{f}_i^\ominus(q_{s1}) = \min_{\sum_{t \in T} [W_i(t) - W_i(t+1)]^+ = q_{s1}} F_i^\ominus(W_i(t), t \in T), \quad (5.2.48)$$

$$\bar{f}_s^\ominus(q_s) = \min_{V_s(t) > 0, \sum_{t \in T} V_s(t) = q_s} F_s^\ominus(V_s(t), t \in T). \quad (5.2.49)$$

Это означает, что каждому значению q_s статической потоковой задачи соответствует набор значений $V_s(t)$, $\sum_{t \in T} V_s(t) = q_s$, характеризующий внутригодовое распределение потребностей в воде s -го водопользователя.

В результате моделирования с использованием различных правил управления определяется вектор $W^\ominus(t), V^\ominus(t)$, на котором при попадании в область G_i достигается $\min_{s \in S' \quad t \in T} \max$. Если $W^\ominus(t), V^\ominus(t) \in G_i$, то на нем достигается

$$\Delta = \min \max [V_s^\ominus(t) - V_s(t), V_s(t) - \bar{V}_s^\ominus(t)]. \quad (5.2.50)$$

Взаимодействие оптимизационных и имитационных моделей. Из взаимосвязанного решения $\hat{q}, \hat{x} \in G^0$ оптимизационных задач I и II выделяется составляющая \hat{q} , которая характеризует распределение водных ресурсов. По вектору $\hat{q} = (\hat{q}_s, s \in S)$

в соответствии с правилом (5.2.17) формирования целевых функций выделяется вариант развития водохозяйственной системы. На III этапе имитируется функционирование водохозяйственной системы по выделенному варианту вблизи решения \hat{q} , полученного в оптимизационном блоке. Исходной точкой для проведения имитационных экспериментов является динамический аналог вектора \hat{q} — вектор $\hat{W}(t)$, $\hat{V}(t)$, соответствующий \hat{q} при формировании $\hat{f}_s^{\ominus}(q_s)$ из F_s^{\ominus} , F_i^{\ominus} по правилам (5.2.48), (5.2.49).

Если полученный вектор $W^{\ominus}(t)$, $V^{\ominus}(t) \in G_i^{\ominus}$, то процесс решения заканчивается. Найденный оптимальный вариант может быть реализован. В противном случае, т. е. при $W^{\ominus}(t)$, $V^{\ominus}(t) \notin G_i^{\ominus}$, уточняются параметры задач (5.2.1) — (5.2.12) I этапа и (5.2.13) — (5.2.17) II этапа. Выбирается r -я координата, на которой достигается определяемое формулой (5.2.20) значение Δ .

На величину Δ либо увеличивается λ_r^{\ominus} , либо уменьшается Λ_r^{\ominus} в зависимости от того, какое из ограничений нарушено. Новые значения этих ограничений принимаются равными $\bar{\Lambda}_r^{\ominus} = \Lambda_r^{\ominus} - \Delta$ либо $\bar{\lambda}_r^{\ominus} = \lambda_r^{\ominus} + \Delta$.

Все остальные значения ограничений потоков дуг остаются без изменений. В уточненные задачи (5.2.1) — (5.2.12), (5.2.15) — (5.2.17) вводятся полученные в имитационной модели значения отдачи водохранилищ b_i^r . Процесс решения повторяется.

Производственные функции оросительных систем для условий неустойчивого увлажнения

Производственные функции представляют количественную меру экономической эффективности использования различных ресурсов в процессе производства.

Как правило, на экономическую эффективность производственного процесса влияет совокупность ряда факторов. Это должно найти отражение в виде производственных функций и способе их построения.

Обсуждаемые в настоящей работе производственные функции оросительных систем строятся по результатам расчетов на модели, отражающей зависимость экономического эффекта от количества используемых водных, земельных, трудовых ресурсов, объемов капитальных затрат, техники и технологии орошения, количества внесенных удобрений и т. д. Построенные функции могут использоваться как для проведения непосредственного экономического анализа при оценке эффекта от орошения в заданном диапазоне изменения различных факторов, так и при решении задач водохозяйственного планирования и управления.

Производственные функции для решения задач водохозяйственного планирования на перспективу называют «перспективными», а для задач оперативного управления и текущего пла-

пирования — «текущими» [Проектирование..., 1966]. Ввиду того, что «перспективные» и «текущие» производственные функции имеют разное назначение, они могут строиться на основе существенно различающихся моделей. «Текущие» производственные функции должны отражать традиционно сложившиеся закономерности использования водных и других ресурсов и производственных факторов. Поэтому при построении «текущих» производственных функций естественно использовать фактически наблюдаемые показатели затрат, эффекта и используемых ресурсов за предшествующий возможно более длительный период времени и экстраполировать сложившиеся условия на достаточно близкую перспективу (до трех — пяти лет). При этом может использоваться аппарат регрессионного анализа. С его помощью выделяется набор существенных факторов, от которых зависит эффективность производства на оросительной системе, с последующим приведением их к удельным показателям (в расчете на 1 га), составлением уравнений регрессии вида $y = f(x_1, \dots, x_n)$, где x_1, \dots, x_n обозначают как природные, так и антропогенные факторы.

К природным факторам в зоне неустойчивого увлажнения и в засушливой зоне относятся в первую очередь состояние естественного увлажнения почвы, а также обеспеченность осадками. К антропогенным факторам, выделяемым при помощи статистической обработки имеющейся информации, относятся объем воды, подаваемой на орошаемые массивы, и распределение его внутри периода вегетации, земельные и трудовые ресурсы, капитальные затраты, затраты удобрений, агротехнические мероприятия, использование поливной техники и т. д.

Далее по имеющейся статистической информации строится уравнение регрессии (в предположении нормальности распределения каждого из факторов). Полученное соотношение после перехода к реальной площади орошения и представляет собой «текущую» производственную функцию оросительной системы. Следует отметить, что производственные функции, описываемые уравнениями регрессии, используются (на наш взгляд, неправомерно) и при решении задач перспективного планирования [Игельник, Исмаилов, 1979]. В настоящей работе «перспективные» производственные функции строятся на основе плановой нормативной информации с использованием оптимизационных моделей.

При решении задач водохозяйственного планирования нас, как правило, интересует зависимость экономического эффекта F от количества используемой воды q при фиксировании остальных факторов, т. е. $F = F(q)$. Оптимальное водохозяйственное планирование позволяет найти оптимальную структуру посевных площадей, использования техники и технологии возделывания почвы, способов орошения, удобрений, затрат и т. д. Наиболее распространенным аппаратом для решения указанных задач является линейное программирование. Модели линейного программирования

ния, решая задачи перспективного планирования, ориентированы на перспективные нормативы и сравнительно легко обеспечиваются исходной информацией. Расчеты выполняются с требуемой точностью, программы для проведения расчетов по этим моделям имеются в составе стандартного математического обеспечения современных ЭВМ.

В данной работе предлагается методика построения «перспективных»* производственных функций оросительных систем для районов неустойчивого увлажнения на примере Терско-Кумского региона. В основу математической постановки задачи положена модель, приведенная в работе [Кардаш, Пряжинская, 1966]. При описании оросительной системы в рассмотрение включаются основные возделываемые культуры (с учетом агрегирования, определяемого фактическим весом в посевах отдельных составляющих), задаются верхняя и нижняя границы содержания отдельных культур в посевах. Рассматриваются разные способы и нормы полива (полные и ущемленные), учитываются удобрения и трудовые ресурсы.

В результате проведения расчетов экономическая эффективность орошения F определяется как функция двух параметров — орошаемой площади S и подаваемой воды q , т. е. $F = F(S, q)$.

Наличие проектных проработок по этапности мелиоративного освоения земель позволяет сформировать конечный набор R вариантов развития оросительной системы. Каждый вариант характеризуется суммарной площадью, на которой намечается проводить реконструкцию орошаемых земель или новое мелиоративное строительство с учетом предшествующих планов освоения. Выполнение расчетов для каждого варианта в некотором диапазоне значений q позволяет строить производственные функции вида «вода — экономический эффект» и оценивать водопотребление системы как за весь период вегетации в целом, так и за более мелкие интервалы времени — месяц, декаду. В задаче принимается во внимание стохастический характер сельскохозяйственного производства при помощи учета условий естественного увлажнения.

Экономическая эффективность орошения определяется дополнительным чистым доходом (ДЧД) за счет орошения. Далее опишем способ определения ДЧД для оросительных систем.

Математическая постановка задачи. Наиболее адекватными реальным условиям сельскохозяйственного производства являются стохастические модели планирования оросительных систем [Кардаш, Пряжинская, 1966], учитывающие конечное, небольшое число исходов естественного увлажнения. Будучи обеспечены реальными исходными данными, такие модели представимы задачами линейного программирования общего вида блочной структуры. Число блоков технико-экономических условий в модели

* В дальнейшем термин «перспективная» опускается.

соответствует числу учитываемых исходов увлажнения. Для оросительных систем эти задачи имеют небольшую размерность и поэтому легко реализуются на ЭВМ.

Рассматриваются три исхода увлажнения — «влажный», «средний» и «сухой». Значения дефицитов влажности почвы по многолетним данным метеослужбы ранжируются по принадлежности к этим трем исходам. Событие, заключающееся в том, что данный год принадлежит к определенному исходу увлажнения, предполагается независимой случайной величиной. Вероятность наступления данного исхода увлажнения $P_l (l = 1, 2, 3)$ определяется через частоту попаданий значений ряда дефицитов влажности почвы в одну из рассматриваемых областей. Границы областей дефицитов влажности почвы, «разделяющие» исходы увлажнения, устанавливаются для каждой агроэкономической зоны экспертным путем.

ДЧД от орошения может быть определен двояко. С одной стороны, аналогично [Кардаш, Пряжинская, 1966] оптимальная структура производства (ОС) отыскивается по показателям прибавок урожая и издержек за счет введения орошения. С другой стороны, можно сравнить оптимальные схемы и эффективность использования орошаемых земель и тех же площадей в богарных условиях. Ниже предлагается именно такая схема расчетов. Сначала для заданного варианта r развития оросительной системы с фиксированной площадью \bar{S}_r решается задача на максимум математического ожидания чистого дохода $H_r(q)$ при суммарной годовой водоподаче q . Затем определяется максимум математического ожидания чистого дохода G_r при богарном использовании площади \bar{S}_r и соответствующих, отличающихся от варианта в условиях орошения, пределах содержания культур в посевах. Разность и принимается, при переменной q , в качестве производственной функции

$$F_2(q) = H_r(q) - G_r, \quad (5.2.51)$$

соответствующей данному варианту развития орошаемых площадей рассматриваемой системы.

Математическая постановка задачи определения $H_r(q)$ имеет вид

$$H_r(q) = \max \left\{ \sum_{l=1}^3 P_l \sum_{i=1}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=1}^K c_{ijk}^l x_{ijk}^l - \sum_{\rho=1}^r c_{\rho} S_{\rho} \right\}, \quad (5.2.52)$$

где χ_{ijk}^l — площадь, занимаемая i -й культурой при j -м способе орошения, k -й норме внесения удобрений в l -й исход увлажнения; I — число возделываемых культур; J — число способов орошения, включая орошение неполными нормами, $j=0$ соответствует варианту без орошения; K — число учитываемых уровней внесения удобрений; c_{ijk}^l — чистый доход от i -й культуры в расчете на 1 га; $c_{ijk}^l = a_{ijk}^l f_i - z_{ijk}^l$, где a_{ijk}^l — урожайность i -й культуры, f_i — цена единицы сельскохозяйственной продукции,

z_{ijk}^l — удельные сельскохозяйственные издержки на производство продукции; c_p — удельные приведенные затраты на реконструкцию или мелиоративное строительство земель категории ρ , $\rho = \overline{1, R}$; S_p — площадь земель категории ρ , подготовленная к орошению в системе. Категории земель отличаются затратами, связанными с их реконструкцией или мелиоративным освоением, и отражают различие физико-географических условий планируемых к орошению земель. Размеры и очередность освоения земель определяются на предварительном этапе планирования, причем предполагается, что прирост площадей в пределах ирригационного фонда может принимать не произвольные значения, а только определенные: S_1, \dots, S_R . Вариант развития, с учетом этапности освоения земель различных категорий, определяется площадью $\bar{S}_r = \sum_{\rho=1}^r S_p$ и приведенными капитальными затратами

$\sum_{\rho=1}^r c_p S_p$, что отражено в функционале (5.2.52).

Перечислим основные ограничения задачи.

Ограничения на структуру сельскохозяйственного производства для каждой учитываемой в задаче культуры:

$$\underline{\alpha}_i \bar{S}_r \leq \sum_{j,h} x_{ijh}^l \leq \bar{\alpha}_i \bar{S}_r \quad (5.2.53)$$

для фиксированного l . Здесь \bar{S}_r — земля, подготовленная к орошению при r -м варианте развития оросительной системы; α_i , $\bar{\alpha}_i$ — соответственно нижний и верхний пределы содержания i -й культуры в посевах на площадях, подготовленных к орошению. Они могут быть получены как экспертным путем при анализе структуры орошаемого земледелия в хозяйствах зоны размещения оросительной системы, так и на основе анализа расчетов по региональной модели оптимизации размещения водоемких сельскохозяйственных производств, описанной в работе [Пряжинская и др., 1981].

Ограничения на земельные ресурсы:

$$\sum_{h=1}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=0}^J x_{ijh}^l = \bar{S}_r \quad (5.2.54)$$

(l фиксировано).

Равенство площадей, занятых i -й культурой, при разных исходах естественного увлажнения:

$$\sum_{h=1}^K \sum_{j=0}^J x_{ijh}^1 = \sum_{h=1}^K \sum_{j=0}^J x_{ijh}^2 = \sum_{h=1}^K \sum_{j=0}^J x_{ijh}^3. \quad (5.2.55)$$

Условие (5.2.55) означает, что структура посевных площадей для каждой культуры остается постоянной при любом исходе естественного увлажнения, изменяться может лишь соотношение между орошаемыми и богарными площадями. Эти ограничения

отражают предположение об отсутствии в период сева метеорологических прогнозов на период вегетации. Совместный учет в модели трех исходов увлажнения позволяет в результате решения задачи получить структуру посевов, в совокупности наиболее подготовленную к закономерностям природных условий в данном районе.

Баланс водных ресурсов учитывается для каждого исхода увлажнения:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=0}^J q_{ijth}^l x_{ijk}^l - q_i^l = 0, \quad \sum_{t=1}^T q_i^l - \gamma q \leq 0, \quad l=1, 2, 3, \quad \underline{q}_r \leq q \leq \overline{q}_r. \quad (5.2.56)$$

При этом предполагается, что период вегетации разбит на T временных интервалов — месяцев или декад — и оросительные нормы представлены дифференцированно, с отражением внутригодовой динамики водопотребления.

Здесь q_{ijth}^l — оросительная норма i -й культуры при j -й технологии орошения в t -й интервал периода вегетации в l -й исход увлажнения для k -й нормы внесения удобрений; γ — к. п. д. оросительной системы, $0 < \gamma < 1$; q_i^l — водопотребление оросительной системы в l -й исход увлажнения в t -й интервал; $\underline{q}_r, \overline{q}_r$ — пределы изменения водопотребления оросительной системы для r -го варианта развития, которые определяются в процессе серии решений описываемой задачи при изменении параметра q . При этом \underline{q}_r является наименьшим (в пределах точности расчетов) значением q , при котором ограничения задачи совместны, а \overline{q}_r — значением, при котором дальнейшее увеличение водоподачи не приводит к увеличению дохода.

Группа уравнений (5.2.56) позволяет получить для каждого расчетного значения q укомплектованный график гидромодуля оросительной системы для каждого исхода увлажнения.

Технологические ограничения имеют вид

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=0}^J B_{ijkn}^l x_{ijk}^l \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} B_n^l, \quad n = \overline{1, N}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5.2.57)$$

Они включают ограничения по использованию трудовых ресурсов, поливальной техники, удобрений и т. д., n — индекс учитываемого ресурса.

Кроме того, должны выполняться условия неотрицательности всех переменных.

Решая задачу (5.2.54) — (5.2.57) при изменяющемся значении параметра q для фиксированного варианта развития, получаем вогнутую функцию $H_r(q)$, характеризующую усредненный по исходам увлажнения чистый доход.

Для определения ДЧД за счет орошения вычисляется доход, который может быть получен на рассматриваемой площади в бо-

гарных условиях. Сохраняя предпосылку о равенстве площадей отдельных культур в разные исходы увлажнения, приходим к следующей постановке задачи:

$$G_r = \max \left\{ \sum_{l=1}^3 P_l \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{k=1}^K c_{i0k}^l x_{i0k}^l \right\} \quad (5.2.58)$$

при ограничениях

$$\underline{\alpha}_{i0} \sigma \bar{S}_r \leq \sum_{k=1}^K x_{i0k}^l \leq \bar{\alpha}_{i0k} \sigma \bar{S}_r, \quad i = \overline{1, I_0}, \quad l = 1; \quad (5.2.59)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{I_0} x_{i0k}^l = \sigma \bar{S}_r \quad (l \text{ фиксировано}); \quad (5.2.60)$$

$$\sum_{k=1}^K x_{i0k}^1 = \sum_{k=1}^K x_{i0k}^2 = \sum_{k=1}^K x_{i0k}^3, \quad i = \overline{1, I_0}; \quad (5.2.61)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{I_0} B_{i0kn}^l x_{i0k}^l \geq B_n^l, \quad l = \overline{1, 3}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (5.2.62)$$

Здесь обозначения те же, что и в задаче (5.2.51) — (5.2.55), и ограничения имеют тот же смысл. Дополнительно введен коэффициент $\sigma = 1,1 - 1,25$, который учитывает увеличение богарных посевов по сравнению с орошаемыми на той же площади (потери на оросительную сеть); $\underline{\alpha}_{i0}$, $\bar{\alpha}_{i0}$ — верхние и нижние границы содержания культур в посевах, I_0 — число культур, возделываемых на богаре. Так как состав культур на богарных и орошаемых землях разный, то, вообще говоря, $\underline{\alpha}_{i0} \neq \underline{\alpha}_i$ и $\bar{\alpha}_{i0} \neq \bar{\alpha}_i$.

