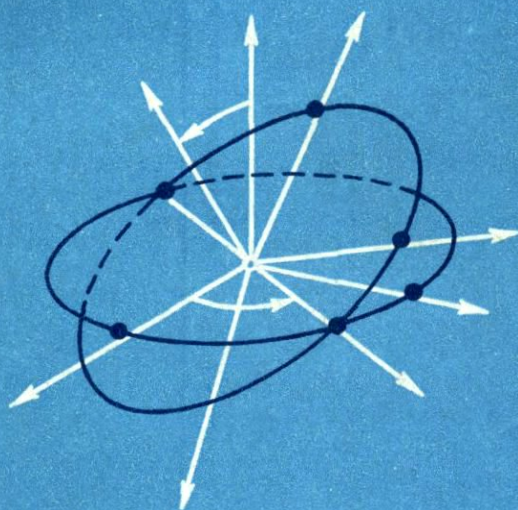


Ж.С. ЕРЖАНОВ  
А.А. КАЛЫБАЕВ

# Общая теория вращения ЗЕМЛИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО · НАУКА ·

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ СЕЙСМОЛОГИИ

Ж.С.ЕРЖАНОВ  
А.А.КАЛЫБАЕВ

# Общая теория вращения ЗЕМЛИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
МОСКВА 1984



4202

Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А. **Общая теория вращения Земли.**— М.: Наука, 1984.

Общая теория вращения Земли построена в неограниченной постановке задачи о ньютоновом взаимодействии Земли, рассматриваемой как абсолютно твердое тело, Луны, Солнца и больших планет, принятых за материальные точки. В основу теории положены качественные методы небесной механики и принято во внимание, во-первых, трехосность центрального эллипсоида инерции и динамическая неуравновешенность Земли, во-вторых, взаимосвязь поступательного и вращательного движений Земли, в-третьих, динамическая связь между общими пространственными движениями тел Солнечной системы в целом и специфические особенности движения Земли: вековое движение полюсов и замедление вращения Земли, периодические вариации элементов вращения Земли относительно центра масс, постоянные прецессии и нутации земной оси, механизмы векового удаления Луны от Земли и сближения орбит тел Солнечной системы с неизменяемой плоскостью Лапласа. Выводы теории имеют важное значение для постановки и решения прикладных задач небесной механики и астродинамики, научно-технических задач геодезии, геологии и геофизики. Ил. 17. Табл. 11. Библиогр. 129 назв.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

В. Г. ДЕМИН

## Предисловие

И. Ньютон, сформулировав в своем знаменитом трактате «Математические начала натуральной философии» законы механики и доказав их непротиворечивость, построил основы классической механики — науки о движении материальных тел в пространстве и во времени.

Одним из разделов классической механики является теория вращения Земли, где Земля рассматривается как абсолютно твердое тело. Теория возникла в рамках задачи трех тел при следующих исходных предпосылках. Во-первых, Земля вместе с центром масс совершает известное поступательное движение, во-вторых, вращение Земли относительно этого центра масс происходит под действием момента сил притяжения со стороны Луны и Солнца — материальных точек, совершающих также заранее известные движения. Такую постановку задачи теории вращения небесного тела, когда пренебрегают динамической взаимосвязью поступательного и вращательного движений тела, считая движение его центра масс заданным, принято называть *ограниченной*.

Вращение Земли с позиций классической механики было впервые рассмотрено И. Ньютоном, позднее — Ж. Д'Аламбером в ограниченной постановке задачи. Эти исследования характеризовали лишь качественную сторону прецессии и нутации земной оси, представляющих равномерную и периодическую составляющие сложного перемещения полюса мира вокруг полюса эклиптики, обусловленного притяжением экваториального избытка масс Земли Луной и Солнцем. Значительно более строгая и полная теория вращения Земли, отличающаяся как по содержанию, так и по математической форме от предшествующих, построена Л. Эйлером. В работе, опубликованной в 1769 г. под названием «Подробное исследование явлений, которые могут производиться в суточном вращении Земли силами небесных тел», помимо прецессии и нутации земной оси, им рассмотрено движение полюса Земли. Показана принципиальная возможность такого движения и для модели Земли, представленной слабо сжатым эллипсоидом, вычислен период колебания полюса — *свободный период Эйлера*. Основополагающее значение этой работы Эйлера было осознано лишь в конце прошлого столетия.

В настоящее время существует одна общепринятая теория вращения Земли, называемая *стандартной*. Ее аналитическую основу составляют известные в небесной механике уравнения Пуассона прецессии и нутации земной оси в поле ньютонова притяжения. Они являются следствием кинематических и динами-

ческих уравнений Эйлера и получены в ограниченной постановке задачи трех тел — динамически симметричной Земли и рассматриваемых как материальные точки Луны и Солнца. Как уже отмечено выше, теория вращения Земли в указанной постановке принадлежит Эйлеру, а дальнейшее ее совершенствование связано лишь с количественными уточнениями. В последние годы японским ученым Киношитой построена численно-аналитическая модификация в той же ограниченной постановке задачи трех тел, учитывающей динамическую асимметрию Земли и структуру ее гравитационного поля.

Результаты наблюдений с поверхности Земли положений и скоростей небесных тел нуждаются в редукциях — приведении к единой системе отсчета, соответствующей фиксированному моменту времени — какой-либо начальной эпохе. Редукционные вычисления определяют поправки к наблюдениям, учитывающие прежде всего прецессию и нутацию земной оси. Стандартная теория вращения Земли достаточно хорошо отражает действительный характер ее прецессионного и нутационного движений, именно поэтому она утверждена Международным астрономическим союзом и является основой для редукционных вычислений в астрономических ежегодниках.

Однако стандартная теория, базируясь на исходных упрощениях и на численном интегрировании уравнений движения, не позволяет выявить ряд существенных особенностей вращения Земли, таких, как вековое движение полюсов Земли, вековое изменение угловой скорости ее вращения, спектры периодических вариаций элементов ее вращательного движения. Она не позволяет также установить динамическую взаимосвязь вращения Земли с поступательными движениями как самой Земли, так и других планет Солнечной системы. В связи с этим возникает необходимость построения общей качественной теории вращательного движения Земли в рамках модели Солнечной системы — взаимного притяжения по закону Ньютона Земли как абсолютно твердого тела, Луны, Солнца и больших планет как материальных точек.

Настоящая книга посвящена построению и анализу общей теории вращения динамически асимметричной и динамически неуравновешенной Земли в неограниченной постановке задачи  $n$  тел, учитывающей взаимосвязь их поступательных и вращательных движений. Такой подход оказался возможным в связи с развитием качественных методов небесной механики, разработанных для исследования метрических свойств фазовых движений, в частности КАМ-теории\*. Немалую роль сыграло также изучение особенностей структуры геопотенциала — гравитационного поля Земли по спутниковым данным. Изучение геопотенциала получило бурное развитие после запуска 4 октября 1957 г. первого советского искусственного спутника Земли.

\* Теория получила обозначение от первых букв фамилий ее авторов — А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и М. Мозера.

Общая теория вращения Земли позволяет выявить эволюцию механической модели Солнечной системы вообще и специфические особенности поступательно-вращательного движения Земли в частности для постановки прикладных задач небесной механики и астродинамики. Помимо прямого назначения, ее выводы играют важную роль в решении ряда научно-технических задач геодезии. Так, механизмы вековых вариаций элементов вращательного движения и динамической неуравновешенности Земли дают возможность обосновать систему редуцирования данных опорной геодезической сети и геодинамических полигонов о фигуре Земли и современных горизонтальных движениях литосферы и земной коры.

Общая теория вращения Земли имеет первостепенное значение в геологии и геофизике для обоснования физических механизмов тектонических движений, составляющих ведущее звено эволюции геологических процессов в истории Земли. Ибо существующие концепции глобальных движений, расширяющейся Земли, фиксизма и тектоники плит имеют сугубо кинематический характер — они не учитывают движущие силы.

Различные вопросы этого аспекта исследований, лежащих в основе книги, были поставлены перед авторами выдающимся ученым академиком А. Л. Яншиным. Сюда относятся разнообразные задачи о вековом движении земных полюсов, о механизме динамической неуравновешенности Земли и роли геофизического массообмена в прошлом, о связи главнейших черт строения литосферы со структурой геопотенциала, о степени обусловленности геологических процессов силами взаимодействия Земли с телами Солнечной системы. По мнению А. Л. Яншина, общая теория вращения Земли должна быть единой физико-математической основой исследования не только астрономических, но и геологических и геофизических процессов.

В первой вводной главе приводятся сведения о теории вращения Земли. В ней дана кинематическая картина вращения Земли относительно центра масс и сформулированы задачи общей теории вращения Земли, учитывающей, во-первых, динамическую асимметричность и неуравновешенность Земли, во-вторых, динамическую связь между поступательным движением и вращением Земли, в-третьих, динамическую связь между общими пространственными движениями Земли, Луны, Солнца и больших планет Солнечной системы.

Теория динамических систем в метрических пространствах, ведущая свое начало от известных работ А. Пуанкаре и Дж. Биркгофа, нашла плодотворное применение в небесной механике, и особенно в задаче трех тел. Но до настоящего времени эта теория не была использована в теории вращения Земли, впрочем, как и КАМ-теория.

Во второй главе даны основы теории динамических систем в метрических пространствах. После общих понятий приведены характеристики различных видов устойчивости движения. Помимо

этого, в главе рассматриваются общие свойства каждого вида движений и исследуется возможность распространения некоторых свойств движения, имевших место в прошлом, на будущее.

Третья глава посвящена устойчивости движения планетного варианта задачи  $n$  тел. В ней выявлены условия, при которых движение Солнечной системы описывается динамической системой (в смысле качественной теории дифференциальных уравнений). Установлен критерий устойчивости по Лагранжу и сформулировано условие рекуррентности движения. Наряду с этим рассматриваются проблемы резонанса движений планет Солнечной системы и минимальности по Биркгофу кинетической энергии движения тел Солнечной системы.

Четвертая глава содержит непосредственное изложение общей теории вращения Земли. Оно основано на предпосылках и результатах, изложенных в предшествующих главах. В главе получено структурное решение задачи о движении модели Солнечной системы, исследовано предельное множество будущих состояний вращения Земли, а также получены средние значения элементов вращения Земли и установлен выход на предельный режим вращения, при котором порождаются вековые вариации элементов вращательного движения Земли. В этой же главе рассматривается механизм векового удаления Луны от Земли, а также свойства движения центров масс планет Солнечной системы вблизи неизменяемой плоскости Лапласа.

В пятой главе проведен численный анализ полученных результатов, основанный на современных моделях геопотенциала. Найдены соответствующие параметры векового движения полюса Земли, постоянные прецессии и нутации земной оси. Определены значения главных центральных моментов инерции Земли и расположение центрального эллипсоида ее инерции.

В Приложение вынесен весь вспомогательный материал, включающий основные понятия и краткие сведения из математического анализа, КАМ-теории и теории ньютоновского потенциала.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору физико-математических наук В. Г. Демину за обсуждение книги и отдельных ее разделов, за ценные замечания и пожелания.

## Основные сокращения и обозначения

$\emptyset$  — пустое множество

$x \in X$  —  $x$  элементов множества  $X$

$x \notin X$  —  $x$  не является элементом множества  $X$

$\bar{X}$  — замыкание множества  $X$

$\{x \in X | P(x)\}$  — множество всех элементов из  $X$ , обладающих свойством  $P$

$\sigma X$  — мера измеримого множества  $X$

$X \subset Y$  — множество  $X$  составляет часть или совпадает с множеством  $Y$

$X \cup Y$  — объединение множеств  $X$  и  $Y$

$X \cap Y$  — пересечение множеств  $X$  и  $Y$

$X \setminus Y$  — разность множеств  $X$  и  $Y$

$X \Delta Y$  — симметрическая разность множеств  $X$  и  $Y$

$S(\varepsilon, x)$  ( $S[\varepsilon, x]$ ) — открытый (замкнутый) шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $x$

$B(X, \varepsilon)$  ( $B[X, \varepsilon]$ ) — открытая (замкнутая)  $\varepsilon$ -окрестность множества  $X$

$X \times Y$  — декартово произведение множеств  $X$  и  $Y$

$f: X \rightarrow Y$  — отображение множества  $X$  в множество  $Y$

$f(X)$  — образ множества  $X$  при отображении  $f$

$C(X, Y)$  — множество всех непрерывных отображений множества  $X$  в множество  $Y$

$R_1$  — действительная ось

$R_1^+$  — неотрицательная часть действительной оси

$R_1^-$  — неположительная часть действительной оси

$\|x\|$  — норма элемента  $x$  нормированного пространства  $X$

$C^n(R_1, M)$  — множество непрерывных вместе с  $n$ -й производной действительных функций на  $R_1$  с значениями в метрическом пространстве  $M$

$R_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство

$xu$  — скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$

$[xy]$  — векторное произведение векторов  $x$  и  $y$

$\rho(x, y)$  — расстояние между элементами  $x$  и  $y$  метрического пространства  $M$

$g(t, \cdot)$  — динамическая система

$X_t = g(t, X)$  — образ множества  $X$  относительно динамической системы

$g(t, q)$  — движение

$g(R_1, q)$  — траектория

$g(R_1^-, q)$  ( $g(R_1^+, q)$ ) — отрицательная (положительная) полутраектория

$g(a \leq t \leq b, q)$  — отрезок траектории временной длины

$W(\alpha, g, q)$  ( $W(\omega, g, q)$  или  $W(\lambda, g, q)$ ) — множество  $\alpha$ -предельных ( $\omega$ - или  $\lambda$ -предельных) точек движения  $g(t, q)$

$N(\alpha, g, q)$  ( $N(\omega, g, q)$  или  $N(\lambda, g, q)$ ) — множество собственных  $\alpha$ -последовательностей ( $\omega$ - или  $\lambda$ -последовательностей) движения  $g(t, q)$

$V(g, q)$  — множество сдвигов движения  $g(t, q)$

$V^-(g, q)$  ( $V^+(g, q)$ ) — множество отрицательных (положительных) сдвигов движения  $g(t, q)$

$\mathcal{N}(\alpha, f)$  ( $\mathcal{N}(\omega, f)$  или  $\mathcal{N}(\lambda, f)$ ) — множество собственных  $\alpha$ -последовательностей ( $\omega$ - или  $\lambda$ -последовательностей) функции  $f \in C(R_1, M)$

$\mathcal{H}_f$  — множество направляющих последовательностей функции  $f \in C(R_1, M)$

$\mathcal{H}_f^-$  ( $\mathcal{H}_f^+$ ) — множество отрицательных (положительных) направляющих последовательностей функции  $f \in C(R_1, M)$

Устойчиво  $L$  — устойчиво по Лагранжу,  
 Устойчиво  $L^+$  ( $L^-$ ) — положительно (отрицательно) устойчиво по Лагранжу  
 Устойчиво  $\Pi$  — устойчиво по Пуассону  
 Устойчиво  $\Pi^+$  ( $\Pi^-$ ) — положительно (отрицательно) устойчиво по Пуассону  
 Возвращаемо  $B$  — возвращаемо по Биркгофу  
 Возвращаемо  $B^+$  ( $B^-$ ) — положительно (отрицат.) возвращаемо по Биркгофу  
 Сравнимо  $R^+$  ( $R^-$ ) — положительно (отрицат.) сравнимо по возвращаемости  
 Сравнимо  $R$  — сравнимо по возвращаемости  
 Сравнимо  $RR$  — равномерно сравнимо по возвращаемости  
 $O^*\xi\eta\zeta$  — инерциальная декартова прямоугольная система координат  
 $O^*$  — центр масс Солнечной системы  
 $O^*X^*Y^*Z^*$  — инерциальная барицентрическая декартова прямоугольная система координат  
 $O_1X'Y'Z'$  — гелиоцентрическая кенигова декартова прямоугольная система координат  
 $OXYZ$  — геоцентрическая кенигова декартова прямоугольная система координат  
 $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  — геоцентрическая квазикенигова декартова прямоугольная система координат  
 $Oxyz$  — система главных центральных осей инерции Земли  
 $Or\lambda\chi$  — геоцентрическая сферическая система координат, жестко связанная с Землей  
 $\psi, \varphi, \theta$  — углы Эйлера (см. далее рис. 1.4)  
 $K$  — кинетический момент вращения Земли относительно центра масс  
 $K, \psi', \theta', \bar{\psi}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}$  — переменные Андуайе  
 $M_i$  — масса тела  $O_i$  Солнечной системы  
 $r_{ij}$  — расстояние между телами  $O_i$  и  $O_j$  Солнечной системы  
 $I_i$  — количество движения тела  $M_i$   
 $S_i$  — главный вектор приложенных к телу  $M_i$  внешних сил  
 $Q$  — главный момент относительно центра масс Земли всех приложенных к ней внешних сил  
 $G$  — постоянная тяготения  
 $k^2$  — постоянная Гаусса  
 $\kappa$  — вектор Лапласа  
 $c_1, c_2, c_3$  — проекция вектора Лапласа на координатные оси системы  $O^*X^*Y^*Z^*$   
 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  — постоянные площадей  
 $h$  — постоянная энергии  
 $\omega$  — угловая скорость вращения Земли  
 $H$  — гамильтониан  
 $T$  — кинетическая энергия  
 $I$  — полярный момент инерции Солнечной системы  
 $A', B', C'$  — осевые моменты инерции Земли  
 $D, E, F$  — центробежные моменты инерции Земли  
 $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции Земли  
 $p, q, r$  — проекции вектора  $\omega$  угловой скорости Земли на главные оси инерции  
 $K_x, K_y, K_z$  — проекции вектора  $K$  кинетического момента вращения Земли относительно ее центра масс на главные оси инерции  
 $\mathcal{E}\{f\}$  — интегральное среднее значение функции  $f$

## Введение

Здесь приводятся краткие сведения о возникновении и становлении теории вращения Земли относительно ее центра масс как проблемы теоретической и небесной механики. Они включают данные и о специальных астрономических службах систематического наблюдения за элементами вращательного движения Земли, таких, как Международная служба движения полюсов, Международное бюро времени и др. Вводятся основные системы отсчета и переменные, определяющие пространственное положение планеты. Рассматривается кинематическая картина невозмущенного вращения Земли в углах Эйлера и в переменных Андуайе. Интерпретация такого движения в переменных Андуайе, помимо наглядности, обнаруживает простоту записи и удобства решения задачи. В заключение главы ставятся задачи общей теории вращения Земли и соответствующие им математические формализации.

### 1. Краткие исторические сведения

Вращательное движение Земли характеризуется следующими основными элементами: прецессией и нутацией земной оси, движением полюса Земли и изменением продолжительности звездных суток.

Прецессия земной оси, обуславливающая наблюдаемое монотонное возрастание эклиптических долгот звезд со скоростью около  $50''$  за столетие, была открыта Гиппархом более 2000 лет назад [66, 118]. Динамическое объяснение прецессии земной оси впервые дано И. Ньютоном в его работе «Математические начала натуральной философии» (см. также [50, 128]).

Нутация земной оси обуславливается изменением угла наклона плоскости земного экватора к плоскости эклиптики. Она была открыта Э. Брадлеем в 1748 г. [118, 128]. Через год Д'Аламбер [92] дал объяснение этому явлению, основанное на динамической теории вращения Земли. Он изложил теорию прецессии и нутации земной оси, впервые указав условия равновесия твердого тела в их аналитической форме. Последние с учетом динамического принципа, носящего ныне имя Д'Аламбера, позволили ему записать уравнения вращательного движения Земли. Однако эти уравнения сложны по форме и неудобны для анализа их решения, более того, непригодны для исследования других элементов осевого вращения Земли.

Теория прецессии и нутации земной оси, существенно превосходящая теорию Д'Аламбера по математической форме, построе-

на Л. Эйлером [86, 87]. Теория имела также приближенный характер, но вполне согласующийся с данными астрономических наблюдений того времени. Она возникла в связи с решением задачи о причинах предварения равноденствий и впоследствии легла в основу общей теории вращательного движения твердого тела с одной неподвижной точкой, построенной Эйлером в петербургский период его научной деятельности и опубликованной в двухтомном трактате [96].

Теория прецессии и нутации оси вращения Земли относительно центра масс в ее окончательной форме, излагаемой и поныне, принадлежит Л. Эйлеру. Она опубликована в 1769 г. под названием «Подробное исследование явлений, которые могут производиться в суточном вращении Земли силами небесных тел» [86]. В этой работе, помимо прецессии и нутации земной оси, Эйлер рассматривает движения полюса Земли и устанавливает причину *свободного периода*.

Теория прецессии и нутации получила дальнейшее развитие в конце прошлого века в работах П. Оппольдера, Ф. Тиссерана, Г. Хилла, С. Ньюкома и др. авторов (см. [35, 47, 70]). Оно заключалось в уточнении и учете последующих членов тригонометрических рядов, представляющих собой правые части дифференциальных уравнений для углов прецессии и нутации.

Согласно Эйлеру [96], в выражениях проекций действующих на Землю моментов сил на главные оси инерции Земли главные члены разложены в тригонометрические ряды имеют вид

$$\begin{aligned} Q_x &= -3Ga \left( \frac{M_1}{s_1^3} \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \frac{M_2}{s_2^3} \cos \beta_2 \cos \gamma_2 \right), \\ Q_y &= -3Gb \left( \frac{M_1}{s_1^3} \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \frac{M_2}{s_2^3} \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 \right), \\ Q_z &= -3Gc \left( \frac{M_1}{s_1^3} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \frac{M_2}{s_2^3} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \right), \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — массы Луны и Солнца;  $s_1$  и  $s_2$  — модули радиусов-векторов Луны и Солнца;  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \beta_1$ ,  $\cos \gamma_1$  и  $\cos \alpha_2$ ,  $\cos \beta_2$ ,  $\cos \gamma_2$  — их направляющие косинусы.

Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  выражаются через главные центральные моменты инерции Земли, причем принято  $a=b$ ,  $c=0$ . Величины  $Q_x$ ,  $Q_y$  и  $Q_z$  вычислялись как проекции момента сил притяжения Земли материальными точками — Луной и Солнцем — с постоянными по величине радиусами-векторами  $s_1$  и  $s_2$ . Причем свою систему динамических и кинематических уравнений Л. Эйлер подвергал приближенному интегрированию, рассматривая величину  $a$  в качестве малого параметра. Она действительно мала, ибо  $a = (C-A)/C$ , где  $A$  и  $C$  — осевой и экваториальный моменты инерции Земли.

При этих упрощениях переход от динамических и кинематических уравнений Эйлера к уравнениям прецессии и нутации

земной оси привел к окончательной форме известных уравнений Пуассона [118]. Они положены в основу теории вращения Земли относительно центра масс, опубликованной Э. Вулардом [128] и принятой Международным астрономическим союзом (МАС) в качестве *стандартной теории*.

Дальнейшее совершенствование стандартной теории с учетом современных представлений о гравитационном поле Земли связано с работами Х. Киношита, опубликованными в период с 1969—1977 гг. Киношита предложил теорию вращения Земли относительно центра масс, основанную на дифференциальных уравнениях вращения Земли в переменных Андуйе [90]. При выводе правых частей этих уравнений он исходил из модели геопотенциала SE-3 серии «Стандартная Земля». Как и предшествующая, эта теория является теорией прецессии и нутации оси вращения Земли относительно центра масс.

Отметим, что как стандартная теория, так и ее модификации остаются ограниченными по постановке, методам анализа и решения.

Вращательное движение Земли, помимо прецессии и нутации ее оси, порождает движение полюсов и *непостоянство* продолжительности звездных суток. Прошло около века со времени предсказания Л. Эйлером движения полюсов Земли, до того, как в 1842 г. Х. Петерс и Ф. Бессель провели первые астрономические наблюдения за этим движением. Но результаты были разочаровывающими — установлены малые вариации широт в пределах точности измерения. Изменяемость широт впервые надежно определена Ф. Кюстнером в 1884 г. [46].

Открытие *свободного периода Эйлера* принадлежит С. Чандлеру, проводившему специальные наблюдения за движением полюса. В результате было установлено движение полюса Земли с периодом в 405—430 средних солнечных суток, получившее название *чандлеровского* [110].

Интерес к этим открытиям привел к созданию Международной службы широты (МСШ), имеющей пять станций, расположенных на широте  $39^{\circ}08'$  с. ш., переименованную впоследствии в Международную службу движения полюсов (МСДП). В 1920 г. в Париже было создано Международное бюро времени (МБВ) с восемью обсерваториями. Эти две международные организации, помимо своих основных программ, имеют общую программу наблюдений, подчиненную целям выявления вековых вариаций движения полюса и продолжительности звездных суток — суточного вращения Земли.

*Вековое движение полюса Земли* представляет собой смещение среднего полюса эпохи относительно среднего положения полюса за период 1900—1905 гг., названного условным международным началом (УМН). При этом УМН определяется как точка, равноудаленная от зенитов упомянутых пяти станций МСДП [89]. Однако Е. П. Федоров [79] показал, что такой точки вообще не существует. Им же было показано, что УМН удовлетворяет

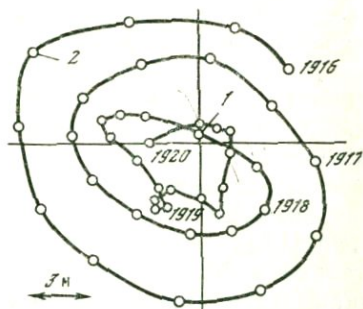
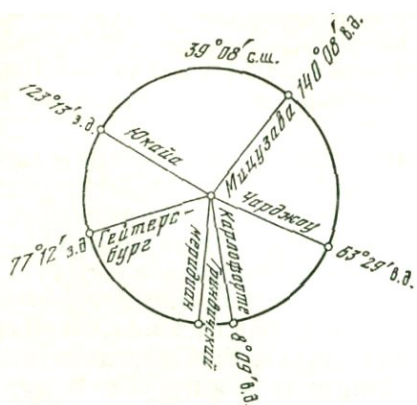


Рис. 1.1. Схема расположения станций МСДП

Рис. 1.2. Траектория движения полюса Земли по данным станций МСДП с 1916—1920 гг.

1 — УМН, 2 — СПЭ

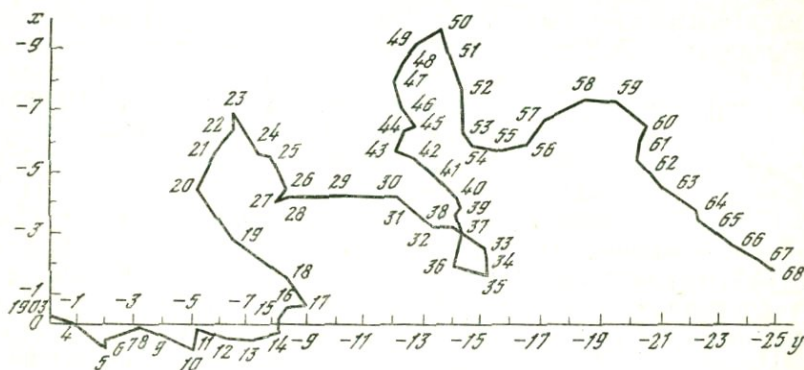


Рис. 1.3. Траектория векового движения полюса Земли по данным станций МСДП с 1903—1968 гг.

Шкалы  $x$  и  $y$  соответствуют направлениям Гринвичского меридиана и Запада соответственно. Цифры на кривой соответствуют двум последним цифрам годов

УСЛОВИЯМ МИНИМАЛЬНОСТИ

$$\sum_{i=1}^6 [(\psi_{i0} - \varphi_i) + (x_c \cos \lambda_i + y_c \sin \lambda_i)]^2 = \min, \quad (1.1.2)$$

где  $x_c$  и  $y_c$  — координаты мгновенного полюса Земли,  $\psi_{i0}$  — начальное значение средней широты, а  $\varphi_i$  — значение мгновенной широты  $i$ -й станции МСДП (рис. 1.1).

Если в (1.1.2) величины  $\psi_{i0}$  заменить средними значениями широт эпохи наблюдений, то полученное соотношение будет

определять *средний полюс эпохи* (СПЭ), или *средний полюс Орлова* (рис. 1.2). УМН и СПЭ не совпадают, и это относительное изменение (СПЭ) называют *вековым движением полюса Земли*. Оно связано с медленным вековым изменением широт станций МСДП (рис. 1.3).

Неравномерность изменения продолжительности суток, определяемого сидерическим периодом вращения Земли, устанавливается на базе равномерной шкалы абсолютного времени.

С введением шкалы атомного времени стало возможным детальное изучение неравномерности вращения Земли и выделение ее основных составляющих. Оказалось, что эта неравномерность вращения Земли относительно центра масс состоит из периодического колебания, условно подразделяемого на долгопериодические, сезонные и короткопериодические вариации, из нерегулярного изменения, содержащего скачкообразное изменение скорости вращения, и, наконец, из непериодического изменения с вековым замедлением скорости.

## 2. Кинематика вращательного движения Земли в углах Эйлера и переменных Андуйе

Обозначим через  $O^*\xi\eta\zeta$  правую декартову прямоугольную инерциальную систему координат. Выберем систему *Охуз* главных центральных осей инерции, невращающуюся (кенигову) систему  $OXYZ$  и промежуточную подвижную (квазикенигову) систему  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  с общим началом  $O$  в центре масс Земли. Координатные оси кениговой системы  $OXYZ$  направим параллельно одноименным координатным осям инерциальной системы  $O^*\xi\eta\zeta$ .

Координатную ось  $O\bar{Z}$  квазикениговой системы направим по вектору  $\mathbf{K}$  кинетического момента вращения Земли относительно ее центра масс. Пусть положительная координатная ось  $O\bar{X}$  ортогональна плоскости осей  $OZ$  и  $O\bar{Z}$  и совмещена с положительным направлением вращения от оси  $O\bar{Z}$  к  $OZ$ . При этом положительная координатная ось  $O\bar{Y}$  дополняет оси  $O\bar{Z}$  и  $O\bar{X}$  до правой системы.

Взаимное расположение систем координат  $OXYZ$ ,  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  и *Охуз* зададим при помощи углов Эйлера

$$\psi = (OX, L), \quad \varphi = (L, Ox), \quad \theta = (OZ, Oz), \quad (1.2.1)$$

$$\bar{\psi} = (O\bar{X}, L), \quad \bar{\varphi} = (\bar{L}, Ox), \quad \bar{\theta} = (O\bar{Z}, Oz), \quad (1.2.2)$$

$$\psi' = (OX, R), \quad \varphi' = (R, O\bar{X}) = 0, \quad \theta' = (OZ, O\bar{Z}), \quad (1.2.3)$$

где прямые  $L$ ,  $\bar{L}$ ,  $R$ , представляющие собой линии пересечения соответствующих пар координатных плоскостей  $Oxy$ ,  $OXY$ ;  $Oxy$ ,  $O\bar{X}\bar{Y}$ ;  $O\bar{X}\bar{Y}$ ,  $OXY$ , называются *линиями узлов* [6, 26].

Углы Эйлера (1.2.1) определяют положение Земли, рассматриваемой как абсолютно твердое тело относительно системы отсчета  $O^*\xi\eta\zeta$  с неизменными по направлению координатными осями в неподвижном пространстве (рис. 1.4, а). Углы Эйлера  $\psi$ ,  $\varphi$

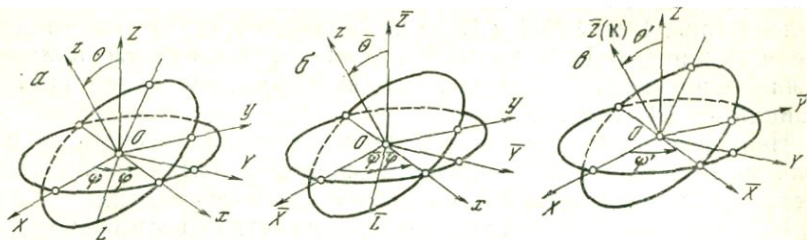
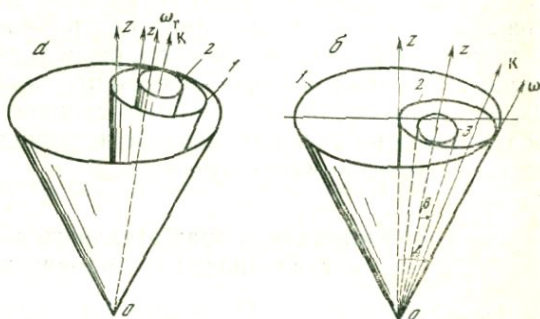


Рис. 1.4. Расположение систем координат  $OXYZ$  и  $Oxyz$  (а),  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  и  $Oxyz$  (б) и  $OXYZ$  и  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  (в)

Рис. 1.5. Геометрическая интерпретация вращения Земли по Пуансо (а) и в переменных Андуайе (б)

а: 1, 2 — неподвижный и подвижный аксонды соответственно; б: 1—3 — неподвижный, промежуточный и подвижный аксонды соответственно



и  $\theta$  соответственно называются углами *прецессии*, *собственного вращения* и *нутаии* Земли.

Углы (1.2.2) и (1.2.3) представляют собой угловые переменные Андуайе [90] (см. рис. 1.4, б, в), введенные А. Депри [21], В. В. Белаецким [11, 12] и Ф. Л. Черноусько [83].

Обозначим через  $\omega$  вектор угловой скорости вращения Земли. Пусть  $p, q, r; \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  и  $p', q', r'$  — проекции вектора  $\omega$  на координатные оси систем  $Oxyz, O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  и  $OXYZ$  соответственно.

Введем орты  $e_x, e_y, e_z$  положительных направлений осей системы  $Oxyz$ ,  $e_x, e_y, e_z$  — орты кениговой системы  $OXYZ$ , а  $e, l$  — орты линий узлов  $L$  и  $R$  соответственно.

Дадим следующие определения. Ось  $Oz$  — ось *собственного вращения* и в соответствии с этим угловая скорость  $\psi e_z$  — *угловая скорость собственного вращения* Земли. Ось  $OZ$  — ось *прецессии*, а угловая скорость  $\varphi e_z$  — *угловая скорость прецессии* Земли. Линия узлов  $L$  — ось *нутаии* и угловая скорость  $\theta e$  — *угловая скорость нутаии* Земли. Вектор  $\omega$  можно представить в виде

$$\omega = \psi e_z + \varphi e_z + \theta e. \quad (1.2.4)$$

Прецессию произвольного твердого тела называют *прямой*, если угол между векторами его угловых скоростей прецессии и собственного вращения острый, *обратной* — если этот угол тупой. Прецессия земной оси является обратной [6, 50].

Геометрически вращение Земли относительно центра масс сводится к качению без скольжения конуса с осью  $Oz$  по конусу с осью  $OZ$  (рис. 1.5, а). Угол  $\theta$  между осями упомянутых конусов, называемых аксоидами, изменяется со скоростью  $\dot{\theta}e$ . Конус, осью которого является ось прецессии, называется *конусом прецессии*. Конус прецессии остается невращающимся, поэтому его называют также *неподвижным конусом*. Конус с осью  $Oz$  вращается вокруг своей оси и катится по конусу прецессии, касаясь его по некоторой линии, показанной штрихом. Линия касания имеет направляющий вектор  $\omega_r$ , равный сумме угловых скоростей прецессии и собственного вращения Земли:

$$\omega_r = \dot{\psi} e_z + \dot{\varphi} e_z.$$

Отметим, что при этом подвижный конус располагается внутри конуса прецессии.

Углы при вершинах  $\alpha$  и  $\beta$  конуса прецессии и подвижного конуса (см. рис. 1.5, б) определяются согласно уравнениям (1.2.4) по формулам

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{e_z \cdot \omega_r}{\omega_r}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{e_z \cdot \omega_r}{\omega_r}. \quad (1.2.5)$$

Пусть  $k_x, k_y, k_z$  — орты координатных осей квазикениговой системы  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  и  $k$  — орт положительного направления линии узлов  $\bar{L}$ . Тогда вектор  $\omega$  угловой скорости вращения Земли можно представить суммой

$$\omega = \dot{\psi} k_z + \dot{\varphi} e_z + \dot{\theta} k + \dot{\psi}' e_z + \dot{\theta} l. \quad (1.2.6)$$

Обозначим

$$\omega_1 = \dot{\psi} k_z + \dot{\varphi} e_z + \dot{\theta} k, \quad (1.2.7)$$

$$\omega_2 = \dot{\psi}' e_z + \dot{\psi}' k_z + \dot{\theta} l, \quad (1.2.8)$$

где в силу выбора системы  $OXYZ$  величина  $\dot{\psi}' = 0$ .

Сначала рассмотрим вращение Земли с угловой скоростью  $\omega_1$  (1.2.7). Геометрически оно сводится к качению без скольжения внутреннего подвижного конуса, вращающегося вокруг оси  $Oz$  со скоростью  $\dot{\varphi} e_z$ , по конусу прецессии — со скоростью  $\dot{\psi} k_z$ . При этом конус прецессии имеет своей осью координатную ось  $O\bar{Z}$ , иначе говоря, ось, определяемую вектором  $K$ . Угол  $\dot{\theta}$  между осями внутреннего подвижного конуса и конуса прецессии претерпевает изменение со скоростью  $\dot{\theta} l$ . Углы при вершине  $\alpha_1, \beta_1$  упомянутых конусов определяются из равенств

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{k_z \cdot \omega_{r1}}{\omega_{r1}}, \quad \cos \frac{\beta_1}{2} = \frac{e_z \cdot \omega_{r1}}{\omega_{r1}}, \quad (1.2.9)$$

$$\omega_{r1} = \dot{\psi} k_z + \dot{\varphi} e_z.$$

Очевидно, вектор (1.2.7) прецессирует с угловой скоростью  $\dot{\psi}'\mathbf{e}_z$ . Пусть при этом угол  $\theta'$  между  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{k}_z$  изменяется со скоростью  $\dot{\theta}'$ . Такое движение осуществляется как качение без скольжения подвижного конуса с осью  $Oz$  по конусу прецессии с осью, коллинеарной  $\omega_1$ . Кинематическая картина этого движения приведена на рис. 1.5, б.

Фактическое вращение Земли представляет собой движение по Эйлеру—Пуансо, возмущаемое силами ньютоновского притяжения Земли Луной, Солнцем и большими планетами Солнечной системы. Невозмущенное вращение Земли относительно ее центра масс по Эйлеру—Пуансо описывается как системой кинематических и динамических уравнений Эйлера, так и дифференциальными уравнениями в переменных Андуайе [93, 94].

Запишем дифференциальные уравнения вращательного движения Земли по Эйлеру—Пуансо:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0, \quad C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0, \quad (1.2.10)$$

$$p = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \quad (1.2.11)$$

где  $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции Земли, причем  $A < B < C$ .

Уравнения (1.2.10) и (1.2.11) соответственно называются *динамическими* и *кинематическими уравнениями Эйлера*.

Допустим, что система уравнений (1.2.10) имеет следующие начальные условия:

$$p(t_0) = p_0, \quad q(t_0) = q_0, \quad r(t_0) = r_0, \quad (1.2.12)$$

где  $t = t_0$  — начальный момент времени.

Дифференциальные уравнения (1.2.10) имеют два первых интеграла

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \quad (1.2.13)$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2, \quad (1.2.14)$$

где  $K$  — модуль вектора  $\mathbf{K}$ ,  $h$  — постоянная энергии.

Значения констант  $h$  и  $K$  определяются начальными условиями (1.2.12).

Интеграл (1.2.13) называется *интегралом энергии*, причем его левая часть равна удвоенной кинетической энергии вращения Земли, (1.2.14) — *интеграл площадей*.

Введем новые постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  согласно равенствам

$$\lambda = \sqrt{\frac{K^2 - Ah}{B(B-A)}}, \quad \mu = \sqrt{q_0^2 + \frac{A(C-A)}{B(C-B)}p_0^2} \quad (1.2.15)$$

и определим их значения, соответствующие начальным условиям (1.2.12):

$$\lambda = \sqrt{q_0^2 + \frac{C(C-A)}{B(B-A)} r_0^2}, \quad \mu = \sqrt{q_0^2 + \frac{A(C-A)}{B(C-B)} r_0^2}. \quad (1.2.16)$$

С учетом обозначений (1.2.15) рассмотрим выражения (1.2.13), (1.2.14) как систему относительно величин  $p$  и  $r$ :

$$p = \sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)} (\mu^2 - q^2)}, \quad q = \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)} (\lambda^2 - q^2)}. \quad (1.2.17)$$

Подставив соотношения (1.2.17) во второе уравнение системы (1.2.10), получим дифференциальное уравнение относительно компоненты  $q$  вектора  $\omega$

$$dq/dt = \sqrt{(B-A)(C-B)/AC} \sqrt{(\lambda^2 - q^2)(\mu^2 - q^2)}. \quad (1.2.18)$$

Соотношение (1.2.18) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и интегрируя его, найдем

$$at + b = \int_0^q ds \sqrt{(\lambda^2 - s^2)(\mu^2 - s^2)}, \quad (1.2.19)$$

где  $b$  — постоянная интегрирования и

$$a = \sqrt{(B-A)(C-B)/AC}. \quad (1.2.20)$$

Положим  $\bar{\lambda} = \mu\lambda^{-1}$  и  $q = \mu \operatorname{sn} v$ . Отметим, что значения (1.2.16) при начальных условиях (1.2.12) удовлетворяют неравенству  $\lambda > \mu$ . Тогда правая часть выражения (1.2.19) сведется к эллиптическому интегралу первого рода

$$at + b = \int_0^v dv \sqrt{1 - \bar{\lambda}^2 \operatorname{sn}^2 v}. \quad (1.2.21)$$

Интеграл (1.2.21) позволяет построить зависимость  $q(t)$  через эллиптический синус Якоби

$$q = \mu \operatorname{sn}(\lambda at + c_0), \quad c_0 = q_0 \mu^{-1}. \quad (1.2.22)$$

Напомним, что эллиптические функции Якоби связаны тождествами

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad \operatorname{dn} x = \sqrt{1 - \bar{\lambda}^2 \operatorname{sn}^2 x}. \quad (1.2.23)$$

Подставив формулу (1.2.22) с учетом выражений (1.2.23) в соотношения (1.2.17), получим следующее решение динамических уравнений Эйлера (1.2.10), удовлетворяющее начальным условиям (1.2.12):

$$\begin{aligned} p &= \mu \sqrt{B(C-B)/A(C-A)} \operatorname{cn}(\lambda at + c_0), \\ q &= \mu \operatorname{sn}(\lambda at + c_0), \\ r &= \lambda \sqrt{B(B-A)/C(C-A)} \operatorname{dn}(\lambda at + c_0). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

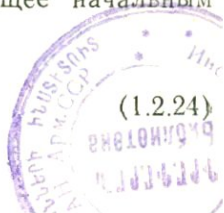
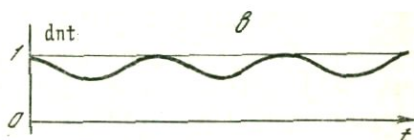


Рис. 1.6. Графики эллиптических функций Якоби  $\operatorname{cn} t$  (а),  $\operatorname{sn} t$  (б) и  $\operatorname{dn} t$  (в)



Эллиптические функции Якоби являются периодическими функциями с периодом  $4K$ , где  $K$  выражается полным эллиптическим интегралом первого рода

$$\Psi = 4K/\lambda a. \quad (1.2.25)$$

Величина (1.2.25) периода вращения динамически асимметричной Земли по инерции есть свободный период Эйлера.

Графики функций  $\operatorname{cn} t$ ,  $\operatorname{sn} t$  и  $\operatorname{dn} t$ , входящих в выражения (1.2.24), приведены на рис. 1.6.

Если  $A = B$  (динамически симметричная Земля), как это принято в стандартной теории [128], то последнее из динамических уравнений Эйлера дает первый интеграл

$$r(t) = r_0, \quad r_0 = \text{const}. \quad (1.2.26)$$

Геометрически интеграл (1.2.26) означает, что вектор угловой скорости  $\omega$  вращения динамически симметричной Земли по инерции имеет постоянную проекцию на ось динамической симметрии  $Oz$ . С учетом (1.2.26) из (1.2.13) и (1.2.14) получим

$$p^2 + q^2 = (h - Cr_0^2)/A, \quad K^2 - C^2 r_0^2 = A(h - Cr_0^2). \quad (1.2.27)$$

Заметим, что из (1.2.26), (1.2.27) вытекает постоянство модуля  $\omega$  угловой скорости, ибо

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \omega_0^2. \quad (1.2.28)$$

Как известно, уравнение (1.2.27) определяет прямой цилиндр с осью  $Oz$  и сечением радиуса

$$R_0 = \sqrt{(h - Cr_0^2)/A}. \quad (1.2.29)$$

В частности, полюс динамически симметричной Земли движется по окружности радиуса  $R_0$  (1.2.29), равного нулю тогда и только тогда, когда при  $t = t_0$  величины  $p_0$  и  $q_0$  суть нули. Последнее и означает, что вращение происходит именно вокруг оси  $Oz$  динамической симметрии Земли [80] (см. рис. 1.5, а).

Определим величину угловой скорости  $\omega$  вращения Земли, положив  $A \neq B$  (динамически асимметричная Земля). Для этого (1.2.24) возведем в квадраты и сложим, тогда

$$\omega = \left[ \mu^2 \frac{B(C-B)}{A(C-A)} \operatorname{cn}^2(\lambda at + c_0) + \mu^2 \operatorname{sn}^2(\lambda at + c_0) + \lambda^2 \frac{B(B-A)}{C(C-A)} \operatorname{dn}^2(\lambda at + c_0) \right]^{1/2}. \quad (1.2.30)$$

Это соотношение показывает, что величина угловой скорости вращения Земли по инерции имеет действительный период, равный половине свободного периода Эйлера (1.2.25).

Заметим, что функция  $\omega(t)$  в период (1.2.25) дважды достигает максимума и минимума. Укажем соответствующие этому моменты времени. С этой целью перепишем соотношение (1.2.30) в виде

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{B(C-B)}{A(C-A)} \mu^2 + \frac{B(B-A)}{C(C-A)} \lambda^2 - \frac{(B-A)(C-B)}{AC} q^2. \quad (1.2.31)$$

Здесь коэффициенты  $B(C-B)/A(C-A)$ ,  $B(B-A)/C(C-A)$ ,  $(B-A)(C-B)/AC$  при величинах  $\mu^2$ ,  $\lambda^2$  и  $q^2$  положительны. Поэтому функция  $\omega^2(t)$  имеет максимум при  $q=0$  и минимум, когда  $q$  достигает максимума. Следовательно, величина угловой скорости вращения Земли по инерции достигает максимума, когда угловая скорость  $\omega$  проходит через координатную плоскость  $Oxz$ , и минимума, когда она проходит через координатную плоскость  $Oyz$ .

Чтобы получить полную кинематическую картину невозмущенного вращения Земли, необходимо проинтегрировать кинематические уравнения Эйлера (1.2.11).

При изложенном выборе систем отсчета  $OXYZ$  и  $Oxyz$  решение этой задачи сопряжено с рядом трудностей. Ее легче решить в переменных Андуайе. Поэтому запишем дифференциальные уравнения вращения Земли по инерции в переменных Андуайе [30, 95]:

$$dK/dt=0, \quad d\psi'/dt=0, \quad d\theta'/dt=0, \\ d\bar{\varphi}/dt = K(\sin^2 \bar{\varphi}/A + \cos^2 \bar{\varphi}/B), \quad (1.2.32)$$

$$d\bar{\theta}/dt = K \cos \bar{\theta} (1/C - \sin^2 \bar{\varphi}/A - \cos^2 \bar{\varphi}/B), \quad (1.2.33)$$

$$d\bar{\theta}'/dt = K \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} (1/A - 1/B).$$

Системы уравнений (1.2.32), (1.2.33) расщепляются на две подсистемы, причем уравнения (1.2.32) имеют очевидное решение

$$K(t) = K_0, \quad \psi'(t) = \psi'_0, \quad \theta'(t) = \theta'_0, \quad (1.2.34)$$

где  $K_0$ ,  $\psi'_0$ ,  $\theta'_0$  — произвольные постоянные величины.

Решение (1.2.34) выражает постоянство вектора  $\mathbf{K}$  в пространстве относительно системы  $OXYZ$ . Рассмотрим проекции вектора  $\mathbf{K}$  на координатные оси системы  $Oxyz$  и выразим их через переменные Андуайе:

$$Ap = K \sin \bar{\psi} \sin \bar{\theta}, \quad Bq = K \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta}, \quad Cr = K \cos \bar{\theta}. \quad (1.2.35)$$

Из первых двух формул (1.2.35) находим

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = Ap/Bq.$$

Подставляя сюда выражения (1.2.24), получим

$$\bar{\varphi}(t) = \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{B(C-B) \operatorname{cn}(\lambda at + c_0)}{A(C-A) \operatorname{sn}(\lambda at + c_0)}} \right]. \quad (1.2.36)$$

Последняя из формул (1.2.35) с учетом (1.2.34) дает

$$\bar{\theta}(t) = \operatorname{arccos} \left[ \frac{C\lambda}{K_0} \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}} \operatorname{dn}(\lambda at + c_0) \right]. \quad (1.2.37)$$

Кинематические уравнения для  $\bar{\psi}(t)$  выводятся в следующей главе. Выражение для этой переменной имеет вид

$$\bar{\psi}(t) = K_0 \int_0^t \frac{(C-B) + (B-A) \operatorname{sn}^2(\lambda at + c_0)}{A(C-B) + (B-A)C \operatorname{sn}^2(\lambda at + c_0)} dt + \bar{\psi}_0. \quad (1.2.38)$$

Таким образом, для переменных Андуайе получены явные выражения (1.2.34), (1.2.36)–(1.2.38) как функции независимой переменной  $t$ .

Отметим некоторые особенности вращения динамически асимметричной Земли. Предварительно вычислим интеграл (1.2.38) при  $A=B$  и переменные  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\theta}$ , соответствующие этому случаю, обозначив их

$$\bar{\psi}_c = \frac{K_0}{A} t + \bar{\psi}_{c0}, \quad \bar{\varphi}_c = \left( r_0 - \frac{K_0}{A} \cos \bar{\theta}_{c0} \right) t + \bar{\varphi}_{c0}, \quad \bar{\theta}_c = \bar{\theta}_{c0}, \quad (1.2.39)$$

где  $\bar{\psi}_{c0}$ ,  $\bar{\varphi}_{c0}$ ,  $\bar{\theta}_{c0}$  — постоянные интегрирования.

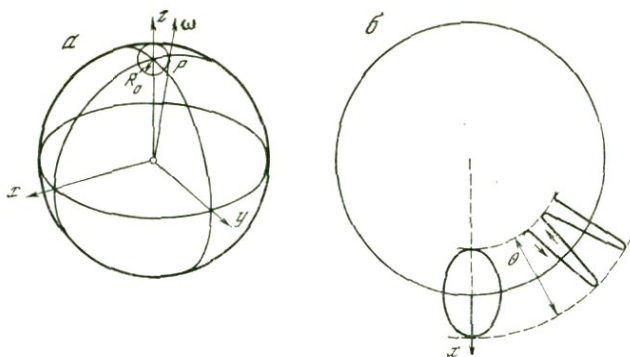
Величину периода (1.2.25) при  $A=B$  обозначим

$$\Psi_c = \frac{2\pi}{r_0} \frac{A}{C-A}. \quad (1.2.40)$$

Формулы (1.2.39) показывают, что вращение по инерции динамически симметричной Земли происходит с постоянной по величине угловой скоростью (1.2.28) и представляет собой регулярную прецессию относительно вектора  $\mathbf{K}$ , ибо

$$d\bar{\psi}_c/dt = K_0/A = \operatorname{const},$$

$$d\bar{\varphi}_c/dt = r_0 - K_0 \cos \bar{\theta}_{c0}/A = \operatorname{const}, \quad d\bar{\theta}/dt = 0. \quad (1.2.41)$$



**Рис. 1.7.** Траектория движения полюса динамически симметричной (а) и асимметричной (б) Земли при ее вращении по Пуансо на касательной плоскости. Ось  $x$  — направление Гринвичского меридиана,  $\theta$  — угол нутации. Стрелками показано направление движения полюса

При этом полюс Земли  $P$  описывает на земной поверхности окружность (1.2.27) радиуса  $R_0$  и по истечении промежутка времени (1.2.40) возвращается в исходное положение (рис. 1.7, а).

Запишем уравнение следа вектора  $\omega$  невозмущенного вращения Земли на плоскости:

$$z = b, \quad (1.2.42)$$

где  $b$  — полярный радиус Земли.

Прямая с направляющим вектором  $\omega$ , проходящая через центр масс Земли, в системе  $Oxyz$  имеет уравнение

$$x/p = y/q = z/r$$

и на плоскости (1.2.42) определяет точку с координатами

$$x_E = bp/r, \quad y_E = bq/r. \quad (1.2.43)$$

Очевидно, точка совпадает со следом вектора  $\omega$  на плоскости (1.2.42). Составим уравнение геометрического места всех таких точек. Оно имеет вид

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}(p/r)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}(q/r)^2} = b^2 \quad (1.2.44)$$

и определяет эллипс, длины полуосей которого меняются со временем в соответствии с выражениями (1.2.24) (рис. 1.7, б).

Прецессия динамически асимметричной Земли даже при вращении только по инерции отлична от регулярной (1.2.41), причем скорости прецессии и собственного вращения непостоянны, т. е. существует нутационное колебание оси вращения Земли по закону (1.2.37).

Для одних и тех же начальных условий (1.2.12) величины  $\Psi$ ,  $\Psi_c$  равны

$$\Psi \simeq \frac{2\pi}{r_0} \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}, \quad \Psi_c = \frac{2\pi}{r_0} \frac{A}{C-A}.$$

Следовательно,  $\Psi > \Psi_c$ . Это означает, что свободный период Эйлера для динамически асимметричной Земли ( $A \neq B$ ) больше свободного периода для динамически симметричной Земли ( $A = B$ ).

Таким образом, кинематическая картина невозмущенного вращения Земли по инерции характеризуется некоторым периодическим движением. В дальнейшем будет показано, что накладываемое на это движение возмущение, вызываемое приложенным к Земле моментом сил, лишь слегка нарушает периодичность. При этом невозмущенное периодическое вращательное движение Земли деформируется в почти периодическое.

### 3. Постановка задач общей теории вращения Земли

Общее движение Земли, рассматриваемой как динамически асимметричное абсолютно твердое тело, представимо суммой ее поступательного перемещения вместе с центром масс и вращения относительно этого центра масс. Составляющие такого движения определяются основными теоремами динамики. Между поступательным и вращательным движением Земли имеется взаимосвязь. Она существенно влияет на эволюцию движения Земли и особенно важна при исследовании малых эффектов, проявляющих себя на длительных интервалах времени. Земля в своем движении динамически связана с окружающими небесными телами. Она взаимно притягивается по закону Ньютона Луной, Солнцем и большими планетами. Последние взаимодействуют между собой. Тем самым обуславливается эволюция поступательно-вращательного движения тел Солнечной системы. Следовательно, эволюция движения Земли неразрывно связана с эволюцией движения тел Солнечной системы. Кроме того, эволюция геологических и других процессов в истории реальной Земли сопровождается массообменом в недрах Земли и связанным с ним эффектом динамической неуравновешенности Земли.

Таким образом, постановка задач общей теории вращения Земли должна предусмотреть, во-первых, динамические асимметричность и неуравновешенность Земли, во-вторых, связь между поступательным движением и вращением Земли, в-третьих, динамическую связь между общими пространственными движениями тел Солнечной системы с учетом предыстории их движения.

Данные астрономических наблюдений на станциях МСДП после исключения из них годового и чандлеровского колебаний полюса имеют некоторый остаток. Этот остаток данных, который не учитывается, ряд авторов объясняют возможной вековой составляющей движения полюса. Исследование векового движения

полюса является одной из основных задач общей теории вращения Земли. Изменения скорости осевого вращения Земли обнаруживаются при сравнении шкалы всемирного времени с равномерной шкалой атомного времени. Выявлены вековые и нерегулярные изменения скорости вращения Земли.

Таким образом, вековые вариации может иметь каждый из элементов вращательного движения Земли. Однако в рамках постановки существующих теорий вращения Земли вопрос о вековых вариациях остается открытым [93, 114]. Поэтому постановка задач общей теории вращения Земли должна включать исследование вековых вариаций элементов вращательного движения Земли.

Сформулируем задачи общей теории вращения Земли. Рассматривается модель Солнечной системы. Она включает Землю как абсолютно твердое тело с трехосным центральным эллипсоидом инерции, Луну, Солнце и большие планеты Солнечной системы как материальные точки. Эти небесные тела взаимно притягиваются по закону Ньютона, их положения и скорости движения предполагаются известными в некоторый момент времени  $t = 0$ , принятый за начало отсчета. Это — начальные условия соответствующей задачи Коши. Предполагается также, что Земля во все время рассмотрения вращается с такой угловой скоростью  $\omega$ , что проекция вектора  $\omega$  на направление оси  $Oz$  остается положительной, т. е.

$$\inf_{t \geq 0} r(t) = r_{\text{inf}} > 0, \quad (1.3.1)$$

и для некоторого момента  $\bar{t}$  действительной оси времени  $R_1$  выполнено условие

$$\omega(\bar{t}) = r(\bar{t}). \quad (1.3.2)$$

При указанных исходных данных требуется провести качественное исследование поступательно-вращательного движения модели Солнечной системы в целом и эволюции вращения Земли. Это позволит, в частности, дать ответ на вопрос о существовании вековых вариаций элементов вращения Земли и их параметрах, построить аналитический метод определения постоянных прецессии и нутации земной оси.

Следует отметить, что условия (1.3.1) и (1.3.2) не являются принципиальными. Действительно, если в некоторый момент времени  $t^* \in R_1^+$  величина  $r(t^*) \leq 0$ , то это означает, что либо угловая скорость вращения Земли обращается в нуль ( $\omega(t^*) = 0$ ), либо полюс Земли испытывает вековое движение и перемещается от нынешнего его положения до положения, совпадающего с современным положением экваториальной плоскости. Астрономические наблюдения показывают, что равенство (1.3.2) выполняется без каких-либо заметных отклонений. Поэтому вопрос о существовании вековых вариаций вращения Земли необходимо решать именно при условиях (1.3.1), (1.3.2).

Таблица 1.1

Небесное тело	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Масса, отн. ед.	Экваториаль- ный радиус, км	Большая полуось ор- биты, а. е. д.	Эксцентриситет орбиты	Наклон орби- ты к эклипти- ке, угл. град	Сидерический период, год	Период вра- щения, сут	Число спутни- ков планеты
Солнце	1,40	332 958	696 000	—	—	—	—	25,36	—
Меркурий	5,44	0,06	2 439	0,387	0,206	7,0	0,24	58,60	—
Венера	5,24	0,82	6 051	0,723	0,007	3,4	0,62	243,00	—
Земля	5,52	1,00	6 378	1,000	0,017	0	1,00	1,00	1
Марс	3,95	0,11	3 394	1,524	0,093	1,9	1,88	1,03	2
Юпитер	1,33	318	71 398	5,203	0,048	1,3	11,86	0,41	14
Сатурн	0,68	95,1	60 000	9,539	0,056	2,5	29,46	0,43	15
Уран	1,27	14,5	25 400	19,182	0,047	0,8	84,01	1,00	6
Нептун	1,62	17,3	24 750	30,058	0,009	1,8	164,8	0,92	2
Плутон	1—1,5	0,002	1 400	39,439	0,250	17,2	247,7	6,40	1
Луна	3,33	0,0123	1 738	3,84·10	0,055	5,09	0,0748	27,32	—

Примечание. За единицу принята масса Земли. Для Луны приведен средний экваториальный радиус, а большая полуось орбиты дана в километрах.

Табл. 1.1 содержит основные астрономические характеристики рассматриваемой модели Солнечной системы [52, 72]. В дальнейшем эту модель Солнечной системы будем называть просто Солнечной системой.

Изложенная постановка теоретического изучения вращения Земли выдвигает следующие задачи исследования:

1) выбор переменных, определяющих положения и скорости движения тел Солнечной системы, и запись дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения системы;

2) классификация компонент решения дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения тел Солнечной системы как функций времени с указанием их аналитической структуры;

3) описание предельного множества будущих состояний вращения Земли, т. е.  $\omega$ -предельного множества решения дифференциальных уравнений движения Солнечной системы и исследование  $\omega$ -предельного режима вращения Земли, выход к которому порождает или исключает вековые вариации элементов вращения;

4) определение постоянных прецессии и нутации земной оси и нахождение параметров вариаций элементов вращения Земли с указанием общего направления и величины скорости векового движения полюса в среднем, а также определение величины векового замедления вращения Земли.

Сформулированные задачи существенно опираются на исследование следующих общих вопросов устойчивости поступательного движения тел Солнечной системы (при условии, что оно обладало этими свойствами в прошлом): а) устойчивости по Лагранжу и по Пуассону поступательных движений тел Солнечной системы; б) рекуррентности поступательного движения тел Солнечной системы.

С учетом решений этих вопросов и задач общей теории вращения Земли необходимо исследовать вековое удаление Луны от Земли в рамках системы Земля—Луна и сближение плоскостей орбит тел Солнечной системы с ее неизменяемой плоскостью Лапласа.

## Динамические системы в метрических пространствах

Построение теории вращения Земли относительно ее центра масс в изложенной постановке задач требует исследования эволюции Солнечной системы в целом — системы тел, рассматриваемых как материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона. Такое исследование необходимо для выяснения закономерностей движения системы тел на больших космогонических интервалах времени, в частности сохранения свойств и характера изменения движения в зависимости от возмущающих факторов. Постановка соответствующих задач приводит к системам дифференциальных уравнений, исследование которых на неограниченно большом промежутке времени выполняется только качественными методами анализа.

Следует отметить, что небесная механика располагает весьма скромным запасом задач, разрешенных в квадратурах от элементарных функций. Получившие широкое развитие численные и приближенные методы решения уравнений движения небесных тел пригодны только для ограниченных интервалов времени. Более того, такие методы построения решений имеют принципиальный недостаток — при заданных начальных условиях движения они дают только одно частное решение задачи, а для нахождения другого частного решения или внесения в задачу новых сведений все вычисления надо производить заново. Поэтому численные и приближенные методы решений, не обладая общностью и гибкостью качественных методов, не позволяют делать заключение об эволюции системы небесных тел, справедливое на неограниченно большом промежутке времени.

Основы качественных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений заложены А. Пуанкаре [35, 68] в связи с задачами небесной механики и космогонии и А. М. Ляпуновым [51] — в связи с проблемами устойчивости движения. Особый вклад в развитие качественных методов исследований дифференциальных уравнений был внесен Дж. Биркгофом — одним из основателей теории динамических систем [91].

Теория динамических систем в ее элементарной постановке рассматривает движения механической системы с конечным числом степеней свободы, описываемые нормальной автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (2.0.1)$$

Состояние такой совокупности в данный момент времени определяется значениями вещественных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , рассматриваемых как функции времени. Каждый возможный конечный набор значений этих переменных принято называть *фазой динамической системы* и отождествлять его с точкой  $N$ -мерного евклидова фазового пространства  $R_N$ . Любой паре точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_N)$  пространства  $R_N$  ставится в соответствие неотрицательное число  $\rho(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$ ,

называемое расстоянием между ними. Функция  $\rho$ , заданная на прямом произведении пространства  $R_N$  на себя, называется *метрикой пространства  $R_N$* . Основные аксиомы, которым удовлетворяет метрика, вынесены в Приложение.

Исследования показали, что динамические системы могут быть введены не только с помощью уравнений вида (2.0.1), но и вполне определяться аксиомами, отражающими наиболее существенные стороны самого движения. При этом выяснилось, что движение можно рассматривать в пространствах более общих, чем  $N$ -мерное евклидово  $R_N$ . В этом направлении принципиальное значение приобрели исследования динамических систем в метрических пространствах. Ниже изложены основные элементы и факты теории динамических систем в метрических пространствах, необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Данная глава предваряет теоретический анализ динамики поступательного движения тел Солнечной системы. В ней систематизированы общие свойства динамических систем, представленные последовательно в виде определений, предложений и их доказательств. Изложение доказательств известных свойств динамических систем связано с тем, что литература о них разрознена, а частью стала библиографической редкостью. Поэтому здесь собраны основные результаты теории динамических систем, они пополнены некоторыми свойствами, имеющими место в динамических системах частного вида. Рассматриваемая динамическая система частного вида задана в метрическом пространстве координат — импульсов механической системы в потенциальном силовом поле. Главная цель данного изложения динамических систем в метрическом пространстве заключается в следующем: во-первых, выявить ряд свойств движения динамической системы, которые имели место в прошлом и сохраняются в будущем, во-вторых, возможно более полно и корректно изложить теоретические основы динамики Земли в Солнечной системе. В методическом отношении содержание главы может послужить полезным практическим пособием по общей теории динамических систем, применяемой в классической механике.

## 1. Понятие динамической системы

Пусть задано некоторое метрическое пространство  $M = \{G, \rho\}$ , состоящее из множества  $G$  элементов  $q$  с метрикой  $\rho$ , и семейство  $\{g(t, \cdot)\}$  отображений пространства  $M$  на себя. Это семейство определяется следующим образом: каждому элементу  $q \in G$  и любому фиксированному вещественному значению параметра  $t \in R_1$  ставится в соответствие определенный элемент  $p$  пространства  $M$ , т. е.

$$p = g(t, q). \quad (2.1.1)$$

Здесь параметр  $t$  — время.

На отображение  $g(t, q)$  наложены следующие условия [45, 60].

1. Начальное:

$$q = g(0, q). \quad (2.1.2)$$

2. Условие непрерывности по совокупности переменных  $t$  и  $q$ : если последовательность  $\{t_n\}$  моментов времени и последовательность  $\{q_n\}$  элементов пространства  $M$  сходятся, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ , то имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q_n) = g(t, q). \quad (2.1.3)$$

Используя метрику  $\rho$  пространства  $M$  и определение непрерывности, предельное соотношение (2.1.3) можно записать в эквивалентной ему форме: для заданного элемента  $p \in G$  и заданного момента времени  $s \in R_1$  при любом  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что неравенство

$$\rho(g(t, q), g(s, p)) < \varepsilon$$

выполняется как только  $\rho(q, p) < \delta$  и  $|t - s| < \delta$ .

3. Групповое: для любого заданного элемента  $q \in G$  и любых моментов  $t_1$  и  $t_2$  из  $R_1$  выполнено равенство

$$g(t_2, g(t_1, q)) = g(t_1 + t_2, q). \quad (2.1.4)$$

Согласно условию 1 отображение  $g(0, q)$ , соответствующее значению  $t = 0$ , является тождественным и оставляет каждый элемент  $q$  пространства  $M$  на своем месте.

Из условий 1 и 3 вытекает существование отображения  $g(-t, q)$ , являющегося обратным к отображению  $g(t, q)$ . Действительно,

$$g(t, g(-t, q)) = g(t - t, q) = g(0, q) = q. \quad (2.1.5)$$

Таким образом, семейство отображений пространства  $M$  на себя, подчиненных этим условиям, а также условию о непрерывности (2.1.1) по совокупности своих переменных, образует непрерывную группу с тремя элементами — операцией умножения

(2.1.4), единицей, равной тождественному отображению, и обратным элементом как обратным отображением к данному.

Определение 1.1. Группа отображений  $g(t, q)$  метрического пространства  $M$  на себя, удовлетворяющих всем трем условиям, называется *динамической системой*.

Отображение  $g(t, q)$  при фиксированном элементе  $q$  есть *движение*.

При фиксированном элементе  $q$  множество точек пространства  $M$ , соответствующих моментам времени  $t \in R_1$ , т. е. множество

$$g(R_1, q) = \{g(t, q) | t \in R_1\},$$

называется *траекторией движения*  $g(t, q)$ .

Множества

$$g(R_1^+, q) = \{g(t, q) | t \in R_1^+\}, \quad g(R_1^-, q) = \{g(t, q) | t \in R_1^-\}$$

при фиксированном элементе  $q \in G$  называются *положительной* и *отрицательной полутраекториями* соответственно.

Множество

$$g(a \leq t \leq b, q) = \{g(t, q) | t \in [a, b]\}$$

при фиксированном  $q \in G$  — конечная дуга траектории движения  $g(t, q)$ , а положительное число  $b - a$  — временная длина этой дуги. Точки  $q = g(0, q)$  и  $p = g(s, q)$  пространства  $M$  называются *начальным состоянием* и *состоянием движения*  $g(t, q)$  в момент времени  $t = s$ .

Из условия 2 вытекает непрерывная зависимость отображения  $g(t, q)$  от начальных условий. Запишем это в виде следующего условия.

2'. Для любого элемента  $p \in G$  и момента времени  $s > 0, s \in R_1$ , при произвольном  $\epsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что неравенство

$$\rho[g(t, q), g(s, p)] < \epsilon \tag{2.1.6}$$

выполняется для всех моментов времени  $|t| < s$ , как только

$$\rho(q, p) < \delta.$$

Доказательство этого условия проведем от противного. Пусть существует сходящаяся последовательность  $\{q_n\}$  элементов пространства  $M$  и соответствующая ей последовательность  $\{s_n\}$  моментов времени  $t \in R_1$ , такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q, |s_n| < s$  и

$\rho(g(s_n, q_n), g(s_n, q)) > \epsilon$ , т. е. не выполнено неравенство (2.1.6).

По лемме Больцано—Вейерштрасса [62] из ограниченной последовательности  $\{s_n\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $\{t_n\}$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t, |t_n| < s$ . В силу аксиомы треугольника для метрики  $\rho$  (см. Приложение) имеет место неравенство

$$\epsilon < \rho(g(t_n, q_n), g(t_n, q)) = \rho(g(t_n, q), g(t_n, q_n)) \leq \rho(g(t_n, q), g(t, q)) + \rho(g(t, q), g(t_n, q_n)).$$

Тогда в силу условия 2 каждая из величин в правой части этого неравенства может быть меньше  $\epsilon/2$  по крайней мере для достаточно больших  $n$ . Это приводит к противоречию вида  $\epsilon < \epsilon$ , что и доказывает справедливость условия 2'.

Для удобства последующего изложения тех или иных свойств динамической системы представим их в виде предложений.

Предложение 1.1. В динамической системе могут существовать следующие типы движений  $g(t, q)$ :

а)  $g(t, q)$  — постоянное, т. е. для всех моментов времени  $t \in R_1$   
 $g(t, q) = q$ ,

$q$  — точка покоя;

б)  $g(t, q)$  — периодическое с периодом  $\tau$ , т. е. для всех моментов времени  $t \in R_1$

$$g(t + \tau, q) \equiv g(t, q)$$

и  $g(s, q) \neq g(r, q)$  для всех моментов времени  $s$  и  $r$ , таких, что  $0 < s < r < \tau$ ;

в)  $g(t, q)$  — непериодическое, т. е. для любого ненулевого  $s \in R_1$  найдется хотя бы одно значение  $t \in R_1$ , при котором выполняется неравенство  $g(t + s, q) \neq g(t, q)$ .

Доказательство. Пусть движение  $g(t, q)$  принадлежит некоторой динамической системе. Предполагается, что оно не относится к типу «в». Тогда найдутся такие два момента времени  $t_1$  и  $t_2$ , что

$$g(t_1, q) = g(t_2, q). \quad (2.1.7)$$

Обозначим  $\tau = t_2 - t_1$  и рассмотрим движение  $g(t, q)$  в момент времени  $t + \tau$ :

$$\begin{aligned} g(t + \tau, q) &= g(t, g(\tau, q)) = g(t, g(t_2 - t_1, q)) = \\ &= g(t, g(t_2, g(-t_1, q))) = g(t, g(t_2, g(-t_2, q))) = \\ &= g(t, g(t_2 - t_2, q)) = g(t, g(0, q)) = g(t, q). \end{aligned}$$

Сопоставляя начало и конец этой цепочки равенств, получим

$$g(t + \tau, q) = g(t, q). \quad (2.1.8)$$

При выводе соотношения (2.1.8) были использованы групповое свойство (2.1.4), существование обратного преобразования (2.1.5) и равенство (2.1.7).

Обозначим через  $S$  множество всех моментов времени  $\tau \in R_1$ , которые удовлетворяют (2.1.8). Множество  $S$  является группой по отношению к операции сложения. Оно вместе с каждым своим элементом  $\tau$  содержит элемент  $-\tau$  и вместе с каждой парой  $(\tau_1, \tau_2)$  своих элементов — их сумму  $(\tau_1 + \tau_2)$ . Пусть  $s$  — наименьшее положительное число, входящее в множество  $S$ . Если такой элемент существует, то по определению

$$g(t + s, q) = g(t, q) \quad (2.1.9)$$

и  $g(t_1, q) \neq g(t_2, q)$  для всех моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , таких, что  $0 \leq t_1 < t_2 < s$ . В этом случае рассматриваемое движение  $g(t, q)$  относится к типу "б".

Пусть множество  $S$  не имеет наименьшего положительного элемента  $\tau$ , удовлетворяющего требованию (2.1.8). Тогда между моментами времени  $t=0$  и  $t=s$  ( $s \in S$ ), где  $\tau$  — произвольный элемент множества  $S$ , найдется такой момент  $t=s$ , что для  $s \in R_1$  имеет место равенство (2.1.9). Обозначим через  $\{s_n\}$  последовательность положительных чисел из множества  $S$ , удовлетворяющих равенству (2.1.8), таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ . Тогда при произвольном фиксированном моменте времени  $t \in R_1$  в силу непрерывности отображения выполняются равенства

$$\begin{aligned} g(t, q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - [t/s_n] s_n, q) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(t, g(-[t/s_n] s_n, q)) = g(0, q) = q. \end{aligned}$$

Здесь  $[t/s_n]$  означает целую часть данного отношения. Отсюда следует, что для произвольного момента времени  $t \in R_1$  выполняется равенство  $g(t, q) = q$  и движение  $g(t, q)$  относится к типу "а".

Предложение 1.2. Любая конечная дуга  $g(a \leq t \leq b, q)$  траектории движения  $g(t, q)$  образует замкнутое ограниченное множество в пространстве  $M$ .

Доказательство. Пусть  $\{g_n\}$  — произвольная последовательность состояний движения  $g(t, q)$ , входящих в дугу  $g(a \leq t \leq b, q)$ , т. е.  $g_n = g(t_n, q)$ , где  $t_n \in [a, b]$ . По лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности  $\{t_n\}$  моментов времени можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $\{s_n\}$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  и  $a \leq s \leq b$ . Тогда в силу условия 2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n, q) = g(s, q).$$

Следовательно, состояние  $g(s, q)$  движения  $g(t, q)$  входит в дугу  $g(a \leq t \leq b, q)$ , ибо  $s \in [a, b]$ . Это означает, что произвольная предельная точка  $g(s, q)$  принадлежит самой дуге, иными словами, дуга  $g(a \leq t \leq b, q)$  замкнута. Ограниченность дуги  $g(a \leq t \leq b, q)$  следует из непрерывности движения  $g(t, q)$  и конечности отрезка  $[a, b]$ . Что и требовалось доказать.

Как известно (см. Приложение), замкнутость и ограниченность подмножества  $A$  конечномерного пространства  $M$  эквивалентны компактности множества  $A$  в  $M$ . Следовательно, любая конечная дуга  $g(a \leq t \leq b, q)$  траектории  $g(R_1, q)$  движения  $g(t, q)$  в конечномерном пространстве  $M$  компактна в  $M$ .

Пусть  $A$  — подмножество пространства  $M$ . Обозначим

$$A_s = g(s, A) \quad (2.1.10)$$

образ множества  $A$  при отображении группы (2.1.1), соответствующем моменту  $s \in R_1$  или значению  $s$  параметра группы.

**Определение 1.2.** Множество  $A$  пространства  $M$  называется инвариантным по отношению к динамической системе  $g(t, \cdot)$ , если оно для произвольного момента времени  $s \in R_1$  совпадает с множеством  $A$ , определенным равенством (2.1.10).

Механический смысл этого определения таков: если некоторое состояние  $g(\tau, q)$  движения  $g(t, q)$  находится в инвариантном множестве  $A$ , то вместе с этим состоянием в таком множестве находится вся траектория движения.

Отсюда непосредственно следует

**Предложение 1.3.** Всякая траектория движения, объединение любого числа таких траекторий и все пространство  $M$  являются инвариантными множествами.

Относительно инвариантных множеств имеют место следующие два предложения.

**Предложение 1.4.** Если  $A \subset M$  — инвариантное множество, то его замыкание  $\bar{A}$  в метрике  $\rho$  пространства  $M$  также инвариантно.

**Доказательство.** Пусть  $q \in \bar{A} \setminus A$  и  $\{g_n\}$  — последовательность элементов множества  $A$ , сходящихся к  $q$ , т. е.  $g_n \in A$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, q) = 0.$$

Отсюда по условию 2' для произвольного момента времени  $s \in R_1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(s, g_n) = g(s, q).$$

Так как состояние  $g(s, q_n)$  движения  $g(t, q)$  принадлежит инвариантному множеству  $A$ , то состояние  $g(s, q)$  движения  $g(t, q)$  принадлежит замыканию  $A$ . В силу произвольности момента времени  $s$  имеет место включение  $g(t, A) \subset A$  для всех  $t \in R_1$ . Действуя на обе части этого включения обратным преобразованием  $g(-t, A)$ , получим  $\bar{A} \subset g(-t, A)$ . Поэтому множество  $A$ , с одной стороны, содержит свой образ  $g(t, \bar{A})$ , а с другой — содержится в своем образе  $g(-t, \bar{A})$ . Отсюда вытекает равенство  $\bar{A} = g(t, \bar{A})$  для всех  $t \in R_1$ , т. е. инвариантность множества  $A$ .

**Предложение 1.5.** Множество  $A$  точек покоя динамической системы замкнуто в пространстве  $M$  и инвариантно.

**Доказательство.** Инвариантность множества  $A$  следует из Предложения 1.1 о точке покоя динамической системы. Докажем замкнутость множества  $A$ , т. е.  $A = \bar{A}$ .

Пусть  $\{g_n\}$  — произвольная последовательность точек покоя динамической системы, входящих в множество  $A$ , и  $q$  — ее предельная точка, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, q) = 0$ . По определению точки покоя для любого момента времени  $t \in R_1$  имеем  $g(t, g_n) \equiv g_n$ . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t, g_n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = q.$$

Отсюда, используя условие 2, получим  $g(t, q) = q$ , т. е.  $q$  — точка покоя динамической системы и  $q \in A$ .

Перейдем к предложениям о предельных состояниях движения.

**Предложение 1.6.** Если  $p$  — точка покоя динамической системы, то никакая траектория ее движений не входит в точку  $p$  за конечное время.

**Доказательство.** Пусть  $p$  — точка покоя динамической системы и при условии этого Предложения траектория  $g(R_1, q)$  движения  $g(t, q)$  входит в точку  $p$  за конечное время  $s \in R_1$ , т. е.  $p = g(t, q)$ , где  $q \neq p$ . Тогда по условию 3

$$p = g(-s, p) = g(-s, g(s, q)) = g(0, q) = q.$$

Это равенство противоречит условиям выбора движения  $g(t, q)$ , что и доказывает данное Предложение.