Следует отметить, что при оптимальном выборе структуры богарного земледелия усредненный по исходам естественного увлажнения доход G_r может принимать — как это видно на примере рассматриваемого нами Терско-Кумского региона — существенные значения, зачастую сравнимые с доходом от орошаемого земледелия. Вследствие этого при планировании развития орошения во всем регионе необходим учет сравнительных возможностей различных хозяйств при орошаемом и богарном земледелии, что и обеспечивается предложенной моделью.

Построенные по модели производственные функции оросительных систем ориентированы на использование их при решении потоковых задач развития водного хозяйства региона и крупных речных бассейнов [Пряжинская, Храпович, 1979].

Информационная база для проведения расчетов по модели (5.2.51) — (5.2.62) для выбранного уровня агрегирования показателей включает сведения о:

урожайности культур для всех исходов естественного увлажнения, соответствующих сельскохозяйственных издержках и величине чистого дохода;

Таблица 5.1

Технико-экономические показатели развития Прохладненской оросительной системы

Вариант развития	Прирост площадей орошения, тыс. га	Удельные приведенные затраты на мелиоративные мероприятия, руб./га	Площадь оросительной системы, тыс. га
Современное состояние	13,3	0	13,3
0	10	299	23,3
1	1,6	357,8	24,9
2	4,5	440,5	29,4
3	4,3	448,7	33,7
4	6,3	451	40,0

оросительных нормах для каждой культуры по месяцам периода вегетации;

удельных приведенных затратах на мелиоративное строительство по вариантам развития оросительных систем;

верхних и нижних границах содержания орошаемых и богарных культур в посевах по агроэкономическим зонам при различных планах развития орошения;

ресурсах и нормативных показателях различных типов, учитываемых в данной задаче (удобрения, трудовые ресурсы, капитальные затраты и т. д.).

В качестве примера рассмотрим расчет производственной функции для Прохладненской оросительной системы. Система расположена в бассейне реки Малка, в первой зоне Кабардино-Балкарской АССР. Водозабор системы находится в створе Каменноостовское, возвраты воды отнесены к стволу Моздок.

Ирригационный фонд системы составляет 40 тыс. га. В настоящее время орошаются 23,3 тыс. га, из них в удовлетворительном состоянии находятся 13,3 тыс. га, остальные земли требуют реконструкции.

Проектом предусмотрены четыре варианта (табл. 5.1) развития Прохладненской оросительной системы (ОС). В примере рассматриваются полив полными и половинными нормами и один уровень внесения удобрений.

Производственная функция для Прохладненской системы представлена на рис. 5.10. Площади орошения \hat{S}_r и объемы водоподдачи q представляют собой математическое ожидание фактически полученных при расчетах величин:

$$\hat{S}_r = \sum_l P_l \hat{S}_r^l, \quad q = \sum_l P_l q^l.$$

При расчетах вероятности исходов увлажнения p_l в соответствии с данными наблюдений за влажностью почвы приняты равными $1/3$, т. е. $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

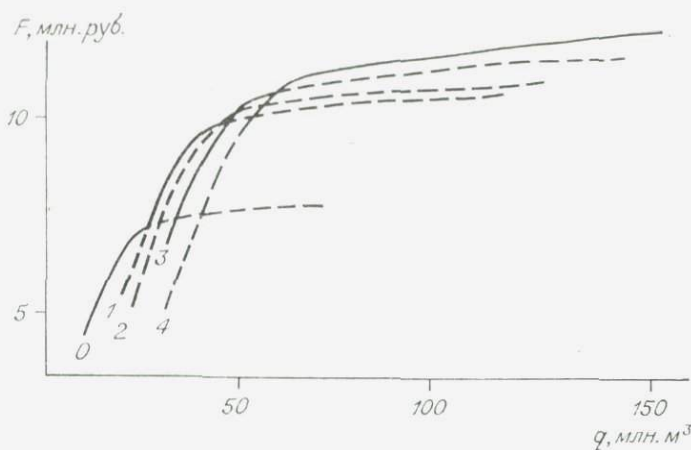


Рис. 5.10. Производственная функция Прохладненской оросительной системы.

Площади орошения (тыс. га): 0 — 23,3; 1 — 24,9; 2 — 29,4; 3 — 33,7; 4 — 40,0.

По величинам богарных и орошаемых площадей в разные исходы увлажнения (табл. 5.2) видно, что для q_1 и q_2 недополивается часть площадей в любой исход, а при максимальной водоподаче богарные культуры отсутствуют только в засушливые годы. При более благоприятных условиях предполагается возможной подача того же объема воды, что и в засушливые годы, а поливные нормы сокращаются. Экономически выгодно не поливать часть земель ОС в средние и влажные по осадкам (бездефицитные по водоподаче) годы. Это говорит о преимуществе богарного земледелия в благоприятные по естественному увлажнению годы по сравнению с орошением в условиях данной ОС, прибавка урожаев за счет поливов не погашает затрат на орошение.

Сравнение величин дополнительного чистого дохода $F_r(q)$ для разных q в каждом варианте позволяет оценить ущерб от недоподачи воды и недополива подготовленной к орошению земли. Ущерб $\Delta F(q)$ вычисляется как недополученный доход:

$$\Delta F(q) = F_r(q_{\max}) - F_r(q).$$

В табл. 5.3 представлены динамика изменения основных параметров Прохладненской оросительной системы в четырех вариантах развития, величины дополнительного чистого дохода от орошения и удельные ущербы в расчете на единицу недоданной воды и неполивной земли в засушливые годы.

Из табл. 5.2 следует, что структура земледелия относительно исходов увлажнения остается достаточно стабильной. Перераспределение площадей между богарой и орошением происходит в основном за счет зерновых культур. Для каждого объема подаваемой воды для данного варианта развития системы можно построить график распределения воды по месяцам периода веге-

Структура сельскохозяйственного производства для

Прохладненской ОС, Кабардино-Балкарская АССР, тыс. га

Культуры	$S_r = 23,3$ тыс. га					
	$q_1 = 40$ млн. м ³			$q_{1max} = 120$ млн. м ³		
	а	б	в	а	б	в
Зерновые продовольственные	4,89	4,89	4,89	—	—	1,86
богарные	—	—	—	1,86	1,86	—
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Зерновые фуражные	8,85	6,84	8,85	—	—	11,88
богарные	—	2,01	—	11,88	11,88	—
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Овощи	1,63	1,63	1,63	1,63	1,63	1,63
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Картофель	1,39	1,39	1,39	1,39	1,39	1,39
орошаемый	—	—	—	—	—	—
Кормовые	1,39	1,39	1,39	—	1,39	1,39
богарные	—	—	—	1,39	—	—
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Садовые	0,41	—	—	—	—	—
богарные	4,0	4,42	4,42	4,42	4,42	4,42
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Виноградники	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69
богарные	15,54	13,12	15,13	0	1,39	15,13
S_b	7,71	10,14	8,13	23,3	21,87	8,13
S_{op}	—	—	—	—	—	—
Дополнительный чистый доход, млн. руб.	—	9,71	—	—	10,76	—

Примечание. а — засушливый, б — средний, в — влажный.

Культуры	$\bar{S}_r = 24,9$ тыс. га					
	$q_2 = 40$ млн. м ³			$q_{2max} = 140$ млн. м ³		
	а	б	в	а	б	в
Зерновые продовольственные	5,22	5,22	5,22	—	—	1,99
богарные	—	—	—	1,99	1,99	—
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Зерновые фуражные	9,46	8,05	9,46	—	—	12,69
богарные	—	1,4	—	12,69	12,69	—
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Овощи	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Картофель	1,49	1,49	1,49	1,49	1,49	1,49
орошаемый	—	—	—	—	—	—
Кормовые	1,49	1,49	1,49	—	1,49	1,49
богарные	—	—	—	1,49	—	—
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Садовые	0,92	—	—	—	—	—
богарные	3,8	4,73	4,73	4,73	4,73	4,73
орошаемые	—	—	—	—	—	—
Виноградники	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74
богарные	17,09	14,76	16,17	0	1,49	16,17
S_b	7,77	10,1	8,7	24,9	23,38	8,7
S_{op}	—	—	—	—	—	—
Дополнительный чистый доход, млн. руб.	—	9,68	—	—	11,13	—

задачи и вида функционала. Это соображение вполне согласуется с представленным выше способом определения производственной функции, который посредством математического ожидания дополнительного чистого дохода за счет орошения, по существу, усредняет влияние условий естественного увлажнения.

Поэтому при формировании статистической оптимизационной потоковой модели развития ВХС региона (5.2.15) — (5.2.17) в качестве компонент $f_s(x_s)$ сепарабельного минимизируемого функционала, соответствующих оросительным системам, приняты именно их производственные функции, взятые с обратным знаком. Тем самым $f_s(x_s) = -F(q) = -\max_r F_r(q)$ определены как выпуклые убывающие функции.

При перспективном планировании региональных ВХС возникает необходимость значительного агрегирования информации, которая может выразиться, в частности, в объединении нескольких ОС, «привязанных» к одному створу.

Усредненные показатели эффективности различных вариантов использования земельных и водных ресурсов Прохладненской оросительной системы

Вариант	Площадь, тыс. га				Водоподача, млн. м ³		Дополнительный чистый доход (ДЧД), млн. руб.			Удельные показатели ущерба	
	подготовленная к орошению	фактически в среднем политая		неполитая, в среднем $\Delta S = S_2 - S_1$	q_{max}	$\Delta q = q_{max} - q$	$F_r(q)$	$F_r(q_{max})$	ΔF_r	$\Delta F / \Delta q$, коп./м ³	$\Delta F_r / \Delta S$, руб./га
		$q = 40$ млн. м ³ S_1	$q_{max} S_2$								
1	23,3	8,7	17,8	9,1	120	80	9,71	10,76	1,05	1,3	115,4
2	24,9	8,9	19	10,1	140	100	9,68	11,13	1,45	1,4	143,6
3	29,4	9,4	22,4	13	150	110	9,11	11,81	2,7	2,4	207,7
4	33,7	8,1	25,3	17,2	170	130	7,97	12,41	4,44	3,4	258,1

В то же время существенной частью такого планирования является определение параметров и оценка экономической эффективности сооружения водохранилищ, перераспределяющих внутригодовой сток. Такая оценка невозможна без учета внутригодовой динамики водопотребления. Построенная модель (5.2.51) — (5.2.62) дает внутригодовое распределение водопотребления q , но рассчитана на определение суммарного за год дополнительного чистого дохода.

Поэтому, являясь обоснованными критериями эффективности в статической потоковой задаче, производственные функции без дополнительного анализа не могут быть перенесены в динамическую постановку. Как отмечено выше, модель построения производственных функций для каждого значения вододачи при каждом исходе естественного увлажнения определяет оптималь-

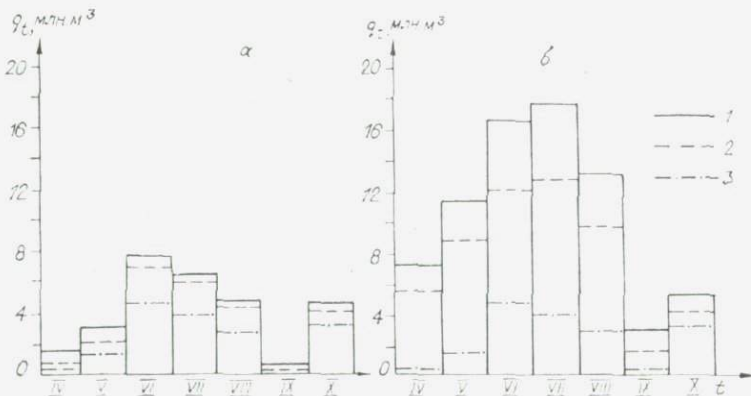


Рис. 5.11. Водопотребление Прохладненской оросительной системы по месяцам периода вегетации.

Годы: 1 — засушливый; 2 — средний; 3 — влажный. а — $q=40$ млн. м³, $S=23,3$ тыс. га; б — $q=120$ млн. м³, $S=23,3$ тыс. га.

ное распределение оросительной воды по месяцам периода вегетации. Таким образом, при каждом значении $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ определяются q_i^l , входящие в ограничения (5.2.56). При этом предполагается возможным осуществить эти оптимальные режимы водоподачи.

§ 3. МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ВХС С УЧЕТОМ КАЧЕСТВА ВОДНЫХ РЕСУРСОВ

Оптимальное функционирование ВХС при учете использования и охраны вод

Рассматривается динамический аналог статической потоковой модели развития ВХС, сформулированной в § 2 настоящей главы. Параметры компонентов водохозяйственной системы предполагаются известными, и строится модель оптимального функционирования.

Переход от статики к динамике означает рассмотрение особенностей функционирования ВХС в течение выделенного расчетного периода $[T_0, T]$. В этом случае взаимосвязь между потоками воды на входах и выходах дуг принимает вид

$$q_s^k(t) = k_s q_s(t - \Theta_s), \quad t \in [T_0, T], \quad (5.3.1)$$

где Θ_s — неотрицательное запаздывание.

Соответствующим образом изменяется взаимосвязь между концентрациями примесей на входах и выходах дуг множества S_I .

$$y_s^k(t) = \sum_{\gamma \in L} a_s^{\gamma l} (t - \Theta_s) y_s^{\gamma} (t - \Theta_s). \quad (5.3.2)$$

В дугах множества S_{II} запаздывание Θ_s принимается равным нулю. При таком описании общность рассмотрения не нарушается — если в функционировании пользователя запаздывание существенно, то такой пользователь на $\Gamma(I, S)$ изображается двумя последовательно соединенными дугами $s_1 \in S_I$ и $s_2 \in S_{II}$.

Основным отличием в описании динамики функционирования ВХС является представление водохранилищ в модели в виде располагаемых в вершинах $\Gamma(I, S)$ складов, позволяющих перераспределять водные ресурсы во времени, в отличие от представления их в статической модели в виде источников. Требования предприятий рыбного хозяйства, водного транспорта и рекреации, использующих воду водохранилищ без ее отведения, и характеристики водоема накладывают ограничения на объемы воды в водохранилищах, которые в модели порождают ограничения запасов на складах:

$$0 < \underline{W}_i(t) \leq W_i(t) \leq \bar{W}_i(t). \quad (5.3.3)$$

Зависимости интенсивностей потерь воды из водохранилищ аппроксимируются линейными $\gamma_i(t) W_i(t)$, в которых коэффи-

коэффициенты γ_i характеризуют доли воды, теряемой в единицу времени, и находятся в пределах $1 \geq \gamma_i(t) \geq 0$.

Предполагается, что процесс изменения концентраций примесей в водохранилищах, так же как в водотоках, удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений типа Стритера — Фелпса, представленных в обзоре В. А. Вавилина и М. Ю. Циткина [1977]. При этом описание изменения вектора концентраций примесей в водохранилище $y_i(t) = \{y_i^l(t), l \in L\}$ при наличии внешней по отношению к нему приточности имеет вид

$$W_i \dot{y}_i = -\rho_i \circ W_i y_i + a_i \dot{W}[z_i - y_i]. \quad (5.3.4)$$

Здесь точка над функцией означает ее дифференцирование по времени, матрица a_i имеет тот же смысл и ту же размерность, что a_s ; $\rho_i = \{\rho_i^l, l \in L\}$ — вектор интенсивностей убывания концентраций примесей; $z_i = \{z_i^l, l \in L\}$ — вектор концентраций примесей в поступающем или выходящем из водохранилища потоке; знак \circ является символом слабого векторного умножения, которое для векторов одинаковой размерности $a = \{a_\alpha\}$ и $b = \{b_\alpha\}$ дает вектор $d = a \circ b$ с координатами $d_\alpha = a_\alpha \cdot b_\alpha$.

Требования к качеству воды в водохранилищах задаются условиями

$$\sum_{l \in L_p} \sigma_i^l y_i^l \leq 1, \quad y_i^l \geq \underline{y}_i^l \geq 0. \quad (5.3.5)$$

Закон неразрывности потоков воды в вершинах $\Gamma(J, S)$ принимает вид

$$\dot{W}_i = \sum_{s \in S_i^+} q_s^k - \sum_{s \in S_i^-} q_s + b_i^0 - \gamma_i W_i. \quad (5.3.6)$$

Закон неразрывности потоков примесей в вершинах сети записывается в виде системы уравнений

$$W_i \dot{z}_i^l = \sum_{s \in S_i^+} q_s^k y_s^{kl} - \sum_{s \in S_i^-} q_s y_s^l + b_i^l. \quad (5.3.7)$$

Остальные ограничения модели имеют тот же вид, что и в задаче развития ВХС, описанной в § 2. Они включают двусторонние ограничения на потоки воды (5.2.16), условия совпадения состава разнородного потока на входах дуг, исходящих из одной вершины (5.2.20), требования на соблюдение требуемого качества воды для разных групп загрязняющих веществ (5.2.21), ограничения на концентрации отдельных загрязнений снизу (5.2.22), взаимное влияние различных примесей на входах и выходах дуг (5.2.23), а также технологические диапазоны концентраций различных примесей (5.2.24).

При этом числа $\lambda_s, \lambda_s^l, b_i^0, b_i^l, \sigma_s^l, \sigma_s^{kl}, \underline{y}_s^l, \underline{y}_s^{kl}, \beta_s^l, \beta_s^{kl}, \underline{u}_s, \bar{u}_s, \underline{u}_s^k, \bar{u}_s^k$ в данном параграфе заменяются заданными функциями времени, которые, так же как $\underline{W}_i, \underline{\sigma}_i^l, \underline{y}_i^l, \beta_i^l$, предполагаются кусочно-не-

прерывными и соответствуют параметрам сооружений и требованиям всех пользователей к водным ресурсам и их качеству.

Затраты на функционирование ВХС аналогично (5.2.25) описываются функционалом

$$\bar{F}_s(x_s, u_s, u_s^h) = F_s(x_s, u_s) + F_s^h(x_s, u_s^h) = \int_{T_0}^T f_s(x_s(t), u_s(t), t) dt + \int_{T_0}^T f_s^h(x_s(t), u_s^h(t), t) dt. \quad (5.3.8)$$

Функции f_s и f_s^h — кусочно-непрерывные по t и выпуклые по каждой из переменных x_r, u_r или x_s, u в силу закона убывающей доходности [Самуэльсон, 1964]. Однако по совокупности переменных x_r, u_r или x_s, u_s^h эти функции, вообще говоря, невыпуклы.

Затраты по ВХС в целом оцениваются функционалом

$$F(x, u) = \sum_{r \in R = S \cup J} F_r(x_r, u_r) + \sum_{s \in S_{II}} F_s^h(x_s, u_s^h). \quad (5.3.9)$$

Таким образом, оптимальное функционирование ВХС, в которой распределяются водные ресурсы и регулируется их качество, описывается задачей B_0 минимизации функционала (5.3.9) на множестве G , которое описывается системой ограничений (5.2.16), (5.2.20) — (5.2.24), (5.3.1) — (5.3.7), дополненной начальными условиями

$$W_i(T_0) = W_i^0, \quad y_i(T_0) = y_i^0, \quad q_s(t) = q_s^0(t), \quad y_s(t) = y_s^0(t) \quad \text{для } t \in [T_0 \ominus, T_0]. \quad (5.3.10)$$

Задача B_0 является задачей оптимального управления. Фазовыми переменными выступают запасы на складах W_i , концентрации в них примесей y_i и их комплексы u_i , потоки дуг q , концентрации в них примесей y_s, y_s^h и их комплексы u_s, u_s^h являются управлениями. Задача B_0 является моделью системы с запаздывающим управлением, поэтому в ней, кроме начальных условий на фазовые переменные, необходимо знать значения управлений на полуинтервале первоначального запаздывания. B_0 является задачей Лагранжа с невыпуклым бисепарабельным целевым функционалом со свободным концом и фиксированным временем. Ограничения типа равенств в неразрешенной форме (5.3.4) и (5.3.7), содержащие управления, фазовые переменные и их производные, билинейны по совокупности переменных. Непосредственное применение известных результатов теории оптимального управления к исследованию этой задачи вызывает затруднения. Однако особенности рассматриваемой задачи позволяют исследовать существование решения и построить метод решения.

Так как система уравнений (5.3.7) относительно управлений определяет вектор $\dot{W} \circ z$, который входит только в систему (5.3.4), вектор фазовых переменных W , согласно (5.3.3), отделен от нуля, матрицы a_s , $s \in S_I$ неособенные, то наличие запаздывания в управлениях задачи не влияет на правомерность теоремы существования и экстремального принципа в локально-выпуклых задачах, сформулированной в работе А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [1974]. Задача B_0 удовлетворяет требуемым в теореме существования условиям в силу непрерывности по x_r , u_r , u_r^h и кусочной непрерывности по t подынтегральных функций f_r , а также ограниченности допустимого множества G .

Из теоремы существования следует, что в задаче B_0 с непустым допустимым множеством существует оптимальный вектор X^0 с абсолютно непрерывными фазовыми составляющими w^0 , y_W^0 , u_W^0 и ограниченными измеримыми управлениями q^0 , y_q^0 , y_q^h , u_q^0 , u_q^h .

Заметим, что измеримое ограниченное управление может быть аппроксимировано сходящейся по мере последовательностью почти всюду непрерывных на $[T_0, T]$ векторов, удовлетворяющих тем же ограничениям; при этом сходимость соответствующих фазовых траекторий будет равномерной [Мордухович, 1978]. Следовательно, решение задачи B_0 , существование которого можно гарантировать, аппроксимируется последовательностью доступных функций, которые могут быть реализованы в реальной ВХС.

Для построения решения задачи B_0 приняты два упрощающих предположения.

1. Вводится дискретное время. Динамика системы заключается в возможности изменения режима функционирования в заранее фиксированные моменты времени. В интервалах между выделенными моментами режим системы стационарен.

2. Строится приближенное решение задачи. В качестве решения принимается вектор, которому соответствует значение целевого функционала, отличающееся от оптимального не более, чем на заданную величину, и который выходит за допустимое множество не более чем на заданную погрешность.

При построении оптимального вектора существенно используются билинейность ограничений типа равенства и бисепаральность целевого функционала.

Вместе с B_0 рассматривается задача B_N оптимизации в дискретном времени, которая получается из B_0 разбиением расчетного периода на N отрезков $[t_n, t_n + 1]$ точками $t_0 = T_0$, $t_1 = t_0 + h_1$, $t_2 = t_1 + h_2$, ..., $t_N = T$, $h_n > 0$, $n = 1, 2, \dots, N$ и разностной аппроксимацией производной $\dot{W}(t_n) = 1/h_n [W_{n+1} - W_n]$. Задача B_N состоит в определении вектора $X_N^0 = W_N^0, q_N^0, y_N^0, u_N^0$, который минимизирует дискретизированный функционал (5.3.9)

$$\Phi(X) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \left[\sum_{r \in R} f_{rn}(x_{sn}, u_{rn}) + \sum_{s \in S_{II}} f_{sn}^h(x_{sn}, u_{sn}^h) \right] \quad (5.3.11)$$

на множестве G_N , задаваемом системой ограничений, аппроксимирующих ограничения задачи B_0 и включающих:

систему уравнений неразрывности потоков воды и примесей

$$H_1(X) = W_{i,n+1} - W_{in} - h_n \left[\sum_{s \in S_i^+} q_{sn}^h - \sum_{s \in S_i^-} q_{sn} + b_{in}^0 - \gamma_{in} w_{in} \right] = 0, \quad (5.3.12)$$

$$H_{2l}(X) = [W_{i,n+1} - W_{in}] z_{in}^l - h_n \left[\sum_{s \in S_i^+} q_{sn}^h y_{sn}^{hl} - \sum_{s \in S_i^-} q_{sn} y_{sn}^l + b_{in}^l \right] = 0, \quad l \in L; \quad (5.3.13)$$

систему уравнений преобразования потоков в дугах и концентраций в них примесей, а также концентраций примесей на складах

$$H_3(X) = q_{sn}^h - k_s q_{s,n-\theta} = 0, \quad s \in S; \quad (5.3.14)$$

$$H_4(X) = y_{sn}^{hl} - \sum_{\gamma \in L} a_{s,n-\theta}^{\gamma l} y_{s,n-\theta}^{\gamma} = 0, \quad s \in S_I, \quad l \in L; \quad (5.3.15)$$

$$H_5(X) = W_{in} \circ [y_{i,n+1} - y_{in}] + h_n \rho_i \circ W_{in} y_{in} + a_i [W_{i,n+1} - W_{in}] [z_{in} - y_{in}] = 0, \quad i \in I; \quad (5.3.16)$$

уравнения равенства концентраций примесей на входах дуг, исходящих из одной вершины,

$$y_{sn}^l = y_{s'n}^l, \quad s, s' \in S_i^-, \quad l \in L; \quad (5.3.17)$$

правила формирования комплексов примесей

$$u_r = \sum_{l \in L} \beta_r^l y_r^l, \quad u_s^h = \sum_{l \in L} \beta_s^{hl} y_s^{hl}, \quad r \in R, \quad s \in S_{II}; \quad (5.3.18)$$

требования к количеству и качеству водных ресурсов

$$\begin{aligned} \underline{x}_{rn} &\leq x_{rn} \leq \bar{x}_{rn}, & \underline{q}_{sn}^h &\leq q_{sn}^h \leq \bar{q}_{sn}^h, \\ \underline{u}_{rn} &\leq u_{rn} \leq \bar{u}_{rn}, & \underline{u}_{sn}^h &\leq u_{sn}^h \leq \bar{u}_{sn}^h, & r \in R, \quad s \in S_{II}, & (5.3.19) \\ \sum_{l \in L_p} \sigma_{rn}^l y_{rn}^l &\leq 1, & \sum_{l \in L_p} \sigma_{sn}^{hl} y_{sn}^{hl} &\leq 1, & y_{rn}^l &\geq \underline{y}_{rn}^l, & y_{sn}^{hl} &\geq \underline{y}_{sn}^{hl}, & r \in R, \\ & & & & s \in S_{II}; & (5.3.20) \end{aligned}$$

начальные условия

$$W_{i0} = W_i^0, \quad y_{i0} = y_i^0; \quad q_{sn} = q_{sn}^0, \quad y_{sn} = y_{sn}^0 \quad \text{для } n \in [T_0 - \Theta_s, T_0 - 1]. \quad (5.3.21)$$

В задаче (5.3.11)–(5.3.21) запаздывания Θ_s принимают дискретные значения, согласованные с h_n .

Задача B_N аппроксимирует B_0 и имеет самостоятельное значение как задача, описывающая оптимальное функционирование ВХС в дискретном времени.

B_N является конечномерной задачей математического программирования, состоящей в минимизации невыпуклой бисепарабельной функции $\Phi(X)$ на невыпуклом множестве G_N , в формировании которого участвуют билинейные ограничения (5.3.15), (5.3.16). Она принадлежит к классу обобщенно-сепарабельных многоэкстремальных задач, решение которых возможно с использованием схемы ветвей и границ [Лазебник и др., 1981]. Ниже описывается метод решения задачи B_N , детализирующий схему ветвей и границ.

Решение задачи B_N основывается на том, что погрешность оптимального значения функционала $\Phi(X)$ не должна превосходить заданную, т. е. на искомом векторе X^* должно выполняться неравенство

$$\Phi(X^*) - \min_{X \in G_N} \Phi(X) \leq \varepsilon_0. \quad (5.3.22)$$

Выход приближенного решения X^* за допустимое множество G_N оценивается вектором δ_0 , размерность которого совпадает с числом ограничений, определяющих G_N . Без нарушения общности предполагается, что отличны от нуля составляющие $\delta_{0l}^2 > 0$ и $\delta_0^5 > 0$ вектора δ_0 , соответствующие ограничениям (5.3.13) и (5.3.16). Вектор δ_0 выделяет множество G^* , которому должен принадлежать вектор X^* . Это множество описывается условиями (5.3.12), (5.3.14), (5.3.15), (5.3.17) — (5.3.20) и ограничениями

$$|H_{2l}(X^*)| \leq \delta_{0l}^2, \quad |H_5(X^*)| \leq \delta_0^5. \quad (5.3.23)$$

Решение многоэкстремальной задачи B_N сводится к нахождению оптимальных векторов последовательности оценочных выпуклых задач, формируемых по методу, основанному на схеме ветвей и границ. Применение последней для решения задачи B_N основано на возможности представления выпуклой оболочки бисепарабельной функции на прямоугольном множестве суммой выпуклых оболочек функций двух переменных на прямоугольниках двумерных пространств. В этом случае сложная задача построения выпуклой оболочки функций многих переменных сводится к конечному числу более простых задач построения выпуклой оболочки функций двух переменных. Алгоритм этой процедуры описан и может быть реализован на ЭВМ, вопросы численной реализации ее проработаны достаточно детально [Лазебник, Цаллагова, 1973].

Совокупность оценочных выпуклых задач j -го этапа составляет множество $\{A_j^l\}$, где l — индекс задачи. Объединение допустимых множеств G_A^l этих задач содержит допустимое множество исходной задачи:

$$(a) \quad \bigcup_l G_A^l \supset G_N.$$

Целевые функционалы $\Phi^j(X)$ оценочных задач строятся как миноранты целевого функционала исходной задачи $\Phi(X)$ на допустимых множествах G_A^{jl} :

$$(б) \quad \Phi^{jl}(X) \leq \Phi(X), \quad X \in G_A^{jl}.$$

Оценочные задачи A_{j_l} строятся таким образом, чтобы обеспечить существование семейства задач $\{A_{j_l}\}$, объединение допустимых множеств которых содержит G_N и содержится в G_A^* , причем оптимальное значение $\Phi(X)$ на G_A^v отличается от оптимального значения $\Phi^v(X)$ на величину, не превышающую ε_0 , т. е.

$$(в) \quad \min_{X \in G_A^v} \Phi(X) - \min_{X \in G_A^v} \Phi^v(X) \leq \varepsilon_0, \quad G_N \subset \bigcup_v G_A^v \subset G_A^*.$$

Значение каждой из оценочных задач $\omega_j = \min_{X \in G_A^{jl}} \Phi^{jl}(X)$,

согласно свойству (б), может служить нижней границей исходного функционала $\Phi(X)$ на множестве G_A^{jl} . Величина $\omega_j = \min \omega$, согласно свойству (а), может служить нижней оценкой значения исходной задачи $\mu = \min_{X \in G_N} \Phi(X)$ на j -м этапе, т. е.

$\mu \leq \omega_j$. Верхней оценкой μ на j -м этапе служит величина $\Omega = \Phi(\bar{X}^j) = \min_{i < j} \min_{l_i} \Phi(\bar{X}^{il})$, где $\bar{X}^{il} \in G^*$ и, следовательно, $\bar{X}^j \in$

G_A^* . Таким образом, на каждом этапе оценка погрешности оптимального вектора \bar{X}^j этапа j равна $\Delta^j = \Omega_j - \omega_j \geq \Omega_j - \mu$. Поэтому если $\bar{X}^j \in G_A^*$ и выполнено неравенство $\Delta^j \leq \varepsilon_0$, то вектор \bar{X}^j удовлетворяет условиям (5.3.24), (5.3.25) и может быть принят за искомым.

Переход от этапа j решения задачи к этапу $(j+1)$ осуществляется при нарушении хотя бы одного из рассмотренных ниже условий (5.3.24), (5.3.25) и заключается в замене задачи A_j , на которой достигается нижняя оценка ω_j , двумя задачами. Допустимое множество G_A^j задачи A_j заменяется на два подмножества: $G_A^{j+1,1}$ и $G_A^{j+1,2}$. Объединение $G_A^{j+1,1}$ и $G_A^{j+1,2}$ содержится в G_A^j и содержит подмножество $G_A^j \cap G_N$. На этих множествах формируются выпуклые задачи $A_{j+1,1}$ и $A_{j+1,2}$, которые включаются в совокупность оценочных задач вместо исключенной. В результате получается совокупность задач $(j+1)$ -го этапа.

Построение оценочных выпуклых задач A_{j_l} предполагает построение целевых функционалов $\Phi^j(X)$, допустимых множеств G_A^{jl} и правил перехода от задачи A_j к $A_{j+1,1}$ и $A_{j+1,2}$.

Целевым функционалом оценочной задачи A_{j_l} служит выпуклая оболочка со $\Phi(X)$ целевого функционала задачи B_N на

$$\pi^{jl} \text{ на } \pi^{jl} \text{ задаваемом системой ограничений } \bar{q}^{jl} \geq q \geq \underline{q}^{jl}, \bar{W}^{jl} \geq W \geq \underline{W}^{jl}, \bar{y}^{jl} \geq y \geq \underline{y}^{jl}, \bar{u}^{jl} \geq u \geq \underline{u}^{jl}. \quad (5.3.24)$$

Граница допустимого множества π^1 единственной решаемой на первом этапе оценочной задачи A_1 совпадает с системой ограничений (5.3.21), (5.3.22), дополненной условиями $\bar{y} = \bar{y}^1 \geq y$. Переход от π^1 к рассматриваемым на последующих этапах множествам π^j состоит в последовательном разбиении π^1 по описываемому ниже правилу.

Допустимое множество G_A^{jl} задачи A_{jl} строится как пересечение выпуклых множеств D_{jl} и M_{jl} . Множество D_{jl} задается ограничениями типа равенств (5.3.12), (5.3.14), (5.3.15), (5.3.19), (5.3.20), (5.3.23) и неравенствами, аналогичными (5.3.21) и (5.3.22), в которых верхние и нижние границы заменены границами множества π^j . Построение множества M_{jl} означает эквивалентный переход от ограничений типа равенств (5.3.15), (5.3.16) к двум системам ограничений типа неравенств, в которых операторы H_{2l} , $-H_{2l}$, H_5 и $-H_5$ заменяются на их выпуклые оболочки:

$$\begin{aligned} \text{со } H_{2l}(X) \leq 0, & \quad \text{со } [-H_{2l}(X)] \leq 0, \\ \pi^{jl} & \quad \pi^{jl} \\ \text{со } H_5(X) \leq 0, & \quad \text{со } [-H_5(X)] \leq 0. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Задачи $A_{j+1,1}$ и $A_{j+1,2}$ формируются из A_j следующим образом. Если X^j принадлежит множеству G_A^* , то выбирается блок сепарабельности вектора X^j , на котором достигается наибольшая разность между значениями составляющей функционала затрат φ_{rn} исходной задачи и ее выпуклой оболочкой π^j .

Если оценка погрешности $\Delta^j \leq \varepsilon_0$, то выбирается такое уравнение систем ограничений (5.3.13) и (5.3.16), на котором достигается наибольшее отклонение в точке X^j от заданной погрешности δ_0 . В этом уравнении выделяется блок сепарабельности вектора X^j , на котором достигается наибольшая разность между исходным оператором и его выпуклой оболочкой. Если $\Delta^j > \varepsilon_0$, $X^j \in \overline{G_A^*}$, то выбирается последний из указанных двух блоков сепарабельности.