Обозначим как  $S(\delta, q)$  открытый шар радиуса  $\delta$  с центром в точке  $q$ , т. е. подмножество

$$S(\delta, q) = \{g \in M, \rho(g, q) < \delta\}$$

пространства  $M$ . Тогда справедливо

**Предложение 1.7.** Если для любого числа  $\delta > 0$  в шаре  $S(\delta, q)$  найдется точка  $p$  такая, что полутраектория  $g(R_1^+, q) \subset S(\delta, q)$ , то  $p$  — точка покоя.

**Доказательство.** Пусть при условиях предложения  $q$  не является точкой покоя. Следовательно, в некоторый момент времени  $s > 0$  движение  $g(t, q)$  отойдет от состояния  $q$ , т. е.  $q \neq g(s, q)$ , и будет находиться на некотором расстоянии  $\varepsilon$  от состояния  $q$ , т. е.  $\rho(q, g(s, q)) = \varepsilon > 0$ . В силу условия 2' для данного числа  $\varepsilon/2$  и фиксированного момента времени  $s \in R_1$  и для данного элемента  $p \in M$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что

$$\rho(g(t, q), g(t, p)) < \varepsilon/2$$

при всех  $|t| \leq s$ , как только  $\rho(q, p) < \delta < \varepsilon/2$ . По условиям предложения в шаре  $S(\delta, q)$  найдется точка  $p$  такая, что полутраектория  $g(R_1^+, p) \subset S(\delta, q)$ . Тогда в силу аксиомы треугольника для метрики  $\rho$  получим

$$\rho[q, g(s, q)] \leq \rho[q, g(s, p)] + \rho[g(s, p), g(s, q)] < \delta + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Следовательно, расстояние между состояниями  $q$  и  $g(s, q)$  одновременно равно  $\varepsilon$  и меньше, чем  $\varepsilon$ , чего быть не может. Это и доказывает Предложение 1.7.

**Предложение 1.8.** Если движение  $g(t, q)$  для любой последовательности  $\{t_n\}$  моментов времени  $t_n \in R_1$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ , удовлетворяет равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = p, \tag{2.1.11}$$

то  $p$  — точка покоя.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число  $\delta > 0$ . По определению предела (2.1.11) получим, что  $\rho(p, g(t, q)) < \delta$ , как только  $t \geq s(\delta)$ . Это означает, что

$$g(R_1, q) \subset S(\delta, p),$$

где  $q = g(s, q)$ . Отсюда согласно предыдущему Предложению вытекает, что  $p$  — точка покоя.

Определение 1.3. Произвольная последовательность  $\{t_n\}$  моментов времени  $t_n \in R_1$  называется  $\omega$ -последовательностью, если  $t_n \geq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ .

Аналогично такая последовательность называется  $\alpha$ -последовательностью, если  $t_n \leq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$ .

Всякая  $\omega$ - или  $\alpha$ -последовательность называется  $\lambda$ -последовательностью.

Определение 1.4. Если последовательность  $\{g(t_n, q)\}$  состояний движения  $g(t, q)$ , соответствующая  $\omega$ - (или  $\alpha$ -) последовательности, имеет предельную точку  $p \in M$ , то эта точка называется  $\omega$ - (или  $\alpha$ -) предельным состоянием движения  $g(t, q)$ .

Множества всех  $\omega$ -предельных и  $\alpha$ -предельных состояний движения  $g(t, q)$  соответственно обозначаются  $W(\omega, g, q)$  и  $W(\alpha, g, q)$  и называются  $\omega$ - и  $\alpha$ -предельными множествами.

Если для некоторой  $\lambda$ -последовательности последовательность  $\{g(t_n, q)\}$  состояний движения  $g(t, q)$  имеет предельную точку  $p \in M$ , то  $p$  называется  $\lambda$ -предельным состоянием движения  $g(t, q)$ . Множество всех  $\lambda$ -предельных состояний движения  $g(t, q)$  обозначается символом  $W(\lambda, g, q)$  и называется  $\lambda$ -предельным множеством.

Предложение 1.9. Множества  $W(\omega, g, q)$ ,  $W(\alpha, g, q)$  и  $W(\lambda, g, q)$  всех  $\omega$ -предельных,  $\alpha$ -предельных и  $\lambda$ -предельных состояний движения  $g(t, q)$  являются инвариантными замкнутыми множествами пространства  $M$ .

Доказательство проведем для множества  $W(\omega, g, q)$ . Пусть точка  $p$  есть  $\omega$ -предельное состояние движения  $g(t, q)$  и  $\{t_n\}$  — соответствующая ему  $\omega$ -последовательность, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = p. \quad (2.1.12)$$

Зафиксируем произвольно момент времени. Пусть  $g(s, q)$  — состояние движения  $g(t, q)$  в момент времени  $t = s$ . В силу условия 2' для любого числа  $\varepsilon > 0$  и данного момента времени  $s \in R_1$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что

$$\rho(g(t_n + s, q), g(s, p)) < \varepsilon, \quad (2.1.13)$$

как только  $\rho(p, g(t_n, q)) < \delta$ . Но в силу (2.1.12) это неравенство выполняется для всех  $n$ , начиная с некоторого  $n_1(\delta) \geq 1$ . Поэтому для всех  $n > n_1(\delta)$  имеет место также неравенство (2.1.13). Следовательно, точка  $g(s, p) \in M$ , будучи предельной точкой последовательности  $\{g(t_n + s, q)\}$ , является  $\omega$ -предельным состоянием

движения  $g(t, q)$ . Отсюда в силу произвольности  $g(s, p)$  множество  $W(\omega, g, q)$  вместе с каждым своим элементом  $p$  содержит всю траекторию  $g(R_1, p)$  движения  $g(t, p)$ . Это означает инвариантность множества  $W(\omega, g, q)$ . Докажем его замкнутость.

Пусть  $\{g_n\}$  — произвольная последовательность элементов множества  $W(\omega, g, q)$  и  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ . Фиксируя произвольное число  $\varepsilon > 0$ , выберем  $n$  так, чтобы  $\rho(q_n, p) < \varepsilon/2$ . Но  $q_n \in W(\omega, g, q)$ , и поэтому найдется такой момент времени  $t = t_n$ , что  $\rho(q_n, g(t_n, q)) < \varepsilon/2$ . Тогда в силу аксиомы треугольника для метрики  $\rho$  имеем

$$\rho(p, g(t_n, q)) \leq \rho(p, q_n) + \rho(q_n, g(t_n, q)) < \varepsilon.$$

Полученное неравенство означает, что точка  $p$  есть  $\omega$ -предельное состояние движения  $g(t, q)$ . Тогда  $p \in W(\omega, g, q)$ . Что и требовалось доказать.

Отметим следующие очевидные включения:

$$W(\omega, g, q) \subset g(R_1^-, q), \quad W(\alpha, g, q) \subset g(R_1^-, q), \quad (2.1.14)$$

вытекающие из того, что любое замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

Предложение 1.10. Точка  $q \in G$  является точкой покоя для движения  $g(t, q)$  тогда и только тогда, когда имеет место

$$W(\omega, g, q) = W(\alpha, g, q) = q. \quad (2.1.15)$$

Доказательство. Если  $q$  — точка покоя движения  $g(t, q)$ , то, очевидно, будет выполнено равенство (2.1.15).

Пусть обратно имеет место равенство (2.1.15), т. е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, q) = q$ . Тогда одна и та же точка  $q \in G$  одновременно является

элементом  $\omega$ -предельного и  $\alpha$ -предельного множества движения  $g(t, q)$ . Поэтому согласно Предложению 1.8  $q$  представляет собой точку покоя.

Предложение 1.11. Если  $g(t, q)$  — периодическое движение с периодом  $\tau > 0$ , то имеет место равенство

$$W(\omega, g, q) = W(\alpha, g, q) = g(R_1, q). \quad (2.1.16)$$

Доказательство. Пусть  $p \in G$  — произвольная точка траектории  $g(R_1, q)$ , т. е. для некоторого момента времени  $s \in R_1$  выполнено равенство  $p = g(s, q)$ . Тогда для любого натурального числа  $n$  выполняется соотношение  $p = g(s \pm n\tau, q)$  и  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s \pm n\tau, q)$ . Последнее означает, что  $p \in W(\omega, g, q)$  и  $p \in W(\alpha, g, q)$ . Отсюда вытекают включения

$$g(R_1, q) \subset W(\omega, g, q), \quad g(R_1, q) \subset W(\alpha, g, q). \quad (2.1.17)$$

Докажем теперь справедливость включений, обратных (2.1.17):

$$W(\omega, g, q) \subset g(R_1, q), \quad W(\alpha, g, q) \subset g(R_1, q). \quad (2.1.18)$$

С этой целью рассмотрим произвольный элемент  $p$  множества  $W(\omega, g, q)$ . Обозначим через  $\{t_n\}$  последовательность, соответствующую элементу  $p$   $\omega$ -предельного множества движения  $g(t, q)$ . Каждый из моментов времени  $t_n$  представим в виде  $t_n = k_n \tau + s_n$ , где  $\tau$  — период движения  $g(t, q)$ ,  $k_n$  — натуральное число и  $0 \leq s_n \leq \tau$ . Согласно лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности  $\{s_n\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Последнюю для сокращения записи отождествим с исходной последовательностью и положим  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ .

В силу периодичности движения  $g(t, q)$  и согласно условию 2 имеем

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(k_n \tau + s_n, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n, q) = \tilde{g}(s, q).$$

Иными словами, произвольная точка  $p$  множества  $W(\omega, g, q)$  является точкой траектории  $g(R_1, q)$  и тем самым доказываемое первое из включений (2.1.18). Аналогично доказывается и второе.

Сопоставляя (2.1.17) и (2.1.18), получим следующие равенства:

$$W(\omega, g, q) = g(R_1, q), \quad W(\alpha, g, q) = g(R_1, q),$$

из которых вытекает полный набор равенств (2.1.16).

**Предложение 1.12.** Для того чтобы множество  $W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) для движения  $g(t, q)$  было пустым, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(q, g(t, q)) = \infty \quad (\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(q, g(t, q)) = \infty). \quad (2.1.19)$$

**Доказательство.** Если имеет место равенство (2.1.17), то для любого положительного  $n$  найдется момент  $t_n$  времени  $t \in R_1$ , по истечении которого полутраектория  $g(R_1^+, q)$  покинет шар  $S(n, q)$ . Следовательно, множество  $W(\omega, g, q)$  пусто, т. е. условие (2.1.19) достаточно, чтобы множество  $W(\omega, g, q)$  было пустым.

**Доказательство необходимости.** Пусть множество  $W(\omega, g, q)$  пусто, но для некоторой  $\omega$ -последовательности  $\{t_n\}$  нарушено равенство (2.1.19), т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, g(t_n, q)) = \varepsilon, \quad \varepsilon < \infty.$$

Тогда последовательность  $\{g(t_n, q)\}$  состояний движения  $g(t, q)$  будет находиться внутри шара  $S(\varepsilon, q)$ . Согласно лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности  $\{g(t_n, q)\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{g(s_n, q)\}$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n, q) = p$  и  $\{t_n\}$  —  $\omega$ -последовательность. Поэтому  $p \in W(\omega, g, q)$  и множество  $W(\omega, g, q)$  не пусто вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает необходимость Предложения 1.12.

Предложение 1.13. Для того чтобы множество  $W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) для движения  $g(t, q)$  состояло из единственной точки  $p \in G$ , необходимо и достаточно, чтобы полутраектория  $g(R_1^+, q)$  входила в эту точку при  $t \rightarrow \infty$  (при  $t \rightarrow -\infty$ ), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(p, g(t, q)) = 0 \quad (\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(p, g(t, q)) = 0). \quad (2.1.20)$$

Доказательство необходимости. Пусть множество  $W(\omega, g, q)$  состоит из единственного элемента  $p \in G$ , но хотя бы для одной  $\omega$ -последовательности нарушено равенство (2.1.20), т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, g(t_n, q)) = \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . С другой стороны, для  $p$  существует  $\omega$ -последовательность  $\{s_n\}$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, g(s_n, q)) = 0$ .

Как непрерывная функция  $\rho$  принимает любые значения, заключенные между 0 и  $\varepsilon$ . В частности, можно подобрать  $\omega$ -последовательность  $\{\tau_n\}$  моментов времени  $t \in R_1^+$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, g(\tau_n, q)) = \delta$ , где  $0 < \delta < \varepsilon$  и  $\delta < \infty$ . Тогда согласно упомянутой лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности  $\{g(\tau_n, q)\}$ , заключенной в шаре  $S(\delta, p)$ , можно извлечь подпоследовательность  $\{g(t_n, q)\}$ , сходящуюся в точку  $p'$  и  $p \neq p'$ . Следовательно, вопреки предположениям множество  $W(\omega, g, q)$  содержит точку  $p'$ , отличную от  $p$ . Полученное противоречие доказывает необходимость Предложения.

Доказательство достаточности. Если условие (2.1.20) выполнено, то согласно Предложению 1.12 множество  $W(\omega, g, q)$  непусто. Предположим, что оно имеет хотя бы два элемента,  $q_1 \in W(\omega, g, q)$  и  $q_2 \in W(\omega, g, q)$ , для каждого из которых выполнено равенство (2.1.20) и  $q_1 \neq q_2$ . Тогда  $\rho(q_1, q_2) = \varepsilon$  и  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, при любом  $t \in R_1^+$

$$\varepsilon = \rho(q_1, q_2) \leq \rho(q_1, g(t, q)) + \rho(q_2, g(t, q)).$$

В данном неравенстве, переходя к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , в силу (2.1.20) получим  $\varepsilon < 0$ . Это противоречие доказывает достаточность Предложения.

Особый интерес представляют динамические системы, порождаемые решениями дифференциальных уравнений вида (2.0.1). Возникает вопрос, при каких условиях, наложенных на правые части этих уравнений, фазовые движения в пространстве  $R_n$  с метрикой

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \quad (2.1.21)$$

обладают свойствами динамических систем. Он решается с помощью теоремы о существовании и единственности и теоремы о продолжаемости решения уравнений (2.0.1). Сформулируем эти теоремы [33, 67].

Теорема существования и единственности. Если правые части уравнения (2.0.1) непрерывны в области  $D \subset$

$\subset R_n$  и удовлетворяют во всякой компактной области  $\bar{A} \subset D$  условиям Липшица

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)| < \\ < L \{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|\} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $L$  — постоянная, зависящая, вообще говоря, от области  $\bar{A}$ , и заданы начальные условия при  $t = t_0 \in R_t$

$$x_i(t_0) = q_i, \quad x_2(t_0) = q_2, \dots, x_n(t_0) = q_n, \quad (2.1.22)$$

определяющие точку  $q^0 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  в области  $D$ , то уравнения (2.0.1) имеют единственное решение в  $D$

$$x_i = x_i(t; t_0; q_1, q_2, \dots, q_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.23)$$

удовлетворяющее начальным условиям (2.1.22), т. е.

$$x_i(t; t_0; q_1, q_2, \dots, q_n) = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Введем стандартные сокращения:  $x(t, t_0, q)$  — решение (2.1.23);  $f(x) = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  — правая часть уравнений (2.0.1) и система (2.0.1) с начальными условиями (2.1.22) —

$$dx/dt = f(x), \quad x(t_0, t_0, q) = q. \quad (2.1.24)$$

Отметим, что теорема доказывается обычно для более широкого класса уравнений, чем система (2.1.24). Изложенная форма теоремы обеспечивает существование решения (2.1.23) в некотором конечном интервале времени. Поэтому естественным образом возникает необходимость продолжения полученного решения как в сторону возрастания, так и в сторону убывания времени  $t$ .

**Определение 1.5.** Решение  $x(t, t_0, q)$ , заданное на интервале времени  $a < t < b$ , называется продолжаемым вправо (влево), если существует решение  $y(t, t_0, q)$  того же уравнения (2.1.24), определенное на интервале времени  $a < t < t_2$  ( $t_1 < t < b$ ), где  $b < t_2$  ( $t_1 < a$ ), и совпадающее с  $x(t, t_0, q)$  на интервале времени  $a < t < b$ . Решение, не продолжаемое ни вправо, ни влево, называется непродолжаемым.

Непродолжаемые решения задачи (2.1.24) характеризуют следующие утверждения.

**Теорема о непродолжаемости.** Пусть  $f(x)$  уравнения (2.1.24) определена и непрерывна в области  $D \subset R_n$ . Решение  $x(t, t_0, q)$ , заданное на интервале  $(a, b)$ , непродолжаемо тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

- 1)  $a = -\infty, b = \infty$ ;
- 2) решение уходит в бесконечность как при  $t \rightarrow a + 0$ , так и при  $t \rightarrow b - 0$ ;
- 3) расстояние от решения  $x(t_0, t_0, q)$  до границы области  $D$  стремится к нулю как при  $t \rightarrow a + 0$ , так и при  $t \rightarrow b - 0$ .

Удобна в приложении следующая теорема, выражающая достаточное условие продолжаемости решения.

Теорема о достаточном условии продолжаемости [65, 91]. Если решение  $x(t, t_0, q)$  остается в компактной области  $\bar{A} \subset D$  как при  $t \rightarrow -\infty$ , так и при  $t \rightarrow \infty$ , то оно может быть продолжено на всю действительную ось времени  $R_1$ .

Начальные условия (2.1.22) задачи обычно определяются из наблюдений или эксперимента путем измерения соответствующих параметров движения. Любые измерения имеют погрешность. Если даже последние незначительны, они могут привести к существенным изменениям свойств движения. Поэтому возникает необходимость обеспечить близость решений, удовлетворяющих близким начальным условиям. Принципиальность этого положения подчеркнута Ж. Адамаром. В связи с этим укажем теорему о непрерывной зависимости решения от начальных условий [60, 67].

Теорема о непрерывной зависимости. Если решение  $x(t, t_0, q)$  существует на интервале времени  $(a, b)$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что решение  $y(t, t_0, p)$  с начальными условиями  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  удовлетворяет неравенству  $\rho(x, y) < \varepsilon$  для всех  $t \in (a, b)$ , как только

$$|q_1 - p_1| < \delta, \quad |q_2 - p_2| < \delta, \quad \dots, \quad |q_n - p_n| < \delta.$$

Сформулированные теоремы с некоторыми изменениями их условий справедливы для решений неавтономных систем дифференциальных уравнений [33, 44]. Между тем решения автономных систем вида (2.0.1) обладают свойством, характерным только для них. Одно из таких свойств выражается групповым условием. Сформулируем это свойство применительно к решению (2.1.23).

Правые части (2.1.23) можно привести к виду

$$\begin{aligned} x_i(t; t_0; q_1, q_2, \dots, q_n) = \\ = x_i(t - t_0; 0; q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

где  $x(t - t_0; 0; q)$  также является решением уравнения (2.1.24). Это объясняется тем, что правые части уравнения (2.1.24) явно не зависят от времени и поэтому сохраняют свой вид при замене переменной  $t$  на новую переменную  $s = t - t_0$ . Далее, в силу начальных условий в момент времени  $t = t_0$  решение  $x(t - t_0; 0, q)$  обращается в  $q = x(0, 0, q)$ . Следовательно, согласно теореме о единственности решения  $x(t, t_0, q)$  и  $x(t - t_0, 0, q)$ , равные между собой при  $t = t_0$ , совпадают для всех значений  $t$ . С учетом этого решение (2.1.23) можно записать в виде

$$x(t - t_0, 0, q) = g(t, q). \quad (2.1.25)$$

Решение (2.1.25) в момент времени  $s$  определяет точку

$$p = g(s, q) \quad (2.1.26)$$

фазового пространства  $R_n$ . Ее положение можно принять за новое начальное состояние движения и составить решение

$$g(t, p) = x(t - t_0, 0, p).$$

При этом имеет место тождество  $g(t+s, p) \equiv x(t+s-t_0, 0, p)$ , ибо согласно равенству (2.1.26) при  $t=s$

$$x(-s-t_0, 0, p) = q, \quad x(-s+s-t_0, 0, q) = q.$$

Это означает что решения  $x(t-t_0, 0, p)$  и  $x(t+s-t_0, 0, q)$  совпадают при  $t=s$ . Следовательно, в силу теоремы о единственности эти решения будут совпадать всюду на  $R_1$ .

С учетом произвольности момента времени  $t$  получена

**Теорема о групповом условии.** Всякое решение  $g(t, q)$  уравнения (2.1.24), определенное при  $t \in R_1$ , обладает свойством группы, т. е.

$$g(t, g(s, q)) = g(t+s, q).$$

Из указанных теорем вытекает

**Предложение 1.14.** Если каждое решение  $g(t, q)$  уравнения (2.1.24), проходящее в начальный момент времени через произвольную точку  $q$  пространства  $R_n$ , определено для всех моментов времени  $t \in R_1$ , то совокупность движений, описываемых уравнениями (2.1.24), является динамической системой в  $n$ -мерном фазовом пространстве  $R_n$  с метрикой (2.1.21). Система движений на множестве  $M \subset R_n$  определяет динамическую систему на метрическом пространстве  $G$  с метрикой  $\rho$  (2.1.21), если для любого элемента  $q \in G$  решение  $g(t, q)$  определено при всех значениях  $t \in R_1$  и множество  $M$  инвариантно. Если решение  $g(t, q)$  определено для всех значений  $t \in R_1$ , то оно определяет динамическую систему с фазовым пространством  $M = g(R_1, q)$ .

## 2. Устойчивые движения

Рассмотрим полное метрическое пространство  $M = \{G, \rho\}$  и динамическую систему  $g(t, \cdot)$ , используя результаты работ [18, 59, 60, 69].

**Определение 2.1.** Движение  $g(t, q)$  называется *положительно (отрицательно) устойчивым по Лагранжу*, если замыкание полутраектории  $g(R_1^+, q)$  ( $g(R_1^-, q)$ ) в метрике  $\rho$  пространства  $M$  компактно в  $M$ .

Движение, одновременно положительно и отрицательно устойчивое по Лагранжу, называется *устойчивым по Лагранжу*.

О движениях положительно устойчивым, отрицательно устойчивым и устойчивым по Лагранжу будем говорить, что оно устойчиво  $L^+$ , устойчиво  $L^-$  и устойчиво  $L$  соответственно.

Заметим, что если пространство  $M$  компактно, то все движения устойчивы  $L$ . Если полутраектория  $g(R_1^+, q)$  ( $g(R_1^-, q)$ ) содержится в компактном подмножестве пространства  $M$ , то описываемое ею движение устойчиво  $L^+$  (устойчиво  $L^-$ ). Из указанных определений устойчивости по Лагранжу движений и Предложений 1.10 и 1.11 следует

**Предложение 2.1.** Покой и периодическое движение

устойчивы  $L$ . Если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^+$  (устойчиво  $L^-$ ), то множество  $W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) не пусто.

Предложение 2.2. Если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^+$  (устойчиво  $L^-$ ), то расстояние между траекторией  $g(R_1, q)$  движения и множеством  $W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) равно нулю, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(W(\omega, g, q), g(t, q)) = 0 \quad (\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(W(\alpha, g, q), g(t, q)) = 0). \quad (2.2.1)$$

Доказательство. Пусть условия Предложения 2.2 выполнены, т. е. множество  $g(R_1^+, q)$  компактно, а равенство (2.2.1) неверно. Тогда хотя бы для одной  $\omega$ -последовательности  $\{t_n\}$  получим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(W(\omega, g, q), g(t_n, q)) = \delta$  и  $\delta > 0$ . Множество точек  $\{g(t_n, q)\}$  входит в компактное множество, совпадающее с замыканием полутраектории  $\overline{g(R_1^+, q)} = G$ . Следовательно, из ограниченной последовательности  $\{g(t_n, q)\}$  можно извлечь сходящуюся в метрике  $\rho$  подпоследовательность  $\{g(s_n, q)\}$ , предельная точка  $p$  которой не входит в множество  $W(\omega, g, q)$ . Полученное противоречие доказывает Предложение 2.2.

Предложение 2.3. Если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^+$  (устойчиво  $L^-$ ), то множество  $W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) связано.

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда компактное множество  $W(\omega, g, q)$  можно представить в виде суммы двух компактных непересекающихся множеств  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми отлично от нуля, т. е.  $W(\omega, g, q) = A \cup B$  и  $\rho(A, B) = \delta > 0$ . Так как  $A \subset W(\omega, g, q)$  и  $B \subset W(\omega, g, q)$ , то существуют последовательности  $\{t_n\}$  и  $\{s_n\}$  такие, что  $\{g(t_n, q)\} \subset \bar{S}(\delta/3, A)$  и  $\{g(s_n, q)\} \subset \bar{S}(\delta/3, B)$ . Из последовательности  $\{t_n\}$ ,  $\{s_n\}$  извлечем  $\omega$ -подпоследовательность  $\{\bar{t}_n\}$  и  $\{\bar{s}_n\}$  соответственно так, чтобы выполнялись неравенства

$$\bar{t}_1 < \bar{s}_1 < \bar{t}_2 < \bar{s}_2 < \dots < \bar{t}_n < \bar{s}_n < \dots$$

В силу непрерывности функции  $\rho(A, g(t, q))$  по  $t$  получим, что  $\rho(A, g(\bar{t}_n, q)) < \delta/3$ ,  $2\delta/3 \leq \rho(A, B) - \rho(B, g(\bar{s}_n, q)) \leq \leq \rho(A, g(\bar{s}_n, q))$ .

Поэтому найдется такая последовательность  $t_n'$  моментов времени, что  $\bar{t}_n < t_n' < \bar{s}_n$  и  $\rho(A, g(t_n', q)) = \delta/2$ . Множество точек  $\{g(t_n', q)\}$  вложено в компактное замыкание полутраектории  $g(R_1^+, q)$ . Поэтому из последовательности  $\{g(t_n', q)\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $\{g(s_n', q)\}$  к некоторой точке  $r \in W(\omega, g, q)$ . При этом для предельной точки имеем

$$r \in W(\omega, g, q), \quad \rho(A, r) = \delta/2, \quad \rho(B, r) \geq \rho(A, B) - \rho(A, r) = \delta/2.$$

Отсюда вытекает, что  $W(\omega, g, q) \neq A \cup B$ . Полученное противоречие доказывает связность множества  $W(\omega, g, q)$ .

Отметим, что при доказательстве Предложения компактность замыкания полутраектории  $g(R_1, q)$  была использована существенно. Поэтому в случае некомпактных траекторий множество

$W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) может и не быть связным. Отметим также, что обратное ко второй части Предложения 2.1 утверждение несправедливо, т. е. из того, что множество  $W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) непусто, еще не следует, что движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^+$  (устойчиво  $L^-$ ). Следует отметить, что устойчивое  $L^+$  движение может и не быть устойчивым  $L^-$ , а также устойчивое  $L^-$  движение может не обладать свойством устойчивости  $L^+$ . Примеры движений, соответствующие этим замечаниям, приведены в [4, 60, 71].

Определение 2.2. Точка  $q$  пространства  $M$  называется *положительно (отрицательно) устойчивой по Пуассону*, если для любого  $\varepsilon > 0$  и для любого фиксированного момента времени  $s > 0$  ( $s < 0$ ) найдется значение момента времени  $t \in R_1^+$  ( $t \in R_1^-$ ) такое, что  $t > s$  ( $t \leq s$ ) и  $\rho(q, g(t, q)) < \varepsilon$  ( $\rho(q, g(t, q)) \leq \varepsilon$ ).

Точка  $q \in M$  одновременно положительно и отрицательно устойчивая по Пуассону, называется *устойчивой по Пуассону*. Точку положительно устойчивую, отрицательно устойчивую и устойчивую по Пуассону назовем устойчивой  $P^+$ , устойчивой  $P^-$  и устойчивой  $P$  точкой траектории  $g(R_1, q)$ .

Указанное определение точки устойчивой  $P^+$ , устойчивой  $P^-$  и устойчивой  $P$  эквивалентно следующему Предложению.

Предложение 2.4. Точка  $q$  устойчива  $P^+$  тогда и только тогда, когда существует  $\omega$ -последовательность моментов времени  $\{t_n\}$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, g(t_n, q)) = 0. \quad (2.2.2)$$

Доказательство необходимости. Пусть  $q$  — устойчивая  $P^+$  точка. Зафиксируем последовательность положительных чисел  $\varepsilon_n > 0$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  и  $\omega$  — последовательность моментов времени  $t$ . По определению устойчивой  $P^+$  точки существует  $\omega$ -последовательность  $\{t_n\}$  такая, что  $t_n \in R_1^+$ ,  $t_n \geq s_n$  и  $\rho(q, g(t_n, q)) < \varepsilon_n$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в силу непрерывности функции  $\rho$  и выбора  $\varepsilon_n$  из этого неравенства, получим условие (2.2.2).

Доказательство достаточности. Пусть выполнено условие (2.2.2). Тогда, исходя из определения предела, получим устойчивость  $P^+$  точки  $q$ .

Во многих случаях приходится рассматривать устойчивость движения  $g(t, q)$  для дискретного множества значений времени  $t$  таких, что  $t = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). При этом справедливо

Предложение 2.5. Точка  $q$  — устойчива  $P^+$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, g(n, q)) = 0. \quad (2.2.3)$$

Достаточность условия (2.2.3) для устойчивости  $P^+$  точки  $q$  очевидна. Докажем необходимость этого условия. Пусть  $q$  — устойчивая  $P^+$  точка траектории  $g(R_1, q)$ . Тогда согласно Пред-

ложению 2.4 существует хотя бы одна  $\omega$ -последовательность  $\{t_n\}$  моментов времени такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, g(t_n, q)) = 0$ . Представим каждое  $t_n$  в виде  $t_n = [t_n] + s_n$ , где  $[t_n]$  — целая часть величины  $t_n$  и  $0 \leq s_n \leq 1$ . Согласно лемме Больцано—Вейерштрасса из последовательности  $\{s_n\}$  выделим сходящуюся подпоследовательность  $\{\tau_n\}$  к элементу  $\tau$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$ ). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g([t_n], q) = \bar{g}(\tau, q) = p.$$

Отсюда в силу непрерывности метрики  $\rho$  и движения  $g(t, q)$  получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g([t_n], q), g(\tau, q)) = 0. \quad (2.2.4)$$

Таким образом, точка  $p$  является  $\omega$ -предельной точкой траектории  $g(R_1, q)$ , соответствующей целым значениям  $[t_n]$  времени  $t$ .

Допустим, что условие (2.2.3) не выполнено, т. е. последовательность  $q_n = g(n, q)$  не имеет  $\omega$ -предельную точку при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда в силу (2.2.4) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g([t_n] + s_n - \tau, q), g(-\tau, q)) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{g}([t_n] + s_n - \tau, q), \bar{g}([t_n], q)) = 0, \end{aligned}$$

т. е. последовательность с целочисленными аргументами  $[t_n]$  имеет предельную точку. Это противоречит принятому допущению и доказывает Предложение.

Предложение 2.6. Если  $q$  — устойчивая  $P^+$  (устойчивая  $P^-$  или устойчивая  $P$ ) точка траектории  $g(R_1, q)$ , то любая точка этой траектории устойчива  $P^+$  (устойчива  $P^-$  или устойчива  $P$ ).

Доказательство. Пусть  $q$  — устойчивая  $P$  точка траектории  $g(R_1, q)$ . Поэтому согласно Предложению 2.4 найдется  $\omega$ -последовательность  $\{t_n\}$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, g(t_n, q)) = 0$ . Пусть  $p = g(s, q)$  — произвольная точка траектории  $g(R_1, q)$ . Рассмотрим последовательность  $\{s_n = t_n + s\}$  моментов времени  $t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{g}(s, q), g(t_n + s, q)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g(s, q), \bar{g}(\tau, g(t_n, q))) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g(s, q), g(\tau, q)) = 0, \end{aligned}$$

т. е. выполнено условие (2.2.2) и  $p$  является устойчивой  $P^+$  точкой траектории  $g(R_1, q)$ .

Учитывая Предложение 2.6, в дальнейшем будем говорить об устойчивых  $P^+$ , устойчивых  $P^-$  и устойчивых  $P$  траекториях и движениях.

Предложение 2.7. Если  $g(t, q)$  — устойчивое  $\Pi^+$  (устойчивое движение), то выполнено включение

$$g(t, q) \subset \overline{g(R_1^+, q)}, \quad (g(t, q) \subset \overline{g(R_1^-, q)}). \quad (2.2.5)$$

Доказательство. Пусть движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\Pi^+$ , а включение (2.2.5) не выполнено. Тогда найдется точка  $g(s, q) = p$ , которая не входит в множество  $g(R_1^+, q)$ . По условию  $p$  — устойчивая  $\Pi^+$  точка и для нее существует  $\omega$ -последовательность  $\{t_n\}$  времени  $t$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, g(t_n, q)) = 0$ . Следовательно,  $\omega$ -предельная точка последовательности  $\{g(t_n, q)\}$  не входит в замкнутое множество  $g(R_1^+, q)$ . Полученное противоречие доказывает Предложение 2.7.

Предложение 2.8. Если движение  $g(t, q)$  — одновременно устойчиво  $\Pi^+$  и устойчиво  $\mathcal{L}^+$ , то оно устойчиво  $\mathcal{L}$ .

Доказательство. Согласно Предложению 2.7 выполнено включение (2.2.5). В силу устойчивости  $\mathcal{L}^+$  движения  $g(t, q)$  множество  $g(R_1, q)$  компактно. Следовательно, вся траектория  $g(R_1, q)$ , вложенная в компактное множество  $\overline{g(R_1^+, q)}$ , имеет компактное замыкание  $\overline{g(R_1, q)}$ . Это означает, что движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}$ .

Справедливо двойственное предложение об устойчивости  $\mathcal{L}$  движения, являющегося одновременно устойчивым  $\Pi^-$  и устойчивым  $\mathcal{L}^-$ .

Введем понятие *возвращаемости* областей по Биркгофу или *устойчивости Б* сокращенно.

Определение 2.3. Динамическая система  $g(t, \cdot)$  называется системой, обладающей свойством возвращаемости областей (устойчивой  $B$ ), если для любого подмножества  $A$  пространства  $M$  и для любого фиксированного момента времени  $s \in R_1$  найдется значение времени  $t \in R_1$  такое, что  $|t| > s$  и множества  $A$  и  $A_t$  имеют непустое пересечение, т. е.  $A \cap A_t \neq \emptyset$ .

Определение 2.4. Точка  $p \in M$  называется положительно (отрицательно) *блуждающей* по отношению к динамической системе  $g(t, q)$ , если существуют  $\varepsilon > 0$  и  $s \in R_1^+$  ( $s \in R_1^-$ ) такие, что

$$S(\varepsilon, p) \cap g(t, S(\varepsilon, p)) = \emptyset \quad (2.2.6)$$

для всех  $t \geq s$  ( $t \leq s$ ).

Применяя к равенству (2.2.6) преобразование с параметром  $-t$ , получим

$$S(\varepsilon, p) \cap g(-t, S(\varepsilon, p)) = \emptyset,$$

т. е. точка  $p$ , блуждающая при  $t \rightarrow \infty$ , блуждает и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Обозначим через  $\Omega$  множество всех блуждающих точек движения  $g(t, q)$ . Справедливо

Предложение 2.9. Множество  $\Omega$  открыто в пространстве  $M$  и инвариантно относительно динамической системы  $g(t, \cdot)$ . Множество  $\Omega' = M \setminus \Omega$  неблуждающих точек замкнуто в  $M$  и инвариантно относительно динамической системы  $g(t, \cdot)$ .

**Доказательство.** Пусть  $p \in M$  — блуждающая точка и  $g(s, q) = r$  — произвольная точка траектории движения  $g(t, q)$ . Применяя к равенству (2.2.6) преобразование с параметром  $s$ , будем иметь

$$g(s, S(\varepsilon, q)) \cap g(s, g(t, S(\varepsilon, q))) = \emptyset$$

для всех  $t \geq s$ , т. е. точка  $r$  также блуждает. Из определения блуждающей точки непосредственно следует, что в множество  $\Omega$  каждая блуждающая точка  $q$  входит вместе с некоторой своей  $\varepsilon$ -окрестностью  $S(\varepsilon, q)$ . Следовательно,  $\Omega$  — открытое множество, а его дополнение  $\Omega'$  — множество неблуждающих точек — замкнуто и инвариантно.

Если ранее рассматривались блуждающие и неблуждающие точки, то Предложение 2.9 позволяет говорить о блуждающих и неблуждающих траекториях и движениях.

Всякая точка  $q$  множества  $\Omega'$  характеризуется тем, что для любой ее  $\varepsilon$ -окрестности  $S(\varepsilon, q)$  найдутся сколь угодно большие значения  $t$  времени, что

$$S(\varepsilon, q) \cap g(t, S(\varepsilon, q)) \neq \emptyset. \quad (2.2.7)$$

Сравнивая выражение (2.2.7) с определением устойчивой  $P^+$ , а также устойчивой  $P^-$  точки, заметим, что каждая точка, являющаяся устойчивой  $P^+$  или неустойчивой  $P^-$ , не блуждает. Обратное утверждение не всегда имеет место. Примеры неблуждающих точек, не являющихся устойчивыми по Пуассону ни в одном направлении, приведены в [5, 60].

**Предложение 2.10.** Если в пространстве  $M$  найдется хотя бы одна точка  $q \in M$  такая, что движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^+$  или устойчиво  $L^-$ , то множество  $\Omega'$  неблуждающих точек пространства  $M$  не пусто.

**Доказательство.** Для определенности положим, что движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^+$ . Тогда по Предложению 2.1 множество  $W(\omega, g, q)$  не пусто и компактно. Множество  $W(\omega, g, q)$  рассмотрим как пространство  $M$  движения  $g(t, q)$ . Допустим, что множество  $\Omega'$  неблуждающих точек из  $W(\omega, g, q)$  пусто. Тогда для каждой точки  $p \in W(\omega, g, q)$  найдутся окрестность  $S(\varepsilon, p)$  и значение  $s$  времени, что будет выполнено равенство (2.2.6). Согласно соотношению (2.2.6) окрестность  $S(\varepsilon, p)$  движением  $g(t, q)$  будет покинута за время  $s$ . В силу компактности множества  $W(\omega, g, q)$  из числа окрестностей  $S(\varepsilon, p)$  выберем конечное  $\varepsilon$ -покрытие  $S(\varepsilon, q_1) = S_1, S(\varepsilon, q_2) = S_2, \dots, S(\varepsilon, q_n) = S_n$  такое, что  $\bigcup_{i=1}^n S_i = W(\omega, g, q)$ . По допущению каждое из множеств  $S_i$  может быть покинуто движением  $g(t, q)$  за конечное время  $t_i$ .

Следовательно, за время  $t = \sum_{i=1}^n t_i$  траектория движения  $g(t, q)$  целиком покидает пространство  $W(\omega, g, q)$ . Как известно, этого

быть не может. Полученное противоречие доказывает Предложение 2.10.

Предложение 2.11. Если пространство  $M$  компактно, то для любого  $\varepsilon > 0$  существует конечное время  $s = t(\varepsilon)$  такое, что всякое блуждающее движение по истечении времени  $s$  входит в множество  $S(\varepsilon, \Omega)$  и в дальнейшем остается там.

Доказательство. Множество  $M \setminus S(\varepsilon, \Omega) = M_1$  — компактно и состоит из всех блуждающих точек. Покрывая множество  $M$  конечным  $\varepsilon$ -покрытием  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , убеждаемся в том, что каждое из множеств  $S_i$  траектория движения  $g(t, q)$  может покинуть за конечное время  $t_i$ . Следовательно, множество  $M$  в целом будет покинуто за время  $s = \sum_{i=1}^n t_i = t(\varepsilon)$ .

### 3. Рекуррентные движения

Пусть  $g(t, q)$  — динамическая система, определенная в полном метрическом пространстве  $M$ , и  $A$  — подмножество  $M$ .

Определение 3.1 [60]. Множество  $A \subset M$  называется *минимальным по Биркгофу*, если оно непусто, замкнуто и инвариантно относительно динамической системы  $g(t, \cdot)$ , а также не имеет истинного подмножества, обладающего этими тремя свойствами одновременно.

Среди минимальных множеств пространства  $M$  наибольший интерес представляют компактные минимальные множества.

Изложим совокупность предложений, характеризующих рекуррентные движения, при этом постоянно будем следовать работе [60].

Предложение 3.1. Всякое инвариантное компактное множество содержит минимальное множество.

Доказательство. Пусть  $\mathcal{F}$  — инвариантное компактное подмножество пространства  $M$ . Может оказаться, что  $\mathcal{F}$  — минимальное множество. Если это не так, то тогда существует инвариантное компактное подмножество  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ . Если  $\mathcal{F}_1$  — минимальное множество, то Предложение доказано. В противном случае, продолжая этот процесс, за какое-то конечное число шагов получим минимальное множество  $\mathcal{F}_n$ . Альтернативный вариант — счетная последовательность вложенных друг в друга инвариантных компактных множеств

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \dots \supset \mathcal{F}_n \supset \dots$$

Пересечение  $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \mathcal{F}_n$  непусто, инвариантно и компактно.

Действительно, если  $q \in \mathcal{F}_\infty$ , то  $q \in \mathcal{F}_n$  для любого  $n$ , и в силу инвариантности множества  $\mathcal{F}_n$  траектория  $g(R_1, q) \subset \mathcal{F}_n$  при любом  $n$ . Поэтому  $g(R_1, q) \subset \mathcal{F}_\infty$ .

Если множество  $\mathcal{F}_\infty$  не является минимальным, то построим следующее инвариантное компактное множество  $\mathcal{F}_{\omega+1} \subset \mathcal{F}_\infty$  и т. д. Если  $\beta$  — предельное трансфинитное число и построены все  $\mathcal{F}_\alpha$  с номером  $\alpha < \beta$ , то  $\mathcal{F}_\beta$  обозначим множество  $\mathcal{F}_\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} \mathcal{F}_\alpha$ . При

этом получим трансфинитную последовательность вложенных друг в друга инвариантных компактных множеств

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \dots \supset \mathcal{F}_n \supset \dots \supset \mathcal{F}_\omega \supset \mathcal{F}_{\omega+1} \supset \dots \supset \mathcal{F}_\beta \supset \dots$$

По теореме Бэра найдется такое трансфинитное число второго класса  $\beta$ , что  $\mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\beta+1}$ , т. е. множество  $\mathcal{F}_\beta$  не имеет инвариантного, компактного и истинного подмножества. Следовательно, оно является минимальным.

Предложение 3.2. Если пространство  $M$  компактно, то оно содержит минимальное множество.

Доказательство. По Определению 2.2 пространство  $M$  инвариантно. Остается воспользоваться Предложением 3.1.

Предложение 3.3. Если движение  $g(t, q)$  — устойчиво  $L^+$  (устойчиво  $L^-$  или устойчиво  $L$ ), то множество  $W(\omega, g, q)$  ( $W(\alpha, g, q)$ ) или  $W(\omega, g, q) \cup W(\alpha, g, q)$  содержит минимальное множество.

Доказательство. Множество  $W(\omega, g, q)$  будем рассматривать как фазовое пространство и воспользуемся Предложением 3.2.

Предложение 3.4. Множество  $A$  минимально тогда и только тогда, когда для любой его точки  $q \in A$  замыкание траектории  $g(R_1, q)$  совпадает с этим множеством, иными словами, множество  $A$  минимально только в том случае, когда всякая траектория, содержащаяся в  $A$ , всюду плотна в нем, т. е.

$$\overline{g(R_1, q)} = A \quad (2.31)$$

для всех  $q \in A$ .

Доказательство необходимости. Пусть  $A$  — минимальное множество,  $q$  — его произвольная точка и равенство (2.3.1) не выполнено, т. е. множество  $Y = \overline{g(R_1, q)} \subset A$  и  $A \setminus Y \neq \emptyset$ . Следовательно,  $Y$  — минимальное множество, что противоречит минимальности множества  $A$ .

Доказательство достаточности. Пусть равенство (2.3.1) выполнено для любой точки  $q$  множества  $A$ , и  $A$  не является минимальным. Тогда существует хотя бы одно непустое, замкнутое и инвариантное подмножество  $B$  множества  $A$  такое, что  $B \subset \overline{g(R_1, q)}$  и  $B \cap g(R_1, q) = \emptyset$ . Иными словами,  $B \subset A \setminus \overline{g(R_1, q)}$ . Пусть  $p \in B$  и, следовательно, является предельной точкой для траектории  $g(R_1, q)$ . Рассмотрим траекторию  $g(R_1, q)$ . По условию  $\overline{g(R_1, p)} = A$  и  $\overline{g(R_1, p)} \subset g(B, p) = B$ . Полученное противоречие доказывает достаточность условия (2.3.1) для минимальности множества  $A$ .

Определение 3.2 [60]. Движение  $g(t, q)$  называется *рекуррентным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $l = l(\varepsilon) > 0$ , что любая дуга  $g(s \leq t \leq s+l, q)$  траектории этого движения на интервале времени  $l$  аппроксимирует всю траекторию с точностью до  $\varepsilon$  (рис. 2.1)

$$g(R_1, q) \subset S(\varepsilon, g(s \leq t \leq s+l, q)). \quad (2.3.2)$$

Предложение 3.5. Если  $g(t, q)$  — рекуррентное движение, то оно одновременно устойчиво  $L$  и устойчиво  $P$ .

Доказательство. Согласно Предложению 1.2 дуга  $g(s \leq t \leq s+l, q)$  конечной длины  $l$  траектории  $g(R_1, q)$  компактна. Поэтому траектория  $g(R_1, q)$ , вложенная по включению (2.3.2) в шар  $S$ , компактна, т. е. движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$ . В силу рекуррентности движения  $g(t, q)$  для любого числа  $\varepsilon > 0$  и в любой момент времени  $t > 0$  можно указать момент времени  $s \in R_1$  такой, что  $|s| \geq t$  и  $\rho(q, g(s, q)) \leq \varepsilon$ . Это означает, что точка  $q$  — устойчива  $P$ , а по Предложению 2.6 вся траектория устойчива  $P$ .

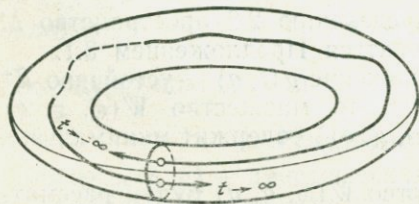


Рис. 2.1. Схема рекуррентного эллиптического движения внутри недеформированного двухмерного тора

Отметим, что обратное утверждение не всегда имеет место, т. е. из устойчивости  $L$  и  $P$  движения еще не следует его рекуррентность. Связь между рекуррентными движениями и минимальными множествами устанавливает

Теорема Биркгофа [91]. Движение  $g(t, q)$  рекур-

рентно тогда и только тогда, когда замыкание его траектории компактно и минимально.

Доказательство необходимости. Пусть движение  $g(t, q)$  рекуррентно и  $Y = \overline{g(R_1, q)}$ . Компактность множества  $Y$  установлена Предложением 3.5. Докажем, что  $Y$  — минимальное множество. Допустим, что это не так. Тогда по Предложению 3.2 компактное множество  $Y$  содержит истинное минимальное подмножество  $A$  такое, что  $q \notin A$ . Поэтому расстояние между компактными множествами  $q$  и  $A$  положительно, т. е.  $\rho(q, A) = a > 0$ . Зафиксируем  $\varepsilon < a/2$  и  $l(\varepsilon)$  выберем в соответствии с Определением 3.1. Пусть  $p \in A$ . Исходя из условия 2', для данных чисел  $\varepsilon$  и  $l$  и точки  $q$  выберем  $\delta$  так, чтобы  $\rho(g(t, p), g(t, q_1)) < \varepsilon$  для всех  $|t| \leq l$ , как только  $\rho(p, q_1) < \delta$ . Поскольку  $p$  входит в замыкание траектории  $g(R_1, q)$ , то в шаре  $S(\delta, p)$  найдется точка  $r$ , соответствующая моменту времени  $s$  и  $\rho(p, g(s, q)) < \delta$ . Тогда  $\rho(g(t, p), g(t+s, q)) < \varepsilon$  для всех  $|t| < l$ . При этом в силу включения  $g(t, p) \in A$  имеет место неравенство  $\rho(q, g(t+s, q)) < \varepsilon$  для всех  $|t| < l$ . Отсюда вытекает, что  $\varepsilon < a - \varepsilon < \rho(q, g(t+s, q))$ . Следовательно, точка  $q$  не попадает в  $\varepsilon$ -окрестность дуги на интервале времени  $2l$  с средней точкой в  $g(s, q)$ . Это противоречит рекуррентности движения  $g(t, q)$ .

Доказательство достаточности. Пусть  $Y = \overline{g(R_1, q)}$  компактно и минимально, но движение  $g(t, q)$  не рекуррентно. Стало быть, существуют число  $\varepsilon > 0$  и последовательность интервалов времени  $(t_n - l_n, t_n + l_n)$  с возрастающими вместе с номером  $n$  длинами, для которых каждая из дуг  $g(t_n - l_n \leq t \leq t_n + l_n, q)$  находится на расстоянии, превышающем  $\varepsilon$ , от некоторой

точки  $q_n = g(s, q)$  траектории  $g(R_1, q)$ . Всякая подпоследовательность  $\{x_n\}$  точек  $q_n$  имеет предельную точку, ибо  $Y$  компактно.

Рассмотрим последовательность точек  $\{g_n = g(t_n, q)\}$ . Любая ее подпоследовательность  $\{y_n\}$  также имеет предельную точку. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Рассмотрим движение  $g(t, x)$ . Возьмем любую дугу временной длины  $2l$ :  $g(s \leq t \leq s + 2l, q)$ , где  $l$  — сколь угодно большое фиксированное число. Согласно условию 2' для данных  $\varepsilon/3 > 0$  и  $l > 0$  выберем  $\delta > 0$  так, чтобы из неравенства  $\rho(x, q) < \delta$  следовало  $\rho(g(t, q), g(t, x)) < \varepsilon/3$  для всех  $|t| \leq l$ . Далее можно найти номер  $n$ , при котором одновременно выполняются неравенства  $t_n > l$ ,  $\rho(x, x_n) < \delta$ ,  $\rho(y_n, p) < \varepsilon/3$ .

Тогда для любого фиксированного  $t \in [-l, l]$  имеем  $\rho(g(t, x), g(t, x_n)) < \varepsilon/3$ . Однако в зависимости от выбора точки  $q_n$  и с учетом  $|t| < l < t_n$  имеем  $\rho(g_n, g(t, g_n)) = \rho(g_n, g(t + t_n, y_n)) \geq \varepsilon$ .

Сопоставляя эти неравенства с неравенством  $\rho(g_n, p) < \varepsilon/3$ , получаем  $\rho(g(t, q), q) > \varepsilon/3$  для всех  $|t| < l$  для всех  $|t| < l$ .

Так как число  $l$  выбрано произвольно, то последнее неравенство имеет место для всех  $t \in R_1$ , т. е.  $\rho(p, g(t, q)) \geq \varepsilon/3$ . В силу замкнутости множества  $Y$  точка  $y \in Y$  и  $x \in Y$ , а в силу инвариантности множества  $Y$  траектория  $g(R_1, x) \subset Y$ . В таком случае непустое замкнутое инвариантное множество  $\overline{g(R_1, q)} \subset Y$  является собственным подмножеством  $Y$ , так как  $g(R_1, x)$  не содержит  $q$ . Это противоречит минимальности множества  $Y$ . Тем самым доказана рекуррентность движения  $g(t, q)$ .

**О п р е д е л е н и е 3.3.** Множество  $A$  действительных чисел называется *относительно плотным* в  $R_1$ , если существует такое число  $l > 0$ , что любой интервал  $(t, t+l)$  длины  $l$  содержит хотя бы один элемент множества  $A$ .

Критерий рекуррентности движения дает следующее

**П р е д л о ж е н и е 3.6.** Устойчивое  $\mathcal{L}$  движение  $g(t, q)$  рекуррентно тогда и только тогда, когда для любого числа  $\varepsilon > 0$  множество моментов времени  $t \in R_1$ , для которых

$$R' = \{t | t \in R_1, \rho(q, g(t, q)) < \varepsilon\}, \quad (2.3.3)$$

относительно плотно в  $R_1$ .

**Доказательство необходимости.** Пусть движение  $g(t, q)$  рекуррентно. Тогда для фиксированного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $l(\varepsilon) > 0$ , что любая дуга на интервале времени  $l$  аппроксимирует всю траекторию  $g(R_1, q)$ , и в частности точку  $q$ . Следовательно, множество  $M$  относительно плотно в  $R_1$ .

**Доказательство достаточности.** Пусть множество  $R'$ , определяемое соотношением (2.3.3), относительно плотно в  $R_1$ , где  $\varepsilon$  — произвольное фиксированное число. Допустим, что движение  $g(t, q)$  не рекуррентно. Множество  $Y = \overline{g(R_1, q)}$  для устойчивого  $\mathcal{L}$  движения  $g(t, q)$  компактно и согласно Предложению 3.1 имеет компактное минимальное множество  $A \subset Y$ , в

которое точка  $q$  не входит. Поэтому расстояние  $\rho(q, A) = a > 0$ .

Пусть  $p \in A$  и положим  $\varepsilon < a/2$ . Для данных  $a$ ,  $\varepsilon$  и  $p$  выберем  $\delta$  так, чтобы из неравенства  $\rho(r, q) < \delta$  следовало условие  $\rho(g(t, q), g(t, r)) < \varepsilon$  для всех  $t \in [0, l]$ . Так как  $r \in A \subset g(R_1, q)$ , то существует такое  $s$ , что  $\rho(q, g(s, q)) < \delta$ . Тогда  $\rho(g(s+t, q), g(t, q)) < \varepsilon$  для всех  $t \in [0, l]$ . Отсюда при  $s \leq t \leq s+l$  имеем

$$\varepsilon < a - \varepsilon < \rho(q, A) - \rho(A, g(t, q)) \leq \rho(q, g(t, q)).$$

Следовательно, точка  $g(t, q)$  в течение всего замкнутого промежутка времени  $[s, s+l]$  не возвращается в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $q$ , что противоречит неравенству (2.3.3) и определению числа  $l(\varepsilon)$ . Тем самым доказана и достаточность Предложения.

**Предложение 3.7.** Если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$  и  $D(g)$  — совокупность всех минимальных множеств, принадлежащих замыканию  $Y$  траектории  $g(R_1, q)$ , то для любого числа  $\varepsilon > 0$  множество

$$R(\varepsilon, q) = \{t/t \in R_1, \rho(D(g), g(t, q)) < \varepsilon\} \quad (2.3.4)$$

равномерно относительно плотно в  $R_1$  для всех  $q \in Y$ , т. е. число  $l(\varepsilon) > 0$ , предполагаемое в (2.3.4), одно и то же для всех  $q \in Y$  и не зависит от них.

**Доказательство.** Покажем относительную плотность (2.3.4) в  $R_1$ . Допустим противное. Тогда для возрастающей последовательности положительных чисел  $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \infty$ , найдутся значения  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  и число  $\varepsilon > 0$  такие, что  $\rho(D(g), g(t_n \leq t \leq t_n + l_n, q)) > \varepsilon$ .

В силу компактности  $Y$  из последовательности точек  $\{g_n = g(t_n, q)\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Для сокращения записи последней сохраним прежние обозначения и положим  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = p$ . Тогда  $\rho(D(g), g(t, p)) \geq \varepsilon$

и оно влечет неравенство  $\rho(D(g), \overline{g(R_1, p)}) > \varepsilon$ .

С другой стороны,  $p \in Y$ , и в силу инвариантности множества  $Y$  выполняется включение  $g(R_1, p) \subset Y$ . Поэтому множество  $W(\omega, g, q)$  согласно Предложению 3.3 содержит в себе компактное минимальное множество  $A \subset Y$  и  $A \subset D(g)$ . Так как  $A \subset \overline{g(R_1, p)} \subset \overline{g(R_1, q)}$ , то справедливо неравенство  $\rho(A, D(g)) \geq \varepsilon > 0$ . Полученное противоречие доказывает, что множество  $R(\varepsilon, q)$  при фиксированном  $q \in Y$  относительно плотно в  $R_1$ . Докажем, что оно равномерно относительно плотно в  $R_1$ . Зафиксируем некоторое число  $\varepsilon > 0$  и для данного  $\varepsilon$  построим конечную  $\varepsilon$ -сеть множества  $Y$ . В пределах каждого подмножества, входящего в эту  $\varepsilon$ -сеть, возьмем произвольно по одной точке и для каждой из этих точек построим соответствующее множество (2.3.4). Последние по доказанному выше относительно плотны в  $R_1$  и им соответствуют числа  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , и пусть  $l = \max_i l_i$ . Очевидно,

число  $l$  для данного  $\varepsilon$  пригодно для установления относительной плотности в  $R_1$  любого множества вида (2.3.4) независимо от  $q \in Y$ .

#### 4. Почти периодические и условно-периодические движения

Изложим некоторые свойства этих движений. При этом будем следовать [18, 49, 60].

Пусть  $M$  — по-прежнему полное метрическое пространство и  $g(t, \cdot)$  — динамическая система, определенная на  $M$ .

Определение 4.1. Движение  $g(t, q)$  называется *почти периодическим*, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  множество моментов времени  $s \in R_1$ , для которых неравенство

$$\rho(g(t, q), g(t+s, q)) < \varepsilon \quad (2.4.1)$$

выполнено для всех  $t \in R_1$ , относительно плотно в  $R_1$ . При этом  $s$  называется  $\varepsilon$ -смещением движения  $g(t, q)$ .

Заметим, что если движение  $g(t, q)$  периодически с периодом  $\tau$ , то любое число вида  $n\tau$ , где  $n$  — целое, также является периодом. Отсюда периодическое движение имеет сколь угодно большие периоды, каждый из которых может считаться смещением  $t_n$ , удовлетворяющим неравенствам (2.4.1) при произвольном  $\varepsilon > 0$ . Поэтому периодические движения являются частным случаем почти периодического движения. В свою очередь, почти периодические движения суть частные случаи рекуррентных движений, а именно справедливо

Предложение 4.1 [60]. Если  $g(t, q)$  — почти периодическое движение, то оно рекуррентно.

Доказательство. Согласно Предложению 3.6 достаточно установить, что множество (2.3.3) относительно плотно в  $R_1$ . Перепишем неравенство (2.4.1) при  $t=0$ :

$$\rho(q, g(s, q)) < \varepsilon.$$

Далее вспомним, что множество  $\{s\}$  моментов времени  $s \in R_1$ , удовлетворяющих этому неравенству, относительно плотно в  $R_1$ . Это замечание доказывает Предложение.

Отметим, что обратное утверждение не верно. А именно, существует рекуррентное движение, не являющееся почти периодическим [60].

Предложение 4.2. Если  $g(t, q)$  — почти периодическое движение, то оно равномерно непрерывно как функция аргумента  $t$  и устойчиво  $L$ .

Доказательство. Пусть движение  $g(t, q)$  почти периодически и  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. Положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$  и обозначим через  $l$  число, участвующее в определении относительно плотного множества и соответствующее данному  $\varepsilon$ . Движение  $g(t, q)$ , представляющее собой непрерывную функцию аргумента  $t$ , по теореме Кантора равномерно непрерывно на отрезке  $[-1, 1+l]$  и множество

$$M_1 = \{p \in G \mid p = g(t, q), -l/2 \leq t \leq l/2\}$$

компактно в пространстве  $M$ . В силу равномерной непрерывности  $g(t, q)$  на отрезке  $[-1, 1+l]$  выберем число  $\delta(\varepsilon_1) > 0$  такое,

что для  $|t_1 - t_2| < \delta$  и  $t_1, t_2 \in [-1, 1+l]$  выполняется неравенство

$$\rho(g(t_1, q), g(t_2, q)) < \varepsilon_1.$$

Пусть  $s_1$  и  $s_2$  — произвольные моменты времени из  $R_1$ , для которых также выполнено неравенство  $|s_1 - s_2| < \delta$ . Если выбрать  $s$  так, чтобы  $s_1 + s \in [0, l]$ , то  $s_2 + s \in [-1, l+1]$ . Далее положим  $\tau_1 = t_1 + s$ ,  $\tau_2 = t_2 + s$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{g}(s_1, q), \tilde{g}(s_2, q)) &\leq \rho(g(s_1, q), g(\tau_1, q)) + \\ &+ \rho(g(\tau_1, q), g(\tau_2, q)) + \rho(\tilde{g}(\tau_2, q), g(s_2, q)) < \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это неравенство и доказывает равномерную непрерывность почти периодического движения как функции аргумента  $t$  со значениями в  $M$ . Покажем теперь, что множество  $M_\varepsilon$  есть  $\varepsilon$ -сеть для траектории  $g(R_1, q)$ . Для этого зафиксируем произвольный момент времени  $t_0 \in R_1$  и  $\varepsilon$ -смещение  $\tau$  движения  $g(t, q)$ , удовлетворяющее неравенству  $-l/2 \leq t_0 + \tau \leq l/2$ . Тогда  $\rho(g(t_0, q), g(t_0 + \tau, q)) \leq \varepsilon$ , а так как  $t_0 + \tau \in [-l/2, l/2]$ , множество  $M_\varepsilon$  является  $\varepsilon$ -сетью для  $g(R_1, q)$ . Отсюда и из компактности в  $M$  множества  $M_\varepsilon$  вытекает ограниченность траектории  $g(R_1, q)$ , т. е. устойчивость  $\mathcal{L}$  движения  $g(t, q)$ . Что и требовалось доказать.

Определение 4.2. Движение  $g(t, q)$  обладает свойством  $S^+$  ( $S^-$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что как только  $\rho[g(t_1, q), g(t_2, q)] < \delta$  выполняется неравенство  $\rho[g(t_1 + t, q), g(t_2 + t, q)] < \varepsilon$  для всех  $t \in R_1^+$  ( $t \in R_1^-$ ).

Если движение  $g(t, q)$  обладает одновременно свойствами  $S^+$  и  $S^-$ , то говорят, что оно обладает свойством  $S$ .

Предложение 4.3. Если  $g(t, q)$  — почти периодическое движение, то оно обладает свойством  $S$ .

Доказательство. Зафиксируем число  $\varepsilon > 0$  и для данного  $\varepsilon/3$  определим число  $l$  и соответствующее относительно плотное в  $R_1$  множество  $A$  сдвигов движения  $g(t, q)$ .

В силу компактности множества  $Y = \overline{g(R_1, q)}$  и условия 2' существует такое число  $\delta > 0$ , что для любой пары точек  $q_1 \in Y$  и  $q_2 \in Y$  из неравенства  $\rho(q_1, q_2) < \delta$  следует  $\rho[g(t, q_1), g(t, q_2)] < \varepsilon/3$  для всех  $t \in [0, l]$ . Покажем, что условие  $\rho[g(t_1, q), g(t_2, q)] < \delta$  влечет за собой неравенство  $\rho[g(t_1 + t, q), g(t_2 + t, q)] < \varepsilon$  для всех  $t \in R_1$ . Зафиксируем произвольный момент времени  $s$  и определим смещение движения  $g(t, q)$ , соответствующее числу  $\varepsilon/3$  и удовлетворяющее неравенству  $-s \leq \tau \leq -s + l$ . При этом будем иметь

$$\rho[g(t_1 + s, q), g(t_1 + s + \tau, q)] < \varepsilon/3,$$

$$\rho[g(t_2 + s, q), g(t_2 + s + \tau, q)] < \varepsilon/3,$$

$$\rho[g(t_1 + s + \tau, q), g(t_2 + s + \tau, q)] < 2\varepsilon/3.$$

Отсюда вытекает, что для всех  $s \in R_1$  имеем

$$\rho[g(t_1+s, q), g(t_2+s, q)] < \varepsilon.$$

Предложение 4.4. Если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\Pi$ - и обладает свойством  $S^+$  (или устойчиво  $\Pi^+$  и обладает свойством  $S^-$ ), то оно почти периодически.

Доказательство. Сначала докажем рекуррентность движения  $g(t, q)$ . Допустим обратное, т. е. пусть при условиях Предложения движения  $g(t, q)$  не рекуррентно. Тогда в компактном множестве  $Y = \overline{g(R_1, q)}$  найдется минимальное компактное множество  $A \subset Y$ , которое не содержит в себе точку  $q \in M$ . Поэтому  $\rho(q, A) = a$  и  $a > 0$ .

Пусть  $p$  — произвольная точка множества  $W(\alpha, g, q)$  и, стало быть, существует последовательность точек  $\{q_n\}$ ,  $q_n = g(-t_n, q)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ . Определим номер  $k$  так, чтобы для  $n \geq k$  было  $\rho(q_n, p) < \delta/2$ , где  $\delta$  входит в определение свойства  $S^+$ . Тогда  $\rho(q_n, q_{n+m}) < \delta$ , и в силу свойства  $S^+$  имеем  $\rho[g(t, q_n), g(t, q_{n+m})] < \varepsilon$  для всех  $t \in R_1$ . Зафиксируем  $t$  и  $n$  и устремим  $m$  к бесконечности. Тогда в силу условия 2' выполняется равенство  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho[g(t, q_{n+m}), g(t, p)] = 0$ . Отсюда вытекает неравенство

$$\rho[g(t, q_n), g(t, p)] \leq \varepsilon \text{ для всех } t \in R_1^+, \text{ как только } \rho(q_n, p) < \delta/2.$$

Пусть  $p \in A$ . Положим  $\varepsilon = a/2$ , и для этого  $\varepsilon$  и движения  $g(t, q)$  подбираем в силу свойства  $S^+$  число  $\delta > 0$ . Тогда найдется точка  $g_n = g(-t_n, q)$ , где  $t_n > 0$  и  $\rho(q_n, q) < \delta/2$ . По доказанному выше  $\rho[g(t_n, p), g(t_n, q_n)] \leq \varepsilon = a/2$ . Так как  $g(t_n, p) \in A$ , то приходим к противоречию с предположением, что  $\rho(q, A) = a$ . Полученное противоречие доказывает, что движение  $g(t, q)$  рекуррентно.

Пусть движение  $g(t, q)$  рекуррентно и обладает свойством  $S^+$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и в силу свойства  $S^+$  найдем  $\delta(\varepsilon/2) > 0$  такое, чтобы из неравенства  $\rho[g(t_1, q), g(t_2, q)] < \varepsilon/2$  следовало бы  $\rho[g(t_1+t, q), g(t_2+t, q)] < \varepsilon/2$  для всех  $t \in R_1^+$ . В силу рекуррентности движения  $g(t, q)$  для числа  $\delta/2$  существует такое  $l > 0$ , что в любом интервале  $(t_0, t_0+l)$  найдется число  $\tau$ , для которого будет выполнено неравенство  $\rho[q, g(\tau, q)] < \delta/2$ . Докажем, что  $\tau$  есть  $\varepsilon$ -смещение движения  $g(t, q)$ . Действительно, для данного  $\delta$  в силу условия 2' и компактности  $Y = \overline{g(R_1, q)}$  найдется  $\sigma > 0$  и  $\sigma < \delta$  такое, что если  $\rho[g(t_1, q), g(t_2, q)] < \delta$ , то  $\rho[g(t_1+\tau, q), g(t_2+\tau, q)] < \delta/2$ . Пусть  $t$  — произвольный момент времени из  $R_1$ . Так как рекуррентное движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\Pi$ , то найдется такой момент времени  $t_0 \geq t$ , что  $\rho[q, g(t_0, q)] < \sigma$ . Тогда в силу выбора числа  $\sigma$  будем иметь  $\rho[g(t_0, q), g(t_0+\tau, q)] < \delta/2$ . Сопоставляя последнее с неравенством, определяющим число  $\tau$ , получим  $\rho[q, g(t_0+\tau, q)] < \delta$  и в силу свойства  $S^+$  —  $\rho[g(t-t_0, q), g(t+\tau, q)] < \varepsilon/2$ . Тогда из свойства  $S^+$  и неравенства  $\sigma < \delta$  вытекает, что  $\rho[g(t, q),$

$g(t+\tau, q)] < \varepsilon/2$ . Два последних неравенства дают  $\rho[g(t, q), g(t+\tau, q)] < \varepsilon$  для всех  $t \in R_1$ . Отсюда вместе с относительной плотностью чисел  $\tau$  и следует почти периодичность. Тем самым Предложение доказано.

Из доказанных Предложений 4.3 и 4.4 как следствие получим следующие утверждения в виде предложений.

Предложение 4.5. Каждое из свойств  $S^+$  и  $S^-$  в отдельности влечет за собой свойство  $S$ , если пространство компактно.

Предложение 4.6. Движение  $g(t, q)$  почти периодически тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих свойств: а) движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^-$  и обладает свойством  $S^+$ ; б) движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^+$  и обладает свойством  $S^-$ .

Предложение 4.7. Если  $g(t, q)$  — почти периодическое движение, то каждое из движений  $g(t, q)$ , входящих в компактное минимальное множество  $Y = g(R_1, q)$ , где  $p \in Y$ , также почти периодически.

Доказательство. Компактность и минимальность множества  $Y$  следуют из теоремы Биркгофа. При этом для любого элемента  $p \in Y$  траектория  $g(t, p)$  плотна в  $Y$ . Следовательно, движение  $g(t, p)$  почти периодически.

Определение 4.3. Движение вида  $g(t+\tau, q)$  называется  $\tau$ -сдвигом движения  $g(t, q)$ .

Обозначим через  $V(g, q)$  множество всех  $\tau$ -сдвигов движения  $g(t, q)$ , когда параметр  $\tau$  пробегает все  $R_1$ , и через  $C(R_1, M)$  — множество всех непрерывных и ограниченных функций аргумента  $t$  со значениями в пространстве  $M$ . Отметим, что всякое устойчивое движение  $g(t, q)$  как функция аргумента  $t$  является элементом  $C(R_1, M)$  и  $V(g, q)$ .

Теорема Бохнера [60]. Для того чтобы движение  $g(t, q)$  было почти периодическим необходимо и достаточно, чтобы множество  $V(g, q)$  было компактным в  $C(R_1, M)$ .

Доказательство необходимости. Пусть движение  $g(t, q)$  почти периодически,  $\{g(t+t_n, q)\}$  — произвольная последовательность сдвигов движения  $g(t, q)$  и  $R$  — множество всех рациональных точек на  $R_1$ . Как известно, множество  $R$  счетно, т. е.  $R = \{\tau_n\}$ . Согласно Предложению 4.2 движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$ . Поэтому последовательность  $\{g(\tau_1+t_n, q)\}$  ограничена и из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$g(\tau_1+t_{11}, q), g(\tau_1+t_{12}, q), \dots, g(\tau_1+t_{1n}, q), \dots$$

Аналогично из последовательности  $\{g(\tau_2+t_{1n}, q)\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$$g(\tau_2+t_{21}, q), g(\tau_2+t_{22}, q), \dots, g(\tau_2+t_{2n}, q), \dots$$

Продолжим указанный процесс и выделим диагональную последовательность

$$g(t+t_{11}, q), g(t+t_{22}, q), \dots, g(t+t_{nn}, q), \dots$$

Эта последовательность сходится для всех значений  $t \in R = \{\tau_n\}$ , ибо при любом фиксированном  $t = \tau_k$ , за исключением конечного числа элементов множества  $\{g(\tau_k + t_{nn}, q)\}$ , входит в последовательность  $\{g(\tau_n + t_{nn}, q)\}$ , где  $n > k$ . Пусть теперь  $t_0$  — произвольный момент времени и  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. Выберем число  $l = l(\varepsilon/5)$  согласно определению относительно плотного множества  $\varepsilon/5$ -смещений движения  $g(t, q)$  и  $\delta = \delta(\varepsilon/5)$  в силу равномерной непрерывности движения  $g(t, q)$  как функции аргумента  $t$ . Начав с левого конца, отрезок  $[0, l]$  покроем  $m$  отрезками длины  $\delta$  и в каждом из них выберем по одной точке, принадлежащей множеству  $R$ . Эти выбранные точки обозначим  $s_1, s_2, \dots, s_m$ . При фиксированном  $\varepsilon$  число  $m$  упомянутых отрезков также фиксировано. Поэтому из сходимости диагональной последовательности в точках  $s_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) следует существование такого номера  $n^*$ , что для всех номеров  $u, v > n^*$  выполняются  $m$  неравенств:

$$\rho(g(s_i + t_{uu}, q), g(s_i + t_{vv}, q)) < \varepsilon/5, \quad i=1, \dots, m. \quad (2.4.2)$$

Обозначим через  $s$   $\varepsilon/5$ -смещение движения  $g(t, q)$ , заключенное между  $-t_0$  и  $-t_0 + l$ . Тогда момент времени  $s_0 = t_0 + s$  лежит в интервале  $(0, l)$  и, следовательно, при некотором  $i$  выполняется неравенство  $|s_i - s_0| < \delta$ . Последнее за собой влечет неравенство

$$\rho(g(s_i + t_{nn}, q), g(s_0 + t_{nn}, q)) < \varepsilon/5 \quad (2.4.3)$$

для всех  $n=1, 2, \dots$

С учетом (2.4.2), (2.4.3) проведем оценку

$$\begin{aligned} \rho(g(t_0 + t_{uu}, q), g(t_0 + t_{vv}, q)) &\leq \rho(g(t_0 + t_{uu}, q), g(s_0 + t_{uu}, q)) + \\ &+ \rho(g(s_0 + t_{uu}, q), g(s_i + t_{uu}, q)) + \rho(g(s_i + t_{uu}, q), g(s_i + t_{vv}, q)) + \\ &+ \rho(g(s_i + t_{vv}, q), g(s_0 + t_{vv}, q)) + \rho(g(s_0 + t_{vv}, q), g(t_0 + \\ &+ t_{vv}, q)) < 3/5 \varepsilon + \rho(g(t_0 + t_{uu}, q), g(t_0 + s + t_{uu}, q)) + \\ &+ \rho(g(t_0 + t_{vv}, q), g(t_0 + s + t_{vv}, q)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как число  $\varepsilon$  и момент времени  $t_0$  выбраны произвольно, а номер  $n^*$  не зависит от  $t_0$ , то из последнего неравенства следует сходимость диагональной последовательности  $\{g(t + t_{nn}, q)\}$  для всех  $t \in R_1$ .

Таким образом, установлено, что из произвольной последовательности  $\{g(t + t_n, q)\}$  сдвигов движения  $g(t, q)$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $\{g(t + t_{nn}, q)\}$  для всех  $t \in R_1$ . Иначе говоря, доказана компактность множества  $V(g, q)$  в  $C(R_1, M)$ .

Доказательство достаточности. Пусть множество  $V(g, q)$  компактно в  $C(R_1, M)$ . Сначала покажем, что  $g(t, q)$  — устойчивое  $\mathcal{L}$  движение. Действительно, если  $g(t, q)$  неустойчиво  $\mathcal{L}$ , то существует хотя бы одна последовательность  $\{t_n\}$  моментов времени такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, g(t_n, q)) = \infty$ . Но

тогда последовательность  $\{g(t+t_n, q)\}$  и любая ее подпоследовательность  $\{g(t+t_{nk}, q)\}$  не могли бы сходиться при  $t=0$ . Это противоречит компактности  $V(g, q)$  в  $C(R_1, M)$ . Таким образом, движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}$  и лежит в  $C(R_1, M)$  вместе с множеством  $V(g, q)$ .

Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . По теореме Хаусдорфа (см. Приложение) для данного  $\varepsilon > 0$  существуют такие моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , что сдвиги  $g(t+t_1, q), g(t+t_2, q), \dots, g(t+t_k, q)$  движения  $g(t, q)$  будут образовывать  $\varepsilon$ -сеть для множества  $V(g, q)$ , т. е. для любого  $s \in R_1$  из числа  $t_1, t_2, \dots, t_k$  найдется такой момент времени  $t_u$ , что имеет место неравенство  $\sup_{t \in R_1} \rho(g(s+t, q), g(t_u+t, q)) < \varepsilon$  или  $\sup_{t \in R_1} \rho(g(s-t_u+t, q), g(t, q)) < \varepsilon$ . Согласно Определению 4.1 числа  $s-t_u$  ( $u=1, 2, \dots, k$ ) представляют собой  $\varepsilon$ -смещения движения  $g(t, q)$ . Покажем, что множество чисел  $\{s-t_u\}$  относительно плотно в  $R_1$ . Для этого положим  $l = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i|$ . Тогда

$s-l \leq s-t_i \leq s+l$  и произвольность  $s \in R_1$  влечет то, что каждый интервал длины  $2l$  содержит  $\varepsilon$ -смещение движения  $g(t, q)$ . А это означает почти периодичность движения  $g(t, q)$ . Тем самым доказана достаточность теоремы.

Для простоты далее полагаем, что  $M$  — конечномерное пространство  $R_n$  и  $\|q\|$  — норма элемента  $q \in M$ . При этом  $C(R_1, M)$  представляет собой банахово пространство векторзначных функций  $f(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ , если норма элемента  $f(t) \in C(R_1, R_n)$  определяется равенством

$$\|f\|_{C(R_1, M)} = \sup_{t \in R_1} \|f(t)\|.$$

**Определение 4.4.** Производной функции  $f(t) \in C(R_1, M)$  в точке  $t=s$  называется предел в смысле сходимости по норме пространства  $M$  отношения  $[f(t)-f(s)]/(t-s)$  при  $t \rightarrow s$  и  $t \neq s$ .

Тот факт, что функция  $h(t)$  является производной от функции  $f(t)$ , записывается как обычно в виде  $h(t) = f'(t) = \{f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)\}$ .

**Определение 4.5.** Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется первообразной функции  $h(t) \in C(R_1, M)$ , если  $f(t)$  имеет производную, равную  $h(t)$ , т. е.  $f'(t) = h(t)$ .

При этом для любых  $t_0$  и  $t \in R_1$  имеет место равенство

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t h(s) ds. \quad (2.4.4)$$

Выражение (2.4.4) следует понимать как систему равенств вида  $f_i(t) = f_i(t_0) + \int_{t_0}^t h_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Теорема о среднем значении. Если движение  $g(t, q)$  почти периодически, то существует величина

$$L[g(t, q)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(s, q) ds. \quad (2.4.5)$$

Доказательство. Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольное фиксированное число,  $l(\varepsilon/2)$  — число, участвующее в определении относительно плотного множества для данного  $\varepsilon/2$  и  $a = \|g(t, q)\|_{C(R_1, M)}$ . Зафиксируем произвольный момент времени  $t \in R_1$  и обозначим через  $\tau$   $\varepsilon/2$ -смещение движения  $g(t, q)$ , заключенное в  $(s, s+l)$ . Оценим разность

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(s, q) ds - \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} g(s, q) ds \quad (2.4.6)$$

по норме пространства  $M$ . С этой целью последний интеграл в (2.4.6) представим в виде

$$\int_{t_0}^{t_0+t} g(s, q) ds = \int_{t_0}^{\tau} g(s, q) ds + \int_{\tau}^{\tau+t} g(s, q) ds + \int_{\tau+t}^{t_0+t} g(s, q) ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t} \int_0^t g(s, q) ds - \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} g(s, q) ds \right\|_{C(R_1, M)} \leq \\ & \leq \left\| \frac{1}{t} \int_0^t g(s, q) ds - \frac{1}{t} \int_{\tau}^{\tau+t} g(s, q) ds \right\|_{C(R_1, M)} + \\ & + \left\| \frac{1}{t} \int_{t_0}^{\tau} g(s, q) ds \right\|_{C(R_1, M)} + \left\| \frac{1}{t} \int_{\tau+t}^{t_0+t} g(s, q) ds \right\|_{C(R_1, M)} \leq \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|g(s, q) - g(s + \tau, q)\|_{C(R_1, M)} ds + \\ & + \frac{1}{t} \int_{t_0}^{\tau} \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)} ds + \frac{1}{t} \int_{\tau+t}^{t_0+t} \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)} ds \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2l \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)}. \end{aligned}$$

Вычислим среднее арифметическое значение суммы выражений вида

$$\frac{1}{t} \int_0^t \bar{g}(s, q) ds - \frac{1}{t} \int_{(k-1)t}^{kt} g(s, q) ds,$$

где  $k=1, 2, \dots, n$ . Очевидно, это значение равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{t} \int_0^t \bar{g}(s, q) ds - \frac{1}{t} \int_{(k-1)t}^{kt} g(s, q) ds \right) = \\ = \frac{1}{t} \int_0^t g(s, q) ds - \frac{1}{nt} \int_0^{nt} g(s, q) ds. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Оценивая правую часть выражения (2.4.8) с учетом (2.4.7), получим

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t g(s, q) ds - \frac{1}{nt} \int_0^{nt} \bar{g}(s, q) ds \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2l \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)}}{t}. \quad (2.4.9)$$

Зафиксируем произвольные моменты времени  $t_1, t_2 \in R_1^+$  такие, что  $m_1 t_1 = m_2 t_2$ , где  $m_1, m_2$  — натуральные числа. Тогда из (2.4.9) следует

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} g(s, q) ds - \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \bar{g}(s, q) ds \right\| = \\ = \left\| \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} g(s, q) ds - \frac{1}{m_1 t_1} \int_0^{m_1 t_1} g(s, q) ds - \left( -\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \bar{g}(s, q) ds - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{m_2 t_2} \int_0^{m_2 t_2} \bar{g}(s, q) ds \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2l \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)}}{t_1} + \\ + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2l \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)}}{t_2} = \varepsilon + 2l \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right). \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Из полноты действительной оси  $R_1$  вытекает справедливость оценки (2.4.10) при любых  $t_1, t_2 \in R_1^+$ . Если  $t_1, t_2$  превосходят величину  $4l \|g(s, q)\|_{C(R_1, M)}/\varepsilon$ , то как следствие оценки (4.2.10) получим

$$\left\| \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} g(s, q) ds - \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} g(s, q) ds \right\|_{C(R_1, M)} < 2\varepsilon.$$

Это неравенство доказывает существование величины (4.2.5) и завершает доказательство теоремы.

Определение 4.6. Средним значением почти периодического движения  $g(t, q)$  называется величина (4.2.5).

Справедливо следующее

Предложение 4.8. Если движение  $g(t, q)$  почти периодически, то оно имеет среднее значение, обладающее свойствами:

а)  $L[Cg(t, q)] = CL[g(t, q)]$ , где  $C = \text{const}$ ;

б)  $L[g(t + \tau, q)] = L[g(t, q)]$  для любых фиксированных моментов времени  $\tau \in R_1$ ;

в)  $L[g(t, q) + g(t, p)] = L[g(t, q)] + L[g(t, p)]$ , где движение  $g(t, p)$  также почти периодически;

г) для любой равномерно сходящейся в норме пространства  $C(R_1, M)$  последовательности почти периодических движений  $g(t, q_n)$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L[g(t, q_n)] = L[\lim_{n \rightarrow \infty} g(t, q_n)].$$

Доказательство. Свойства "а" и "в" вытекают непосредственно из Определения 4.6 среднего значения. Свойство "б" следует из равенства

$$\begin{aligned} L[g(t + \tau, q)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{t+\tau} \tilde{g}(s + \tau, q) ds = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-\tau}^t g(s, q) ds + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{g}(s, q) ds = L[g(t, q)]. \end{aligned}$$

Свойство "г" использует теорему о перестановке двух предельных переходов для последовательностей и Определение 4.6. Наконец, справедливость самого утверждения вытекает из теоремы о среднем значении почти периодических движений. Предложение доказано.

Как известно, при любом действительном значении параметра  $\lambda$  функция  $\exp(-i\lambda t)$  имеет период  $2\pi/|\lambda|$ , и, следовательно, произведение  $g(t, q)\exp(-i\lambda t)$  определяет почти периодическое движение. Поэтому существует среднее значение

$$\Phi(\lambda) = L\{g(t, q)\exp(-i\lambda t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(s, q)\exp(-i\lambda s) ds, \quad (2.4.11)$$

зависящее от параметра  $\lambda$ .

Имеет место

Предложение 4.9 [48]. Множество  $\Lambda$  значений параметра  $\lambda$ , для которых функция  $\Phi(\lambda)$  отлична от нуля, имеет не более чем счетную мощность, т. е.

$$C(\Lambda) \leq \aleph_0.$$

Используя это предложение, элементы множества  $\Lambda$  запишем в произвольном порядке в виде некоторой последовательности

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (2.4.12)$$

и положим

$$a_n = \Phi(\lambda_n), \quad n=1, 2, \dots \quad (2.4.13)$$

В выражениях (2.4.13) величины  $a_n$  представляют собой  $n$ -мерный вектор с компонентами

$$a_{nj} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g_j(s, q) \exp(-i\lambda s) ds,$$

где правая часть определена в соответствии с равенством (2.4.11).

**Определение 4.7.** Числа  $\lambda_n$  последовательности (2.4.12) называются показателями Фурье движения  $g(t, q)$ , а числа  $a_n$  — ее коэффициентами Фурье. Таким образом, каждому почти периодическому движению можно поставить в соответствие некоторый ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(i\lambda_n t); \quad a_n = L \{g(t, q) \exp(-i\lambda_n t)\} \quad (2.4.14)$$

с коэффициентами (2.4.13).

При этом имеет место

**Теорема Бора [48].** Если  $g(t, q)$  — почти периодическое движение и (2.4.14) — его ряд Фурье, то имеет место равенство Парсеваля

$$\mathcal{L} \{ |g(t, q)|^2 \} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \quad (2.4.15)$$

Теоремы о единственности и аппроксимации почти периодической функции вынесены в Приложение.

**Определение 4.8.** Конечное или счетное множество действительных чисел (2.4.12) называется линейно независимым, если не существует соотношения вида

$$\tau_1 \lambda_1 + \tau_2 \lambda_2 + \dots + \tau_n \lambda_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

с рациональными, не равными одновременно нулю числами  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ .

**Определение 4.9.** Конечное или счетное множество линейно независимых чисел  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m, \dots$  называется *базисом* множества (2.4.12), если каждое число  $\lambda_n$  представляется в виде конечной линейной комбинации с рациональными коэффициентами чисел  $\Lambda_m$ , т. е.

$$\lambda_n = \tau_{1n} \Lambda_1 + \tau_{2n} \Lambda_2 + \dots + \tau_{in} \Lambda_i. \quad (2.4.16)$$

Если базис содержит конечное число членов, то он называется конечным, в противном случае — бесконечным. Если в (2.4.16) все коэффициенты  $\tau_{jn}$  — целые числа, то базис называется *целым*, в противном случае — *рациональным*.

Справедливо

**Предложение 4.10 [48].** Если показатели Фурье  $\lambda_n$  почти периодического движения  $g(t, q)$  линейно независимы, то его ряд Фурье сходится абсолютно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty.$$

Связь между почти периодическими функциями и его показателями Фурье устанавливается двумя теоремами Бора, многие стороны этой связи тесно примыкают к теореме Кронекера о базисах. Названные теоремы вынесены в Приложение.

В почти периодических движениях особый интерес вызывают условно-периодические движения.

**Определение 4.10.** Почти периодическое движение  $g(t, q)$  называется *условно-периодическим*, если его показатели Фурье имеют конечный целый базис. Согласно данному определению каждому условно-периодическому движению можно поставить в соответствие ряд Фурье вида

$$\sum_{\|\mathbf{k}\| \geq 0} A^{\mathbf{k}} \exp[i\lambda \cdot \mathbf{k} t], \quad (2.4.17)$$

где  $\lambda \cdot \mathbf{k} = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_n k_n$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — базис;  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — неравные одновременно нулю целые числа.

Интегрируя (2.4.17) по времени  $t$ , получим

$$\int \sum_{\|\mathbf{k}\| > 0} A^{(\mathbf{k})} \exp[i\lambda \cdot \mathbf{k} t] dt = A^{(0)} t + \sum_{\|\mathbf{k}\| > 0} \frac{A^{(\mathbf{k})}}{\lambda \cdot \mathbf{k}} \exp[-i\lambda \cdot \mathbf{k} t]. \quad (2.4.18)$$

Вопрос о сходимости ряда, входящего в выражение (2.4.18), чрезвычайно сложен и зависит от арифметической природы базиса. Из теоремы Кронекера вытекает, что при любых  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  найдется такой набор целых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , что скалярное произведение  $\lambda \cdot \mathbf{k}$  может стремиться к нулю при  $\|\mathbf{k}\| \rightarrow \infty$ , где номер  $n \rightarrow \infty$ . В небесной механике часто встречаются ряды вида (2.4.18), где знаменатели  $\lambda \cdot \mathbf{k}$  могут принимать сколь угодно малые значения. Поэтому величины  $\lambda \cdot \mathbf{k}$  получили названия «малых знаменателей» в небесной механике.

## 5. Сравнимые по возвращаемости движения

Пусть  $f(t, p)$  и  $g(t, q)$  — динамические системы, определенные в полных метрических пространствах  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  соответственно.

**Определение 5.1.**  $\omega$ -последовательность  $\{t_n\}$  называется *собственной  $\omega$ -последовательностью движения  $g(t, q)$* , если со-

ответствующая ей последовательность  $\{g(t_n, q)\}$  имеет  $\omega$ -предельное состояние  $g(\tau, q)$ , принадлежащее траектории  $g(R_1, q)$  движения  $g(t, q)$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = \tilde{g}(\tau, q), \quad g(\tau, q) \in g(R_1, q). \quad (2.5.1)$$

С учетом этого понятия устойчивое  $P^+$  ( $P^-$  или  $P$ ) движение  $g(t, q)$  можно определить как движение, имеющее хотя бы одну собственную  $\omega$ -последовательность ( $\alpha$ - или  $\lambda$ -последовательность).

Обозначим через  $N(\omega, g, q)$  множество всех собственных  $\omega$ -последовательностей движения  $g(t, q)$ . Аналогично вводятся множества  $N(\alpha, g, q)$  и  $N(\lambda, g, q)$  собственных  $\alpha$ - и  $\lambda$ -последовательностей движения  $g(t, q)$ .

Определение 5.2. Движение  $g(t, q)$  называется *положительно (отрицательно) сравнимым по возвращаемости*, или *сравнимым  $R^+$  ( $R^-$ )*, с движением  $f(t, p)$ , если имеет место включение

$$N(\omega, f, p) \subset N(\omega, g, q) \quad (N(\alpha, f, p) \subset N(\alpha, g, q)). \quad (2.5.2)$$

Если движение  $g(t, q)$  сравнимо  $R^+$  и  $R^-$  с движением  $f(t, p)$ , то его называют *сравнимым по возвращаемости (сравнимым  $R$ )* с движением  $f(t, p)$ . Очевидно, если движение  $g(t, q)$  сравнимо с движением  $f(t, p)$ , то выполняется включение

$$N(\lambda, f, p) \subset N(\lambda, g, q). \quad (2.5.3)$$

Определение 5.3. Движения  $f(t, p)$  и  $g(t, q)$  называются *положительно (отрицательно) изохронными по возвращаемости*, или сокращенно *изохронными  $R^+$  ( $R^-$ )*, если имеет место равенство

$$N(\omega, f, p) = N(\omega, g, q) \quad (N(\alpha, f, p) = N(\alpha, g, q)). \quad (2.5.4)$$

Движения  $f(t, p)$  и  $g(t, q)$  называются *изохронными по возвращаемости (изохронными  $R$ )*, если они изохронны  $R^+$  и изохронны  $R^-$  одновременно. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$N(\lambda, g, q) = N(\lambda, f, p). \quad (2.5.5)$$

Для данного движения  $g(t, q)$  введем следующие множества его сдвигов:

$$V^+(g, q) = \{g(t + \tau, q) \mid \tau \in R_1^+\},$$

$$V^-(g, q) = \{g(t + \tau, q) \mid \tau \in R_1^-\},$$

$$V(g, q) = \{g(t + \tau, q) \mid \tau \in R_1\}.$$

Определение 5.4. Движение  $g(t, q)$  называется *положительно (отрицательно) равномерно сравнимым по возвращаемости*, или *сравнимым  $RR^+$  ( $RR^-$ )*, с движением  $f(t, p)$ , если

существует равномерно непрерывное отображение  $\varphi$  множества  $V^+(f, p)$  ( $V^-(f, p)$ ) на множество  $V^+(g, q)$  ( $V^-(g, q)$ ), удовлетворяющее условию

$$\varphi[f(t+\tau, p)] = g(t+\tau, q) \quad (2.5.6)$$

для всех  $\tau \in R_1$ .

Движение  $g(t, q)$ , сравнимое  $RR^+$  и  $RR^-$  с движением  $f(t, p)$ , называется *равномерно сравнимым по возвращаемости* (сравнимым  $RR$ ) с движением  $f(t, p)$ .

Определение 5.5. Движения  $g(t, q)$  и  $f(t, p)$  называются *положительно (отрицательно) равномерно изохронными по возвращаемости*, или *изохронными  $RR^+$  ( $RR^-$ )*, если они взаимно изохронны  $RR^+$  ( $RR^-$ ). Движения  $g(t, q)$  и  $f(t, p)$ , изохронные  $RR^+$  и  $RR^-$  одновременно, называются *равномерно изохронными (изохронными  $RR$ )*.

Предложение 5.1. Движение  $g(t, q)$  сравнимо  $R^+$  с движением  $f(t, p)$  тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение множества  $V^+(f, p)$  ( $V^-(f, p)$ ) на множество  $V^+(g, q)$  ( $V^-(g, q)$ ), удовлетворяющее условию (2.5.6) для всех моментов времени  $\tau \in R_1$ .

Доказательство необходимости. Пусть движение  $g(t, q)$  сравнимо  $R^+$  с движением  $f(t, p)$ , т. е. выполнено включение. Отображение  $\varphi$  множества  $V^+(f, p)$  на множество  $V^+(g, q)$  определим следующим образом. Для каждого  $\tau \in R_1^+$  во множестве  $V^+(f, p)$  выберем  $\tau$ -сдвиг  $f(t+\tau, p)$  движения  $f(t, p)$  и положим

$$\varphi[f(t+\tau, p)] = g(t+\tau, q).$$

При этом условие (2.5.6) выполняется и  $\varphi[V^+(f, p)] = V^+(g, q)$ . Покажем, что отображение  $\varphi$  непрерывно.

Допустим, что отображение  $\varphi$  имеет некоторую точку разрыва  $f(t+\tau^*, p)$ . Тогда найдется некоторое число  $\varepsilon$  и существует сходящаяся к  $f(t+\tau^*, p)$  последовательность движений  $\{f(t+\tau_n, p)\}$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t+\tau_n, p) = f(t+\tau^*, p), \quad \rho(\varphi[f(t+\tau_n, p)], \quad (2.5.7)$$

$$\varphi[f(t+\tau^*, p)]) = \rho(g(t+\tau_n, q), \quad g(t+\tau^*, q)) \geq \varepsilon$$

для всех  $n$ . Заметим, что последовательность  $\{\tau_n - \tau^*\}$  является собственной последовательностью движения  $f(t, p)$ . Здесь возможно, что последовательность  $\{\tau_n\}$  ограничена. Тогда она сходится к точке  $\tau^*$  в силу условия 2 и при любом фиксированном значении  $t$  имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t+\tau_n, q) = g(t+\tau^*, q),$$

что противоречит условию (2.5.7).

Допустим, что последовательность  $\{\tau_n - \tau^*\}$  неограничена. Тогда  $\{\tau_n - \tau^*\}$  есть собственная  $\omega$ -последовательность движе-

ния  $f(t, p)$ , т. е.  $\{\tau_n - \tau^*\} \in N(\omega, f, p)$ . По условиям теоремы  $\{\tau_n - \tau^*\} \in N(\omega, g, q)$ , так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \tau_n - \tau^*, q) = g(t, q).$$

Последнее также противоречит условию (2.5.7). Таким образом, отображение  $\varphi$  непрерывно.

Доказательство достаточности. Пусть непрерывное отображение  $\varphi$  удовлетворяет условиям теоремы. Следовательно, из равенства (2.5.6) при  $\tau = 0$  вытекает

$$\varphi[f(t, p)] = g(t, q).$$

Выберем произвольный элемент  $\{t_n\} \in N(\omega, f, p)$ . Согласно (2.5.6)

$$\varphi[f(t + t_n, p)] = g(t + t_n, q).$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}(t + t_n, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi[f(t + t_n, p)] = \varphi[f(t, p)] = g(t, q),$$

т. е.  $\{t_n\} \in N(\omega, g, q)$ . Это и означает, что движение  $g(t, q)$  сравнимо  $R^+$  с движением  $f(t, p)$ .

Из этого предложения как следствие вытекает

Предложение 5.2. Если движение  $g(t, q)$  сравнимо  $RR^+$  ( $RR^-$ ) с движением  $f(t, p)$ , то оно сравнимо  $R^+$  ( $R^-$ ) с движением  $f(t, p)$ .

Обратное утверждение не всегда имеет место.

Предложение 5.3. Если движение  $g(t, q)$  сравнимо  $R^+$  ( $R^-$  или  $R$ ) с устойчивым  $J^+$  ( $J^-$  или  $J$ ) движением  $f(t, p)$ , то движение  $g(t, q)$  устойчиво  $J^+$  ( $J^-$  или  $J$ ) соответственно.

Доказательство. По условиям теоремы движение  $g(t, q)$  сравнимо  $R^+$  с движением  $f(t, p)$ . Поэтому согласно Предложению 5.1 существует непрерывное отображение  $\varphi$  множества  $V^+(f, p)$  на множество  $V^+(g, q)$ . В частности, при  $\tau = 0$  будем иметь

$$\varphi[f(t, p)] = g(t, q).$$

Следовательно,  $\varphi[f(R_1^+, p)] = g(R_1^+, q)$ . Так как множество  $f(R_1^+, p)$  компактно в  $\mathcal{F}$ , то его непрерывный образ  $g(R_1^+, q)$  компактен в  $G$ . Поэтому движение  $g(t, q)$  устойчиво  $J^+$ .

## 6. Связь устойчивых движений с непрерывными функциями

При весьма общих предположениях решение автономной системы дифференциальных уравнений может быть представлено вектор-функцией, являющейся динамической системой в  $n$ -мерном фазовом пространстве. Однако этого нельзя утверждать относительно каждой компоненты вектор-функции. Это об-

стоятельство выдвигает необходимость изучения динамических систем как непрерывных функций [5, 42].

Теория динамических систем и непрерывных функций в метрических пространствах разработана с помощью методов, основанных на идеях топологической динамики [59]. При этом пространство непрерывных функций, где можно вести операции как дифференцирования, так и интегрирования, необходимо наделить метрикой, согласующейся с ее естественной функциональной структурой. Ниже рассматриваются некоторое функциональное пространство и способ введения в нем метрики. В своем изложении мы следуем работе [85].

Пусть по-прежнему  $R_1$  — действительная ось времени и  $R_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство элементов вида

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.6.1)$$

с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{(x, x)}. \quad (2.6.2)$$

В пространстве  $R_n$  введем метрику  $\rho$  через норму (2.6.2) его элементов (2.6.1)

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}. \quad (2.6.3)$$

Обозначим через  $C(R_1, R_n)$  множество всех непрерывных  $n$ -мерных вектор-функций вида

$$f(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}, \quad (2.6.4)$$

определенных на  $R_1$  и принимающих значения в  $R_n$ .

О п р е д е л е н и е 6.1. Последовательность функций (2.6.4)

$$f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(m)}(t), \dots \quad (2.6.5)$$

называется *сходящейся*, если в множестве  $C(R_1, R_n)$  найдется элемент  $f(t)$ , называемый пределом последовательности (2.6.5) и удовлетворяющий условию: для любого компакта  $S \subset R_1$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $n(\varepsilon) = n^*$ , что при всех натуральных  $m \geq n^*$  имеет место неравенство

$$\sup_{t \in S} \rho(f(t), f^{(m)}(t)) \leq \varepsilon. \quad (2.6.6)$$

Как обычно, если функция  $f(t) \in C(R_1, R_n)$  является пределом последовательности функций (2.6.5), то этот факт будем записывать в виде

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^{(m)}(t) = f(t). \quad (2.6.7)$$

Сходимость во множестве  $C(R_1, R_n)$  в указанном смысле совпадает с равномерной сходимостью на любом компакте из  $R_1$ . Поэтому ее называют также *локальной равномерной сходи-*

мостью на каждом конечном отрезке оси времени и записывают в виде

$$f^{(m)}(t) \stackrel{\text{лок}}{\Rightarrow} f(t). \quad (2.6.8)$$

Исходя из этого замечания, сформулируем известный принцип равномерной сходимости [62].

**Критерий Коши.** Для того чтобы последовательность (2.6.5) имела предел  $f(t)$  и сходилась к этой функции равномерно на каждом компакте  $S \subset R_1$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существовал такой номер  $n(\varepsilon)$ , что при всех натуральных  $m \geq n$  и  $k \geq 1$  имело место неравенство

$$\sup_{t \in S} \rho(f^{(m)}(t), f^{(m+k)}(t)) < \varepsilon. \quad (2.6.9)$$

Справедливо следующее

**Предложение 6.1.** Если последовательность (2.6.5) сходится к пределу  $f(t)$ , то

1.1) этот предел единственен; 2) любая подпоследовательность последовательности (2.6.5) сходится к тому же пределу  $f(t)$ ; 3) стационарная последовательность  $f^{(m)}(t) = f(t)$  для всех натуральных  $m$  сходится к пределу  $f(t)$ .

2. Если последовательность (2.6.5) не сходится к пределу  $f(t)$ , то из нее можно извлечь подпоследовательность, никакая подпоследовательность которой не сходится к  $f(t)$ .

Пусть  $f(t)$  и  $g(t)$  — произвольные функции из  $C(R_1, R_n)$  и  $\rho'(f, g)$  — действительное число, определенное выражением

$$\rho'(f, g) = \sup_{l > 0} \min_{|t| < l} [\sup \rho(f(t), g(t)); 1/l]. \quad (2.6.10)$$

Приведем следующие два предложения из работы [85].

**Предложение 6.2.** Действительная функция  $\rho'$ , определенная выражением (2.6.10), задает метрику во множестве  $C(R_1, R_n)$ . Для любого числа  $\varepsilon > 0$  условия  $\rho'(f, g) < \varepsilon$ ,  $\rho'(f, g) = \varepsilon$  и  $\rho'(f, g) > \varepsilon$  выполняются тогда и только тогда, когда соответственно имеют место условия

$$\sup_{|t| \leq 1/\varepsilon} \rho(f(t), g(t)) < \varepsilon, \quad \sup_{|t| \leq 1/\varepsilon} \rho(f(t), g(t)) = \varepsilon,$$

$$\sup_{|t| \leq 1/\varepsilon} \rho(f(t), g(t)) > \varepsilon.$$

**Предложение 6.3.** Последовательность функций из множества  $C(R_1, R_n)$  сходится в смысле определения 6.1 тогда и только тогда, когда она сходится по метрике  $\rho'$ , данной выражением (2.6.10).

Таким образом, множество  $C(R_1, R_n)$  наделено метрикой  $\rho'$ , согласующейся с метрикой  $\rho$  (2.6.3), заданной через норму пространства  $R_n$ . В дальнейшем множество  $C(R_1, R_n)$  будем рассматривать как метрическое пространство  $M = \{C(R_1, R_n), \rho'\}$ .

Предложение 6.4. Метрическое пространство  $M$  полно.

Полнота  $M$  следует из полноты пространства  $C(R_1, R_n)$ .

Определение 6.2. Множество  $\Phi \subset C(R_1, R_n)$  называется *предкомпактным* в пространстве  $M$ , если из всякой последовательности функций, принадлежащих множеству  $\Phi$ , можно извлечь сходящуюся в  $M$  подпоследовательность.

Определение 6.3. Множество  $\Phi \subset C(R_1, R_n)$  называется *вполне ограниченным*, если для числа  $\varepsilon > 0$  найдется конечное число таких его элементов  $f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(m)}(t)$ , что для любой функции  $f(t) \in \Phi$  существует функция  $f^{(i)}(t)$ , где  $i$  имеет место неравенство

$$\rho'(f(t), f^{(i)}(t)) \leq \varepsilon.$$

При этих определениях справедлива

Теорема Хаусдорфа [3, 44]. Для того чтобы множество  $\Phi \subset M$  было предкомпактным в пространстве  $M$ , необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

Определение 6.4. Множество  $\Phi \subset C(R_1, R_n)$  называется *компактным в пространстве  $M$* , если оно замкнуто и предкомпактно в  $M$ .

Рассмотрим отображение  $\sigma(\tau, f(t))$ , заданное на декартовом произведении  $R_1 \times C(R_1, R_n)$  и определенное условием

$$\sigma(\tau, f(t)) = f(\tau + t), \quad (2.6.11)$$

где  $\tau \in R_1$  и  $f(t) \in C(R_1, R_n)$ . Тогда справедливо

Предложение 6.5. Отображение  $\sigma(\tau, f)$ , определенное выражением (2.6.11) для всех  $\tau \in R_1$  и для любых  $f \in C(R_1, R_n)$  является динамической системой.

Доказательство. Начальное условие, имеющее вид  $\sigma(0, f(t)) = f(t)$ , и групповое условие  $\sigma[\tau_2, \sigma(\tau_1, f)] = f(\tau_2 + \tau_1 + t) = \sigma(\tau_2 + \tau_1, f(t))$  выполнены. Покажем непрерывность отображения  $\sigma(\tau, f)$  по совокупности своих аргументов. Пусть последовательность моментов времени

$$t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \quad (2.6.12)$$

сходится к моменту  $\tau$  и последовательность функций (2.6.5) — к пределу  $f(t)$ . Обозначим  $\sigma_m = \sigma(t_m, f^{(m)}(t)) = f^{(m)}(t_m + t)$ . Так как  $\rho'(f^{(m)}(t), f(t))$  стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ , то  $\rho'(f^{(m)}(\tau + t), f(\tau + t))$  также стремится к нулю. В силу равномерной непрерывности каждой из функций  $f^{(m)}(t)$  на любом компакте  $S \subset R_1$  расстояние  $\rho'(f^{(m)}(t_m + t), f^{(m)}(\tau + t))$  при  $m \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Таким образом, получаем следующую цепочку предельных переходов:

$$f^{(m)}(t_m + t) \xrightarrow{\text{лок}} f^{(m)}(\tau + t), \quad f^{(m)}(\tau + t) \xrightarrow{\text{лок}} f(\tau + t),$$

т. е.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho'(\sigma_m, \sigma) = 0$ , что и доказывает Предложение 6.5.

Условие непрерывности 2 можно сформулировать в терминах метрики  $\rho'$  пространства непрерывных функций: для любых

$f(t) \in C(R_1, R_n)$  и чисел  $l > 0, \varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что неравенство  $\rho(\sigma(\tau, f), \sigma(\tau, g)) < \varepsilon$  выполняется как только  $g(t) \in C(R_1, R_n), \rho'(f, g) < \delta$  и  $|\tau| \leq l$ .

Введем следующие обозначения. Для каждой функции  $f(t) \in C(R_1, R_n)$  через  $\sigma_f$  обозначим движение в динамической системе, определенное условием  $\sigma_f(0) = f(t)$  через  $\mathcal{F}_f = \{f(\tau+t) \mid \tau \in R_1\}$  — множество, принадлежащее пространству  $C(R_1, R_n)$  и состоящее из всех сдвигов функции  $f$ . Нетрудно понять, что множество  $\mathcal{F}_f$  совпадает с траекторией движения  $\sigma_f$ . Таким образом, между непрерывными функциями и порожденными ими движениями можно установить связь посредством динамической системы сдвигов. Эта связь позволяет судить как об отдельных компонентах, так и обо всем движении. В частности, основные типы устойчивости движения (устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону, рекуррентность, почти периодичность, возвращаемость) и виды сравнения по возвращаемости движений переносятся на непрерывные функции.

Введем эти понятия применительно к элементам метрического пространства  $M = \{C(R_1, R_n), \rho'\}$ .

Определение 6.5. Функция  $f(t) \in C(R_1, R_n)$  называется *положительно (отрицательно) устойчивой по Лагранжу* (устойчивой  $L^+$  ( $L^-$ )), если множество  $\mathcal{F}_f = \{f(\tau+t) \mid t \in R_1^+\}$  ( $\mathcal{F}_f^- = \{f(\tau+t) \mid \tau \in R_1^-\}$ ) предкомпактно в  $M$ .

Функция называется *устойчивой по Лагранжу*, или *устойчивой  $L$* , если множество  $\mathcal{F}_f$  предкомпактно в  $M$ .

Предложение 6.6. Если функция  $f(t)$  устойчива  $L^+$  ( $L^-$  или  $L$ ), то любая функция  $g(t) \in \overline{\mathcal{F}_f^+}$  ( $g(t) \in \overline{\mathcal{F}_f^-}$  или  $g(t) \in \overline{\mathcal{F}_f}$ ) устойчива  $L^+$  ( $L^-$  или  $L$ ) соответственно.

Доказательство. По условиям данного Предложения множество  $\mathcal{F}_f^+$  предкомпактно. Согласно теореме Хаусдорфа оно вполне ограничено. Следовательно, для произвольного фиксированного  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть  $f(t_1+t), f(t_2+t), \dots, f(t_k+t)$ , что для любого  $s \in R_1^+$  найдется  $t_i$  и  $\rho'[f(s+t), f(t_i+t)] < \varepsilon, i \in (1, k)$ . Рассмотрим множество  $\overline{\mathcal{F}_f^+}$ . Пусть  $g(t)$  — произвольный элемент  $\overline{\mathcal{F}_f^+}$ . По условиям Предложения некоторая последовательность  $\{f(s_n+t)\}$  элементов  $\mathcal{F}_f^+$  сходится к  $g(t)$ , т. е. для всех  $n \geq n^*, t \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$  выполняется неравенство  $\rho'[g(t), f(s_n+t)] < \varepsilon/2$ . Тогда  $\rho'[f(s_n+t), f(s_m+t)] \leq \rho'[f(s_n+t), g(t)] + \rho'[g(t), f(s_m+t)] < \varepsilon$ . Это означает, что множество  $\overline{\mathcal{F}_f^+}$  также вполне ограничено. Что и требовалось доказать.

Определение 6.6. Функция  $f(t)$  называется *положительно (отрицательно) устойчивой по Пуассону* (устойчивой  $P^+$  ( $P^-$ )), если существует хотя бы одна  $\omega$ -последовательность ( $\alpha$ -последовательность), для которой последовательность

$$f(t_1+t), f(t_2+t), \dots, f(t_m+t), \dots \quad (2.6.13)$$

сходится к  $f(t)$ , т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho'(f(t), f(t_m + t)) = 0. \quad (2.6.14)$$

Функция  $f(t)$  называется *устойчивой по Пуассону (устойчивой П)*, если для некоторых  $\omega$ - и  $\alpha$ -последовательностей выполняется равенство (2.6.14).

Предложение 6.7. Функция  $f(t)$  устойчива Л тогда и только тогда, когда она ограничена и равномерно непрерывна.

Для доказательства этого Предложения следует заметить, что предкомпактность множества  $C(R_1, M)$  в смысле Определения 6.2 эквивалентна локальной компактности множества  $C(R_1, M)$  в обычном смысле [44], ибо сходимость в  $C(R_1, M)$  вводится согласно (2.6.8). В этой связи напомним теорему Арцела [44].

Теорема Арцела. Множество непрерывных функций, определенных на отрезке  $[a, b]$  и принимающих значения в банаховом пространстве  $M$ , предкомпактно в  $C([a, b], M)$  тогда и только тогда, когда это семейство равномерно ограничено и равномерно непрерывно.

Доказательство необходимости. Пусть функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  ограничена и равномерно непрерывна. Тогда, очевидно, множество  $\mathcal{F}_f$  равномерно ограничено и равномерно непрерывно в  $R_1$ . Следовательно, множество  $\mathcal{F}_f$  обладает указанными свойствами на любом отрезке  $[a, b] \subset R_1$  и по теореме Арцела предкомпактно в  $C([a, b], M)$  в обычном смысле. Поэтому множество  $\mathcal{F}_f$  предкомпактно в  $C(R_1, M)$ , иными словами, функция  $f(t)$  устойчива.

Доказательство достаточности. Пусть функция  $f(t)$  устойчива Л. Согласно Определению 6.5 множество  $\mathcal{F}$  предкомпактно в  $C(R_1, M)$ . Поэтому  $f(t)$  ограничена. Предположим, что функция  $f(t)$  не является равномерно непрерывной, т. е. существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что, какими бы ни были числа  $\delta > 0$ , найдутся значения  $t_1, t_2 \in R_1$ ,  $|t_1 - t_2| < \delta$  и  $\rho'(f(t_1), f(t_2)) > \varepsilon$ . Рассмотрим последовательность положительных чисел  $\delta_n$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . В силу допущения каждому  $\delta_n > 0$  соответствует пара  $t_{n1}, t_{n2} \in R_1$  такая, что  $|t_{n1} - t_{n2}| < \delta_n$  и  $\rho'(f(t_{n1}), f(t_{n2})) > \varepsilon$ .

Из ограниченных последовательностей  $\{f(t_{n1})\}, \{f(t_{n2})\}$  выделим сходящиеся подпоследовательности. Для сокращения записи за этими подпоследовательностями сохраним прежние обозначения и положим  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_{n1}) = f_1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_{n2}) = f_2$ . Так как

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ , то в силу непрерывности функции  $f(t)$  имеет место равенство  $f_1 = f_2$ . В это же время по допущению имеем  $\rho'(f_1, f_2) > \varepsilon$ . Полученное противоречие доказывает равномерную непрерывность устойчивой Л функции  $f(t)$ .

Определение 6.7. Действительное число  $\tau$  называется  $\varepsilon$ -смещением функции  $f(t) \in C(R_1, E_n)$ , если  $\varepsilon > 0$  и  $\rho'(f(t), f(t+\tau)) \leq \varepsilon$ .

Определение 6.8. Функция  $f(t) \in C(R_1, E_n)$  называется почти рекуррентной, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  множество  $\varepsilon$ -смещений функции  $f(t)$  относительно плотно в  $R_1$ .

Определение 6.9. Устойчивая  $L$  и почти рекуррентная функция  $f(t) \in C(R_1, E_n)$  называется рекуррентной.

Пусть  $M$  и  $K$  — полные метрические пространства с метриками  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Через  $C(R_1, M)$  и  $C(R_1, K)$  обозначим пространство непрерывных функций, определенных на  $R_1$  и принимающих значения в пространствах  $M$  и  $K$ , с метриками  $\rho_1'$  и  $\rho_2'$  вида (2.6.10). Введем понятия сравнимости по возвращаемости между функциями пространств  $C(R_1, M)$  и  $C(R_1, K)$  по аналогии сравнения движения. При этом следуем [82, 85].

Определение 6.10.  $\alpha$ -последовательность (2.6.12) ( $\omega$  или  $\lambda$ ) называется собственной  $\alpha$ -последовательностью ( $\omega$ - или  $\lambda$ -последовательностью) функции  $f(t) \in C(R_1, M)$ , если последовательность (2.6.13) сдвигов функции  $f(t)$  сходится к  $f(t)$ .

Множества всех собственных  $\alpha$ -,  $\omega$ - и  $\lambda$ -последовательностей функции  $f(t)$  обозначим  $N(\alpha, f)$ ,  $N(\omega, f)$  и  $N(\lambda, f)$  соответственно.

Определение 6.11. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется положительно (отрицательно) сравнимой (сравнимой  $R^+$  ( $R^-$ )) в смысле возвращаемости с функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$ , если имеет место включение

$$N(\omega, g) \subset N(\omega, f) \quad (N(\alpha, g) \subset N(\alpha, f)). \quad (2.6.15)$$

Функция  $f(t)$ , сравнимая  $R^-$  и  $R^+$  с функцией  $g(t)$ , называется сравнимой (сравнимой  $R$ ) в смысле возвращаемости с  $g(t)$ .

Определение 6.12. Функции  $f(t) \in C(R_1, M)$  и  $g(t) \in C(R_1, K)$ , взаимно сравнимые  $R^+$  ( $R^-$ ) между собой, называются положительно (отрицательно) изохронными в смысле возвращаемости (изохронными  $R^+$  ( $R^-$ )).

Изохронные  $R^+$  и  $R^-$  функции  $f(t)$  и  $g(t)$  называются изохронными (изохронными  $R$ ) в смысле возвращаемости.

Если  $f(t)$  и  $g(t)$  изохронны  $R^+$  ( $R^-$  или  $R$ ), то, очевидно, выполняются равенства

$$N(\omega, f) = N(\omega, g), \quad (N(\alpha, f) = N(\alpha, g), N(\lambda, f) = N(\lambda, g)). \quad (2.6.16)$$

Изохронность  $R^+$  ( $R^-$  или  $R$ ) является отношением эквивалентности и разбивает множество всех непрерывных на  $R_1$  функций со значениями в произвольных метрических пространствах на непустые попарно непересекающиеся классы функций, неразличимые по возвращаемости на  $R_1^+$  ( $R_1^-$  или  $R_1$ ).

Справедливо

Предложение 6.8. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима

$R^-$  ( $R^+$  или  $R$ ) с функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$  тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных между собой условий:

а) из всякой собственной  $\alpha$ -последовательности функции  $g(t)$  можно извлечь собственную  $\alpha$ -последовательность функции  $f(t)$ ;

б) для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такая  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что каждое  $\delta$ -смещение функции  $g(t)$  является  $\delta$ -смещением функции  $f(t)$ .

Доказательство необходимости условия "а". Пусть  $f(t)$  сравнима  $R^-$  с функцией  $g(t)$ . По Определению 6.11 множество  $N(\alpha, g)$  является подмножеством множества  $N(\alpha, f)$ . Следовательно, условие "а" выполнено.

Доказательство достаточности условия "а". Пусть имеет место условие "а" и функция  $f(t)$  не сравнима  $R^-$  с функцией  $g(t)$ . Тогда множество  $N(\alpha, g)$  не является подмножеством  $N(\alpha, f)$  и имеет собственную  $\alpha$ -последовательность, для которой будет нарушено равенство (2.6.14). Это означает, что найдется  $\varepsilon > 0$  и согласно второй части Предложения 6.1 можно построить подпоследовательность  $\{f(t + \bar{t}_n)\}$  последовательности (2.6.13) так, чтобы неравенство  $\rho'(f(t + \bar{t}_n), f(t)) > \varepsilon$  имело место для всех натуральных  $n$ . Тогда из собственной  $\alpha$ -последовательности  $\{\bar{t}_n\}$  функции  $g(t)$  нельзя извлечь собственную  $\alpha$ -последовательность функции вопреки условию "а". Полученное противоречие доказывает достаточность условия "а".

Докажем эквивалентность условий "а" и "б". Пусть имеет место условие "б" и  $\{t_n\}$  — произвольная собственная  $\alpha$ -последовательность функции  $g(t)$ . Зафиксируем последовательность  $\{\varepsilon_n\}$  положительных чисел  $\varepsilon_n$ , сходящихся к нулю. Согласно условию "б" каждому  $\varepsilon_n$  отвечает такое положительное число  $\delta_n$ , что всякое  $\delta_n$ -смещение функции  $g(t)$  является  $\varepsilon_n$ -смещением функции  $f(t)$ . Так как последовательность (2.6.13) сходится локально равномерно, то для каждого  $\delta_n > 0$  найдется номер  $k_n$  такой, что  $\rho_1'(f(t_{k_n} + t), f(t)) < \delta_n$ . Поэтому  $t_{k_n}$  будет представлять собой  $\varepsilon_n$ -смещение функции  $f(t)$ . Следовательно, подбирая  $k_n < k_{n+1}$  из последовательности  $\{f(t_n + t)\}$ , извлечем такую последовательность  $\{f(t_{k_n} + t)\}$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_{k_n} + t) = f(t)$ . Это означает, что из условия "б" вытекает условие "а".

Пусть теперь имеет место условие "а". Тогда по доказанному выше функция  $f(t)$  сравнима  $R^-$  с функцией  $g(t)$  и справедливо включение (2.6.15). Допустим, что для некоторого  $\varepsilon > 0$  нарушено условие "б". Выберем последовательность положительных чисел  $\delta_n$  так, чтобы она сходилась к нулю. Обозначим через  $t_n$   $\delta_n$ -смещение функции  $g(t)$ , не являющееся  $\varepsilon$ -смещением функции  $f(t)$ . Тогда собственная  $\alpha$ -последовательность  $\{t_n\}$  функции  $g(t)$  не входит в множество  $N(\alpha, f)$ . Полученное противоречие доказывает, что из условия "а" следует "б".

Обозначим

$$f(R_1^-) = \{f(t) \in M \mid t \in R_1^-\}, \quad f(R_1^+) = \{f(t) \in M \mid t \in R_1^+\},$$

$$f(R_1) = \{f(t) \in M \mid t \in R_1\}.$$

Определение 6.13. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется *положительно (отрицательно) предкомпактной* (*предкомпактной  $R^+$  ( $R^-$ )*), если множество  $f(R_1^+)$  ( $f(R_1^-)$ ) предкомпактно в пространстве  $M$ .

Функция  $f(t)$  с предкомпактным в пространстве  $M$  множеством значений называется *предкомпактной  $R$* .

Пусть  $M$  — банахово пространство.

Определение 6.14. Производной  $f(t_0)$  функции  $f(t) \in C(R_1, M)$  в точке  $t=t_0$  называется предел в смысле сходимости по норме пространства  $M$  отношения  $(f(t) - f(t_0))/(t - t_0)$  при  $t \rightarrow t_0$  ( $t \neq t_0$ ) произвольно.

Определение 6.15. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется *первообразной* функции  $g(t) \in C(R_1, M)$ , если при любых действительных  $s, t \in R_1$  имеет место равенство

$$f(t) = f(s) + \int_s^t g(\tau) d\tau. \quad (2.6.17)$$

Предложение 6.9. Если  $g(t) \in C(R_1, M)$  и ее первообразная (2.6.17) предкомпактны  $R^-$  ( $R^+$  или  $R$ ), то  $f(t)$  сравнима  $R^-$  ( $R^+$  или  $R$ ) с функцией  $g(t)$ .

Доказательство. Выражение (2.6.17) представим в виде

$$h(t) = f(t) - f(s) = \int_s^t \bar{g}(\tau) d\tau.$$

Пусть последовательность  $\{t_n\}$  принадлежит множеству  $N(\alpha, g)$ . По условиям Предложения функция  $f(t)$  предкомпактна  $R^-$ . Следовательно, из ограниченной последовательности  $\{f(t_n)\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $\{f(\bar{t}_n)\}$ , вместе с которой сходится последовательность  $\{h(\bar{t}_n)\}$ .

Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\bar{t}_n) = \theta$ , где  $\theta$  — нуль пространства  $M$ . Предположим, что это не так, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(t_n) = p$  и  $p \neq \theta$ . Рассмотрим

последовательность  $\{h_m(t)\}$  функций пространства  $C(R_1, M)$ , определенных выражением

$$h_m(t) = mp + \int_0^t g(\tau) d\tau. \quad (2.6.18)$$

Зафиксировав произвольное натуральное число  $m$  и значение  $t = \bar{t} \in R_1^-$ , оценим разность  $h_m(\bar{t}) - h_{m-1}(\bar{t} + \bar{t}_n)$  по норме

пространства  $M$ :

$$\begin{aligned}
 \|h_m(\bar{t}) - h_{m-1}(\bar{t} + \bar{t}_n)\| &= \left\| p + \int_0^{\bar{t}} g(t) dt - \int_0^{\bar{t} + \bar{t}_n} \bar{g}(t) dt \right\| = \\
 &= \left\| p + \int_0^{\bar{t}} g(t) dt - \int_0^{\bar{t}_n} g(t) dt - \int_0^{\bar{t}} g(t + \bar{t}_n) dt \right\| = \\
 &= \left\| p - h(\bar{t}_n) + \int_0^{\bar{t}} [g(t) - g(t + \bar{t}_n)] dt \right\| \leq \\
 &\leq \|p - h(\bar{t}_n)\| + \left\| \int_0^{\bar{t}} [g(t) - g(t + \bar{t}_n)] dt \right\| \leq \\
 &\leq \|p - h(\bar{t}_n)\| + \left| \int_0^{\bar{t}} \|g(t) - g(t + \bar{t}_n)\| dt \right|.
 \end{aligned}$$

Отсюда при  $n \rightarrow \infty$  получим, что  $h_m(\bar{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_m(\bar{t} + \bar{t}_n)$ , ибо  $p$  является пределом для  $\{h(\bar{t}_n)\}$  и  $\{\bar{t}_n\} \in N(\alpha, g)$ . Таким образом, для любого натурального числа  $m$  и значения  $\bar{t} \in R_1^-$  имеем  $h_m(\bar{t}) \in \overline{h_{m-1}(R_1^-)}$ . Следовательно, справедливо включение  $\overline{h_m(R_1^-)} \subset \overline{h_{m-1}(R_1^-)}$ . Тогда имеет место цепочка  $\overline{h_0(R_1^-)} \supset \supset \overline{h_1(R_1^-)} \supset \dots \supset \overline{h_m(R_1^-)} \supset \dots$ , из которой вытекает  $\overline{h_m(R_1^-)} \subset \subset \overline{h_0(R_1^-)}$  при произвольном натуральном  $m$ . По построению (2.6.18) элемент  $mp \in \overline{h_m(R_1^-)}$ . Поэтому  $mp \in \overline{h_0(R_1^-)}$  при любом  $m$ . А это противоречит предкомпактности  $R^-$  функции  $f(t)$  и доказывает, что  $p = \theta$ .

С учетом этого проведем оценку разности  $f(t + \bar{t}_n) - f(t)$  по норме пространства  $M$ :

$$\begin{aligned}
 \|f(t + \bar{t}_n) - f(t)\| &= \left\| \int_0^{t + \bar{t}_n} g(s) ds - \int_0^t g(s) ds \right\| = \\
 &= \left\| \int_0^{\bar{t}_n} \bar{g}(s) ds + \int_0^t \bar{g}(s + \bar{t}_n) ds - \int_0^t g(s) ds \right\| = \\
 &= \left\| h_0(\bar{t}_n) + \int_0^t [\bar{g}(s + \bar{t}_n) - g(s)] ds \right\| \leq \\
 &\leq \|h_0(\bar{t}_n)\| + \left| \int_0^t \|\bar{g}(s + \bar{t}_n) - g(s)\| ds \right|.
 \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \bar{t}_n)$  для всех  $t \in R_1^-$ . Таким образом,  $\{\bar{t}_n\} \in N(\alpha, f)$  и по Предложению 6.8 функция  $f(t)$  сравнима  $R^-$  с функцией  $g(t)$ . Что и требовалось доказать.

Определение 6.16. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется  $\omega$ -предельным ( $\alpha$ - или  $\lambda$ -предельным) образом функции  $g(t) \in C(R_1, M)$ , если существует такая  $\omega$ -последовательность (2.6.12) ( $\alpha$ - или  $\lambda$ -последовательность), что  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \bar{t}_n) = f(t)$ .

Множества всех  $\omega$ -,  $\alpha$ - и  $\lambda$ -предельных образов функции  $f(t)$  обозначаются соответственно  $\omega_f$ ,  $\alpha_f$  и  $\lambda_f$ .

Определение 6.17. Множество  $U$  функций пространства  $C(R_1, M)$  называется инвариантным, если  $U = \bigcup_{f \in U} \mathcal{F}_f$ .

Пустое множество считается инвариантным для удобства.

Доказательства следующих двух Предложений см. в работе [85].

Предложение 6.10. Замыкание в метрике пространства  $C(R_1, M)$  инвариантного множества, разность двух инвариантных множеств, объединение и пересечение любого числа инвариантных множеств есть инвариантное множество.

Предложение 6.11. Если  $f(t) \in C(R_1, M)$ , то множества  $\omega_f$ ,  $\alpha_f$  и  $\lambda_f$  замкнуты и инвариантны.

Определение 6.18. Множество  $U$  функций пространства  $C(R_1, M)$  называется минимальным, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит собственного подмножества, обладающего этими свойствами.

Определение 6.19. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется минимальной, если минимально замыкание множества  $\mathcal{F}_f$ .

Теорема о существовании минимальных множеств и теорема Биркгофа (см. разд. 3) справедливы и в пространстве  $C(R_1, M)$  [85].

Определение 6.20. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется положительно (отрицательно) уходящей (уходящей  $R^+$  ( $R^-$ )), если множество  $\omega_f$  ( $\alpha_f$ ) пусто.

Функция  $f(t)$  называется уходящей  $R$ , если множество  $\lambda_f$  пусто.

Справедливо

Предложение 6.12 [85]. Если  $U$  — минимальное множество, то имеет место одно и только одно из следующих утверждений:

1. Множество  $U$  состоит только из уходящих  $R$ -функций.
2. Каждая функция множества  $U$  либо устойчива  $P$ , либо устойчива  $P^+$  и уходящая  $R^-$ , либо устойчива  $P^-$  и уходящая  $R^+$ .

Отсюда вытекает

Предложение 6.13. [85]. Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  минимальна, то она удовлетворяет одному и только одному из следующих условий:

- 1) функция  $f(t)$  устойчива  $P$ ;
- 2) функция  $f(t)$  является устойчивой  $P^+$  и уходящей  $R^-$ ;
- 3) функция  $f(t)$  является устойчивой  $P^-$  и уходящей  $R^+$ ;
- 4) функция  $f(t)$  является уходящей  $R$ .

Критерий сравнимости  $R$  произвольной функции с периодической функцией дает

Предложение 6.14 [85]. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима  $R$  с периодической функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$  тогда и только тогда, когда  $f(t)$  периодична и всякий период  $g(t)$  является ее периодом.

Сформулируем критерий сравнимости произвольных функций.

Предложение 6.15. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима  $R^-$  ( $R^+$  или  $R$ ) с функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$  тогда и только тогда, когда существует такое непрерывное отображение  $v$  множества  $\mathcal{F}_g^-$  ( $\mathcal{F}_g^+$  или  $\mathcal{F}_g$ ) на множество  $\mathcal{F}_f^-$  ( $\mathcal{F}_f^+$  или  $\mathcal{F}_f$ ), что

$$v[g_s(t)] = f_s(t) \quad (2.6.19)$$

для всех  $s \in R_1^-$  ( $s \in R_1^+$  или  $s \in R_1$ ), где  $g_s(t) = g(s+t)$  и  $f_s(t) = f(s+t)$ .

Доказательство необходимости. Пусть функция  $f(t)$  сравнима  $R^-$  с функцией  $g(t)$  и  $h(t)$  — произвольная функция из  $\mathcal{F}_g^-$ , т. е.  $h(t) = g_s(t)$ , где  $s \in R_1^-$  и фиксировано. Положим  $v(h) = f_s(t)$ . При этом отображение  $v$  удовлетворяет условию (2.6.19). Действительно, если это не так, то хотя бы для одного значения  $t = \bar{t} \in R_1^-$  выполняется неравенство  $v[g_{\bar{t}}(t)] \neq f_{\bar{t}}(t)$ . По построению отображения  $v$  для данной функции  $g_{\bar{t}}(t)$  найдется такое  $t = \tau$  и  $\tau \neq \bar{t}$ , что  $g_{\bar{t}} = g_{\tau}$  и  $v[g_{\tau}(t)] = f_{\tau}(t)$ . Из  $g(\bar{t} + t) = g(\tau + t)$  следует, что  $g(t)$  — периодическая функция с периодом  $\bar{t} - \tau$ . Не нарушая общности, можем положить  $\bar{t} - \tau < 0$ . Тогда последовательность  $\{n(\bar{t} - \tau)\}$ , где  $n$  — натуральное число, принадлежит множеству  $N(\alpha, g)$ , а на основании Предложения 6.8 — множеству  $N(\alpha, f)$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f[n(\bar{t} - \tau) + t] = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n(\bar{t} - \tau) + (n + 1)(\bar{t} - \tau) - \\ &\quad - n(\bar{t} - \tau) + t] = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n(\bar{t} - \tau) + \\ &\quad + (\bar{t} - \tau) + t] = f[(\bar{t} - \tau) + t], \end{aligned}$$

т. е.  $f(t) = f(\bar{t} - \tau + t)$  и  $f(t)$  — периодическая функция с периодом  $\bar{t} - \tau$ . Таким образом,  $f_{\bar{t}}(t) = f_{\tau}(t)$  и  $v[g_{\bar{t}}(t)] = f_{\tau}(t) = f_{\bar{t}}(t)$ . А это равенство противоречит допущению и доказывает справедливость условия (2.6.19) для построенного отображения. Докажем непрерывность отображения  $v$ .

Предположим, что отображение  $v$  разрывно в точке  $g_s \in \mathcal{F}_g^-$ . Тогда найдутся такие  $\epsilon > 0$  и сходящаяся последова-

тельность  $\{g_n = g(t_n + t)\} \in \mathcal{F}_g^-$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \bar{g}_s$  и

$$\rho_1[v(g_n), v(g_s)] \geq \varepsilon$$

для всех натуральных  $n$ . Пусть последовательность  $\{t_n\}$  ограничена и сходится к  $t_0 \in R_1^-$ . Тогда  $g(t_0 + t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}(t_n + t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g_s$ . Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v[g_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n + t) = f(t_0 + t) = v[\bar{g}(t_0 + t)] = v(\bar{g}_s).$$

Это противоречит неравенству (2.6.20) и доказывает непрерывность отображения  $v$ .

Доказательство достаточности. Пусть задано непрерывное отображение  $v$  множества  $\mathcal{F}_g^- \subset C(R_1, K)$  на множество  $\mathcal{F}_f^- \subset C(R_1, M)$ , удовлетворяющее условию (2.6.19), и  $\{t_n\}$  — произвольный элемент множества  $N(\alpha, g)$ . В силу (2.6.19) получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n + t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v[g(t_n + t)] = v[\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}(t_n + t)] = v[g(t)] = f(t),$$

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n + t) = f(t)$  и  $\{t_n\} \in N(\alpha, f)$ . Согласно Предложению 6.8 функция  $f(t)$  сравнима  $R^-$  с функцией  $g(t)$ . Достаточность доказана.

Как следствие получим

Предложение 6.16. Функции  $f(t) \in C(R_1, M)$  и  $g(t) \in C(R_1, K)$  изохронны  $R^-$  ( $R^+$  или  $R$ ) тогда и только тогда, когда существует гомеоморфное отображение множества  $\mathcal{F}_g^-$  ( $\mathcal{F}_g^+$  или  $\mathcal{F}_g$ ) на множество  $\mathcal{F}_f^-$  ( $\mathcal{F}_f^+$  или  $\mathcal{F}_f$ ), удовлетворяющее условию (2.6.19) для всех  $s \in R_1^-$  ( $s \in R_1^+$  или  $s \in R_1$ ).

Для доказательства надо дважды применить Предложение 6.15 и учесть определение гомеоморфного отображения.

Предложение 6.17. Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима  $R^-$  ( $R^+$ ) с устойчивой  $\Pi^-$  ( $\Pi^+$ ) функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$ , то и функция  $f(t)$  устойчива  $\Pi^-$  ( $\Pi^+$ ).

Доказательство. Пусть выполнены условия Предложения и  $\{t_n\} \in N(\alpha, g)$ . Согласно Предложению 6.8 из  $\{t_n\}$  можно извлечь последовательность  $\{\bar{t}_n\} \in N(\alpha, f)$ . Следовательно,  $f(t)$  устойчива  $\Pi^-$ . Предложение доказано.

Введем понятия равномерного сравнения двух функций.

Определение 6.21. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  называется *положительно (отрицательно) равномерно сравнимой* в смысле возвращаемости (*сравнимой  $RR^+$  ( $RR^-$ )*) с функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$ , если существует равномерно непрерывное отображение  $v$  множества  $\mathcal{F}_g^+$  ( $\mathcal{F}_g^-$ ) на множество  $\mathcal{F}_f^+$  ( $\mathcal{F}_f^-$ ), удовлетворяющее условию (2.6.19) при всех  $s \in R_1^+$  ( $s \in R_1^-$ ).

Сравнимая  $RR^+$  и  $RR^-$  с функцией  $g(t)$  функция  $f(t)$  называется *равномерно сравнимой (сравнимой  $RR$ )* с функцией  $g(t)$ .

Определение 6.22. Взаимно сравнимые  $RR^+$  ( $RR^-$ ) функции  $f(t)$  и  $g(t)$  называются *положительно (отрицательно) равномерно изохронными (изохронными  $RR^+$  ( $RR^-$ ))* функциями в смысле возвращаемости.

Функции, изохронные  $RR^+$  и  $RR^-$ , называются *равномерно изохронными (изохронными  $RR$ )* функциями.

Предложение 6.18. Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) с устойчивой  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ) функцией  $g(t) \in C(R_1, M)$ , то  $f(t)$  устойчива  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ).

Доказательство. По условиям Предложения множество  $\mathcal{F}_g^-$  предкомпактно в  $C(R_1, K)$  и существует равномерно непрерывное отображение  $v$  множества  $\mathcal{F}_g^-$  на  $\mathcal{F}_f^-$ . Покажем предкомпактность  $\mathcal{F}_f^-$  в пространстве  $C(R_1, M)$ . С этой целью зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\delta > 0$  в силу равномерной непрерывности отображения  $v$ . Тогда для любых  $t_1, t_2 \in R_1^-$ , таких, что  $\rho_2'[g_{t_1}(t), g_{t_2}(t)] < \delta$ , выполняется неравенство  $\rho_1'[v(g_{t_1}), v(g_{t_2})] < \varepsilon$ . Согласно теореме Хаусдорфа для данного  $\delta$  существует конечная  $\delta$ -сеть множества  $\mathcal{F}_g^-$ , состоящая из функций  $g(s_1+t), g(s_2+t), \dots, g(s_n+t)$ . Пусть  $f(\tau+t)$  — произвольный элемент множества  $\mathcal{F}_f^-$  и элемент  $g(\tau+t) \in \mathcal{F}_g^-$  таков, что  $v(g_\tau) = f_\tau$ . При некотором  $i$  имеет место неравенство  $\rho_2'(g_\tau, g_{s_i}) < \delta$ . Поэтому  $\rho_1'[v(g_\tau), v(g_{s_i})] < \varepsilon$  или  $\rho_1'[f_\tau, f_{s_i}] < \varepsilon$ . Это означает, что для  $\varepsilon > 0$  элементы  $f(s_1+t), f(s_2+t), \dots, f(s_n+t)$  образуют  $\varepsilon$ -сеть множества  $\mathcal{F}_f^-$ . Следовательно,  $\mathcal{F}_f^-$  предкомпактно и функция  $f(t)$  устойчива  $L^-$ . Предложение доказано.

Определение 6.23. Последовательность (2.6.12) чисел  $t_n \in R_1^+$  ( $t_n \in R_1^-$ ) называется *положительно (отрицательно) направляющей последовательностью* функции  $f(t) \in C(R_1, M)$ , если последовательность (2.6.13) сходится, т. е. выполняется условие (2.6.14).

Последовательность  $t_n \in R_1$  называется *направляющей последовательностью* функции  $f(t)$ , если выполнено условие (2.6.14).

Множества всех положительно направляющих, отрицательно направляющих и направляющих последовательностей функции обозначим соответственно  $\mathcal{H}_f^+$ ,  $\mathcal{H}_f^-$  и  $\mathcal{H}_f$ .

Справедливо

Предложение 6.19. Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) с функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$ , то имеет место включение  $\mathcal{H}_g^- \subset \mathcal{H}_f^-$  ( $\mathcal{H}_g^+ \subset \mathcal{H}_f^+$  или  $\mathcal{H}_g \subset \mathcal{H}_f$ ).

Доказательство. Пусть  $f(t)$  сравнима  $RR^-$  с  $g(t)$ ,  $\{t_n\} \in \mathcal{H}_g^-$  и  $v$  — равномерно-непрерывное отображение множества  $\mathcal{F}_g^-$  на  $\mathcal{F}_f^-$ , удовлетворяющее условию (2.6.19). Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и выберем число  $\delta > 0$  в силу равномерной непрерывности отображения  $v$ . Так как  $\{t_n\} \in \mathcal{H}_g^-$ , то для данного  $\delta > 0$  найдется номер  $n_0$ , что при всех  $n, m \geq n_0$  будет выполняться неравенство  $\rho_2'[g(t_n+t),$

$g(t_n+t)] < \delta$ . Тогда  $\varepsilon > \rho_1'[v(g_{t_n}), v(g_{t_m})] = \rho_1'[f(t_n+t), f(t_m+t)]$ . Это означает, что последовательность  $\{f(t_n+t)\}$  фундаментальна и сходится в  $C(R_1, M)$ . Следовательно,  $\{t_n\} \in \mathcal{H}_f^-$ . Предложение доказано.

Предложение 6.20. Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  устойчива  $\mathcal{L}^-$  ( $\mathcal{L}^+$  или  $\mathcal{L}$ ) и  $\mathcal{H}_g^- \subset \mathcal{H}_f^-$  ( $\mathcal{H}_g^+ \subset \mathcal{H}_f^+$  или  $\mathcal{H}_g \subset \mathcal{H}_f$ ), то  $f(t)$  сравнима  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) с функцией  $g(t) \in C(R_1, K)$ .

Доказательство проведем от противного. Пусть  $f(t)$  не сравнима  $RR^-$  с  $g(t)$ . Тогда найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $\delta_n > 0$  существуют  $t_n, s_n \in R_1^-$  и выполняются неравенства

$$\rho_2'[g(t_n+t), g(s_n+t)] < \delta_n, \quad (2.6.21)$$

$$\rho_1'[f(t_n+t), f(s_n+t)] > \varepsilon. \quad (2.6.22)$$

С учетом устойчивости  $\mathcal{L}^-$  функции  $g(t)$  выделим из последовательности  $\{g(t_n+t)\}$  сходящуюся подпоследовательность. Для сокращения записи за этой подпоследовательностью сохраним прежние обозначения и положим  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n+t) = h(t)$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ , то в силу (2.6.21)  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n+t) = h(t)$ . Тогда число-

вая последовательность  $\{\tau_n\}$ , где  $\tau_{2n-1} = t_n$ ,  $\tau_{2n} = s_n$ , принадлежит множеству  $\mathcal{H}_g^-$ . По условиям Предложения  $\{\tau_n\} \in \mathcal{H}_f^-$ , т. е. последовательность  $\{f(\tau_n+t)\}$  сходится вопреки предположениям (2.6.22). Полученное противоречие доказывает Предложение.

Предложение 6.21. Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) с устойчивой  $\mathcal{L}^-$  ( $\mathcal{L}^+$  или  $\mathcal{L}$ ) функцией  $g(t) \in C(R_1, M)$  тогда и только тогда, когда имеет место включение  $\mathcal{H}_g^- \subset \mathcal{H}_f^-$  ( $\mathcal{H}_g^+ \subset \mathcal{H}_f^+$ ,  $\mathcal{H}_g \subset \mathcal{H}_f$ ).

Доказательство вытекает из Предложений 6.19 и 6.20.

Применяя дважды Предложение 6.20, получим

Предложение 6.22. Устойчивые  $\mathcal{L}^-$  ( $\mathcal{L}^+$  или  $\mathcal{L}$ ) функции  $f(t) \in C(R_1, M)$  и  $g(t) \in C(R_1, K)$  сравнимы  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) тогда и только тогда, когда имеет место равенство  $\mathcal{H}_f^- = \mathcal{H}_g^-$  ( $\mathcal{H}_f^+ = \mathcal{H}_g^+$  или  $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_g$ ).

Учитывая, что из сравнимости  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) вытекает сравнимость  $R^-$  ( $R^+$  или  $R$ ), и Предложение 6.17, получим

Предложение 6.23. Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  сравнима  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) с устойчивой  $\mathcal{L}^-$  ( $\mathcal{L}^+$  или  $\mathcal{L}$ ) функцией  $g(t) \in C(R_1, M)$ , то  $f(t)$  также устойчива  $\mathcal{L}^-$  ( $\mathcal{L}^+$  или  $\mathcal{L}$ ).

Предложение 6.24. Если функция  $g(t) \in C(R_1, K)$  и  $v$  — непрерывное отображение множества  $g(R_1^-)$  ( $g(R_1^+)$  или  $g(R_1)$ ) в пространство  $M$ , то функция  $f(t)$ , определенная для всех  $t \in R_1$  выражением

$$f(t) = v[g(t)], \quad (2.6.23)$$

принадлежит пространству  $C(R_1, M)$  и сравнима  $R^-$  ( $R^+$  или  $R$ ) с функцией  $g(t)$ .

Доказательство проведем от противного. Пусть условия Предложения выполнены и  $f(t)$  не сравнима  $R^-$  с  $g(t)$ . Тогда найдется собственная  $\alpha$ -последовательность  $\{t_n\}$  функции  $g(t)$ , которая не принадлежит множеству  $N(\alpha, f)$ . Следовательно, существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что для любого натурального  $n$  и  $t \in R_1^-$  выполняется неравенство

$$\rho_1[f(t + t_n), f(t)] \geq \varepsilon. \quad (2.6.24)$$

Согласно Предложению 6.2 вместе с условием (2.6.24) имеет место неравенство

$$\sup_{-1/\varepsilon \leq t \leq 0} \rho_1[f(t + t_n), f(t)] \geq \varepsilon.$$

Тогда каждому номеру  $n$  соответствует хотя бы одна точка

$$s_n \in \left[-\frac{1}{\varepsilon}, 0\right] \text{ такая, что}$$

$$\rho_1[f(s_n + t_n), f(s_n)] \geq \varepsilon. \quad (2.6.25)$$

Последовательность  $\{s_n\}$  ограничена и, следовательно, содержит сходящуюся подпоследовательность  $\{\bar{s}_n\}$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = s$ .

Пусть  $g(s) = p$ ,  $g(\bar{s}_n) = p_n$  и  $g(t_n + \bar{s}_n) = q_n$ . Учтявая это, перепишем выражения (2.6.25):

$$\rho_1[v(q_n), v(p_n)] \geq \varepsilon. \quad (2.6.26)$$

Для каждого натурального  $n$  имеет место неравенство

$$\varepsilon \leq \rho_1[v(q_n), v(p_n)] \leq \rho_1[v(q_n), v(p)] + \rho_1[v(p), v(p_n)].$$

Согласно выбору  $\{t_n\} \in N(\alpha, g)$  и, следовательно, справедливо равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-1/\varepsilon \leq t \leq 0} \rho_2[g(t + t_n), g(t)] = 0$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p_n, q_n) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ . Из этих равенств следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ . По условиям Предложения отображение  $v$  непрерывно, в частности оно непрерывно в точке  $p \in g(R_1^-)$ . Исходя из непрерывности функции  $v(p)$ , получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1[v(p_n), v(p)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1[v(q_n), v(p)] = 0.$$

Иначе говоря, имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1[h(p_n), h(q_n)] = 0$ , которое противоречит условию (2.6.24). Полученное противоречие доказывает Предложение.

Предложение 6.25. Если  $g(t) \in C(R_1, K)$  и  $v$  — равномерно-непрерывное отображение множества  $g(R_1^-)$  ( $g(R_1^+)$  или  $g(R_1)$ ) в пространство  $M$ , то функция  $f(t)$ , определенная для всех  $t \in R_1^-$  выражением (2.6.23), принадлежит пространству  $C(R_1^-, M)$  и сравнима  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) с функцией  $g(t)$ .

Доказательство от противного. Пусть условия Предложения выполнены, но функция  $f(t)$  не сравнима  $RR^-$  с функцией  $g(t)$ . Тогда найдется число  $\varepsilon > 0$ , последовательность по-

ложительных, сходящихся к нулю чисел  $\{\delta_n\}$  и две числовые последовательности  $\{s_n\}$  и  $\{t_n\}$ , где  $s_n, t_n \in R_1^-$  такие, что

$$\sup_{-1/\delta_n \leq t \leq 0} \rho_2 [g(t+t_n), g(t+s_n)] < \delta_n, \quad (2.6.27)$$

$$\sup_{-1/\delta \leq t \leq 0} \rho_1 [f(t+t_n), f(t+s_n)] > \varepsilon \quad (2.6.28)$$

для всех натуральных  $n$ . Из (2.6.28) вытекает, что каждому натуральному  $n$  соответствует хотя бы одна точка  $\bar{t}_n \in [-1/\varepsilon, 0]$  и выполняется

$$\rho_1 [f(\bar{t}_n+t_n), f(\bar{t}_n+s_n)] \geq \varepsilon. \quad (2.6.29)$$

Вводя обозначения  $g(\bar{t}_n+t_n) = p_n$ ,  $g(\bar{t}_n+s_n) = q_n$ , перепишем выражение (2.6.29) в виде

$$\rho_1 [v(p_n), v(q_n)] \geq \varepsilon. \quad (2.6.30)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  и справедливо неравенство (2.6.27), то условие (2.6.30) противоречит равномерной непрерывности отображения  $v$ . Полученное противоречие доказывает Предложение.

**Предложение 6.26.** Если производная  $f'(t)$  функции  $f(t) \in C(R_1, M)$  равномерно непрерывна на  $R_1^-$  ( $R_1^+$  или  $R_1$ ), то  $f'(t)$  сравнима  $RR^-$  ( $RR^+$  или  $RR$ ) с функцией  $f(t)$ .

**Доказательство.** Пусть выполнены условия Предложения. Тогда оператор дифференцирования  $d/dt$  осуществляет равномерно непрерывное отображение множества  $f'(R_1^-)$  в пространство  $M$ . При этом согласно Предложению 6.25 функция  $f'(t)$ , определенная для всех  $t \in R_1^-$  равенством  $f'(t) = df(t)/dt$ , будет сравнимой  $RR^-$  с функцией  $f(t)$ .

Из доказанного Предложения и Предложения 6.17 следует Предложение в виде утверждения.

**Предложение 6.27.** Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  устойчива  $\Pi^-$  ( $\Pi^+$  или  $\Pi$ ) и имеет равномерно непрерывную производную, то эта производная также устойчива  $\Pi^-$  ( $\Pi^+$  или  $\Pi$ ).

**Предложение 6.28.** Если функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  устойчива  $\Pi^-$  ( $\Pi^+$  или  $\Pi$ ) и имеет предкомпактную первообразную, то первообразная также устойчива  $\Pi^-$  ( $\Pi^+$  или  $\Pi$ ).

**Доказательство.** В силу Предложения 6.9 первообразная сравнима  $R^-$  с самой функцией. Следовательно, выполнены все условия Предложения 6.17. Поэтому первообразная функции  $f(t)$  устойчива  $\Pi^-$ .

В заключение отметим известные из анализа для рекуррентных и почти периодических функций утверждения.

**Предложение 6.29** [49, 85]. Равномерно непрерывная производная рекуррентной (почти периодической) функции рекуррентна (почти периодична).

**Предложение 6.30** [49, 85]. Предкомпактная первообразная рекуррентной (почти периодической) функции рекуррентна (почти периодична).

## Качественные свойства поступательного движения тел Солнечной системы

В небесной механике исследуется задача Коши—найти решение системы дифференциальных уравнений движения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Это решение позволяет однозначно восстановить прошлое и определить будущее рассматриваемого движения. Однако в конкретных задачах прошлое движение небесных тел, как правило, не исследуется, более того, оно часто не принимается во внимание.

На необходимость учета сведений из истории движения указывал в своих лекциях А. Н. Колмогоров [43], высказав, в частности, предположение об устойчивости по Лагранжу движения планетной системы, устойчивого в этом же смысле в прошлом. Однако до настоящего времени такой подход в должной мере не реализован. В данной главе предпринята попытка восполнить этот пробел. Учитывая зависимость вращения Земли от закономерностей поступательных движений больших планет Солнечной системы, исследуется их орбитальное движение.

Допуская, что движение Солнечной системы было устойчивым по Лагранжу в прошлом, доказываемая рекуррентность движения Солнечной системы на всей действительной оси времени. Возникающий при этом вопрос о мерах движения и их сохранении решается следующим образом. Известно, что в качестве меры движения можно принять количество движения и кинетическую энергию или зависящие от них другие величины. Здесь в качестве характеристики движения рассматриваются полярный момент инерции Солнечной системы и ее кинетическая энергия. Доказывается, что указанные величины обладают свойством минимальности по Биркгофу, если движение Солнечной системы устойчиво по Лагранжу. Устанавливается справедливость и обратного утверждения.

### 1. Задача $n$ тел и ее первые интегралы

Пусть имеется механическая система  $n$  тел  $G_n$ , рассматриваемых как материальные точки  $O_1, O_2, \dots, O_n$  соответственно массами  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , взаимодействующих по закону Ньютона. Введем прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$  с началом  $O$  в центре масс системы  $G_n$  и обозначим через  $x_i, y_i, z_i$  координаты точки  $O_i$ , где  $i=1, 2, \dots, n$ .

Тогда движение механической системы  $G_n$  описывается системой  $6n$  дифференциальных уравнений вида [24, 122]

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= u_i, & \frac{du_i}{dt} &= \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= v_i, & \frac{dv_i}{dt} &= \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} &= w_i, & \frac{dw_i}{dt} &= \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где  $U$  — силовая функция системы  $G_n$ , имеющая вид

$$U = \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{M_i M_j}{r_{ij}}. \quad (3.1.2)$$

Здесь  $\sum'$  означает суммирование по индексу  $j$ , не равному индексу  $i$ ,  $\gamma$  — постоянная тяготения,  $r_{ij}$  — взаимное расстояние между материальными точками  $O_i$  и  $O_j$ . Для упрощения записи полагаем  $\gamma=1$ .

Для задачи  $n$  тел ставится задача Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_{i0}, & u_i(0) &= u_{i0}, \\ y_i(0) &= y_{i0}, & v_i(0) &= v_{i0}, \\ z_i(0) &= z_{i0}, & w_i(0) &= w_{i0}, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где для простоты начальный момент времени  $t_0$  принят за начало отсчета времени, т. е.  $t_0=0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

Задача (3.1.1) допускает десять первых интегралов, из которых шесть в силу выбора системы отсчета  $Oxyz$  вырождаются в инвариантные соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_i x_i &= 0, & \sum_{i=1}^n M_i u_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_i y_i &= 0, & \sum_{i=1}^n M_i v_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_i z_i &= 0, & \sum_{i=1}^n M_i w_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Инвариантные соотношения (3.1.4) выполняются вдоль каждого решения задачи (3.1.1) и (3.1.3).

Запишем интегралы площадей или моментов количества движения:

$$\sum_{i=1}^n M_i (y_i \omega_i - z_i v_i) = \kappa_1, \quad \sum_{i=1}^n M_i (x_i u_i - x_i \omega_i) = \kappa_2, \quad (3.1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n M_i (x_i v_i - y_i u_i) = \kappa_3.$$

Здесь  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  — постоянные площадей, значения которых определяются по начальным условиям (3.1.3).

Интегралы (3.1.5) показывают, что вектор

$$\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\} \quad (3.1.6)$$

с проекциями  $\kappa_1, \kappa_2$  и  $\kappa_3$  на координатные оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно остается постоянным в течение всего времени движения.

Рассмотрим плоскость  $L$ , проходящую через центр масс  $O$  системы  $G_n$  и перпендикулярную вектору  $\boldsymbol{\kappa}$ . Она описывается уравнением

$$\kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 z = 0$$

и сохраняет неизменную ориентацию относительно системы координат  $Oxyz$ . Плоскость  $L$  называется *неизменяемой* (инвариантной) *плоскостью Лапласа* [24, 122].

Запишем выражение интеграла энергии

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (u_i^2 + v_i^2 + \omega_i^2) - U = h. \quad (3.1.7)$$

Здесь  $h$  — постоянная энергии, ее значение также определяется начальными условиями (3.1.3).

Первые интегралы (3.1.5) выражают закон сохранения момента количества движения механической системы  $G_n$ , а интеграл (3.1.7) — закон сохранения ее полной энергии.

Введем векторы

$$\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}, \quad (3.1.8)$$

$$\mathbf{v}_i = \{u_i, v_i, \omega_i\} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

и функции вида

$$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \dots + M_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n M_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i, \quad (3.1.9)$$

$$2T = M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \dots + M_n v_n^2 = \sum_{i=1}^n M_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i. \quad (3.1.10)$$

Функция  $I$  представляет собой полярный момент инерции системы  $G_n$  относительно центра масс  $O$ , а функция  $2T$  — ее удвоенную кинетическую энергию. Рассмотрим производные по

времени  $t$  функции  $I$  в силу уравнений движения (3.1.1)

$$dI/dt = 2 \sum_{i=1}^n M_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n M_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dt^2} &= 2 \sum_{i=1}^n M_i \left[ \mathbf{v}_i^2 + \mathbf{r}_i \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right] = 2 \sum_{i=1}^n M_i \left[ \mathbf{v}_i^2 + \mathbf{r}_i \cdot \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right] = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n M_i \mathbf{v}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 4T - 2U. \end{aligned}$$

Окончательно для второй производной по времени  $t$  функции  $I$  получим выражение

$$d^2 I/dt^2 = 4T - 2U. \quad (3.1.12)$$

При выводе формулы (3.1.12) использованы следующие сокращения:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right\}$$

и однородность силовой функции  $U$  относительно переменных  $x_i, y_i, z_i$ . В силу теоремы Эйлера об однородных функциях имеет место равенство [24, 118]

$$\sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial U}{\partial r_i} = -U.$$

Используя соотношение, полученное из интеграла энергии,  $U = T - h$

$$(3.1.13)$$

перепишем (3.1.12):

$$d^2 I/dt^2 = 2(T + h), \quad d^2 I/dt^2 = 2(U + 2h). \quad (3.1.14)$$

Уравнение (3.1.14), связывающее полярный момент инерции  $I$  системы  $G_n$  с ее силовой функцией  $U$ , называется *уравнением Лагранжа—Якоби* [47, 127].

Левые части уравнения Лагранжа—Якоби зависят от выбора системы координат, ибо в них участвуют величины радиусов-векторов  $\mathbf{r}_i$  материальных точек  $O_i$ . Представим полярный момент инерции  $I$  в виде, содержащем только взаимные расстояния между точками  $O_i$  и  $O_j$ .

Запишем алгебраическое тождество Лагранжа

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 = \left( \sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (a_i b_j - a_j b_i)^2, \quad (3.1.15)$$

где  $k$  — произвольное натуральное число,  $a_i$  и  $b_i$  — любые постоянные.