Разбиение множества π^j на $\pi^{j+1,1}$ и $\pi^{j+1,2}$ производится по координате из выбранного блока сепарабельности, на которой достигается

$$\max \min [\bar{X}_{rn}^j - X_{rn}^j, X_{rn}^j - \underline{X}_{rn}^j].$$

В множествах π^j , $\pi^{j+1,1}$ и $\pi^{j+1,2}$ совпадают все ограничения (5.3.26), кроме ограничений для координаты разбиения. Значения координаты разбиения этапа j являются верхней гранью соответствующего неравенства в ограничениях множества $\pi^{j+1,1}$ и нижней — в $\pi^{j+1,2}$, т. е. для координаты разбиения X_{rn}

$$\underline{X}_{rn}^{j+1,1} = \underline{X}_{rn}^j, \quad \bar{X}_{rn}^{j+1,2} = \bar{X}_{rn}^j, \quad \bar{X}_{rn}^{j+1,1} = \underline{X}_{rn}^{j+1,2} = X_{rn}^j. \quad (5.3.26)$$

Описанная последовательность оценочных задач обладает свойствами (а) — (в) и приводит к решению за конечное число этапов.

Построенный метод решения задачи B_N может быть применен в комбинации с методом, улучшающим верхнюю оценку Ω , каждого этапа. Примером является следующая релаксационная двухэтапная процедура. На первом этапе при закреплённом допустимом векторе концентрации примесей y^1 находится оптимальный вектор задачи оптимального распределения заданного количества воды q^1 , W^1 . На втором этапе полученный вектор q^1 , W^1 закрепляется, а вектор y считается переменным. Решается задача оптимальной очистки заданного количества воды. Полученный оптимальный вектор второго этапа используется как исходный для повторного решения задачи первого этапа и т. д.

Рассматриваемый в данной работе метод решения может быть применен как приближенный с оценкой погрешности, если прервать решение на некотором этапе.

Модели планирования рационального использования и охраны вод речного бассейна

Рассмотрим далее взаимосвязанные модели планирования водоохранных мероприятий с учетом вопросов использования и регулирования стока. Первая модель — размещения потребляющих и (или) загрязняющих воду производств. Качественная постановка задачи выполнена М. П. Крыловым и А. Д. Рикуним [1980].

Рассматривается ситуация, когда в пределах речного бассейна предполагается разместить (или расширить уже существующие) m видов производств продукции с общим объемом V_1, \dots, V_m . Как, учитывая ограничения на имеющиеся водные и трудовые ресурсы, уже существующую структуру производства и требования к качеству (и расходам) воды в речном бассейне, разместить эти производства так, чтобы минимизировать суммарные приведенные затраты на производство и водоохранные мероприятия?

В такой постановке предполагается, что наличные водные ресурсы и ассимилятивная мощность реки являются «узкими местами» в расширении производства.

Подобная модель поможет оценить и такие факторы, как вклад водоохранной составляющей в общие затраты (и в соответствующее решение о расширении производства). В отличие от линейных моделей [Бурматова, 1980] и даже модели с дискретными переменными [Рюмина, 1980] данная модель позволяет учесть значимость пространственной неоднородности источников загрязнения и ассимилятивной мощности водного объекта.

Вторая модель, рассмотренная в данном параграфе, названа задачей планирования системы очистных сооружений (ОС) реч-



Рис. 5.12. Схема формирования множеств I^- и I^+ .

ного бассейна. В отличие от модели размещения, в которой одновременно рассматриваются процессы производства продукции с соответствующим производством загрязнений и очисткой их на ОС бассейна, в этой модели нагрузка на очистные сооружения предполагается фиксированной. Таким образом, задача планирования, формально являющаяся частным случаем модели размещения, оказывается и существенно более простой при ее решении.

Результаты решения задачи размещения могут служить входной информацией для модели II, а анализ решения задачи планирования ОС, в свою очередь, позволяет уточнить некоторые параметры модели I.

Обе модели используют потоковую схематизацию ВХС в виде ориентированного графа $\Gamma(J, S)$ с источником s_0 и стоком t_0 . Множество дуг, исходящих и входящих в вершину $i \in J$, обозначим I_i^+ и I_i^- . В частности, дуги $I_{s_0}^-$ моделируют источники воды естественного и искусственного (водохранилища) происхождения, а также источники сбросов загрязнений. На множестве $J \cup S$ введем естественное отношение порядка $>$: $s_1 > s_2$, если найдется ориентированная цепь, соединяющая s_1 с s_2 (при этом будем говорить, что s_2 расположено ниже по течению, чем s_1). Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что все вершины $i \in J \setminus (S_0 \cup t_0)$ можно разбить на два множества I^- и I^+ (рис. 5.12), при этом из вершины $i \in I^+$ исходит не более одной дуги: $\forall i \in I^+, |I_i^-| = 1$ и соответственно $\forall i \in I^-, |I_i^+| = 1$.

Задача размещения потребляющих и загрязняющих воду производств

Данная постановка является статической и детерминированной, т. е. выбирается период с определенным уровнем обеспеченности и все расчеты ведутся относительно уровней стока, соответствующим рассматриваемому периоду. Расходы воды в системе обозначим вектором $q = \{q_s\}_{s \in S}$, на который, как и выше, наложены ограничения сверху и снизу (гидрологического, санитарного или технологического характера):

$$\underline{q}_s \leq q_s \leq \bar{q}_s, \quad s \in S. \quad (5.3.27)$$

В частности, для дуг, моделирующих притоки ($s \in I_{s_0}^-$), расходы воды — это фиксированные параметры задачи ($q_s = \bar{q}_s$). Водохранилища также изображаются дугами, инцидентными s_0 : $s \in I_p \subset I_{s_0}^-$, для них $q_s < \bar{q}_s$ и предполагаются известными функции приведенных затрат $c_s(q_s)$ на обеспечении попуска расходом q_s в период с рассматриваемой обеспеченностью.

Расходы l -го вида загрязнений в начале и конце дуги обозначаются через p_{sl}^H и p_{sl}^K соответственно ($l = \overline{1, L}$).

Основные предпосылки модели состоят в следующем.

1. При производстве единицы продукции j -го вида ($j = \overline{1, m}$) в пункте производства i ($i = \overline{1, n}$) требуются расход воды Ω_{ij} и затраты трудовых ресурсов в объеме r_{ij} .

Соответственно производство продукции объема V_{ij} сопровождается затратами трудовых ресурсов R_{ij} и воды в объеме q_{ij} :

$$R_{ij} = r_{ij}V_{ij}, \quad q_{ij} = \Omega_{ij}V_{ij}.$$

Аналогично предположим, что объемы сточных вод q_{cij} и объемы загрязнений (после прохождения локальной очистки) p_{ijl}^H также линейно зависят от объема производимой продукции

$$q_{cij} = t_{ij}V_{ij}; \quad p_{ijl}^H = \rho_{ijl}V_{ij}, \quad l = \overline{1, L}.$$

2. Для отображения населенного пункта, который является одновременно и водопотребителем, и регулируемым источником загрязнения, достаточно двух дуг α и β . Дуга $\alpha \in I_{s_0}^+$ соответствует забору воды в объеме q_α , а дуга $\beta \in I_{s_0}^-$ — сбросу сточных вод в объеме q_β :

$$q_\alpha = \sum \Omega_{\alpha j}V_{\alpha j} + q_{0\alpha}; \quad q_\beta = \sum_{j=1}^m t_{\beta j}V_{\beta j} + q_{0\beta}. \quad (5.3.28)$$

Здесь $\Omega_{\alpha j}$ и $t_{\beta j}$ — нормативы затрат воды и объемов сточных вод на производство единицы продукции вида j . Фиксированные расходы $q_{0\alpha}$ и $q_{0\beta}$ соответствуют потребляемым и сбрасываемым водам иного происхождения. Отметим, что возможность моделировать населенный пункт двумя дугами основана на предположении, что пространственной распределенностью мест водозабора и сброса вод можно пренебречь.

Множество дуг β , соответствующих сточным водам населенных пунктов i , $i = \overline{1, n}$, обозначим $S_{0c} \subset I_{s_0}^-$, а множество дуг α , соответствующих водозаборам этих пунктов, — S_{bn} ($S_{bn} \subset I_{s_0}^+$) $|S_{0c}| = |S_{bn}| = n$. Не ограничивая общности, можно считать, что других водозаборов и источников загрязнений в системе нет. (Ниже будем обозначать населенный пункт индексом $\alpha \in \overline{1, n}$, полагая, что $\forall \alpha \in \overline{1, n}$ однозначно определяется номер дуги $\beta \in S_{0c}$, соответствующей сточным водам пункта α .)

3. Расходы воды в системе должны удовлетворять уравнениям баланса масс в вершинах

$$\sum_{s \in I^+} q_s - \sum_{s' \in I_i^-} q_{s'} = 0, \quad i \in I \setminus (s_0 \cup t_0). \quad (5.3.29)$$

Рассмотрим описание расходов загрязнений $\{p_s^h\}, \{p_s^k\}, s \in S$.

4. Для всех дуг (кроме тех, которые моделируют водопотребление или возвратные воды) векторы p_s^h и p_s^k связаны линейными уравнениями самоочищения

$$p_s^h = A_s p_s^k, \quad s \in S \setminus (S_{\text{вп}} \cup S_{\text{ос}}). \quad (5.3.30)$$

5. Для упрощения обозначений будем считать, что в каждом источнике загрязнений β все сточные воды поступают на общегородские ОС, т. е. $\forall \beta \in \overline{1, n}$ векторы p_β^h и p_β^k соответствуют расходам загрязнений на входе и выходе ОС пункта β . Аналогично (5.3.28) получим:

$$p_\beta^h = \sum_{j=1}^m \rho_{ij} V_{ij} + p_{0\beta}; \quad \beta \in S_{\text{ос}}. \quad (5.3.31)$$

Здесь $p_{0\beta} = \{p_{0\beta l}\}_{l=1}^L$ — фиксированные расходы загрязнений, не связанных с рассматриваемыми производствами, $\rho_{ij} = \{\rho_{ijl}\}$, $p_\beta^h = \{p_{\beta l}^h\}_{l=1}^L$.

6. Каждое очистное сооружение пункта $\beta \in \overline{1, n}$ описывается L кривыми — зависимостями приведенных затрат π_β от степени $\varepsilon_{\beta l}$ очистки по l -му ингредиенту загрязнения $\pi_{\beta l}(q_\beta, \varepsilon_{\beta l})$. (По определению, $\varepsilon_{\beta l} = (p_{\beta l}^h - p_{\beta l}^k) / p_{\beta l}^h$, $l = \overline{1, L}$; для ряда загрязнений такие зависимости были построены А. К. Кузиным и др. [1973].)

Пусть $\pi_{q_l}(\pi_\beta, q_\beta)$ — зависимости, обратные к $\pi_{\beta l}(q_\beta, \varepsilon_{\beta l})$ по $\varepsilon_{\beta l}$ (т. е., по определению, $\pi_\beta \equiv \pi_{\beta l}(q_\beta, \pi_{q_l}(\pi_\beta, q_\beta))$). Тогда на заданном диапазоне $[\underline{\pi}_\beta, \bar{\pi}_\beta]$ затрат на ОС пункта β связь между расходами загрязнений на входе $p_{\beta l}^h$ и выходе $p_{\beta l}^k$ очистного сооружения пункта β имеет вид

$$p_{\beta l}^k = p_{\beta l}^h (1 - \pi_{q_l}(\pi_\beta, q_\beta)), \quad l = \overline{1, L}; \quad \pi_\beta \in [\underline{\pi}_\beta, \bar{\pi}_\beta]. \quad (5.3.32)$$

В каждой вершине $i \neq s_0, t_0$ выполнены условия баланса загрязнений, а в вершинах, соответствующих местам водозаборов ($i \in I^-$, рис. 5.12, б), уравнения равенства концентраций загрязнений:

$$\sum_{s \in I_i^+} p_s^k - \sum_{s' \in I_i^-} p_{s'}^h = 0, \quad i \in I \setminus (s_0 \cup t_0); \quad (5.3.33)$$

$$p_s^h q_\tau - p_\tau^k q_s = 0, \quad \forall i \in I^-, \quad \tau \in I_i^+, \quad s \in I_i^-. \quad (5.3.34)$$

7. В ряде выделенных створов (которым соответствуют дуги $S_k \subset S$) на качество воды наложены ограничения по совокуп-

ности рассматриваемых загрязнений ($\bar{\mu}_{sl}$ — ПДК l -го вида загрязнений):

$$\sum_{l=1}^L p_{sl}^K / \bar{\mu}_{sl} \leq q_s, \quad s \in S_K. \quad (5.3.35)$$

8. Векторы концентраций загрязнений μ_s в источниках воды $s \in I_{s_0}^- \setminus S_{oc}$ предполагаются известными (так же, как и расходы воды q_s в «нерегулируемых» источниках $s \in I_{s_0}^- \setminus (S_p \cup S_{oc})$):

$$p_s^K = \mu_s q_s, \quad s \in I_{s_0}^- \setminus S_{oc}. \quad (5.3.36)$$

9. В каждом пункте размещения $\alpha \in \overline{1, n}$ развитие производства лимитируется трудовыми ресурсами R_α :

$$\sum_{j=1}^m r_{\alpha j} V_{\alpha j} \leq R_\alpha, \quad \alpha \in \overline{1, n}. \quad (5.3.37)$$

10. На производство продукции $V = \{V_{ij}\}_{i=1, n}^{j=1, m}$ каждого вида j в каждом пункте i могут быть наложены ограничения технологического, социального и т. д. характера как по пунктам

$$\underline{V}_{ij} \leq V_{ij} \leq \bar{V}_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5.3.38)$$

так и суммарные, по рассматриваемому региону:

а) ограничения, соответствующие случаю, когда производства каждого вида j являются относительно невзаимозаменяемыми, V_j соответствует плановому заданию на производство продукции j -го вида по всем пунктам:

$$\sum_{i=1}^n V_{ij} \geq V_j, \quad j = \overline{1, m}; \quad (5.3.39)$$

б) ограничения, относящиеся к случаю, когда размещаются производства однородной продукции, но соответствующие разным технологиям (например, рассматриваются вопросы использования воды в сельском хозяйстве для производства k культур на богаре и при орошении; в этом случае $m = 2k$), простейшие ограничения планового характера в таких ситуациях имеют вид (по пунктам i (а) и по региону в целом (б))

$$\tilde{V}_i \leq \sum_{j=1}^m z_{ij} V_{ij} \leq \bar{V}_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (5.3.40)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} V_{ij} \geq \tilde{V}. \quad (5.3.41)$$

Целевая функция задачи включает суммарные приведенные затраты на очистку стоков $\left(\sum_{\beta \in S_{oc}} \pi_\beta \right)$, регулирование стока $(\Sigma_s(q_s))$

и развитие производств по пунктам и видам $\left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^m h_{\alpha j} (V_{\alpha j}) \right)$:

$$I(q, \pi, V) = \sum_{\beta \in S_{oc}} \pi_{\beta} + \sum_{s' \in S_p} c_{s'}(q_s) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij}(V_{ij}) \rightarrow \min. \quad (5.3.42)$$

Как видно, задача размещения является в общем случае нелинейной, с невыпуклой допустимой областью (из-за нелинейных ограничений (5.3.8) и (5.3.6)). Поэтому рассмотрим ниже некоторые возможные и, как правило, достаточно естественные упрощения постановки задачи (5.3.27) — (5.3.42).

Упрощение 1.

А. Пропускная способность ОС в пункте $\beta \in \overline{1, n}$ q_{β} определяется независимо от (5.3.2) (например, в случае, когда $q_{\beta} \gg \sum t_{\beta j} V_{\beta j}$) и является параметром задачи.

Б. Обычно в современных ОС достигается достаточно высокий уровень очистки и соответствующий диапазон затрат $[\underline{\pi}_{\beta}, \overline{\pi}_{\beta}]$ оказывается таким, что функции $1 - \pi_{\beta}(\pi_{\beta}, q_{\beta})$ оказываются выпуклыми по π_{β} .

При выполнении упрощений А и Б, используя кусочно-линейную аппроксимацию, уравнения (5.3.32) можно с заданной точностью заменить на

$$p_{\beta l}^h \geq \max_{\omega = \overline{1, N}} \{a_{\beta l \omega} \pi_{\beta} + b_{\beta l \omega}\} p_{\beta l}^H. \quad (5.3.43)$$

Таким образом, все нелинейности, определяющие допустимую область (5.3.27) — (5.3.42), являются билинейными.

В. Отметим, что при фиксированных расходах $\{q_s\}$, $s \in S$, $\{\pi_{\beta}\}_{\beta \in S_{oc}}$ расходы загрязнений однозначно определяются соотношениями (5.3.32), (5.3.34) и граничными условиями — расходами в источниках загрязнения $\{p_s^H\}_{s \in I_{s_0}^-}$.

Так, обозначив $\{C_s\}$ множество всевозможных орцепей, связывающих источник S_0 с дугой s и имеющих ненулевые расходы воды q_r , $\forall r \in C_s$, легко показать [Рикун, 1982], что p_s^H выражается через $\{p_{s'}^H\}$, $s' \in I_{s_0}^- \cap C_s$, в виде

$$p_s^H = \sum_{C_s} \sum_{s' \in I_{s_0}^- \cap C_s} p_{s'}^H \cdot \prod_{s'' \in C_s \setminus S_{oc}} A_{s''} \prod_{i \in C_s \cap I^-} (q_r / q_{\tau});$$

$$(\tau \in I_i^+ \cap C_s, r \in I_i^- \cap C_s). \quad (5.3.44)$$

Итак, зная расходы $\{q_s\}$, можно определить $a_{s's}(q)$ — долю сброса загрязнений из источника s' , доходящую до створа s .