Положим в (3.1.15)  $k=n$ ,  $a_i=\sqrt{M_i}$  и  $b_i=\sqrt{M_i}x_i$ . Тогда тождество Лагранжа примет вид

$$\sum_{i=1}^n M_i \sum_{i=1}^n M_i x_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n M_i x_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_i M_j (x_j - x_i)^2.$$

Аналогично получают следующие тождества:

$$\sum_{i=1}^n M_i \sum_{i=1}^n M_i y_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n M_i y_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_i M_j (y_j - y_i)^2,$$

$$\sum_{i=1}^n M_i \sum_{i=1}^n M_i z_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n M_i z_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_i M_j (z_j - z_i)^2.$$

Обозначив массу механической системы  $G_n$  через  $\mu$ :

$$\mu = \sum_{i=1}^n M_i$$

и, учитывая взаимные расстояния

$$r_{ij} = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2,$$

сложим приведенные тождества:

$$\begin{aligned} \mu I &= \left( \sum_{i=1}^n M_i x_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n M_i y_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n M_i z_i \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_i M_j r_{ij}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^* M_i M_j r_{ij}^2. \end{aligned}$$

Для первых слагаемых учтены инвариантные соотношения (3.1.4) и использовано обозначение, введенное Хильми [82], для суммы по всевозможным парам  $i, j$  из сочетаний любого  $i$  с любым  $j$ . Отсюда вытекает следующее представление момента инерции  $I$  механической системы  $G_n$ :

$$I = \frac{1}{\mu} \sum_{i,j}^* M_i M_j r_{ij}^2,$$

где участвуют только взаимные расстояния  $r_{ij}$ , не зависящие от выбора системы координат. Введем обозначение  $J = \sum_{i,j}^* M_i M_j r_{ij}^2$ ,

тогда уравнение Лагранжа—Якоби принимает вид

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 J}{dt^2} = 2(T \mp h), \quad \frac{1}{\mu} \frac{d^2 J}{dt^2} = 2(U + 2h). \quad (3.1.16)$$

Напишем тождество

$$u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 = \frac{1}{r_i^2} [(x_i v_i - y_i u_i)^2 + (y_i w_i - z_i v_i)^2 + (z_i u_i - x_i w_i)^2] + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.17)$$

Обе части этих тождеств умножим на массу  $M_i$  точки  $O_i$  и полученные выражения просуммируем по индексам  $i$  от 1 до  $n$ :

$$2T = J^2 + \sum_{i=1}^n M_i \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2, \quad (3.1.18)$$

где

$$J^2 = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i^2} (x_i v_i - y_i u_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i^2} (y_i w_i - z_i v_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i^2} (z_i u_i - x_i w_i)^2. \quad (3.1.19)$$

Известно, что первая сумма в правых частях равенства (3.1.19) имеет условный минимум, равный  $\kappa_1^2 I$ . Аналогично вторая и третья сумма равенства имеют условные минимумы  $\kappa_2^2 I$  и  $\kappa_3^2 I$  соответственно. Поэтому для  $J$  имеем оценку

$$J \geq \kappa^2 / I.$$

С учетом сказанного из равенства (3.1.18) получаем

$$\frac{\kappa^2}{I} \leq 2T - \sum_{i=1}^n M_i \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2. \quad (3.1.20)$$

Так как величина  $\kappa^2 / I$  положительна в каждый момент времени  $t \in R_1$ , то правая часть (3.1.20) стремится к нулю тогда и только тогда, когда кинетическая энергия движения системы  $G_n$  стремится к нулю, иначе говоря, когда каждое из  $n$  тел системы стремится к состоянию покоя. Вместе с энергией  $T$  стремится к нулю величина  $\kappa^2 / I$ , что эквивалентно неограниченному росту полярного момента инерции  $I$ .

Отсюда вытекает

Предложение 1.1. Если вектор  $\mathbf{x}$  момента количества движения механической системы  $G_n$  отличен от нуля и все  $n$  тел этой системы  $G_n$  во все время движения остаются внутри сферы конечного радиуса с центром в точке  $O$ , то внутри этой сферы нет точек покоя всей системы, отличных от начала координат.

Далее продифференцируем дважды  $I^2$  по времени  $t$  и представим уравнение Лагранжа—Якоби в виде

$$2I \frac{d^2 I}{dt^2} + 2 \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 - 2h = 2T.$$

Учитывая это выражение кинетической энергии  $T$  в неравенстве (3.1.20), имеем

$$2I \frac{d^2 I}{dt^2} + 2 \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 - 2h - \sum_{i=1}^n M_i \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2 \geq \frac{\kappa^2}{I^2}. \quad (3.1.21)$$

Очевидно,

$$I \frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^n M_i r_i \frac{dr_i}{dt}.$$

Возводя в квадрат полученное равенство и применяя неравенство Коши—Буняковского [41] к правой части полученного выражения, находим

$$I^2 \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n M_i r_i^2 \sum_{i=1}^n M_i \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2,$$

или

$$\left( \frac{dI}{dt} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n M_i \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2.$$

Проведенная оценка позволяет усилить неравенство (3.1.21), записав его в виде

$$2I \frac{d^2 I}{dt^2} + \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 - 2h \geq \frac{\kappa^2}{I^2}. \quad (3.1.22)$$

Выражение (3.1.22) называется *неравенством Зундмана* [25, 127].

Так как [127]

$$|dr_{ij}/dt| \leq (|u_i - u_j| + |v_i - v_j| + |w_i - w_j|)/r_{ij},$$

то

$$\left| \frac{dU}{dt} \right| = \left| \sum'_{i,j} \frac{M_i M_j}{r_{ij}} \frac{dr_{ij}}{dt} \right| \leq \sum'_{i,j} \frac{M_i M_j}{r_{ij}^2} \times \\ \times (|u_i - u_j| + |v_i - v_j| + |w_i - w_j|).$$

Кроме того,  $(M_i M_j / r_{ij}) < U$ , поэтому последнее неравенство можно усилить:

$$\left| \frac{dU}{dt} \right| \leq U^2 \sum'_{i,j} \frac{|u_i - u_j| + |v_i - v_j| + |w_i - w_j|}{M_i M_j}. \quad (3.1.23)$$

Напишем выражение кинетической энергии, также получаемое на основе тождества Лагранжа (3.1.15):

$$T = \frac{1}{2\mu} \sum' M_i M_j [(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2 + (w_i - w_j)^2].$$

Отсюда

$$M_i M_j [(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2 + (w_i - w_j)^2] \leq 2\mu T,$$

с учетом которого выражение (3.1.23) можно записать в виде

$$|dU/dt| \leq \mu_0 U^2 \sqrt{2T},$$

где  $\mu_0 = \sqrt{\mu} \sum'_{i,j} (m_i m_j)^{-1/2}$ .

Согласно уравнению Лагранжа—Якоби  $dU/dt = d^3 I/dt^3$ . Поэтому

$$\left| \frac{dU}{dt} \right| = \left| \frac{d^3 I}{dt^3} \right| \leq \frac{1}{4} \left( \left| \frac{d^2 I}{dt^2} \right|^2 + 4|h| \right)^{1/2}. \quad (3.1.24)$$

Аналогично получаем

$$(d^2 I^2/dt^2 - 4h) I \geq \frac{2}{\sqrt{\mu}} \sum'_{i,j} (M_i M_j)^{3/2} > 0. \quad (3.1.25)$$

Введем вспомогательную функцию Зундмана [127]

$$S(t) = I (dI/dt)^2 - 2hI + \kappa^2/I$$

и продифференцируем ее по времени:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} \left[ 2I \frac{d^2 I}{dt^2} + \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 - 2h - \frac{\kappa^2}{I^2} \right].$$

В силу (3.1.22) выражение в квадратных скобках неотрицательно. Поэтому производные  $dS/dt$  и  $dI/dt$  имеют одинаковые знаки. Отсюда следует

Предложение 1.2. Если одна из функций  $S$  и  $I$  возрастает (убывает), то другая не может убывать (возрастать).

Кроме того, известно следующее [127]

Предложение 1.3. Если момент количества движения  $\kappa$  системы  $G_n$  отличен от нуля, то отсутствует одновременное соударение всех тел  $O_i$  этой системы.

## 2. Задача двух тел и законы Кеплера

Для различного рода оценок, относящихся к задаче  $n$  тел, нам понадобится ряд соотношений из задачи двух тел. Как и ранее, относительное движение материальных точек  $M_1$  и  $M_2$  будем рассматривать в инерциальной системе координат  $Oxyz$ . Силовая функция задачи двух тел имеет вид

$$U = M_1 M_2 / r_{12}, \quad (3.2.1)$$

где взаимное расстояние  $r_{12}$  между точками  $O_1$  и  $O_2$  равно

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (3.2.2)$$

Основные уравнения движения сохраняют свой вид. Как следствие задачи  $n$  тел напомним инвариантные соотношения и

первые интегралы дифференциальных уравнений движения задачи двух тел:

$$\begin{aligned}
 M_1 x_1 + M_2 x_2 &= 0, & M_1 y_1 + M_2 y_2 &= 0, & M_1 z_1 + M_2 z_2 &= 0, \\
 M_1 u_1 + M_2 u_2 &= 0, & M_1 v_1 + M_2 v_2 &= 0, & M_1 w_1 + M_2 w_2 &= 0, \\
 M_1 (y_1 \omega_1 - z_1 v_1) + M_2 (y_2 \omega_2 - z_2 v_2) &= \kappa_1, \\
 M_1 (z_1 u_1 - x_1 w_1) + M_2 (z_2 u_2 - x_2 w_2) &= \kappa_2, \\
 M_1 (x_1 v_1 - y_1 u_1) + M_2 (x_2 v_2 - y_2 u_2) &= \kappa_3, \\
 \frac{1}{2} [M_1 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + M_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)] - U &= h.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.3}$$

Из первых трех соотношений получим

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -(M_2/M_1) x_2, & y_1 &= -(M_2/M_1) y_2, \\
 z_1 &= -(M_2/M_1) z_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

Подставляя (3.2.4) в (3.2.2), находим

$$r_{12} = [(M_1 + M_2)/M_1] r_2.$$

Тогда из уравнений абсолютного движения задачи двух тел вытекают уравнения движения точки  $M_2$  относительно центра масс точек  $M_1$  и  $M_2$ :

$$\begin{aligned}
 dx_2/dt &= u_2, & dy_2/dt &= v_2, & dz_2/dt &= w_2, \\
 \frac{du_2}{dt} &= -\frac{M_1^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{x^2}{r_2^3}, & \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{M_1^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{y_2}{r_2^3}, \\
 \frac{dw_2}{dt} &= -\frac{M_1^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{z_2}{r_2^3}.
 \end{aligned}$$

Введем систему координат  $O_1 \xi \eta \zeta$  с началом в материальной точке  $O_1$  и неизменными по направлению координатными осями, параллельными осям системы  $Oxyz$ . В этой системе точка  $O_1$  имеет нулевые координаты, координаты другой точки ( $O_2$ ) обозначены  $\xi, \eta, \zeta$ . Тогда движение точки  $O_2$  относительно точки  $O_1$  описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 d^2 \xi / dt^2 + \mu \xi / r^3 &= 0, & d^2 \eta / dt^2 + \mu \eta / r^3 &= 0, \\
 d^2 \zeta / dt^2 + \mu \zeta / r^3 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.2.5}$$

где  $r = r_{12} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$  — расстояние между точками  $O_1$  и  $O_2$ ,  $\mu = M_1 + M_2$ .

Уравнения (3.2.5) в небесной механике принято называть *дифференциальными уравнениями невозмущенного движения*. Такое название сохраняется в случае задачи  $n$  тел и, предполагая каждую из масс  $M_2, M_3, \dots, M_n$  тел системы  $G_n$  весьма малой по сравнению с массой  $M_1$  материальной точки  $O_1$  и пренебрегая в первом приближении всеми членами силовой функции системы, содержащими произведение двух малых масс, пред-

ставляет уравнение относительного движения материальных точек  $O_i$  ( $i=2, 3, \dots, n$ ) в виде (3.2.5).

Соответственно теория невозмущенного кеплеровского движения системы двух материальных точек сводится к интегрированию и исследованию решения уравнений (3.2.5).

Уравнения (3.2.5) имеют шесть независимых первых интегралов, из которых интегралы площадей записываются в виде

$$\eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt} = a, \quad \zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} = b, \quad \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = c, \quad (3.2.6)$$

где  $a, b, c$  — постоянные площадей.

Интеграл энергии для уравнения (3.2.5) имеет вид

$$(d\xi/dt)^2 + (d\eta/dt)^2 + (d\zeta/dt)^2 - 2\mu/r = h, \quad (3.2.7)$$

$h$  — постоянная энергии.

Обозначим

$$r = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad dr/dt = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \\ d\xi/dt = \alpha, \quad d\eta/dt = \beta, \quad d\zeta/dt = \gamma.$$

Тогда

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = s,$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \xi \frac{d\alpha}{dt} + \eta \frac{d\beta}{dt} + \zeta \frac{d\gamma}{dt} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

и в силу уравнений движения (3.2.5) и интеграла энергии (3.2.7) найдем

$$ds/dt = \mu/r + h. \quad (3.2.8)$$

Продифференцируем (3.2.8) по времени:

$$d^2 s/dt^2 = -\mu s/r^3. \quad (3.2.9)$$

Это уравнение по виду совпадает с уравнениями движения (3.2.5), что и позволяет получить соответствующие *интегралы Лапласа*:

$$\xi ds/dt - s\alpha = \bar{a}, \quad \eta ds/dt - s\beta = \bar{b}, \quad \zeta ds/dt - s\gamma = \bar{c}, \quad (3.2.10)$$

где  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{c}$  — постоянные, которые связаны с постоянными площадями соотношением вида

$$a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} = 0. \quad (3.2.11)$$

Вектор  $I = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  с компонентами  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{c}$  называют *вектором Лапласа*.

Существует зависимость между первыми интегралами уравнений (3.2.5) вида [24]

$$\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = \mu^2 + h(a^2 + b^2 + c^2). \quad (3.2.12)$$

Таким образом, семь первых интегралов (3.2.6), (3.2.7) и (3.2.10) уравнений движения (3.2.5) связаны двумя алгебраическими соотношениями (3.2.11) и (3.2.12). И они не образуют полную систему независимых первых интегралов уравнений движения (3.2.5). Так как эти последние имеют шестой порядок, то при использовании указанных первых интегралов и их связей (3.2.11), (3.2.12) недостающий первый интеграл может быть найден квадратурой.

Однако построить таким способом общее решение уравнений движения в задаче двух тел затруднительно. Поэтому сначала обратимся к геометрическому свойству орбиты движения точки  $M_2$  относительно точки  $O_1$  [64]. Непосредственным следствием первых интегралов (3.2.6) является

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0, \quad (3.2.13)$$

т. е. уравнение *неизменяемой плоскости Лапласа* системы двух тел.

Уравнение (3.2.13) показывает, что орбита материальной точки  $M_2$  является плоской кривой, расположенной в неизменяемой плоскости Лапласа.

Складывая интегралы Лапласа (3.2.10), предварительно умноженные на  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  соответственно, получим

$$\mu r = a^2 + b^2 + c^2 - \bar{a}\xi - \bar{b}\eta - \bar{c}\zeta. \quad (3.2.14)$$

Уравнение (3.2.14) содержит только координаты движущейся точки  $M_2$  и определяет в пространстве некоторую поверхность второго порядка. Следовательно, и орбита движения этой точки представляет кривую второго порядка, определяемую как сечение поверхности (3.2.14) плоскостью (3.2.13).

Рассмотрим прямую

$$\xi/\bar{a} = \eta/\bar{b} = \zeta/\bar{c}, \quad (3.2.15)$$

проходящую через точку  $O_1$  (начало координат) и коллинеарную вектору Лапласа  $l$ . Согласно (3.2.11) она лежит в плоскости орбиты точки  $M_2$ . Поэтому любая плоскость из семейства с параметром  $\lambda$

$$\bar{a}\xi + \bar{b}\eta + \bar{c}\zeta = \lambda$$

перпендикулярна прямой (3.2.15), и уравнение (3.2.14) принимает вид

$$\mu r = a^2 + b^2 + c^2 - \lambda,$$

показывающий, что радиус-вектор текущей точки поверхности (3.2.14) выражается рациональным образом через ее координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Отсюда следует, что начало координат совпадает с одним из фокусов поверхности (3.2.14).

Таким образом, поверхность (3.2.14) есть поверхность вращения вокруг оси (3.2.15), одним из фокусов которой является начало координат — положение точки  $M_1$ .

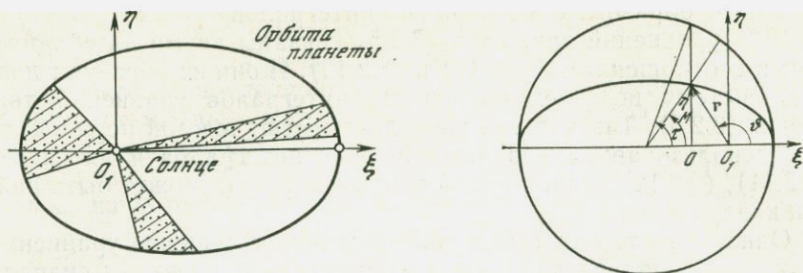


Рис. 3.1. Декартова система координат  $O_1\xi\eta$  и схема движения по законам Кеплера

На рисунке приведены области (заштрихованные), которые иллюстрируют второй закон Кеплера

Рис. 3.2. Полярная система координат  $O_1rv$

Отсюда получаем

Первый (обобщенный) закон Кеплера. Невозможная орбита точки  $M_2$  относительно точки  $M_1$  представляет собой кривую второго порядка, в одном из фокусов которой находится точка  $M_1$ , и ее фокальная ось направлена по вектору Лапласа  $l$ .

Определение 2.1. Фокальная ось орбиты называется *линией апсид*, и точки пересечения линии апсид с орбитой — *апсидами*. Ближайшая к фокусу (точка  $M_1$ ) апсида называется *перигелием*, наиболее удаленная — *апогелием*.

Совместим координатную плоскость  $O_1\xi\eta$  с неизменяемой плоскостью Лапласа и направим ось  $O_1\xi$  по линии апсид к перигелию, а ось  $O_1\eta$  — по прямой

$$\xi/a = \eta/b = \zeta/c.$$

При этом ось  $O_1\eta$  дополняет систему координат  $O_1\xi\eta\zeta$  до правой (рис. 3.1). В этой правой системе координат орбита движения точки  $M_2$  относительно точки  $M_1$  описывается уравнениями

$$\zeta = 0, \quad \mu r = c^2 - \bar{c}\xi, \quad (3.2.16)$$

где  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ .

Введем полярную систему координат с полюсом в фокусе и обозначим  $r$  — фокальный радиус-вектор,  $v$  — полярный угол, отсчитываемый против часовой стрелки от линии апсид до радиуса-вектора  $r$  (рис. 3.2). С учетом связи прямоугольных и полярных орбитальных координат точки  $M_2$

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v \quad (3.2.17)$$

разрешим второе из уравнений (3.2.16) относительно фокального радиуса

$$r = (c^2/\mu)/(1 + \bar{c} \cos v/\mu). \quad (3.2.18)$$

Обозначим параметр и эксцентриситет кривой (3.2.18) соответственно

$$p = c^2/\mu, \quad e = \bar{c}/\mu.$$

Тогда уравнение (3.2.18) принимает вид

$$r = p/(1 + e \cos v). \quad (3.2.19)$$

Интеграл площадей в полярных координатах

$$r^2 dv/dt = c \quad (3.2.20)$$

устанавливает связь между истинной аномалией  $v$  и временем  $t$ :

$$p^2 dv/(1 + e \cos v)^2 = c dt.$$

Обозначим через  $\tau$  момент прохождения точки  $M_2$  через перигеицентр и проинтегрируем последнее уравнение:

$$p^2 \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = c(t - \tau). \quad (3.2.21)$$

Если элемент площади в полярных координатах

$$ds = \frac{1}{2} r^2 dv,$$

то интеграл площадей (3.2.20) позволяет представить скорость изменения этой величины в виде

$$ds/dt = c/2. \quad (3.2.22)$$

Отсюда вытекает

Второй (обобщенный) закон Кеплера. Секторная скорость движения точки  $M_2$  относительно точки  $M_1$  остается постоянной в течение всего времени ее движения, а площадь сектора, описываемого радиусом-вектором  $r$  точки  $M_2$  изменяется пропорционально времени  $t$ .

Определение 2.2. Линия пересечения координатных плоскостей  $O_1 \xi \eta$  и  $Oxy$  называется *линией узлов*, а точки пересечения линии узлов с орбитой движения — *узлами* орбиты. Узел орбиты, через который проходит движущаяся точка  $M_2$ , переходя из области отрицательных аппликат в область положительных, называется *восходящим узлом*, а противоположный ему узел — *нисходящим*.

Определение 2.3. Угол  $\Omega$  между направлением на восходящий узел и положительным направлением оси  $Ox$  называется *долготой восходящего узла*. Угол  $\omega$  между направлением на восходящий узел и положительным направлением оси  $O\xi$  называется *угловым расстоянием перигеицентра от узла (аргументом перигеицентра)*. Угол  $i$  между положительными направлениями осей  $O_1 \xi$  и  $Oz$  называется *наклоением* орбиты. Угол, представляю-

Рис. 3.3. Кеплеровские элементы орбиты  
Штриховой линией показана траектория движения точки  $M_1$

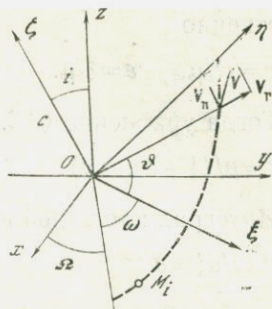
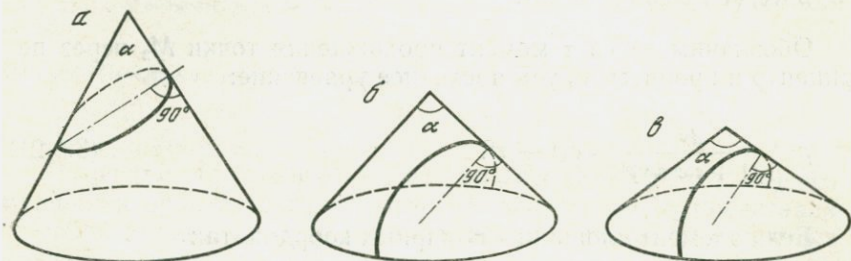


Рис. 3.4. Конические сечения  
 $a$  — эллипс ( $\alpha < 90^\circ$ ), парабола ( $\alpha = 90^\circ$ ) и гипербола ( $\alpha > 90^\circ$ ) соответственно



щий собой сумму истинной аномалии и углового расстояния перицентра от узла, т. е.

$$u = v + \omega, \quad (3.2.23)$$

называется *аргументом широты* (рис. 3.3).

Определение 2.4. Величины

$$\Omega, i, \omega, p, e, \tau \quad (3.2.24)$$

называются *кеплеровскими элементами орбиты*.

Обозначим через  $a$  большую полуось орбиты. Тогда

$$p = a(1 - e^2), \quad h = \sqrt{\mu a}, \quad c = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (3.2.25)$$

и в силу уравнений орбиты (3.2.19) интеграл энергии (3.2.7) принимает вид

$$(d\xi/dt)^2 + (d\eta/dt)^2 + (d\zeta/dt)^2 = \mu(2/r - 1/a)$$

или

$$V^2 = \mu^2(2/r - 1/a). \quad (3.2.26)$$

Эта положительная величина выражает квадрат модуля скорости точки  $M_2$  относительно точки  $M_1$ .

Тогда справедливо [75]

Предложение 2.3. Если величина (3.2.26) такова, что  $V^2 < 2\mu/r$ ,  $V^2 > 2\mu/r$  и  $V^2 = 2\mu/r$ , то орбита точки  $M_2$  является эллипсом, параболой и гиперболой соответственно (рис. 3.4, а—в).

Учитывая постоянство угла  $\omega$  в выражении (3.2.23), получим

$$du/dt = dv/dt.$$

Поэтому интеграл площадей (3.2.20) определяет связь между аргументом широты и временем  $t$ . Интегрируя это уравнение в случае эллиптического движения и учитывая (3.2.25) и параметрическое уравнение эллипса  $\xi = a \cos(E - e)$ ,  $\eta = b \sin E$ , получим уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = \sqrt{\mu} a^{-3/2} (t - \tau), \quad (3.2.27)$$

где  $E$  — эксцентрисическая аномалия. Полагаем

$$n = \sqrt{\mu} a^{-3/2}, \quad M = n(t - \tau). \quad (3.2.28)$$

Определение 2.5. Величины  $n$  и  $M$  соответственно называются *средним движением* точки  $M_2$  и *средней аномалией*.

Термин «среднее» движение точки  $M_2$  вытекает из того, что если  $T_2$  — время одного полного оборота точки  $M_2$ , то его средняя скорость движения равна

$$n_2 = 2\pi/T_2. \quad (3.2.29)$$

Отсюда

$$T_2 = 2\pi a_2^{3/2}/\mu \quad \text{или} \quad T_2^2/a_2^3 = (2\pi/\mu)^2. \quad (3.2.30)$$

Ввиду полного равноправия точек  $M_1$  и  $M_2$  все изложенное справедливо для движения точки  $M_1$  относительно точки  $M_2$ . Так, обозначая через  $T_1$  время одного полного оборота точки  $M_1$  по орбите и через  $a_1$  — большую полуось ее орбиты, получим

$$T_1^2/a_1^3 = (2\pi/\mu)^2. \quad (3.2.31)$$

Из сопоставления выражений (3.2.30) и (3.2.31) следует

Третий закон Кеплера. Квадраты времен одного полного оборота точек  $M_1$  и  $M_2$  пропорциональны кубам больших полуосей их орбит, т. е.

$$T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3. \quad (3.2.32)$$

Пусть теперь рассматриваемые материальные точки  $O_1$  и  $O_2$  движутся под действием притяжения лишь массы  $M_0$  по своим эллиптическим орбитам вокруг третьей точки  $O_0$ . Допускается, что массы  $M_1$  и  $M_2$  не влияют друг на друга. Тогда мы имеем дело одновременно с двумя задачами двух тел. Это позволяет получить, исходя из (3.2.31) и (3.2.32), соотношение

$$T_1^2(M_0 + M_1)/T_2^2(M_0 + M_2) = a_1^3/a_2^3,$$

из которого вытекает

Третий (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном эллиптическом движении двух материальных точек произведения квадрата периодов обращения на суммы центральной и движущейся точек относятся как кубы больших полуосей орбит.

В заключение раздела введем лангранжевы элементы кеплеровской орбиты. Для случая малых эксцентриситетов  $e$  и малых наклонов  $i$  вместо кеплеровских элементов  $e$ ,  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$  Лагранж

ввел переменные  $j, k, s, q$  посредством замены  $j = e \cos u, k = e \sin u, s = \operatorname{tg} i \sin \Omega, q = \operatorname{tg} i \cos \Omega$ .

При этом вместе с оставшимися кеплеровскими элементами (3.2.4) будем иметь следующий набор элементов Лагранжа:

$$j, s, q, k. \quad (3.2.33)$$

### 3. Проблема Лагранжа—Лапласа об устойчивости движения Солнечной системы

Применительно к системе  $G_n$  рассмотрим следующий вопрос: существуют ли положительные постоянные числа  $c$  и  $C$ , зависящие от начальных условий (3.1.3) движения и масс  $M_1, M_2, \dots, M_n$  точек  $O_i$  системы  $G_n$  и удовлетворяющие неравенствам

$$c \leq r_{ij}(t) \leq C \quad (3.3.1)$$

для любого будущего момента времени  $t \in R_1^+$ . Здесь  $r_{ij}$  — взаимные расстояния между точками  $O_i$  и  $O_j$  ( $i \neq j = 1, 2, \dots, n$ ).

Сформулированный вопрос выражает суть проблемы Лагранжа—Лапласа об устойчивости Солнечной системы — механической системы  $G_n$  материальных точек, которая предполагается изолированной от всей остальной Вселенной [4, 68, 71].

Отметим, что проблема Лагранжа—Лапласа об устойчивости Солнечной системы в небесной механике сформулирована применительно к планетному варианту задачи  $n$  тел. Под планетным вариантом задачи  $n$  тел понимают задачу об исследовании движений механической системы (обозначим ее  $\tilde{G}_n$ ) материальных точек, среди которых одна имеет массу, намного большую, чем массы всех остальных тел этой системы. Предполагается, что тела малой массы относительно массивного тела совершают движения по орбитам, близким к невозмущенным кеплеровским (эллиптическим орбитам). Массивное тело называют *центральной*, тела малой массы — *планетами*, а саму систему — *планетной*. Такая модель Солнечной системы упрощает задачу, позволяя ввести малый параметр (отношение массы одной из планет к массе центрального тела) и применить методы теории возмущений и качественной теории дифференциальных уравнений [108, 117].

В дальнейшем изложении настоящего раздела рассматривается только планетный вариант задачи  $n$  тел. Пусть величины  $2\pi/T_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), где  $T_i$  — период обращения тела  $M_i$  относительно центрального тела  $M_1$  при невозмущенном движении, представляют собой средние движения планет  $M_i$ .

**Определение 3.1.** Если периоды  $T_i$  и  $T_j$  обращения двух планет  $O_i$  и  $O_j$  вокруг центрального тела хотя бы для одного набора не равных нулю целых положительных чисел  $k_i$  и  $k_j$  удовлетворяют равенству

$$k_i T_i + k_j T_j = 0, \quad (3.3.2)$$

то невозмущенные средние движения планет  $n_i$  и  $n_j$  называются *попарно рационально соизмеримыми*.

Если  $\omega_i = 2\pi/n_i$  — частота собственного «колебания» планеты  $M_i$  при его невозмущенном движении относительно тела  $M_1$ , то условие соизмеримости средних движений планет (3.3.2) можно записать в виде

$$k_i\omega_i + k_j\omega_j = 0. \quad (3.3.3)$$

Определение 3.2. Если хотя бы для одного набора не равных нулю одновременно целых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$  выполнено условие

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n = 0, \quad (3.3.4)$$

где  $\omega_i$  — частота собственного колебания планеты  $M_i$ , то невозмущенные кеплеровские средние движения планет называются *рационально соизмеримыми*.

Из этих определений следует, что если невозмущенные кеплеровские средние движения хотя бы одной пары планет  $M_i$  и  $M_j$  рационально соизмеримы, то рационально соизмеримы невозмущенные кеплеровские средние движения планет всей планетной системы.

Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного относительного движения планет:

$$\begin{aligned} \ddot{a}^2 \xi_i / dt^2 &= -m_i \xi_i / r_{1i}^3 + P_i, \\ \ddot{a}^2 \eta_i / dt^2 &= -m_i \eta_i / r_{1i}^3 + Q_i, \\ \ddot{a}^2 \zeta_i / dt^2 &= -m_i \zeta_i / r_{1i}^3 + S_i, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

где  $m_i = M_1 + M_i$ .

Здесь составляющие возмущенного ускорения  $P_i, Q_i, S_i$  для тела  $M_i$  определяются формулами

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{j=2}^n M_j \left( \frac{\xi_j - \xi_i}{r_{ij}^3} - \frac{\xi_i}{r_{1j}^3} \right), \\ Q_i &= \sum_{j=2}^n M_j \left( \frac{\eta_j - \eta_i}{r_{ij}^3} - \frac{\eta_i}{r_{1j}^3} \right), \\ S_i &= \sum_{j=2}^n M_j \left( \frac{\zeta_j - \zeta_i}{r_{ij}^3} - \frac{\zeta_i}{r_{1j}^3} \right). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Величины (3.3.6) можно определить как частные производные по соответствующим координатам от возмущающей функции

$$U^{(i)} = \sum_{j=2}^n M_j \left( \frac{1}{r_{ij}} - \frac{\xi_i \xi_j + \eta_i \eta_j + \zeta_i \zeta_j}{r_{1j}^3} \right). \quad (3.3.7)$$

В теории возмущений предполагают, что все отношения  $M_i/M_1$  — малые величины одного порядка и орбитальное движе-

ние каждой планеты принадлежит к эллиптическому типу. Первое предположение для случая задачи о движении больших планет Солнечной системы не вполне соответствует действительности, второе согласно Предложению 2.1 эквивалентно неравенству

$$V_i^2 - 2m_i/r_{1i} < 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (3.3.8)$$

в течение всего времени движения.

Так как неравенства (3.3.8) содержат искомые величины — расстояние от центрального тела до планеты и величины скорости планеты, то, вообще говоря, невозможно гарантировать их справедливость во все время движения.

Возмущающая функция (3.3.7) для каждой планеты  $M_i$  представляет собой линейную функцию  $n-2$  малых параметров — масс планет, исключая массу самой рассматриваемой планеты  $M_i$ . Поэтому подсистема уравнений (3.3.5), соответствующая различным индексам  $i$  и  $j$ , содержит разные наборы малых параметров.

Один из способов интегрирования уравнений возмущенного движения системы  $\mathcal{G}_n$  состоит в построении решения в виде формальных рядов. Однако при таком подходе в коэффициентах рядов возникают так называемые малые знаменатели, обуславливающие расходимость этих рядов.

Покажем, как возникают малые знаменатели и преодолеваются связанные с ними трудности суммирования рядов, представляющих решение.

Введем элементы оскулирующей орбиты<sup>1</sup> планеты  $M_i$

$$f_{1i}, f_{2i}, \dots, f_{6i} \quad (i=2, 3, \dots, n). \quad (3.3.9)$$

При этом возмущающая функция  $U^{(i)}$  имеет вид

$$U^{(i)} = \sum_{j=2}^n M_j U_j^{(i)}(f_{1i}, \dots, f_{6i}, \dots, f_{1j}, \dots, f_{6j}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3.10)$$

Поэтому дифференциальные уравнения движения в оскулирующих элементах (3.3.9) принимают вид

$$df_{ik}/dt = \sum_{j=2}^n M_j W_{jk}^{(i)}(f_{1i}, \dots, f_{6i}, f_{1j}, \dots, f_{6j}) \quad (i = 1, 2, \dots, 6; k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3.11)$$

При переходе от элементов невозмущенного движения к оскулирующим элементам возмущенных орбит в возмущающую функцию (3.3.10) явным образом входит независимая переменная — время  $t$ , которая посредством возмущающей функции входит в

<sup>1</sup> Траектории семейства невозмущенных движений называются *оскулирующими орбитами*, а их элементы — *оскулирующими элементами*.

правые части уравнений (3.3.11). Поэтому возникает необходимость выявления зависимости  $W_{jk}^{(i)}$  от  $t$ . Так как движение планеты  $M_i$  эллиптического типа, то каждый из элементов ее орбиты является периодической функцией от средней аномалии  $M = E_i$  и может быть разложен в ряд Фурье по синусам и косинусам аргументов, кратных  $E_i$ . Следовательно, возмущающая функция  $U_j^{(i)}$  есть периодическая функция от двух средних аномалий  $E_i$  и  $E_j$ , представимая двойным рядом Фурье по синусам и косинусам от комбинаций:

$$k_i E_i + k_j E_j, \quad (3.3.12)$$

где  $k_i$  и  $k_j$  — целые числа. Поэтому каждая из величин  $W_{jk}^{(i)}$  представима двойным рядом Фурье, т. е.

$$W_{jk}^{(i)} = \sum_{k_j, k_s = -\infty}^{\infty} \{A_{j_s}^{(i)(k_j, k_s)} \cos(k_j E_j + k_s E_s) + B_{j_s}^{(i)(k_j, k_s)} \sin(k_j E_j + k_s E_s)\}. \quad (3.3.13)$$

Если выражения (3.3.13) внести в правые части уравнений (3.3.11) и проинтегрировать полученные соотношения, то появятся знаменатели вида (3.3.12). Для соизмеримых средних движений величина (3.3.12) обращается в нуль, а для близких к соизмеримости средних движений она принимает сколь угодно малое значение. Так возникают малые знаменатели, обуславливающие расходимость рядов для решения.

Малые знаменатели порождают три типа возмущений движения. Чтобы показать эти возмущения, представим решение уравнения (3.3.11) в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням малых параметров:

$$f_{ik} = f_{ik}^{(0)} + g^{(1)}(f_{ik}) + g^{(2)}(f_{ik}) + \dots, \quad (3.3.14)$$

где  $f_{ik}^{(0)}$  — постоянные, равные начальным условиям для элемента  $f_{ik}$ ;  $g^{(s)}(f_{ik})$  — целые однородные функции степени  $s$  малых параметров, т. е.

$$g^{(s)}(f_{ik}) = \sum g_{ik}^{(s_2, s_3, \dots, s_n)}(t) M_2^{s_2} M_3^{s_3} \dots M_n^{s_n}. \quad (3.3.15)$$

Здесь суммирование производится по всем целым неотрицательным значениям индексов  $s_2, s_3, \dots, s_n$ , сумма которых равна  $s$ .

Величина  $g^{(s)}(f_{ik})$  называется *возмущением  $s$ -го порядка*, и ее коэффициенты  $g_{ik}^{(s_2, s_3, \dots, s_n)}$  подлежат определению. В свою очередь, возмущения  $s$ -порядка делятся на три типа — *вековые, периодические и смешанные*. *Вековые* возмущения представляют собой произведение множителя  $(t - \tau)^s$  на постоянное число; *периодические* — произведение тригонометрических функций времени на постоянное число, *смешанные* — пропорциональны произведению  $(t - \tau)^s$  на тригонометрические функции времени.

Трудности суммирования рядов (3.3.13) и (3.3.14) из-за возникновения малых знаменателей и возмущений, определяемых множителем  $(t-\tau)^s$ , преодолеваются в исключительных случаях.

Один из первых результатов выражает теорема Лапласа, во всей ее общности доказанная Лагранжем [1, 75].

**Теорема Лапласа — Лагранжа.** Если невозмущенные средние движения планет в планетном варианте задачи  $n$  тел несоизмеримы, то большие полуоси планетных орбит (и, следовательно, средние движения и канонические элементы Лагранжа) не содержат вековых возмущений первого порядка относительно возмущающих масс.

Эта теорема утверждает отсутствие вековых возмущений первого порядка, и она справедлива с точностью до возмущений первого порядка включительно на конечном интервале времени, на котором выполняется условие (3.3.8).

Результаты Лапласа об отсутствии вековых возмущений первого порядка были обобщены Пуассоном [75].

**Теорема Пуассона.** Если невозмущенные средние движения планет в планетном варианте задачи  $n$  тел несоизмеримы, то возмущения второго порядка (относительно возмущающих масс) больших полуосей не содержат вековых членов.

Эта теорема также верна лишь на конечном интервале времени. Что касается возмущений третьего и последующих порядков, то относительно них теорема Пуассона ничего определенного не дает. В самом деле, для больших полуосей оскулирующих орбит больших планет Солнечной системы найдены вековые возмущения третьего порядка [25].

Дифференциальные уравнения движения относительно элементов Лагранжа в планетном варианте задачи  $n$  тел с точностью до второго порядка малости относительно малых параметров допускают первые интегралы

$$\sum_{j=2}^n M_j \Omega_j a_j^2 e_j^2 = \text{const}, \quad (3.3.16)$$

$$\sum_{j=2}^n M_j \Omega_j a_j^2 \text{tg}^2 i_j = \text{const}. \quad (3.3.17)$$

Эти интегралы найдены Лапласом. Анализируя их, он доказал теорему.

**Теорема Лапласа.** Пусть выполняются следующие условия.

1) движение всех планет происходит в одном направлении и слагаемые, входящие в интегралы (3.3.16), (3.3.17), положительны;

2) массы всех планет  $M_j$  ( $j=2, 3, \dots, n$ ) — величины одного порядка;

3) большие полуоси орбит  $a_j$  являются ограниченными функ-

циями времени  $t$  в интервале времени от 0 до некоторого  $t^*$  и изменяются весьма мало около некоторых средних значений  $a_j^0$ ;

4) в начальный момент времени  $t=0$  все эксцентриситеты и наклонения  $\eta_j$  малы.

Тогда для всех значений  $t$  из интервала  $(0, t^*)$  величины  $e_j(t)$  и  $\eta_j(t)$  являются мало изменяющимися функциями.

Эта теорема также не позволяет установить устойчивость по Лагранжу системы  $\bar{G}_n$ , ибо проверка условий теоремы нетривиальна и выражения (3.3.16), (3.3.17) являются интегралами приближенных уравнений.

Теорема Лапласа в сочетании с теорией возмущений показывает, что истинное движение близко к лагранжевому<sup>2</sup> в течение конечного промежутка времени, если массы, начальные значения эксцентриситетов и наклонений планет достаточно малы. При этом лагранжево движение условно-периодично. Основным результатом в исследовании лагранжевых движений принадлежит В. И. Арнольду [7, 8].

Теорема Арнольда. Если массы, эксцентриситеты и наклонения планет достаточно малы, то для большинства начальных условий истинное движение условно-периодично и мало отличается от лагранжевого движения с подходящими начальными условиями в течение всего бесконечного промежутка времени:  $-\infty < t < \infty$ .

Этот результат вытекает из теоремы Арнольда о существовании условно-периодических решений гамильтоновых систем (см. Приложение)

$$dp/dt = -\partial H/\partial q, \quad dq/dt = \partial H/\partial p, \quad (3.3.18)$$

где гамильтониан  $H$  системы имеет вид

$$H(p, q) = H_0(p_0) + \mu H_1(p, q) + \mu^2 H_2(p, q), \quad (3.3.19)$$

аналитичен по переменным  $p, q$  и  $2\pi$ -периодичен по  $q$ .

Существенное развитие теории возмущений условно-периодических движений гамильтоновых систем было начато А. Н. Колмогоровым в его основополагающей работе [43]. Нижеследующая формулировка теоремы заимствована из [7].

Теорема Колмогорова. Если невозмущенная гамильтонова система не вырождена, то при достаточно малом консервативном возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически, с числом частот, равным числу степеней свободы.

Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.

<sup>2</sup> Движение планет по эллипсам, большие полуоси которых не имеют векового изменения, называется *лагранжевым*.

Доказательство этой теоремы, данное Арнольдом, основывается на двух замечаниях Колмогорова, относящихся, во-первых, к обеспечению движения с фиксированными частотами, остающимися нерезонансными и постоянными в течение всего времени движения при начальных условиях, выбранных по заданному возмущению, во-вторых, к использованию быстросходящейся аналитической аппроксимации функций типа ньютоновского метода касательных.

Пусть гамильтониан  $H$  имеет вид (3.3.19), где  $\mu$  — малый параметр,  $p, q$  — позиционные и угловые переменные соответственно. Функции  $H_1$  и  $H_2$  периодичны относительно переменных  $q_1, q_2, \dots, q_n$  с периодом  $2\pi$ .

Предполагается, что функция  $H$  определена и аналитична в комплексной области  $\{\operatorname{Re} p \in G_0, \|\operatorname{Im} p\| < a, \|q\| < b\}$  и принимает действительные значения при действительных значениях аргументов, причем невозмущенная часть  $H_0$  гамильтониана зависит только от части  $n_0, n_0 < n$  позиционных переменных  $p_1, p_2, \dots, p_{n_0}$  и не зависит от  $p_{n_0+1}, p_{n_0+2}, \dots, p_n$ .

Здесь  $G_0$  — некоторая область евклидова пространства  $R_n$ ,  $a$  и  $b$  — положительные постоянные.

Для удобства записи векторы  $p$  и  $q$  разбиты на составляющие

$$p_0 = (p_1, p_2, \dots, p_{n_0}), \quad q_0 = (q_1, q_2, \dots, q_{n_0}),$$

$$\bar{p} = (p_{n_0+1}, p_{n_0+2}, \dots, p_n), \quad \bar{q} = (q_{n_0+1}, q_{n_0+2}, \dots, q_n).$$

При этом гессиан

$$\det |\partial^2 H_0 / \partial p^2| \equiv 0$$

и имеет место *собственное вырождение* [8].

Предполагается, что гессиан

$$\det |\partial^2 H_0 / \partial p_0^2| \neq 0, \quad \det |\partial^2 H_1 / \partial p^2| \neq 0$$

в области  $\{\operatorname{Re} p \in G_n^0, \|\operatorname{Im} p\| < a\}$  и выполнены некоторые дополнительные условия и оценки относительно функций  $H_1$  и  $H_2$ . Тогда имеет место упомянутая теорема Арнольда о существовании условно-периодического решения гамильтоновой системы (3.3.18). Сформулируем заключительную часть этой теоремы.

Найдется  $\varepsilon_0(\kappa, H_0, H_1, G_0, \xi, R, C, \mu_0) > 0$  для любого  $\kappa > 0$  такое, что если  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  и  $0 < \mu < \varepsilon^4$ , то:

1. Область  $\operatorname{Re} F_\varepsilon(p_0 \in \operatorname{Re} G_0, |\operatorname{Im} q_0| = 0, 0 < \tau_i < \varepsilon)$  состоит из двух множеств  $F_\varepsilon$  и  $\bar{f}_\varepsilon$ , одно из которых,  $F_\varepsilon$ , инвариантно относительно канонических уравнений с функцией Гамильтона (3.3.19), а другое,  $\bar{f}_\varepsilon$ , мало:

$$\operatorname{mes} \bar{f}_\varepsilon < \kappa \operatorname{mes} F_\varepsilon.$$

2. Множество  $F_\varepsilon$  состоит из инвариантных  $n$ -мерных аналитических торов  $T_\omega$ , задаваемых параметрическими уравнениями

$$p_0 = p_{0\omega} + \bar{f}_{0\omega}(Q), \quad q_0 = Q_0 + g_{0\omega}(Q),$$

$$p_1 = \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1\omega}(Q))} \cos [Q_1 + g_{1\omega}(Q)],$$

$$q_1 = \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1\omega}(Q))} \sin [Q_1 + g_{1\omega}(Q)],$$

где  $Q = (Q_0, Q_1)$  — угловые переменные,  $p_{0\omega}$  и  $\tau_\omega$  — постоянные, зависящие от номера тора  $\omega$ .

3. Инвариантные торы  $T_\omega$  мало отличаются от торов

$$p_0 = p_{0\omega} = \text{const}, \quad \tau = \tau_\omega = \text{const}.$$

Это отличие дается оценками

$$|f_{0\omega}(Q)| < \varepsilon\kappa, \quad |f_{1\omega}(Q)| < \varepsilon\kappa,$$

$$|g_{0\omega}(Q)| < \varepsilon\kappa, \quad |g_{1\omega}(Q)| < \varepsilon\kappa.$$

4. Движение, определяемое функцией Гамильтона (3.3.19), на торе  $T_\omega$  условно-периодично с  $n$ -частотами  $\omega$ :

$$dQ_0/dt = \omega_0, \quad dQ_1/dt = \omega_1,$$

где

$$\omega_0 = \partial H_0 / \partial p_{0\omega}, \quad \omega_1 = \mu \partial H_1 / \partial \tau_\omega.$$

Множество  $F_\varepsilon$  называется *колмогоровским множеством*, а  $f_\varepsilon$  — его дополнением. Во множество  $f_\varepsilon$  входят все те начальные данные, которые выражаются рациональными числами. Так как начальные условия фиксируются в результате измерений и наблюдений и поэтому представлены рациональными числами, являющимися, быть может, приближениями иррациональных начальных данных, то возникают определенные трудности. Поэтому все дальнейшие результаты, относящиеся к решению данной задачи, сводились к уменьшению меры области  $f_\varepsilon$  [57, 58] либо к доказательству теоремы Колмогорова — Арнольда для всех начальных данных, но в конечном интервале времени.

Основной результат в этом направлении принадлежит Нехорошеву [61]. Им получена оценка сверху *диффузии Арнольда* [117], заключающейся в уходе позиционных переменных от их начальных условий  $q(0)$ . Сформулируем эту теорему Нехорошева [61].

**Теорема** (оценка сверху диффузии Арнольда). Пусть  $H_0$  — крутая функция и

$$g = \inf_{p, q \in G_{2n}} \|\text{grad}_q H_0\| > 0, \quad f = \frac{1}{g} \sup_{p, q \in G_{2n}} |H_1| < f^0,$$

где  $f^0 = f^0(H_0, a, b) > 0$  — постоянная, не зависящая ни от каких параметров функции  $H_1$ , кроме  $a$  и  $b$ .

Тогда для любого действительного решения системы с гамильтонианом  $H$  такого, что  $q(0) \in F_\varepsilon$ , имеет место оценка

$$\|q(t) - q(0)\| \leq \delta \varepsilon^b$$

для всех моментов времени  $t \in [0, t^*]$ , где  $t^* = (1/gf^0) \exp[(1/f^0)^a]$ .

Из указанных оценок сверху видно, что вековые изменения

канонических переменных действия не улавливаются ни в каком приближении теории возмущений условно-периодического движения, так как средняя скорость этих изменений экспоненциально мала. Более того, как отмечает Арнольд [8], вековые изменения, быть может, не имеют направленного характера.

Таким образом, результаты приведенных теорем получены только для случая несоизмеримых средних движений планет.

Возникает вопрос: действительно ли возмущенные средние движения больших планет Солнечной системы несоизмеримы?

Расчеты невозмущенных средних движений больших планет Солнечной системы показывают, что Солнечная система почти резонансна. Так, средние движения Юпитера и Сатурна составляли соответственно  $300,1''$  и  $120''$ . Эти величины удовлетворяют соотношению вида (3.3.12) с целочисленными коэффициентами 2 и 5 при неувязке, равной  $0,0135$  [16, 20]. Следовательно, невозмущенные средние движения указанных планет близки к соизмеримости.

В связи с подобными фактами соизмеримости частот А. М. Молчанов провел исследование средних движений больших планет Солнечной системы [20]. Результаты этих исследований позволили ему сформулировать гипотезу, согласно которой Солнечная система резонансна с пренебрежимо малой неувязкой, и в результате ее эволюции большие планеты, а также их спутники выбирают резонансные орбиты. Эта гипотеза носит имя ее автора и формулируется так: *эволюционно зрелые колебательные системы неизбежно резонансны.*

Приведенные выше теоремы об устойчивости движения тел Солнечной системы условны, ибо они требуют несоизмеримости средних движений этих тел. О неполноте подобного подхода свидетельствуют, во-первых, возможность существования соизмеримых средних движений, во-вторых, появление движения с диффузией Арнольда в гамильтоновых системах.

Иной подход к устойчивости решений гамильтоновых систем при малых изменениях гамильтониана разработан в [13, 14].

**Теорема [13].** Пусть переменные гамильтоновой системы (3.3.18), параметр  $\mu$  и гамильтониан (3.3.19) вещественны,  $H$  не зависит явно от времени и  $n_0 < n$ . Кроме того:

1. Функция  $H_0$  определена в ограниченной области  $P \subset R_m$  ( $m = n_0$ ), имеет в ней непрерывные частные производные до третьего порядка включительно и удовлетворяет критерию Сильвестра, т. е. гесссиан  $\det(\partial^2 H_0 / \partial p_i \partial p_j)$  и все его диагональные миноры положительны.

2. Функция  $H_1$  определена для всех  $p, q, \mu$ , как-то:  $(p_1, p_2, \dots, p_m) \in P$ ,  $p_i \in R_1$  ( $i = m+1, \dots, n$ ),  $q_i \in R_1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $-a < \mu < a$  ( $a > 0$ ), и для этих значений переменных имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и ограничена вместе с частными производными первого порядка по переменным  $p$ . Тогда для любого  $\epsilon > 0$  и любой фиксированной области  $P_1 \subset P$  такой, что расстояние между грани-

цами  $\partial P_1, \partial P$  областей  $P_1$  и  $P$  превосходит  $\varepsilon$ , найдется такое положительное значение  $\mu_0(\varepsilon, P_1)$  параметра  $\mu$ , что при всех значениях  $|\mu| < \mu_0$  все допустимые решения системы (3.3.18), за исключением, быть может, вырожденных, имеют вид

$$p_i = p_{i0} + p_{i1}, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m (p_{i1})^2} < \varepsilon,$$

$$q_i = [- (\partial H_0 / \partial p_i) (p_{10}, p_{20}, \dots, p_{m0}) + \omega_i(t)] t + q_{i0}$$

для всех  $t \in R_1$ , где  $(p_{10}, p_{20}, \dots, p_{m0}) \in P_1$  и все  $\omega_i(t)$  непрерывны и удовлетворяют неравенствам  $|\omega_i(t)| < \varepsilon$ .

Здесь под *допустимым решением* понимается решение, удовлетворяющее действительным начальным условиям, не зависящим от параметра  $\mu$ , и не удовлетворяющее тождеству  $p_i(t) \equiv p_{i0}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) ни на каком интервале вида  $\alpha < t < \beta$ . Оно называется *вырожденным*, если функция

$$s(t, \mu) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_0}{\partial p_i} (p_{10}, p_{20}, \dots, p_{m0}) p_{i1} \left( \sum_{i=1}^m p_{i1}^2 \right)^{-1/2}$$

отлична от тождественного нуля и  $\lim_{\mu \rightarrow 0} s(t, \mu) \equiv 0$  при любом фиксированном  $t \in R_1$ .

В работе [13] показано, что решение с диффузией Арнольда не является допустимым решением системы (3.3.18) в смысле приведенного определения. Из сформулированной теоремы, указанного следствия и теоремы Лапласа вытекает следующая

**Теорема [14].** Математическая модель Солнечной системы безусловно устойчива, т. е. если параметры  $\mu$ , начальные значения  $e_{j0}, i_{j0}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) достаточно малы, то кеплеровские элементы орбит  $a_j(t), e_j(t), i_j(t)$  планет  $M_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) остаются соответственно вблизи своих начальных значений  $a_{j0}, e_{j0}, i_{j0}$ , а центры инерции подсистемы  $G_j$  ( $2 \leq j \leq n$ ) остаются вблизи центрального тела  $M_1$  на всем промежутке  $-\infty < t < \infty$ .

Здесь под *Солнечной системой* понимается планетная система, но без планеты Плутон. При этом предполагается, что невозмущенные оскулирующие эллипсы планет  $M_j$  остаются внутри концентрических сфер радиусов  $a_{j0}(1+e_{j0})+\delta+d$  и  $a_{j0}(1-e_{j0})-\delta-d$  с центром в точке  $O_1$ , как бы ни вращать эти эллипсы вокруг центров инерции подсистем  $G_{j-1}$  планет  $M_1, M_2, \dots, M_{j-1}$ , где  $\delta > 0$  и  $d$  — диаметр реального солнечного шара.

Если эта теорема верна, то она позволяет утверждать, что Солнечная система в рамках ее наиболее корректно изученных планет хотя бы *устойчива в прошлом по Лагранжу*. Отсюда вытекает

**Предложение 3.1.** Движение тел Солнечной системы устойчиво в прошлом по Лагранжу.

Продолжая анализ проблемы Лагранжа—Лапласа и следуя В. Г. Демину [20], отметим идею Н. Г. Четаева [84]: «Устойчи-

вость — явление принципиально общее — как-то должна, по-видимому, проявляться в основных законах природы» [84, с. 250]. «...Одно представляется все же несомненным: не может быть, чтобы устойчивость — явление принципиально общее — нисколько не проявлялась в физике» (Там же, с. 480).

#### 4. Признак динамической системы

Рассмотрим дифференциальные уравнения (3.1.1) движения задачи  $n$  тел. Допустим, что начальные условия (3.1.3), необходимые для нахождения частного решения этих уравнений или движения в терминах динамических систем, взяты из некоторого множества  $M$   $6n$ -мерного фазового пространства  $R_{6n}$ . Введем  $6n$ -мерную вектор-функцию

$$g = \{x_1, y_1, \dots, z_n, u_1, v_1, \dots, \omega_n\}, \quad (3.4.1)$$

а систему уравнений (3.1.1) и начальных условий (3.1.3) запишем в виде одного векторного уравнения

$$dg/dt = \Phi(g), \quad g(0) = q. \quad (3.4.2)$$

Здесь правые части первого из уравнений (3.4.2) имеют вид

$$\Phi = \left\{ u_1, v_1, \dots, \omega_n; \frac{1}{M_1} \frac{\partial U}{\partial x_1}; \frac{1}{M_1} \frac{\partial U}{\partial y_1}; \dots; \frac{1}{M_n} \frac{\partial U}{\partial z_n} \right\}. \quad (3.4.3)$$

Обозначим через  $g(t, q)$  решение задачи (3.4.2), где  $q$  — вектор, характеризующий начальное состояние системы. Тогда доказывается следующее

**Предложение 4.1.** Система  $g(t, \cdot)$  движений, начальные состояния  $q$  которых принадлежат множеству  $M$ , является динамической системой, и множество  $M$  инвариантно по отношению к этой динамической системе тогда и только тогда, когда для любого элемента  $q \in M$  и любого момента времени  $t \in R_1$  выполнено неравенство

$$r_{ij}(t, q) > 0 \quad (3.4.4)$$

при всех  $i \neq j$  и  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Смысл неравенств (3.4.4) заключается в том, что при любых начальных состояниях движения, взятых из множества  $M$  фазового пространства  $R_{6n}$ , взаимное расстояние между любой парой тел системы  $G_n$  есть величина положительная. Однако это не исключает, что названная величина могла оказаться в прошлом и может быть в будущем сколь угодно малой. Также очевидно, что множество  $M$  не может совпадать со всем фазовым пространством.

**Доказательство необходимости.** Пусть система движений  $g(t, \cdot)$ , определяемая дифференциальными уравнениями (3.1.3) при любых начальных условиях из некоторого множества  $M \subset E_{6n}$ , является динамической системой. Покажем, что выполнено неравенство (3.4.4). Если это не так, то для не-

которого  $q \in M$  хотя бы одно из взаимных расстояний  $r_{ij}$  при некотором конечном значении времени  $t^* \in R_1$  должно обратиться в нуль, т. е.  $r_{ij}(t^*, q) = 0$ . Следовательно, потенциальная энергия  $V$  механической системы  $G_n$ , определяемая формулой

$$V = -U = -\sum'_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}(t, q)},$$

при  $t = t^*$  обращается в бесконечность. Тогда в соответствии с законом сохранения энергии найдется хотя бы одна компонента скоростей движений тел  $M_i$ , обращающаяся также в бесконечность при  $t = t^*$  [116]. Поэтому решение  $g(t, q)$  за конечное время уходит в бесконечность, и система движений  $g(t, \cdot)$  перестает быть динамической. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (3.4.4).

Доказательство достаточности. Пусть условие (3.4.4) выполнено для любых  $q \in M$  и  $t \in R_1$ . Зафиксируем произвольный элемент  $q \in M$  и произвольное значение времени  $t \in R_1^+$  и рассмотрим отрезок времени  $[-t^*, t^*]$ . Исходя из интеграла энергии заключаем, что каждая из компонент скоростей движений  $g(t, q)$  тел  $M_i$  определена и непрерывна в интервале времени  $(-t^*, t^*)$ . Определены и непрерывны также правые части уравнений (3.4.2), выражаемые частными производными силовой функции  $U$ . Поэтому вектор-функция (3.4.3), являющаяся правой частью уравнения (3.4.2), на том же интервале времени имеет ограниченную первую производную по времени  $t$  и удовлетворяет условию Лившица. Поэтому решение  $g(t, q)$  определено в  $(-t^*, t^*)$ . В силу произвольности  $t^*$  заключаем, что решение  $g(t, q)$  определено всюду на  $R_1$ . Таким образом, при произвольном  $q \in M$  решение  $g(t, q)$  системы дифференциальных уравнений (3.4.2) определено всюду на  $R_1$ . Поэтому рассматриваемая система движений образует динамическую систему.

В связи с Предложением 4.1 заметим, что если движение системы  $n$  тел устойчиво по Лагранжу, то имеют место неравенства (3.4.4). Иными словами, неравенства (3.4.4) входят в число необходимых требований для устойчивости по Лагранжу движения системы  $n$  тел.

## 5. Критерий устойчивости по Лагранжу и устойчивости по Пуассону движения

Рассмотрим движение системы  $G_n$  и положим  $m = 6n$ . В качестве банаховых пространств  $M$  и  $K$ , рассмотренных в гл. II, разд. 6, примем евклидовы пространства  $R_m$  и  $R_1$  размерности  $m$  и 1.

Введем вектор-функцию

$$\varphi(t, q) = \{\sqrt{M_1}x_1(t, q), \sqrt{M_1}y_1(t, q), \dots, \sqrt{M_n}z_n(t, q)\}, \quad (3.5.1)$$

$$\psi(t, q) = \{\sqrt{M_1}u_1(t, q), \sqrt{M_2}v_1(t, q), \dots, \sqrt{M_n}w_n(t, q)\},$$

где  $q$  — вектор, характеризующий начальное состояние системы  $G_n$ , а переменные  $(x_i, y_i, z_i)$  и  $(u_i, v_i, w_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) имеют прежний смысл (см. разд. 1). При этом вектор-функция  $\psi(t, q)$  представляет производную вектор-функцию  $\varphi(t, q)$  по времени  $t$ , т. е.

$$\dot{\varphi}(t, q) = \psi(t, q). \quad (3.5.2)$$

Положим

$$g(t, q) = \{M_1 x_1, M_1 y_1, \dots, M_n z_n, M_1 u_1, M_1 v_1, \dots, M_n \dot{w}_n\} \quad (3.5.3)$$

и вектор-функцию  $g(t, q)$  со значениями в пространстве  $R_m$  будем рассматривать как решение задачи (3.1.1), (3.1.3).

В обозначениях (3.5.1) — (3.5.3) полярный момент инерции системы  $G_n$ , его первая и вторая производные по времени, уравнение Лагранжа—Якоби и кинетическая энергия  $T$  системы вдоль решения  $g(t, q)$  имеют вид

$$\begin{aligned} I(t) &= I[g(t, q)] = \varphi \cdot \varphi, \\ \dot{I}(t) &= \dot{\varphi} \cdot \varphi + \varphi \cdot \dot{\varphi} = 2\dot{\varphi} \cdot \varphi = 2\varphi \cdot \psi, \\ \ddot{I}(t) &= 2\dot{\varphi} \cdot \psi + 2\varphi \cdot \dot{\psi} = 2\psi \cdot \psi + 2\varphi \cdot \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

$$T(t) = T[g(t, q)] = \frac{1}{2} \psi \cdot \psi, \quad \dot{T}(t) = \psi \cdot \psi + 2h.$$

В дальнейшем будем считать все рассматриваемые величины выраженными через безразмерные переменные. Тогда правомерно сложение функций  $I(t)$  и  $2T(t)$  без учета их физического смысла:

$$Q(t) = I(t) + 2T(t).$$

Очевидно,  $Q(t) = Q[g(t, q)] = I[g(t, q)] + 2T[g(t, q)]$  и вдоль решения (3.5.3) имеет место

$$\frac{1}{2} \text{grad } Q = g(t, q). \quad (3.5.5)$$

Пусть  $M$  — некоторое множество фазового пространства движений, описываемых дифференциальными уравнениями (3.1.1). Справедливо

Предложение 5.1. Система движений  $g(t, \cdot)$  является динамической системой тогда и только тогда, когда вдоль каждого решения  $g(t, q)$  с начальным условием  $g \in M$  функция  $T(t)$  определена всюду на  $R_1$ , т. е.  $T(t) \in C(R_1, R_1)$ .

Доказательство необходимости. Пусть система движений  $g(t, \cdot)$  с начальными условиями  $g \in M$  образует динамическую систему. Тогда вдоль каждого решения  $g(t, q)$  выполнено условие (3.4.4). Зафиксируем произвольное значение  $t = t^* \in R_1^+$  и положим  $a(t^*) = \inf_{i,j} \{ \max_{t \in [-t^*, t^*]} r_{ij}[g(t, q)] \}$ . В силу (3.4.4)

имеем  $0 < a(t^*) < \infty$ . Поэтому силовая функция  $U$  системы  $G_n$  определена вдоль траектории  $g(t, q)$  и непрерывна на отрезке  $[-t^*, t^*]$ . Следовательно, определена вдоль траектории  $g(t, q)$

и непрерывна по  $t \in [-t^*, t^*]$  и функция  $T(t) = U(t) + h$ . Так как  $q \in M$  и  $t^* \in R_1^*$  выбраны произвольно, то необходимость Предложения доказана.

**Доказательство достаточности.** Допустим, что вдоль каждого решения  $g(t, q)$ , где  $q \in M$ , функция  $T(t)$  определена и непрерывна при всех  $t \in R_1$ . Пусть  $t^* \in R_1^+$  и  $q \in M$  зафиксированы произвольным образом. Тогда функция  $T(t) = T[g(t, q)]$  определена и непрерывна на отрезке  $[-t^*, t^*]$  вместе с функцией  $U(t) = T(t) - h$ . Поэтому  $0 < a(t^*) < \infty$  и имеет место условие (3.4.4). Следовательно,  $g(t, \cdot)$  — динамическая система.

**Предложение 5.2.** Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $J^-$  ( $J^+$  или  $J$ ), то функции  $I(t)$ ,  $\dot{I}(t)$ ,  $\ddot{I}(t)$ ,  $T(t)$ ,  $\dot{T}(t)$  и  $Q(t)$  равномерно непрерывны в  $R_1^-$  ( $R_1^+$  или  $R_1$ ).

**Доказательство.** Введем обозначение

$$m_1 = \max_i M_i, \quad m_2 = \min_i M_i. \quad (3.5.6)$$

Пусть движение  $g(t, q)$  устойчиво  $J^-$ . Так как фазовое пространство движения  $g(t, q)$  конечномерно, то устойчивость  $J^-$  движения  $g(t, q)$  эквивалентна ограниченности полутраектории  $g(R_1^-, q)$ , т. е. условию

$$\sup_{t \in R_1^-} \sqrt{g \cdot g} = B < \infty. \quad (3.5.7)$$

Если учесть (3.5.3), (3.5.6) и оценку (3.1.24), то одновременно с условием (3.5.7) при всех  $t \in R_1^-$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |I(t)| &= |\varphi \cdot \varphi| \leq \sup_{t \in R_1^-} \varphi \cdot \varphi \leq \frac{1}{m_2} \sup_{t \in R_1^-} g \cdot g = \frac{B^2}{m_2} < \infty, \\ |\dot{I}(t)| &= |\varphi \cdot \dot{\varphi}| \leq \sup_{t \in R_1^-} \sqrt{\varphi \cdot \varphi} \sup_{t \in R_1^-} \sqrt{\dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi}} \leq \frac{B}{m_2} < \infty, \\ |T(t)| &= \frac{1}{2} |\psi \cdot \psi| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in R_1^-} \psi \cdot \psi \leq \frac{1}{2m_2} \sup_{t \in R_1^-} g \cdot g = \frac{B^2}{2m_2} < \infty, \\ |\ddot{I}(t)| &= 2|T + h| \leq 2(|T| + |h|) \leq \frac{B^2}{m_2} + 2|h| < \infty, \quad (3.5.8) \\ |\dot{I}(t)| &\leq \frac{1}{4} (|\ddot{I}(t)| + 4|h|) \leq \frac{B^2}{4m_2} + \frac{3|h|}{2} < \infty, \\ |Q(t)| &= |\varphi \cdot \varphi + \psi \cdot \psi| \leq \frac{B}{m_2} < \infty, \\ |\dot{Q}(t)| &= |\dot{I} + 2\dot{T}| \leq \frac{B}{m_2} + \frac{B^2}{4m_2} + \frac{3|h|}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что оценки (3.5.8) используют очевидное неравенство  $(M_i/m_2) \leq 1$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Следовательно, каждая из перечисленных в условиях Предложения 5.2 функций имеет ограниченную в  $R_1^-$  производную по времени. Как известно, такие функции равномерно непрерывны в  $R_1^-$ . Что и требовалось доказать.

Пусть движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^-$ . Тогда согласно Предложению 5.2 и предпоследней оценке (3.5.8) функция  $Q(t)$  ограничена и равномерно непрерывна в  $R_1^-$ . Следовательно, функция устойчива  $L^-$  (см. гл. II, Предложение 6.7). Таким образом, из устойчивости  $L^-$  движения  $g(t, q)$  следует устойчивость  $L^-$  функции  $Q(t)$ .

Допустим, что функция  $Q(t)$  устойчива  $L^-$ , т. е. равномерно непрерывна и ограничена в  $R_1^-$  константой  $\sup_{t \in R_1^-} |Q(t)| = D < \infty$ .

Тогда

$$\sup_{t \in R_1^-} \sqrt{g \cdot g} \leq \sup_{t \in R_1^-} \sqrt{m_1 |Q(t)|} = \sqrt{m_1 D} < \infty.$$

Это неравенство показывает устойчивость  $L^-$  движения  $g(t, q)$ .

Отсюда вытекает

Предложение 5.3. Движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ) тогда и только тогда, когда устойчива  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ) функция  $Q(t)$ .

Так как устойчивость  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ) функции  $Q(t)$  эквивалентна устойчивости  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ) функций  $I(t)$  и  $T(t)$  одновременно, то как следствие Предложения 5.3 получим

Предложение 5.4. Если хотя бы одна из функций  $I(t)$ ,  $T(t)$  не является устойчивой  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ), то и движение  $g(t, q)$  системы  $n$  тел  $G_n$  неустойчиво  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ).

Это Предложение обратимо, т. е. справедливо

Предложение 5.5. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  неустойчиво  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ), то хотя бы одна из функций  $I(t)$  и  $T(t)$  неустойчива  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ).

Введем вектор-функции, составленные из решения  $g(t, q)$  и его компонент:

$$\begin{aligned} f(t, p) &= \{x_1, y_1, \dots, z_n, u_1, v_1, \dots, w_n\}, \\ f_1(t, p) &= \{x_1, y_1, \dots, z_n, 0, 0, \dots, 0\}, \\ f_2(t, p) &= \{u_1, v_1, \dots, w_n, 0, 0, \dots, 0\}, \\ f_3(t, p) &= \{0, 0, \dots, 0, u_1, v_1, \dots, w_n\}, \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

где  $p = \{x_{10}, y_{10}, \dots, z_{n0}, u_{10}, v_{10}, \dots, w_{n0}\}$  — начальные состояния системы  $n$  тел  $G_n$ . Тогда имеют место

$$\begin{aligned} I(t) &= g \cdot f_1, & J(t) &= 2g \cdot f_2, & Y(t) &= g \cdot f_3 + 2h, \\ T(t) &= 1/2 g \cdot f_3, & Q(t) &= g \cdot (f_1 + f_3), \\ f(t, q) &= f_1(t, q) + f_3(t, q), & f_1(t, q) &= f_2(t, q). \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

С учетом (3.5.6) нетрудно установить

$$\sup_{t \in R_1^-} \sqrt{g \cdot g} = m_1 \sup_{t \in R_1^-} \sqrt{(g/m_1) \cdot (g/m_1)} \leq m_1 \sup_{t \in R_1^-} \sqrt{f \cdot f}, \quad (3.5.11)$$

$$\sup_{t \in R_1^-} \sqrt{f \cdot f} = \frac{1}{m_2} \sup_{t \in R_1^-} \sqrt{m_2 f \cdot m_2 f} \leq \frac{1}{m_2} \sup_{t \in R_1^-} \sqrt{g \cdot g}.$$

Если под нормой вектор-функции  $v(t)$ , определенной в  $R_1^-$  и принимающей значения в  $R_m$ , будем понимать

$$\sup_{t \in R_1^-} \sqrt{v \cdot v} = \|v\|_1,$$

то неравенства (3.5.11) можно представить в виде

$$\|g\|_1 \leq m_1 \|f\|_1, \quad \|f\|_1 \leq (1/m_2) \|g\|. \quad (3.5.12)$$

Аналогичные (3.5.11), (3.5.12) соотношения имеют место, когда  $t \in R_1^+$ ,  $t \in R_1$  и  $t \in S$ , где  $S \subset R_1$  — произвольная область из  $R_1$ .

Справедливо

Предложение 5.6. Движение  $f(t, p)$  системы  $G_0$  устойчиво  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ) тогда и только тогда, когда устойчиво  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ) движение  $g(t, q)$  системы.

Доказательство вытекает из условий (3.5.11).

Предложение 5.7. Движение  $f(t, p)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ), рекуррентно, почти периодически (условно-периодично), периодически и представляет покой тогда и только тогда, когда устойчиво  $L^-$  ( $L^+$  или  $L$ ), рекуррентно, почти периодически (условно-периодично) и представляет собой покой движение  $g(t, q)$  системы.

Проведем доказательство лишь первой части Предложения. Пусть  $\{t_n\} \in N(\alpha, f, p)$ . По определению множества  $N(\alpha, f, p)$  имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n, p) = p$ . Согласно (3.5.11) для каждого натурального  $n$

$$\|f(t_n, p) - f(0, p)\| \geq \frac{1}{m_1} \|g(t_n, q) - g(0, q)\|.$$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = q$ , т. е.  $\{t_n\} \in N(\alpha, g, q)$ .

Пусть  $\{t_n\} \in N(\alpha, g, q)$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = q$ . Отсюда в силу  $\|g(t_n, q) - g(0, q)\| \geq m_2 \|f(t_n, p) - f(0, p)\|$  получим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n, p) = p$  и  $\{t_n\} \in N(\alpha, f, p)$ .

Введем  $m$ -мерные постоянные векторы

$$\mu_1 = \{M_1, M_1, M_1, M_2, \dots, M_n, M_1, M_1, M_1, M_2, \dots, M_n\},$$

$$\mu_2 = \left\{ \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_2}, \dots, \frac{1}{M_n}, \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1}, \dots, \frac{1}{M_n} \right\}.$$

Тогда

$$f(t, p) = \text{grad } g \cdot \mu_2, \quad g(t, q) = \text{grad } f \cdot \mu_1 \quad (3.5.13)$$

и для любого  $s \in R_1$  имеют место

$$f(t+s, p) = \text{grad } g(t+s, q) \cdot \mu_2 = p_1 [g(t+s, q)],$$

$$g(t+s, q) = \text{grad } f(t+s, p) \cdot \mu_1 = p_2 [f(t+s, q)]. \quad (3.5.14)$$

Каждое из отображений  $p_1$  и  $p_2$ , действующих по правилам (3.5.14), равномерно-непрерывно в множествах  $\mathcal{F}_g$  и  $\mathcal{F}_f$  соответственно. Действительно, для каждого  $\varepsilon > 0$ , полагая  $\delta_1 \leq \varepsilon/m_2$  и  $\delta_2 = \varepsilon m_1$ , имеем

$$\rho' [f(t_1+t, p), f(t_2-t, p)] = \rho' [p_1(g(t_1+t, q)), p_1(g(t_2-t, q))] < \varepsilon,$$

$$\rho' [g(t_1+t, q), g(t_2-t, q)] = \rho' [p_2(f(t_1+t, p)), p_2(f(t_2-t, p))] < \varepsilon$$

для любых  $t_1, t_2 \in R_1$ , если только  $\rho' [f(t_1+t, p), f(t_2-t, p)] < \delta_1$  и  $\rho' [g(t_1+t, q), g(t_2-t, q)] < \delta_2$  соответственно.

Таким образом, доказано

Предложение 5.8. Движения  $f(t, p)$  и  $g(t, q)$  системы  $G_n$  изохронны  $RR$ .

С учетом Предложений 5.8 и 6.8 (см. гл. II) получим полное доказательство данного предложения.

Предложения 5.7 и 5.8 показывают, что движения  $g(t, q)$  и  $f(t, p)$  относятся к одному и тому же типу движений, устойчивых и возвращаемых в смысле понятий, введенных в гл. II. Все дальнейшие рассуждения относятся именно к этим движениям.

Предложение 5.9. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , то функция  $I(t)$  сравнима  $RR^-$  с  $I(t)$ ,  $Y(t) - c I(t)$  и  $T(t) - c I(t)$ .

Доказательство. Согласно Предложению 5.2, каждая из функций  $I(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $T(t)$  равномерно непрерывна в  $R_1^-$ . Далее доказательство проводится на основании Предложения 6.7 гл. II.

Предложение 5.10. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , то функция  $I(t)$  сравнима  $RR^-$  с функцией  $I(t)$ ,  $I(t) - c Y(t)$  и  $I(t) - c T(t)$ .

Доказательство. Пусть выполнено условие Предложения. Тогда имеют место оценки (3.5.8), из которых вытекает устойчивость  $\mathcal{L}^-$  каждой из функций  $I(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Y(t)$  и  $T(t)$ . Следовательно, функции  $I(t)$  и  $I(t)$ , являясь устойчивыми  $\mathcal{L}^-$  первообразными функций  $I(t)$  и  $Y(t)$  соответственно, сравнимы  $R^-$  с  $I(t)$  и  $Y(t)$ . Это вытекает из Предложения 6.9 (см. гл. II).

В силу оценок (3.5.8) для каждого  $\varepsilon > 0$ , полагая  $\delta_1 \leq \varepsilon m_2 / 2B_1$  и  $\delta_2 = \varepsilon m_2 / 2(B^2 + 2|h|m_2)$ , имеем  $\rho'(I(t_1+t), I(t_2+t)) < \varepsilon$  и  $\rho'(I(t_1+t), I(t_2+t)) < \varepsilon$  для любых  $t_1, t_2 \in R_1$ , если только  $\rho'(I(t_1+t), I(t_2+t)) < \delta_1$  и  $\rho'(Y(t_1+t), Y(t_2+t)) < \delta_2$ . Поэтому неопределенные интегралы осуществляют равномерно непрерывные отображения множества отрицательных сдвигов функций  $I(t)$  и  $Y(t)$  на множество отрицательных сдвигов функций  $I(t)$  и  $Y(t)$  соответственно. Таким образом, функция  $I(t)$  сравнима  $RR^-$  с  $I(t)$ , а, в свою очередь,  $I(t) - cY(t)$ .

Согласно уравнению Лагранжа—Якоби функция  $Y(t)$  изохронна  $RR$  с функцией  $T(t)$ . Поэтому функция  $I(t)$  сравнима  $RR^-$  с  $T(t)$ . Что и требовалось доказать.

Из Предложений 5.9 и 5.10 вытекает следующее

**Предложение 5.11.** Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L^-$ , то функции  $I(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Y(t)$  и  $T(t)$  изохронны  $RR^-$ , т. е. относятся к одному и тому же типу возвращаемых функций.

Так как метрики  $\rho_1'$  и  $\rho_m'$  пространств  $C(R_1, E_1)$  и  $C(R_1, E_m)$  согласованы с нормой пространств  $E_1$  и  $E_m$  и так как для норм элементов евклидовых пространств справедливо неравенство  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ , то имеет место

**Предложение 5.12.** Каждая из функций  $I(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $T(t)$  и  $Q(t)$  сравнима  $RR$  с движением  $g(t, q)$  системы  $G_n$ .

(Данное предложение не обратимо.) В общем случае не имеет места более слабое утверждение о сравнимости  $R^-$  или  $R^+$  движения  $g(t, q)$  хотя бы с одной из указанных в условиях Предложения функций. В связи с этим ниже рассматриваются вопросы сравнения движения  $g(t, q)$  с функциями  $I(t)$ ,  $T(t)$  и  $Q(t)$ .

**Предложение 5.13.** Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L^-$ , то функция  $Q(t)$  сравнима  $R^-$  с функциями  $I(t)$  и  $T(t)$ .

**Доказательство.** В силу Предложения 5.11 функции  $T(t)$  и  $Q(t)$  изохронны  $R^-$ . Пусть  $\{t_n\} \in N(\alpha, T)$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n + t) = T(t)$ . Тогда, согласно Предложению 5.11, последовательность  $\{t_n\} \in N(\alpha, I)$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(t_n + t) = I(t)$ . Складывая эти предельные равенства, получим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} [2T(t_n + t) + I(t_n + t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(t_n + t) = Q(t)$ . Это означает, что  $\{t_n\} \in N(\alpha, Q)$ . Следова-

тельно, произвольная собственная  $\alpha$ -последовательность функций  $T(t)$  и  $I(t)$  является собственной  $\alpha$ -последовательностью функции  $Q(t)$ . Иначе говоря, функция  $Q(t)$  сравнима  $R^-$  с  $I(t)$  и  $T(t)$ . Предложение доказано.

**Предложение 5.14.** Если движение  $g(t, q)$  системы  $n$  тел  $G_n$  устойчиво  $L^-$  и ее кинетическая энергия  $T(t)$  устойчива  $P^-$ , то движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$ .

**Доказательство.** В силу предыдущего Предложения из устойчивости  $P^-$  функции  $T(t)$  вытекает устойчивость  $P^-$  функции  $Q(t)$ . Тогда функция  $Q(t)$  устойчива  $L^-$  и устойчива  $P^-$  одновременно. Согласно Предложению 2.8 (см. гл. II) функция

$Q(t)$  устойчива  $\mathcal{L}$ . Отсюда с учетом Предложения 5.3 получим доказательство Предложения.

Предложение 5.15. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , то

1) постоянная энергии  $h$  системы отрицательна;

2) существует  $\alpha$ -последовательность  $\{t_n^0\}$  множеств времени  $t \in R_1^-$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n^0) = -h; \quad (3.5.15)$$

3) для каждого  $\varepsilon > 0$  множество вида

$$R_\varepsilon(T) = \{t \mid t \in R_1^-, |T(t) + h| \leq \varepsilon\} \quad (3.5.16)$$

относительно плотно в  $R_1^-$ ;

4) для любого  $l > 0$  не существует такого отрезка  $[\bar{t}, \bar{t} + l]$ , что функция  $T(t)$  при всех  $t \in [\bar{t}, \bar{t} + l]$  равна постоянной, отличной от  $|h|$ , т. е.

$$T(t) = s, \quad s = \text{const}, \quad s \neq |h| \quad (3.5.17)$$

при условии, что вектор  $\mathbf{x}$  отличен от нуля.

Доказательство. Отметим, что первое из этих утверждений известно (см., например, [127]). Однако мы докажем его в терминах устойчивости  $\mathcal{L}^-$  функций  $T(t)$  и  $I(t)$ . Пусть  $h \geq 0$ . Тогда  $2[T(t) + h] \geq 2T(t) > 0$  для всех  $t \in R_1^-$ , причем  $\inf_{t \in R_1^-} T(t) =$

$= T^0 > 0$ . Действительно, если  $T^0 = 0$ , то  $\inf_{t \in R_1^-} U(t) = 0$ . А это озна-

чает, что неограниченность всех взаимных расстояний  $r_{ij}$  между телами  $O_i, O_j$  системы  $G_n$ . Последнее противоречит условиям Предложения. Итак,  $T^0 > 0$  и  $2T^0 \leq 2[T(t) + h]$ . Интегрируя дважды предыдущее неравенство в пределах от 0 до  $t$ , получим  $T^0 t^2 + I(0)t \leq I(t)$ . Переходя к пределу при  $t \rightarrow -\infty$ , получим  $\lim_{t \rightarrow -\infty} I(t) = \infty$ . Это противоречит условиям Предложения и доказывает, что  $h < 0$ . Итак, первое утверждение Предложения 5.15 доказано.

Сначала допустим, что для любого  $\varepsilon > 0$  и любого фиксированного момента времени  $\bar{t} \in R_1^-$  не существует такой момент времени  $\tau \in R_1^-$ , что  $\tau < \bar{t}$  и  $|T(\tau) + h| < \varepsilon$ . Тогда существуют такие  $\varepsilon_0 > 0$  и  $t_0 \in R_1^-$ , что  $|T(t) + h| \geq \varepsilon_0$  для всех  $t \leq t_0$ . При этом в зависимости от знака принимаемых функций  $T(t) + h$  значений имеет место одно и только одно из неравенств  $2[T(t) + h] \leq 2\varepsilon_0$  и  $2[T(t) + h] \geq 2\varepsilon_0$ . Дважды интегрируя в пределах от  $t$  до  $t_0$  каждое из этих неравенств и в полученных выражениях переходя к пределу при  $t \rightarrow -\infty$ , получим противоречие с условиями Предложения 5.15. Это и доказывает указанное выше положение. Рассмотрим последовательность таких положительных чисел  $\varepsilon_n$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ , и  $\alpha$  — последовательность  $\{t_n\}$  моментов

времени. Тогда по доказанному выше для каждой пары  $\varepsilon_n, t_n$  найдется  $t_n \in R_1^-$ , что  $t_n^0 \leq t_n$  и  $|T(t_n^0) + h| < \varepsilon_n$ . Если из  $t_n^0$ , обладающих указанным свойством, составим последовательность  $\{t_n^0\}$ , то, очевидно,  $\{t_n^0\}$  является  $\alpha$ -последовательностью и для ее элементов выполняется равенство (3.5.15). Этим доказывается второе утверждение Предложения 5.15.

В силу условий Предложения функции  $I(t)$ ,  $\dot{I}(t)$  и  $2[T(t) + h]$  изохронны  $R^-$  и вместе с тем устойчивы  $\mathcal{L}^-$ . Положим  $\sup_{t \in R_1^-} |I(t)| = I_s$ . Как отмечено,  $I_s < \infty$ . Зафиксируем произволь-

ное число  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим разность  $\dot{I}(t_2) - \dot{I}(t_1)$ , где  $t_1, t_2$  — произвольные моменты времени из  $R_1^-$ . По теореме Лагранжа о среднем значении функции

$$\dot{I}(t_2) - \dot{I}(t_1) = 2[T(t_{12}) + h](t_2 - t_1), \quad (3.5.18)$$

где  $t_{12} \in [t_1, t_2]$ . Оценим эту разность:

$$|\dot{I}(t_2) - \dot{I}(t_1)| = 2|T(t_{12}) + h| |t_2 - t_1| \leq 2I_s.$$

Если для данного  $\varepsilon$  положим  $l = I_s/\varepsilon$  и выберем  $t_1, t_2$  так, чтобы  $|t_2 - t_1| = l$ , то из последнего неравенства получим  $|T(t_{12}) + h| \leq I_s/|t_2 - t_1| = \varepsilon$ . Это и доказывает, что для данного  $\varepsilon$  множество вида (3.5.16) относительно плотно в  $R_1$ .

Последнее утверждение Предложения 5.15 докажем от противного. Допустим, что существует такой отрезок  $[\bar{t}, \bar{t} + l]$  длины  $l$  и действительно число  $\varepsilon > 0$ , что для любого момента времени  $t \in [\bar{t}, \bar{t} + l]$  имеет место равенство

$$T(t) + \varepsilon = 0. \quad (3.5.19)$$

Обозначим через  $D_i$  дугу  $g(\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + l, q)$  полутраектории  $g(R_1^-, q)$ . В точках области  $D_i$  в силу интеграла энергии системы  $G_n$  и равенства (3.5.19) силовая функция  $U$  постоянна и равна  $s - h$ . Так как силовая функция  $U$  системы  $G_n$  дифференцируема вдоль полутраектории  $f(R_1^-, q)$ , то частные производные  $\partial U/\partial x_i, \partial U/\partial y_i, \partial U/\partial z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) существуют и равны нулю. Следовательно, в точках области  $D_i$  выполняются равенства

$$\dot{x}_i(t) = \text{const}, \quad \dot{y}_i(t) = \text{const}, \quad \dot{z}_i(t) = \text{const},$$

где  $t \in (\bar{t}, \bar{t} + l)$ . С другой стороны, дифференцируя функцию  $T(t)$  вдоль траектории  $f(R_1^-, q)$ , в точках области  $D_i$  получим  $\dot{x}_i(t) = 0, \dot{y}_i(t) = 0, \dot{z}_i(t) = 0$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $t \in (\bar{t}, \bar{t} + l)$ . Тогда из интеграла моментов (3.1.5) вытекает, что  $\kappa$  — нуль-вектор вопреки условиям Предложения.

Предложение доказано полностью.

Предложение 5.16. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , то существует  $\alpha$ -последовательность  $\{s_n^0\}$  моментов времени  $t \in R_1^-$ , при которых

$$T(s_n^0) = -h. \quad (3.5.20)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия Предложения. Тогда, как известно, функция  $2T(t)$  осциллирует вблизи силовой функции  $U(t)$  в том смысле, что

$$\underline{\lim} 2T(t) \leq \underline{\lim} U(t) \leq \overline{\lim} U(t) \leq \overline{\lim} 2T(t)$$

при  $t \rightarrow -\infty$ , и эти нижний и верхний пределы ограничены [127]. Из этих неравенств вытекает

$$\underline{\lim} T(t) \leq -h \leq \overline{\lim} T(t).$$

Поэтому в силу непрерывности функции  $T(t)$  найдется хотя бы одно значение  $s_0^0 \in R_1^-$ , при котором  $T(s_0^0) = -h$ . Значение  $s_0^0$  примем за новое начало отсчета времени. При этом условии Предложения величина постоянной энергии сохраняется, а изменяются лишь начальные условия ( $g(s_0^0, q) = q_1^0$ ). Рассуждая аналогично, находим такой момент времени  $s_2^0 \in R_1$ , что  $s_2^0 < s_1^0$  и  $T(s_2^0) = -h$ . Продолжая этот процесс, построим  $\alpha$ -последовательность  $\{s_n^0\}$ , для которой справедливо соотношение (3.5.20).

Рассмотрим произвольную функцию  $\eta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$   $k$ -переменных, определенную в некоторой области  $F \subset E_k$ , т. е.  $\eta(\xi) : E_k \rightarrow R_1$ . Пусть  $\xi^0 = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  — произвольная точка области  $F$  и приращение  $\delta^0 = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$  таково, что точка  $\xi^0 + \delta^0 = (c_1 + \delta_1, c_2 + \delta_2, \dots, c_k + \delta_k)$  принадлежит области  $F$ .

Функция  $\eta(\xi)$  называется дифференцируемой в точке  $\xi = \xi^0$ , если ее приращение  $\Delta\eta$  при переходе из  $\xi^0$  в точку  $\xi = \xi^0 + \delta^0$  допускает выделение главной части, линейной относительно приращения аргумента  $\delta^0$ :

$$\eta(\xi^0 + \delta^0) - \eta(\xi^0) = \sum_{i=1}^k D_i \delta_i + o(\delta^0), \quad \lim_{\delta^0 \rightarrow 0} \frac{o(\delta^0)}{\|\delta^0\|} = 0. \quad (3.5.21)$$

Здесь  $\sum_{i=1}^k D_i \delta_i$  — главная часть, линейная относительно приращения  $\delta^0$ ,  $o(\delta^0)$  — малая высшего порядка по сравнению с  $\delta^0$  и  $\lim_{\delta^0 \rightarrow 0} \frac{o(\delta^0)}{\|\delta^0\|} = 0$  означает, что для любого  $\epsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что из  $\|\delta^0\| < \delta$  следует  $(o(\delta^0)/\|\delta^0\|) < \epsilon$ .

Известно следующее

Предложение 5.17 [62]. Если функция  $\eta(\xi)$  дифференцируема, то коэффициенты  $D_i$  в формуле (3.5.21) определяются единственным образом.

Это Предложение позволяет построить из чисел  $D_1, D_2, \dots, D_k$  вектор  $D^0 = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ . Вектор  $D^0$  называется градиентом функции  $\eta(\xi)$  в точке  $\xi = \xi^0$ .

Главная линейная часть  $\sum_{i=1}^k D_i \delta_i$  в (3.5.21) называется дифференциалом функции  $\eta(\xi)$  в точке  $\xi = \xi_0$ , отвечающим приращению ее аргумента  $\delta^0$ .

Оператор  $D^0$ , определенный в (3.5.21) однозначно, называется *производной функции*  $\eta(\xi)$  в точке  $\xi = \xi^0$ . Эту производную обозначим  $\eta'(\xi)$ .

Функция  $\eta(\xi)$  называется *дифференцируемой в области  $F$* , если она дифференцируема в каждой точке области  $F$ .

Каждая из величин  $D_i$  (3.5.21) определяется по правилу

$$D_i = \lim_{\delta_i \rightarrow 0} \frac{\eta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i + \delta_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) - \eta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\delta_i}$$

и совпадает с производной функции  $\eta(\xi)$  по аргументу  $\xi_i$ . Эта величина называется *частной производной функции  $\eta(\xi)$  в точке  $\xi = \xi^0$  по переменной  $\xi_i$* .

Отметим известный *критерий существования и непрерывности производной* функции многих переменных [62].

**Предложение 5.18.** Для существования и непрерывности производной функции  $\eta(\xi)$  в области  $F$  необходимо и достаточно существование непрерывных в области  $F$  частных производных функции  $\eta(\xi)$  по всем ее переменным.

Далее понадобится следующее свойство производной предельной функции последовательности функций многих переменных [62].

**Предложение 5.19.** Пусть задана последовательность дифференцируемых в области  $F$  функций

$$\eta_1(\xi), \eta_2(\xi), \dots, \eta_n(\xi), \dots, \quad (3.5.22)$$

производные которых

$$\eta'_1(\xi), \eta'_2(\xi), \dots, \eta'_n(\xi), \dots$$

непрерывны и сходятся равномерно в области  $F$  к функции  $\zeta(\xi)$ .

Если последовательность (3.5.22) сходится хотя бы в одной точке области  $F$ , то она сходится равномерно в  $F$  к некоторой функции  $\eta(\xi)$ , которая дифференцируема в области  $F$  и имеет производную  $\eta'(\xi)$ , равную  $\zeta(\xi)$ , т. е.  $\eta'(\xi) = \zeta(\xi)$ .

Отметим, что Предложения 5.17, 5.19 справедливы и в случае вектор-функции [41, 62].

**Предложение 5.20.** Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , то каждая из функций  $I(g)$ ,  $T(g)$  и  $Q(g)$  имеет непрерывные ограниченные производные в точках полутраектории  $g(R_1^-, q)$ .

Действительно,

$$I'(g) = \{2M_1x_1, 2M_1y_1, \dots, 2M_nz_n, 0, 0, \dots, 0\},$$

$$T'(g) = \{0, 0, \dots, 0, M_1u_1, M_1v_1, \dots, M_nw_n\},$$

$$Q'(g) = \{2M_1x_1, 2M_1y_1, \dots, 2M_nz_n, 2M_1u_1, 2M_1v_1, \dots, 2M_nw_n\}.$$

Ограниченность и непрерывность указанных производных в области  $g(R_1^-, q)$  следуют из того, что  $Q'(g) = 2g(t, q)$ , а  $I'(g)$  и  $T'(g)$  представляют движение  $g(t, q)$  по подпространствам.

Рассмотрим множество  $F_g$  всех сдвигов движения  $g(t, q)$ :  $F_g = \{g(t+s, q) | s \in R_1\}$ . Обозначим через  $\varphi$  отображение, которое переводит каждый сдвиг  $g(t+s, q)$  движения  $g(t, q)$  в функцию  $Q[g(t+s, q)]$ . Согласно определению функции отображение  $\varphi$  переводит множество  $F_g$  на множество  $F_Q$  по следующему правилу

$$\varphi[g(t+s, q)] = Q[g(t+s, q)] = \|g(t+s, q)\|^2. \quad (3.5.23)$$

**Предложение 5.21.** Отображение  $\varphi$  действует из множества  $F_g$  на множество  $F_Q$ . Оно однозначно, непрерывно и замкнуто.

То, что  $\varphi$  отображает множество  $F_g$  на всё множество  $F_Q$  однозначно вытекает из его определения (3.5.23). Непрерывность и замкнутость отображения  $\varphi$  вытекает из свойств нормы

$$\|g(t+t_1, q) - g(t+t_2, q)\| \geq \| \|g(t+t_1, q)\| - \|g(t+t_2, q)\| \|$$

для всех  $t, t_1, t_2 \in R_1$ .

Так как всякое непрерывное и замкнутое отображение является *факторным* [3], то отображение  $\varphi$  — факторное.

**Предложение 5.22.** Движение  $g(t, q)$  является непериодичным, а отображение  $\varphi$  — взаимно однозначным тогда и только тогда, когда функция  $Q[g(t, q)]$  непериодична.

**Доказательство необходимости.** Пусть движение  $g(t, q)$  непериодично и отображение  $\varphi$  взаимно однозначно. Тогда для любых  $t_1, t_2 \in R_1, t_1 \neq t_2$  выполняются неравенства  $g(t+t_1, q) \neq g(t+t_2, q)$  и  $\|g(t+t_1, q)\| \neq \|g(t+t_2, q)\|$  при всех  $t \in R_1$ . В частности, последнее неравенство будет выполняться и при  $t_1 = 0$  и  $t_2 = s \neq 0$ , т. е.  $\|g(t, q)\| \neq \|g(t+s, q)\|$  для всех  $t \in R_1$ . Это означает, что никакое отличное от нуля действительное число  $s$  не является периодом функции  $Q(t)$ . Следовательно, функция  $Q(t)$  непериодична.

**Доказательство достаточности.** Пусть  $Q(t)$  — непериодическая функция, т. е. неравенство  $\|g(t+s, q)\| \neq \|g(t, q)\|$  выполняется при любом отличном от нуля действительном  $s \in R_1$ . Тогда движение  $g(t, q)$  непериодично, так как согласно Предложению 5.12 периодичность функции  $Q(t)$  является необходимым условием периодичности  $g(t, q)$ . Допустим, что при этих условиях отображение  $\varphi$  не является взаимно однозначным. Это означает, что некоторый сдвиг  $Q[g(t+s, q)] = Q(t+s)$  функции  $Q(t)$  имеет хотя бы два прообраза:  $g(t+s, q)$  и  $g(t+s^*, q)$ , где  $s \neq s^*$ . Движения  $g(t+s, q)$  и  $g(t+s^*, q)$  таковы, что  $g(t+s, q) \neq g(t+s^*, q)$  и  $\|g(t+s, q)\| = \|g(t+s^*, q)\|$  для всех  $t \in R_1$ . Равенство можно записать в виде  $\|g(t, q)\| = \|g(t+t+\tau, q)\|$ , где  $\tau = s^* - s \neq 0$ . Следовательно, вопреки условиям непериодичности функции  $Q(t)$  функция  $\|g(t, q)\|$  имеет действительный период  $\tau$ . Полученное противоречие доказывает достаточность Предложения 5.22.

**Предложение 5.23.** Если  $Q(t)$  не является периодической функцией, то  $\varphi$  — гомеоморфное отображение.

**Доказательство.** Пусть  $Q(t)$  — непериодическая функция. Тогда согласно Предложению 5.22 отображение  $\varphi$  взаимно однозначно, а согласно Предложению 5.21 оно представляет собой факторное отображение. Как известно, всякое взаимно однозначное факторное отображение является гомеоморфизмом [3]. Что и требовалось доказать.

**Предложение 5.24.** Если  $Q(t)$  — непериодическая функция, то движение  $g(t, q)$  и функция  $Q(t)$  изохронны.

**Доказательство.** Пусть  $Q(t)$  — непериодическая функция. Тогда согласно Предложению 5.23 существует гомеоморфизм  $\varphi$  между множествами  $F_g$  и  $F_Q$ . Отсюда на основании Предложения 6.16 гл. II вытекает изохронность движения  $g(t, q)$  и функции  $Q(t)$ .

**Предложение 5.25.** Если  $Q(t)$  — непериодическая функция, то каждый ее период  $\tau$  является периодом функций  $I(t)$ ,  $\dot{I}(t)$ ,  $\ddot{I}(t)$  и  $\overset{\cdot\cdot\cdot}{I}(t)$ .

**Доказательство.** В силу Предложения 5.3 из периодичности  $Q(t)$  вытекает устойчивость  $\mathcal{L}$  движения  $g(t, q)$ . Тогда согласно Предложению 5.11 функции  $I(t)$ ,  $\dot{I}(t)$ ,  $\ddot{I}(t)$ ,  $\overset{\cdot\cdot\cdot}{I}(t)$  и  $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{I}(t)$  изохронны  $R$  между собой. Поэтому достаточно показать периодичность функции  $I(t)$ .

Пусть  $Q(t)$  — периодическая функция и  $\tau$  — ее произвольный период. В силу уравнения Лагранжа — Якоби из равенства

$$2\{T[g(t, q)] + h\} + I[g(t, q)] = Q[g(t, q)] + 2h$$

вытекает дифференциальное уравнение

$$\dot{I}[g(t, q)] + I[g(t, q)] = Q[g(t, q)] + 2h. \quad (3.5.24)$$

Общее решение уравнения (3.5.24) имеет вид

$$I[\bar{g}(t, q)] = \int_0^t \sin(t-s) \{Q[g(s, q)] + 2h\} ds + C_1 \sin t + C_2 \cos t, \quad (3.5.25)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. С учетом начальных условий (3.1.3) задачи (3.1.1) из (3.5.25) можно получить следующее частное решение уравнения (3.5.24):

$$I[g(t, q)] = \int_0^t \sin(t-s) \{Q[\bar{g}(s, q)] + 2h\} ds + \dot{I}[g(0, q)] \times \\ \times \sin t + I[g(0, q)] \cos t. \quad (3.5.26)$$

Учитывая, что вместе с  $g(t, q)$  каждое движение  $g(t+t^*, q)$  является решением задачи (3.1.1), (3.1.3), где  $t^* \in R_1$  — фиксированный момент времени, можно представить уравнения (3.5.24) в виде

$$\dot{I}[g(t+t^*, q)] + I[g(t+t^*, q)] = Q[g(t+t^*, q)] + 2h. \quad (3.5.27)$$

Уравнение (3.5.27) имеет следующее частное решение:

$$I[g(t+t^*, q)] = \int_0^t \sin(t-s) \{Q[g(s+t^*, q)] + 2h\} ds + \\ + \dot{I}[\bar{g}(t^*, q)] \sin t + I[g(t^*, q)] \cos t. \quad (3.5.28)$$

Здесь положим  $t^* = \tau$ , и учитывая, что  $\tau$  — период функции  $Q(t)$ , вычтем из (3.5.28) выражение (3.5.26). Тогда

$$I[g(t+\tau, q)] - I[g(t, q)] = \{I[g(\tau, q)] - I[g(0, q)]\} \sin t + \\ + \{I[g(\tau, q)] - I[g(0, q)]\} \cos t. \quad (3.5.29)$$

С учетом (3.5.26) и (3.5.28) рассмотрим разность

$$2\{T[g(t+\tau, q)] - T[\bar{g}(t, q)]\} = \{I[g(\tau, q)] - I[g(0, q)]\} \sin t + \\ + \{I[g(\tau, q)] - I[g(0, q)]\} \cos t.$$

Складывая это выражение с (3.5.29) получим

$$Q[g(t+\tau, q)] - Q[g(t, q)] = 2\{I[g(\tau, q)] - I[g(0, q)]\} \sin t + \\ + 2\{I[g(\tau, q)] - I[g(0, q)]\} \cos t.$$

Так как  $\tau$  — период функции  $Q(t)$ , то левая часть этого выражения равна нулю. Поэтому

$$I[g(\tau, q)] = I[g(0, q)], \quad I[g(\tau, q)] = I[g(0, q)].$$

Рассуждая аналогично, нетрудно доказать, что при любом натуральном  $k$  имеют место равенства

$$I[g(\pm k\tau, q)] = I[g(0, q)], \quad I[g(\pm k\tau, q)] = I[g(0, q)]. \quad (3.5.30)$$

В силу произвольности  $\tau$  и соотношений (3.5.30) из равенства (3.5.29) вытекает, что каждый период  $\tau$  функции  $Q(t)$  является и периодом функции  $I(t)$ . Этим Предложение 5.25 доказано.

Предложение 5.26. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , и  $T[g(t, q)]$  — непериодическая функция времени  $t$ , то  $g(t, q)$  и  $T[g(t, q)]$  изохронны  $R^-$ .

Доказательство. Пусть функция  $T[g(t, q)]$  непериодична. Тогда согласно Предложению 5.25 и  $Q[g(t, q)]$  — непериодическая функция. Поэтому движение  $g(t, q)$  и функция  $Q[g(t, q)]$  изохронны между собой. Рассмотрим произвольную собственную  $\alpha$ -последовательность  $\{t_k\}$  функции  $T[g(t, q)]$ . Из устойчивости  $\mathcal{L}^-$  движения  $g(t, q)$  согласно Предложению 5.13 вытекает, что  $\{t_k\}$  является собственной  $\alpha$ -последовательностью функции  $Q[g(t, q)]$  и, следовательно,  $\{t_k\} \in N(\alpha, g)$ . Тогда  $g(t, q)$  и  $T[g(t, q)]$  изохронны  $R^-$ . Что и требовалось доказать.

Итак, установлено, что в случае непериодической функции  $T[g(t, q)]$  изохронность движения и кинетической энергии системы  $G_n$  являются необходимым условием устойчивости по Лагранжу движения этой системы.

Случай периодической функции  $T[g(t, q)]$  рассматривается отдельно. Поэтому на протяжении этого раздела  $T(t)$  — непериодическая функция.

Предложение 5.27. Движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L$  и устойчиво  $P$  тогда и только тогда, когда оно устойчиво  $L^-$  и кинетическая энергия устойчива  $P$ .

Необходимость Предложения очевидна. Докажем достаточность. Пусть движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L^-$  и функция  $T[g(t, q)]$  устойчива  $P$ . Согласно Предложению 5.14 движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$ . Тогда в силу Предложения 5.26 движение  $g(t, q)$  и функция  $T[g(t, q)]$  изохронны  $R$ . Поэтому движение  $g(t, q)$  устойчиво  $P$ . Что и требовалось доказать.

Через  $\Phi[g(t+t^*, q)]$  обозначим функцию  $Q[g(t+t^*, q)]+2h$  и с учетом решения (3.5.28) представим уравнение (3.5.27) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{I}[g(t+t^*, q)] + \dot{I}[g(t^*, q)] \sin t + I[g(t^*, q)] \cos t = \\ = \Phi[g(t+t^*, q)] - \int_0^t \sin(t-\tau) \Phi[g(\tau+t^*, q)] d\tau. \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

Отсюда при  $t=0$  и  $t=\pi$  для любого  $t^* \in R_1$  получим выражения

$$\begin{aligned} \ddot{I}[g(t, q)] + I[g(t^*, q)] &= \Phi[g(t^*, q)], \\ \ddot{I}[\bar{g}(t^* + \pi, q)] - I[g(t^*, q)] &= \Phi[g(t^* + \pi, q)] - \\ &- \int_0^\pi \sin \tau \Phi[g(\tau + t^*, q)] d\tau. \end{aligned}$$

Сумма этих соотношений дает следующее равенство:

$$I[g(t^* + \pi, q)] + I[g(t^*, q)] = \int_0^\pi \sin \tau \Phi[g(\tau + t^*, q)] d\tau.$$

Оно справедливо для всех  $t^* \in R_1$ .

Пусть  $\{t_k\}$  — произвольная  $\lambda$ -последовательность функции  $Q[g(t, q)]$ . Тогда  $\{t_k\} \in N(\lambda, \Phi)$ , т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k + t) = \Phi(t)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \{I[g(t_k + \pi, q)] + I[g(t_k, q)]\} &= \int_0^\pi \sin \tau \Phi[g(\tau, q)] d\tau = \\ &= I[g(\pi, q)] + I[g(0, q)]. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} I[g(t_k, q)] = I[g(0, q)]$ . Исходя из (3.5.31) и рассуждая аналогично, можно установить справедливость равенства  $\lim_{k \rightarrow \infty} I[g(t_k, q)] = I[g(0, q)]$ . Тогда на основании

(3.5.28) получим, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} I[g(t+t_k, q)] = I[g(t, q)]$ , т. е.  $\{t_k\} \in N(\lambda, I)$ . Следовательно, функция  $I(t)$  сравнима  $R$  с функцией  $Q(t)$ . Поэтому и функция  $T(t)$ , определяемая разностью  $Q(t) - I(t)$  сравнимых функций  $Q$  и  $I$ , сравнима  $R$  с функцией  $Q(t)$ . Итак, доказано

Предложение 5.28. Функции  $T(t)$  и  $I(t)$  сравнимы  $R$  с функцией  $Q(t)$ .

Отсюда с учетом Предложения 5.13 получим

Предложение 5.29. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L^-$ , то функции  $I(t)$ ,  $T(t)$  и  $Q(t)$  изохронны  $R^-$ .

Это Предложение позволяет сформулировать критерий устойчивости  $L$  и устойчивости  $\Pi$  движения  $g(t, q)$ .

Предложение 5.30. Движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L$  и устойчиво  $\Pi$  тогда и только тогда, когда оно устойчиво  $L^-$  и функция  $T(t)$  устойчива  $\Pi$ .

## 6. Критерий рекуррентности движений

Рассмотрим в классе различных движений системы  $G_n$  рекуррентные движения.

Справедливо

Предложение 6.1. Движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  рекуррентно тогда и только тогда, когда оно устойчиво  $L^-$  и ее кинетическая энергия  $T[g(t, q)]$  минимальна.

Доказательство. Согласно Предложению 5.3, из устойчивости  $L^-$  движения  $g(t, q)$  следует устойчивость  $L^-$  функции  $T(t)$ . По условиям Предложения функция  $T(t)$  минимальна. Следовательно, функция  $T(t)$  устойчива  $L^-$  и устойчива  $\Pi^-$ . Тогда она и устойчива  $L$ . Поэтому в силу теоремы Биркгофа  $T(t)$  рекуррентна. Отсюда с учетом Предложения 5.29 будем иметь, что  $Q(t)$  — рекуррентная функция, т. е. множество  $R_\delta(Q) = \{\tau \in R_1 : \rho[Q(t+\tau), Q(t)] < \delta\}$  относительно плотно в  $R_1$  для каждого  $\delta > 0$ .

Согласно Предложению 5.23 отображение  $\varphi$  между множествами  $F_g$  и  $F_Q$  есть гомеоморфизм. В частности, отображение  $\varphi^{-1}$  непрерывно в точке  $Q(t) \in F_Q$ , т. е. для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon, Q(t)) > 0$ , что  $\rho_{R_m}[\varphi^{-1}(Q(t+\tau)), \varphi^{-1}(Q(t))] < \varepsilon$  как только  $\rho_{R_1}[Q(t+\tau), Q(t)] < \delta$ . Учитывая, что  $\varphi^{-1}(Q(t+\tau)) = g(t+\tau, q)$ , получим относительную плотность множества  $R_\varepsilon(g) = \{\tau \in R_1 / \rho_{R_m}(g(t+\tau, q), g(t, q))\} < \varepsilon$ , совпадающего с множеством  $R_\delta(Q)$ .

Итак, установлено, что движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$  и множество  $R_\varepsilon(g) = \{\tau \in R_1 / \rho(g(t, q), g(t+\tau, q)) < \varepsilon\}$  относительно плотно в  $R_1$ . Поэтому в силу Предложения 3.6 гл. II движение  $g(t, q)$  рекуррентно. Тем самым доказана достаточность Предложения 6.1. Необходимость этого Предложения доказывается тривиально.

В пространстве ограниченных непрерывных  $m$ -мерных век-

тор-функций и скалярных функций введем метрики

$$r_m [u(t), v(t)] = \sup_{t \in R_1} \|u(t) - v(t)\|,$$

$$r_1 [u(t), v(t)] = \sup_{t \in R_1} |u(t) - v(t)|.$$

Очевидно, сходимость в метриках  $r_m$  и  $r_1$  совпадает с равномерной сходимостью на всей действительной оси.

Рассмотрим отображение  $\varphi$  множества  $F_g$  на множество  $F_q$ .

Справедливо

**Предложение 6.2.** Отображение  $\varphi$  однозначно, непрерывно в метрике  $r_1$  и каждое замкнутое в метрике  $r_m$  подмножество множества  $F_g$  переводит в замкнутое в метрике  $r_1$  подмножество  $F_q$ .

Доказательство Предложения очевидным образом следует из неравенства

$$\sup_{t \in R_1} |Q[g(t+s, q)] - Q[g(t, q)]| \leq \sup_{t \in R_1} \|g(t+s, q) - g(t, q)\|.$$

**Предложение 6.3.** Если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}$  и функция  $Q[g(t, q)]$  непериодична, то отображение  $\varphi$  есть гомеоморфизм, т. е.  $\varphi$  — взаимнооднозначно, непрерывно в метрике  $r_1$  и существует обратное ему отображение  $\varphi^{-1}$ , непрерывное в метрике  $r_m$ .

Для доказательства Предложения 6.3 следует заметить, что в силу его условий и Предложения 5.22,  $\varphi$  — взаимно однозначное, факторное отображение. На основании Предложения 6.2  $\varphi$  непрерывно в метрике  $r_1$ . Следовательно, каждое замкнутое в метрике  $r_1$  подмножество  $K$  множества  $F_q$  имеет замкнутый прообраз в множестве  $F_g$ . При этом  $K$  замкнуто в  $F_q$  тогда и только тогда, когда  $\varphi^{-1}(K)$  замкнуто в  $F_g$ , т. е. отображение  $\varphi$  — гомеоморфизм. Предложение 6.3 доказано.

**Предложение 6.4.** Движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  почти периодически тогда и только тогда, когда оно устойчиво  $\mathcal{L}$ - и функция  $T[g(t, q)]$  почти периодична.

Докажем достаточность. Пусть движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}$ - и функция  $T[g(t, q)]$  почти периодична. Тогда функция  $Q[g(t, q)]$  устойчива  $\mathcal{L}$ - и почти периодична и поэтому устойчива  $\mathcal{L}$ . В силу Предложения 5.3 движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}$ , а согласно Предложению 6.3 отображение  $\varphi$  есть гомеоморфизм. Обратное отображение  $\varphi^{-1}$  существует и непрерывно на  $F_q$ . В частности, оно непрерывно в точке  $Q[g(t, q)] \in F_q$ , т. е. для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon, Q[g(t, q)]) > 0$  такое, что  $\sup_{t \in R_1} \|g(t+s, q) - g(t, q)\| < \varepsilon$ , как только  $\sup_{t \in R_1} |Q[g(t+s, q)] - Q[g(t, q)]| < \delta$ . Так как  $Q[g(t, q)]$  — почти периодическая функция, то для  $\delta > 0$  множество  $R_\delta(Q) = \{s \in R_1 : \sup_{t \in R_1} |Q[g(t+s, q)] - Q[g(t, q)]| < \delta\}$  относительно плотно в  $R_1$ . Поэтому множество  $R_\varepsilon(g) =$

$= \{s \in R_1 : \sup_{t \in R_1} \|g(t+s, q) - g(t, q)\| < \varepsilon\}$ , вложенное во множество  $R_\delta(Q)$ , относительно плотно в  $R_1$ . Тогда, по теореме Бохнера движение  $g(t, q)$  почти периодически. Необходимость Предложения 6.3 очевидна. Доказательство завершено.

**Предложение 6.5.** Движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  периодически тогда и только тогда, когда оно устойчиво  $\mathcal{L}^-$  и функция  $T[g(t, q)]$  периодична.

Докажем достаточность. Пусть движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$  и функция  $T[g(t, q)]$  периодична. Тогда согласно Предложениям 5.13, 5.14 движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}$  и функция  $Q[g(t, q)]$  периодична. Если функция  $Q[g(t, q)]$  является постоянной, то ее полная производная по времени в силу дифференциальных уравнений (3.1.1) равна нулю. Следовательно, движение  $g(t, q)$  периодически и Предложение 6.5 доказано. Поэтому предположим, что  $Q[g(t, q)] \neq \text{const}$  и  $\tau$  — ее минимальный действительный положительный период. Тогда сужение отображения  $\varphi$  на множестве  $F_g[0, \tau) = \{g(t+s, q) / s \in [0, \tau)\}$  взаимно однозначно. Действительно, если для некоторого  $s^* \in [0, \tau)$  функция  $Q[g(t+s^*, q)]$  имеет два прообраза:  $g(t+s^*, q)$  и  $g(t+t^*, q)$ , где  $t^* \in [0, \tau)$  и  $t^* \neq s^*$ , то  $\|g(t+s^*, q)\| = \|g(t+t^*, q)\|$ . Отсюда вытекает, что  $\|g(t, q)\| = \|g(t+t^*-s^*, q)\|$  для всех  $t \in R_1$ , т. е. число  $t^*-s^* < \tau$  является периодом функции  $Q[g(t, q)]$ . Это противоречит минимальности периода  $\tau$ . Рассуждая аналогично, нетрудно показать взаимную однозначность сужения на множество  $F_g[(n-1)\tau, n\tau) = \{g(t+s, q) / s \in [(n-1)\tau, n\tau)\}$  отображения  $\varphi$  при любом отрицательном и положительном натуральном номере  $n \in \mathbb{N}$ . Это означает, что отображение  $\varphi$  допускает непрерывное обращение. Следовательно, движение  $g(t, q)$  сравнимо  $R$  с периодической функцией  $Q[g(t, q)]$  и потому  $g(t, q)$  периодически. Необходимость очевидна. Итак, Предложение 6.5 доказано.

Вопросы сравнения по возвращаемости функции со значениями в произвольных линейных нормированных пространствах и ее нормы рассмотрены в [49, 85]. В частности, Америо принадлежит теорема, формулировка которой нами заимствована из [49].

**Теорема Америо.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) пространство  $M$  слабо плотно;
- 2) в пространстве  $M$  из слабой сходимости последовательности его элементов и сходимости числовой последовательности, составленной из норм этих элементов, следует сильная сходимости последовательности;
- 3) норма каждой функции, являющейся равномерным относительно слабым пределом последовательности сдвигов  $\{f(t+s_n)\}$  функции  $f(t) \in C(R_1, M)$ , представляет собой почти периодическую функцию относительно  $t$ .

Если при этих условиях  $f(t)$  — слабо почти периодическая функция, то  $f(t)$  почти периодична.

В гильбертовых пространствах с фиксированным базисом  $\{e_k\}$  имеет место

**Теорема [49].** Функция  $f(t) \in C(R_1, M)$  является почти периодической тогда и только тогда, когда скалярные функции  $f_k(t) = f(t) \cdot e_k$  являются почти периодическими и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$  сходится равномерно на  $R_1$  к функции  $\|f(t)\|^2$ .

Эти теоремы указывают на необходимость проведения сравнения по возвращаемости функции и ее нормы, принадлежащих различным функциональным пространствам. В случае движения с конечномерным фазовым пространством, порожденного динамической системой, такое сравнение осуществимо весьма просто. При этом оно позволяет выделить основные классы движений, обладающих тем или иным свойством возвращаемости, по возвращаемости во времени их различных характеристик. Более точно, движения системы  $G_n$ , обладающие свойствами равномерной возвращаемости, являются изохронными с кинетической энергией вдоль траектории этого движения. Этот факт показывает поразительную общность энергетических построений в небесной механике и их удобства как в качественных, так и в количественных аспектах.

В заключение раздела рассмотрим интегральное выражение (3.5.28) для кинетической энергии. Если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , то существует такая  $\alpha$ -последовательность  $\{t_n\}$ , что  $T(t_n) = -h$ . Следовательно, для этой же последовательности  $\{t_n\}$  выполняются равенства  $Q(t_n) = Q(0)$  и  $I(t_n) = I(0)$ . Более того, согласно Предложению 5.15 множество  $R_\varepsilon(T)$  относительно плотно в  $R_1^-$ . Отсюда вытекает относительная плотность в  $R_1^-$  множеств

$$R_\varepsilon(Q) = \{t \in R_1^- \mid |Q(t) - Q(0)| < \varepsilon\},$$

$$R_\varepsilon(I) = \{t \in R_1^- \mid |I(t) - I(0)| < \varepsilon\}.$$

Таким образом, доказано

**Предложение 6.6.** Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\mathcal{L}^-$ , то функции  $Q(t)$  и  $I(t)$  регулярно возвращаются к их начальным значениям и соответствующие им множества  $R_\varepsilon(Q)$ ,  $R_\varepsilon(I)$  относительно плотны в  $R_1^-$ .

## 7. Минимальность по Биркгофу движения и соизмеримость средних движений

Перейдем к некоторым общим законам сочетания прошлого и будущего режимов движения в задаче  $n$  тел.

Пусть  $M$  — полное метрическое пространство с метрикой  $\rho$ .

Функция множеств  $\sigma$  называется *мерой Каратеодори*, если

для любого множества  $A \subset M$  она определена следующими аксиомами.

1.  $\sigma A \geq 0$ ,  $\sigma \emptyset = 0$  и существует множество положительной конечной меры.

2. Если  $A \subset B$ , то  $\sigma A \leq \sigma B$ .

3. Для любой последовательности множеств  $A_i \subset M$  имеет место неравенство

$$\sigma \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma A_i.$$

4. Если  $\rho(A, B) > 0$ , то  $\sigma A \cup B = \sigma A + \sigma B$ .

Множество  $A \subset M$  называется *измеримым*, если для любого множества  $W$  такого, что  $\sigma W < \infty$ , выполнено равенство

$$\sigma W = \sigma W \cap A + \sigma W \setminus (W \cap A).$$

Измеримые по мере  $\sigma$  множества называются  *$\sigma$ -измеримыми множествами*.

Пусть  $g(t, q)$  — динамическая система, заданная в пространстве  $M$ , и  $\sigma$  — мера Каратеодори. Мера  $\sigma$  называется *инвариантной относительно динамической системы  $g(t, \cdot)$* , если для любого  $\sigma$ -измеримого  $A$  имеет место равенство

$$\sigma g(t, A) = \sigma A \quad (3.7.1)$$

для всех  $t \in R_1$ .

Пусть  $M$  — фазовое пространство движения в задаче  $n$  тел и  $g(t, \cdot)$  — система ее движений, являющаяся динамической системой. Положим

$$\sigma A = \iint_A \dots \int dx_1 dy_1 \dots dw_n \quad (3.7.2)$$

и обозначим

$$\sigma A_t = \iint_{A_t} \dots \int dx_1 dy_1 \dots dw_n, \quad (3.7.3)$$

где  $A_t = g(t, A)$  — область, занимаемая точками траекторий в момент времени  $t$ , которые при  $t=0$  занимали область  $A$ .

Предложение 7.1. Фазовый объем  $\sigma A$  является мерой Каратеодори, инвариантной относительно динамической системы  $g(t, \cdot)$ . Иными словами, он определяется соотношением (3.7.2) и имеет место равенство  $\sigma A = \sigma A_t$ , где  $\sigma A_t$  выражается формулой (3.7.3).

Используя (3.7.2), нетрудно проверить основные аксиомы меры. Инвариантность такой меры следует из критерия существования интегрального инварианта для системы уравнений (3.1.1). Напомним эту теорему [82].

**Теорема Лиувилля.** Произвольная автономная система дифференциальных уравнений вида

$$d\xi_i/dt = f(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

имеет интегральный инвариант тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\theta f) = 0, \quad (3.7.4)$$

функция  $\theta(\xi)$  — плотность интегрального инварианта.

Интегральным инвариантом ( $k$ -го порядка) согласно Пуанкаре называется выражение вида

$$\iint_A \dots \int \theta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k,$$

если имеет место равенство

$$\begin{aligned} \iint_A \dots \int \theta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k = \\ = \iint_{A_t} \dots \int \theta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

для произвольной области  $A$  фазового пространства  $M$ .

Нетрудно проверить, что для задачи  $n$  тел плотность интегрального инварианта  $\theta(\xi) = 1$ , и равенство (3.7.5) выполняется.

Пусть  $g(t, q)$  — движение в смысле Определения 1.1 гл. II. Если движение в прошлом устойчиво по Пуассону, будет ли оно устойчивым по Пуассону в будущем? На этот вопрос отвечает

Теорема Пуанкаре—Картатеодори [60]. Если  $M$  — пространство со счетной базой,  $\sigma$  — инвариантная мера относительно динамической системы  $g(t, \cdot)$ , заданной в пространстве  $M$ , и  $\sigma M = 1$ , то почти все точки  $q \in M$  устойчивы  $\Pi$ , т. е. мера  $\sigma z$  множества  $z$  неустойчивых  $\Pi$  точек  $p \in M$  равна нулю ( $\sigma z = 0$ ).

Доказательство. Рассмотрим целые числа  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и для каждого  $m$  через  $A_m$  обозначим образ множества  $A$  при отображении  $g(t, \cdot)$  для  $t = m$ , т. е.

$$A_m = g(m, A), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $A \subset M$  — произвольное  $\sigma$ -измеримое множество и  $\sigma A > 0$ .

Построим следующие множества:

$$\begin{aligned} A_0 \cap A_1 = A_{01}, \quad A_0 \cap A_2 = A_{02}, \dots, \quad A_0 \cap A_m = A_{0m}, \dots, \\ A_0 \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{0m} = A_{0\infty}, \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

$$A_1 \cap A_2 = A_{12}, \quad A_1 \cap A_3 = A_{13}, \dots, \quad A_1 \cap A_m = A_{1m}, \dots,$$

$$A_1 \setminus \bigcup_{m=2}^{\infty} A_{1m} = A_{1\infty},$$

.....

Докажем, что  $\sigma A_{0\infty} = 0$ . Допустим, что это не так и  $\sigma A_0 = a_0$ . По определению (3.7.7)  $g(1, A_m) = g(0, g(0, A_{m+1})) = A_{1m}$ . Следовательно,  $g(1, A_{0m}) = A_{1m+1}$  и  $g(1, A_{0\infty}) = A_{1\infty}$ . Повторяя рас-

суждения относительно множеств  $A_{1\infty}, A_{2\infty}, \dots, A_{m\infty}$  и учитывая инвариантность меры  $\sigma$ , получим

$$g(m, A_{0\infty}) = A_{m\infty}, \quad \sigma A_{0\infty} = \sigma A_{1\infty} = \dots = \sigma A_{m\infty} = \dots = a_0.$$

Кроме того, по построению

$$A_{0\infty} \cap A_m = \emptyset, \quad m = 1, 2, \dots$$

Так как  $A_m \supset A_{m\infty}$ , то

$$A_{0\infty} \cap A_{m\infty} = \emptyset, \quad m = 1, 2, \dots$$

Аналогично устанавливается

$$A_{i\infty} \cap A_{j\infty} = \emptyset, \quad j = i+1, i+2, \dots$$

Следовательно,

$$A_{i\infty} \cap A_{j\infty} = \begin{cases} A_{i\infty}, & i = j, \\ \emptyset, & i \neq j, \end{cases}$$

т. е. множества  $A_{m\infty}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) взаимно не пересекаются. По третьей и четвертой аксиомам меры

$$\sigma \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{m\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma A_{m\infty} = a_{0\infty} = \infty.$$

Это противоречит конечности меры множества  $A$ .

Выберем определяющую систему окрестностей  $\{M^{(n)}\}$  пространства  $M$  и каждому множеству  $M^{(n)}$  сопоставим последовательность  $\{M_{0\infty}^{(n)}\}$ , построенную по (3.7.6). По доказанному выше  $\sigma M_{0\infty}^{(n)} = 0$ . Введем множество  $M^+ = \bigcup_n M_{0\infty}^{(n)}$ . Очевидно, множество  $M^+$   $\sigma$ -измеримо и  $\sigma M^+ = 0$ . Покажем, что всякая точка  $q \in M \setminus M^+$  устойчива  $P^-$ . Действительно,  $q$  как точка множества  $M$ , попадает хотя бы в одно из множеств  $M^{(n)}$ . В силу инвариантности множества  $M^{(n)}$  найдется натуральное число  $m$  такое, что

$$q \in g(m, A^{(i)}).$$

Применяя к обеим частям этого включения операцию сдвига  $g(-m, q)$ , находим

$$g(-m, q) \subset M^{(n)}. \quad (3.7.7)$$

Так как  $M^{(n)}$  — произвольная окрестность, содержащая точку  $q$ , и  $m=1$ , то из (3.7.7) вытекает устойчивость точки  $q$ .

Аналогично, вводя множества  $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots, A_{-m}, \dots$  и  $A_{-\infty}$  и повторяя те же рассуждения, построим множество  $M^- = \bigcup M_{0, -\infty}$ . Множество  $M^-$   $\sigma$ -измеримо,  $\sigma M^- = 0$ , и каждая точка  $q \in M \setminus M^-$  устойчива  $P^+$ . Таким образом, всякая точка, принадлежащая множеству  $M \setminus (M^+ \cup M^-)$ , устойчива  $P$ , причем  $\sigma(M^+ \cup M^-) = 0$ . Теорема доказана.

**Предложение 7.2.** Движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  периодически тогда и только тогда, когда его траектория  $g(R_1, q)$  замкнута и хотя бы одно из его  $\alpha$ -предельных и  $\omega$ -предельных множеств не пусто.

Необходимость Предложения 7.2 очевидна, ибо траектория всякого периодического движения компактна.

Докажем достаточность. Предположим, что  $g(R_1, q) = \bar{g}(R_1, q)$  и для определенности примем, что  $W(\omega, g, q) \neq \emptyset$ . Следовательно, существует такой элемент  $p \in g(R_1, q)$ , что для некоторой  $\omega$ -последовательности  $\{t_k\}$  выполняется равенство  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(t_k, q) = p$  и  $p = g(t^*, q)$ . Это означает устойчивость  $P^+$

движения  $g(t, q)$ . Предположим, что движение  $g(t, q)$  непериодично и зафиксируем некоторое число  $\varepsilon > 0$ . Момент времени  $s_1 \in R_1^+$  определим так, чтобы  $s_1 > t_1$  и точка  $q_1 = g(s_1, q)$  попала в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $q$ , т. е.  $q_1 \in S[\varepsilon, q]$ . В силу устойчивости  $P^+$  движения  $g(t, q)$  такой выбор всегда осуществим. Рассмотрим дугу  $g(-t_1 \leq t \leq t_1, q)$ . Так как  $g(t, q)$  — непериодическое движение, то  $q_1 \notin g(-t_1 \leq t \leq t_1, q)$ . Поэтому расстояние  $a_1$  между компактными множествами  $q_1$  и  $g(-t_1 \leq t \leq t_1, q)$  положительно, т. е.  $\rho[g(-t_1 \leq t \leq t_1, q), q_1] = a_1, a_1 > 0$ . Положим  $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon - \rho(q, q_1), \frac{a_1}{2}\}$  и выберем  $s_2 \in R_1^+$  так, чтобы  $s_2 > t_2$  и точка  $q_2 = g(s_2, q)$  попала в  $\varepsilon_1$ -окрестность точки  $q_1$ , т. е.  $q_2 \in S(\varepsilon_1, q_1)$ , причём  $S[\varepsilon_1, q_1] \subset S[\varepsilon, q]$ . В силу устойчивости  $P^+$  движения  $g(t, q)$  такой элемент  $q_2$  всегда найдется. Так как по допущению  $g(t, q)$  непериодично, то очевидно  $q_2 \notin g(-t_2 \leq t \leq t_2, q)$  и  $a_2 = \rho[g(-t_2 \leq t \leq t_2, q), q_2] > 0$ . Продолжая этот процесс, будем иметь  $\omega$ -последовательность  $\{s_k\}$  моментов времени и соответствующих им точек  $\{q_k\}$  траектории  $g(R_1^+, q)$  движения  $g(t, q)$ , такую, что  $\forall k \in \mathbb{N}, s_k > t_k, q_k \notin g(-t_k \leq t \leq t_k, q)$  и  $a_k = \rho[g(-t_k \leq t \leq t_k, q), q_k] > 0$ . При этом также имеем последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров  $\{S[\varepsilon_k, q_k]\} - S[\varepsilon, q] \supset S[\varepsilon_1, q_1] \supset \dots \supset S[\varepsilon_k, q_k] \supset \dots$ , радиусы которых стремятся к нулю быстрее чем  $\varepsilon/2^k$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . В силу полноты пространства  $R_m$  найдется единственная точка  $q^* \in R_m$ , принадлежащая одновременно всем этим шарам  $S[\varepsilon_k, q_k]$  и являющаяся  $\omega$ -предельной точкой последовательности  $\{q_k\}$  и не принадлежащая замкнутой траектории  $g(R_1, q)$ . Полученное противоречие и доказывает Предложение 7.2.

**Предложение 7.3.** Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $P$ , то каждое движение  $g(t, p)$ , начинающееся в точках множества  $g(R_1, q)$ , устойчиво  $P$ .

Доказательство. Пусть  $p$  — произвольная точка множества  $g(R_1, q)$ . Если  $p \in g(R_1, q)$ , то Предложение 7.3 уже доказано. Поэтому рассмотрим точку  $p \in g(R_1, q) \setminus g(R_1, q)$ . Если такого элемента  $p$  не существует, то согласно Предложению 7.2 движение  $g(t, q)$  периодически и Предложение 7.3 также доказано. Итак,  $g(R_1, q) \setminus g(R_1, q) \neq \emptyset$  и  $p \in g(R_1, q) \setminus g(R_1, q)$ . Тогда су-

существует такая  $\alpha$ -последовательность  $\{t_k\}$ , что  $p = \lim_{k \rightarrow \infty} g(t_k, q)$ .

В силу устойчивости  $\Pi$  движения  $g(t, q)$  найдется такая  $\alpha$ -последовательность  $\{s_i\}$ , что  $q = \lim_{i \rightarrow \infty} g(s_i, q)$ . Рассмотрим последо-

вательность точек  $\{g(t_k, g(s_i, q))\}$  траектории  $g(R_1, q)$ . Согласно выбору последовательностей  $\{t_k\}$  и  $\{s_i\}$  имеет место равенство  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(t_k, \lim_{i \rightarrow \infty} g(s_i, q)) = p$ , так что последовательность

$\{g(t_k, g(s_i, q))\}$  имеет предел. Следовательно, множество  $\{g(t_k, g(s_i, q))\}$  компактно в  $R_m$ . По свойствам динамической системы  $g(t_k, g(s_i, q)) \equiv g(s_i, g(t_k, q))$ . Поэтому из  $\{g(s_i, g(t_k, q))\}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Сохраним прежние обозначения. Тогда по теореме единственности предела  $p = \lim_{k \rightarrow \infty} g(s_k, \lim_{k \rightarrow \infty} g(t_k, q)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(s_k, p)$  и точка  $p$  устойчива  $\Pi^-$ .

Аналогично доказывается, что точка  $p$  устойчива  $\Pi^+$ . В силу произвольности точки  $p$  Предложение 7.3 доказано.

Таким образом, применительно к устойчивым  $\Pi$  движениям системы  $n$  тел, теорема Пуанкаре — Каратеодори уточняется: в замыкании траектории устойчивого  $\Pi$  движения системы  $G_n$  нет ни одной неустойчивой  $\Pi$  точки.

Предложение 7.4. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $\Pi^-$ , то для каждого  $\alpha$ -предельного элемента  $p$  траектории  $g(R_1, q)$  движения  $g(t, p)$  устойчиво  $\Pi$ .

Доказательство. Пусть  $p$  — произвольный  $\alpha$ -предельный элемент траектории  $g(R_1, q)$ . Если  $p \in g(R_1, q)$ , то движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\Pi^-$ . Тогда, по Предложению 2.8 гл. II движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\Pi$  и вместе с ним устойчиво  $\Pi$  движение  $g(t, p)$ . Пусть  $p \in W(\alpha, g, q)$  и  $p \notin g(R_1, q)$ . Так как множество  $W(\alpha, g, q)$  компактно и инвариантно, то множество  $\overline{g(R_1, p)} \subset W(\alpha, g, q)$  также компактно. Предложение 7.4 доказано.

Рассмотрим устойчивое  $\Pi^-$  движение  $g(t, q)$ . Тогда множество  $g(R_1^-, q)$  компактно. Как известно, для каждого непрерывного отображения компактного метрического пространства в себя существует нормированная мера  $\mu$ , инвариантная относительно этого отображения [57]. Поэтому существует инвариантная относительно  $g(t, q)$  мера  $\mu$ , определенная на  $\sigma$ -алгебре подмножеств множества  $g(R_1^-, q)$ . По теореме Пуанкаре — Каратеодори, мера неустойчивых  $\Pi^-$  точек множества  $\overline{g(R_1^-, q)}$  равна нулю. Так как множество устойчивых  $\Pi$  точек из  $\overline{g(R_1^-, q)}$  плотно в  $\overline{g(R_1^-, q)}$ , то согласно Предложению 7.3 движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\Pi^-$ . Итак, справедливо

Предложение 7.5. Если движение системы  $G_n$  устойчиво  $\Pi^-$ , то оно устойчиво  $\Pi$  и устойчиво  $\Pi$ .

Доказательство. Устойчивость  $\Pi^-$  движения  $g(t, q)$  доказана выше. Поэтому согласно Предложению 2.8 гл. II движение  $g(t, q)$  устойчиво  $\Pi^+$ . Тогда движение  $g(t, q)$  и устойчиво  $\Pi^+$ . Предложение 7.5. доказано.

Предложение 7.6. Если движение  $g(t, q)$  системы  $G_n$  устойчиво  $L^-$ , то кинетическая энергия  $T[g(t, q)]$  рекуррентна.

Доказательство. Согласно Предложению 7.5 движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$  и устойчиво  $П$ . Поэтому функция  $T(t)$  устойчива  $П$ . Вместе с ней устойчива  $П$  функция  $Q(t)$  и множество  $R_\varepsilon(Q)$  относительно плотно в  $R_1$  для каждого  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, множество  $R_\varepsilon(g)$ , содержащее в себе  $R_\varepsilon(Q)$ , также относительно плотно в  $R_1$ . Тогда  $g(t, q)$  рекуррентно и вместе с ним рекуррентна функция  $T[g(t, q)]$ .

Из доказанного Предложения вытекает, что если движение  $g(t, q)$  устойчиво  $L$ , то кинетическая энергия вдоль траектории этого движения минимальна по Биркгофу и ограничена. Это означает, что минимальность по Биркгофу кинетической энергии системы  $n$  тел является необходимым условием устойчивости по Лагранжу ее движения.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию устойчивого  $L^-$  движения планетной системы, предварительно исключив переменные  $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, \omega_1$  при помощи инвариантных соотношений (3.1.4) и обозначив решение через  $\tilde{g}(t, \tilde{q})$ . По доказанному выше движение  $\tilde{g}(t, q)$  рекуррентно. Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $l(\varepsilon) > 0$ , что дуга  $\tilde{q}(0 \leq t \leq l, q)$  с точностью до  $\varepsilon$  аппроксимирует всю траекторию  $\tilde{g}(R_1, q)$ . Также найдутся такие  $k_i \in \mathbb{N}$ , что равенства  $l = k_i l_i$  будут выполняться с точностью до  $\varepsilon$ . При этом дуга  $x_i(0 \leq t \leq l_i, q)$  аппроксимирует траекторию  $i$ -й планеты. Учитывая это и вводя средние движения  $\Omega_i = 2\pi/l_i$ , получим соотношение  $s_2 \Omega_2 + s_3 \Omega_3 + \dots + s_n \Omega_n = 0$ , которое эквивалентно выражению  $s_2 k_2 + s_3 k_3 + \dots + s_n k_n = 0$ , где  $s_i$  — целые числа, не равные одновременно. Так как все  $k_i$  — целые числа, то для пары индексов  $i, j$  ( $i \neq j = 2, 3, \dots, n$ ) можно подобрать минимальные целые числа  $s_i^0, s_j^0$  так, чтобы  $s_i^0 k_i + s_j^0 k_j = 0$  и положить все остальные  $s_i$  равными нулю. Указанные равенства будут сохраняться. Сказанное можно проделать относительно любой тройки индексов  $(i, j, k)$ , а также для любого набора индексов  $i = 2, \dots, n$ . Таким образом, если движение планетной системы рекуррентно, то средние движения ее планет, определенные с точностью до  $\varepsilon$ , в пределах этой точности соизмеримы между собой.

В связи с рекуррентными движениями отметим теорему, принадлежащую Хильми [82].

**Теорема.** Если движение  $g(t, q)$  и фазовое пространство  $R_m$  рекуррентны, то минимальное множество  $\tilde{g}(R_1, q)$  содержится в подпространстве размерности не выше  $m-1$ .

Эта теорема позволяет сформулировать

Предложение 7.7. Если движение  $g(t, q)$  планетной системы  $G_n$  устойчиво  $L^-$ , то множество  $\tilde{g}(R_1, \tilde{q})$  минимально и вкладывается в подпространство размерности не выше чем  $m-2$ .

## 8. Физическая интерпретация результатов

Отметим основные результаты, полученные в данной главе, и изложим их физическую интерпретацию.

В работах Пуанкаре по качественным методам небесной механики и космогонии наиболее важное место занимает теория динамических систем, обладающих интегральным инвариантом. Дальнейшее развитие теории динамических систем исходило из общих позиций и нередко не была связана с конкретными проблемами механики.

В связи с этим уместно вспомнить слова М. Ф. Субботина: «В небесной механике особенно велика опасность подмены естественнонаучных проблем чисто формальными математическими задачами, примеры чему мы имеем и в прошлом и в настоящем. Математические орудия должны быть здесь подчинены целям, которым они служат» [75, с. 76].

Излагая в настоящей и предшествующей главах общую теорию динамических систем в применении к задаче  $n$  тел, мы пытались как-то воспользоваться гладкостью искомого решения и возможно полнее использовать априорные сведения о движении, вытекающие из законов сохранения. Такие попытки естественны, ибо они следуют из того факта, что уравнения движения получаются либо из второго закона Ньютона, либо из принципов механики, в которых участвуют вторые производные по времени искомым величин. Учет этих факторов в некоторой степени облегчает качественные исследования движения в задаче  $n$  тел. Сформулируем основные результаты в виде отдельных критериев.

На вопрос, при каких условиях движение системы  $n$  тел можно исследовать методами теории динамических систем, отвечает

Критерий динамической системы в системе движений  $n$  тел. Система движений  $n$  тел  $\{g(t, q) | q \in M \subset R_m\}$  является динамической системой тогда и только тогда, когда вдоль траектории  $g(R_1, q)$  каждого из движений  $(g(t, q), q \in M)$  за конечное время не происходит соударения этих тел.

В теоретическом и прикладном отношениях исключительный интерес представляет описание возможных типов эволюции системы  $G_n$  в будущем. При этом необходимо ответить на вопрос, как сочетаются известные прошлые и искомые будущие режимы движения системы  $n$  тел. В связи с этим сформулируем

Критерий устойчивости по Лагранжу движения системы  $n$  тел с известным в прошлом режимом. Движение системы  $G_n$  устойчиво по Лагранжу в будущем тогда и только тогда, когда это движение устойчиво по Лагранжу в прошлом.

При этом движение системы  $G_n$  равномерно возвращаемо по времени, так как имеет место

Критерий рекуррентности движения системы  $n$  тел с известным в прошлом режимом.

Движение системы  $G_n$  рекуррентно тогда и только тогда, когда это движение устойчиво по Лагранжу в прошлом.

Этот критерий позволяет обобщить теорему Пуанкаре—Кратеодори о возвращаемости движения в фазовом пространстве с инвариантной относительно динамической системы мерой. Обобщение формулируется следующим образом. Если множество фазового пространства  $R_m$  системы  $n$  тел, представляющее объединение отрицательных полутраекторий  $\{g(R_1^-, q) | q \in A, 0 < \mu A < \infty\}$ , ограничено и инвариантно относительно динамической системы движений  $G_n$ , то мера и мощность неустойчивых по Пуассону движений системы  $G_n$  равны нулю.

В связи с вопросом об устойчивости по Лагранжу движения системы  $n$  тел отметим существование ограниченных в прошлом и неограниченных в будущем, а также неограниченных в прошлом и ограниченных в будущем движений системы  $G_n$  [4, 71]. Следует подчеркнуть, что *ограниченными в прошлом и ограниченными в будущем* называются такие движения системы  $n$  тел, когда взаимные расстояния между ее телами ограничены по совокупности при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Следовательно, устойчивые по Лагранжу движения являются ограниченными, хотя ограниченные движения могут и не быть устойчивыми по Лагранжу. Поэтому из критерия устойчивости по Лагранжу движений вытекает следующий вывод: *в классе ограниченных движений системы  $n$  тел одинаковые прошлые и будущие режимы имеют устойчивые по Лагранжу и только устойчивые по Лагранжу движения.*

Как известно, вопросы о взаимных связях движения механической системы с ее кинетической энергией занимают центральное место в качественном анализе финальных режимов движения. В этом плане здесь получен следующий основной результат: *если движение системы  $n$  тел устойчиво по Лагранжу в прошлом, то это движение и кинетическая энергия системы как функции времени взаимно сравнимы в смысле возвращаемости по времени к их начальным значениям.* Таким образом, взаимная сравнимость по возвращаемости движения и кинетической энергии системы  $n$  тел является необходимым условием ее устойчивости по Лагранжу.

Установлено следующее: *если движение системы  $n$  тел устойчиво по Лагранжу, то постоянная энергии системы отрицательна; множество моментов времени, в которых кинетическая энергия и постоянная энергии системы по величине отличаются не более чем на данное число  $\varepsilon > 0$ , относительно плотно на оси времени; множество моментов времени, в которых кинетическая энергия равна величине постоянной энергии системы, не менее чем счетно.*

Устойчивым режимам движения любой механической системы, как правило, отвечают стационарные (экстремальные) значения ее кинетической энергии. В задаче  $n$  тел устойчивые по Лагранжу движения характеризуются такими свойствами кинетической энергии:

тической энергии, как ограниченность и «минимальность». А именно, *если движение системы  $n$  тел устойчиво по Лагранжу, то ее кинетическая энергия ограничена и минимальна по Биркгофу*. Поэтому ограниченность и минимальность по Биркгофу кинетической энергии системы является необходимым условием ее устойчивости по Лагранжу.

Все перечисленные результаты остаются в силе для более узких классов движений, таких как почти периодические (условно-периодические) и периодические. При этом рекуррентные движения содержат указанные типы движений.

Если принять на основании Предложения 3.1 устойчивую по Лагранжу в прошлом модель Солнечной системы, то для этой модели имеет место следующий окончательный вывод: *движение Солнечной системы рекуррентно и равномерно по времени возвращается в ее начальное состояние с любой заданной наперед степенью точности, ее кинетическая энергия ограничена и минимальна по Биркгофу*.

В связи с этим примечательно высказывание Л. Эйлера [96, с. 447]: «...В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума, поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как из самих причин производящих». И далее: «Так как тела в силу инерции сопоставляются всякому изменению состояния, то и они, если только будут свободны, будут насколько возможно меньше подчиняться действующим силам; отсюда вытекает, что в порожденном движении эффект, произведенный силами, должен быть меньшим, чем если бы тела двигались каким-либо иным способом» [96, с. 593].

# Закономерности вращения Земли и орбитального движения тел Солнечной системы

Солнечная система содержит наряду с материальными точками — Луной, Солнцем и большими планетами — абсолютно твердое тело — Землю. Ниже в рамках этой модели рассматриваются закономерности орбитального движения небесных тел и вращательного движения Земли. Вводятся основные системы координат, в которых исследуется вращение Земли, кинематические и динамические уравнения поступательно-вращательного движения этих тел. Для удобства анализа используется различная форма записи дифференциальных уравнений. Качественное исследование движения тел Солнечной системы основано на свойствах силовой функции ньютоновского взаимного притяжения. Поэтому приведены основные известные, а также некоторые дополнительные свойства силовой функции задачи. Описан процесс аппроксимации силовой функции притяжения Земли потенциалом притяжения системы жестко связанных между собой материальных точек, число которых определяется заданной точностью аппроксимации. Такая аппроксимация позволяет воспользоваться методами теории динамических систем, указанными в гл. II, III и примененными в задаче  $n$  тел, для исследования Солнечной системы. Согласно теореме Арнольда регулярную часть множества рекуррентных движений тел Солнечной системы составляют ее условно-периодические движения. На этом основании далее проводится классификация компонент решения уравнений движения тел Солнечной системы как функции времени. В этих классах функций описывается предельное множество решения уравнений движения тел Солнечной системы, и в нем выделяется  $\omega$ -предельный режим вращения Земли. Особо выделен процесс выхода на указанный предельный режим, порождающий вековые вариации элементов вращательного движения Земли.

Основная цель настоящей главы заключается в исследовании вековых вариаций элементов вращения Земли и определении периодических вариаций элементов вращения Земли через фундаментальные постоянные прецессии и нутации земной оси. Рассматриваются также элементы динамики и эволюции движения Солнечной системы в целом и изолированной от нее механической системы Земля—Луна в связи с анализом векового

удаления Луны от Земли и регрессии лунного узла. Изложение заканчивается исследованием условий выхода траекторий тел Солнечной системы к положению неизменяемой плоскости Лапласа.

## 1. Выбор систем отсчета. Кинематические уравнения вращательных движений Земли

Введем инерциальную правую прямоугольную систему координат  $O^*\xi\eta\zeta$  с началом в центре масс  $O^*$  Солнечной системы и неизменными направлениями осей. Совместим координатную плоскость  $O^*\xi\eta$  с неизменяемой плоскостью Лапласа так, чтобы ось  $O^*\zeta$ , являющаяся нормалью к этой плоскости, была направлена по вектору кинетического момента Солнечной системы относительно точки  $O^*$ .

Введем две кениговы системы  $O_1X'Y'Z'$  и  $OXYZ$ , гелиоцентрическую и геоцентрическую, с началами  $O_1$  и  $O$  в центрах масс Солнца и Земли соответственно, а их координатные оси направим параллельно одноименным осям инерциальной системы  $O^*\xi\eta\zeta$ .

Введем систему  $Oxyz$  главных центральных осей инерции Земли, причем ось  $Oz$  соответствует полярной. Систему  $Oxyz$  будем называть собственной системой Земли. Такое название относятся к системам отсчета, жестко связанным с рассматриваемым объектом [11, 70].

Наконец, введем в рассмотрение квазикенигову систему  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  также с началом в центре масс Земли. Ось  $O\bar{Z}$  направлена по вектору  $\mathbf{K}$  кинетического момента вращательного движения Земли, ось  $O\bar{X}$  перпендикулярна плоскости осей  $OZ$ ,  $O\bar{Z}$  и направлена по положительному направлению поворота от  $OZ$  к  $O\bar{Z}$  [26, 28]. Система отсчета  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  в отсутствие внешних сил обращается в кенигову.

Взаимное положение осей приведенных систем координат с общим началом  $O$  задано посредством углов Эйлера (1.2.1) — (1.2.3) (см. рис. 1.4,  $a-\beta$ ).

Заметим, что углы  $\psi'$ ,  $\theta'$  (из числа переменных Андуайе) описывают прецессию и нутацию вектора  $\mathbf{K}$ , определяя ориентацию координатной плоскости  $O\bar{X}\bar{Y}$  относительно системы отсчета  $OXYZ$ .

Введем матрицу  $A_1$  направляющих косинусов координатных осей систем  $OXYZ$  и  $Oxyz$

$$\begin{aligned} \cos(x, X) &= a_x, & \cos(x, Y) &= b_x, & \cos(x, Z) &= c_x, \\ \cos(y, X) &= a_y, & \cos(y, Y) &= b_y, & \cos(y, Z) &= c_y, \\ \cos(z, X) &= a_z, & \cos(z, Y) &= b_z, & \cos(z, Z) &= c_z, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_x &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ b_x &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, & c_x &= \sin \psi \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_y &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\
 b_y &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, & c_y &= \cos \varphi \sin \theta, \\
 a_z &= \sin \psi \sin \theta, & b_z &= -\cos \psi \sin \theta, & c_z &= \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.2}$$

Обозначим  $A_2$  и  $A_3$  матрицы направляющих косинусов координатных осей систем  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  и  $Ox_1y_1z_1$ ,  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  и  $OXYZ$  соответственно:

$$\begin{aligned}
 \cos(x, \bar{X}) &= \alpha_x, & \cos(x, \bar{Y}) &= \beta_x, & \cos(x, \bar{Z}) &= \gamma_x, \\
 \cos(y, \bar{X}) &= \alpha_y, & \cos(y, \bar{Y}) &= \beta_y, & \cos(y, \bar{Z}) &= \gamma_y, \\
 \cos(z, \bar{X}) &= \alpha_z, & \cos(z, \bar{Y}) &= \beta_z, & \cos(z, \bar{Z}) &= \gamma_z, \\
 \cos(\bar{X}, X) &= a_x, & \cos(\bar{X}, Y) &= b_x, & \cos(\bar{X}, Z) &= c_x, \\
 \cos(\bar{Y}, X) &= a_y, & \cos(\bar{Y}, Y) &= b_y, & \cos(\bar{Y}, Z) &= c_y, \\
 \cos(\bar{Z}, X) &= a_z, & \cos(\bar{Z}, Y) &= b_z, & \cos(\bar{Z}, Z) &= c_z.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.3}$$

Элементы матрицы  $A_2$  могут быть получены из соотношений (4.1.2) непосредственной заменой (1.2.1) углами (1.2.2).

Элементы матрицы  $A_3$  также определяются из соотношений (4.1.2) заменой  $\varphi, \psi, \theta$  на  $\varphi', \psi', \theta'$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 a_x &= \cos \psi', & a_y &= -\cos \theta' \sin \psi', & a_z &= \sin \theta' \sin \psi', \\
 b_x &= \sin \psi', & b_y &= \cos \theta' \cos \psi', & b_z &= -\sin \theta' \cos \psi', \\
 c_x &= 0, & c_y &= \sin \theta', & c_z &= \cos \theta'.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.4}$$

Матрицы  $A_1, A_2, A_3$  имеют определители

$$\begin{aligned}
 \det A_1 &= \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 1, & \det A_2 &= \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{vmatrix} = 1, \\
 \det A_3 &= \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 1
 \end{aligned}
 \tag{4.1.5}$$

и связаны очевидным равенством

$$A_1 = A_2 A_3,
 \tag{4.1.6}$$

которое расписывается по правилам умножения матриц

$$\begin{aligned}
 a_x &= \alpha_x a_x + \beta_x a_y + \gamma_x a_z, & a_y &= \alpha_y a_x + \beta_y a_y + \gamma_y a_z, \\
 b_x &= \alpha_x b_x + \beta_x b_y + \gamma_x b_z, & b_y &= \alpha_y b_x + \beta_y b_y + \gamma_y b_z, \\
 c_x &= \alpha_x c_x + \beta_x c_y + \gamma_x c_z, & c_y &= \alpha_y c_x + \beta_y c_y + \gamma_y c_z, \\
 a_z &= \alpha_z a_x + \beta_z a_y + \gamma_z a_z, \\
 b_z &= \alpha_z b_x + \beta_z b_y + \gamma_z b_z, \\
 c_z &= \alpha_z c_x + \beta_z c_y + \gamma_z c_z.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.7}$$

Из соотношений (4.1.7), в частности, вытекают выражения для углов Эйлера (1.2.1):

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{\alpha_z a_x + \beta_z a_y + \gamma_z a_z}{\alpha_z b_x + \beta_z b_y + \gamma_z b_z},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha_x c_x + \beta_x c_y + \gamma_x c_z}{\alpha_y c_x + \beta_y c_y + \gamma_y c_z}, \quad (4.1.8)$$

$$\theta = \arccos(\alpha_z c_x + \beta_z c_y + \gamma_z c_z),$$

правые части которых зависят от переменных Андуайе (1.2.2), (1.2.3).

Учитывая (4.1.5), из (4.1.7) получим

$$A_2 = A_1 A_3^{-1}, \quad A_3 = A_2^{-1} A_1, \quad (4.1.9)$$

где  $A_2^{-1}$ ,  $A_3^{-1}$  — матрицы, обратные  $A_2$  и  $A_3$ .

Из соотношений (4.1.9) можно получить аналогичные (4.1.8) выражения углов (1.2.2), (1.2.3) через другие группы углов Эйлера (1.2.1) — (1.2.3).

Таким образом, введенные системы отсчета заданы простыми формулами взаимных переходов. Последние однозначны, если отличны от нуля угловые переменные  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\theta'$ .

Для вывода кинематических уравнений выпишем полный комплект переменных Андуайе:

$$K, \psi', \theta', \quad (4.1.10)$$

$$\bar{\psi}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}. \quad (4.1.11)$$

Здесь переменные (4.1.10) задают модуль  $K$  и ориентацию вектора кинетического момента вращательного движения Земли в пространстве, а (4.1.11) — взаимное положение систем координат  $Oxyz$  и  $OXYZ$ .

Сохраняя стандартные обозначения  $p$ ,  $q$ ,  $r$  проекций вектора угловой скорости вращения Земли на координатные оси собственной системы Земли  $Oxyz$ , обратимся к кинематическим уравнениям Эйлера (1.2.11).

С учетом обозначения ортов координатных осей систем  $Oxyz$ ,  $OXYZ$ ,  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  и линий узлов  $L$ ,  $R$  вектор  $\omega$  угловой скорости вращения Земли можно представить двояко:

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} \mathbf{e}_z + \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_z + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}, \quad (4.1.12)$$

$$\omega = \frac{d\bar{\psi}}{dt} \mathbf{k}_z + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \mathbf{e}_z + \frac{d\bar{\theta}}{dt} \mathbf{k} + \frac{d\psi'}{dt} \mathbf{e}_z + \frac{d\theta'}{dt} \mathbf{k}_x. \quad (4.1.13)$$

Проекции векторного уравнения (4.1.12) на координатные оси собственной системы Земли дают кинематические уравнения (1.2.11), а проекции уравнений (4.1.13) на те же оси — группу

кинематических уравнений вида [31, 32]

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{d\bar{\psi}}{dt} \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} + \frac{d\bar{\theta}}{dt} \cos \bar{\varphi} + \\
 &+ \frac{d\psi'}{dt} (\alpha_x c_X + \beta_x c_Y + \gamma_x c_Z) + \frac{d\theta'}{dt} \alpha_x, \\
 q &= \frac{d\bar{\psi}}{dt} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} - \frac{d\bar{\theta}}{dt} \sin \bar{\varphi} + \\
 &+ \frac{d\psi'}{dt} (\alpha_y c_X + \beta_y c_Y + \gamma_y c_Z) + \frac{d\theta'}{dt} \alpha_y, \\
 r &= \frac{d\bar{\psi}}{dt} \cos \bar{\theta} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + \frac{d\psi'}{dt} (\alpha_z c_X + \beta_z c_Y + \gamma_z c_Z) + \frac{d\theta'}{dt} \alpha_z.
 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Главные центральные моменты инерции Земли:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_V \rho (y^2 + z^2) dV, & B &= \int_V \rho (x^2 + z^2) dV, \\
 C &= \int_V \rho (x^2 + y^2) dV.
 \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

При этом центробежные моменты инерции Земли  $D, E, F$  выражаются интегралами

$$D = \int_V \rho yz dV, \quad E = \int_V \rho xz dV, \quad F = \int_V \rho xy dV \tag{4.1.16}$$

и

$$D=0, \quad E=0, \quad F=0. \tag{4.1.17}$$

Величины (4.1.15) постоянны и удовлетворяют неравенствам

$$A < B < C. \tag{4.1.18}$$

В соотношения (4.1.15), (4.1.16) входят неизвестные плотность  $\rho$  и объем  $V$  Земли. Полагаем, что на эти соотношения наложены некоторые условия, обеспечивающие существование интегралов (4.1.15), (4.1.16). Сформулируем эти условия, а также окончательные требования к функции  $\rho$  и области  $V$ .

В отличие от динамически симметричной Земли, где справедливо условие

$$A = B < C, \tag{4.1.19}$$

главные моменты инерции динамически асимметричной Земли удовлетворяют неравенству (4.1.18).