Зная диапазоны изменений \underline{q}, \bar{q} вектора q , можно аппроксимировать коэффициенты $a_{s's}(q)$ (5.3.44), например по их максимальному значению $\bar{a}_{s's}$ (для единообразия записи ниже будем

считать $a_{s's} \stackrel{\Delta}{=} 0$, если условия $s' \in I_{s_0}^-$ и $s' > s$ не выполнены).

Используя (5.3.44), зависимые переменные p_s^H, p_s^K ($s \in S \setminus S_{oc}$) и уравнения (5.3.33) — (5.3.36) можно отбросить, заменив (5.3.35) на следующее: ($\hat{\mu}_k \stackrel{\Delta}{=} \{1/\bar{\mu}_{kl}\}_{l=1}^L$):

$$\left(\sum_{s \in I_{s_0}^- \setminus S_{oc}} \mu_s q_s a_{sk}(q) + \sum_{s' \in S_{oc}} p_{s'}^h a_{s'h}(q), \hat{\mu}_k \right) \leq q_k.$$

В частности, если допустима аппроксимация функций $a_{sk}(q)$ на константы a_{sk} , то это неравенство будет линейным по q_s и p_s^h :

$$\left(\sum_{s \in I_{s_0}^- \setminus S_{oc}} \mu_s q_s a_{sk} + \sum_{s' \in S_{oc}} p_{s'}^h a_{s'h}, \hat{\mu} \right) \leq q_k. \quad (5.3.45)$$

Качественный анализ простого варианта задачи размещения

Приведенная постановка задачи размещения даже в упрощенном варианте (5.3.27) — (5.3.31), (5.3.37) — (5.3.45) оказывается в общем случае сложной, многоэкстремальной задачей математического программирования (ЗМП), поиск решения и параметрический анализ которой возможны лишь с помощью численных методов.

Поэтому целесообразно попытаться проанализировать частные случаи задачи, достаточно интересные с содержательной точки зрения.

Допущение 1.

Пусть в задаче размещения:

а) рассматривается один вид загрязнений ($L = 1$) и кривые затрат на ОС аппроксимируются логарифмическими зависимостями $\pi_i \ln \varepsilon_i$, как и в работе Метлера [1978], для удобства здесь ε_i обозначает отношение сбросов на выходе ОС к расходу загрязнений на входе: $\varepsilon_i \stackrel{\Delta}{=} p_i^K \setminus p_i^H = 1$ — степень очистки;

б) регулирование стока отсутствует ($S_p = \emptyset$);

в) рассматривается лишь одно ограничение на качество в замыкающем створе k , но в каждом источнике сбросов $i = \overline{1, n}$ степень очистки на ОС может быть ограничена снизу (т. е. $\varepsilon_i \leq \bar{\varepsilon}_i$);

г) технологические параметры $\{t_{ij}\}, \{\Omega_{ij}\}$ не зависят от пункта размещения i : $t_{ij} = t_j, \Omega_{ij} = \Omega_j \forall i = \overline{1, n}$.

При этих допущениях задачу (5.3.27) — (5.3.31), (5.3.37) — (5.3.45) можно записать в виде (\bar{V} — вектор плановых заданий по отраслям, $\bar{V} = \{\bar{V}_j\}_{j=1}^m$)

$$I(\bar{\mu}Q, \bar{V}) = - \sum_{i=1}^n \pi_i \ln \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij}(V_{ij}) \rightarrow \min, \quad (5.3.46)$$

$$\varepsilon_i \leq \bar{\varepsilon}_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (5.3.47)$$

$$p_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i \left(p_{0i} + \sum_{j=1}^m \rho_{ij} V_{ij} \right) \leq \bar{\mu} Q; \quad (5.3.48)$$

$$\underline{V}_{ij} \leq V_{ij} \leq \bar{V}_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}; \quad (5.3.49)$$

$$V_j - \sum_{i=1}^n V_{ij} \leq 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad (5.3.50)$$

$$\sum_{j=1}^m r_{ij} V_{ij} - R_i \leq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.3.51)$$

В ограничениях на качество (5.3.48) p_0 — расходы сбросов от всех нерегулируемых источников загрязнения, доходящие до створа k ; $\alpha_{ik} = a_{ik}$ — доли загрязнений, доходящих до этого створа от источников i ; $\bar{\mu}$ — ПДК, а Q — расход воды в створе k . Легко видеть, что в силу пунктов б) и г) допущения 2 Q — фиксированный параметр задачи:

$$\begin{aligned} Q &\stackrel{\Delta}{=} q_k = \sum_{s \in I_{s_0}^- \setminus S_{oc}} q_s - \sum_{s' \in S_{\text{вп}}} q_{s'} + \sum_{s'' \in S_{oc}} q_{s''} = \\ &= \sum_{s \in I_{s_0}^- \setminus S_{oc}} q_s - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Omega_{ij} V_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m = \\ &= \sum_{s \in I_{s_0}^- \setminus S_{oc}} q_s - \sum_{j=1}^m (\Omega_j - t_j) V_j. \end{aligned}$$

В задаче (5.3.46) — (5.3.51) существенный интерес представляют зависимости оптимального значения функционала $I(\bar{\mu}Q, \bar{V})$ от ассимилятивной способности системы $\bar{\mu}Q$ и вектора плановых заданий $\bar{V} = \{\bar{V}_j\}_{j=1}^m$.

Рассмотрим предварительно задачу планирования системы ОС, которая получается из (5.3.46) — (5.3.51) при фиксированной матрице объемов производства $V = \{V_{ij}\}_{i=1, n}^{j=1, m}$:

$$J(\bar{\mu}Q) = - \sum_{i=1}^n \pi_i \ln \varepsilon_i \rightarrow \min; \quad (5.3.52)$$

$$\varepsilon_i \leq \bar{\varepsilon}_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (5.3.53)$$

$$p_0 + \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i \varepsilon_i \leq \bar{\mu} Q. \quad (5.3.54)$$

В (5.3.54) через $\tilde{\alpha}_i$ обозначено $\alpha_i \left(p_{0i} + \sum_{j=1}^m \rho_{ij} V_{ij} \right)$.

Отметим, что задача (5.3.52) — (5.3.54), безусловно, интересна сама по себе и различным ее модификациям посвящено множество исследований (подробная библиография приведена в работах М. В. Апеля, Г. П. Куменашвили [1978], В. А. Вавилина, М. Ю. Циткина [1977], А. Д. Рыкуна [1982]).

Решение ее нетрудно выписать в общем виде. Пусть для простоты обозначений $\bar{\varepsilon}_1 \tilde{\alpha}_1 / \pi_1 \leq \bar{\varepsilon}_2 \tilde{\alpha}_2 / \pi_2 \leq \dots \leq \bar{\varepsilon}_n \tilde{\alpha}_n / \pi_n$. Тогда на интервалах $\bar{\mu}Q \in [p_{k-1}, p_k]$ оптимальное решение имеет вид

$$\varepsilon_i^* = \begin{cases} \bar{\varepsilon}_i, & i \leq k-1, \\ \pi_i \left(\bar{\mu}Q - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\alpha}_j \bar{\varepsilon}_j - p_0 \right) \left(\tilde{\alpha}_i \sum_{j=k}^n \pi_j \right), & i = k, n; \end{cases} \quad (5.3.55)$$

$$p_k = \begin{cases} p_0, & k = 0; \\ \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_i \bar{\varepsilon}_j + \left(\tilde{\alpha}_k \bar{\varepsilon}_k \sum_{j=k}^n \pi_j \right) \left| \pi_k + p_0, & k = 1, n, \end{cases} \quad (5.3.56)$$

т. е. при достижении $\bar{\mu}Q \geq p_k$ $\varepsilon_i^*(\bar{\mu}Q)$ становится равным $\bar{\varepsilon}_i$ и уже не меняется. Функция $\bar{J}(\bar{\mu}Q)$, очевидно, состоит из кусков логарифмических зависимостей и является непрерывно дифференцируемой с разрывами второй производной в точках $\bar{\mu}Q \in \{p_k\}_{k=1}^n$ (рис. 5.13, а). Множитель Лагранжа λ , соответствующий ограничению на качество (5.3.54), при $\bar{\mu}Q \in [p_{k-1}, p_k]$ имеет вид

$$\lambda(\bar{\mu}Q) = \frac{\partial J(\bar{\mu}Q)}{\partial(\bar{\mu}Q)} = \left(\sum_{j=k}^n \pi_j \right) \left(\bar{\mu}Q - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\alpha}_j \bar{\varepsilon}_j - p_0 \right). \quad (5.3.57)$$

Соотношения (5.3.55) — (5.3.57) показывают, что и для задачи размещения (5.3.46) — (5.3.51) зависимость $I(\bar{\mu}Q)$ является кусочно-логарифмической. При этом значения p_1, \dots, p_n параметра $\bar{\mu}Q$, соответствующие разрыву $\partial^2 I(\bar{\mu}Q, \bar{V}) / \partial(\bar{\mu}Q)^2$, определяют моменты изменения базиса в задаче (5.3.46) — (5.3.51) с линейризованной (на оптимальном решении) функцией цели.

Рассмотрим p_r и p_n — значения параметра $\bar{\mu}Q$ такие, что при $\bar{\mu}Q < p_r$ оптимальное решение $\varepsilon_i^* < \bar{\varepsilon}_i \quad \forall i = 1, n$ а при $\bar{\mu}Q > p_n$, $\varepsilon_i^* = \bar{\varepsilon}_i \quad \forall i = 1, n$.

Случай $\bar{\mu}Q \geq p_n$ соответствует очень большой ассимилятивной мощности системы или очень малому уровню ее загрязненности. Для определения значений $H_N(\bar{V}) = I(\bar{\mu}, Q, \bar{V})$, $\forall \bar{\mu}Q \geq p_n$ и p_n достаточно решить (5.3.46) — (5.3.51) с фиксированными $\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i$. Пусть, как и прежде, $\lambda(\bar{\mu}Q)$ — двойственная оценка (5.3.48), а μ — значения $\bar{\mu}Q$, при которых $\lambda(\bar{\mu}Q) = 0$. Тогда, очевидно,

$$p_n = \inf \{p | p \in M\}; \quad H_N(\bar{V}) = I(p_n, \bar{V}), \quad (5.3.58)$$

т. е. для определения p_n и $H_N(\bar{V})$ достаточно решать лишь вы-

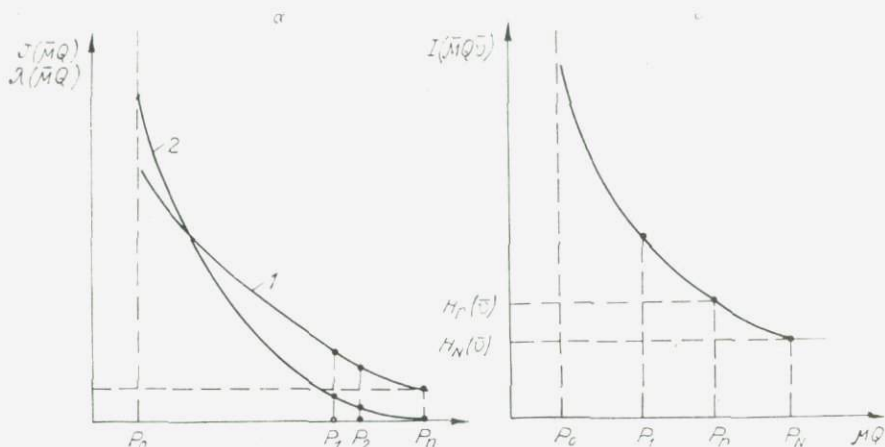


Рис. 5.13. Функции $\bar{J}(\bar{\mu}Q)$ и $\lambda(\bar{\mu}Q)$.

пуклые (при выпуклых $h_{ij}(V_{ij})$) задачи размещения с несущественными ограничениями на качество (5.3.48). В частности, если выполнены условия упрощения 3, то параметры p_n и $H_n(\bar{V})$ легко выписываются аналитически.

Случай $\bar{\mu}Q \leq p_r$, наоборот, соответствует ситуации, когда соответствующий уровень загрязнения настолько велик, что при выполнении общесейсового ограничения на качество воды (5.3.48) ограничения на величины сбросов (5.3.47) во всех пунктах выполняются строго. В случае $\bar{\mu}Q \in (p_0, p_r]$

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{\mu}Q) &= \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \right) / (\bar{\mu}Q - p_0); \quad \varepsilon_i^* = \\ &= \pi_i (\bar{\mu}Q - p_0) / \left(\sum_{l=1}^n \pi_l \alpha_l \left(p_{0l} + \sum_{j=1}^m l_{ij} V_{ij} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.3.59)$$

т. е. скорость роста затрат (на оптимальном решении) $\lambda(\bar{\mu}Q)$ уже не зависит от планового задания $\bar{V} = \{\bar{V}_j\}_{j=1}^m$ на размещение нового производства, а определяется лишь ассимилятивной способностью системы. Благодаря этому факту оказывается возможным оценивать вариации $I(\bar{\mu}Q, \bar{V})$ и при существенных изменениях параметра $\bar{\mu}Q$ в области $(p_0, p_r]$:

$$I(\bar{\mu}Q, \bar{V}) = H_r(\bar{V}) + \int_{p_r}^{\bar{\mu}Q} \lambda(p) dp = H_r(\bar{V}) + \sum_{i=1}^n \pi_i \ln \frac{p_r - p_0}{\bar{\mu}Q - p_0}.$$

Легко оценить снизу параметр p_r , учитывая (5.3.59):

$$p_r \leq \min_{i=1, n} \left\{ p_0 + \frac{\sum_{l=1}^n \pi_l}{\pi_i} \right\}. \quad (5.3.60)$$

Параметры p_N , p_r , $H_r(\bar{V})$ подсчитываются аналитически в случае, если выполнено

Упрощение 2.

А. Функции затрат $h_{ij}(V_{ij}) = h_{ij}V_{ij}$ линейны по V_{ij} и монотонно возрастают, т. е. $h_{ij} > 0 \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Б. Ограничения (5.3.51) несущественны, а в (5.3.49) $\bar{V}_{ij} = V_j$, $\bar{V}_{ij} = 0$.

Пусть v_i , v_{ij} , λ — множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (5.3.50), (5.3.49) (имеющему вид $v_{ij} \leq 0$) и (5.3.47) соответственно.

Условия Куна-Таккера в случае упрощения 3 примут вид

$$\lambda_i - \frac{\pi_i}{\varepsilon_i} + \lambda_i \alpha_i \left(p_{0i} + \sum_{j=1}^m \rho_{ij} V_{ij} \right) = 0; \quad (5.3.61)$$

$$h_{ij} - v_{ij} - v_j + \lambda \alpha_i \varepsilon_i \rho_{ij} = 0. \quad (5.3.62)$$

Рассмотрим случай $\bar{\mu}Q \geq p_N$, $\lambda = 0$. Пусть $i(j) = \arg \min_i h_{ij}$ (для простоты положим, что $i(j)$ — единственный). Тогда, очевидно,

$$v_j = h_{i(j)j} \quad V_j = \overline{1, m}; \quad (5.3.63)$$

$$V_{ij}^* = \begin{cases} 0, & i \neq i(j), \\ \bar{V}_j, & i = i(j), \end{cases} \quad p_N = \bar{p}_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\varepsilon}_i \left(p_{0i} + \sum \rho_{ij} V_{ij}^* \right); \quad (5.3.64)$$

$$H_N(\bar{V}) = - \sum_{i=1}^n \pi_i \ln \bar{\varepsilon}_i + \sum_{j=1}^m h_{i(j)j} \bar{V}_j. \quad (5.3.65)$$

Полученные соотношения могут быть полезны и в случае, когда упрощение 2 неверно. При этом, очевидно, (5.3.63) и (5.3.65) дают оценку снизу величинам $H_N(\bar{V})$, v_j .

Исследуем случай $\bar{\mu}Q < p_r$, $\lambda = \sum_{i=1}^n \pi_i / (\bar{\mu}Q - p_0)$.

Из (5.3.55) следует, что при $V^* = \{V_{ij}^*\}$ (оптимальном решении о размещении производств)

$$\varepsilon_i^* = \pi_i (\bar{\mu}Q - p_0) \left/ \left(\sum_{l=1}^n \pi_l \alpha_l \left(p_{0l} + \sum_{j=1}^m \rho_{lj} V_{lj} \right) \right) \right., \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.3.66)$$

Пусть $i(j) = \arg \min \{ \pi_i / (\alpha_i p_{0i}) \}$ — единственный для каждого $j = \overline{1, m}$. Тогда аналогично (5.3.63) — (5.3.65)

$$V_{ij}^* = \begin{cases} 0, & i \neq i(j), \\ \bar{V}_j, & i = i(j); \end{cases} \quad \hat{\rho}_{ij} \triangleq \begin{cases} 0, & i \neq i(j), \\ \rho_{ij}, & i = i(j); \end{cases}$$

$$p_r = p_0 + \min_{i=1, n} \left\{ \sum_{l=1}^n \pi_l \bar{\varepsilon}_l \alpha_l \left(p_{0l} + \sum_{j=1}^m \hat{\rho}_{lj} \bar{V}_j \right) \right\} / \pi_i.$$

В заключение этого раздела рассмотрим следующую достаточно распространенную ситуацию, когда уровень существующих сбросов на ОС (p_{oi}) достаточно высок и существенно превышает возможную дополнительную нагрузку на ОС, появляющуюся при расширении производства.