Обозначим проекции вектора  $\mathbf{K}$  на координатные оси собственной системы  $K_x, K_y, K_z$ . Тогда

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cr \tag{4.1.20}$$

и, следовательно,

$$p = K\gamma_x/A, \quad q = K\gamma_y/B, \quad r = K\gamma_z/C. \tag{4.1.21}$$

Подставим выражения (4.1.21) в левые части (4.1.14) и разрешим их относительно скоростей изменения углов (2.1.2):

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = K \left( \frac{\sin^2 \bar{\varphi}}{A} + \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{B} \right) - \frac{d\psi'}{dt} \frac{\cos \bar{\psi} \cos \bar{\theta} \sin \theta' + \sin \bar{\theta} \cos \theta'}{\sin \bar{\theta}} + \frac{d\theta'}{dt} \frac{\sin \bar{\psi} \cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}}, \quad (4.1.22)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = K \cos \bar{\theta} \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \bar{\varphi}}{B} - \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{B} \right) + \frac{d\psi'}{dt} \frac{\cos \bar{\psi} \sin \theta'}{\sin \bar{\theta}} - \frac{d\theta'}{dt} \frac{\sin \bar{\psi}}{\sin \bar{\theta}},$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = K \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{d\psi'}{dt} \sin \bar{\psi} \sin \theta' - \frac{d\theta'}{dt} \cos \bar{\psi}.$$

С учетом (4.1.22) приравняем правые части кинематических уравнений (1.2.11), (4.1.14). Разрешим полученные уравнения относительно скоростей изменения углов Эйлера (1.2.1):

$$\begin{aligned} d\psi'/dt &= K (c_x \gamma_x / A + c_y \gamma_y / B), \\ d\varphi'/dt &= K [\gamma_z / C - c_z (c_x \gamma_x / A + c_y \gamma_y / B)], \\ d\theta'/dt &= K (c_x \gamma_y / A - c_y \gamma_x / B). \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Таким образом, углы Эйлера (4.1.1) и скорости их изменения во времени выражены через переменные Андуайе (4.1.10), (4.1.11) посредством соотношений (4.1.8) и (4.1.23).

Обозначив через  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{r}$  проекции вектора  $\omega$  на координатные оси  $O\bar{X}$ ,  $O\bar{Y}$ ,  $O\bar{Z}$  системы  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  соответственно и спроектировав равенство (4.1.13) на эти оси, придем к следующим кинематическим уравнениям:

$$\bar{p} = \frac{d\theta'}{dt}, \quad \bar{q} = \frac{d\psi'}{dt} \sin \theta', \quad \bar{r} = \frac{d\psi'}{dt} \cos \theta'. \quad (4.1.24)$$

Угол между вектором  $\omega$  и осью  $Oz$

$$\bar{\gamma} = \arccos(r/\omega). \quad (4.1.25)$$

Пусть  $\bar{\alpha}$  — угол между  $K$  и  $\omega$ . Запишем с учетом условия (1.3.1) выражения

$$\begin{aligned} \cos \bar{\alpha} &= K \cdot \omega / K\omega = [(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 / K\omega)] > 0, \\ \cos \bar{\theta} &= K \cdot e / K = Cr / K > 0, \\ \cos \bar{\gamma} &= \omega \cdot e / \omega = r / \omega > 0. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq \bar{\alpha} < \pi/2, \quad 0 \leq \bar{\theta} < \pi/2, \quad 0 \leq \bar{\gamma} < \pi/2, \quad (4.1.27)$$

т. е. во все время вращения Земли углы  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\alpha}$  остаются острыми.

Проводя оценку разностей

$$\cos^2 \bar{\alpha} - \cos^2 \bar{\theta} = K^{-2} \omega^{-2} \{ (Ap^2 + Bq^2)^2 + C^2 r^2 [ (2A - C)p^2 + (2B - C)q^2 ] \} \geq 0, \quad (4.1.28)$$

$$\cos^2 \bar{\theta} - \cos^2 \bar{\gamma} = K^{-2} \omega^{-2} r^2 [ (C^2 - A^2)p^2 + (C^2 - B^2)q^2 ] \geq 0$$

с учетом (4.1.26), (4.1.27), нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\theta} \leq \bar{\gamma}. \quad (4.1.29)$$

Величины  $(2A - C)$ ,  $(2B - C)$ , входящие в (4.1.28), положительны; это вытекает из свойств главных центральных моментов инерции Земли (4.1.15).

Соотношения (4.1.29) показывают, что полярная ось инерции  $Oz$  и мгновенная ось вращения Земли располагаются по разные стороны от плоскости, проходящей через вектор  $\mathbf{K}$  перпендикулярно плоскости векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{e}_z$ . Причем такое положение имеет место во все время движения Земли.

Рассмотрим смешанное произведение векторов  $\mathbf{e}_z$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{K}$

$$[\mathbf{e}_z, \boldsymbol{\omega}] \cdot \mathbf{K} = (B - A) pq \neq 0. \quad (4.1.30)$$

Очевидно, что для динамически симметричной Земли (4.1.19) оно равно нулю и указывает на компланарность векторов  $\mathbf{e}_z$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{K}$ . Для динамически асимметричной Земли (4.1.18) произведение (4.1.30) отлично от нуля, если только  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$ . Следовательно, в этом случае при  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  векторы  $\mathbf{e}_z$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{K}$  не лежат в одной плоскости, образуя некоторый трехгранник. Такая картина, вытекающая из кинематических соотношений, дает наглядное представление о вращательном движении Земли.

На рис. 4.1 показаны взаимные положения оси инерции  $Oz$ , мгновенной оси вращения  $\boldsymbol{\omega}$  и оси  $O\bar{Z}$  вектора  $\mathbf{K}$  и описываемые этими осями при вращении Земли соответствующие конические поверхности.

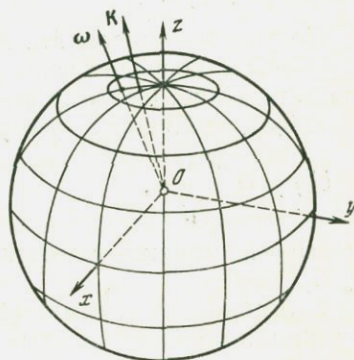


Рис. 4.1. Схема расположения осей  $Oz$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{K}$

## 2. Силовая функция Солнечной системы

Теория ньютоновского потенциала абсолютно твердого тела с интегрируемой плотностью и его основные свойства изложены в [24, 73, 76, 126]. Перечислим известные свойства силовой

функции Солнечной системы, затем сформулируем некоторые ее дополнительные свойства, необходимые для исследования и решения задач общей теории вращения Земли.

Тела Солнечной системы — Солнце  $O_1$ , большие планеты  $O_2, O_3, \dots, O_{k-2}$ , Луна  $O_{k-1}$  и Земля  $O_k$  с массами  $M_1, M_2, \dots, M_k$  взаимно притягиваются по закону Ньютона. Их взаимодействие описывается силовой функцией

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k U_{ij}. \quad (4.2.1)$$

По условию массы  $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}$  внешних по отношению к Земле тел сосредоточены в их центрах масс  $O_1, O_2, \dots, O_{k-1}$  соответственно. Поэтому функции  $U_{ij}$  с индексами  $i=j=1, 2, \dots, k-1, i \neq j$ , входящие в сумму (4.2.1), имеют вид

$$U_{ij} = G \frac{M_i M_j}{r_{ij}}, \quad (4.2.2)$$

где  $G$  — постоянная тяготения,  $r_{ij}$  — расстояние между точками  $O_i, O_j$ .

Слагаемое  $U_{kj}$  суммы (4.2.1) является потенциалом тяготения Земли (геопотенциал):

$$U_{kj} = GM_k M_j \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r_{kj}} \right)^n P_n(\cos \chi_j) J_n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r_{kj}} \right)^n P_{nm}(\cos \chi_j) [C_{nm} \cos m\lambda_j - S_{nm} \sin m\lambda_j] \right\}. \quad (4.2.3)$$

Здесь  $P_n, P_{nm}$  — обычные и присоединенные полиномы Лежандра, последовательность которых полна и ортогональна на отрезке  $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 P_n(\tau) P_m(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2/(2n+1), & n = m, \end{cases} \quad (4.2.4)$$

$$\int_{-1}^1 P_{nm}(\tau) P_{lm}(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & n \neq l, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = l. \end{cases}$$

В выражениях (4.2.3)  $a_E$  — радиус минимальной сферы  $S_E$  с центром в точке  $O_k$ , целиком охватывающей Землю;  $r_{kj}, \lambda_j, \chi_j$  — координаты точки  $O_j$  в сферической системе  $Or\lambda\chi$ , связанные с ее декартовыми координатами  $x_j, y_j, z_j$  в системе  $Oxyz$  соотношениями

$$x_j = r_{kj} \sin \chi_j \cos \lambda_j, \quad y_j = r_{kj} \sin \chi_j \sin \lambda_j, \quad z_j = r_{kj} \cos \chi_j. \quad (4.2.5)$$

Коэффициенты разложения функции  $U_{kj}$  в ряд (4.2.3) выражаются соотношениями [53, 109]

$$\begin{aligned}
 J_n &= - \frac{1}{Ma_E^n} \int_V \rho r^n P_n(\cos \chi) dV, \\
 C_{nm} &= \frac{1}{Ma_E^n} \int_V \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \rho r^n P_{nm}(\cos \chi) \cos m\lambda dV, \\
 S_{nm} &= \frac{1}{Ma_E^n} \int_V \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \rho r^n P_{nm}(\cos \chi) \sin m\lambda dV,
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

где  $r, \lambda, \chi$  — координаты текущей точки объема  $V$  Земли.

Считаем, что плотность  $\rho(r, \lambda, \chi)$  является интегрируемой функцией координат  $r, \lambda, \chi$  и обеспечивает существование тройных интегралов (4.1.19) и (4.2.6).

Ряд (4.2.3) в каждой точке пространства вне области, ограниченной сферой  $S_E$  радиуса  $a_E$ , сходится абсолютно и равномерно, так как верна оценка [24, 39]

$$|W_l| \leq G \frac{M_k M_j}{r_{kj}} \left( \frac{a_E}{r_{0j}} \right)^l \left( 1 - \frac{a_E}{r_{0j}} \right)^{-1}. \tag{4.2.7}$$

Здесь  $W_l$  выражает сумму остатка ряда (4.2.3), начинающегося членами с номером  $l+1$ , т. е.

$$\begin{aligned}
 W_l &= GM_k M_j \left[ \sum_{n=l+1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r_{kj}} \right)^n P_n(\cos \chi) J_n + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=l+1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_E}{r_{kj}} \right)^n P_{nm}(\cos \chi) (C_{nm} \cos m\lambda_j + S_{nm} \sin m\lambda_j) \right].
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Пусть  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  и  $X_i, Y_i, Z_i$  — координаты центров масс  $O_1, O_2, \dots, O_h$  тел  $M_1, M_2, \dots, M_h$  в инерциальной  $O^*\xi\eta\zeta$  и кениговой  $OXYZ$  системах отсчета соответственно. Кениговы координаты тела  $M_i$  через его инерциальные координаты равны

$$X_i = \xi_i - \xi_0, \quad Y_i = \eta_i - \eta_0, \quad Z_i = \zeta_i - \zeta_0, \tag{4.2.9}$$

а его геоцентрические координаты —

$$\begin{aligned}
 x_i &= \alpha_x X_i + \beta_x Y_i + \gamma_x Z_i, & y_i &= \alpha_y X_i + \beta_y Y_i + \gamma_y Z_i, \\
 z_i &= \alpha_z X_i + \beta_z Y_i + \gamma_z Z_i.
 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Выражая расстояние  $r_{ij}$  через инерциальные координаты тел  $M_i, M_j$  и используя соотношения (4.2.2), (4.2.3) и (4.2.10), сило-

вую функцию  $U$  (4.2.1) можно представить в виде функции от переменных

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \psi, \varphi, \theta \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (4.2.11)$$

Если использовать формулы перехода (4.1.8) от углов Эйлера (4.1.1) к угловым переменным (4.1.13), (4.1.14), то силовая функция  $U$  будет зависеть от переменных

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \bar{\psi}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}, \psi', \theta' \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (4.2.12)$$

Кроме аргументов (4.2.11) или (4.2.12) силовая функция  $U$  содержит некоторые параметры, так как функции (3.2.2) зависят от масс  $M_i$  тел, массы  $M_k$  и коэффициентов разложения (4.2.6) ряда (4.2.3). Последние выражаются интегралами по объему  $V$  Земли (4.2.6), зависящими от распределения плотности  $\rho$ .

Силовая функция  $U$  как функция переменных (4.2.11) (или (4.2.12)) и параметров обладает рядом свойств. Сформулируем те из них, которые нами будут использованы.

Пусть всюду на действительной оси времени  $R_1$

$$-\infty < t < \infty \quad (4.2.13)$$

взаимные расстояния  $r_{ij}$  между точками  $O_i, O_j$  ограничены снизу

$$0 < a_{ij} \leq r_{ij} \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (4.2.14)$$

и точки  $O_j$  ( $j=1, 2, \dots, k-1$ ) являются внешними точками пространства относительно объема  $V$  Земли так, что

$$a_E < a_{kj} \leq r_{kj}, \quad (4.2.15)$$

где  $a_{ij}$  ( $i \neq j = 1, 2, \dots, k$ ) — некоторые константы.

Условия (4.2.14), (4.2.15) исключают соударение тел рассматриваемой системы.

Если выполнено условие неосоударяемости, то силовая функция Солнечной системы обладает следующими свойствами.

Свойство 1. В каждый момент времени  $t$  в области (4.2.13) силовая функция  $U$  конечна, непрерывна и однозначна как функция всех ее переменных (4.2.11) (или (4.2.12)) и параметров.

Свойство 2. В каждый момент времени  $t$  в области (4.2.13) силовая функция  $U$  сколь угодно раз дифференцируема по любой ее переменной (4.2.11) (или (4.2.12)) и эти частные производные конечны, непрерывны и однозначны как функции координат и параметров.

Обозначим  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  — главные векторы сил ньютонова взаимодействия тел  $M_i$ , приложенные к их центрам масс  $O_1, O_2, \dots, O_k$ ; а  $Q$  — главный момент сил притяжения Земли всеми внешними телами относительно центра масс  $O$ .

Свойство 3. Векторы  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  и  $Q$  в системе  $O^*\xi\eta\zeta$

имеют компоненты ( $i=1, 2, \dots, k$ )

$$Q_{i\xi} = \partial U / \partial \xi_i, \quad Q_{i\eta} = \partial U / \partial \eta_i, \quad Q_{i\zeta} = \partial U / \partial \zeta_i, \quad (4.2.16)$$

$$Q_{\xi} = \alpha_x Q_x + \alpha_y Q_y + \alpha_z Q_z,$$

$$Q_{\eta} = \beta_x Q_x + \beta_y Q_y + \beta_z Q_z, \quad (4.2.17)$$

$$Q_{\zeta} = \gamma_x Q_x + \gamma_y Q_y + \gamma_z Q_z,$$

где  $Q_x, Q_y, Q_z$  — составляющие  $\mathbf{Q}$  относительно координатных осей системы  $Oxyz$  и

$$\begin{aligned} Q_x &= \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \cos \varphi, \\ Q_y &= \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \varphi, \\ Q_z &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Перечисленные свойства по отношению к переменным (4.2.11) и параметрам силовой функции изложены в [24]. Они вытекают из (4.2.12) функции  $U_{ij}$  и свойств определенного интеграла, для которого функция  $U_{kj}$  является первообразной, т. е.

$$U_{kj} = GM_j \int_V \frac{\rho dV}{r_j}, \quad r_j = |\mathbf{r}_{kj} - \mathbf{r}|. \quad (4.2.19)$$

Справедливость этих свойств относительно переменных (4.2.12) следует из непрерывной зависимости (4.2.11) и соответствующих теорем о суперпозиции функций [44, 62].

Заметим, что форма записи (4.2.18) инвариантна по отношению к переменным (4.2.5), т. е.

$$\begin{aligned} Q_x &= \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\sin \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \cos \bar{\varphi}, \\ Q_y &= \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\cos \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \sin \bar{\varphi}, \\ Q_z &= \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Составляющие  $Q_{\bar{x}}, Q_{\bar{y}}, Q_{\bar{z}}$  главного момента  $\mathbf{Q}$  в системе  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  через силовую функцию  $U$  выражаются также инвариантным образом:

$$\begin{aligned} Q_{\bar{x}} &= \bar{\alpha}_x Q_x + \bar{\alpha}_y Q_y + \bar{\alpha}_z Q_z, \\ Q_{\bar{y}} &= \bar{\beta}_x Q_x + \bar{\beta}_y Q_y + \bar{\beta}_z Q_z, \\ Q_{\bar{z}} &= \bar{\gamma}_x Q_x + \bar{\gamma}_y Q_y + \bar{\gamma}_z Q_z. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Из соотношений (4.2.21) при помощи (4.2.20), (4.1.10) получим

$$\begin{aligned}
 Q_{\bar{x}} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\sin \bar{\psi}}{\sin \bar{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \cos \bar{\psi}, \\
 Q_{\bar{y}} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\cos \bar{\psi}}{\sin \bar{\theta}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \sin \bar{\psi} \\
 Q_{\bar{z}} &= \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}}.
 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Имеет место также следующее:

$$\begin{aligned}
 Q_{\bar{x}} &= \frac{\partial U}{\partial \theta'}, \quad -Q_{\bar{y}} = \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} \cos \theta' - \frac{\partial U}{\partial \psi'} \right) \frac{1}{\sin \theta'}, \\
 [Q_{\bar{x}} (\sin \bar{\theta} \cos \theta' + \cos \bar{\psi} \cos \bar{\theta} \sin \theta') + \\
 + Q_{\bar{y}} \sin \bar{\psi} \cos \bar{\theta} \sin \theta'] &= \frac{1}{\sin \bar{\theta} \sin \theta'} = \frac{\partial U}{\partial \theta'} \operatorname{ctg} \theta' + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \operatorname{ctg} \bar{\theta}.
 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Переходя к установлению дополнительных свойств силовой функции Солнечной системы, предварительно рассмотрим вопрос об аппроксимации геопотенциала — силовой функции притяжения Земли потенциалом притяжения системы жестко связанных между собой материальных точек. Эта задача является обобщением известной задачи об аппроксимации геопотенциала, содержащего первые три главных члена, силовой функцией двух неподвижных центров [19, 88] с комплексно-сопряженными массами, расположенными на некотором мнимом расстоянии.

Рассмотрим геопотенциал, представленный рядом (4.2.3) по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned}
 U_E(P) &= \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n P_n(\cos \chi) J_n + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_E}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \chi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda], \right. \\
 &\tag{4.2.24}
 \end{aligned}$$

где точка  $P$  со сферическими координатами  $r, \chi, \lambda$  является внешней точкой области  $S_E$ .

Коэффициенты (4.2.6) геопотенциала (4.2.24) определяют положение центра масс и выражают моменты инерции Земли второго и более высоких порядков [27, 28]. В частности,

$$\begin{aligned}
 J_0 &= 1, \quad J_1 = z_0 = 0, \quad C_{11} = x_0 = 0, \quad C_{12} = y_0 = 0, \\
 J_2 &= (A + B - 2C)/2Ma_E^2, \quad C_{22} = (B - A)/4Ma_E^2, \\
 S_{21} &= D/Ma_E^2, \quad C_{21} = E/Ma_E^2, \quad S_{22} = F/2Ma_E^2,
 \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — координаты центра масс  $O$  и  $D$ ;  $E, F$  — центробежные моменты инерции Земли (4.1.20) в системе  $Oxyz$ .

Предположим, что с заданной степенью точности требуется аппроксимировать ряд (4.2.24) силовой функцией притяжения системы материальных точек  $A_1, A_2, \dots, A_s$  с массами  $m_1, m_2, \dots, m_s$ , жестко связанных между собой и фиксированных относительно системы отсчета  $Oxyz$  или, что то же самое, относительно системы отсчета  $Or\lambda\chi$ .

Условие связи между телами  $A_i, A_j$  записывается в виде

$$L_{ij} = |A_i A_j| = \text{const} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.2.26)$$

Пусть в системе  $Or\lambda\chi$  материальные точки  $A_i$  имеют координаты  $r'_i, \lambda', \chi'$  и  $h_i$  — расстояние между точками  $A_i$  и  $P$ . Тогда тело  $A_i$  в точке  $P(r, \lambda, \chi)$  оказывает действие с силовой функцией

$$L_i = G \frac{m_i}{h_i} = G \frac{m_i}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'_i}{r} \right)^n P_n(\cos \kappa). \quad (4.2.27)$$

Здесь  $\kappa$  — угол между радиусами-векторами  $r'_i$  и  $r$ . Запишем выражение полинома  $P_n$  [24, 73]:

$$P_n(\cos \kappa_i) = \sum_{m=1}^n \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \chi) P_{nm}(\cos \chi'_i) \cos(\lambda - \lambda'_i). \quad (4.2.28)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} J_n^i &= P_{n0}(\cos \chi'_i), \\ C_{nm}^i &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \chi'_i) \cos m\lambda'_i, \\ S_{nm}^i &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \chi'_i) \sin m\lambda'_i \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

для всех  $n \geq m \geq 1$ .

С учетом обозначений (4.2.29) соотношение (4.2.28) внесем в выражение силовой функции (4.2.27)

$$\begin{aligned} L_i &= G \frac{m_i}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r'_i}{r} \right)^n P_n(\cos \chi) J_n^i + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r'_i}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \chi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Если на расстояния  $r'_i$  наложены дополнительные условия  $r'_i = a_E$ , то поведение и область сходимости рядов (4.2.24) и (4.2.30) будут совпадать [30, 39].

Суммируя соотношения (4.2.30) по индексу  $i$ , получим выра-

жение силовой функции притяжения системы материальных точек

$$U_s = \sum_{i=1}^s L_i = \frac{G}{r} \left\{ M(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n P_n(\cos \chi) J_n(s) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \chi) [C_{nm}(s) \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \right\}. \quad (4.2.31)$$

Здесь

$$M(s) = \sum_{i=1}^s m_i, \quad J_n(s) = \sum_{i=1}^s m_i J_n^i, \quad (4.2.32)$$

$$C_{nm}(s) = \sum_{i=1}^s m_i C_{nm}^i, \quad S_{nm}(s) = \sum_{i=1}^s m_i S_{nm}^i.$$

Остаток  $W_n(s)$  ряда (4.2.31), аналогичный выражению (4.2.18), оценивается следующим образом [29, 93]:

$$|W_n(s)| \leq \frac{GM(s)}{r} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n \left( 1 - \frac{a_E}{r} \right)^{-1}. \quad (4.2.33)$$

Массы  $m_i$  и координаты  $\lambda_i', \chi_i'$  рассматриваемых точек  $A_i$  выберем так, чтобы первые  $2s+1$  коэффициентов (4.2.32) ряда (4.2.31) определялись из системы

$$\begin{aligned} M(s) &= m_1 + m_2 + \dots + m_s = M, \\ J_1(s) &= m_1 J_1^1 + m_2 J_1^2 + \dots + m_s J_1^s = MJ_1, \\ C_{11}(s) &= m_1 C_{11}^1 + m_2 C_{11}^2 + \dots + m_s C_{11}^s = MC_{11}, \\ S_{11}(s) &= m_1 S_{11}^1 + m_2 S_{11}^2 + \dots + m_s S_{11}^s = MS_{11}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Gamma_{ij}(s) &= m_1 \Gamma_{ij}^1 + m_2 \Gamma_{ij}^2 + \dots + m_s \Gamma_{ij}^s = M\Gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

где в зависимости от числа  $s$  символ  $\Gamma$  совпадает с одной из букв  $J, C, S$ .

Совокупность (4.2.34) содержит  $2s+1$  равенств, в правых частях которых фигурируют коэффициенты  $2s+1$  первых гармоник геопотенциала

$$J_0, J_1, C_{11}, S_{11}, J_2, C_{21}, S_{21}, \dots, \Gamma_{ij}. \quad (4.2.35)$$

Как известно, коэффициенты гармоник геопотенциала принимают действительные значения и можно считать, что последовательность (4.2.35) задана своими числовыми значениями. Полагаем, что

$$m_i = M/S. \quad (4.2.36)$$

Тогда первое уравнение системы (4.2.34), из которого следует равенство массы Земли сумме масс  $m_i$  жестко связанных материальных точек  $A_i$  обращается в тождество. Остальные уравнения системы (4.2.34) перепишем с учетом (4.2.36) и (4.2.32):

$$\begin{aligned} P_1(\tau_1) + P_1(\tau_2) + \dots + P_1(\tau_s) &= J'_1, \\ P_{11}(\tau_1) \cos \lambda'_1 + P_{11}(\tau_2) \cos \lambda'_2 + \dots + P_{11}(\tau_s) \cos \lambda'_s &= C'_{11}, \\ P_{11}(\tau_1) \sin \lambda'_1 + P_{11}(\tau_2) \sin \lambda'_2 + \dots + P_{11}(\tau_s) \sin \lambda'_s &= S'_{11}, \\ P_2(\tau_1) + P_2(\tau_2) + \dots + P_2(\tau_s) &= J'_2, \end{aligned} \tag{4.2.37}$$

$$\begin{aligned} P_{21}(\tau_1) \cos \lambda'_1 + P_{21}(\tau_2) \cos \lambda'_2 + \dots + P_{21}(\tau_s) \cos \lambda'_s &= C'_{21}, \\ P_{21}(\tau_1) \sin \lambda'_1 + P_{21}(\tau_2) \sin \lambda'_2 + \dots + P_{21}(\tau_s) \sin \lambda'_s &= S'_{21}, \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_{ij}(\tau_1) \mu_i + P_{ij}(\tau_2) \mu_2 + \dots + P_{ij}(\tau_s) \mu_s = \Gamma'_{if},$$

где

$$\tau_{ij} = \cos \chi_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \tag{4.2.38}$$

а переменная  $\mu_n$  выбирается в зависимости от соответствия между  $\Gamma$  и  $J, C, S$ , т. е.

$$\mu_n = \begin{cases} 1 \\ \cos j\lambda_n \\ \sin j\lambda_n \end{cases} \leftrightarrow \Gamma = \begin{cases} J \\ C \\ S \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, s).$$

По известному свойству полиномов Лежандра, заданных в области (4.2.38), т. е.

$$-1 \leq \tau_i \leq 1,$$

справедливо

$$P_i(\tau_1) + P_i(\tau_2) + \dots + P_i(\tau_s) \leq s \tag{4.2.39}$$

для всех  $i \geq 0$ .

С другой стороны, согласно уравнениям (4.2.37), где  $J'_1 = J_1 S$ ,  $C'_{11} = C_{11} S$ ,  $\dots$ ,  $\Gamma'_{ij} = \Gamma_{ij} S$ , и условию (4.2.36) имеем

$$P_i(\tau_1) + P_i(\tau_2) + \dots + P_i(\tau_s) \leq J_i S. \tag{4.2.40}$$

Сравнивая (4.2.40) с (4.2.39), получим, что (4.2.39) выполняется при условии

$$|J_i| \leq 1. \tag{4.2.41}$$

Для коэффициентов гармоник геопотенциала  $U_E$  верна более общая, чем (4.2.41), оценка [81, 113, 124] (рис. 4.2):

$$|J_n| < n^{-1}, \quad |C_{nm}| < n^{-1}, \quad |S_{nm}| < n^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{4.2.42}$$

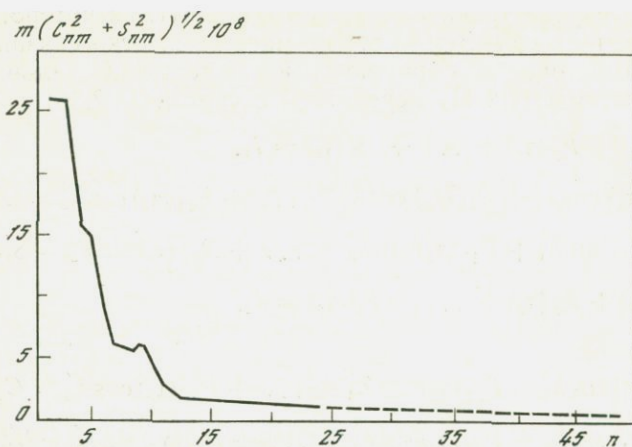


Рис. 4.2. Изменение коэффициентов  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  в зависимости от их порядка  $n$

Тогда оценка (4.2.39) верна всюду в области (4.2.38), и условие (4.2.36) выбора масс допустимо. Остается показать, что система (4.2.37) имеет хотя бы одно решение, которое выражает координаты положений точек  $A_i$  на сфере  $S_E$ .

Обозначим через  $D_s$  компакт, представленный декартовым произведением отрезков:

$$D_s = [-1, 1]_1 \times [-\pi, \pi]_1 \times [-1, 1]_2 \times \dots \times [-\pi, \pi]_s,$$

$F_s$  — непрерывное отображение, заданное левыми частями системы (4.2.37).

Согласно теореме о непрерывном отображении компакта [41, 44] отображением  $F_s$  компакт  $D_s$  переводится в компакт  $E_s$   $2s$ -мерного евклидова пространства, т. е.  $F_s(D_s) = E_s$ . В силу структуры уравнений (4.2.37) и оценок (4.2.42) нетрудно показать, что точка  $\epsilon_0$  с координатами  $(J'_1, C'_{11}, S'_{11}, \dots, \Gamma'_{ij})$  является внутренней точкой компакта  $E_s$ . Поэтому в компакте  $D$  существует хотя бы одна точка  $d_0$  с координатами  $(\lambda'_0, \chi'_1, \lambda'_2, \dots, \chi'_s)$ , которая является прообразом точки  $\epsilon_0$  для отображения  $F_s$ , т. е.  $F_s(d_0) = \epsilon_0$ .

Разрешим систему (4.2.37) и полученные значения  $\lambda'_i, \chi'_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ) подставим в выражение коэффициентов гармоник (4.2.29). Последние с учетом условия выбора масс  $m_i$  (4.2.36) внесем в выражение (4.2.31) силовой функции  $U_s$ . При такой аппроксимации будут сохранены  $2s+1$  обобщенных моментов инерции, в число которых, в частности, входят масса и величины (4.2.36) для Земли [39].

Если в точках сферы с координатами  $\lambda'_i, \chi'_i$ , удовлетворяющими уравнениям системы (4.2.37), поместим массы  $m_i$ , то силовая функция притяжения жестко связанной системы матери-

альных точек  $A_i$  аппроксимирует геопотенциал (4.2.24) с точностью до  $\varepsilon$ :

$$|U_E - U_s| = |W_{i(s)} - W_{i(s)}(s)| < |W_{i(s)}| + |W_{i(s)}(s)| \leq 2G \frac{M}{r} \left(\frac{a_E}{r}\right)^{i(s)} \left(1 - \frac{a_E}{r}\right)^{-1} < \varepsilon. \quad (4.2.43)$$

Эта оценка является следствием (4.2.19).

Следует отметить, что число  $s$  материальных точек  $A_i$  в (4.2.43) выбрано произвольно. Если устремить  $s$  к бесконечности, т. е. увеличить число точек  $A_i$ , то согласно (4.2.43) последовательность силовых функций  $U_s$  (4.2.3) системы материальных точек  $A_i$  будет сходиться абсолютно и равномерно к силовой функции  $U_E$  (4.2.2) притяжения Земли во всех внешних точках сферы радиуса  $a_E$  с центром в точке  $O$ .

Сформулируем этот факт в виде следующего свойства потенциала  $U_E$ , являющегося составной частью силовой функции Солнечной системы.

Свойство 4. Потенциал  $U_E$  с любой заданной степенью точности  $\varepsilon > 0$  можно аппроксимировать силовой функцией системы, состоящей из конечного числа материальных точек, сосредоточенных на поверхности сферы радиуса  $a_E$  с центром в точке  $O$  и фиксированных относительно нее. При этом процесс аппроксимации геопотенциала  $U_E$  силовой функцией  $U_s$  притяжения системы материальных точек  $A_1, A_2, \dots, A_s$  сходится абсолютно и равномерно с ростом количества  $s$  материальных точек  $A_i$  ( $s \rightarrow \infty$ ) в каждой точке пространства вне сферы  $S_E$ .

Силовая функция  $U$  Солнечной системы явно не зависит от времени  $t$ . Однако входящие в него переменные (4.2.11) и (4.2.12) вдоль решений суть функции времени  $t$ . Поэтому возникает вопрос о свойствах  $U$ , рассматриваемой как функция времени в области  $R_1$  (4.2.13). Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим кенигову гелиоцентрическую систему координат  $O_1X'Y'Z'$ .

Предположим, что гелиоцентрические декартовы координаты центров масс тел  $M_i$  Солнечной системы являются условно-периодическими функциями времени  $t$ , заданными всюду в области (4.2.13). Справедливость этого предположения в случае, когда имеет место теорема Арнольда, показана в следующем разделе.

Силовая функция  $U$  и ее частные производные любого порядка по каждой из переменных (4.2.11), (4.2.12) содержат угловые переменные (4.2.2), (4.2.3) как аргументы тригонометрических функций. Тогда на основе Свойств 1, 2 и Свойств условно-периодических функций силовая функция  $U$  вместе со всеми ее частными производными по переменным (4.2.11) (4.2.12) в результате суперпозиции представляет собой условно-периодическую функцию времени  $t$ , определенную в области (4.2.13). Этот факт следует из оценки (4.2.11) теоремы о суперпозиции услов-

но-периодических функций (см. Приложение) и структуры функций (4.2.6), (4.2.7).

Свойство 5. Силовая функция и ее частные производные по переменным (4.2.11) и (4.2.12) вдоль решения являются условно-периодическими функциями времени  $t$ , если таковыми являются гелиоцентрические декартовы координаты центров масс тел Солнечной системы.

### 3. Динамические уравнения движения тел Солнечной системы и их первые интегралы

Пусть  $\{v_i\}$  — поле скоростей тел  $O_i$ ,  $\{v\}$  — поле скоростей всех точек Земли, радиусы-векторы которых обозначены  $\{r\}$ . Тогда количество движения  $I_i$  тела  $O_i$  равно

$$I_i = M_i v_i, \quad (4.3.1)$$

а количество движения  $I = I_k$  и кинетический момент  $K$  вращения Земли определяются интегралами

$$I = \int_V \rho v \, dV, \quad K = \int_V \rho [rv] \, dV. \quad (4.3.2)$$

Законы изменения величин (4.3.1), (4.3.2) определяют уравнения движения тел  $O_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) Солнечной системы:

$$dI_i/dt = Q_i, \quad dK/dt = Q. \quad (4.3.3)$$

Проекция второго из уравнений (4.3.3) на координатные оси системы  $Oxyz$  дает динамические уравнения Эйлера вращения Земли [30, 31]

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (C - B) qr = \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\sin \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \cos \bar{\varphi}, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr &= \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\cos \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \sin \bar{\varphi}, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Запишем динамические уравнения вращения Земли в переменных Андуайе (4.1.13), (4.1.14). Рассмотрим уравнения

$$dK_X/dt = Q_X, \quad dK_Y/dt = Q_Y, \quad dK_Z/dt = Q_Z, \quad (4.3.5)$$

полученные проектированием второго равенства (4.3.3) на оси системы  $OXYZ$ . Подставим в соотношения (4.3.4) выражения дифференцируемых величин

$$K_X = K \sin \psi' \sin \theta', \quad K_Y = -K \cos \psi' \cos \theta', \quad K_Z = K \cos \theta' \quad (4.3.6)$$

и разрешим их относительно скоростей изменения переменных Андуйае (4.1.13)

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= a_Z Q_X + b_Z Q_Y + c_Z Q_Z = Q_{\bar{Z}}, \\ \frac{d\psi'}{dt} &= \frac{1}{K \sin \theta'} (a_X Q_X + b_X Q_Y + c_X Q_Z) = \frac{Q_{\bar{X}}}{K \sin \theta'}, \\ \frac{d\theta'}{dt} &= -\frac{1}{K} (a_Y Q_X + b_Y Q_Y + c_Y Q_Z) = \frac{Q_{\bar{Y}}}{K}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Составляющие  $Q_{\bar{X}}$ ,  $Q_{\bar{Y}}$ ,  $Q_{\bar{Z}}$  главного момента  $\mathbf{Q}$  ранее были выражены через частные производные силовой функции  $U$  с помощью (4.2.20). Уравнения (4.3.7) и (4.1.19) с учетом (4.2.20), (4.2.21) определяют динамические уравнения вращения Земли в переменных Андуйае (4.1.13) и (4.1.14)

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}}, \quad \frac{d\psi'}{dt} = \frac{1}{K \sin \theta'} \frac{\partial U}{\partial \theta'}, \\ \frac{d\theta'}{dt} &= \frac{1}{K \sin \theta'} \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} \cos \theta' - \frac{\partial U}{\partial \psi'} \right), \\ \frac{d\bar{\psi}}{dt} &= K \left( \frac{\sin^2 \bar{\varphi}}{A} + \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{B} \right) - \frac{1}{K} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta'} \operatorname{ctg} \theta' + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \right), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} &= K \cos \bar{\theta} \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{1}{K \sin \bar{\theta}} \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= K \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{1}{K \sin \bar{\theta}} \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial U}{\partial \psi} \cos \bar{\theta} \right). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Уравнения подобной формы для спутника Земли получены Ф. Л. Черноусько [83].

Введя обозначения, аналогичные (3.1.1):

$$d\xi_i/dt = u_i, \quad d\eta_i/dt = v_i, \quad d\zeta_i/dt = w_i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (4.3.9)$$

перепишем первое из уравнений (4.3.3) в проекциях на координатные оси системы  $O^* \xi \eta \zeta$ :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \frac{dw_i}{dt} = \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \quad (4.3.10)$$

Уравнения (4.3.9) и (4.3.10) в сочетании с динамическими уравнениями (4.3.8) вращения Земли определяют систему дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения тел Солнечной системы. К ним следует лишь добавить начальные условия движения тел  $M_i$ .

Запишем основные уравнения движения тел Солнечной системы

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= u_i, & \frac{d\eta_i}{dt} &= v_i, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= w_i, \\ \frac{du_i}{dt} &= \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, & \frac{dv_i}{dt} &= \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, & \frac{dw_i}{dt} &= \frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}}, & \frac{d\psi'}{dt} &= \frac{1}{K \sin \theta'} \frac{\partial U}{\partial \theta'}, \\ \frac{d\theta'}{dt} &= \frac{1}{K \sin \theta'} \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} \cos \theta' - \frac{\partial U}{\partial \psi'} \right), \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}}{dt} &= K \left( \frac{\sin^2 \bar{\varphi}}{A} + \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{B} \right) - \frac{1}{K} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta'} \operatorname{ctg} \theta' + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \right), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} &= K \cos \bar{\theta} \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \bar{\varphi}}{A} - \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{B} \right) \pm \frac{1}{K \sin \bar{\theta}} \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= K \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{1}{K \sin \bar{\theta}} \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} \cos \bar{\theta} \right). \end{aligned}$$

По отношению к уравнениям (4.3.11) сформулируем задачу Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} \xi_i(t_0) &= \xi_{i_0}, & \eta_i(t_0) &= \eta_{i_0}, & \zeta_i(t_0) &= \zeta_{i_0}, \\ u_i(t_0) &= u_{i_0}, & v_i(t_0) &= v_{i_0}, & w_i(t_0) &= w_{i_0} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} K(t_0) &= K_0, & \psi'(t_0) &= \psi'_0, & \theta'(t_0) &= \theta'_0, \\ \bar{\psi}(t_0) &= \bar{\psi}_0, & \bar{\varphi}(t_0) &= \bar{\varphi}_0, & \bar{\theta}(t_0) &= \bar{\theta}_0, \end{aligned}$$

где  $t_0$  — фиксированный момент времени.

Рассматриваемая механическая система замкнута, изолирована и консервативна, поэтому имеют место законы сохранения количества движения  $\mathbf{I}^*$ , кинетического момента  $\mathbf{K}^*$  и энергии  $W$  системы

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^* &= \sum_{i=1}^k \mathbf{I}_i = \text{const}, & \mathbf{K}^* &= \sum_{i=1}^k \mathbf{K}_i + \mathbf{K} = \text{const}, \\ W &= T^* - U = \text{const}, \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

где  $\mathbf{K}_i$  — кинетический момент поступательного движения тела  $O_i$  относительно гелиоцентрической системы координат,  $T^*$  — ее полная кинетическая энергия.

Законы (4.3.13) представляют собой первые интегралы уравнений движения тел Солнечной системы.

Рассмотрим второе из уравнений (4.3.13) в проекциях на оси координатной системы  $O\xi\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k M_i (\omega_i \eta_i - \nu_i \zeta_i) + K \sin \psi' \sin \theta' &= a, \\ \sum_{i=0}^k M_i (u_i \zeta_i - \omega_i \xi_i) - K \cos \psi' \sin \theta' &= b, \\ \sum_{i=0}^k M_i (\nu_i \xi_i - u_i \eta_i) + K \cos \theta' &= c, \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

где постоянные  $a, b, c$  — составляющие вектора  $\mathbf{K}^*$ , которые имеют значения, определяемые по начальным условиям (4.3.12).

Интегралы (4.3.14) называются *интегралами площадей*. В них участвуют переменные Андуйе, которые могут быть выражены явно в следующем виде:

$$K = [f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2]^{1/2}, \quad \psi' = -\arctg(f_X f_Y^{-1}), \quad \theta' = \arccos(f_Z K^{-1}), \quad (4.3.15)$$

где проекции вектора  $\mathbf{K}^*$  на оси инерциальной системы  $O^*\xi\eta\zeta$  равны

$$\begin{aligned} f_X &= a - \sum_{i=0}^k M_i (\omega_i \eta_i - \nu_i \zeta_i), \\ f_Y &= b - \sum_{i=0}^k M_i (u_i \zeta_i - \omega_i \xi_i), \\ f_Z &= c - \sum_{i=0}^k M_i (\nu_i \xi_i - u_i \eta_i). \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Наряду с (4.3.14) запишем интегралы площадей в следующей форме [11, 23]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k M_i (\omega_i \eta_i - \nu_i \zeta_i) + A p a_x + B q a_y + C r a_z &= a, \\ \sum_{i=1}^k M_i (u_i \zeta_i - \omega_i \xi_i) + A p b_x + B q b_y + C r b_z &= b, \\ \sum_{i=1}^k M_i (\nu_i \xi_i - u_i \eta_i) + A p c_x + B q c_y + C r c_z &= c. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Эти соотношения есть неоднородная система линейных алгебраических уравнений относительно  $p, q$  и  $r$  с определителем  $\Delta(p, q, r)$ , равным  $ABC$ . Так как определитель  $\Delta(p, q, r)$  отли-

чен от нуля, то система (4.3.17) имеет единственное решение, выражающее  $p, q, r$ . Это решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p &= f_p(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, u_1, v_1, \dots, \omega_k, a_x, a_y, \dots, c_z), \\ q &= f_q(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, u_1, v_1, \dots, \omega_k, a_x, a_y, \dots, c_z), \\ r &= f_r(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, u_1, v_1, \dots, \omega_k, a_x, a_y, \dots, c_z). \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Исходя из (4.3.18) получим следующее

Предложение 3.1. Поступательно-вращательное движение Солнечной системы устойчиво  $L^-$  тогда и только тогда, когда устойчиво  $L^-$  ее поступательное движение.

Необходимость Предложения очевидна, поступательное движение тел Солнечной системы составляет часть ее поступательно-вращательного движения.

Докажем достаточность. Пусть поступательное движение тел Солнечной системы устойчиво  $L^-$ , т. е.

$$\sup_{t \in R_1^-} [\xi_1^2(t) + \eta_1^2(t) + \dots + \xi_k^2(t) + u_1^2(t) + v_1^2(t) + \dots + \omega_k^2(t)]^{1/2} < \infty.$$

Отсюда с учетом ограниченности направляющих косинусов получим

$$\sup_{t \in R_1^-} |f_p(t)| < \infty, \quad \sup_{t \in R_1^-} |f_q(t)| < \infty, \quad \sup_{t \in R_1^-} |f_r(t)| < \infty.$$

Указанные неравенства доказывают достаточность Предложения.

Замечая, что  $\gamma_x = \sin \varphi' \sin \theta'$  и  $\gamma_y = \cos \varphi' \sin \theta'$ , из (4.1.21) получим

$$\bar{\varphi} = \arctg(Ap/Bq), \quad \bar{\theta} = \arccos \{Cr/[f_x^2 + f_y^2 + f_z^2]^{1/2}\}. \quad (4.3.19)$$

Выразим угол  $\bar{\psi}$  через переменные  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), (u_i, v_i, \omega_i)$  и  $(p, q, r)$ , где  $i=1, 2, \dots, k$ . С этой целью рассмотрим первые два уравнения системы (4.3.17) и представим их в виде

$$\begin{aligned} Ap(\alpha_x a_x + \beta_x a_y + \gamma_x a_z) + Bq(\alpha_y a_x + \beta_y a_y + \gamma_y a_z) + \\ + Cr(\alpha_z a_x + \beta_z a_y + \gamma_z a_z) = f_x, \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

$$\begin{aligned} Ap(\alpha_x b_x + \beta_x b_y + \gamma_x b_z) + Bq(\alpha_y b_x + \beta_y b_y + \gamma_y b_z) + \\ + Cr(\alpha_z b_x + \beta_z b_y + \gamma_z b_z) = f_y. \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы (4.1.7). В соотношения (4.3.20) внесем выражения направляющих косинусов (4.1.3) и элементов матрицы  $A_2$ . При этом получим

$$\operatorname{tg} \bar{\psi} = \frac{Ap \cos \bar{\varphi} - Bq \sin \bar{\varphi}}{(Ap \sin \bar{\varphi} + Bq \cos \bar{\varphi}) \cos \bar{\theta} - Cr \sin \bar{\theta}}, \quad (4.3.21)$$

где в силу выбора системы  $O^*XYZ$  принято  $f_x=0$ ,  $f_y=0$ . Итак, переменные Андуайе  $K$ ,  $\psi'$ ,  $\theta'$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\theta}$  явно выражены формулами (4.3.15), (4.3.19) и (4.3.21) через неизвестные

$$\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, u_1, v_1, \dots, w_k, p, q, r. \quad (4.3.22)$$

Таким образом, переменные Андуайе (4.1.13) и (4.1.14) имеют явные выражения (4.3.15), (4.3.19), (4.3.21) через неизвестные (4.3.22). С учетом этого запишем систему (4.3.11) основных уравнений движения тел Солнечной системы и их начальные условия (4.3.12) в виде векторного уравнения переменных (4.3.22). Эта система автономна и имеет следующий вид:

$$dg/dt = G(g), \quad g(0, q) \equiv q. \quad (4.3.23)$$

Здесь  $g, q$  — набор переменных (4.3.22) и их начальных условий.

Рассмотрим вопросы, относящиеся к сочетанию прошлого и будущего режимов движения Солнечной системы, описываемого дифференциальными уравнениями (4.3.23). С этой целью зафиксируем произвольное действительное число  $\epsilon > 0$ . При этом согласно Свойству 4 силовая функция  $U_E$  с точностью до  $\epsilon$  аппроксимируема силовой функцией  $U_m$  системы  $m$  материальных точек, фиксированных на поверхности сферы  $S_E$ . Поэтому расстояния  $r'_{ij}$  между ними неизменно.

Пусть  $\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i$  — координаты,  $u'_i, v'_i, w'_i$  — скорости материальной точки  $A_i$  с массой  $m_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ). Тогда неизменность взаимных расстояний  $r'_{ij}$  выражает равенство

$$r'_{ij} = [(\xi'_i - \xi'_j)^2 + (\eta'_i - \eta'_j)^2 + (\zeta'_i - \zeta'_j)^2]^{1/2} = \text{const}, \\ i \neq j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.3.24)$$

Уравнения связи (4.3.24) равномерно непрерывно отображают множество  $(\xi'_1, \eta'_1, \dots, \zeta'_m)$  в каждое из множеств  $(\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i)$ , где  $i=1, 2, \dots, m$  и  $\zeta'_j$  — аппликата точки  $A_j$ , не лежащей на одной прямой с центром масс  $O$  Земли и точкой  $A_i$ . В силу условий (4.3.24) тела  $A_i$  взаимно не притягиваются, но они взаимодействуют с каждым из внешних тел  $O_i$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ). Отсюда силовая функция  $\tilde{U}_m$  системы  $G_{k+m-1}$  тел  $O_1, O_2, \dots, O_{k-1}, A_1, A_2, \dots, A_m$  имеет вид

$$\tilde{U}_m = G \sum_{i,j=1}^{k-1} \frac{M_i M_j}{r_{ij}} + G \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{M_i m_j}{L_{ij}}. \quad (4.3.25)$$

Здесь  $L_{ij}$  — взаимное расстояние между телами  $O_i$  и  $A_j$ .

Движение системы  $G_{k+m-1}$ , имеющей силовую функцию (4.3.25), описывается автономными дифференциальными уравнениями, в правых частях которых будут фигурировать реакции связей (4.3.24). Эти уравнения имеют интеграл энергии. Поэтому для описания движения системы  $G_{k+m-1}$  применим весь аппарат, изложенный в гл. III.

Справедливо

Предложение 3.2. Если поступательное движение Сол-

нечной системы устойчиво  $L^-$ , то движение  $g(t, q)$  системы  $G_{k+m-1}$  рекуррентно.

**Доказательство.** Движение системы  $G_{k+m-1}$  с наложенными на него связями (4.3.24) при  $m \rightarrow \infty$  стремится к движению Солнечной системы, описываемому дифференциальными уравнениями (4.3.23). Последнее по условиям Предложения устойчиво  $L^-$ . Следовательно, движение системы  $G_{k+m-1}$  устойчиво  $L^-$  и согласно Предложению 6.5 гл. III рекуррентно.

**Предложение 3.3.** Движение Солнечной системы рекуррентно тогда и только тогда, когда поступательное движение этой системы устойчиво  $L^-$ .

Так как поступательное движение Солнечной системы является составной частью ее поступательно-вращательного движения, то необходимость Предложения очевидна.

**Доказательство достаточности.** Пусть поступательное движение Солнечной системы устойчиво  $L^-$ . Согласно предыдущему Предложению движение системы  $G_{k+m-t}$  рекуррентно. В силу Свойства 4 силовой функции Солнечной системы последовательность движений системы  $G_{k+m-1}$  при  $m \rightarrow \infty$  равномерно сходится к движению Солнечной системы. Тогда, являясь равномерным пределом последовательности рекуррентных функций, движение Солнечной системы само рекуррентно. Что и требовалось доказать.

Предложения 3.1 и 3.3 показывают, что поступательно-вращательное движение Солнечной системы, описываемое уравнениями (4.3.23), является рекуррентным, если устойчиво  $L^-$  ее поступательное движение. При этом справедливо

**Предложение 3.4.** Поступательно-вращательное движение Солнечной системы, описываемое уравнениями (4.3.23), рекуррентно или условно-периодично (почти периодично) в том и только в том случае, когда рекуррентно или условно-периодично (почти периодично) ее поступательное движение.

**Необходимость Предложения очевидна.**

**Доказательство достаточности.** Случай рекуррентного движения доказан при менее слабых требованиях Предложения 3.3. Пусть поступательное движение Солнечной системы рекуррентно. Тогда функции  $p, q, r$ , выражаемые соотношениями (4.3.18), также рекуррентны. Следовательно, поступательно-вращательное движение Солнечной системы, определяемое переменными (4.3.22), рекуррентно. Что и требовалось доказать.

Из Предложения 3.4 вытекает

**Предложение 3.5.** Если поступательное движение Солнечной системы устойчиво  $L^-$ , то ее полная кинетическая энергия рекуррентна, т. е. ограничена и минимальна по Биркгофу.

**Предложение 3.6.** Если поступательное движение Солнечной системы устойчиво  $L^-$ , то

- 1) энергия поступательного движения системы отрицательна;
- 2) существуют  $\alpha$ -последовательность  $\{t_n\}$  и  $\omega$ -последователь-

ность  $\{s_n\}$  моментов времени такие, что для каждого натурального  $n$  справедливо условие

$$T(s_n) = T(t_n) = -h; \quad (4.3.26)$$

3) для любого действительного  $\varepsilon > 0$  множество

$$R_\varepsilon(T) = \{t \in R_1 \mid |T(t) + h| < \varepsilon$$

относительно плотно в  $R_1$ ;

4) функция  $T(t)$  и поступательно-вращательное движение системы, описываемое вектор-функцией (4.3.18), изохронны  $R$ .

**Доказательство.** Пусть поступательное движение Солнечной системы устойчиво  $\mathcal{L}^-$ . Применяя схему аппроксимации силовой функции  $U_E$  силовой функцией  $U_m$ , вместо Солнечной системы имеем систему  $G_{n+m-1}$  с условиями связи (4.3.24). Для последней постоянная энергии  $h_m$  отрицательна, ибо выполняются условия Предложения 5.15 гл. III. С учетом этого имеем последовательность отрицательных чисел  $h_m$ , сходящихся к постоянной энергии  $h$  Солнечной системы. Из того, что для каждого натурального числа  $m$  значение  $h_m < 0$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = h$  следует непо-

ложительность постоянной энергии  $h$ . Таким образом,  $h \leq 0$ . Вместе с этим в силу Предложения 5.15 гл. III при каждом  $m$  силовая функция системы  $G_{n+m-1}$  осциллирует вблизи значения  $-2h_m$  (см. доказательство Предложения 5.16 гл. III) так, что имеет место соотношение

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} T_m(t) \leq -h_m \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} T_m(t), \quad (4.3.27)$$

где  $T_m(t)$  — кинетическая энергия системы  $G_{n+m-1}$ .

С учетом устойчивости  $\mathcal{L}^-$  Солнечной системы перейдем к пределу при  $m \rightarrow \infty$ . Тогда

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) \leq -h \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} T(t). \quad (4.3.28)$$

Это и доказывает первое утверждение Предложения 3.6. Существование  $\alpha$ - и  $\omega$ -последовательностей моментов времени, удовлетворяющих условию (4.3.26), является следствием неравенств (4.3.28). При этом необходимо учитывать непрерывность функции  $T(t)$  и Предложение 3.3.

В силу Предложения 3.5 функция  $T(t)$  рекуррентна. Поэтому множество вида

$$R_\varepsilon(T, s) = \{t \in R_1 \mid \rho[T(t+s), T(s)] < \varepsilon\}$$

при каждом фиксированном значении  $s \in R_1$  относительно плотно в  $R_1$ . Поэтому множество  $R_\varepsilon(T)$  относительно плотно в  $R_1$ .

Согласно Предложению 5.20 гл. III при каждом натуральном  $m$  движение  $g_m(t, q_m)$  и кинетическая энергия  $T_m(t)$  системы  $G_{n+m}$  изохронны  $R$  и равномерно сходятся к движению  $g(t, q)$  и кинетической энергии  $T(t)$  Солнечной системы соответственно.

Следовательно, изохронны  $R$  и эти последние функции. Предложение доказано.

До сих пор устойчивость в прошлом по Лагранжу поступательного движения тел Солнечной системы предполагалась. Докажем справедливость этого предположения.

**Предложение 3.7.** Если движение планетной системы  $k$  тел с массами, равными массам тел Солнечной системы устойчиво  $L^-$ , то поступательно-вращательное движение тел Солнечной системы устойчиво  $L^-$  при одинаковых начальных условиях на декартовы координаты и скорости.

**Доказательство.** Пусть устойчивое  $L^-$  движение системы  $G_n$  и поступательное движение тел Солнечной системы удовлетворяют одним и тем же начальным условиям по одноименным компонентам. Тогда движение системы  $G_n$  рекуррентно и его не нарушают малые консервативные возмущения, вызванные последующими за  $n=1$  членами ряда (4.2.3). Для доказательства этого достаточно использовать аппроксимацию геопотенциала и обобщение теоремы Лапласа, полученное Ю. В. Баркиным [10]. Отметим эту теорему.

**Теорема.** Пусть  $a_{j_0}, e_{j_0}, i_{j_0}$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) — начальные значения больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей к неизменяемой плоскости оскулирующих орбит центров масс  $O_j$ , а  $K_{j_0}, I_{j_0}$  — начальные значения величин кинетических моментов  $K_j$  вращательного движения тел  $O_j$  и наклонностей соответствующих промежуточных плоскостей к неизменяемой плоскости Лапласа. Тогда, если:

- 1) орбитальное движение всех тел и их вращательное движение происходят в одном направлении;
- 2) величины  $\sqrt{\mu_j} a_{j_0}, K_{j_0}$  суть одного порядка;
- 3) большие полуоси орбит  $a_j$  и величины  $K_j$  кинетических моментов вращательного движения тел являются колеблющимися и ограниченными функциями времени  $t \in [t_0, t_1]$ , мало изменяющимися около некоторых средних значений;
- 4) в некоторый начальный момент времени  $t_0$  все эксцентриситеты  $e_{j_0}$ , наклонности  $i_{j_0}, I_{j_0}$  малы, то для всех значений  $t \in [t_0, t_1]$  величины  $e_j, i_j, I_j$  будут также оставаться малыми функциями.

Из Предложения 3.1 гл. III и Предложений 3.3, 3.4 вытекает

**Предложение 3.8.** Поступательно-вращательное движение тел Солнечной системы, описываемое переменными (4.3.23), рекуррентно.

Так как по теореме Арнольда условно-периодические движения системы  $G_n$  составляют большинство (регулярную часть в классе устойчивых по Лагранжу движений) [25, 42], то, исходя из Предложения 3.8, считаем движение тел Солнечной системы условно-периодическим. При этом имеет место Предложение 3.4, и поступательно-вращательное движение Солнечной системы является также условно-периодическим. С учетом этого Предположения рассмотрим разные вариации элементов вращения Земли.

#### 4. Вековые вариации элементов вращательного движения Земли

Система уравнений движения тел Солнечной системы (4.3.23) является автономной и имеет нормальную форму. Отметим некоторые свойства системы (4.3.23) и ее решения.

Пусть для любого фиксированного действительного значения  $\bar{t} \in R_1^-$  имеют место условия

$$r_{ij}(\bar{t}) > 0 \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, k-1), \quad (4.4.1)$$

$$0 < a_E < r_{kj}(\bar{t}) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1). \quad (4.4.2)$$

Эти условия выполняются в силу устойчивости  $L^-$  движения тел Солнечной системы.

При (4.4.1), (4.4.2) силовая функция  $U$  задачи обладает свойствами 1—3. Вследствие этого система уравнений (4.3.23) имеет единственное решение  $g(t, q)$ , удовлетворяющее начальным условиям (4.3.12). В силу свойств 2, 3 силовой функции  $U$  для любого конечного замкнутого промежутка времени  $[-\bar{t}, \bar{t}]$ , где  $\bar{t} \in R_1^-$ , решение  $g(t, q)$  уравнения движения (4.3.23) задачи не может уйти в бесконечность, т. е.

$$\|g(t, q)\| < \infty, \quad t \in [-\bar{t}, \bar{t}] \subset R_1. \quad (4.4.3)$$

Поэтому решение  $g(t, q)$  уравнения (4.3.23) определено и продолжаемо на всю область (4.3.13). Далее, в силу тех же свойств силовой функции  $U$  решение  $g(t, q)$  непрерывно зависит от начальных значений  $q$  и параметров силовой функции. Следовательно, система движений, определяемых уравнениями (4.3.23), образует динамическую систему [65, 91] и каждое решение  $g(t, q)$  задает некоторое движение тел Солнечной системы. Такое движение обладает всеми свойствами динамической системы, т. е.

1)  $g(0, q) \equiv q$ ;

2) решение  $g(t, q)$  определено на  $R_1$  и непрерывно по совокупности своих переменных;

3)  $g(t_2, g(t_1, q)) = g(t_1 + t_2, q), \quad \forall t_1, t_2 \in R_1$ .

Наконец, на основе свойств 2, 3 силовой функции  $U$  решение  $g(t, q)$  как функция переменной  $t$  в области (4.2.13) принадлежит пространству  $C^\infty(R_1, R_{0(k+1)})$  [77].

Перейдем к изложению свойств решения уравнений движения тел Солнечной системы.

Решение  $g(t, q)$  уравнений движения тел Солнечной системы единственно; оно определено всюду в области (4.2.13), непрерывно зависит от начальных данных, параметров силовой функции. Это решение задает движение, определяемое динамической системой и принадлежащее пространству  $C^\infty(R_1, R_{0(k+1)})$ . Доказательство этих свойств сводится к проверке условий соответствующих теорем теории дифференциальных уравнений [65, 67].

В число компонент (4.3.18) вектор-функции  $g(t, q)$  наряду с декартовыми координатами тел  $O_i$  входят угловые переменные. Некоторые из них со временем стремятся к плюс или минус бесконечности — в зависимости от выбранного направления отсчета угла. Поэтому решение  $g(t, q)$  не является устойчивым ни по Лагранжу, ни по Пуассону. Методы и результаты общей теории динамических систем в метрических пространствах, относящиеся к устойчивости движения системы  $G_n$  непосредственно неприменимы к уравнениям (4.3.23). Но, как показано далее, малые консервативные возмущения, обусловленные фигурой Земли, не нарушают условно-периодические движения центров масс тел Солнечной системы.

Напомним, что в задачах аналитической механики под условно-периодическим движением понимается движение, позиционные переменные которого выражаются условно-периодическими функциями, а угловые переменные представляют собой сумму линейных и условно-периодических функций, т. е. сумму вида  $nt + \text{условно-периодическая функция}$ , где  $n$  — среднее движение по данной угловой переменной.

Таким образом, условно-периодическое движение относительно центрального тела  $O_1$  системы  $G_n$  описывается решением  $X(t, X_0)$ , являющимся  $6(n-1)$ -мерный вектор-функцией с компонентами двух видов:

$$X_I(t, X_0) = \hat{X}_I(t, X_0),$$

$$X_{II}(t, X_0) = n(X_{II})t + \hat{X}_{II}(t, X_0),$$

где  $\hat{X}_I(t, X_0)$  и  $\hat{X}_{II}(t, X_0)$  — условно-периодические функции времени  $t \in R$ ;  $n(X_{II})$  — среднее движение по переменной  $X_{II}(t, X_0)$ .

Алгоритм построения условно-периодического решения задачи  $n$  тел в ее планетном варианте описан в [15, 19, 108]. В нем существенно используется тот факт, что система  $G_n$  представлена только материальными точками и их силовая функция имеет вид (3.1.2). Эту систему в отличие от Солнечной, как и ранее, будем называть планетной системой  $G_n$ . Опишем схему построения ее условно-периодического движения.

Исходные дифференциальные уравнения относительного движения тел  $M_2, M_3, \dots, M_n$  планетной системы  $G_n$  записываются в канонических элементах Делоне [1]. Эти уравнения подвергаются пяти последовательным каноническим преобразованиям, называемым *предварительными*. Они придают исходным уравнениям вид, в котором выполнены условия теоремы Арнольда [15, 16, 19].

Пусть  $X(t, X_0)$  — новые переменные, описывающие относительное движение планетной системы. Тогда полученные гамильтоновы уравнения в этих переменных последовательно счетное число раз канонически преобразовываются при помощи так называемой *основной операции* [15]. Процесс применения операции к каноническим уравнениям относительного движения

планетной системы в переменных  $X(t, X_0)$  сходится равномерно, и предельная система уравнений имеет решение  $X_\infty(t)$  с компонентами вида

$$\dot{X}_{I\infty} = \text{const}, \quad X_{I\infty} = n(X_{I\infty})t + \text{const}, \quad (4.4.4)$$

где  $n(X_{I\infty})$  — среднее движение по угловой переменной  $X_{I\infty}$ .

Переход от решения  $X_\infty(t)$  предельной системы уравнений к решению канонических уравнений движения планетной системы в переменных  $\tilde{X}(t, \tilde{X}_0)$  осуществляется обращением основной операции и последовательного ее применения. Этот процесс обращения сходится также равномерно и переводит решение  $X_\infty(t)$  в искомое условно-периодическое  $\tilde{X}(t, \tilde{X}_0)$  в области (4.2.13). Это решение имеет компоненты (4.4.3), т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{X}_I^{(1)}(t, \tilde{X}_0), \quad \tilde{X}_I^{(2)}(t, \tilde{X}_0), \dots, \tilde{X}_I^{(2n_0-1)}(t, \tilde{X}_0), \quad \tilde{X}_I^{(2n_0)}(t, \tilde{X}_0), \\ \tilde{X}_I^{(2n_0+1)}(t, \tilde{X}_0), \quad \tilde{X}_I^{(2n_0+2)}(t, \tilde{X}_0), \dots, \tilde{X}_I^{(2n-1)}(t, \tilde{X}_0), \quad \tilde{X}_I^{(2n)}(t, \tilde{X}_0), \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

где  $n_0 < n$ .

Перейдем от неизвестных (4.4.5), определяющих положения и скорости тел планетной системы, к новым переменным

$$\begin{aligned} Y_I^{(2i-1)}(t, Y_0) &= \tilde{X}_I^{(2i-1)}(t, \tilde{X}_0), \\ Y_I^{(2i)}(t, Y_0) &= \tilde{X}_I^{(2i)}(t, \tilde{X}_0) \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ Y_I^{(2j-1)}(t, Y_0) &= \tilde{X}_I^{(2j-1)}(t, \tilde{X}_0) \cos[\tilde{X}_{II}^{(2j)}(t, \tilde{X}_0)], \\ Y_I^{(2j)}(t, Y_0) &= \tilde{X}_I^{(2j-1)}(t, \tilde{X}_0) \sin[\tilde{X}_{II}^{(2j)}(t, \tilde{X}_0)] \\ &(j = n+1, n+2, \dots, 3n). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Переменные (4.4.6) как функции времени  $t \in R_1$  являются условно-периодическими функциями в области (4.2.13). Множество  $Y$  условно-периодических функций (4.4.6) состоит из конечного числа элементов и, следовательно, компактно в метрическом пространстве  $C_M$  с метрикой, заданной через норму [41]

$$\|f - g\| = \max_{t \in R_1} |f(t) - g(t)|,$$

где функции  $f, g \in C_M$ .

Пусть  $N_0$  — преобразование, обратное (4.4.6), переводящее канонические переменные  $Y_I^{(i)}$  в переменные  $\tilde{X}$ . Оно представляет собой непрерывное отображение множества переменных  $Y_I^{(i)}$  на множество переменных  $\tilde{X}_I^{(i)}$ , т. е.

$$Y_I^{(i)}(t, Y_0) \xrightarrow{N_0} \tilde{X}_I^{(i)}(t, \tilde{X}_0).$$

Обозначим через  $N_1, N_2, \dots, N_3$  преобразования, обратные предварительным преобразованиям элементов Делоне. (Доказательство существования обратных преобразований  $N_1, N_2, \dots$

...  $N_s$  и их непрерывность приводится в [8].) Тогда преобразование, определяющее последовательное применение преобразований  $N_6, N_5, \dots, N_1$ , непрерывно отображает функции и множество  $Y$  переменных (4.4.4) в множество элементов Делоне. Как известно, при помощи двух непрерывных последовательных преобразований от элементов Делоне можно перейти к прямоугольным гелиоцентрическим координатам  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  материальных точек  $M_i$  ( $i=2, \dots, n$ ). Обозначим это результирующее преобразование через  $N_s$ .

Согласно Предложению 3.8 решение  $Y^{(i)}(t, Y_0)$  устойчиво по Лагранжу. Поэтому декартовы прямоугольные гелиоцентрические координаты  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  материальных точек  $M_i$  и их производные по времени  $\dot{X}'_i, \dot{Y}'_i, \dot{Z}'_i$  — непрерывные функции независимой переменной  $t \in R_1$  и они ограничены, т. е. принадлежат пространству  $C(R_1)$ . Рассматривая множество функций  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  и  $\dot{X}'_i, \dot{Y}'_i, \dot{Z}'_i$  как некоторое метрическое пространство  $S$ , получим, что отображение  $N_s$  непрерывно переводит компакт  $M$  в метрическое пространство  $S$ . Поэтому отображение  $N_s$  равномерно непрерывно. Тогда, согласно теореме о суперпозиции почти периодических функций [18, 48, 49], в результате равномерно непрерывного отображения  $N_s$  почти периодическая вектор-функция  $Y(t, Y_0)$  переходит в почти периодическую вектор-функцию независимой переменной  $t$ . Компонентами этой вектор-функции являются переменные  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  и  $\dot{X}'_i, \dot{Y}'_i, \dot{Z}'_i$  ( $i=2, 3, \dots, n$ ).

Таким образом, если относительное движение планетной системы условно-периодическое, то прямоугольные координаты тел  $M_i$  ( $i=2, 3, \dots, n$ ) относительно центрального тела  $M_1$  и их первые производные по времени представляют собой почти периодические функции времени  $t$  в области  $R_1$ .

С учетом изложенного из выражений (4.3.16) следует, что  $\dot{f}_x, \dot{f}_y, \dot{f}_z$  — почти периодические функции переменной  $t$ . Тогда и определяемый равенством (4.3.15) модуль  $K(t)$  кинетического момента вращения Земли представляет собой почти периодическую функцию переменной  $t$ . Это влечет почти периодичность составляющих (4.3.6) вектора  $\mathbf{K}(t)$ . Поэтому согласно теореме об интеграле от почти периодической функции (см. Приложение) из равенств (4.3.5) следует ограниченность интегралов:

$$\begin{aligned} |K_X(t) - K_{X_0}| &= \left| \int_{t_0}^t Q_X(t) dt \right| < \infty, \\ |K_Y(t) - K_{Y_0}| &= \left| \int_{t_0}^t Q_Y(t) dt \right| < \infty, \\ |K_Z(t) - K_{Z_0}| &= \left| \int_{t_0}^t Q_Z(t) dt \right| < \infty, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

где  $K_{X_0} = K_X(t_0)$ ,  $K_{Y_0} = K_Y(t_0)$ ,  $K_{Z_0} = K_Z(t_0)$  — начальные данные задачи.

Система (4.4.7) приводит к очевидным оценкам:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t Q_{\bar{y}}(t) dt \right| < \infty, & \quad \left| \int_{t_0}^t Q_{\bar{z}}(t) dt \right| < \infty, \\ \left| \int_{t_0}^t Q_x(t) dt \right| < \infty, & \quad \left| \int_{t_0}^t Q_y(t) dt \right| < \infty, \\ \left| \int_{t_0}^t Q_z(t) dt \right| < \infty, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

из которых непосредственно следует

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\sin \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \cos \bar{\varphi} \right] dt \right| < \infty, \\ \left| \int_{t_0}^t \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\cos \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \sin \bar{\varphi} \right] dt \right| < \infty. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Почти периодичность переменной  $K(t)$  приводит к почти периодичности функций  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$ , выражаемых соотношениями (4.1.25). Поэтому и величина вектора угловой скорости вращения Земли  $\omega(t)$  является почти периодической функцией переменной  $t$ .

Средним значением почти периодической функции  $f(t)$  называется [48]

$$\mathcal{L}\{f\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t f(t) dt. \quad (4.4.10)$$

Согласно известным свойствам среднего значения (4.4.10) неотрицательные и не равные нулю тождественно почти периодические функции  $K(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $r(t)$  имеют средние значения

$$\mathcal{L}\{K\} = K_{cp} > 0, \quad \mathcal{L}\{\omega\} = \omega_{cp} > 0, \quad \mathcal{L}\{r\} = r_{cp} > 0. \quad (4.4.11)$$

Здесь использованы соотношения (4.1.34).

Найдем значения  $\mathcal{L}\{p\}$ ,  $\mathcal{L}\{q\}$  величин  $p(t)$  и  $q(t)$  осреднением уравнения (4.3.4) по определению (4.4.10):

$$\begin{aligned} A \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p - p_0}{t} - (C - B) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} q(t) r(t) dt = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\sin \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}} \cos \bar{\varphi} \right] dt, \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

$$\begin{aligned}
& B \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q - q_0}{t} + (A - C) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} p(t) r(t) dt = \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \bar{\theta} \right) \frac{\cos \bar{\varphi}}{\sin \bar{\theta}} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \bar{\varphi} \right] dt.
\end{aligned}$$

В силу неравенства (4.4.9) и почти периодичности функций  $p(t)$ ,  $q(t)$  и  $r(t)$  и из соотношений (4.4.12) имеем

$$\inf_{t \geq t_0} r(t) \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} q(t) dt \right| = r_{\inf} | \mathcal{L} \{q\} | \leq 0, \quad (4.4.13)$$

$$\inf_{t \geq t_0} r(t) \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} p(t) dt \right| = r_{\inf} | \mathcal{L} \{p\} | \leq 0.$$

Из этих выражений и условия (1.2.1) вытекает равенство нулю средних значений  $p(t)$  и  $q(t)$ , т. е.

$$\mathcal{L} \{p\} = 0, \quad \mathcal{L} \{q\} = 0. \quad (4.4.14)$$

Из (4.1.10) и (4.4.14) следует

$$\mathcal{L} \{K_x\} = 0, \quad \mathcal{L} \{K_y\} = 0. \quad (4.4.15)$$

Эти соотношения показывают, что векторы  $\mathbf{K}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  в среднем занимают общее положение — положение наименьшей главной центральной оси инерции  $Oz$  Земли. Покажем, что положение оси  $Oz$  является не только общим положением  $\mathbf{K}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  в среднем, но и их общим  $\boldsymbol{\omega}$ -предельным положением хотя бы для одной последовательности таких моментов времени  $\{t_n\}$ , для которых

$$\{t_n \in R_1^+\}, \quad \lim_{t_n \rightarrow \infty} t_n = \infty. \quad (4.4.16)$$

Если это не так, то ни для какой последовательности вида (4.4.16) условие (1.3.2) не имеет места. Последнее невозможно в силу постановки задачи.

Таким образом, доказано следующее утверждение: если переменные  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  и  $\dot{X}'_i, \dot{Y}'_i, \dot{Z}'_i$  относительного движения тел Солнечной системы представляют собой почти периодические функции, то векторы  $\mathbf{K}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  угловой скорости и кинетического момента вращения Земли при условии (1.3.1) в среднем занимают положение наименьшей главной центральной оси инерции  $Oz$  Земли.

По доказанному выше вектор  $\boldsymbol{\omega}_{np}$  является  $\boldsymbol{\omega}$ -предельным элементом вращения Земли, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}(t_n) = \boldsymbol{\omega}_{np}, \quad \boldsymbol{\omega}_{np} = \{0, 0, z_\infty\}. \quad (4.4.17)$$

Он постоянен как в пространстве, так и в теле Земли. Более того, ни один вектор, отличный от (4.4.17), с компонентой  $r(t) > 0$  не обладает указанным свойством. Следовательно, в  $\omega$ -предельном множестве  $\omega$ -предельное состояние (4.4.17) вращения Земли является единственным  $\omega$ -предельным вектором, постоянным как в пространстве, так и в теле Земли.

Оценим правую часть последнего равенства (4.3.7) с учетом (1.3.1) и (4.4.8):

$$\left| \int_0^t \frac{Q_Y(t)}{K(t)} dt \right| \leq \frac{1}{K_{\text{inf}}} \left| \int_0^t Q_Y(t) dt \right| < \infty.$$

Отсюда следует, что угол нутации  $\theta'(t)$  оси  $O\bar{Z}$  является почти периодической функцией и поэтому ограничен:

$$|\theta'(t)| \leq \theta^*.$$

В силу основных свойств почти периодических функций угол нутации  $\theta(t)$  оси инерции  $Oz$  Земли относительно системы координат  $OXYZ$ , выражаемый формулой

$$\cos [\bar{\theta}(t)] = C \frac{r(t)}{K(t)} = \frac{K \cdot e}{K}, \quad (4.4.18)$$

также представлен почти периодической функцией.

Рассмотрим переменные Андуйе  $K$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\theta'$  и вычислим их предел для последовательности (4.4.16). Предел функции  $K(t)$  для этой последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(t_n) = Cr_{\infty}. \quad (4.4.19)$$

Исходя из представления (4.4.18) угла  $\theta(t)$ , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\theta}(t_n) = 0. \quad (4.4.20)$$

Аналогично определяется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta'(t_n) = \theta'_{\infty}, \quad \theta'_{\infty} > 0. \quad (4.4.21)$$

Как известно, в последних трех уравнениях (4.3.8) возмущения, вносимые силовой функцией  $U$  механической системы  $G_n$ , малы по сравнению со слагаемыми, соответствующими вращению Земли по Эйлеру—Пуансо. Заметим, что почти периодические функции

$$K(t) \left( \frac{\sin^2 \bar{\varphi}(t)}{A} + \frac{\cos^2 \bar{\varphi}(t)}{B} \right),$$

$$K(t) \cos \bar{\theta}(t) \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \bar{\varphi}(t)}{B} - \frac{\cos^2 \bar{\varphi}(t)}{B} \right)$$

удовлетворяют неравенствам

$$K(t) \left( \frac{\sin^2 \bar{\varphi}(t)}{A} + \frac{\cos^2 \bar{\varphi}(t)}{B} \right) \geq \frac{K(t)}{B} \geq \frac{K_{\text{inf}}}{B} > 0,$$

$$K(t) \cos \bar{\theta}(t) \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \bar{\varphi}(t)}{A} - \frac{\cos^2 \bar{\varphi}(t)}{B} \right) \leq K(t) \cos \bar{\theta}(t) \frac{A-C}{AC} \leq 0$$

для всех  $t \in R_1$ .

Поэтому эти функции соответственно имеют положительное и отрицательное средние значения. Следовательно, правые части дифференциальных уравнений для переменных  $\bar{\psi}(t)$  и  $\bar{\varphi}(t)$  представимы в виде

$$d\bar{\psi}/dt = \mathcal{L}\{\psi\} + f_1(t), \quad d\bar{\varphi}/dt = \mathcal{L}\{\varphi\} + f_2(t), \quad (4.4.22)$$

где  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — почти периодические функции времени  $t \in R_1$ , с ограниченными неопределенными интегралами, а  $\mathcal{L}\{\psi\}$  и  $\mathcal{L}\{\varphi\}$  — средние значения углов  $\bar{\psi}(t)$  и  $\bar{\varphi}(t)$ , причем

$$\mathcal{L}\{\bar{\psi}\} > 0, \quad \mathcal{L}\{\bar{\varphi}\} < 0. \quad (4.4.23)$$

Интегрируя выражения (4.4.22), получим

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}_0 + \mathcal{L}\{\bar{\psi}\}t + \Psi(t), \quad (4.4.24)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_0 + \mathcal{L}\{\bar{\varphi}\}t + \Phi(t),$$

где  $\bar{\psi}_0$  и  $\bar{\varphi}_0$  — начальные значения переменных  $\bar{\psi}(t)$  и  $\bar{\varphi}(t)$ , а  $\bar{\Psi}(t)$  и  $\bar{\Phi}(t)$  — почти периодические функции.

Из (4.4.24) следует, что угол прецессии  $\psi(t)$  согласно неравенствам (4.4.23) во все время движения Земли неограниченно возрастает, а угол собственного вращения  $\varphi(t)$  неограниченно убывает. Это говорит о том, что прецессия земной оси относительно системы  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ , связанной с вектором  $\mathbf{K}$  кинетического момента вращения Земли, является обратной.

Рассмотрим главную часть выражения  $\partial U/\partial \theta'$ , выделив слагаемые вида

$$-3 \sum_{j=2}^{k-1} M_j^2 r_{1j}^2 z_j^2 (\cos^2 \bar{\psi} \sin^2 \bar{\theta} - \cos^2 \bar{\theta}), \quad (4.4.25)$$

где

$$\cos^2 \bar{\psi} \sin^2 \bar{\theta} - \cos^2 \bar{\theta} \leq \sin^2 \bar{\theta} - \cos^2 \bar{\theta} = -\cos^2 \bar{\theta} < 0.$$

Следовательно, выделенное слагаемое (4.4.25) частной производной  $\partial U/\partial \theta'$  неотрицательно и не равно тождественно нулю. Поэтому оно как почти периодическая функция имеет положительное среднее значение. Тогда угол  $\psi'(t)$  прецессии вектора  $\mathbf{K}$  с течением времени неограниченно возрастает, накладываясь на прецессию  $\bar{\psi}(t)$ .