Допущение 2.

$$p_{0j} \gg \sum_{i=1}^m \rho_{ij} V_{ij} \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (5.3.67)$$

В этом случае в (5.3.61) членами $\sum_j \rho_{ij} V_{ij}$ можно пренебречь и с точностью до малого порядка $o\left(\max_i \sum_{j=1}^m \rho_{ij} V_{ij}\right)$ определяются (5.3.55) и (5.3.57), в которых $\tilde{\alpha}_i \stackrel{\Delta}{=} \alpha_i p_{oi}$. Действенные оценки плановых заданий v_j определяются из (5.3.61):

$$v_j = \min_{i=\overline{1, n}} \{h_{ij} + \lambda(\bar{\mu}Q) \tilde{\alpha}_i \varepsilon_i^* (\bar{\mu}Q) \rho_{ij}\}.$$

Зная $\{v_j\}$, с учетом выражения для $Q = \text{const} - \sum_{j=1}^m (\Omega_j - t_j) \bar{V}_j$, используя результаты Е. С. Левитина [1976], получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\bar{\mu}Q, V)}{\partial \bar{V}_j} &= v_j + \lambda(\bar{\mu}Q) \frac{\partial(Q\bar{\mu})}{\partial \bar{V}_j} = \\ &= \min_{i=\overline{1, n}} \{h_{ij} + \lambda \alpha_i \varepsilon_i^* p_{ij}\} + \bar{\mu} (t_j - \Omega_j). \end{aligned}$$

Задача планирования системы очистных сооружений с учетом вопросов регулирования и использования стока

Задача размещения (5.3.27) — (5.3.42) является весьма общей. Так, если размещение нового производства отсутствует (т. е. V_{ij} фиксированы $\forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$), то получим постановку, в которую вкладываются важные модели выбора параметров ОС с учетом возможностей, связанных с учетом регулирования стока. Этой постановке посвящено большое количество работ, в частности статьи И. Н. Гордина и др. [1979], М. Метлера и др. [1978], В. Г. Пряжинской, И. Л. Храновича [1978], Д. Стефенсона [1978], Н. Яворского и др. [1970]. Однако в таких задачах кажется естественной попытка учесть не только возможности увеличения разбавляющей способности системы, связанные с регулированием, но и одновременно получить оптимальное распределение воды между потребителями. Итак, рассмотрим постановку, описанную в работах В. Г. Пряжинской и др. [1982]

и А. Д. Рикуня [1982], которая получается из (5.3.27) — (5.3.42) при следующих предположениях:

а) водопотребители производят взаимозаменяемую продукцию, и поэтому ограничения на плановые задания имеют вид (5.3.40);

б) объемы сточных вод, поступающих на ОС, можно подсчитывать независимо от уровней водопотребления, т. е. в виде (5.3.31).

Заметим, что предположения а), б) являются вполне естественными, если, в частности, в задаче рассматривается перераспределение стока на орошение. В этом случае можно полагать $m = 1$, $V_{s1} = q_s$, $s \in S_{\text{вп}}$, т. е. измерять V_{s1} непосредственно в единицах расходов воды, а функции $h_{s1}(V_{s1}) := h_s(q_s)$ имеют смысл дохода от использования воды объема q_s s -м водопотребителем (например, оросительной системой), взятого с обратным знаком, в котором учтены затраты на поливы. В условиях предположений а), б) постановка задачи (5.3.27) — (5.3.42) для случая одного ингредиента загрязнений ($L = 1$) имеет вид

$$\sum_{s \in I_i^+} q_s - \sum_{s' \in I_i^-} q_{s'} = 0, \quad i \in I \setminus (s_0 \cup t_0); \quad (5.3.68)$$

$$\sum_{s \in I_i^+} p_s^k - \sum_{s' \in I_i^-} p_{s'}^k = 0, \quad i \in I \setminus (s_0 \cup t_0); \quad (5.3.69)$$

$$p_s^k = A_s p_s^H, \quad s \in S \setminus (S_{\text{ос}} \cup S_{\text{вп}}); \quad (5.3.70)$$

$$p_s^H q_\tau - p_s^k q_s = 0 \quad \forall i \in I^-, \quad s \in I_i^-, \quad \tau \in I_i^+; \quad (5.3.71)$$

$$p_s^k \geq \max_{\omega=1, N_s} \{a_{s\omega} \pi_s + b_{s\omega}\} p_s^H, \quad s \in S_{\text{ос}}; \quad (5.3.72)$$

$$p_s^k = \mu_s q_s \quad \forall s \in I_{s_0}^- \setminus S_{\text{ос}}; \quad (5.3.73)$$

$$p_s^k \leq \bar{\mu}_s q_s, \quad s \in S_k; \quad (5.3.74)$$

$$\underline{q}_s \leq q_s \leq \bar{q}_s, \quad s \in S; \quad (5.3.75)$$

$$I(\pi, q) = \sum_{s \in S_{\text{ос}}} \pi_s - \sum_{s' \in S_{\text{вп}}} c_{s'}(q_{s'}) + \sum_{s'' \in S_p} h_{s''}(q_{s''}) \rightarrow \min. \quad (5.3.76)$$

Уравнение (5.3.72) соответствует (5.3.43). (Из предположения б) следует, что p_s^H — фиксированные параметры $\forall s \in S_{\text{ос}}$.) В граничных условиях (5.3.74) μ_s — константы, соответствующие известному качеству воды в притоках и источниках воды; $q_s = \bar{q}_s$ — также известные параметры $\forall s \in I_{s_0}^- \setminus S_p$ и для фиксированных потребителей s : $s \in I_{t_0}^+ \setminus S_{\text{вп}}$.

Целевая функция задачи включает приведенные затраты $\sum p_s$ на очистные сооружения $s \in S_{\text{ос}}$, на регулирование стока $\sum h_{s''}(q_{s''})$, $s'' \in S_p$, и доходы $\sum_{s' \in S_{\text{вп}}} c_{s'}(q_{s'})$ от водопотребления (или ущерба от недостачи воды), взятые с обратным знаком.

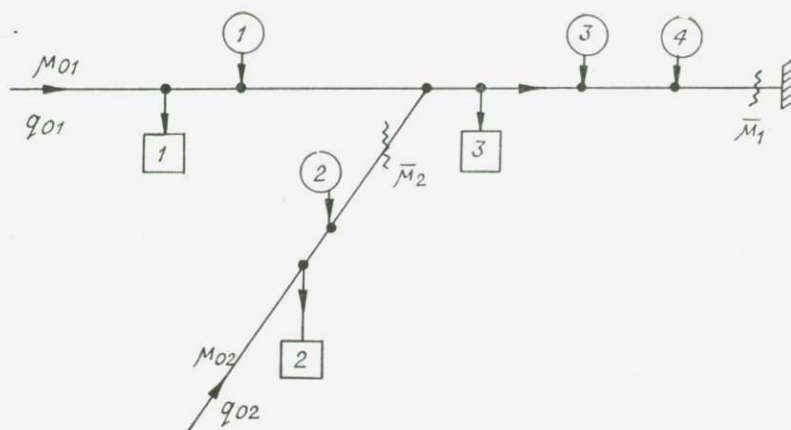


Рис. 5.14. Схема водохозяйственной системы.

В квадратах — номера оросительных систем, $i=1,3$; в кружках — номера источников сбросов загрязнений с ОС, $j=1,4$.

Задача (5.3.68) — (5.3.75) имеет невыпуклую допустимую область и является многоэкстремальной. Основную сложность при ее решении представляет наличие билинейных членов в уравнениях (5.3.71). В работе А. Д. Рикуня [1982] приведены алгоритмы решения задач (5.3.68) — (5.3.75) и (5.3.27) — (5.3.42) и показано, что нахождение (с любой наперед заданной точностью по функционалу и ограничениям) глобального экстремума (5.3.68) — (5.3.75) сводится к решению набора задач линейного программирования. Проведенные численные эксперименты с FORTRAN-программой на БЭСМ-6 подтвердили высокую эффективность предложенного алгоритма и программы для решения задач реальной размерности.

В рамках математической модели (5.3.68) — (5.3.76) возможны постановки ряда задач, имеющих различный водохозяйственный смысл. В частности, при фиксированном водопотреблении ($q_s = \bar{q}_s$, $\forall s \in S_{\text{вп}}$) получается вышеупомянутая задача, включающая известные модели оптимального выбора систем очистных сооружений и санитарных попусков.

Рассмотрим пример возможной постановки задачи, в которой сравнивается экономическая ценность потребляемой воды как природного ресурса и как фактора, определяющего качество водной среды рассматриваемого бассейна. Водохозяйственная система речного бассейна (рис. 5.14) состоит из четырех крупных источников сбросов загрязняющего вещества органического происхождения — БПК ($L = 1$), трех водопотребителей — оросительных систем. Уровень регулирования стока и водозаборы прочих потребителей фиксированы. Согласно [Правила..., 1975], для расчета параметров очистных сооружений необходимо рассматривать минимальный среднемесячный расход года 95%-ной обеспеченности. В условиях зарегулированного стока естественно ориенти-

Таблица 5.4

Параметры водохозяйственной системы

i	Расход воды в речной сети q_{oi} , млн. м ³ /мес	Качественные пара- метры сети, мг·О ₂ /л		Объемы водопотребления, млн. м ³ /мес		
		μ_{oi}	$\bar{\mu}_i$	\underline{q}_i	\bar{q}_i	Приведен- ные ущер- бы c_i , руб./м ³ · год
1	96,0	3,0	6	0,0	32,0	0,007
2	58,0	2,5	3	0,0	36,0	0,009
3	—	—	—	6,4	55,3	0,018

роваться на среднемесячный наиболее дефицитный период. Задача (5.3.68) — (5.3.76) состоит в определении такого плана распределения воды между водопотребителями и приведенных затрат на очистные сооружения, чтобы суммарные приведенные затраты на очистку и издержки от ущемления требований на воду потребителей были бы минимальны. Таким образом, в данной постановке предполагается допустимым ущемление в течение самого дефицитного месяца года 95%-ной обеспеченности некоторых водопотребителей с целью увеличения разбавляющей способности системы в этот критический период.

Параметры водохозяйственной системы приведены в таблицах 5.4, 5.5, где выделены речная сеть, параметры водопотребления и очистные сооружения.

Параметры речной сети включают фоновые концентрации БПК и расходы воды q_{oi} в верховьях реки и притока, $i = 1, 2$, и параметры ограничений на качество воды μ_1, μ_2 в створах, указанных на схеме.

Оросительные системы характеризуются месячными потребностями в воде \bar{q}_i , минимально допустимыми уровнями водопотребления \underline{q}_i : $q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i]$ — и приведенными (с весом 1/20) ущербами c_i от недодачи единицы расхода воды, $i = 1, 3$.

Очистные сооружения характеризуются расходами сточных вод q_{ij} и загрязняющих веществ p_{ij}^H , поступающих на вход очист-

Таблица 5.5

Параметры очистных сооружений

Вариант	D_{ij} , усл. ед.	$\underline{\varepsilon}_j$	$\bar{\varepsilon}_j$	α_j	β_j	$q_{c,j}$, млн. м ³ /мес
				млн. руб./год		
1	1372,0	0,75	0,90	3,64	-1,06	2,7
2	249,0	0,00	0,97	1,44	-0,52	0,65
3	595,5	0,00	0,97	2,22	-0,56	1,3
4	805,0	0,75	0,97	2,45	-0,73	1,6

Значения приведенных затрат $I(q, \varepsilon^*(q))$ и степеней очистки $\varepsilon^*(q)$ для различных вариантов водопотребления q_i

Вариант	Приведенные затраты I^* , млн. руб./год	Степени очистки				Объемы водопотребления, млн. м ³ /мес		
		ε_1^*	ε_2^*	ε_3^*	ε_4^*	q_1	q_2	q_3
1	6,61	0,75	0,88	0,75	0,97	0,0	0,0	6,4
2	6,38	0,92	0,96	0,97	0,97	32,0	36,0	55,3
3	6,05	0,75	0,88	0,90	0,97	0,0	0,0	55,3

ных сооружений, зависимостью приведенных затрат π_i от степени очистки ε_i : $\pi_i = \alpha_i \varepsilon_i + \beta_i$, $i = \overline{1, 4}$, $\underline{\varepsilon}_i \leq \varepsilon_i \leq \bar{\varepsilon}_i$.

Сравнивались три альтернативы.

I. Ущемление требований на воду всех водопотребителей. При этом расходы их в течение рассматриваемого месяца года 95%-ной обеспеченности принимаются равными минимально допустимым величинам $q_i^* = \underline{q}_i$, $i = \overline{1, 3}$. В этом случае в результате решения задачи определяются оптимальные степени очистки на очистных сооружениях $\varepsilon_j^*(q)$, $j = \overline{1, 4}$.

II. Удовлетворение требований водопотребителей полностью, т. е. $q_i^* = \bar{q}_i$, где \bar{q}_i — полная потребность в воде i -й оросительной системы в рассматриваемый период. При решении задачи определяются соответствующие $\varepsilon_j^*(\bar{q})$, $j = \overline{1, 4}$.

III. Определяется оптимальное решение (ε^*, q^*) задачи (5.3.2) — (5.3.9). Целевая функция задачи имеет вид

$$I(q, \varepsilon) = I_1 + I_2 = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \varepsilon_i + \beta_i) + \sum_{j=1}^4 c_j (\bar{q}_j - q_j) \rightarrow \min.$$

Параметры составляющей I_1 для очистных сооружений α_i , β_i получены путем линейной аппроксимации соответствующих участков кривых из работы А. К. Кузина с соавторами [1973], а составляющей I_2 — из статьи И. М. Каплинской, В. М. Шнайдемана [1982].

Результаты расчета приведены в табл. 5.6. Оптимальный план (вариант III) соответствует политике полного ущемления оросительных систем № 1 и 2 в течение месяца года 95%-ной обеспеченности и полного удовлетворения нужд третьей оросительной системы. Наиболее неудачной является политика «полного ущемления» всех водопотребителей (отличающаяся по функционалу от оптимального решения на 9,3%), в то время как политика полного удовлетворения всех водопотребителей отличается (по функционалу) от оптимального значения на 5,5%. Следует, однако, отметить, что учет нелинейности в зависимостях $\pi(\varepsilon)$, в частности резкий рост приведенных затрат при высоких степенях очистки, сделал бы это различие более существенным.

Таблица 5.7

Распределение (q_i^*) и качество (μ_3^*) воды, потребляемой оросительной системой № 3, в оптимальном решении в зависимости от экономической эффективности (c_3)

c_3 , млн. руб./год	Объемы водопотребления, млн. м ³ /мес			I^* , млн. руб./год	μ_3^* , мгО ₂ /л
	q_1^*	q_2^*	q_3^*		
0,018	0,0	0,0	55,3	6,05	3,05
0,008	0,0	0,0	33,9	6,45	4,00
0,006	0,0	0,0	11,5	6,51	3,22
0,004	0,0	11,6	6,4	6,52	3,10

венным; кроме того, при изменении некоторых ограничений (например, если допустимые степени очистки ε_3 , ε_4 равны не 0,97, а 0,95) задача с полным удовлетворением всех водопотребителей может не иметь вообще допустимых решений.

Рассмотрим подробнее оптимальное решение (q^* , ε^*). Тот факт, что $q_i^* = q_1$, $q_2^* = q_2$, показывает: для этих потребителей ценность воды как природного ресурса сравнима с ценностью ее (с позиций интересов всей страны) как фактора разбавления. Тот факт, что $q_3^* = q_3$, объясняется лишь тем, что c_3 вдвое больше c_1 и c_2 : на первый взгляд кажется, что при c_3 , равном, например, 0,006, в оптимальном плане более полно должны удовлетворяться нужды потребителей № 1 и 2, а система № 3 с «менее ценной водой» должна ущемляться сильнее. Это, однако, противоречит результатам расчетов для различных значений c_i , приведенных в табл. 5.7. Даже при $c_3 = 0,006$ потребители № 1 и 2 ущемлены практически полностью, в то время как запрос системы № 3 удовлетворен на 20% и лишь при $c_3 = 0,004$ система № 3 полностью ущемляется ($q_3^* = q_3$).

Объяснение этого факта состоит в том, что качество воды μ_3^* , забираемой системой № 3, в оптимальном решении хуже, чем в створах забора № 1 и 2 ($\mu_{10} = \mu_1^* = 3,0$, $\mu_{20} = \mu_2^* = 2,5$, а значения μ_3^* приведены в табл. 5.7). Следовательно, ценность воды как фактора разбавления в створах № 1 и 2 оросительных систем № 1 и 2 выше, чем в створе оросительной системы № 3, поэтому потребители № 1 и 2 ущемляются даже в тех случаях, когда экономическая эффективность от использования воды у них выше, чем у системы № 3.

Приведенный анализ позволяет сделать два основных вывода. Во-первых, экономические затраты на поддержание качества водной среды в острodefицитный период соизмеримы с ущербами от ущемления водопотребления. Во-вторых, вид оптимального решения существенно зависит не только от параметров удельных ущербов при ущемлении водопотребления, но и в не меньшей степени от качества водной среды.

Заключение к книге, как правило, содержит краткое резюме, «подводит черту» под изложенными результатами. Мы отступим от этого правила и не будем мешать читателю самому сделать выводы о путях решения затронутых в книге задач. Вспомним лишь два высказывания Козьмы Пруткова, имеющие, как нам кажется, непосредственное отношение к рассмотренным проблемам: «Никто не обнимет необъятного» и «Во всех частях земного шара имеются свои, даже иногда очень любопытные, другие части».

Во введении сформулирована очень общая цель — создание достаточно универсального информационного обеспечения, математических моделей и методов, нацеленных на решение всего комплекса задач управления крупномасштабным водным объектом, начиная с оперативного управления, перспективного планирования, прогнозирования и вплоть до разработки комплексных схем использования водных ресурсов регионов. При этом все задачи должны быть сформулированы с учетом требований по охране природной среды. Как видно из второй и пятой глав, последнее обстоятельство существенно усложняет и без того сложную процедуру решения задач, даже в том случае, когда эти требования ограничены лишь соблюдением ПДК. Если же попытаться непосредственно в моделях учесть антропогенное влияние на экосистемы, то задача еще более усложнится, так как потребуются формализованное описание процессов воздействия загрязнений на состояние отдельных гидробионтов (эти аспекты отражены в параграфах 3.1 и 3.2) и на экосистему в целом. При более широком толковании антропогенного влияния на природные ресурсы нужно еще учитывать и влияние водных ресурсов на состояние других типов ресурсов, например, лесных.

Развивая эти рассуждения, невольно согласишься с первым из приведенных афоризмов. Но практика показывает, что «объять» эти проблемы можно. Все зависит от того, насколько детально при этом описывается все многообразие процессов, связанных с водным объектом. Стремление «объять необъятное» и

одновременно бросить взгляд на детали приводит к концепции создания системы взаимоувязанных моделей, описывающих исследуемую систему с различной степенью детализации. Более того, не только комплекса моделей, но соответствующих им методов решения задач.

В книге рассматриваются модели, предназначенные для принятия решений. Они обладают целым рядом особенностей по сравнению с чисто прогностическими или исследовательскими моделями. Среди них одна из важнейших состоит в том, что модели содержат свободные параметры (управления). Задавая последние, можно прогнозировать последствия тех или иных управленческих решений (в режиме имитации (см. § 2.2, 5.2)) либо, определяя их,— получать оптимальные решения (см. § 5.2—5.3). Вторая особенность рассматриваемых комплексов состоит в том, что построение модели и разработка метода не являются самоцелью, а подчинены достижению некоторой общей цели исходя из имеющихся ресурсов: информационных, алгоритмических, вычислительных.

Не вдаваясь в детали предлагаемых здесь методов и моделей, обратим внимание на имеющиеся общие проблемы. Внимательный читатель должен заметить, что, говоря о моделях, авторы ни разу не остановились на обсуждении проблемы оценки их адекватности. В чем здесь причина и что оправдывает их позиции? Чтобы правильно ответить на этот вопрос, нужно понять, чему отдается приоритет— модели или имеющейся информации. Принципиально разработчик модели может придерживаться одной из двух концепций. Первая из них состоит в том, что модель строится только на основе уже имеющейся информации без привлечения каких-либо других фактов и сведений. Такие модели в § 1.3 названы дескриптивными. В этом случае вопрос оценки точности модели решается, как правило, последовательно и до конца. Но нужно учесть, что на самом деле это — оценка соответствия выбранной модели той информации, на основе которой она получена. Именно информации, а не моделируемому объекту или процессу.

Вторая концепция состоит в том, что модель строится исходя из естественно-научных представлений об объекте: либо на основе физических законов, либо на основе заранее объявленных принципов, определяющих как структуру модели, так и характер и специфику ее информационного насыщения. Таким образом, во втором случае явно принимается примат модели над информационным обеспечением (см. § 5.1). Сам процесс моделирования разбивается на два этапа: создание абстрактной модели и привязку ее к конкретному объекту. При этом абстрактная модель определяет требуемый для ее привязки набор информации независимо от того, имеется или нет эта информация к моменту построения модели. Более того, неявно предполагается, что если используемая информация удовлетворяет предъявленным к ней требованиям, то модель соответствует объекту. Такая

позиция правомерна для моделей принятия решений, и модели, построенные на этих принципах, широко и успешно используются на практике (например, модели межотраслевого баланса и линейные модели планирования в экономике).

Между тем в литературе по моделированию строгое обоснование соответствия модели ее информационному обеспечению, как правило, отсутствует. Речь здесь идет об оценке адекватности модели, но в более широком понимании, чем это принято в дескриптивных моделях. Принятый там подход представляется в данном случае весьма упрощенным хотя бы по следующей причине. Как уже говорилось, речь идет о моделях, используемых для принятия решений, которые имеют ряд свободных параметров. В соответствии с подходом, принятым в дескриптивных моделях, оценка адекватности должна выглядеть следующим образом. Нужно набрать информацию о моделируемых параметрах параллельно с информацией о реализующихся при этом управляющих параметрах. Затем провести расчеты по модели при заданных управлениях и сравнить результаты. Даже если такая информация будет получена и модель окажется достаточно точной, где гарантии, что эта точность сохранится при других значениях управляющих параметров? Выход здесь видится в следующем. Наряду с концепциями, постулатами, законами, используемыми при построении модели, должны формулироваться адекватные им требования к информационному обеспечению. В связи с этим возникает вопрос: какими показателями (полнота, равноточность и т. д.) и как оценивать адекватность модели (или концепций, принятых при ее построении) и ее информационного обеспечения?

Аналогично можно поставить вопрос и об адекватности модели и метода решения задачи. Ясно, что при использовании грубых моделей бессмысленны сверхточные методы решения задачи. Возможна и другая ситуация. Имеется достаточно точная модель, но она настолько сложна, что с помощью имеющихся методов решить задачу невозможно. В этом случае требуется проводить упрощение модели. Примеры такого рода преобразований моделей приведены в § 2.1, где распределенная модель аппроксимируется моделью с сосредоточенными параметрами, причем аппроксимация строится без использования разностных схем. В этом же параграфе приведен пример перехода от одной модели к другой (стр. 29). Обе модели являются равноточными, так как используют достаточно упрощенную схему описания процесса смешения сточных вод. С точки зрения применения и метода решения задачи вторая модель значительно удобнее. Много подобных примеров содержится и в пятой главе: декомпозиция, переход от непрерывных моделей к дискретным и т. п. Более того, здесь порою модель и метод соединяются в единую расчетную схему.

В свою очередь, эти рассуждения не отрицают необходимости строго последовательного исследования задачи на основе упро-

ценной модели. В четвертой главе продемонстрирован эффект такого исследования. Доказано, что децентрализованное (в некотором смысле упрощенное) управление каскадом водохранилищ столь же эффективно, как централизованное. Фактически здесь строго доказано, что метод, основанный на использовании децентрализованных стратегий управления, адекватен выбранной модели.

В связи со сказанным можно сформулировать и вторую проблему. Какие общие принципы могут быть положены в основу оценки адекватности модели и метода решения задачи?

Наконец, последняя проблема. Адекватность модели и метода сформулированной цели. Модель и метод решения задачи в совокупности представляют собой формализацию процесса поиска решений, направленных на достижение цели. Поэтому здесь можно говорить об адекватности цели и формальной постановки задачи. Поясним смысл этой проблемы на следующем примере. Допустим, что цель состоит в разработке предельно допустимых антропогенных нагрузок на экосистему озера Байкал, при которых исключаются нежелательные изменения последней. Один из вариантов формальной постановки этой задачи может быть таким. Пусть имеется модель, описывающая процесс переноса примесей в озере. Ставится задача нормирования так, как она описана в § 2.3. Адекватны ли будут данные модель и метод решения задачи сформулированной цели? Видимо, нет, так как здесь фактически предполагается, что непревышение ПДК исключает нежелательные изменения экосистемы. Наверное, это не так, поскольку при разработке ПДК не учитываются, например, процессы аккумуляции токсических веществ и явления аккумулятивного токсикоза (см. § 3.1—3.2). На самом деле постановка задачи адекватна другой цели — разработке предельно допустимых поступлений загрязнений в озеро, при которых их концентрация не будет превышать ПДК в любой точке. Сегодня для Байкала практически отсутствуют модели, описывающие влияние антропогенных воздействий на экосистему озера. Попытки создания таких моделей [Взаимодействие..., 1984; Эколого-экономические системы..., 1987] показали, что для их информационного обеспечения необходимо провести широкий спектр исследований, нетрадиционных для современной токсикологии. Адекватной же здесь представляется постановка задачи, в которой модель описывает не только динамику загрязнений, но и динамику состояния экосистемы с учетом процессов влияния на нее загрязнений. При этом должно быть формализовано понятие нежелательных изменений экосистемы. Это очень грубый пример и приведен он здесь для иллюстрации проблемы. При анализе сложных систем подобные явления могут оказаться менее заметными и проблема состоит в поиске методов их исключения.

Мы рассмотрели лишь одну проблему (адекватности), связанную с анализом комплексов моделей и методов. Есть и другие: сочетания различных типов моделей, соотношения моделей

и постоянно действующей системы наблюдения (мониторинга) и т. д.

Здесь изложена точка зрения ответственного редактора, с которой, возможно, согласятся даже не все его соавторы по данной работе. Данный взгляд на проблему ни в коей мере не отрицает полезности разработанных и изложенных в книге моделей и методов, которые с успехом используются на практике уже сегодня для решения комплексных проблем управления водными ресурсами.

Настало время вспомнить второй афоризм Козьмы Пруtkова и отметить, что при решении задач управления крупномасштабным водным объектом «очень любопытных других частей», оставшихся за пределами данной книги, достаточно много. Это не означает, что авторы умаляют или недооценивают их роль в решении затрагиваемых проблем. Им остается лишь сожалеть, что в рамках одной книги они не смогли объединить более широкий круг авторов и охватить более широкий спектр направлений исследований. Авторы надеются, что когда-нибудь появится коллектив, который сумеет преодолеть все препятствия на этом пути, а также на то, что данная книга послужит сближению различных подходов к решению комплексных проблем управления водными объектами и принесет пользу.

ЛИТЕРАТУРА

- Авакян А. Б., Вендров С. Л., Воропаев Г. В. и др. Решение водных проблем — важный фактор оптимизации среды // Изв. АН СССР. Сер. геогр.— 1977.— № 5.— С. 17—26.
- Алексеев В. В., Кокорин А. О. Математическая модель влияния пестицида на биоценоз // Исследование поведения загрязняющих веществ в окружающей среде. М.: Гидрометеоздат.— 1982 (Тр. ИЭМ; Вып. 12 (98)).— С. 7—16.
- Алпатов С. М. Методические указания по расчетам режимов орошения сельскохозяйственных культур на основе биоклиматического метода.— Киев, 1967.
- Аникушина Л. А., Аникушин Н. Ф., Ягодка С. Н. Влияние солей тяжелых металлов на размножение, пигментный комплекс, азотфиксацию и ультраструктуру синезеленой водоросли *Anabaena spiroides* // Биология, морфология, систематика низших организмов.— М.; Л.: Наука, 1978.— С. 14—21.
- Анохин Ю. А., Израэль Ю. А. Системный анализ и имитационное математическое моделирование как методологическая основа определения допустимых нагрузок антропогенных загрязнений окружающей среды — региональный подход // Всесторонний анализ окружающей природной среды: Тр. Сов.-амер. симпоз.— Л.: Гидрометеоздат, 1975.— С. 68—82.
- Анохин Ю. А., Израэль Ю. А., Остромогильский А. Х. и др. Имитационно-балансовая математическая модель региона оз. Байкал как инструмент всестороннего анализа, долгосрочного прогнозирования и определения допустимых нагрузок воздействия народнохозяйственной деятельности на качество окружающей среды и состояние экологических систем. Всесторонний анализ окружающей природной среды: Тр. 2-го Сов.-амер. симпоз.— Л.: Гидрометеоздат, 1976.— С. 246—265.
- Анохин Ю. А., Остромогильский А. Х., Пословин А. Л. и др. Оценка антропогенного комплекса микроэлементов на зеркале озера Байкал // Проблемы экологического мониторинга и моделей экосистем.— Л.: Гидрометеоздат, 1981.— С. 32—40.
- Антоновский М. Я., Семенов С. М. Математические методы экологического прогнозирования.— М.: Знание, 1978.
- Апфель М. В., Кумиснашвили Г. П. Управление качеством природных вод // Гидрология суши.— М., 1978.— С. 164—222. (Итоги науки и техники/ВИНИТИ; Т. 3).
- Аргучинцев В. К. Численное моделирование бризовой и горно-долинной циркуляций на Байкале // Структура и ресурсы климата Байкала и сопредельных пространств.— Новосибирск; Наука, 1977.— С. 180—185.
- Ардазаров В. Л., Емельянов В. С. Общее описание системы ИНЕС // Информ.-упр. системы.— 1982.— № 1.— С. 46—58.

- Афанасьева Э. Л.** Зоопланктон пелагиали Байкала, его запасы, продукция и кормовые концентрации // *Круговорот вещества и энергии в озерных водоемах.*— Новосибирск: Наука, 1975.— С. 17—22.
- Батурина Е. Ю., Викулов В. Е., Дроздовский Э. Е. и др.** Анализ взаимодействия природного и хозяйственного комплексов Байкальского региона // *Планирование и прогнозирование природно-экономических систем.*— Новосибирск: Наука, 1984.— С. 5—17.
- Бердников С. В., Домбровский Ю. А., Макмак С. М.** Математическое моделирование динамики концентраций консервативного загрязняющего вещества, накапливающегося в гидробионтах // *Гидрохим. мат.*— 1982.— Т. 26.— С. 115—122.
- Березнер А. С., Моисеев Н. П., Еренко Ф. И., Лотов А. В.** Системный подход к исследованию проблемы межбассейновой переброски стока (на примере переброски части стока северных рек СССР в Волгу) // *Водные ресурсы.*— 1981.— № 1.— С. 5—22.
- Берж К.** Теория графов и ее применение.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
- Благодатских В. И.** Теория дифференциальных включений.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
- Бостанджогло А. А., Воропаев Г. В., Грин Г. Б., Исмаилов Г. Х.** Методические основы разработки Единой водохозяйственной системы страны // *Водные ресурсы.*— 1979.— № 6.— С. 5—24.
- Брагинский Л. П.** Принципиальные препятствия к применению химического метода борьбы с «цветением» воды в водохранилищах // *Водные ресурсы.*— 1977.— № 2.— С. 5—17.
- Брук Р. Р.** Загрязнение микроэлементами // *Химия окружающей среды.*— М.: Химия, 1982.— С. 371—417.
- Бурматова О. П.** Анализ влияния требований охраны окружающей среды на формирование пространственной структуры ТПК КМА в пределах Курейской области // *Прогнозирование формирования программно-целевых территориально-производственных комплексов.*— Новосибирск: Наука, 1980.— С. 65—91.
- Бусленко Н. П.** Сложные системы и имитационные модели // *Кибернетика.*— 1976.— № 6.— С. 50—59.
- Бусленко Н. П.** Моделирование сложных систем.— М.: Наука, 1978.
- Вавилин В. А., Циткин М. Ю.** Математическое моделирование и управление качеством водной среды // *Водные ресурсы.*— 1977.— № 5.— С. 114—132.
- Великанов А. Л., Коробова Д. Н.** Применение метода динамического программирования к распределению водных ресурсов // *Проблемы изучения и использования водных ресурсов.*— М.: Наука, 1972.— С. 101—108.
- Ветров В. А., Бейм А. М., Белова Н. И. и др.** Оценка влияния промышленных стоков БЦБК на микроэлементный состав вод Южного Байкала // *Влияние окружающей среды на гидробионтов.* Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982. С. 97—103.
- Взаимодействие природы и хозяйства Байкальского региона.**— Новосибирск: Наука, 1981.
- Викулов В. В.** Режим особого природопользования.— Новосибирск: Наука, 1982.
- Власова Т. П.** Построение алгоритма расчета течений и температуры в пресноводном бассейне // *Математическое моделирование водных экологических систем.*— Иркутск, 1978.— С. 72—85.
- Водоэнергетические расчеты методом Монте-Карло.**— М.: Энергия, 1969.
- Воропаев Г. В., Киселев В. Г.** К вопросу об оценке эффективности проектных схем перераспределения водных ресурсов // *Методы системного анализа в проблемах рационального использования водных ресурсов.*— М., 1976.— С. 9—27. (Сб./Международ. ин-т прикл. систем. анализа; Т. II).
- Воропаев Г. В., Исмаилов Г. Х., Федоров В. М.** Принципы построения имитационной модели водохозяйственных систем бассейнов рек Амур-дари и Сырдарья // *Водные ресурсы.*— 1980.— № 4.— С. 55—81.