Окончательно получаем следующее структурное решение задачи (4.3.23). Дифференциальные уравнения движения тел Солнечной системы относительно переменных (4.3.23) допускают условно-периодическое решение. Положения и скорости движения тел механической системы  $G_n$  в гелиоцентрических координатах и переменные Андуайе  $K(t)$ ,  $\theta'(t)$  и  $\bar{\theta}(t)$  представляются почти периодическими функциями времени, а другие переменные Андуайе  $\psi'(t)$ ,  $\bar{\psi}(t)$  и  $\bar{\varphi}(t)$  — суммой линейных и почти периодических функций.

Пусть  $\gamma$  — угол между осью вращения  $\omega$  и наименьшей главной центральной осью инерции  $Oz$  Земли. Тогда  $\tilde{\gamma}$  определяется равенством (4.1.25). Последнее согласно соотношениям (4.4.20) для последовательности (4.4.16) имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(t_n) = 0.$$

Это означает, что полюс Земли для последовательности (4.4.16) моментов времени  $t \in R_1$  испытывает вековое движение, стремясь к положению полюса инерции. По свойствам почти периодической функции получим, что если равенство (4.4.26) выполнено хотя бы для одной последовательности моментов времени (4.4.16), то оно имеет место для бесконечного числа  $\omega$ -последовательностей моментов времени.

Таким образом, в пределах рассматриваемой Солнечной системы полюс Земли испытывает вековое движение, являющееся результатом выхода Земли в ее вращательном движении на  $\omega$ -предельный режим (4.4.17).

Вековое замедление вращения Земли относительно центра масс, вызываемое приливным трением, хорошо изучено [54, 107]. Здесь мы рассмотрим вековое замедление иной природы — замедление вращения относительно центра масс абсолютно твердой Земли, взаимодействующей с внешними телами по закону Ньютона.

Обозначим через  $I(t)$  — момент инерции Земли относительно ее мгновенной оси вращения. Тогда кинетическая энергия Земли выражается равенством  $T(t) = 1/2 I(t) \omega^2(t)$ . Рассмотрим предел этого выражения для последовательности (4.4.16)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n) = 1/2 \lim_{n \rightarrow \infty} I(t_n) \omega^2(t_n) = 1/2 C r_\infty^2.$$

Согласно определению предела хотя бы для достаточно больших  $n$  приближенно выполняется условие  $I(t_n) \omega(t_n) \approx C r_\infty$ . Отсюда следует

$$\omega(t_n) / r_\infty = C / I(t_n) \geq 1,$$

где  $C$  — наибольший главный (полярный) момент инерции Земли.

Таким образом,  $\omega(t_n) \geq r_\infty$  и с выходом на  $\omega$ -предельный режим (4.4.17) Земля испытывает и вековое замедление.

## 5. Периодические вариации элементов вращательного движения Земли

По данным наблюдений, движение полюса Земли имеет по крайней мере годовую и чандлеровскую составляющие, имеющие периоды соответственно в один год и 430—435 средних солнечных суток. В последние годы большое внимание уделяется свободному околосуточному движению полюса нутационного характера [22, 54]. Особенно интенсивно изучаются периодические колебания продолжительности суток, что стало возможным с введением атомных стандартов времени. Наблюдаются различные классы периодических вариаций элементов вращательного движения Земли. Возникает необходимость специального теоретического исследования вопроса о существовании периодических вариаций движения полюса и продолжительности суток.

Рассмотрим модуль  $\omega(t)$  угловой скорости вращения Земли и его компоненты  $p(t)$ ,  $q(t)$  и  $r(t)$ . Как установлено выше, эти величины представляют собой почти периодические функции независимой переменной  $t \in R_1$ , причем имеют средние значения

$$\mathcal{L}\{\omega\} = \omega_{cp} > 0, \quad \mathcal{L}\{r\} = r_{cp} > 0, \quad \mathcal{L}\{p\} = 0, \quad \mathcal{L}\{q\} = 0. \quad (4.5.1)$$

Согласно теореме аппроксимации почти периодической функции [18, 48] для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать тригонометрические многочлены

$$N(t) = \sum_{n=1}^N a_n \exp(i\lambda_n t), \quad N_q(t) = \sum_{n=1}^{N_q} a_{nq} \exp(i\lambda_{nq} t), \quad (4.5.2)$$

$$N_r(t) = \sum_{n=1}^{N_r} a_{nr} \exp(i\lambda_n t), \quad N_p(t) = \sum_{n=1}^{N_p} a_{np} \exp(i\lambda_{np} t),$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \sup_{t \in R_1} |\omega(t) - N(t)| < \varepsilon, \quad \sup_{t \in R_1} |r(t) - N_r(t)| < \varepsilon, \\ \sup_{t \in R_1} |q(t) - N_q(t)| < \varepsilon, \quad \sup_{t \in R_1} |p(t) - N_p(t)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Показатели  $\lambda_n$ ,  $\lambda_{nr}$ ,  $\lambda_{nq}$  и  $\lambda_{np}$  многочленов (4.5.2) можно выбрать из показателей Фурье функций  $\omega(t)$ ,  $r(t)$ ,  $p(t)$  и  $q(t)$ . Тогда в (4.5.2) коэффициенты

$$a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \omega(t) \exp(-i\lambda_n t) dt,$$

$$a_{nr} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t r(t) \exp(-i\lambda_{nr} t) dt,$$

$$a_{nq} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(t) \exp(-i\lambda_{nq}t) dt, \quad (4.5.4)$$

$$a_{np} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p(t) \exp(-i\lambda_{np}t) dt$$

совпадут с коэффициентами Фурье функций  $\omega(t)$ ,  $r(t)$ ,  $p(t)$  и  $q(t)$  соответственно.

Следовательно, коэффициенты  $a_1$  и  $a_{1r}$ , соответствующие показателям Фурье  $\lambda_1=0$  и  $\lambda_{1r}=0$  функций  $\omega(t)$  и  $r(t)$  и выражаемые формулами (4.5.4), равны средним значениям (4.5.1), т. е.

$$a_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \omega(t) dt = \mathcal{L}\{\omega\} = \omega_{\text{ср}}, \quad (4.5.5)$$

$$a_{1r} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t r(t) dt = \mathcal{L}\{r\} = r_{\text{ср}}.$$

Из (4.5.5) следует, что число  $\lambda_1 = \lambda_{1r} = 0$  является показателем Фурье почти периодических функций  $\omega(t)$  и  $r(t)$ . Но число  $\lambda = 0$  не является показателем Фурье почти периодических функций  $p(t)$  и  $q(t)$ , ибо соответствующие ему коэффициенты Фурье функций  $p(t)$  и  $q(t)$  равны нулю как средние значения  $\mathcal{L}\{p\}$  и  $\mathcal{L}\{q\}$ .

Связь между коэффициентами многочленов (4.5.2) с нормой функций  $\omega(t)$ ,  $r(t)$ ,  $p(t)$  и  $q(t)$  выражается неравенством Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{N_\omega} a_n^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(t) dt = \|\omega\|^2, \quad (4.5.6)$$

$$\sum_{n=1}^{N_r} a_{nr}^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t r^2(t) dt = \|r\|^2,$$

$$\sum_{n=1}^{N_q} a_{nq}^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t q^2(t) dt = \|q\|^2,$$

$$\sum_{n=1}^{N_p} a_{np}^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p^2(t) dt = \|p\|^2.$$

Напомним, что множество показателей Фурье почти периодической функции не более чем счетно. Известно также, что каждое счетное множество действительных чисел имеет базис, содержащийся в этом множестве. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что показатели  $\lambda_n$ ,  $\lambda_{nr}$ ,  $\lambda_{nq}$  и  $\lambda_{np}$  являются базисными.

Напишем первые два выражения (4.5.2):

$$N(t) = \omega_{\text{ср}} + \sum_{n=2}^N a_n \exp(i\lambda_n t),$$

$$N_r(t) = r_{\text{ср}} + \sum_{n=2}^{N_r} a_{nr} \exp(i\lambda_{nr} t),$$

где для  $n \geq 2$  показатели  $\lambda_n$  и  $\lambda_{nr}$  не равны нулю. Следовательно, функции  $\exp(i\lambda_n t)$  и  $\exp(i\lambda_{nr} t)$  имеют действительные периоды

$$\pi_n = 2\pi/|\lambda_n|, \quad \pi_{nr} = 2\pi/|\lambda_{nr}|. \quad (4.5.7)$$

Так как в двух последних соотношениях (4.5.2) каждый из показателей  $\lambda_{nq}$  и  $\lambda_{np}$  не равен нулю, то функции  $\exp(i\lambda_{nq} t)$  и  $\exp(i\lambda_{np} t)$  также имеют действительные периоды

$$\pi_{nq} = 2\pi/|\lambda_{nq}|, \quad \pi_{np} = 2\pi/|\lambda_{np}|. \quad (4.5.8)$$

Таким образом, функции  $\omega(t)$ ,  $r(t)$ ,  $q(t)$  и  $p(t)$  имеют действительные периоды (4.5.7) и (4.5.8). Величины  $\pi_n$  выражают периоды колебания продолжительности суток, так как полином  $N(t)$  приближает функцию  $\omega(t)$  с точностью до  $\epsilon$  согласно оценкам (4.5.3).

Угол  $\tilde{\gamma}(t)$  между осью вращения и наименьшей осью центрального эллипсоида инерции Земли выражается формулой (4.1.25), следовательно, периоды его колебаний с точностью до  $\epsilon$  могут быть получены из выражений (4.5.7). Так как угол  $\tilde{\gamma}$  определяет колебание полюса Земли, то аналогичное утверждение справедливо относительно движения самого полюса. В частности, угол  $\tilde{\gamma}$  имеет период  $r_{\text{ср}}\omega/\omega_{\text{ср}}$ . Если учесть близость величин  $r_{\text{ср}}$  и  $\omega_{\text{ср}}$ , то угол  $\tilde{\gamma}$  имеет почти суточный период, который выражает так называемый околосуточный период колебаний полюса.

Таким образом, элементы вращательного движения Земли имеют периодические вариации. Периоды этих вариаций могут быть вычислены по схеме построения приближенных условно-периодических решений гамильтоновых систем:

$$dx_i/dt = \partial H/\partial u_i, \quad du_i/dt = -\partial H/\partial x_i,$$

$$dy_i/dt = \partial H/\partial v_i, \quad dv_i/dt = -\partial H/\partial y_i,$$

$$dz_i/dt = \partial H/\partial \omega_i, \quad d\omega_i/dt = -\partial H/\partial z_i,$$

$$d\psi/dt = \partial H/\partial \Psi, \quad d\Psi/dt = -\partial H/\partial \psi,$$

$$d\varphi/dt = \partial H/\partial \Phi, \quad d\Phi/dt = -\partial H/\partial \varphi,$$

$$d\theta/dt = \partial H/\partial \Theta, \quad d\Theta/dt = -\partial H/\partial \theta,$$

где канонические импульсы имеют вид

$$u_i = \frac{\partial T}{\partial x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad v_i = \frac{\partial T}{\partial y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt},$$

$$\omega_i = \frac{\partial T}{\partial z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\Psi = \partial T/\partial \dot{\psi} = Ap \sin \varphi \sin \theta + Bq \cos \varphi \sin \theta + Cr \cos \theta,$$

$$\Phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Cr, \quad \Theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = Ap \cos \varphi - Bq \sin \varphi.$$

Здесь  $H$  — гамильтониан.

Методы построения приближенных условно-периодических решений гамильтоновых систем изложены в [15, 16]. При их использовании полезны оценки (4.5.6) с учетом выражения интеграла энергии [15, 38].

## 6. Механизм векового удаления Луны от Земли

Вековое удаление Луны от Земли, обусловленное приливным трением, объясняется переходом кинетической энергии вращения Земли относительно центра масс в энергию орбитального движения Луны [66, 118]. Этот же механизм векового удаления Луны действует и при постановке задач общей теории вращения Земли.

Введем систему Земля—Луна, в которой Земля рассматривается как абсолютно твердое тело, а Луна — как материальная точка. Тогда вращение Земли относительно ее центра масс имеет  $\omega$ -предельный режим (4.4.17) и замедляется в результате выхода на этот режим вращения. Поэтому кинетическая энергия  $T_\omega$  вращения Земли

$$T_\omega = 1/2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad (4.6.1)$$

для последовательности (4.4.16) моментов времени уменьшается до постоянной величины  $T_\omega$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_\omega(t_n) = T_{np}, \quad T_{np} < T_\omega. \quad (4.6.2)$$

Рассмотрим некоторые следствия неравенства (4.6.2). С этой целью обратимся к закону сохранения энергии системы Земля—Луна:

$$1/2 \{M_{k-1} [u_i^2 + v_i^2 + \omega_i^2] + M_k [u_i^2 + v_i^2 + \omega_i^2] + \\ + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\} - U_{k-1,k} = h_2, \quad h_2 = \text{const.} \quad (4.6.3)$$

Пусть инерциальная система  $O^*X^*Y^*Z^*$  имеет начало в центре масс системы Земля—Луна. Тогда инвариантные соотношения дифференциальных уравнений движения имеют вид

$$\begin{aligned} M_k \xi_k + M_{k-1} \xi_{k-1} &= 0, & M_k u_k + M_{k-1} u_{k-1} &= 0, \\ M_k \eta_k + M_{k-1} \eta_{k-1} &= 0, & M_k v_k + M_{k-1} v_{k-1} &= 0, \\ M_k \zeta_k + M_{k-1} \zeta_{k-1} &= 0, & M_k \omega_k + M_{k-1} \omega_{k-1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Из этих соотношений выразим координаты и компоненты скорости центра масс Земли:

$$\begin{aligned} \xi_k &= -\frac{M_{k-1}}{M_k} \xi_{k-1}, & u_k &= -\frac{M_{k-1}}{M_k} u_{k-1}, \\ \eta_k &= -\frac{M_{k-1}}{M_k} \eta_{k-1}, & v_k &= -\frac{M_{k-1}}{M_k} v_{k-1}, \\ \zeta_k &= -\frac{M_{k-1}}{M_k} \zeta_{k-1}, & \omega_k &= -\frac{M_{k-1}}{M_k} \omega_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Подставляя (4.6.1) и (4.6.5) в выражение (4.6.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_{k-1} \left[ (u_{k-1}^2 + v_{k-1}^2 + \omega_{k-1}^2) + \frac{M_{k-1}}{M_k} (u_{k-1}^2 + v_{k-1}^2 + \omega_{k-1}^2) \right] + \\ + T_\omega - U_{k-1,k} = \dot{h}_2. \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Рассмотрим предел левой части выражения (4.6.6) для последовательности (4.4.15)

$$\frac{1}{2} M_{k-1} \left[ \frac{M_k - M_{k-1}}{M_k} (u_{k-1,\infty}^2 + v_{k-1,\infty}^2 + \omega_{k-1,\infty}^2) + T_{np} - U_{k-1,k}^\infty \right] = h_2, \quad (4.6.7)$$

где

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_{k-1}(t_n) &= u_{k-1,\infty}, & \lim_{n \rightarrow \infty} v_{k-1}(t_n) &= v_{k-1,\infty}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{k-1}(t_n) &= \omega_{k-1,\infty}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что правая часть выражения (4.6.6) представляет собой постоянную величину. Согласно (4.6.2) разность  $T_\omega - T_{np} = T_0 > 0$  и эта часть кинетической энергии вращения Земли затрачивается на динамику эволюции системы Земля—Луна. Из (4.6.7) следует, что часть  $T_c$  кинетической энергии может переходить либо в потенциальную энергию  $V_{k-1,k} = U_{k-1,k}^\infty$  системы Земля—Луна, либо в кинетическую энергию поступательного движения Луны, умноженную на отношение полной массы  $M_{k-1} + M_h$  к массе Земли, либо, наконец, распределяется между этими видами энергии. Покажем, что на самом деле имеет ме-

сто переход энергии  $T_0$  как в кинетическую энергию поступательного движения Луны, так и в потенциальную.

Рассмотрим указанные случаи.

Случай 1. Пусть кинетическая энергия, высвобожденная в результате эволюции системы Земля—Луна, полностью переходит в энергию относительного поступательного движения Луны, т. е. величина квадрата скорости этого движения возрастает:

$$u_{k-1}^2 + v_{k-1}^2 + \omega_{k-1}^2 < u_{k-1,\infty}^2 + v_{k-1,\infty}^2 + \omega_{k-1,\infty}^2. \quad (4.6.8)$$

Тогда центробежная сила, возрастающая вместе с левой частью выражения (4.6.8), вызывает увеличение радиуса-вектора  $r_{k-1}(t)$ . Поэтому для  $\omega$ -последовательности (4.4.16) величина радиуса-вектора  $r_{k-1}$  центра масс Луны возрастает:

$$r_{k-1}(t_n) < r_{k-1,\infty}, \quad (4.6.9)$$

где  $r_{k-1,\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{k-1}(t_n)$ .

Таким образом, переход кинетической энергии  $T_0$  в кинетическую энергию Луны приводит к удалению последней от Земли, что выражает неравенство (4.6.9). Заметим, что при этом Луна удаляется лишь на некоторое конечное расстояние, согласованное с высвобожденной кинетической энергией  $T_0$ , которая ограничена.

С учетом (4.6.9) рассмотрим выражение силовой функции  $U_{k-1,k}$  и его предел для последовательности моментов времени (4.4.15) при  $n \rightarrow \infty$ . В выражение  $U_{k-1,k}$  величина  $r_{k-1}$  входит в виде обратного расстояния  $r_{k-1}^{-1}$ . Следовательно,

$$U_{k-1,k} > U_{k-1,k}^\infty, \quad (4.6.10)$$

где

$$U_{k-1,k}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{k-1,k}(t_n).$$

Как известно, потенциальная энергия  $V_k$  системы Земля—Луна равна

$$V_k = -U_{k-1,k}. \quad (4.6.11)$$

Обозначим через  $V_k^\infty$  предел при  $n \rightarrow \infty$  потенциальной энергии системы Земля—Луна для последовательности (4.4.15), т. е.

$$V_k^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_k(t_n). \quad (4.6.12)$$

Сравнивая (4.6.10) и (4.6.11) с учетом (4.6.12), получим

$$V_k^\infty = -\lim_{n \rightarrow \infty} U_{k-1,k}(t_n) = -U_{k-1,k}^\infty > -U_{k-1,k}, \quad (4.6.13)$$

т. е. удаление Луны от Земли обуславливает также возрастание потенциальной энергии самой механической системы Земля—Луна. Это означает, что часть кинетической энергии  $T_0$  этой си-

стемы должна переходить в потенциальную энергию. Такое утверждение противоречит допущению, что кинетическая энергия  $T_0$  переходит полностью в кинетическую энергию Луны.

Случай 2. Пусть кинетическая энергия  $T_0$ , высвобожденная в результате эволюции движения системы Земля—Луна, полностью переходит в потенциальную энергию  $V_h$  и имеет место неравенство (4.6.13).

Рост потенциальной энергии  $V_h$  (4.6.11) обуславливает уменьшение значения силовой функции  $U_{h-1, h}$  с течением времени  $t$  для  $\omega$ -последовательности (4.4.16). Это видно из формулы (4.6.10). В свою очередь, соотношение (4.6.10) означает, что силовая функция убывает для  $\omega$ -последовательности моментов времени (4.4.16). Как известно, при постоянстве масс взаимно притягивающихся тел закон Ньютона зависит лишь от одной переменной—расстояния между этими телами. Следовательно, соотношение (4.6.10) влечет за собой неравенство (4.6.9), т. е. показывает удаление Луны от Земли.

Если имеет место неравенство (4.6.9), то вместе с радиусом-вектором  $r_1(t)$  возрастает и скорость движения. Это приведет к неравенству (4.6.8). Тогда одновременно с потенциальной энергией  $V_h$  возрастает и кинетическая энергия Луны. Но это противоречит допущению о полном переходе кинетической энергии  $T_0$  в потенциальную энергию системы Земля—Луна.

Из рассмотренных случаев следует, что потенциальная энергия системы Земля—Луна и кинетическая энергия Луны взаимосвязаны и изменение любой из них непременно обуславливает изменение другой.

Таким образом, часть  $T_0$  кинетической энергии вращения Земли, высвобожденная в результате векового замедления ее вращения, переходит как в потенциальную энергию системы Земля—Луна, так и в кинетическую энергию Луны. В результате переноса энергии порождается вековое удаление Луны от Земли. При этом Луна удаляется на расстояние, зависящее от величины высвобожденной энергии вращательного движения Земли из-за векового замедления ее вращения.

## 7. Механизм сближения плоскости орбит тел Солнечной системы с ее неизменяемой плоскостью Лапласа

Рассмотрим первые интегралы дифференциальных уравнений движения тел Солнечной системы в абсолютных координатах  $O^*X^*Y^*Z^*$ :

$$\sum_{i=0}^k M_i u_i = a_1, \quad \sum_{i=0}^k M_i \xi_i = a_1 t + b_1,$$

$$\sum_{i=0}^k M_i v_i = a_2, \quad \sum_{i=0}^k M_i \eta_i = a_2 t + b_2,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^k M_i \omega_i &= a_3, & \sum_{i=0}^k M_i \xi_i &= a_3 t + b_3, \\
\sum_{i=0}^k M_i (\eta_i \omega_i - \xi_i v_i) + A p \alpha_x + B q \beta_x + C r \gamma_x &= c_1, \\
\sum_{i=0}^k M_i (\xi_i u_i - \xi_i \omega_i) + A p \alpha_y + B q \beta_y + C r \gamma_y &= c_2, \\
\sum_{i=0}^k M_i (\xi_i v_i - \eta_i u_i) + A p \alpha_z + B q \beta_z + C r \gamma_z &= c_3, \\
\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=0}^k M_i (u_i^2 + v_i^2 + \omega_i^2) + A p^2 + B q^2 + C r^2 \right] - U &= h.
\end{aligned}
\tag{4.7.1}$$

Обозначим абсолютные координаты центра масс  $O^*$  Солнечной системы через  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$ . Как известно,

$$\xi^* = \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^k M_i \xi_i, \quad \eta^* = \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^k M_i \eta_i,
\tag{4.7.2}$$

$$\zeta^* = \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^k M_i \zeta_i,$$

где

$$\mu = \sum_{i=0}^k M_i.
\tag{4.7.3}$$

Используя (4.7.3) и (4.7.2), перепишем интегралы движения ее центра масс в виде

$$\begin{aligned}
d\xi^*/dt &= \alpha_1, & \xi^*(t) &= \alpha_1 t + \beta_1, \\
d\eta^*/dt &= \alpha_2, & \eta^*(t) &= \alpha_2 t + \beta_2, \\
d\zeta^*/dt &= \alpha_3, & \zeta^*(t) &= \alpha_3 t + \beta_3.
\end{aligned}
\tag{4.7.4}$$

Здесь

$$\alpha_i = a_i/\mu, \quad \beta_i = b_i/\mu \quad (i = 1, 2, 3).
\tag{4.7.5}$$

Формулы (4.7.4) показывают, что центр масс Солнечной системы в абсолютном пространстве движется прямолинейно и равномерно. Величинами (4.7.5) характеризуются как скорость  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , так и параметрическое уравнение траектории движения этого центра масс.

Рассмотрим в абсолютном пространстве кинетический момент Солнечной системы

$$\mathfrak{D} = \{c_1, c_2, c_3\}, \quad (4.7.6)$$

где  $c_1, c_2, c_3$ —постоянные площадей.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через центр масс Солнечной системы ортогонально ее кинетическому моменту относительно точки  $O^*$ :

$$c_1 (\xi - \xi_0^*) + c_2 (\eta - \eta_0^*) + c_3 (\zeta - \zeta_0^*) = 0. \quad (4.7.7)$$

Здесь  $\xi_0^*, \eta_0^*, \zeta_0^*$ —фиксированные в момент времени  $t_0$  координаты точки  $O^*$ :

$$\xi_0^* = \xi^*(t_0), \quad \eta_0^* = \eta^*(t_0), \quad \zeta_0^* = \zeta^*(t_0). \quad (4.7.8)$$

Вектор (4.7.6) в силу первых интегралов остается постоянным как по величине, так и по направлению во все время движения в абсолютном пространстве. Поэтому плоскость (4.7.7), для которой вектор  $\mathfrak{D}$  является нормалью, сохраняет неизменную ориентацию и называется *неизменяемой плоскостью Лапласа*.

Неизменяемая плоскость Лапласа Солнечной системы примечательна тем, что она как бы «притягивает» траектории движения тел системы и расположена вблизи плоскости эклиптики современной эпохи. Более того, астрономические наблюдения указывают на сближение плоскостей орбит планет Солнечной системы. Это наталкивает на мысль, что в ходе эволюции движения Солнечной системы ее тела «опускаются» на неизменяемую плоскость Лапласа так, чтобы их скорости были компланарны.

Допустим

$$\mathfrak{D}^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0.$$

(Это допущение справедливо для Солнечной системы.)

Координатную плоскость  $O^*\xi\eta$  абсолютной системы  $O^*\xi\eta\zeta$  совместим с неизменяемой плоскостью Лапласа (4.7.7), ее начало выберем в точке (4.7.8) и положим  $t_0 = 0$ . Соответственно перепишем уравнения (4.7.4) и (4.7.7):

$$\begin{aligned} d\xi^*/dt &= \alpha_{10}, & \xi^*(t) &= \alpha_{10}t, \\ d\eta^*/dt &= \alpha_{20}, & \eta^*(t) &= \alpha_{20}t, \\ d\zeta^*/dt &= \alpha_{30}, & \zeta^*(t) &= \alpha_{30}t, & \alpha_{30} &= 0, & \zeta(t) &= 0, \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

причем  $c_1 = 0, c_2 = 0$ , согласно условию  $\mathfrak{D}^2 \neq 0$  имеем  $c_3 \neq 0$ .

При таком выборе абсолютной системы скорость и кинетический момент движения центра масс Солнечной системы ортогональны, так как их скалярное произведение равно нулю ( $c_1\alpha_{10} + c_2\alpha_{20} + c_3\alpha_{30} = 0$ ) в силу (4.7.7). Прямая (4.7.9) полностью лежит на неизменяемой плоскости Лапласа.

Обратимся к (4.7.1) с учетом предельных соотношений (4.4.7). Последние выражают постоянство вектора  $K$  кинетического момента вращения Земли относительно центра масс в абсолютной системе

$$\begin{aligned} K_X &= K_{X\infty}, & K_{X\infty} &= \text{const}, \\ K_Y &= K_{Y\infty}, & K_{Y\infty} &= \text{const}, \\ K_Z &= K_{Z\infty}, & K_{Z\infty} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  для интегралов (4.7.1) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k M_i (\eta_i \omega_i - \zeta_i v_i) (t_n) &= -K_{X\infty}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k M_i (\zeta_i u_i - \xi_i \omega_i) (t_n) &= -K_{Y\infty}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k M_i (\xi_i v_i - \eta_i u_i) (t_n) &= -K_{Z\infty}. \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Заметим, что по виду они совпадают с выражениями интегралов площадей в планетной системе материальных точек  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ).

Запишем также предельное выражение для интеграла энергии, соответствующее последовательности (4.4.16)

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=0}^k M_i (u_i^2 + v_i^2 + \omega_i^2) (t_n) - U(t_n) \right] = h - C\tau_\infty^2, \quad (4.7.12)$$

где

$$U(t_n) = \frac{G}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{M_i M_j}{r_{ij}(t_n)}. \quad (4.7.13)$$

Это соотношение является следствием того, что с течением времени  $t_n \rightarrow \infty$  главный момент  $Q(t_n)$  стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q(t_n)\| = 0. \quad (4.7.14)$$

Зависимости (4.7.11) и (4.7.12) указывают на такую эволюцию системы, когда ее тела в пространстве избирают законы движения, при которых выполняется (4.7.14). При этом исходная модель Солнечной системы эквивалентна в смысле первых интегралов (4.7.11) и (4.7.12) планетной системе материальных точек, начальные условия движения которых определяют постоянные величины

$$\begin{aligned} C_{1\infty} &= -K_{X\infty}, & C_{2\infty} &= -K_{Y\infty}, & C_{3\infty} &= -K_{Z\infty}, \\ h_\infty &= h - C\tau_\infty^2. \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

Заметим, что

$$K_{X\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} K(t_n) \sin \psi'(t_n) \sin \theta'(t_n) = K_{\infty} \sin \theta'_{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \psi'(t_n),$$

$$K_{Y\infty} = - \lim_{n \rightarrow \infty} K(t_n) \cos \psi' \sin \theta' = - K_{\infty} \sin \theta'_{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \psi'(t_n),$$

(4.7.16)

$$K_{Z\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} K(t_n) \cos \theta' = K_{\infty} \cos \theta'_{\infty}.$$

Как известно, синус и косинус для значений их аргументов, стремящихся к бесконечности, не стремятся ни к каким конечным пределам. Следовательно, равенства (4.7.16) имеют смысл лишь при  $\theta'_{\infty} = 0$ , так как установлено, что величины  $K_{X\infty}$ ,  $K_{Y\infty}$  существуют. Тогда

$$K_{X\infty} = 0, \quad K_{Y\infty} = 0, \quad K_{Z\infty} = K_{\infty}. \quad (4.7.17)$$

Отсюда видно, что кинетический момент вращения Земли относительно ее центра масс с течением времени стремится к положению, коллинеарному с кинетическим моментом Солнечной системы.

Плоскость, проходящая через центр масс  $O$  Земли, ортогональна вектору (4.7.17). Относительно абсолютной системы  $O^* \xi \eta \zeta$  уравнение плоскости имеет вид

$$K_{X\infty} (\xi - \xi_k) + K_{Y\infty} (\eta - \eta_k) + K_{Z\infty} (\zeta - \zeta_k) = 0 \quad (4.7.18)$$

или согласно равенствам (4.7.17)

$$\xi = \xi_k, \quad (4.7.19)$$

где  $\xi_k$ ,  $\eta_k$ ,  $\zeta_k$  — абсолютные координаты точки  $O_k$ .

Плоскость, определяемая уравнениями (4.7.18) или (4.7.19), сохраняет неизменную ориентацию относительно абсолютных осей и вместе с тем ортогональна вектору (4.7.6).

Рассмотрим барицентрическую систему  $O'X^*Y^*Z^*$ , отличающуюся от абсолютной системы тем, что она совершает поступательное перемещение вдоль прямой (4.7.9) с постоянной скоростью. Следовательно, система  $O'X^*Y^*Z^*$  инерциальна и относительно нее уравнение неизменяемой плоскости Лапласа имеет вид

$$Z^* = 0. \quad (4.7.20)$$

Предположим, что координатная ось  $O^* \xi$  совмещена с прямой (4.7.9). Запишем формулы перехода от системы  $O^* \xi \eta \zeta$  к  $O'X^*Y^*Z^*$ :

$$\xi = X^* + \xi^*, \quad \eta = Y^*, \quad \zeta = Z^*. \quad (4.7.21)$$

Тогда абсолютные координаты тел Солнечной системы будут связаны соотношениями

$$\xi_i = X_i^* + \xi^*, \quad \eta_i = Y_i^*, \quad \zeta_i = Z_i^* \quad (i = 0, 1, \dots, k). \quad (4.7.22)$$

Согласно (4.7.21) и (4.7.22) плоскость (4.7.19) в барицентрической системе описывается выражением

$$Z = Z_{k\infty}^* \quad (4.7.23)$$

Как было доказано, переменные  $\bar{X}_i^*$ ,  $\bar{Y}_i^*$ ,  $\bar{Z}_i^*$  для всех  $i = 0, 1, \dots, k$  являются почти периодическими функциями времени  $t$ . Следовательно, переменные  $X_i^*$ ,  $Y_i^*$ ,  $Z_i^*$  также являются почти периодическими функциями времени, так как каждая из них определена разностью двух почти периодических функций. Поэтому плоскость (4.7.23), сохраняя ориентацию, может перемещаться вдоль оси  $O'Z^*$  (а также вдоль  $O^*\xi$ ). Такое движение в действительности невозможно, ибо согласно выражениям первых двух интегралов движения центра масс в барицентрических координатах

$$dZ^*/dt = 0,$$

т. е.  $Z^* = \text{const.}$

Как следствие имеем

$$dZ_n/dt = 0, \quad (4.7.24)$$

$$\frac{dZ_{k\infty}^*}{dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dZ_k^*}{dt}(t_n) = 0. \quad (4.7.25)$$

Отсюда следует

$$Z_{k\infty}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} Z_k^*(t) = \text{const.} \quad (4.7.26)$$

Известно, что при поступательном перемещении Земли около Солнца она «пронизывает» неизменяемую плоскость Лапласа, иначе говоря, согласно наблюдениям существуют моменты времени  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_m$ , при которых

$$Z_k^*(\bar{t}_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m). \quad (4.7.27)$$

Исходя из свойств почти периодических функций найдется последовательность моментов времени

$$\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n, \dots \quad (4.7.28)$$

таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{t}_n = \infty$ , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_k^*(\bar{t}_n) = 0. \quad (4.7.29)$$

Сравнивая (4.7.26) и (4.7.29), получим

$$Z_{k\infty}^* = 0. \quad (4.7.30)$$

Из (4.7.30) видно, что для последовательности моментов времени  $\{\bar{t}_n\}$  орбита поступательного движения Земли около Солнца стремится к положению плоскости Лапласа, ибо ее  $Z$ -координата при  $\bar{t}_n \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Рассмотрим модель Солнечной системы, состоящую из центрального тела (материальной точки) и больших планет. Пусть одна из больших планет принята за абсолютно твердое тело, а остальные являются материальными точками. Отнесем к этому телу  $O_i$  все рассуждения, проведенные относительно Земли. Поэтому каждое из тел  $O_i$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ) Солнечной системы, подобно Земле, выходит к  $\omega$ -предельному режиму, состоящему из: а)  $\omega$ -предельного режима орбиты поступательного движения тела  $O_i$  вокруг Солнца, который является плоской кривой, лежащей на неизменяемой плоскости Лапласа, и существует  $\omega$ -последовательность моментов времени  $\{t_n\}$ , при которых этот режим будет притягивать траекторию тела  $O_i$ ; б)  $\omega$ -предельного режима вращения тела  $O_i$  относительно своего центра масс, представляющего собой равномерное вращение вокруг неизменной по направлению оси.

При этом имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_i(t_n)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (4.7.31)$$

где  $Q_i(t)$  — главный момент всех приложенных к телу  $O_i$  внешних сил относительно его центра масс.

Центральное тело принадлежит одновременно всем плоскостям орбит каждого из тел  $M_i$ . Поэтому  $\omega$ -предельный режим «а» для всей системы определяется совокупностью трех уравнений, полученных из (4.7.31):

$$Q_{ix^*} = 0, \quad Q_{iy^*} = 0, \quad Q_{iz^*} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (4.7.32)$$

В рассуждениях мы без оговорки перешли к модели Солнечной системы, состоящей из материальной точки—Солнца и  $k$  больших планет системы, каждая из которых рассматривается как абсолютно твердое тело.

Левые части выражений (4.7.32) равны:

$$\begin{aligned} Q_{ix^*} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \cos \theta_i \right) \frac{\sin \psi_i}{\sin \theta_i} + \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \cos \psi_i, \\ Q_{iy^*} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \cos \theta_i \right) \frac{\cos \psi_i}{\sin \theta_i} - \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \sin \psi_i, \\ Q_{iz^*} &= \frac{\partial U}{\partial \psi_i}, \end{aligned} \quad (4.7.33)$$

где  $\psi_i, \varphi_i, \theta_i$ —углы Эйлера, определяющие взаимное расположение собственной системы  $O_i x^i y^i z^i$  тела  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) и инерциальной системы  $O^* X^* Y^* Z^*$ , являющейся гелиоцентрической, ибо ее координатные оси параллельны осям  $O^* X^*, O^* Y^*, O^* Z^*$ .

В выражениях (4.7.33) силовая функция  $U$  имеет вид (4.2.1), но слагаемые  $U_{ii}$  ( $i=2, 3, \dots, k$ )—вид ряда (4.2.3), а  $U_{ij}$  ( $i \neq j = 1, 2, \dots, k$ ) представляют собой произведение двух рядов вида (4.2.3). Общий вид силовой функции притяжения двух матери-

альных тел и его разложение по сферическим функциям даны Г. Н. Дубошиным [24].

Укажем схему распространения алгоритма исследования вращения Земли относительно центра масс, в котором рассматривалась модель Солнечной системы при одном абсолютно твердом теле — Земле, на исследование поступательно-вращательного движения модели Солнечной системы, состоящей из  $k$  абсолютно твердых тел — больших планет. Подобная схема строится в следующей последовательности.

1. Допустим, что необходимо исследовать поступательно-вращательное движение  $i$ -го тела  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ). Тогда силовую функцию каждого из оставшихся тел  $M_j$  ( $j=1, 2, \dots, i-1$ ) с заданной степенью точности  $\epsilon$  аппроксимируем силовой функцией системы конечного числа материальных точек  $A_1^j, A_2^j, \dots, A_l^j$ , жестко связанных между собой и фиксированных на поверхности соответствующей сферы  $S_j$ . При этом получим модель Солнечной системы, состоящую из  $(k-1)l+1$  материальных точек и одного абсолютно твердого тела с  $3(l-2)(k-1)$  аналитическими связями. Исследование поступательно-вращательного движения такой модели Солнечной системы укладывается в схему КАМ-теории.

2. Рассматривается процесс предельного перехода при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В силу равномерности примененного алгоритма аппроксимации силовых функций процесс предельного перехода при  $\epsilon \rightarrow 0$  равномерно сходится и дает картину поступательно-вращательного движения модели Солнечной системы из  $k$  абсолютно твердых тел, где отдельно рассматривается вращение тела  $M_l$  ( $l$  — фиксированный индекс) относительно центра масс.

3. Указанный в первых двух пунктах алгоритм последовательно применяется ко всем телам.

Заметим, что согласно выражениям (4.7.32) каждый из векторов  $K_i'$ , где  $K_i$  — вектор кинетического момента вращения тел относительно центра масс, с течением времени становится постоянным, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_i(t) = K_{i\infty} = \text{const.}$$

Следовательно, вектор

$$\Omega = \sum_{i=1}^k K_i(t)$$

при  $t_n \rightarrow \infty$  имеет своим пределом постоянный вектор  $\Omega_\infty$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_i(t_n) = \sum_{i=1}^k K_{i\infty} = \Omega_\infty. \quad (4.7.34)$$

Очевидно, одного соотношения (4.7.34) недостаточно для определения предельного положения каждого из векторов  $K_i$  при  $t \rightarrow \infty$ . Однако соотношения (4.7.32) и (4.7.33) показывают, что

каждое из тел  $M_i$  при  $t \rightarrow \infty$  избирает такой режим движения, при котором его вращение относительно центра масс будет невозмущенным и совпадает с вращением по Эйлеру—Пуансо.

Для больших значений времени модель Солнечной системы, содержащая  $k$  абсолютно твердых тел—больших планет в рамках поступательного движения каждого из тел—ведет себя как система точечных планет. При этом все тела будут расположены на неизменяемой плоскости Лапласа и иметь начальные условия движения, отличные от начальных данных исходной системы. Напомним, что поступательное движение тел реальной Солнечной системы с большой степенью точности описывается уравнениями движения системы точечных планет. Связь между поступательными и вращательными движениями тел Солнечной системы может быть полезной при анализе особенностей эволюции движения Солнечной системы, таких, как выход на  $\omega$ -предельный режим и др.

Отметим в заключение основные результаты изложенного подхода в исследовании вращения Земли и эволюции Солнечной системы.

Солнечная система, состоящая из Земли, рассматриваемой как абсолютно твердое тело, и материальных точек—Солнца, больших планет и Луны—позволяет исследовать вековые вариации элементов вращения Земли. В пределах постановки задачи о взаимосвязанном поступательно-вращательном движении тел системы эволюция вращения Земли может быть описана как следствие интегралов площадей и энергии системы. Для этого необходимо выбрать оскулирующие элементы, описывающие вращение Земли и переменные, определяющие движение центров масс тел системы и допускающие необходимые оценки. Наиболее удобными оказались переменные Андуайе и барицентрические декартовы координаты центров масс тел Солнечной системы. В указанных переменных удается получить структурное решение задачи о движении планетной системы. Решение задачи о движении планетной системы имеет следующую структуру: а) гелиоцентрические и барицентрические декартовы координаты тел системы являются почти периодическими функциями времени вместе с их первыми производными по времени; б) переменные Андуайе—модуль  $K$  вектора кинетического момента вращения Земли, угол нутации  $\theta'$  этого вектора в абсолютном пространстве и угол нутации  $\bar{\theta}$  оси инерции  $Oz$  Земли относительно вектора  $\mathbf{K}$  являются условно-периодическими функциями времени  $t$ ; в) угол прецессии  $\bar{\psi}$  и угол собственного вращения  $\bar{\phi}$  Земли относительно квазикениговой системы представлены условно-периодическими функциями времени  $t$  и выражаются суммой линейной и почти периодической функций независимой переменной времени; г) угол прецессии вектора  $\mathbf{K}$  неограниченно возрастает с течением времени  $t$ , но не представим в виде условно-периодической функции.

Структурное решение дифференциальных уравнений движения тел Солнечной системы позволяет построить полную картину эволюции вращения Земли как выход на предельный режим вращения. Вопрос о существовании и единственности предельного режима вращения Земли решен путем исследования корректности постановки модельной задачи о движении тел Солнечной системы. Корректность постановки задачи включает: единственность решения задачи Коши, непрерывную зависимость решения от начальных данных и правых частей соответствующих дифференциальных уравнений, продолжаемость решения на всю действительную ось времени. Показано, что вращательное движение Земли эволюционирует так, что порождается как вековое движение полюса Земли, так и вековое замедление ее вращения.

Эти основные качественные выводы получены методами КАМ-теории. При этом предлагается замена абсолютно твердого тела (Земли) системой жестко связанных между собой материальных точек, силовая функция которых с возрастанием заданной точности ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) равномерно аппроксимирует геопотенциал. Этот процесс обосновывается следующим образом: силовая функция абсолютно твердого тела (Земли) равномерно аппроксимируема с любой заданной степенью точности силовой функцией системы конечного числа материальных точек, жестко связанных между собой и фиксированных на поверхности минимальной сферы, содержащей исходное тело. При этом число материальных точек определяется однозначно по заданной степени точности.

Рассмотрена силовая функция Солнечной системы и установлен ряд ее новых свойств. В частности, доказано, что силовая функция Солнечной системы и ее частные производные по всем переменным, рассматриваемые вдоль решения как функция времени  $t$ , являются почти периодическими функциями. На основе этого результата получены качественные оценки интегралов от составляющих главных векторов сил, приложенных к каждому телу Солнечной системы, и главного момента всех приложенных к Земле сил относительно ее центра масс. Эти оценки использованы при построении структурного решения для получения значений интегральных средних элементов вращения Земли и для вывода предельных соотношений по компонентам угловой скорости вращения Земли.

Рассмотрена модельная задача о движении системы Земля—Луна, где Земля принята за абсолютно твердое тело с известным  $\omega$ -предельным режимом вращения, а Луна — за материальную точку. В рамках этой задачи построен механизм векового удаления Луны от Земли и дано динамическое объяснение вековому удалению восходящей лунной орбиты.

В пределах принятой модели Солнечной системы исследована эволюция поступательного перемещения Земли вокруг Солнца. Доказано существование  $\omega$ -предельного режима этого движе-

ния, расположенного на неизменяемой плоскости Лапласа и «притягивающего» к себе плоскость эклиптики вместе с траекторией центра масс Земли. Доказана также ортогональность предельного положения кинетического момента вращения Земли относительно ее центра масс на неизменяемую плоскость Лапласа.

Наиболее полная картина эволюции движения тел Солнечной системы получена на основе качественного изучения задачи о поступательно-вращательном движении ее механической модели, состоящей из центрального тела (материальной точки) — Солнца и абсолютно твердых тел — больших планет. Для этого случая показано, что при помощи первых интегралов движения можно установить как существование, так и положение предельного режима для орбитального движения каждой из больших планет, однако только лишь существование предельного режима вращения каждой из планет системы.

# Вычисление элементов вращательного движения Земли

В данной главе излагаются основные черты существующих теорий вращения Земли — стандартной и ее модификаций. Указаны ограничения исходных предпосылок этих теорий, принципиально исключающие вековые вариации, специфику прецессионных и нутационных движений и другие особенности эволюции вращательного движения Земли в рамках Солнечной системы.

Гравитационное поле Земли описывается силовой функцией (геопотенциалом), представленной рядом по заданной полной ортогональной системе функций. Коэффициенты ее разложения, называемые *стоксовыми постоянными*, являются связующим звеном плотности и фигуры Земли, с одной стороны, и наблюдаемых возмущений орбит ИСЗ и уклонений отвесной линии на земной поверхности — с другой. Долговременное наблюдение с наземных станций возмущения орбит ИСЗ позволяет определить фигуру, геометрические параметры и структуру гравитационного поля Земли. Посредством стоксовых постоянных при некоторых дополнительных условиях возможно определить моменты инерции и другие величины, необходимые для расчета параметров вариаций элементов вращения Земли. В этой связи в настоящей главе систематизируются современные модели геопотенциала, проводится численный анализ параметров векового движения полюса Земли и постоянных прецессии и нутации земной оси. При расчетах использованы модели геопотенциала серий «Стандартная Земля» (SE) и «Годдардская модель Земли» (GEM), построенные Смитсоновской астрофизической обсерваторией и Центром космических полетов им. Годдарда.

### 1. Некоторые замечания о существующих теориях вращения Земли

В работе Эйлера «Подробное исследование явлений, которые могут производиться в суточном вращении Земли силами небесных тел», изложена теория вращения Земли как твердого тела в той окончательной форме, в которой она излагается, по существу, и сейчас. Разница заключается только в том, что Эйлер рассмотрел лишь главные члены разложений возмущающих сил Солнца и Луны, тогда как позднее авторы учли еще некоторые члены этих разложений. Это замечание М. Ф. Субботина [75, с. 318] в полной мере относится к стандартной теории вращения

Земли и ее модификации, предложенной Х. Киношитой [101]:

Кинематические (1.2.1) и динамические (4.3.4) уравнения получены Л. Эйлером в связи с решением задачи о причинах предварения равноденствий и положены в основу общей теории вращательного движения твердого тела вокруг одной неподвижной точки [86]. Они использованы в первой теории прецессии земной оси, предложенной Л. Эйлером для анализа движения полюса Земли. Эти результаты свое дальнейшее развитие получили в работах П. Оппольцера [1]. На базе кинематических и динамических уравнений Эйлера им получены формулы прецессии и нутации земной оси в виде тригонометрических рядов [35, 36].

На основании наметок У. Смарта [118] изложим один из вариантов вывода упомянутых уравнений прецессии и нутации земной оси, лежащих в основе стандартной теории вращения Земли.

Считая Землю за динамически симметричное твердое тело, взаимно притягиваемое Луной и Солнцем, принимаемыми за материальные точки, запишем силовую функцию в виде

$$U = G \sum_{i=1}^2 M_i (C - A) (z_i^2 / r_i^5), \quad (5.1.1)$$

где  $M_i$  и  $r_i$  ( $i=1, 2$ ) — массы и модули радиусов-векторов Луны и Солнца соответственно. Аппликаты центров масс  $O_i$  ( $i=1, 2$ ) Луны и Солнца в системе координат  $Oxyz$  таковы:

$$z_i = X'_i \sin \psi \sin \theta - Y'_i \cos \psi \sin \theta + Z'_i \cos \theta, \quad (5.1.2)$$

где  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  — прямоугольные декартовы координаты точек  $O_i$ .

В (5.1.1) сохранена та часть силовой функции, которая зависит от углов Эйлера.

Согласно соотношениям (5.1.1) и (5.1.2) силовая функция  $U$  не зависит от угла собственного вращения  $\varphi$ , и поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 2G \sum_{i=1}^2 M_i \frac{\partial z_i}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.1.3)$$

Положим в обеих частях динамических уравнений (4.3.4)  $A=B$ , тогда последнее из этих уравнений на основе соотношений (4.1.23) и (5.1.3) принимает вид

$$C \frac{dr}{dt} = 0.$$

И, следовательно, оно имеет первый интеграл [38]

$$r(t) = r_0 = \text{const}, \quad (5.1.4)$$

который выражает постоянство проекции на направление оси  $Oz$  мгновенной угловой скорости  $\omega$  вращения Земли.

С учетом соотношений (5.1.3), (5.1.4) и (4.1.23) внесем кине-

математические уравнения (4.1.15) в первые два уравнения системы (4.3.4) и запишем их в виде

$$\begin{aligned}
 & A \left( \frac{d^2\psi}{dt^2} \sin \varphi \sin \theta + \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \cos \theta \right) + \\
 & \quad + A \frac{d\psi}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \cos \theta \right) - \\
 & \quad - A \frac{d\varphi}{dt} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi \sin \theta - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \right) - \\
 & \quad - A \left[ \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cos \varphi \cos \theta \sin \theta - \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \cos \theta \right] + \\
 & \quad + Cr_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi \sin \theta - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \right) = \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \cos \varphi, \\
 & A \left( \frac{d^2\psi}{dt^2} \cos \varphi \sin \theta - \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \varphi + \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \sin \theta \right) - \\
 & \quad - A \frac{d\varphi}{dt} \left( \frac{d\psi}{dt} \sin \varphi \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \right) + \\
 & \quad + A \frac{d\varphi}{dt} \left( \frac{d\psi}{dt} \sin \varphi \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \right) + \tag{5.1.5} \\
 & \quad + A \left[ \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin \varphi \cos \theta \sin \theta + \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \cos \theta \right] - \\
 & \quad - Cr_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \sin \varphi \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \right) = \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Если пренебречь членами, помноженными на величины

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt}, \quad \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2, \quad \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \tag{5.1.6}$$

то система (5.1.5) примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi \sin \theta - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi &= \frac{1}{Cr_0} \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \cos \varphi \right), \\
 \frac{d\psi}{dt} \sin \varphi \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi &= - \frac{1}{Cr_0} \left( \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \varphi \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда легко получить известные уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{Cr_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = - \frac{1}{Cr_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}. \tag{5.1.7}$$

Уравнения вращательного движения Земли в форме (5.1.7) получены Пуассоном [118, 128] и называются *уравнениями Пуассона*.

Выражение (5.1.1) силовой функции  $U$  и соотношения (5.1.2) для  $z_i$  не зависят от угла  $\varphi$  собственного вращения Зем-

ли. Если известны законы движения центров масс Земли и Луны, то уравнения (5.1.7) в сочетании с кинематическими уравнениями (4.1.5) и выражением интеграла (5.1.4) полностью описывают вращение Земли.

Уравнения Пуассона (5.1.7), по существу, являются уравнениями прецессии и нутации земной оси. Для интегрирования системы (5.1.7) правые части ее уравнений представляются в виде тригонометрических рядов в соответствии с теориями движения Земли и Луны [1, 2], 66, 118]. Коэффициенты этих рядов указаны Оппольцером (1882 г.), Тиссераном (1891 г.), Хиллом (1893 г.), наиболее точно — С. Ньюкомом (1898 г.). Необходимая для наблюдательной астрономии точность этих тригонометрических рядов получена Э. Вулардом: используя ЭВМ, он удержал в указанных рядах несколько тысяч членов разложения [128].

Теория вращения Земли в форме, изложенной в работе [128], принята Международным астрономическим союзом в качестве международного стандарта. Ее основу составляют уравнения Пуассона (5.1.7), являющиеся следствиями кинематических (4.1.15) и динамических (4.3.4) уравнений Эйлера при следующих ограничивающих исходных предположениях:

а) центральный эллипсоид инерции абсолютно твердой Земли предполагается двухосным, т. е.  $A = B < C$ ;

б) величины (5.1.6) настолько малы, что в уравнениях (1.3.9) пропорциональными им членами можно пренебречь;

в) учитывается воздействие, соответствующее главным членам разложения (5.1.1) в ряд ортогональных многочленов;

г) для решения системы уравнений (5.1.7) движение Земли представлено суммой двух движений — наперед заданного поступательного движения относительно Солнца и ее вращательного движения относительно собственного центра масс, описываемого системой уравнений (5.1.7). При этом считается известным закон  $r_1(t)$  в соответствии с теорией движения Луны [21].

В силу ограниченной постановки задачи о вращательном движении Земли относительно центра масс существует дополнительный первый интеграл (5.1.4) уравнений (4.1.15), (4.3.4) и одновременно условие постоянства модуля угловой скорости вращения Земли, т. е. равномерность ее вращения:

$$\omega(t) = \omega_0 = \text{const.} \quad (5.1.8)$$

Напомним, что силовая функция  $U$  не зависит от угла  $\varphi$ . Поэтому первый интеграл (5.1.4) позволяет ограничиваться уравнениями Пуассона (5.1.7), полностью решающими задачу о вращении динамически симметричной Земли относительно центра масс в поле двух притягивающих материальных точек — Луны и Солнца.

Однако, как бы точно ни интегрировать систему (5.1.7), например следуя работе Э. Вуларда [128], это решение будет отличаться от решения задачи о вращении Земли в неограниченной ее постановке.

В самом деле, решение системы (5.1.7) посредством кинематических уравнений Эйлера (4.1.15) описывает движение полюса Земли. Но существование оценки снизу для разности между решениями уравнений Пуассона (5.1.7) и уравнений Эйлера (4.1.15), (4.3.4) изменяет общую картину движения полюса. Действительно, вектор  $\omega$  в силу (5.1.7) и (5.1.8) во все время вращения Земли находится на постоянном угловом расстоянии  $\gamma_0$  от оси инерции  $Oz$ :

$$\gamma_0 = \arccos(r_0/\omega_0), \quad \gamma_0 = \text{const.} \quad (5.1.9)$$

Согласно (5.1.9) мгновенная ось вращения Земли относительно ее центра масс описывает круговой конус с постоянным углом  $\gamma_0$  при вершине, а соответствующие северный и южный полюсы вычерчивают окружности. Поэтому стандартная теория вращения Земли исключает вековое движение полюса, описывая лишь периодическую часть общего его перемещения.

Равенство (5.1.8) выражает равномерность вращения Земли с постоянной по величине угловой скоростью  $\omega$  и отсутствие каких-либо вариаций продолжительности суток.

Рассмотрим теперь принятую в стандартной теории структуру решения уравнений Пуассона (5.1.7):

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0 + (5025,641'' + 2,223''\tau)t + 1,112''t^2 + \Psi(t), \\ \theta(t) &= \theta_0 + 9,210''t^2 + \Theta(t), \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

где  $\tau$  — время в тропических столетиях, отсчитываемых от фундаментальной эпохи 1900.0.

Тригонометрические ряды для суммы  $\Psi(t)$ ,  $\Theta(t)$  периодических членов Оппольцера имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= -17,223'' \sin \Omega - 1,273'' \sin 2(\mathcal{F} - \mathcal{D} + \Omega) + \\ &+ 0,209'' \sin 2\Omega - 0,204'' \sin 2(\mathcal{F} + \Omega) + \\ &+ 0,068'' \sin l + 0,126'' \sin \bar{l} + \dots, \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= 9,210'' \cos \Omega + 0,552'' \cos 2(\mathcal{F} - \mathcal{D} + \Omega) - \\ &- 0,090'' \cos \Omega + 0,088'' \cos (2\mathcal{F} + \Omega) + \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega$  — средняя долгота восходящего узла орбиты Луны,  $\mathcal{F}$  — средний аргумент широты Луны,  $\mathcal{D}$  — среднее угловое удаление Луны от Солнца,  $\bar{l}$  — средняя аномалия Луны и  $l$  — средняя аномалия Солнца [66].

Из решения (5.1.11) следует, что из-за вековых членов как переменная  $\psi(t)$ , так и  $\theta(t)$  с течением времени расходятся, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty.$$

Эволюция переменных  $\psi$  и  $\theta$  вида (5.1.10) полностью определяется членами, содержащими квадраты времени  $t$ , т. е. чле-

нами  $1''$ ,  $112t^2$  и  $9''$ ,  $210t^2$ . Поэтому решение (5.1.10) уравнений Пуассона описывает вращение Земли относительно центра масс лишь на конечном небольшом интервале времени. И следовательно, для ослабления влияния членов второго порядка необходимо перенос начал отсчета времен  $t$  и  $\tau$ .

Дальнейшие попытки совершенствования стандартной теории сводились к вычислению большого количества членов ряда, перевычислению его коэффициентов и улучшению тригонометрического ряда (5.1.11). Естественно, удастся получить лишь конечное число членов ряда (5.1.11). Поэтому такой ряд определяет равномерно ограниченную функцию независимой переменной времени  $t$  в области  $R_1$  и с течением времени его вклад в решение (5.1.10) становится ничтожно малым. В этом плане всякие попытки улучшения стандартной теории путем определения большого числа членов тригонометрического ряда (5.1.11) и пересчета его коэффициентов бесперспективны.

Таким образом, стандартная теория вращения Земли, основанная на уравнениях Пуассона прецессии и нутации земной оси, из-за ограниченности ее исходных предпосылок исключает вековые вариации вращения Земли — вековое замедление вращения и вековое движение полюса. Требуется пересмотр решения вопроса о структуре решений этих уравнений Пуассона, в которой участвуют два вида времени ( $t$ ,  $\tau$ ) и вековые члены второго порядка. В силу этих особенностей стандартная теория качественно непригодна для полного исследования эволюции вращения Земли.

Рассмотрим модификацию стандартной теории вращения Земли, построенную Киношитой для Земли с трехосным центральным эллипсоидом инерции [102]. Преимущество этой теории перед стандартной заключается в том, что в ней сняты первые два ограничения, использованы переменные Андуайе и решение уравнений вращательного движения Земли относительно ее центра масс построено методом теории возмущений. Дифференциальные уравнения вращения Земли имеют вид (4.3.8) с правыми частями, выраженными частными производными силовой функции взаимно притягивающихся Земли и материальных точек — Луны и Солнца:

$$U_1 = \frac{k^2 M_1}{r_1^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \theta_1) + \frac{A - B}{4} P_{22}(\sin \theta_1) \cos 2\lambda_1 \right], \quad (5.1.12)$$

$$U_2 = \frac{k^2 M_2}{r_2^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \theta_2) + \frac{A - B}{4} P_{22}(\sin \theta_2) \cos 2\lambda_2 \right],$$

где  $(r_1, \chi_1, \lambda_1)$  и  $(r_2, \chi_2, \lambda_2)$  — сферические координаты центров масс Луны и Солнца.

Далее к правым частям уравнений (4.3.8) применяется используемый в теории возмущений метод осреднения Гори, и полученные соотношения интегрируются численно.

Основная задача теории Киношиты состоит в детальном анализе стандартной теории и в определении влияния на прецессию и нутацию земной оси поправок, внесенных в таблицы лунных положений (таблицы Брауна) Л. Эккертом и др. авторами. Сравнение выводов теории Киношиты с выводами стандартной теории показывает, во-первых, на расхождение значений угла нутации вектора кинетического момента вращения Земли относительно центра масс для одних и тех же фундаментальных постоянных, достигающее величины  $0,0017''$ , во-вторых, на значительное расхождение в членах Оппольцера (5.1.11). Кроме того, рассматриваемая теория дает решение задачи вращения Земли относительно центра масс, в котором отсутствуют некоторые вековые члены, содержащиеся в численном решении Вуларда [128], и, наконец, в ней исследовано влияние силовой функции  $U = U_1 + U_2$ , содержащей более высокие гармоники, на прецессию и нутацию земной оси.

Отметим теперь недостатки теории Киношиты. Они прежде всего относятся к предложенной оценке нормы разности вековых и долгопериодических возмущений вращения Земли, непосредственно вытекающей из исходных предпосылок. Эта теория построена в ограниченной постановке — влияние движения центра масс Земли на ее вращение относительно этого центра исследовано без учета обратной связи этих движений. Пренебрежение обратной связью между поступательным и вращательным движениями Земли привело к тому, что первые интегралы задачи трех тел оказались потерянными. Поэтому упомянутую оценку нельзя провести даже в энергетической норме. Опуская некоторые малые члены, автор отождествляет мгновенную ось вращения Земли с вектором кинетического момента вращения Земли  $K$ . Поэтому фактическое движение полюса представлено как след этого вектора на земной поверхности, что не позволяет выявить эффекты эволюционного характера. Наконец, в этой теории, как и в стандартной, долгопериодические и вековые члены разложения силовой функции в тригонометрический ряд в процессе интегрирования уравнений движения порождают величины, обуславливающие расходимость решения. Поэтому выводы теории Киношиты справедливы также лишь на конечном промежутке времени.

## 2. Современные модели геопотенциала

Источником получения достоверных сведений о плотности и фигуре Земли является ее гравитационное поле. Силовая функция земного притяжения (геопотенциал)  $U_E$  выражается формулой

$$U_E = k^2 \int_V \frac{\rho dV}{s}, \quad (5.2.1)$$

где  $k$  — гауссова постоянная,  $\rho$  и  $V$  — плотность и объем Земли соответственно,  $s$  — расстояние между элементарной массой  $dm = \rho dV$  и притягиваемым телом  $T$  единичной массы. Символ  $V$  показывает, что интегрирование производится по всему объему Земли.

Рассмотрим правую декартову прямоугольную систему координат  $O\xi\eta\xzeta$ . Положения элементарной массы  $dm$  и тела  $T$  зададим геоцентрическими координатами либо прямоугольными  $(\xi', \eta', \zeta')$  и  $(\xi, \eta, \zeta)$ , либо сферическими  $(r', \chi', \lambda')$  и  $(r, \chi, \lambda)$ . При этом расстояние  $s$  определяется по формуле

$$s = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}. \quad (5.2.2)$$

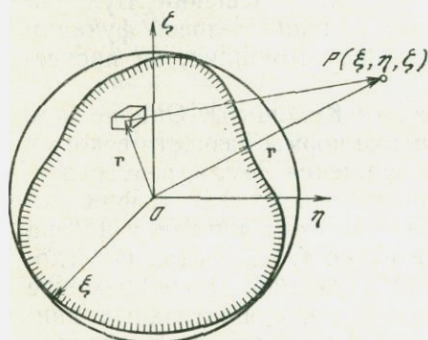


Рис. 5.1. Притяжение твердого тела во внешней точке

Переходя от прямоугольных координат к сферическим:

$$\begin{aligned} \xi &= r \sin \chi \cos \lambda, \\ \eta &= r \sin \chi \sin \lambda, \\ \zeta &= r \cos \chi, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

расстояние (5.2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} s^2 &= (r')^2 + r^2 - 2rr' \cos \nu = \\ &= (r')^2 [1 + (r/r')^2 - 2(r/r') \cos \nu], \end{aligned}$$

где  $\nu$  — угол между радиусами-векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  (рис. 5.1).

Отсюда получим выражение для величины, обратной расстоянию

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{1 - (2r/r') \cos \nu + (r/r')^2}} = \frac{1}{r'} \Phi(r, \nu), \quad (5.2.4)$$

где косинус угла  $\nu$  можно выразить через скалярное произведение радиусов-векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ :

$$\begin{aligned} \cos \nu &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / rr' = \xi \xi' / rr' + \eta \eta' / rr' + \zeta \zeta' / rr' = \\ &= \cos \chi \cos \chi' + \sin \chi \sin \chi' \cos(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Как известно, функция  $\Phi(r, \nu)$  в соотношении (5.2.4) является производящей функцией многочленов Лежандра. Поэтому это равенство можно представить в виде ряда по многочленам Лежандра  $P_n(\cos \nu)$  [24, 73]:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r'} \Phi(r, \nu) = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos \nu). \quad (5.2.6)$$

С учетом выражения (5.2.5) по формуле сложения многочленов Лежандра получим

$$P_n(\cos v) = \sum_{m=0}^n \frac{2}{\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^{(m)}(\cos \chi) P_n^{(m)}(\cos \chi') \cos m(\lambda - \lambda'). \quad (5.2.7)$$

Внеся выражение (5.2.7) в формулу (5.2.6), а полученное соотношение — в интеграл (5.2.1), получим разложение геопотенциала  $U_E(T)$  в сферических координатах

$$U_E(r, \chi, \lambda) = k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \frac{2}{\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^{(m)}(\cos \chi) \times \\ \times \int_V (r')^n \rho(r', \chi', \lambda') P_n^{(m)}(\cos \chi') \cos m(\lambda - \lambda') dV. \quad (5.2.8)$$

Обозначим

$$Y_n(\chi, \lambda) = \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \chi) [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda], \quad (5.2.9)$$

где  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  — постоянные, зависящие от фигуры Земли, ее положения относительно системы координат  $O\xi\eta\xi$  и распределения плотности  $\rho$ . Выразим коэффициенты  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  формулами

$$A_{nm} = \frac{2}{\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V (r')^n P_n^{(m)}(\cos \chi') \cos m\lambda' \rho(r', \chi', \lambda') dV, \quad (5.2.10)$$

$$B_{nm} = \frac{2}{\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V (r')^n P_n^{(m)}(\cos \chi') \sin m\lambda' \rho(r', \chi', \lambda') dV.$$

Используя обозначение (5.2.9), перепишем выражение геопотенциала (5.2.8):

$$U_E(r, \chi, \lambda) = k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\chi, \lambda)}{r^{n+1}}. \quad (5.2.11)$$

Так как отношение модулей радиусов-векторов  $r$  и  $r'$  меньше единицы, т. е.  $r'/r < 1$ , то ряд (5.2.11) сходится абсолютно и равномерно во всех точках  $T$  пространства, внешних по отношению к сфере  $S_E$ . Здесь сфера  $S_E$  имеет радиус  $a_E$ , ее центр расположен в точке  $O$ , она является минимальной среди сфер, целиком охватывающих Землю (рис. 5.1).

Представим (5.2.11) в виде

$$U_E(r, \chi, \lambda) = k^2 \sum_{n=0}^N \frac{Y_n(\chi, \lambda)}{r^{n+1}} + U_E^{(N)}(r, \chi, \lambda).$$

С учетом выражения (5.1.8) оценим остаток  $U_E^{(N)}$ :

$$|U_E^{(N)}| < \frac{k^2 M}{r - a_E} \left( \frac{a_E}{r} \right)^N,$$

где  $M$  — масса Земли [31, 32].

Таким образом, геопотенциал  $U_E$  определен, если известны численные значения его коэффициентов (5.2.10). Заметим, что коэффициенты зависят от плотности  $\rho(r, \chi, \lambda)$  Земли. В связи с этим возникает вопрос о нахождении коэффициентов  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  независимо от знания плотности  $\rho$  Земли.

Принципиальную возможность определения гравитационного поля произвольного тела независимо от его плотности доказывает

Теорема Стокса [17, 24]. Если известны общая масса  $M$  тела, угловая скорость его вращения  $\omega$  около неизменной оси и форма внешней уровенной поверхности  $\sigma$ , целиком охватывающей данное тело, то потенциал  $W$  силы тяжести и сама сила тяжести однозначно определяются как во всем внешнем пространстве, так и на самой уровенной поверхности.

Для доказательства теоремы необходимо заметить, что любое перераспределение масс внутри одной и той же уровенной поверхности  $\sigma$  не изменяет силы тяжести — силовую функцию.

Рассмотрим два распределения масс  $\rho_1$  и  $\rho_2$  с потенциалами тяготения  $U_1$  и  $U_2$ , заданными внутри поверхности  $\sigma$ . Силовая функция центробежной силы не зависит от функций  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и будет одной и той же в обоих случаях. Поэтому силовые функции  $W_1$  и  $W_2$  силы тяжести, соответствующие распределениям  $\rho_1$  и  $\rho_2$  масс тела, имеют вид

$$W_1 = U_1 + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad W_2 = U_2 + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (5.2.12)$$

Разность силовых функций  $W_1$  и  $W_2$  представляет собой ньютоновский потенциал

$$U = W_1 - W_2 = U_1 - U_2. \quad (5.2.13)$$

Очевидно, что силовая функция (5.2.13) вне объема  $V$  тела, ограниченного поверхностью  $\sigma$ , является регулярной на бесконечности гармонической функцией, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r, \theta, \lambda) \Delta U = 0. \quad (5.2.14)$$

По условию теоремы  $\sigma$ -уровенная поверхность в обоих случаях распределений  $\rho_1$  и  $\rho_2$  такова:

$$W_1/\sigma = f, \quad W_2/\sigma = f. \quad (5.2.15)$$

Применим к функции (5.2.13) формулу Грина

$$\iiint_{R^3 \setminus V(\sigma)} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dV = - \iint_{\sigma} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma, \quad (5.2.16)$$

где  $\partial U/\partial n$  — нормальная производная функции  $U$  в точках поверхности  $\sigma$ .

Учитывая граничные условия (5.2.15), из (5.2.16) получим

$$\iiint_{R^3 \setminus V(\sigma)} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dV = -G \iint_{\sigma} \left( \frac{dU_1}{dn} - \frac{dU_2}{dn} \right) d\sigma. \quad (5.2.17)$$

Согласно теореме Гаусса каждый из поверхностных интегралов в этом выражении дает следующее выражение массы  $M$  тела:

$$\iint_{\sigma} \frac{dU_1}{dn} d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{dU_2}{dn} d\sigma = -4\pi k^2 M. \quad (5.2.18)$$

Подставляя (5.2.18) в правую часть (5.2.17), получим

$$\iiint_{R^3 \setminus V(\sigma)} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0,$$

из которого во всем внешнем пространстве  $R^3 \setminus V(\sigma)$  следует

$$\partial U/\partial x = \partial U/\partial y = \partial U/\partial z = 0. \quad (5.2.19)$$

Из (5.2.19) с учетом (5.2.13) получим

$$\partial U_1/\partial x = \partial U_2/\partial x, \quad \partial U_1/\partial y = \partial U_2/\partial y, \quad \partial U_1/\partial z = \partial U_2/\partial z, \quad (5.2.20)$$

$$\partial W_1/\partial x = \partial W_2/\partial x, \quad \partial W_1/\partial y = \partial W_2/\partial y, \quad \partial W_1/\partial z = \partial W_2/\partial z.$$

Интегрируя последнюю группу равенств (5.2.20), находим  $W_1 - W_2 \equiv 0$ , так как выполнены условия регулярности на бесконечности (5.2.14).

Следовательно, силовые функции  $W_1$  и  $W_2$  силы тяжести, соответствующие двум различным распределениям  $\rho_1$  и  $\rho_2$  масс внутри поверхности  $\sigma$ , равны между собой, т. е.  $W_1 = W_2$ . Одновременно имеют место равенства (5.2.20). Это и доказывает теорему Стокса.

Теорема Стокса устанавливает принципиальную возможность определения внешнего гравитационного поля тела независимо от распределения масс внутри него. Однако эта теорема не дает алгоритма определения силовой функции  $W$  силы тяжести для конкретного тела при известной его уровенной поверхности  $\sigma$ .

Задача об определении силовой функции  $W$  силы тяжести Земли по заданным значениям этой функции на ее уровенной поверхности  $\sigma$  называется *проблемой Стокса*. Поскольку центробежный потенциал выражается формулой, не зависящей от уровенной поверхности  $\sigma$  и массы Земли, то проблема Стокса сводится к задаче об определении силовой функции притяжения Земли. При этом геопотенциал  $U_E$  как функция удовлетворяет следующим условиям:

1) представляет собой гармоническую функцию во внешнем пространстве относительно уральной поверхности  $\sigma$ , регулярную на бесконечности (5.2.14);

2) на уральной поверхности принимает вид

$$U(x, y, z)|_{\sigma} = \text{const} - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2);$$

3) ограничен и непрерывен во всем пространстве вместе со всеми частными производными первого порядка.

Эти условия однозначно определяют *геопотенциал*  $U_E$  и вместе с ним силовую функцию  $W$  силы тяжести Земли.

Рассмотрим общую схему построения геопотенциала.

Движение ИСЗ, рассматриваемого как материальная точка, описывается уравнениями

$$d^2x/dt^2 = \partial U/\partial x, \quad d^2y/dt^2 = \partial U/\partial y, \quad d^2z/dt^2 = \partial U/\partial z, \quad (5.2.21)$$

где  $U$  — силовая функция притяжения спутника Земли.

Уравнения (5.2.21) показывают, что ускорение ИСЗ на орбите позволяет производить прямое измерение значений градиента силовой функции в точках траектории. Рассмотрим выражение геопотенциала (5.2.8). Первый ( $k^2M/r$ ), являющийся его главным членом, выражает силовую функцию шара со сферическим распределением масс, а вся совокупность последующих членов ряда есть отклонение геопотенциала от этой силовой функции. Обозначим через  $U_E^{(1)}$  разность

$$U_E^{(1)} = U_E - \frac{k^2M}{r}.$$

Остаток  $U_E^{(1)}$  ряда (5.2.8) после главного члена называется *возмущающей* (пертурбационной) *функцией* [19, 34]. Она имеет вид

$$U_E^{(1)}(r, \chi, \lambda) = \frac{k^2M}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^n P_n^{(m)}(\cos \chi) \times \\ \times (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda). \quad (5.2.22)$$

Зональной частью возмущающей функции (5.2.22) называется функция вида

$$N_3(r, \chi, \lambda) = - \frac{k^2M}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right) I_n P_n^{(0)}(\cos \chi), \quad (5.2.23)$$

не зависящая от долготы  $\lambda$  положения ИСЗ.

С учетом возмущающей функции (5.2.22)

$$d^2x/dt^2 = -\mu x/r^3 + \partial U_E^{(1)}/\partial x, \\ d^2y/dt^2 = -\mu y/r^3 + \partial U_E^{(1)}/\partial y, \\ d^2z/dt^2 = -\mu z/r^3 + \partial U_E^{(1)}/\partial z, \quad (5.2.24)$$

где  $\mu = k^2(M + \tilde{m})$  и  $\tilde{m}$  — масса спутника.

Сначала рассмотрим невозмущенное движение ИСЗ, описываемое уравнениями

$$d^2x/dt^2 = -\mu x/r^3, \quad d^2y/dt^2 = -\mu y/r^3, \quad d^2z/dt^2 = -\mu z/r^3. \quad (5.2.25)$$

Основные формулы невозмущенного (кеплеровского) движения, описываемого уравнениями (5.2.25), приведены ранее в гл. III, разд. 2.

Введем подвижную систему отсчета  $\tilde{m}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , начало  $\tilde{m}$  которой совпадает с ИСЗ. Одну из подвижных осей направим по радиусу-вектору  $\tilde{r}$  спутника и обозначим ее  $\tilde{x}$ . Ось  $\tilde{y}$  выберем в плоскости мгновенной орбиты спутника перпендикулярно радиусу-вектору  $\tilde{r}$  с положительным направлением в сторону его движения. Третью из координатных осей  $\tilde{z}$  выберем так, чтобы система  $\tilde{m}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  была правой декартовой системой.

Направляющие косинусы систем  $Oxyz$  и  $\tilde{m}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  обозначим

$$\begin{aligned} \cos(\tilde{x}, x) &= a_{11}, & \cos(\tilde{x}, y) &= a_{12}, & \cos(\tilde{x}, z) &= a_{13}, \\ \cos(\tilde{y}, x) &= a_{21}, & \cos(\tilde{y}, y) &= a_{22}, & \cos(\tilde{y}, z) &= a_{23}, \\ \cos(\tilde{z}, x) &= a_{31}, & \cos(\tilde{z}, y) &= a_{32}, & \cos(\tilde{z}, z) &= a_{33}. \end{aligned}$$

Тогда составляющие возмущающих сил  $F^{(E)}$  вдоль координатных осей системы  $\tilde{m}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} F_{\tilde{x}}^{(E)} &= \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial x} a_{11} + \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial y} a_{12} + \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial z} a_{13}, \\ F_{\tilde{y}}^{(E)} &= \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial x} a_{21} + \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial y} a_{22} + \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial z} a_{23}, \\ F_{\tilde{z}}^{(E)} &= \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial x} a_{31} + \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial y} a_{32} + \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial z} a_{33}. \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

Обозначим

$$\bar{F}_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_{\tilde{x}}^{(E)}, \quad \bar{F}_{\tilde{y}} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_{\tilde{y}}^{(E)}, \quad \bar{F}_{\tilde{z}} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_{\tilde{z}}^{(E)}, \quad (5.2.27)$$

где  $p$  — параметр кеплеровского эллипса.

С учетом (5.2.27) напомним дифференциальные уравнения движения спутника в оскулирующих элементах:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \bar{F}_{\tilde{z}}, & \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \bar{F}_{\tilde{z}}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2 e \sin v}{p} \bar{F}_{\tilde{x}} + \frac{2a^2}{r} \bar{F}_{\tilde{y}}, \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

$$\frac{de}{dt} = \sin v \bar{F}_{\tilde{x}} + (\cos v + \cos E) \bar{F}_{\tilde{y}},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos v}{e} \bar{F}_{\tilde{x}} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \bar{F}_{\tilde{y}} - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \bar{F}_{\tilde{z}},$$

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\cos v - \frac{2er}{p}\right) \bar{F}_{\tilde{x}} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} (p+r) \frac{\sin v}{p} \bar{F}_{\tilde{y}}.$$

Для определения коэффициентов  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  геопотенциала посредством дифференциальных уравнений движения (5.2.28) необходимо выразить возмущающую функцию  $U_E^{(1)}$  через оскулирующие элементы орбит ИСЗ. Этот переход, а также метод и алгоритмы определения коэффициентов геопотенциала по возмущениям орбит ИСЗ детально разработаны в спутниковой геодезии. Изложение основ этой теории можно найти в [17, 34, 100]. Отметим некоторые, возникающие в приложениях, трудности. Коэффициенты (5.2.10) геопотенциала (5.2.1) определяются по измеренным возмущениям орбит ИСЗ с помощью дифференциальных уравнений (5.2.28). Очевидно, такая задача представляет собой обратную задачу динамики об определении сил, под действием которых совершается известное движение тела. Однако само движение, отклонение орбиты ИСЗ от кеплерова невозмущенного эллипса, известно лишь приближенно. На последующем этапе приложений динамической теории спутниковой геодезии такие приближенно известные величины согласно структуре уравнения (5.2.28) дифференцируются по времени. Но, как известно, оператор дифференцирования является неустойчивым оператором. Вследствие этого в левые части уравнений (5.2.28) вносятся фиктивные отклонения, которые, в свою очередь, в правых частях этих уравнений порождают фиктивные возмущения в гармониках геопотенциала.

Совокупность всех коэффициентов  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  геопотенциала составляет счетное множество. Следовательно, невозможно определить весь ряд этих коэффициентов. Поэтому на практике приходится в ряде (5.2.8) удерживать его  $N$  первых членов и полагать остаток  $U_E^{(N)}$  равным нулю. Этот прием вносит свои ошибки в численные значения коэффициентов геопотенциала. Далее, коэффициенты  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  не являются равноправными в том смысле, что одни из них находятся при обычных полиномах  $P_n^{(0)}$  Лежандра, а другие — при присоединенных  $P_n^{(m)}$ . Поэтому коэффициенты  $A_{n0}$ ,  $A_{nn}$  и  $B_{nn}$  определяют отдельно от коэффициентов  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$ , для которых  $n > m$ . Это также вносит определенную погрешность в значения искомым величин.