- Галкин Л. М. Задачи при построении математических моделей самоочищения водоемов и водотоков // Самоочищение и диффузия во внутренних водоемах.— Новосибирск: Наука, 1980.— С. 7—47.
- Гордин П. В., Кочарян А. Г., Воробьева П. П. Оптимизация системы водоохраных мероприятий // Водные ресурсы.— 1979.— № 5.— С. 125—136.
- Дамешек Л. Ю. Декомпозиционный алгоритм нормирования в сети линейных операторов.— Иркутск, 1984.— 11 с.— Рукопись деп. в ВИНТИ 8.02.84, № 1351-84 Деп.
- Дамешек Л. Ю., Константинов Г. Н. Нормирование воздействий в сети операторов.— Иркутск, 1983.— 20 с.— Рукопись деп. в ВИНТИ 14.11.83, № 6791-83 Деп.
- Деменчук В. М., Дунин-Барковский Л. В., Разумихин Б. С. Применение теории графов к задаче распределения водных ресурсов, математическая модель и методы решения // Водные ресурсы.— 1976.— № 2.— С. 73—80.
- Диксон М., Уэбб Э. Ферменты.— М.: Мир, 1966.
- Динамика эколого-экономических систем.— Новосибирск: Наука, 1981.
- Домбровский Ю. А. Модель биотического круговорота Таганрогского залива // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки.— 1977.— № 2.— С. 94—102.
- Емельянов С. В., Калашников В. В. Исследование сложных систем с помощью моделирования // Итоги науки и техники ВИНТИ: Кибернетика. Т. 14.— М.,— ВИНТИ.— 1981.— С. 158—208.
- Ивахненко Л. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами.— Киев: Техника, 1975.
- Игельник Л. М., Исмайлов Г. Х. Методика построения производственной функции оросительных систем бассейна Сырдарьи // Водные ресурсы.— 1979.— № 2.— С. 117—134.
- Израэль Ю. А. Экология и контроль природной среды.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
- Израэль Ю. А., Гасилина Н. К., Ровинский Ф. Я., Филиппова Л. М. Осуществление в СССР системы мониторинга загрязнения природной среды.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.
- Поффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.
- Калашников В. В., Лутков В. И., Немчинов Б. В., Ривере Н. Я. Вопросы разработки имитационных систем // Электронная техника. Сер. 9: Экономика и системы управления.— 1980.— № 1 (34).— С. 71—87.
- Каминский В. С. Современные проблемы нормирования качества поверхностных вод // Водные ресурсы.— 1980.— № 3.— С. 160—168.
- Каплинская И. М., Шнайдман В. М. Построение производственных функций оросительных систем // Водные ресурсы.— 1982.— № 2.— С. 146—150.
- Караушев А. В., Скакальский Б. Г. Оценка и моделирование качества воды в водоемах // Проблемы современной гидрологии.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.— С. 59—75.
- Кардаш В. А., Пряжнинская В. Г. Ливейная модель оптимальной внутрихозяйственной организации использования оросительных систем // Экономика и математические методы.— 1966.— Т. II, вып. 3.— С. 451—454.
- Кацельсон М. Б., Храмович И. Л. Транспортная задача на сети с усилением в дугах. I. Метод решения // Автоматика и телемеханика.— 1979.— № 1.— С. 98—109.
- Киряченко Г. С., Константинов Г. Н., Дамешек Л. Ю. Прогнозирование качества водных ресурсов на примере р. Селенги // Предпосылки и факторы хозяйственного развития Бурятии.— Улан-Удэ, 1982.— С. 110—114.
- Кожов М. М. Очерки по байкаловедению.— Иркутск, 1972.
- Кожова О. М., Мельник И. Г. О сезонной и многолетней динамике численности эшшурьи в оз. Байкал // Гидробиологические и ихтиологические исследования в Восточной Сибири.— Вып. 1.— Иркутск, 1977.— С. 28—48.
- Константинов Г. Н. Нормирование воздействий на динамические системы.— Иркутск: изд. Иркутск. ун-та, 1983.

- Константинов Г. Н., Сидоренко Г. В.** Алгоритм решения линейной задачи нормирования // Планирование и прогнозирование природно-экономических систем.— Новосибирск: Наука, 1984.— С. 95—99.
- Коряков Е. А.** Продукция пелагических бычков и голомянок // Круговорот вещества и энергии в озерных экосистемах.— Новосибирск: Наука, 1975.— С. 254—258.
- Костяев В. Я., Ягодка Ф. Н., Соколов В. А.** Чувствительность *anabaena spiroides* к цинку и кобальту // Гидробиол. ж. 1980. № 2.— С. 117—123.
- Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.
- Красовский Г. Н., Эльгинер Л. И., Бейм А. М. и др.** Принципы эколого-экономического регламентирования качества воды водных объектов // Водные ресурсы.— 1982.— № 4.— С. 3—19.
- Крицкий С. И., Менкель М. Ф.** Водохозяйственные расчеты.— Л.: Гидрометеоздат, 1952.
- Крылов М. П., Рикун А. Д.** Подходы к оптимизации размещения производительных сил при установлении водоохраных зон с учетом различных концепций охраны среды // Комплексное изучение и рациональное использование природных ресурсов: Тез. докл. Всесоюз. совещ.— Калинин, 1980.— С. 77—78.
- Кузин А. К., Станишевский С. А.** Оптимизация степени очистки сточных вод по речному бассейну // Водные ресурсы.— 1978.— № 2.— С. 143—147.
- Кузин А. К., Станишевский С. А., Осъмачко Л. П.** Определение оптимальной степени очистки городских сточных вод при рассмотрении в комплексе нескольких канализационных станций // Проблемы охраны и использования вод.— Вып. 2.— Харьков, 1973.— С. 179—187.
- Лазебник А. И., Цаллагова О. Н.** Метод оптимизации электрической сети с учетом многорежимности ее работы // Экономико-математические модели оптимизации развития энергосистем и их объединений.— Вып. 2.— М.: Наука, 1973.— С. 156—170.
- Лазебник А. И., Хранович И. Л., Цаллагова О. Н.** Обобщенные сепарабельные задачи и их приложения // Автоматика и телемеханика.— 1981.— № 8.— С. 107—118.
- Левитин Е. С.** О дифференцируемости по параметру оптимального значения параметрических задач математического программирования // Кибернетика.— 1976.— № 1.— С. 12—19.
- Мартин Д. Г.** Влияние металлов на морскую среду // Человек и биосфера.— Вып. 3.— М.: Изд-во МГУ, 1979.— С. 115—125.
- Марчюленене Д. П., Душаускаене-Дуж Р. Ф., Мотеюнене Э. Б. и др.** Кумуляции в пресноводных растениях // Гидробиол. журн.— 1978.— № 6. С. 42—48.
- Математическое моделирование и рациональное природопользование.**— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1979.— С. 40—56.
- Меньшиков И. С., Меньшикова О. Р.** Методы оптимального управления и дифференциальных игр в задачах управления каскадом водохранилищ.— М.: изд. ВЦ АН СССР, 1983.
- Методические основы оценки антропогенного влияния на качество поверхностных вод.**— Л.: Гидрометеоздат, 1981.
- Модели природных систем.**— Новосибирск: Наука, 1978.
- Модели управления природными ресурсами.**— М.: Наука, 1981.
- Мордухович Б. Ш.** О разностных аппроксимациях систем оптимального управления // Прикл. математика и механика.— 1978.— Т. 42, вып. 3.— С. 431—440.
- Морозов Н. П., Патин С. А.** Некоторые особенности распределения и миграции микроэлементов в экосистеме Азовского бассейна // Геохимия.— 1976.— № 12.— С. 1869—1876.
- Налимов В. В.** Диагноз — прогноз // Знание — сила.— 1972.— № 11.— С. 26—29.
- Нейлор Т.** Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем.— М.: Мир, 1975.
- Носов В. Н., Корсаков М. Н., Сироткина Н. В.** Влияние цинка и хрома на фитопланктон // Гидробиол. журн.— 1981.— № 4.— С. 83—87.

- Описание ИС «Азовское море» // Горстко А. Б. Математическое моделирование и проблемы использования водных ресурсов.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1976.— С. 43—59.
- Оптимальное управление природно-экономическими системами.— М.: Наука, 1980.
- Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1968.
- Основы прогнозирования качества поверхностных вод.— М.: Наука, 1982.
- Пакет прикладных программ «Линейное программирование в АСУ».— Калинин, 1978 (Руководство программиста/НПО «Центрпрограммсистем»; ч. 1—7).
- Патин С. А. Влияние загрязнения на биологические ресурсы и продуктивность Мирового океана.— М.: Пищ. пром-сть, 1979.
- Патин С. А., Морозов Н. П. Микроэлементы в морских организмах и экосистемах.— М.: Пищ. пром-сть, 1981.
- Планирование и прогнозирование природно-экономических систем.— Новосибирск: Наука, 1984.
- Понтунов В. Д. Численность, биомасса и продукция байкальской перпы // Круговорот вещества и энергии в озерных водоемах.— Новосибирск: Наука, 1975.— С. 325—329.
- Пойзнер В. И. Исследование эффективности управления водохозяйственными системами с использованием гидрологических прогнозов на имитационных моделях: Автореф. канд. дис.— Л., 1978.
- Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР.— 1967.— Т. 174, № 6.— С. 1278—1280; II.— Т. 175, № 4.— С. 764—766.
- Правила охраны поверхностных вод от загрязнения сточными водами.— М., 1975.
- Проектирование схем комплексного использования водных ресурсов.— М.: Энергия, 1966.
- Пряжинская В. Г., Рикун А. Д., Хранович И. Л. К задаче оптимального использования и охраны вод речного бассейна при контроле их качества // Контроль качества воды.— Харьков, 1982.— С. 20—28.
- Пряжинская В. Г., Хранович И. Л. Система оптимизационных моделей развития водного хозяйства региона // Водные ресурсы.— 1979.— № 3.— С. 20—27.
- Пряжинская В. Г., Хранович И. Л., Шнайрман В. М. Взаимодействие моделей при принятии решений о развитии водного хозяйства региона // Методология системных исследований.— М., 1982.— С. 73—84.
- Пряжинская В. Г., Шнайрман В. М., Письменский В. Р. Математическое моделирование регионального ирригационного водопотребления // Водные ресурсы.— 1981.— № 2.— С. 22—31.
- Рамад Ф. Основы прикладной экологии.— Л.: Гидрометеониздат, 1981.
- Раткович Д. Я., Прибальский В. Е., Матушанский М. Б. и др. Проблема Азовского моря // Водные ресурсы.— 1980.— № 4.— С. 19—39.
- Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря.— М.: Наука, 1981.
- Резниковский А. М., Рубинштейн М. И. Управление режимами водохранилищ гидроэлектростанций.— М.: Энергия, 1974.
- Рикун А. Д. Метод ветвей и границ для решения многоэкстремальных задач математического программирования: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1982.— 202 с.
- Рюмина Е. В. Экологический фактор в экономико-математических моделях.— М.: Наука, 1980.
- Салаяев Р. К. Поглощение веществ растительной клеткой.— М.: Наука, 1969.
- Самуэльсон П. Экономика.— М.: Прогресс, 1964.
- Сванидзе Г. Г. Математическое моделирование гидрологических рядов.— Л.: Гидрометеониздат, 1977.
- Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ.— М.: Наука, 1978.
- Система программирования НЕДИС.— Киев: изд. Ин-та кибернетики АН УССР, 1975.
- Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления.— М.: Наука, 1981.

- Сурков Ф. А., Бронфман А. М., Матышина В. П. и др. Моделирование абиотических факторов экосистемы Азовского моря // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки.— 1977.— № 2.— С. 21—49.
- Уиттекер Р. Сообщества и экосистемы.— М.: Прогресс, 1980.
- Фершт Э. Структура и механизм действия ферментов.— М.: Мир, 1980.
- Фрост Б. У. Моделирование воздействия изменений окружающей среды на динамику морских планктонных сообществ // Человек и биосфера.— Вып. 5.— М., Изд-во МГУ, 1980.— С. 102—115.
- Хранович И. Л. Поточные модели оптимального развития водохозяйственной системы // Научные основы рационального использования охраны и управления водными ресурсами.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— С. 60—69.
- Цветова Е. А. Математическое моделирование циркуляции вод озера // Течения в Байкале.— Новосибирск: Наука, 1977.— С. 63—81.
- Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб.— 1976.— Т. 99, № 3.— С. 394—402.
- Черников С. Н. Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.
- Шикломанов И. А. Антропогенные изменения водности рек.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
- Эколого-экономические системы: Модели, информация, эксперимент.— Новосибирск: Наука, 1987.
- Экспериментальные исследования на ИС «Азовское море», предусматривающие ее реализацию на ЭВМ ЕС-1030: Отчет № 1670.— Ростов-на-Дону, 1980.— Рукопись деп. в ВИНТИ 10.02.81, № 790384444 Деп.
- Яковлев Е. П. Машинная имитация.— М.: Наука, 1975.
- SEREX Annual Report to NSF/IDOE, 1975.
- Economic optimization and simulation techniques for management of regional water resource systems: Rep. 179 // Texas Water Development.— 1974.— V. 6.— P. 2—42.
- Hunt E. G., Bischoff K. B. Inimical effects on wildlife of periodic application of DDT to Clear Lake // Calif. Fish Game.— 1960.— V. 46, N 1.
- Jaworsky N. A., Weber W. T., Deiminger R. A. Optimal Reservoir Releases for Water Quality Control // J. of Sanitary Engineering Division, Proc. ASCE.— 1970.— V. 96, NSA3.— P. 727—742.
- Jørgensen S. E. Modelling the distribution and effect of heavy metals in an aquatic ecosystem // Ecol. Modelling.— 1979.— V. 6. P. 21—29.
- Metler M., Sedzikowsky T. Some criteria for selection between correction of the indicative flow and the waste treatment efficiency in a small river basin // Proc. of the Baden Symposium IIASA and IAHS, 1978.— P. 343—350.
- Mierle G., Stokes P. M. Heavy metal tolerance and metal accumulation by planktonic algae // Trace Substances Environ. Health — X.— Columbia, Mo.— 1976.— P. 113—122.
- Monod J. Recherches sur la Croissance des Cultures Bactériennes.— Paris, 1942.
- Pryajinskaya V. G., Chranovich I. L. Water Resources System Optimal Control: Urban, regional, national planning environmental aspects // Proc. IFAC.— 1978.— P. 139—146.
- Spector S. Handbook of Biological Data // Philadelphia, Pa: Saunders, 1956.
- Styphenson D. Optimal planning of Regional Waste Water treatment // Proc. of Baden Symposium IIASA and IAHS, 1978.
- Wurster C. F. DDT reduces photosynthesis by marine plankton // Science.— 1968.— V. 159, N 3822.— P. 1474—1475.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Проблема наблюдения и сбора данных о поведении крупных природных систем (Ю. А. Анохин, А. Х. Острогомилский)	5
§ 1. Общие принципы мониторинга	—
§ 2. Мониторинг озера Байкал	6
§ 3. Моделирование влияния загрязнений на окружающую среду в регионе оз. Байкал. Требования к информации	11
Глава 2. Математические методы комплексной оценки влияния хозяйственной деятельности на качество водных ресурсов в регионе и нормирования гидрохимических воздействий	19
§ 1. Модели водных ресурсов в системе эколого-экономических расчетов «Регион» (Л. Ю. Дамешек, Г. Н. Константинов)	20
§ 2. Комплексная оценка влияния хозяйственной деятельности на состояние водных ресурсов в регионе (В. И. Гурман, Л. Ю. Дамешек, Г. Н. Константинов)	36
§ 3. Задачи управления качеством водных ресурсов и нормирования антропогенных воздействий (Л. Ю. Дамешек, Г. Н. Константинов)	40
§ 4. Автоматизированная система обработки информации о состоянии водных ресурсов (О. Н. Пулявская, Т. В. Чемезова)	56
Глава 3. Моделирование взаимодействия загрязняющих веществ с гидробионтами	60
§ 1. Накопление загрязняющих веществ в гидробионтах (С. В. Бердников, Ю. А. Домбровский)	61
§ 2. Моделирование антропогенного влияния на фитоценоз водных экосистем (С. В. Бердников, Ю. А. Домбровский)	68
§ 3. Моделирование динамики загрязняющих веществ и управление процессом самоочищения в Азовском море (А. Б. Горстко, В. Ю. Запорожец, В. Г. Ильичев)	80
Глава 4. Централизованное и децентрализованное управление каскадом водохранилищ (А. Н. Ермолов, С. И. Меньшиков)	91
§ 1. Постановка задачи	—
§ 2. Централизованное управление	93
§ 3. Децентрализованное управление	94
§ 4. Сложение многогранников	97
§ 5. Вычисление множества $\mathcal{W}^{p**}(t_*)$	100
§ 6. Эквивалентность децентрализованных стратегий и стратегий-соглашений	102

§ 7. Сравнение централизованного и децентрализованного управления	105
§ 8. Случай двух плотин. Пример	107
§ 9. Построение стратегий-соглашений	108
Глава 5. Математические модели в региональном водохозяйственном планировании	110
§ 1. Системный анализ водохозяйственных проблем (<i>В. Г. Пряжинская</i>)	111
§ 2. Система моделей планирования водного хозяйства региона (<i>В. Г. Пряжинская, И. Л. Хранович, В. М. Шнайдман</i>)	116
§ 3. Модели планирования и управления ВХС с учетом качества водных ресурсов (<i>В. Г. Пряжинская, А. Д. Рикун, И. Л. Хранович</i>)	161
Заключение	186
Литература	191

**Юрий Алексеевич Анохин,
Александр Борисович Горетко,
Лариса Юрьевна Дамешек и др.**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ
КРУПНОМАСШТАБНЫМ
ВОДНЫМ ОБЪЕКТОМ**

Утверждено к печати
Восточно-Сибирским филиалом
СО АН СССР

Редактор издательства *Н. А. Лившиц*
Художник *С. М. Гудряев*
Художественный редактор *В. И. Шумаков*
Технический редактор *Л. П. Минеева*
Корректоры *Г. Д. Смоляк, С. А. Хабте*

ИБ № 30174

Сдано в набор 20.10.86. Подписано в печать 20.05.87.
МН-02039. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская
№ 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл.
печ. л. 12,5. Усл. кр.-отт. 12,8. Уч.-изд. л. 13. Тираж
1000 экз. Заказ № 404. Цена 2 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство
«Наука», Сибирское отделение. 630099, Новоси-
бирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Ново-
сибирск, 77, Станиславского, 25.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»

готовит к выпуску в 1988 году книгу

Приложение математических моделей к анализу эколого-экономических систем

Монография посвящена вопросам использования математического моделирования в исследованиях взаимодействия в природных и природно-экономических системах при решении проблем прогнозирования их развития, нормирования и рационального природопользования. Рассматриваются вопросы экспериментального и математического обеспечения процедур оптимального управления и нормирования антропогенного воздействия в региональной эколого-экономической модели.

Книгу можно заказать в магазинах «Академкнига». Заказы направляйте по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Морской проспект, 22.

2 p. 60 R.

4913