Элементы орбит ИСЗ, кроме гравитационных возмущений, как известно, испытывают возмущения, связанные с влиянием магнитного поля Земли, аэродинамических эффектов, светового давления и т. д. Возникает необходимость строго учитывать влияние на движение ИСЗ притяжения со стороны Луны, Солнца и планет. Поскольку наблюдаемые отклонения орбит спутни-

ка от кеплерова невозмущенного эллипса представляют суммарный эффект указанных возмущений, то расчленив их весьма сложно.

Полиномы Лежандра  $P_n^{(0)}$  и  $P_n^{(m)}$  не являются единственной полной ортогональной системой функций на отрезке  $[-1, 1]$ . Кроме того, этим функциям можно приписать различные нормы. Поэтому геопотенциал может быть записан в самой различной форме. Рассмотрим наиболее распространенные представления.

Прежде всего запишем разложение геопотенциала в ряд сферических функций, рекомендованное Международным астрономическим союзом [109]:

$$U(r, \chi, \lambda) = \frac{k^2 M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_E}{r} \right)^n P_n^{(m)}(\cos \chi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (5.2.29)$$

где

$$J_n = \frac{1}{Ma_E^n} \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \rho(r', \chi', \lambda') (r')^n P_n^{(m)}(\cos \chi) \cos m\lambda' dV,$$

$$C_{nm} = \frac{1}{Ma_E^n} \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \rho(r', \chi', \lambda') (r')^n P_n^{(m)}(\cos \chi') \cos m\lambda' dV,$$

$$S_{nm} = \frac{1}{Ma_E^n} \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \rho(r', \chi', \lambda') (r')^n P_n^{(m)}(\cos \chi') \sin m\lambda' dV. \quad (5.2.30)$$

Здесь  $P_n(\cos \chi)$  — полиномы Лежандра  $n$ -й степени и  $P_n^{(m)}(\cos \chi)$  — присоединенные функции Лежандра  $n$ -й степени и  $m$ -го порядка. Последние определяются с помощью известного уравнения

$$P_n^{(m)}(\cos \chi) = \frac{1}{\sqrt{h_{nm}}} \sqrt{\frac{\delta_m (n-m)}{(n+m)!}} \frac{d^m P_n(\cos \chi)}{d(\cos \chi)^m} \sin^m \chi, \quad (5.2.31)$$

где  $\delta_m = 1$ , если  $m = 0$  и  $\delta_m = 2$  для всех  $m \geq 1$ .

Члены ряда (5.2.29) называются гармониками геопотенциала. Члены в первой сумме, пропорциональные полиномам Лежандра — зональными гармониками, члены с индексами  $n, m, n > m$  — тессеральными гармониками, а члены с индексами  $n, n$  — секторальными гармониками (рис. 5.2).

Связь между коэффициентами гармоник ряда (5.2.30) и коэффициентами (5.2.10) геопотенциала определяется формулами

$$I_n = \frac{a_E}{k^2 M} A_{nn}, \quad C_{nm} = \frac{a_E}{k^2 M} A_{nm}, \quad S_{nm} = \frac{a_E}{k^2 M} B_{nm}. \quad (5.2.32)$$

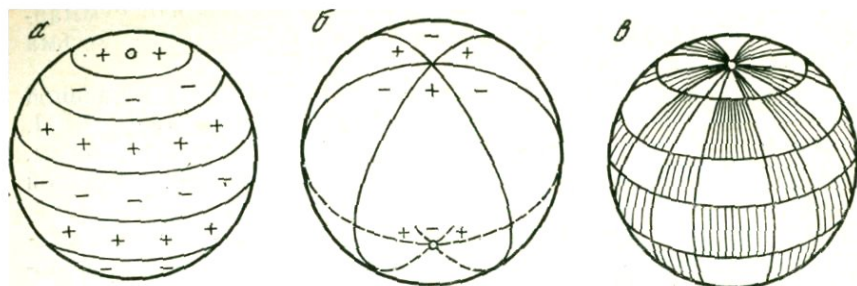


Рис. 5.2. Схемы зонального (а), секториального (б) и тессерального (в) расположения сферической функции

В спутниковой геодезии применяются три вида полиномов Лежандра.

Стандартные:

$$h_{nm} = \frac{\delta_m (n-m)!}{(n+m)!}, \quad (5.2.33)$$

Нормированные:

$$h_{nm} = 1, \quad (5.2.34)$$

Полностью нормированные:

$$h_{nm} = \frac{1}{(2n+1)}, \quad (5.2.35)$$

где  $h_{nm}$  — величины, входящие в формулу (5.2.31).

Во многих случаях используются стандартные полиномы Лежандра, удовлетворяющие условиям ортогональности на единичной сфере:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = k. \end{cases} \quad (5.2.36)$$

$$\int_{-1}^1 P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = k. \end{cases}$$

Часто встречается разложение геопотенциала вида

$$U_E(r, \chi, \lambda) = \frac{k^2 M}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n I_n P_n(\cos \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n I_{nm} P_{nm}(\cos \chi) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right], \quad (5.2.37)$$

где коэффициенты  $I_n$ ,  $I_{nm}$  и постоянные  $\lambda_{nm}$  связаны с коэффици-

ентами (5.2.30) ряда (5.2.29) соотношениями

$$I_n = J_n, \quad I_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2}, \quad \lambda_{nm} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{S_{nm}}{C_{nm}}. \quad (5.2.38)$$

Если вместо присоединенных полиномов Лежандра  $P_n^{(m)}$  ввести совокупность функций  $\bar{P}_{nm}$  по формулам

$$\bar{P}_{nm}(x) = \sqrt{\frac{2(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!}} P_n^{(m)}(x), \quad (5.2.39)$$

то ряд (5.2.29) примет вид [109]

$$U(r, \chi, \lambda) = \frac{k^2 M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \chi) (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (5.2.40)$$

где

$$C_{nm} = A_{nm} \sqrt{\frac{2(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!}}, \quad S_{nm} = B_{nm} \sqrt{\frac{2(m-n)!(2n+1)}{(n+m)!}}. \quad (5.2.41)$$

Обозначим через  $q_{nm}$  множитель

$$q_{n0} = \sqrt{2n+1}, \quad q_{nm} = \sqrt{\frac{2(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!}}. \quad (5.2.42)$$

Рассмотрим последовательность полиномов  $\bar{P}_n, \bar{P}_{nm}$ :

$$\bar{P}_n(x) = -q_{n0} P_n(x), \quad \bar{P}_{nm}(x) = q_{nm} P_n^{(m)}(x).$$

При этом ряд (5.2.29) примет вид

$$U(r, \chi, \lambda) = \frac{k^2 M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_E}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \chi) \times \right. \\ \left. \times (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (5.2.43)$$

где

$$q_{n0} = C - I_n, \quad q_{nm} \bar{C}_{nm} = C_{nm}, \quad q_{nm} \bar{S}_{nm} = S_{nm}. \quad (5.2.44)$$

Множители (5.2.42) называются нормирующими; такое определение связано с условиями ортогональности (5.2.33) и

Таблица 5.1

Модель геопотенциала	Коэффициенты гармоник геопотенциала					Литература
	$\bar{I}_2$	$\bar{C}_{21}$	$\bar{S}_{21}$	$\bar{C}_{22}$	$\bar{S}_{22}$	
SE-1	1082,628	0	0	2,38000	-1,35000	[74]
SE-2	1082,635	0	0	2,41290	-1,36410	[98]
SE-3	-484,17000	0	0	2,37990	-1,36560	[98]
SE-4	-484,40169	0	0	2,42000	-1,42000	[99]
GEM-1	-484,17700	0	0	2,43000	-1,37000	[103]
GEM-2	-484,16700	0	0	2,42000	-1,38000	[103]
GEM-3	-484,17100	0	0	2,43000	-1,39000	[104]
GEM-4	-484,16900	0	0	2,42000	-1,39000	[104]
GEM-5	-484,16620	-0,00120	-0,00870	2,42820	-1,36020	[119]
GEM-6	-484,16610	-0,00090	-0,00120	2,42510	-1,38830	[119]
GEM-7	-484,16460	-0,00310	-0,00090	2,43030	-1,39460	[125]
GEM-8	-484,16555	-0,00021	2,43400	-0,00406	-1,39786	[125]
GEM-9	-484,16555	-0,00021	2,43400	-0,00406	-1,39786	[105]
GEM-10	-484,16544	+0,00104	2,43404	-0,00243	-1,39907	[105]
GMP	-484,41600	0,00000	0,00000	2,44000	-1,36000	[113]

Примечание. Все значения коэффициентов гармоник увеличены в  $10^6$  раз.

(5.2.34). В данном случае функции  $\bar{P}_{nm}$  удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-1}^1 \bar{P}_{n0}(x) \bar{P}_{m0}(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2, & n = m, \end{cases} \quad (5.2.45)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{P}_{nm}(x) \bar{P}_{km}(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 4, & n = k. \end{cases}$$

Представим ряд (5.2.43) в комплексном виде:

$$U_E(r, \chi, \lambda) = \operatorname{Re} \left[ \frac{k^2 M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n \tilde{C}_{nm} P_{nm}(\cos \chi) \exp(im\lambda) \right], \quad (5.2.46)$$

где  $\tilde{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - i\bar{S}_{nm}$ .

Существуют различные модели геопотенциала, под которыми понимается набор коэффициентов разложения геопотенциала и геоцентрических координат на земной поверхности.

В табл. 5.1 приведены значения коэффициентов гармоник геопотенциала для моделей серий SE, GEM, а также гравиметрическая модель Раппа (GMP).

Из таблицы видно, что модели SE-1 и SE-2 представлены гармониками с коэффициентами  $I_2$ ,  $C_{21}$ ,  $S_{21}$ . Модели SE-3 и SE-4 имеют комплексную форму коэффициентов  $\tilde{C}_{nm}$ . Модели серии

ГЕМ имеют гармоники с коэффициентами  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$ . Поэтому модели SE-3, SE-4 и все модели серии ГЕМ являются однотипными, ибо их гармоники нормированы единым условием ортогональности. Запишем формулу перехода от гармоник с коэффициентами  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  к гармоникам с коэффициентами  $I_n$ ,  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ :

$$I_n = q_{n0} \operatorname{Re}(\bar{C}_{n0}), \quad C_{nm} = q_{nm} \operatorname{Re}(\bar{C}_{n0}), \quad S_{nm} = q_{nm} \operatorname{Im}(\bar{C}_{n0}); \quad (5.2.47)$$

$$I_n = q_{n0} \bar{C}_{n0}, \quad C_{nm} = q_{nm} \bar{C}_{nm}, \quad S_{nm} = q_{nm} \bar{S}_{nm}, \quad (5.2.48)$$

где  $\operatorname{Im}$  — мнимая часть величины  $\bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} + i\bar{S}_{nm}$ , а  $q_{n0}$  и  $q_{nm}$  — нормирующие множители.

Численные значения нормирующего множителя  $q_{nm}$  для  $n=2$  и  $m \leq n$ :

$$q_{20} = \sqrt{5/2}, \quad q_{21} = \sqrt{5/12}, \quad q_{22} = \sqrt{5/48}. \quad (5.2.49)$$

Значения коэффициентов разложения геопотенциала зависят и от выбора системы отсчета, так как их интегральные представления (5.2.30) зависят от текущих координат объема Земли. В динамической теории спутниковой геодезии выбор основной системы отсчета осуществляется следующим образом. Начало  $O$  системы  $O\xi\eta\zeta$  совпадает с центром масс Земли. Ее координатная ось  $O\xi$ , проходящая через центр масс Земли и УМН, лежит в плоскости гринвичского меридиана и направлена к западному побережью Африки. Координатная ось  $O\eta$  дополняет систему осей  $O\xi$  и  $O\xi$  до правой декартовой системы. При таком выборе системы  $O\xi\eta\zeta$  коэффициенты первой гармоники геопотенциала  $U_E$  обращаются в нуль, т. е.

$$I_1 = 0, \quad I_1 = 0, \quad \bar{C}_{10} = 0, \quad C_{11} = 0. \quad (5.2.50)$$

Это означает, что начало  $O$  системы координат  $O\xi\eta\zeta$  и центр масс Земли совпадают.

Численные значения коэффициентов при ортонормированных нами гармониках сведены в таблицу 5.2.

В моделях серии SE, GEM-1 — GEM-4 и серии GRIM [102, 119, 124] коэффициенты тессеральных гармоник

$$\bar{C}_{21} = 0, \quad \bar{S}_{21} = 0. \quad (5.2.51)$$

Как следствие выражений (5.2.51) по формулам (5.2.48) получим

$$D' = 0, \quad E' = 0. \quad (5.2.52)$$

Однако предположение (5.2.51) и его следствие (5.2.52) нельзя считать корректными, о чем свидетельствуют модели серии ГЕМ. Поэтому возникает возможность восстановления значений коэффициентов гармоник  $\bar{C}_{21}$ ,  $\bar{S}_{21}$  геопотенциала.

С этой целью, обращаясь к дискретной функции

$$l(n) = \sum_{m=1}^n [(\bar{C}_{nm})^2 + (\bar{S}_{nm})^2], \quad (5.2.53)$$

Таблица 5.2

Модель геопотен- циала	Коэффициенты ортонормированных гармоник геопотенциала				
	$\bar{I}_2$	$\bar{C}_{21}$	$\bar{S}_{21}$	$\bar{C}_{22}$	$\bar{S}_{22}$
SE-1	-484,26971	0,00000	0,00000	2,38000	-1,35000
SE-2	-484,16596	0,00000	0,00000	2,41290	-1,36410
SE-3	-484,17000	0,00000	0,00000	2,37990	-1,36560
SE-4	-484,40169	0,00000	0,00000	2,42000	-1,42000
GEM-1	-484,17700	0,00000	0,00000	2,43000	-1,37000
GEM-2	-484,16700	0,00000	0,00000	2,42000	-1,38000
GEM-3	-484,17100	0,00000	0,00000	2,43000	-1,39000
GEM-4	-484,16900	0,00000	0,00000	2,42000	-1,39000
GEM-5	-484,16620	-0,00120	-0,00870	2,42820	-1,36020
GEM-6	-484,16610	-0,00090	-0,00120	2,42510	-1,38830
GEM-7	-484,16460	-0,00310	-0,00090	2,43030	-1,39460
GEM-8	-484,16460	-0,00010	-0,00030	2,43450	-1,39530
GEM-9	-484,16555	-0,00021	2,43400	-0,00406	-1,39786
GEM-10	-484,16544	0,00104	2,43404	-0,00243	-1,39907
GMP	-484,41600	0,00000	0,00000	2,44000	-1,36000

Примечание то же, что к табл. 5.1.

где  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  — коэффициенты гармоник геопотенциала серии SE, вычислим значение  $l(n)$  для каждого  $n \geq 1$  (кроме  $n=2$ ). При этом получим последовательность чисел

$$l_1, l_3, l_4, \dots, l_n, \dots, \quad (5.2.54)$$

где  $l_n = l(n)$ . Вообще говоря, последовательность (5.2.54) обрывается на каком-то номере  $n$ , ибо модель серии SE, как и любая другая, характеризуется конечным числом тессеральных гармоник. Поэтому вместо (5.2.54) имеем дискретную последовательность

$$l_1, l_3, l_4, \dots, l_p \quad (p < \infty). \quad (5.2.55)$$

Теперь построим непрерывную функцию  $h(n)$ , принимающую в узлах  $n=1, 3, 4, \dots, p$  соответственно значения  $l_1, l_3, l_4, \dots, l_p$  (5.2.55). Это можно осуществить различными способами. В частности, будем искать функцию  $h(n)$  в виде интерполяционного многочлена Ньютона, алгоритм построения которого прост и общеизвестен.

Предположив, что функция  $h(n)$  задана интерполяционной формулой Ньютона, вычислим ее значение при  $n=2$ . Значение функции  $h(n)$  при  $n=2$  обозначим

$$h_2 = h(2). \quad (5.2.56)$$

Запишем выражение значения  $l(2)$  функции  $l(n)$  при  $n=2$ .

Согласно ее представлению (5.2.23)

$$l(2) = (\bar{C}_{21})^2 + (S_{21})^2 + (\bar{C}_{22})^2 + (\bar{S}_{22})^2. \quad (5.2.57)$$

Предполагаем, что  $\bar{C}_{21} \neq 0$ ,  $S_{21} \neq 0$ .

По построению

$$l(2) = h(2), \quad (5.2.58)$$

где  $h(2)$  определено согласно (5.2.56).

В выражении (5.2.57) участвуют две гармоники с известными коэффициентами  $\bar{C}_{22}$ ,  $\bar{S}_{22}$  и две гармоники со значениями коэффициентов  $\bar{C}_{21}$ ,  $\bar{S}_{21}$ , которые необходимо вычислить. Поэтому к уравнениям (5.2.57) надо присоединить либо уравнение, содержащее коэффициенты  $\bar{C}_{21}$  и  $\bar{S}_{21}$  в качестве неизвестных, либо некоторое условие, связывающее коэффициенты  $\bar{C}_{21}$  и  $\bar{S}_{21}$ . В качестве такого условия запишем полученную из наблюдений связь

$$\bar{C}_{21} = 2,9\bar{S}_{21}. \quad (5.2.59)$$

Правомерность соотношений (5.2.59) следует из дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах орбит спутника, правые части которых учитывают тессеральные гармоники геопотенциала. Аналогичное соотношение, связывающее коэффициенты  $\bar{C}_{21}$  и  $\bar{S}_{21}$ , получено Машимовым [53]. Показав, что эти коэффициенты связаны линейным соотношением вида

$$\bar{C}_{21} = k\bar{S}_{21},$$

он получил значение  $k$ , равное 3,1.

Подставив (5.2.59) в уравнение (5.2.57) и приняв во внимание равенства (5.2.58), разрешим его относительно гармоники

$$\bar{S}_{21} = \pm \{ (9,41)^{-1} [h_2 - (\bar{C}_{22})^2 - (\bar{S}_{22})^2] \}^{1/2}. \quad (5.2.60)$$

В большинстве моделей геопотенциала коэффициент  $\bar{S}_{21}$  отрицателен, поэтому

$$\bar{S}_{21} = - \sqrt{[h_2 - (\bar{C}_{22})^2 - (\bar{S}_{22})^2] / 9,41}. \quad (5.2.61)$$

Тогда для моделей SE-2 и SE-3 коэффициенты  $\bar{C}_{21} = -0,001196 \cdot 10^{-6}$ ,  $\bar{S}_{21} = -0,03466 \cdot 10^{-6}$  и  $\bar{C}_{21} = -0,00113 \cdot 10^{-6}$ ,  $\bar{S}_{21} = -0,003278 \cdot 10^{-6}$  соответственно.

Модель геопотенциала характеризуется постоянными величинами, называемыми ее *универсальными константами* (см. табл. 5.3). Последние включают экваториальный радиус Земли  $\bar{a}_E$ , геоцентрическую гравитационную постоянную  $k^2M$  и геометрическое сжатие Земли, определяемое по формуле

$$f_E = \frac{a_E - b_E}{a_E}, \quad (5.2.62)$$

причем через  $b_E$  обозначен полярный радиус Земли.

Геопотенциал зависит также от значения силы тяжести  $W$  на уровенной поверхности  $\sigma$  и, следовательно, от величины угловой скорости  $\omega$  вращения Земли.

Таблица 5.3

Модель геопотенциала	Универсальные константы		
	$a_E, \text{ м}$	$f_E$	$k^2 M \cdot 10^{20}, \text{ см}^3/\text{с}^2$
SE-1 } SE-2 }	6378155,0	1/298,255	3,986013
SE-3 } SE-4 }	6378140,0	1/298,256	3,986013
GEM-1 } GEM-2 }	6378160,0	1/298,258	3,986011
GEM-3 } GEM-4 }	6378160	1/298,259	3,986013
GEM-5 } GEM-6 }	6378155	1/298,255	3,986013
GEM-7 } GEM-8 }	6378137,8	1/298,7925	3,9860013
GEM-9 } GEM-10 }	6378139,1	1/299,7925	3,9860064 ± 0,02
GMP	6378140	1/298,256	3,986011

Для дальнейшего анализа необходимо знать еще одну производную величину — *динамическое сжатие*  $H_E$  Земли. Существуют два способа определения этой величины. Первый способ использует данные астрономических наблюдений и формулу, связывающую динамическое сжатие  $H_E$  Земли с постоянной прецессии  $p$  земной оси. Значение, вычисленное по этому способу [9],

$$H_E = 0,00327260 \pm 6,9 \cdot 10^{-6}. \quad (5.2.63)$$

Второй способ, разработанный М. А. Каном, использует гипотезу о равенстве полярных моментов инерции реальной и гидростатически уравновешенной Земли. По работе [40]

$$H_E = 0,00327364. \quad (5.2.64)$$

Перейдем к непосредственному применению этих моделей в задачах общей теории вращения Земли.

### 3. Определение элементов эллипсоида инерции Земли по моделям геопотенциала

Обращаясь к выражениям гармоник (5.2.10) геопотенциала, выявим связь коэффициентов хотя бы первых гармоник с моментами инерции Земли.

При  $n=0$  и  $m=0$  полином Лежандра  $P_0(\cos \chi) = 1$  и по формулам (5.2.10) получим

$$A_{00} = \int_V \rho(r', \chi', \lambda') dV = M,$$

где  $M$  — масса Земли. Тогда коэффициент  $I_0$  (5.2.31) равен

$$I_0 = C_{00} = 1. \quad (5.3.1)$$

Если  $n=1$  и  $m=0$ , то полином Лежандра  $P_1^0(\cos \chi') = \cos \chi'$ . Учитывая зависимость (5.2.3) между прямоугольными и сферическими координатами, получим

$$\cos \chi' = \xi'/r'.$$

Поэтому из соотношений (5.2.10) вытекают следующие выражения коэффициентов  $A_{10}$  и  $B_{10}$ :

$$A_{10} = \int_V r' \frac{\xi'}{r'} \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = M\xi_0, \quad B_{10} = 0,$$

где  $\xi_0$  — аппликата координаты центра масс  $O$  Земли. Следовательно,  $A_{10} = 0$ .

С учетом полинома Лежандра

$$P_1^{(1)}(\cos \chi') = \sqrt{1 - \cos^2 \chi'} = \sin \chi'$$

и (5.2.3) рассмотрим выражения

$$A_{11} = \int_V r' \sin \chi' \cos \lambda' \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = \int_V \xi' \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = M\xi_0,$$

$$B_{11} = \int_V r' \sin \chi' \sin \lambda' \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = \int_V \eta' \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = M\eta_0.$$

Здесь  $\xi_0$  и  $\eta_0$  — абсцисса и ордината центра масс  $O$  Земли. Следовательно,

$$A_{11} = 0, \quad B_{11} = 0. \quad (5.3.2)$$

Полиномы Лежандра имеют вид

$$P_2^{(0)}(\cos \chi') = \frac{1}{2}(\cos^2 \chi' - 1), \quad P_2^{(1)}(\cos \chi') = 3 \sin \chi' \cos \chi',$$

$$P_2^{(2)}(\cos \chi') = 3 \sin^2 \chi'.$$

С учетом (5.2.10) и предыдущих соотношений рассмотрим выражения коэффициентов  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  при  $n=2$ :

$$\begin{aligned} A_{20} &= \int_V (r')^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \chi' - 1) \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = \\ &= \int_V \left\{ \frac{3}{2} (\xi')^2 - \frac{1}{2} [(\xi')^2 + (\eta')^2 + (\zeta')^2] \right\} \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = \\ &= (A' + B')/2 - C', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{1}{3} \int_V (r')^2 3 \sin \chi' \cos \chi' \cos \lambda' \rho(\xi', \eta', \zeta') dV = \\ &= \int_V \rho(\xi', \eta', \zeta') \xi' \zeta' dV = e', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{21} &= \int_V \frac{1}{3} (r')^2 3 \sin \chi' \cos \chi' \sin \lambda' \rho (\xi', \eta', \zeta') dV = \\
 &= \int_V \rho (\xi', \eta', \zeta') \eta' \zeta' dV = F', \quad (5.3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= \int_V \frac{2}{4!} 3 (r')^2 \sin^2 \chi' \rho (\xi', \eta', \zeta') dV = \\
 &= \frac{1}{4} [(\xi')^2 - (\eta')^2] \rho (\xi', \eta', \zeta') dV = (B' - A')/4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{22} &= \frac{2}{4!} \int_V 3 (r')^2 \sin^2 \chi' \sin 2\lambda' \rho (\xi', \eta', \zeta') dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V (r')^2 \sin^2 \chi' \sin \lambda' \cos \lambda' \rho (\xi', \eta', \zeta') dV = D'/2.
 \end{aligned}$$

Здесь для моментов инерции Земли второго порядка относительно системы координат  $O\xi\eta\zeta$  приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 A' &= \int_V \rho (\xi', \eta', \zeta') [(\eta')^2 + (\zeta')^2] dV, \\
 B' &= \int_V \rho (\xi', \eta', \zeta') [(\zeta')^2 + (\xi')^2] dV, \\
 C' &= \int_V \rho (\xi', \eta', \zeta') [(\xi')^2 + (\eta')^2] dV, \quad (5.3.4) \\
 D' &= \int_V \rho (\xi', \eta', \zeta') \zeta' \eta' dV, \quad E' = \int_V \rho (\xi', \eta', \zeta') \zeta' \xi' dV, \\
 F' &= \int_V \rho (\xi', \eta', \zeta') \xi' \eta' dV.
 \end{aligned}$$

Величины  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  называются *осевыми моментами инерции* Земли, а  $D'$ ,  $E'$  и  $F'$  — *ее центробежными моментами инерции (произведениями инерции)* относительно системы координат  $O\xi\eta\zeta$ .

Запишем выражение динамического сжатия Земли:

$$H_E = \frac{1}{2C'} [2C' - (A' + B')]. \quad (5.3.5)$$

Используя формулы (5.3.3), (5.3.4) и (5.2.31), получим связь между коэффициентами  $I_n$ ,  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  геопотенциала и момента-

ми инерции (5.3.4) Земли:

$$\begin{aligned} Ma_E^2 I_2 &= C' - (A' + B')/2, & 4Ma_E^2 C_{22} &= B' - A', \\ F' &= Ma_E^2 S_{21}, & E' &= Ma_E^2 C_{21}, & D' &= 2Ma_E^2 S_{22}. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Для каждого  $n$  число коэффициентов гармоник равно  $2n+1$ , тогда как число обобщенных моментов степени  $n$  составляет  $(n+1)(n+2)/2$ . В частности, при  $n=2$  число гармоник степени 2 равно 5, а число моментов инерции равно 6. В таком случае выражений (5.3.6), вообще говоря, недостаточно для нахождения моментов инерции (5.3.4) Земли по известным гармоникам геопотенциала. Но если к соотношениям (5.3.6) присоединить выражение (5.3.5) динамического сжатия Земли

$$H_E = 2 - (A+B)/2C$$

[29], то полученная система шести независимых алгебраических уравнений (5.3.5) и (5.3.6) замыкается относительно шести (5.3.4) искомым моментам инерции второй степени [27, 28]. Эти уравнения независимы и, следовательно, их достаточно для нахождения  $A', B', C', D', E', F'$ .

Таким образом, если известны значения гармоник степени  $n=2$ , динамического сжатия  $H_E$ , массы  $M$  и среднего экваториального радиуса  $a_E$  Земли, то ее центральные моменты инерции (5.3.4) определяются легко.

Пусть значения этих величин найдены. Тогда главные центральные моменты инерции Земли определяются из векового уравнения

$$\begin{aligned} q^3 - (A' + B' + C')q^2 + (A'B' + A'C' + B'C' - D'^2 - E'^2 - F'^2)q - \\ - (A'B'C' - 2D'E'F' - A'F'^2 - B'E'^2 - C'D'^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

как его корни

$$q_1 = A, \quad q_2 = B, \quad q_3 = C. \quad (5.3.8)$$

Величины  $A, B$  и  $C$  — главные центральные моменты инерции Земли. Как и ранее,  $Oxyz$  — система главных центральных осей инерции Земли, координатные оси которой выбраны так, что

$$\begin{aligned} A &= \int_V \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dV, \\ B &= \int_V \rho(x, y, z) (z^2 + x^2) dV, \\ C &= \int_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dV, \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

$$\int_V \rho(x, y, z) xy dV = \int_V \rho(x, y, z) xz dV = \int_V \rho(x, y, z) yz dV = 0.$$

Выбирая за исходную систему  $O\xi\eta\zeta$ , определим взаимное расположение систем  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$  посредством углов Эйлера:

$$\beta = (O\xi, \bar{R}), \quad \alpha = (\bar{R}, Ox), \quad \gamma = (O\xi, Oz), \quad (5.3.10)$$

где  $\bar{R}$  — линия узлов координатных плоскостей  $O\xi\eta$  и  $Oxy$ . Выпишем матрицу взаимных переходов этих систем, зависящую от углов (5.3.10):

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \cos(x, \xi) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma, \\ \beta_x &= \cos(x, \eta) = \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma, \\ \gamma_x &= \cos(x, \zeta) = \sin \alpha \sin \gamma, \\ \alpha_y &= \cos(y, \xi) = -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma, \\ \beta_y &= \cos(y, \eta) = -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma, \\ \gamma_y &= \cos(y, \zeta) = \cos \alpha \sin \gamma, \quad \alpha_z = \cos(z, \xi) = \sin \beta \sin \gamma, \\ \beta_z &= \cos(z, \eta) = -\cos \beta \sin \gamma, \quad \gamma_z = \cos(z, \zeta) = \cos \gamma. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Элементы (5.3.11) матрицы взаимных переходов систем  $Oxyz$  и  $O\xi\eta\zeta$  определяются с использованием главных центральных моментов (5.3.8) и моментов инерции  $A', B', C', D', E', F'$  Земли. В частности, при известном главном моменте инерции  $C$  выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} (A' - C)\alpha_x + F'\beta_x - E'\gamma_x &= 0, \\ -F'\alpha_x + (B' - C)\beta_x - D'\gamma_x &= 0, \\ -E'\alpha_x - D'\beta_x + (C' - C)\gamma_x &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Эти уравнения линейно зависимы, так как  $C$  — корень векового уравнения (5.3.7). Поэтому рассмотрим лишь первые два уравнения (5.3.12). Внесем в них выражения направляющих косинусов из (5.3.11):

$$\begin{aligned} (A' - C) \sin \beta \sin \gamma + F' \cos \beta \sin \gamma - E' \cos \gamma &= 0, \\ -F' \sin \beta \sin \gamma - (B' - C) \cos \beta \sin \gamma - D' \cos \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{D'F' + (B' - C)E'}{E'F' + (A' - C)D'}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{D' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{F' \operatorname{tg} \beta + B' - C}. \quad (5.3.13)$$

В предположении, что углы  $\beta$  и  $\gamma$  найдены по их выражениям (5.3.13), третий из углов (5.3.10) может быть получен из аналогичного (5.3.12) уравнения:

$$\begin{aligned} (A' - A) (\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma) - \\ - F' (\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma) - E' \sin \alpha \sin \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда придем к выражению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(A' - A) \cos \beta - F' \sin \beta}{[(A' - A) \sin \beta + F' \cos \beta] \cos \gamma + E' \sin \gamma}. \quad (5.3.14)$$

Таблица 5.4

Модель геопотенциала	Центральный момент инерции Земли, г·см <sup>2</sup>					
	$A' \cdot 10^{44}$	$B' \cdot 10^{44}$	$C' \cdot 10^{44}$	$D' \cdot 10^{36}$	$E' \cdot 10^{36}$	$F' \cdot 10^{40}$
SE-1	8,013852905	8,013927569	8,040210993	0,000000000	0,000000000	-4,235101374
SE-2	8,013852435	8,013928039	8,040210993	0,000000000	0,000000000	-4,266472495
SE-3	8,009981654	8,010056314	8,036327026	0,000000000	0,000000000	-4,284040323
SE-4	8,013786103	8,013862021	8,040144601	0,000000000	0,000000000	-4,454699223
GEM-1	8,010134351	8,010210583	8,036481013	0,000000000	0,000000000	-4,297863831
GEM-2	8,009969069	8,010044987	8,036315031	0,000000000	0,000000000	-4,329235100
GEM-3	8,010035088	8,010111320	8,036381424	0,000000000	0,000000000	-4,360706369
GEM-4	8,010002157	8,010078075	8,036348227	0,000000000	0,000000000	-4,360606369
GEM-5	8,009955705	8,010031881	8,036301752	-2,729298877	-3,764550175	-4,329862526
GEM-6	8,009954100	8,010030178	8,036000920	-1,003880047	-2,823412632	-4,355273253
GEM-7	8,009894038	8,009970279	8,036239915	-2,823400237	-9,725045259	-4,375017946
GEM-8	8,009893972	8,009970345	8,036239915	9,411334122	-3,137111374	-4,377213925
GEM-9	8,009891411	8,009967768	8,036237338	-1,273664310	-6,587918846	-4,385234924
GEM-10	8,009889591	8,009965949	8,036235512	-7,623163236	3,262588381	-4,389030822
ГМР	8,013782426	8,013858658	8,040141070	0,000000000	0,000000000	-4,329212836

Таблица 5.5

Модель геопотенциала	Главные центральные моменты инерции Земли, г·см <sup>2</sup>		
	A	B	C
SE-1	8,013833690	8,013946859	8,040210993
SE-2	8,013833219	8,013947329	8,040210994
SE-3	8,009962105	8,010075938	8,036327026
SE-4	8,013765469	8,013882729	8,040144601
GEM-1	8,010114935	8,0102300074	8,036481013
GEM-2	8,009949296	8,010064836	8,036315030
GEM-3	8,010015167	8,010134316	8,036381423
GEM-4	8,009982256	8,010098051	8,036348227
GEM-5	8,009936068	8,010054593	8,036301752
GEM-6	8,009934239	8,010050114	8,036300092
GEM-7	8,009874073	8,009990318	8,036239915
GEM-8	8,009873988	8,009990403	8,036239915
GEM-9	8,009874337	8,009987918	8,036237338
GEM-10	8,009869592	8,009986023	8,036235512
GMP	8,013762785	8,013878374	8,040141070

Примечание. Приведенные значения уменьшены в  $10^{44}$  раз.

Поскольку углы  $\beta$  и  $\gamma$  находятся из (5.3.13) однозначно, то и выражение (5.3.14) определяет угол  $\alpha$  однозначно.

Следует заметить, что радикалу, фигурирующему в (5.3.13), приписан лишь один знак. Это обстоятельство при конкретном выборе системы  $O\xi\eta\zeta$  получает свое обоснование.

Пусть в момент времени  $t_0$  измерена величина  $\omega$  угловой скорости вращения Земли вокруг оси, совпадающей с координатной осью  $O\xi$ . Тогда имеют место начальные данные [32, 39]

$$p_0 = p(t_0) \sin \alpha \sin \gamma, \quad q_0 = q(t_0) \cos \alpha \sin \gamma, \quad r_0 = r(t_0) \cos \gamma. \quad (5.3.15)$$

Таким образом, необходимые для расчета элементов вращения Земли главные центральные моменты инерции (5.3.8) и начальные данные могут быть найдены и фиксированы корректно.

Значения моментов инерции Земли (5.3.4), вычисленные для моделей геопотенциала (см. табл. 5.1), приведены в табл. 5.4.

При этом, учитывая значения коэффициентов гармоник  $\bar{C}_{21}$  и  $\bar{S}_{21}$  для моделей SE-2 и SE-3, из табл. 5.2 получим  $D' = -1,0885577306 \cdot 10^{36}$ ,  $E' = -3,764532469 \cdot 10^{36}$  для SE-2 и  $D' = -1,028972208 \cdot 10^{36}$ ,  $E' = 3,544934741 \cdot 10^{36}$  для SE-3.

Величины главных центральных моментов инерции Земли (5.3.8), полученные решением векового уравнения (5.3.7), даны в табл. 5.5.

Начальные условия (5.3.15) при известном значении угловой

Таблица 5.6

Модель геопотенциала	Углы Эйлера, рад		
	$\beta$	$\alpha$	$\gamma$
SE-1	-4,241535847	0	0
SE-2	-4,308383592	0	0
SE-3	-4,62121993	0	0
SE-4	-4,325385116	0	0
GEM-1	-4,226438862	0	0
GEM-2	-4,254706061	0	0
GEM-3	-4,262379406	0	0
GEM-4	-4,272593221	0	0
GEM-5	-2,875272438	-1,382564390	-1,049196406
GEM-6	-1,530227856	-2,748254513	-3,972261407
GEM-7	8,579570872	-1,286760220	-3,848029597
GEM-8	-7,478244050	3,195489190	3,771551503
GEM-9	-3,761150180	-5,318392735	-4,855736659
GEM-10	-8,297397695	4,021928741	-3,151296812
GMP	-4,244482490	0	0

Примечание. Приведенные значения увеличены в 10 раз.

скорости вращения Земли зависят от углов Эйлера (5.3.10), вычисляемых по формулам (5.3.13) и (5.3.14). Значения этих углов указаны в табл. 5.6. Заметим, что в случае  $C_{21}=0$  и  $S_{21}=0$  поворот системы координат  $Oxyz$  вокруг оси  $Oz$  на угол  $\alpha$  совмещает ее с системой  $Oxyz$  главных центральных осей инерции Земли.

Допущение (2.5.51) о равенстве нулю коэффициентов  $\bar{C}_{21}$  и  $\bar{S}_{21}$  существенно искажает ориентацию главных центральных осей инерции Земли относительно системы УМН.

Трехосность центрального эллипсоида инерции Земли следует из астрономических наблюдений (см. [46, 66, 78]). Так, Орлов [63] показал ее в предположении, что при эллипсоиде инерции с тремя неравными осями полюс вращения Земли должен описывать эллипсообразную линию. Получив именно такую картину из наблюдений, Орлов вычислил направление наименьшей оси эллипсоида инерции Земли, соответствующее  $70^\circ$  з. д. По данным наблюдений МСДП, за период 1900—1968 гг. А. А. Михайлов [55] установил эллиптичность чандлерова движения полюса и вычислил направление его наименьшей оси, равное  $68^\circ$  з. д. По ряду работ других авторов направление наименьшей оси центрального эллипсоида инерции Земли в среднем изменяется в пределах от  $65^\circ$  до  $75^\circ$  з. д. В то же время по расчетам, выполненным для моделей геопотенциала серий SE и GEM (до GEM-5) в предположении, что  $C_{21}=S_{21}=0$ , долгота наименьшей оси эллипсоида инерции Земли не превышает  $16^\circ$  з. д.

Таблица 5.7

Модель гес- потенциала	Степень динамической неурав- новешенности Земли		Модель гео- потенциала	Степень динамической неурав- новешенности Земли	
	$\gamma$ , с	$l$ , м		$\gamma$ , с	$l$ , т
GEM-5	10,49196	66,69	GEM-8	3,77155	23,97
GEM-6	3,97226	25,25	GEM-9	4,85574	30,86
GEM-7	3,84803	24,46	GEM-10	3,45130	20,03

В табл. 5.7 приведены значения угла  $\gamma$  и расстояние  $l$  между полюсом инерции и УМН. Они вычислены по данным табл. 5.6 для динамического сжатия Земли  $H_E$  в интервале значений от (5.2.63) до (5.2.64). При определении  $l$  с точностью до 1 см указанному интервалу соответствуют одни и те же значения  $\gamma$  и  $l$ .

Таким образом, Земля в ее современном состоянии динамически неуравновешена. Степень ее неуравновешенности невелика и характеризуется коэффициентами начальных гармоник геопотенциала при  $n \leq 2$ . Эти последние определяются весьма точно, ибо относительная погрешность величин  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{C}_{21}$ ,  $\bar{S}_{21}$ ,  $\bar{C}_{22}$ ,  $\bar{S}_{22}$  ( $\bar{J}_2$ ) составляет примерно 1% [9, 81, 109, 124].

#### 4. Параметры векового движения полюса Земли

Обратимся теперь к количественному анализу движения полюса Земли. Предварительно рассмотрим данные астрономических наблюдений за движением полюса Земли.

Движение полюса приводит к изменению географических широт точек земной поверхности. Первые наблюдения подобной изменяемости широт провели астрономы Пулковской обсерватории — Петерс, а позднее Нюрен [46, 66]. Такие наблюдения велись обсерваториями Гринвича, Парижа, Потсдама, Вашингтона и других городов. К 1892 г. завершилась серия наблюдений Чандлером, в результате которых установлены колебания широт на многих обсерваториях, вызванные движением полюса. Были прослежены данные широтных наблюдений более чем за 150 лет.

Дальнейшие исследования показали, что необходима служба систематического изучения движения полюса Земли. В 1895 г. на XI Международной геодезической конференции в Берлине было создано Центральное бюро службы широты, которое приступило к разработке программы и методики наблюдений.

Международная служба широт (МСШ) — первый центр постоянного научного сотрудничества — была организована в 1898 г. Уже в конце 1899 г. начались систематические наблюдения за изменением широт ее пяти станций, расположенных в северном полушарии на широте  $39^{\circ}08'$  (см. рис. 1.1). В 1903 г. опубликован первый том работ МСШ, содержащий результаты наблюдений за два с лишним года. Последующие данные наблюдений систематически издавались отдельными томами с указанием прямоугольных координат полюса Земли.

В 1921 г. было сформировано Международное бюро времени (МБВ); программа его работы включает определение координат полюса Земли по данным как службы времени, так и службы широты. Начиная с 1953 г. регулярные наблюдения за изменением широт проводят станции Советской службы широты, являющейся отделением МСШ и одновременно центром оперативной обработки данных служб широты. В настоящее время МСШ переименована в Международную службу движения полюсов (МСДП), и в ее состав включены новые широтные станции, называемые независимыми и выполняющие роль контрольных станций.

Широкое распространение получает определение координат полюса Земли из совместных данных наблюдений как широты, так и времени. Одной из служб, эффективно использующих такой подход, является Далгреновская служба движения полюсов (ДСДП).

С запуском искусственных спутников Земли службы широт получили принципиально новое мощное средство наблюдения за движением полюса. Используемые в спутниковой геодезии лазерные и доплеровские методы позволяют с большой степенью точности быстро получать координаты полюса Земли.

За период своего существования МСДП (МСШ) накопила большой фактический материал о движении полюса Земли. МБВ располагает результатами полувековых непрерывных наблюдений за положением полюса.

Определение координат полюса по материалам наблюдений составляет следующий этап астрономических исследований движения полюса Земли, на котором решаются вопросы, во-первых, связи координат полюса и наблюдаемых вариаций широт станций МСДП, во-вторых, выбора начала, к которому следует отнести координаты полюса.

Связь между координатами  $x$ ,  $y$  полюса Земли и наблюдаемыми вариациями широт определяется по формуле

$$x \cos \lambda_i + y \sin \lambda_i + z = \varphi_i - m_i, \quad (5.4.1)$$

где  $\lambda_i$ ,  $\varphi_i$  и  $m_i$  — долгота, широта и начальная широта  $i$ -й широтной станции,  $z$  — поправка, общая для всех станций МСДП.

Ввиду особой важности представления координат полюса в единой системе на XIII съезде МАС (Прага, 1967 г.) принято решение относить координаты полюса к Условному международному началу (УМН), определяемому начальными широтами  $m_i$  станций МСДП:

Мицузава	$m_1 = 39^\circ 8' 3,602''$ ,	
Китаб	$m_2 = 39^\circ 8' 1,850''$ ,	
Карлофорте	$m_3 = 39^\circ 8' 3,941''$ ,	(5.4.2)
Гейтерсберг	$m_4 = 39^\circ 8' 13,202''$ ,	
Юкайя	$m_5 = 39^\circ 8' 12,096''$ .	

Начальные широты, входящие в (5.4.1), получены для средней эпохи наблюдений за период 1900—1905 гг.

Наряду с системой УМН введена система, называемая «1968 VIN System» [100]. Она задана фиксированными долготами и широтами станций служб широты и времени одновременно. Эти параметры системы выбираются так, чтобы полюс  $P_0$  средней эпохи наблюдений за период 1964—1967 гг. совпал с УМН, а начало отсчета долгот — с точкой пересечения Гринвичского меридиана и экватора [110].

Уравнения (5.4.1) содержат две неизвестные  $x$  и  $y$ , для определения которых необходимо рассматривать показания хотя бы двух станций. Объединяя показания отдельных пар станций МСДП, можно вычислить десять пар  $(x, y)$  координат полюса. Поэтому для нахождения средних значений координат полюса необходимо принять некоторое дополнительное условие. В качестве одного из таких условий в астрономической практике принято условие равенства нулю суммы ошибок отклонений наблюдавшихся звезд.

Результат определения координат полюса, помимо единообразия средств и методов наблюдения, зависит от способа расчета, от интервала и синхронности наблюдений и многих других факторов.

Существуют различные методы определения координат полюса. Наиболее распространенными являются цепной метод [89] и метод Орлова [63]. В системе УМН, по данным станций МСДП, цепным методом вычислены координаты полюса за период 1900—1969 гг. [123], по методу Орлова — за период 1890—1969 гг. [78].

Позднее ряды координат полюса Земли подвергались сравнительному анализу в целях выделения различных составляющих его движения.

Различают *полярные* и *неполярные* изменения широты. Первые вызваны смещением оси вращения Земли, вторые — изменением направления силы тяжести в данном месте. Как полярные, так и неполярные изменения широты имеют две составляющие — *периодическую* и *непериодическую*. К периодическим полярным изменениям широты, в частности, относятся чандлеровское с периодом 405—430 средних солнечных суток и годичное движение полюса. Имеются публикации о движении полюса с полугодовым периодом. Непериодическое полярное изменение широты обуславливается вековым движением полюса [129].

Составляющие движения полюса Земли получают специальным фильтрованием рядов наблюдений. Так, для выделения годовой составляющей используется формула

$$\bar{z}_{ai} = \sum_{j=-m}^m k_j z_{i+j},$$

где  $z_i = (x_i, y_i)$  совпадает с одной из координат полюса, заданных на каждую долю интервала наблюдения;  $k_j$  — коэффициен-

ты применяемого фильтра. В качестве примера приведем фильтр Иджимы [89]:

$$z'_i = \frac{1}{20} (2z_i + 2z_{i\pm 1} + \dots + 2z_{i\pm 4} + 2z_{i\pm 5}),$$

$$z_{ai} = \frac{1}{12} [2(z_i - z'_i) + 2(z_{i\pm 10} - z'_{i\pm 10}) + 2(z_{i\pm 20} - z'_{i\pm 20}) + (z_{i\pm 30} - z'_{i\pm 30})],$$

$$z_{ai} = \sum_{j=-35}^{35} k_j z_{i\pm j}.$$

В астрономической практике существуют полосовые фильтры и различные модификации фильтра Иджимы.

После исключения годовой составляющей движения полюса получается последовательность координат  $(x_s, y_s)$  полюса, из которых выделяется чандлеровская составляющая. Для этого строится график автокорреляционной функции полюса. На графике отмечаются пики регулярно встречающихся максимумов и минимумов, по которым и определяется чандлеровский период.

Исключение тем или иным способом чандлеровской составляющей движения полюса приводит к последовательности новых координат  $(x_b, y_b)$  полюса. Детальные исследования указывают на возрастание спектральной плотности этой последовательности [89]. По-видимому, этот факт свидетельствует о существовании долгопериодического или векового движения полюса, хотя на долю годичного и чандлеровского составляющих приходится 93% всей энергии движения.

Вопрос о вековом движении полюса Земли — один из основных в современной астрономии и геодезии. Рассмотрим его более подробно.

Астрономы, изучавшие эйлерово движение полюса Земли, обнаружили вековую составляющую изменчивости широт обсерватории. Так, М. Нюрен впервые обнаружил вековое уменьшение средней широты Пулковской обсерватории, отнесенной к различным эпохам. А. Эри установил постоянное уменьшение широты Гринвича, а Е. Фергола вычислил значения векового изменения средних широт пяти обсерваторий мира. Такие изменения средних широт различных астрономических обсерваторий привели к мысли о существовании векового движения полюса Земли, приводящего к вековому изменению средних широт этих обсерваторий.

В конце прошлого столетия имеющийся материал наблюдений за изменчивостью широт астрономических обсерваторий был подвергнут тщательной переработке и детальному анализу. При этом выявлены неоднородность и низкая точность, а также обнаружилась недостаточность материалов наблюдений, кроме того, установлен ряд факторов, способных обусловить фиктивное изменение средних широт. Надо было устранить эти неблагопри-

ятные обстоятельства и провести специальные наблюдения для выделения векового движения полюса [120, 121].

Серьезные экспериментальные и теоретические исследования изменчивости широт были начаты именно в связи с проблемой векового движения полюса Земли. Она положила начало организации как МСШ, так и в значительной мере последующих служб широты, включая службы наблюдения ИСЗ.

Вековым движением полюса Земли, по данным станций МСДП, занимались многие исследователи. Результаты обработки этих данных, полученные Орловым [63], Михайловым [55, 56], Кагановским [37], Костиной и Сахаровым [45], Юми и Вакко [129], А. Стойко и Н. Стойко [120, 121], Рочестером [114, 115], Пома и Провербио [112], Секигучи и др. авторами [106, 107, 110], говорят о существовании такого движения.

В то же время в ряде работ, посвященных анализу данных станций МСДП (МСШ), отрицается существование векового движения полюса Земли. На недостаточность количества станций МСДП для достоверного определения векового движения полюса указывает Вицента и Юми [123]. Полный анализ способов обработки исходных данных о положении полюса, а также фильтров, используемых при выделении его векового движения, проведен Федоровым [79]. Им показано, что для большинства применяемых способов фильтрации существование и отсутствие векового движения полюса Земли равновероятны и скорости линейных изменений широт станций МСДП могут быть случайными величинами. Надлежащий анализ документированных МСШ блужданий полюса показывает, что они, безусловно, представляют собой случайные флюктуации — отмечает Джеффис [22].

В целом многолетний комплекс экспериментальных исследований, включающий организацию служб широты и времени, постановку высокоточных наблюдений и выделение (фильтрацию) основных составляющих вектора угловой скорости вращения Земли, не приводит к вполне определенному выводу о наличии векового движения полюса Земли.

В такой ситуации естественно обратиться к теории.

Рассмотрим вектор  $\omega(t)$  угловой скорости вращения Земли. В предыдущей главе установлено существование хотя бы одной последовательности моментов времени

$$t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*, \dots \quad (5.4.3)$$

таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^* = \infty$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(t_n^*) = r_\infty e_z, \quad (5.4.4)$$

где  $e_z$  — единичный вектор положительной оси  $Oz$  и  $r_\infty$  — среднее значение величины  $r(t)$ .

Вектор  $\omega(t)$  представляет собой почти периодическую функ-

цию с почти периодическими компонентами  $p(t)$ ,  $q(t)$  и  $r(t)$ . По определению почти периодической вектор-функции [18, 48] для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $l(\varepsilon) > 0$ , что в каждом интервале времени  $[t, t+l] \subset R_1$  длины  $l$  найдется такой момент времени  $t^*$ , для которого

$$\begin{aligned} |p(t) - p(t+t^*)| &\leq \varepsilon, & |q(t) - q(t+t^*)| &\leq \varepsilon, \\ |r(t) - r(t+t^*)| &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

для всех  $t \in R_1$ . Поэтому, если в какой-либо момент времени  $t^*$  вектор  $\omega$  занимал в теле Земли положение

$$\omega(t^*) = \{p(t^*), q(t^*), r(t^*)\},$$

то найдется бесконечно много других моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  таких, что

$$|p(t_i) - p(t^*)| \leq \varepsilon, \quad |q(t_i) - q(t^*)| \leq \varepsilon, \quad |r(t_i) - r(t^*)| \leq \varepsilon,$$

где  $|t_{i+1} - t_i| \leq l(\varepsilon)$ . (5.4.6)

Согласно неравенствам (5.4.6) вектор  $\omega(t)$  почти плотно заполняет весь объем конуса с вершиной  $O$  и углом  $\Phi$  при вершине:

$$\Phi = 2 \arcsin \left( r_{\inf/\sup} \omega(t) \right)_{t \geq 0}$$

с течением времени  $t \in R_1^+$ .

Следовательно, под общим направлением векового движения полюса Земли, заключающегося в выходе на  $\omega$ -предельный режим (5.4.4), следует понимать направление, определяемое положением оси инерции  $Oz$  в теле Земли относительно системы координат  $O\xi\eta\zeta$ .

Прямая с направляющим вектором  $\omega$ , проходящая через точку  $O$ , в системе  $Oxyz$  имеет уравнение

$$x/p = y/q = z/r$$

и на плоскости

$$z = b \quad (5.4.7)$$

определяет точку

$$x = bp/r, \quad y = bq/r,$$

где  $b$  — полярный радиус Земли.

Если в момент времени  $t_0 = 0$  заданы начальные условия

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad r(0) = r_0, \quad (5.4.8)$$

то им на плоскости (5.3.7) соответствует точка

$$x(0) = p_0 b / r_0, \quad y(0) = q_0 b / r_0.$$

Из-за малости угла  $\gamma$  касательную плоскость (5.4.7) при полярном радиусе  $b$  можно отождествить с земной поверхностью.

Таблица 5.8

Модель гео- потенциала	Вековое движение северного полюса		Модель гео- потенциала	Вековое движение северного полюса	
	Направление, з. д.	Скорость, мм/г		Направление, з. д.	Скорость, мм/г
GEM-5	82°48'	112,2	GEM-8	71 41	82,9
GEM-6	75 15	100,3	GEM-9	86 57	107,5
GEM-7	16 19	93,3	GEM-10	66 58	98,7

Таблица 5.9

Автор	Вековое движение северного полюса			
	Интервал наблюдений, годы	Направле- ние, з. д.	Скорость	
			угл. с/год	мм/год
Е. Провербио и др.	1900—1962	59°8	0,00283	84,9
С. Юми, Ю. Вако	1900—1965	72 9	0,00296	88,8
В. Марковиц	1900—1966	65 0	0,00350	105,0
А. Стойко, Н. Стойко	1900—1967	69 8	0,00320	96,0
Л. Д. Костина, В. И. Сахаров	1900—1967	48 5	0,00320	96,0
А. А. Михайлов	1901—1968	76 0	0,00380	114,0

Если ввести функцию расстояния между полюсом инерции  $N_{\pi}$  и следом  $N$  полюса Земли на плоскости (5.4.7)

$$\rho(N, N_{\pi}) = \frac{b}{r(t)} \sqrt{p^2(t) + q^2(t)}, \quad (5.4.9)$$

то в начальный момент времени она принимает значение

$$\rho(N, N_{\pi}) = \frac{b}{r_0} \sqrt{p_0^2 + q_0^2} = \rho_0. \quad (5.4.10)$$

Пусть  $\varepsilon$  — заданная точность. Обозначим через  $\tau$ , соответствующий величине  $\varepsilon$ , момент времени  $t \in R_1^+$ , определенный согласно условию как

$$\tau = \min [t / \rho(N, N_{\pi})(t) \leq \varepsilon]. \quad (5.4.11)$$

Иначе,  $\tau$  — минимальное время, за которое полюс Земли с точностью до  $\varepsilon$  достигает положения полюса инерции. Отсюда средняя величина скорости векового движения полюса Земли

$$v_{\text{ср}} = b\rho_0 / \tau r_0, \quad (5.4.12)$$

где  $\rho_0$  и  $\tau$  определяются по формулам (5.4.10) и (5.4.11).

В соответствии с этими определениями параметров векового движения Земли рассчитаем общее направление (направление на полюс инерции) и среднюю величину скорости такого движе-

ния за период 1900—1960 гг. по формулам (5.3.13) и (5.4.12). Результаты сведены в табл. 5.8.

В табл. 5.9 приведены значения этих параметров по данным станций МСДП [89].

## 5. Постоянные прецессии и нутации земной оси

Связанные с Землей системы отсчета, к которым отнесены результаты наблюдений и вычислений элементов движения небесных тел, меняют с течением времени как положение, так и ориентацию в пространстве. Это обуславливает необходимость введения в данные наблюдений соответствующих поправок. Такие поправки определяются редуцированными вычислениями и учитывают прежде всего прецессию  $\psi$  и нутацию  $\theta$  оси вращения Земли.

Редуцированные вычисления производятся посредством группы параметров, называемой *системой астрономических постоянных*, подразделяемых на *основные и производные*. Основные или фундаментальные постоянные определяются из обширных рядов наблюдений. В число основных постоянных входят *общая прецессия* оси вращения Земли в долготе за тропическое столетие и *постоянная нутации* земной оси, отнесенные к начальной эпохе 1900.0 [1, 111].

Согласно Ньюкому общая прецессия оси вращения Земли определяется по формуле

$$\psi(t) = 50,25641'' + 0,02223''T, \quad (5.5.1)$$

где  $T$  — время, отсчитываемое в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток от начальной эпохи 1900.0 =  $JD \times 2415020,3134$  до рассматриваемого момента времени

$$T = [JD(t) - 2415020,3134] / 36524,22. \quad (5.5.2)$$

Свободный член в формуле (5.5.1) называется *постоянной прецессии* и обозначается буквой  $P$ .

За тропическое столетие от начальной эпохи она составляет величину

$$P = 5025,641''. \quad (5.5.3)$$

Амплитуда нутационного колебания оси вращения Земли называется *постоянной нутации* и обозначается буквой  $N$ :

$$N = 9,210'', \quad (5.5.4)$$

В дальнейшем, кроме величин (5.5.3) и (5.5.4), входящих в Систему астрономических постоянных МАС (1976, 1979) требуется число эфемеридных секунд  $S$  в одном тропическом году:

$$S = 31\,556\,925,9747, \quad (5.5.5)$$

и число секунд дуги в одном радиане

$$I \text{ рад} = 206\,264,806''. \quad (5.5.6)$$

Эти величины также входят в Систему астрономических постоянных МАС (1976, 1979), но не относятся к числу основных и производных постоянных [1, 66, 111].

Отметим, что Система астрономических постоянных МАС (1976, 1979), рекомендованная XVI и XVII Генеральными ассамблеями МАС, представляет собой уточненный вариант Системы МАС-1964 [89].

Запишем общие представления прецессии и нутации земной оси:

$$\psi(t) = \psi_0 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \Psi(t), \quad \theta(t) = \theta_0 + \theta_2 t^2 + \Theta(t), \quad (5.5.7)$$

где  $\Psi(t)$  и  $\Theta(t)$  — периодические функции времени, а постоянные  $\psi_0$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\theta_0$  и  $\theta_2$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 5025,640'', \quad \psi_2 = 1,1118'', \\ \theta_0 = 23^\circ 27' 08,26'', \quad \theta_2 = -0,0060''. \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Из формул (5.5.7) видно, что вклад членов  $\psi_2 t^2$  и  $\theta_2 t^2$  второго порядка в функциях  $\psi(t)$  и  $\theta(t)$  с течением времени очень быстро нарастает, и они становятся определяющими при решении задачи о вращательном движении Земли. Для ослабления влияния членов второго порядка МАС рекомендовал начиная с 1960 г., в астрономических ежегодниках учитывать прецессию от начала бесселева года — для первой половины календарного года и от начала следующего бесселева года — для второй половины текущего календарного года.

Таким образом, при редукциях, соответствующих прецессии и нутации земной оси, в пределах одного года необходимо перенести начало отсчета времени и производить все вычисления заново. При этом возникает вопрос: на каком максимальном интервале времени сохраняется структура (5.5.7) угловых переменных  $\psi$  и  $\theta$  для того, чтобы в них ослабить влияние указанных членов второго порядка? Если коэффициенты (5.5.8) и периодические функции  $\Psi(t)$  и  $\Theta(t)$  претерпевают существенные изменения с течением времени, то структура (5.5.7) переменных  $\psi$  и  $\theta$  просто неверна. Вновь рассмотрим структуру решения задачи о вращательном движении Земли относительно центра масс в переменных Андуайе. Как установлено, в гл. IV, это решение является условно-периодическим, причем  $K(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $\theta(t)$  — почти периодические функции, а  $\bar{\psi}(t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $\tau(t)$  представлены суммой линейной и почти периодической функций. Запишем формальную структуру переменных Андуайе:

$$\begin{aligned} K(t) &— \text{п. п. ф.}, \quad \delta(t) &— \text{п. п. ф.}, \quad \theta(t) &— \text{п. п. ф.}, \\ \tilde{\psi}(t) &= \mathcal{L}\{\bar{\psi}\}t + \text{п. п. ф.}, \\ \bar{\varphi}(t) &= \mathcal{L}\{\bar{\varphi}\}t + \text{п. п. ф.}, \\ \tau(t) &= \mathcal{L}\{\tau\} + \text{п. п. ф.}, \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

где п. п. ф. — почти периодическая функция,  $\mathcal{L}\{\bar{\psi}\}$ ,  $\mathcal{L}\{\bar{\varphi}\}$  и  $\mathcal{L}\{\bar{\tau}\}$  — средние значения правых частей дифференциальных уравнений (4.3.8) для переменных  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\tau}$  соответственно.

С учетом этой структуры переменных Андуйе рассмотрим формулы (4.1.11) и (4.1.27). Согласно выражениям (4.1.7) и (4.1.27) выделим положительное слагаемое в правой части первого уравнения (4.1.23):

$$\bar{\psi}(t) = K(t) \frac{\sin^2 \bar{\chi}(t) \cos \delta(t)}{\sin \chi(t)} \left( \frac{\sin^2 \bar{\varphi}(t)}{A} + \frac{\cos^2 \bar{\varphi}(t)}{B} \right). \quad (5.5.10)$$

Тогда в соответствии с (5.5.9) правые части уравнений (4.1.23) представляют почти периодические функции. Правая часть первого уравнения (4.1.23), имея знакоположительное слагаемое (5.5.10), обладает положительным средним значением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\bar{\psi}\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t K(s) \frac{\sin^2 \bar{\chi}(s) \cos \delta(s)}{\sin \chi(s)} \left( \frac{\sin^2 \bar{\varphi}(s)}{A} + \frac{\cos^2 \bar{\varphi}(s)}{B} \right) ds = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t K(s) \left( \frac{\gamma_x(s) \bar{\gamma}_x(s)}{A} + \frac{\gamma_y(s) \bar{\gamma}_y(s)}{A} \right) ds. \end{aligned}$$

По теореме об аппроксимации почти периодических функций имеет место равенство

$$K(t) \left[ \frac{\gamma_x(t) \bar{\gamma}_x(t)}{A} + \frac{\gamma_y(t) \bar{\gamma}_y(t)}{B} \right] = \mathcal{L}\{\bar{\psi}\} + \text{п. п. ф.}$$

Неопределенный интеграл от почти периодической функции, входящей в правую часть этого выражения, ограничен и, следовательно, определяет почти периодическую функцию. Тогда угол прецессии  $\psi(t)$  имеет вид

$$\psi(t) = \psi_0 + \mathcal{L}\{\bar{\varphi}\} + \text{п. п. ф.} \quad (5.5.11)$$

Заметим, что это выражение угла  $\psi$  отличается от (5.6.7). Из соотношения (5.5.11) назовем  $\mathcal{L}\{\bar{\psi}\}$  постоянной прецессии оси вращения Земли

$$P = \mathcal{L}\{\bar{\psi}\}. \quad (5.5.12)$$

Рассмотрим последнюю из формул (4.1.11) и внесем в нее выражение направляющих косинусов (4.1.7) и (4.1.10). Тогда

$$\theta(t) = \arccos [-\cos \bar{\psi}(t) \sin \delta(t) \sin \bar{\chi}(t) + \cos \delta(t) \cos \bar{\chi}(t)]. \quad (5.5.13)$$

Экстремум выражения (5.5.13) можно определить из

$$\theta(t) = \arccos [\cos(\delta + \bar{\chi})] = \delta(t) + \bar{\chi}(t), \quad (5.5.14)$$

$$\theta(t) = \arccos [\cos(\delta - \bar{\chi})] = \delta(t) - \bar{\chi}(t),$$

Таблица 5.10

Модель геопотен- циала	Постоянные		Модель геопотен- циала	Постоянные	
	прецессии, угл. с/век	нутаии, угл. с		прецессии, угл. с/век	нутаии, угл. с
GEM-5	5063,67	9,181	GEM-8	5059,55	9,927
GEM-6	5112,03	9,183	GEM-9	5057,91	10,870
GEM-7	5116,07	9,373	MAC-1976—1979	5025,64	9,210

так как угол  $\bar{\psi}(t)$  является быстрой переменной. Следовательно, амплитуда нутационного колебания с высокой степенью точности определяется как удвоенный максимум угла  $\bar{\chi}(t)$ . Иначе говоря, постоянная нутаии

$$N = 2 \max_t \bar{\chi}(t). \quad (5.5.15)$$

Значения постоянных прецессии (5.5.12) и нутаии (5.5.15) оси вращения Земли, вычисленные по моделям геопотенциала с учетом (5.5.5) и (5.5.6), сведены в табл. 5.10.

Согласно структуре переменных Андуайе (5.5.9) можно продолжить вычисление спектра прецессии, нутаии и собственного вращения Земли относительно центра масс. Указанные в табл. 5.10 постоянные прецессии и нутаии земной оси представляют собой первые члены этого спектра.

•  
**Обозначения, термины  
 и необходимые сведения**

**1. Теоретико-множественные термины и обозначения**

Обозначения и определения различных категорий теории множеств заимствованы в основном из [3, 44], частью из [41].

Совокупность некоторых объектов  $x$  произвольной природы, объединенных в  $X$  по некоторому формальному признаку, называется *множеством*, а объект  $x$  — *элементом множества*.

Определение 1.1. Если из того, что  $\forall y \in Y$  следует  $y \in X$ , то множество  $Y$  называется подмножеством множества  $X$ :  $Y \subset X$ .

Символом  $P(X) = \{x \in X | P(x)\}$  обозначено множество элементов  $X$ , обладающих свойством  $P$ .

Определение 1.2. Суммой или объединением множеств  $X$  и  $Y$  называется множество  $Z$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $X$  и  $Y$ :  $Z = X \cup Y$ ; суммой любого конечного или бесконечного числа множеств  $X_n$  называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $X_n$ :  $X = \bigcup_n X_n = \{x | \exists n : x \in X_n\}$ .

Определение 1.3. Множество  $Z$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих как  $X$ , так и  $Y$ , называется *пересечением* этих множеств:  $Z = X \cap Y$ ; пересечением любого конечного или бесконечного числа множеств  $X_n$  называется множество всех элементов, принадлежащих каждому из множеств  $X_n$ :  $X = \bigcap_n X_n = \{x | \forall n : x \in X_n\}$ .

Операции объединения и пересечения множеств коммутативны, ассоциативны и взаимно дистрибутивны.

Определение 1.4. Множество  $Z$ , состоящее из всех тех элементов множества  $X$ , которые не входят в множество  $Y$ , называется *разностью* множеств  $X$  и  $Y$ ; разность множеств обозначается  $Z = X \setminus Y = \{x | x \in X, x \notin Y\}$ .

Определение 1.5. Если  $Y \subset X$ , то разность  $X \setminus Y$  называется *дополнением* множества  $Y$  до множества  $X$ :  $Y' = X \setminus Y$ .

Определение 1.6. Если каждому элементу  $x \in X$  поставлен в соответствие один и только один элемент  $y \in Y$ , то говорят, что задано отображение  $f$  из  $X$  в  $Y$ :  $f: X \rightarrow Y$ .

Элемент  $y \in Y$ , соответствующий элементу  $x \in X$  при отображении  $f: X \rightarrow Y$ , называется его *образом* и обозначается  $y = f(x)$ . Совокупность всех тех элементов  $x \in X$ , образом которых служит данный элемент  $y \in Y$ , называется *прообразом* элемента  $y$  и обозначается  $f^{-1}(y)$ .

Множество  $f(X) = \{f(x) | x \in X\} \subset Y$  называется *образом* множества  $X$  при отображении  $f: X \rightarrow Y$ , а множество  $f^{-1}(Y) = \{f^{-1}(y) | y \in Y\}$  — *прообразом* множества  $Y$ .

**Определение 1.7.** Отображение  $f$  называется отображением из  $X$  в (на)  $Y$ , если  $f(X) \subset Y$  и  $f(X) \neq Y (f(X) = Y)$ .

**Определение 1.8.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется гомеоморфизмом, если оно взаимнооднозначно и взаимнонепрерывно.

Пусть  $X_i$  — произвольные множества ( $i = \overline{1, n}$ ).

**Определение 1.9.** Множество  $X$ , состоящее из всевозможных элементов вида  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $x_i \in X_i$ , называется *декартовым произведением* множеств  $X_i$ .

Отметим, что в зависимости от природы множеств  $X$  и  $Y$  отображение  $f$  является функцией одной переменной, многих переменных, вектор-функцией, мерой, функционалом, оператором и т. д. В приложениях очень важно знать, будет ли отображение непрерывным и ограниченным. Эти свойства опираются лишь на понятия расстояния между элементами множеств, но отнюдь не зависят от природы элементов множеств.

## 2. Метрические и нормированные пространства

Изложенные в данном разделе сведения заимствованы из [3, 41, 44, 62].

**Определение 2.1.** Множество  $M$  называется *метрическим пространством* с метрикой  $\rho$ , если каждой паре  $x, y \in M$  соответствует одно и только одно вещественное число  $\rho(x, y) \in \mathbb{R}_1^+$  — расстояние между элементами  $x$  и  $y$ , удовлетворяющее трем условиям:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (*аксиома симметрии*),
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall z \in X$  (*аксиома треугольника*).

Множество  $S(r, x_0) = \{x | x \in M, \rho(x, x_0) < r\}$  называется открытым шаром в метрическом пространстве  $M$ . При этом  $x_0$  и  $r$  — центр и радиус шара  $S$  соответственно. Открытый шар  $S(\varepsilon, x_0)$  в пространстве  $M$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0$ .

Множество  $S[r, x_0] = \{x | x \in M, \rho(x, x_0) \leq r\}$  называется замкнутым шаром в пространстве  $M$ .

**Определение 2.2.** Множество  $X$  метрического пространства  $M$  называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором шаре.

**Определение 2.3.** Точка  $x \in X$  называется *точкой прикосновения* множества  $Y \subset X$ , если любая ее окрестность  $S(\varepsilon, x)$  содержит хотя бы одну точку из  $Y$ . Совокупность всех точек прикосновения множества  $Y$  называется его замыканием и обозначается  $\bar{Y}$ .

Точка  $x \in X$  называется *предельной точкой* множества  $Y \subset X$ , если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из  $Y$ .

Точка  $x$  называется *внутренней точкой* множества  $X \subset M$ , если хотя бы одна ее  $\varepsilon$ -окрестность  $S(\varepsilon, x)$  целиком содержится в  $X$ .

Точка  $x \in Y$  называется *изолированной точкой* множества  $Y$ , если в достаточно малой окрестности  $S(\varepsilon, x)$  нет точек из  $Y$ , отличных от  $x$ , т. е.  $\exists \varepsilon > 0 : S(\varepsilon, x) \cap A = x$ .

**Определение 2.4.** Множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым*.

Множество  $X$  называется *плотным* в множестве  $Y$ , если  $\bar{X} \supset Y$ .

**Определение 2.5.** Точка  $x$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$  точек метрического пространства  $M$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0$ .

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*.

Пусть  $X$  и  $Y$  — метрические пространства с метрикой  $\rho_X, \rho_Y$  и  $f: X \rightarrow Y$ .

Определение 2.6. Отображение  $f$  называется *непрерывным* в точке  $x_0 \in X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon, x_0)$ , что из условия  $\rho_X(x, x_0) < \delta$  вытекает неравенство  $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

Если отображение  $f$  непрерывно во всех точках пространства  $X$ , то говорят, что  $f$  непрерывно на  $X$ .

Определение 2.7. Непрерывное на  $X$  отображение  $f$  называется *равномерно непрерывным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что  $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$  как только  $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$ .

Теорема 2.1. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого замкнутого множества из  $Y$  замкнут в  $X$ .

Теорема 2.2. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$  — непрерывные отображения. Тогда композиция  $g[f(x)]$  определяет непрерывное отображение  $h: X \rightarrow Z$ .

Определение 2.8. Последовательность  $\{x_n\}$  точек метрического пространства  $X$  называется *фундаментальной*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n(\varepsilon)$ , что  $\rho(x_m, x_k) < \varepsilon$  для всех  $m > n, k > n$ .

Определение 2.9. Метрическое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*.

Определение 2.10. Множество  $X \subset M$  называется  $\varepsilon$ -сетью для множества  $Y \subset M$ , если для всех  $x \in X$  найдется хотя бы один элемент  $y \in Y$  такой, что  $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ .

Определение 2.11. Множество  $X \subset M$  называется *предкомпактным* в метрическом пространстве  $X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

Замкнутое и предкомпактное множество  $X \subset M$  называется *компактным* в  $M$ .

Теорема 2.3. Непрерывный образ компакта есть компакт.

Определение 2.12. Множество  $L$  называется *действительным линейным пространством*, если выполнены условия:

1. Для каждой пары элементов  $x, y \in L$  однозначно определен третий элемент  $z \in L$ , называемый суммой  $z = x + y$ .

2. Операция суммы обладает свойством коммутативности и ассоциативности.

3. В  $L$  существует единственный элемент  $\theta$  — нуль пространства, обладающий свойством  $x + \theta = x$  для всех  $x \in L$ .

4. Для каждого  $x \in L$  существует единственный противоположный элемент  $-x \in L$  такой, что  $x + (-x) = \theta$ .

5. Для любого  $\alpha \in R_1$  и любого элемента  $x \in L$  определен элемент  $\alpha x \in L$ , так что  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ,  $1 \cdot x = x$ ,  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ,  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , где  $\beta \in R_1, y \in L$ .

Определение 2.13. Отображение  $f: L \rightarrow R_1$  называется *функционалом*.

Функционал  $f$  называется *линейным*, если для всех  $x, y \in L$  и  $\alpha, \beta \in R_1$ :  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ .

Определение 2.14. Функционал  $f$  называется *нормой*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1)  $f(x) \geq 0 \forall x \in L$  и  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,

2)  $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \forall x, y \in L$ ,

3)  $f(\alpha x) = |\alpha| f(x) \forall \alpha \in R_1$  и  $\forall x \in L$ .

**Определение 2.15.** Линейное пространство, в котором задана некоторая норма, называется *нормированным пространством*.

Норма элемента  $x$  обозначается  $\|x\|_L$ .

Всякое нормированное пространство становится метрическим, если  $\rho(x, y) = \|x - y\|_L$ .

**Определение 2.16.** Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

**Определение 2.17.** Линейное пространство  $L$  называется *евклидовым*, если оно конечномерно и в нем определено скалярное произведение  $x \cdot y$ , удовлетворяющее условиям:

- 1)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,
- 2)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ,
- 3)  $\lambda x \cdot y = \lambda(x \cdot y)$ ,
- 4)  $x \cdot x \geq 0$  и  $x \cdot x = 0 \iff x = 0$ .

В  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R_n$  норма элемента  $x$  определяется формулой  $\|x\|_L = \sqrt{x \cdot x}$ .

**Определение 2.18.** Замкнутым  $n$ -мерным *кубом* в пространстве называется область, определяемая неравенствами

$$a_i \leq x \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $a_i, b_i \in R$ .

**Определение 2.19.** Мерой  $n$ -мерного куба называется число  $m(K)$ , равное произведению  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$ .

При этом выполнены следующие условия:

1) мера  $m(K)$  — действительное неотрицательное число;

2) мера  $m(K)$  аддитивна, т. е. если  $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$  и  $K_i \cap K_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , то

$$m(K) = \sum_{i=1}^n m(K_i).$$

**Определение 2.20.** Множество  $X \subset R_n$  называется *элементарным*, если его можно представить хотя бы одним способом в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся замкнутых  $n$ -мерных кубов.

**Определение 2.21.** Мерой  $m'$  элементарного множества  $X$  называется

сумма мер покрывающих его кубов  $m'(X) = \sum_{i=1}^k m(M_i)$ , где  $X = \bigcup_{i=1}^k M_i$

и  $M_i \cap M_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

**Определение 2.22.** Внешней мерой  $\mu^*$  множества  $X \subset R_n$  называется

число  $\mu^*(X) = \inf_{X \subset \bigcup_i M_i} \sum_i m'(M_i)$ , где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества  $X$  конечными или счетными системами кубов.

**Определение 2.23.** Множество  $X$  называется *измеримым по Лебегу*, если для любого  $\epsilon > 0$  найдется такое элементарное множество  $Y$ , что внешняя мера множества  $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$  удовлетворяет неравенству  $\mu^*(X \Delta Y) < \epsilon$ .

Функция  $\mu^*$ , рассматриваемая только на измеримых множествах, называется *лебеговой мерой* и обозначается  $\sigma$ .

**Определение 2.24.** Функция множества  $\sigma X$  называется *мерой*, если:

1) область определения  $D(\sigma)$  функции  $\sigma X$  есть  $\sigma$ -алгебра;

2) функция  $\sigma X \geq 0$ ;

3) для любого конечного разложения множества  $X \in D(\sigma)$  на непересе-

кающиеся множества  $X_k \in D(\sigma)$  выполнено равенство  $\sigma X = \sum_{k=1}^n \sigma X_k$ .

### 3. Почти периодические функции в смысле Бора

Некоторые факты из теории почти периодических функций заимствованы из книг [14, 21, 56, 57] и [1].

**Определение 3.1.** Непрерывная функция  $f(x)$  с областью определения  $R_1$  называется *почти периодической в смысле Бора*, если для любого  $\epsilon > 0$  существует положительное число  $l(\epsilon)$  такое, что любой отрезок  $[a, a+l] \subset R_1$  содержит по крайней мере одну точку  $y$ , для которой выполняется неравенство  $|f(x+y) - f(x)| < \epsilon$  для всех  $x \in R_1$ .

Из указанного определения вытекают следующие свойства почти периодических функций:

1. Если  $f(x)$  — почти периодическая функция, то  $\alpha f(x) + b$  и  $f(ax+b)$  при произвольных действительных  $\alpha, \beta, a$  и  $b$  также почти периодические функции.

2. Если  $f(x)$  — почти периодическая функция, то  $|f(x)|$  — также почти периодическая функция.

**Теорема 3.1.** Если  $Y$  — множество значений почти периодической функции  $f(x)$ , а функция  $F(y)$  определена и равномерно непрерывна на  $Y$ , то композиция  $F[f(x)]$  определяет почти периодическую функцию.

**Теорема 3.2.** Почти периодическая функция равномерно непрерывна и ограничена на действительной оси  $R_1$ .

**Теорема 3.3.** Линейная комбинация  $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$  почти периодических функций  $f_i(x)$  с произвольными постоянными коэффициентами  $c_i \in R_1$  есть почти периодическая функция.

**Теорема 3.4.** Произведение любого конечного числа (следовательно, произвольная целая положительная степень) почти периодических функций есть почти периодическая функция.

**Теорема 3.5.** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — почти периодические функции и  $\inf_{x \in R_1} |g(x)| > 0$ , то  $f(x)/g(x)$ ,  $1/g(x)$  есть почти периодические функции.

**Теорема 3.6.** Если последовательность почти периодических функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  равномерно сходится к  $f(x)$  в  $R_1$ , то  $f(x)$  — почти периодическая функция.

**Теорема 3.7.** Сумма равномерно сходящегося на  $R_1$  ряда почти периодических функций является почти периодической функцией.

**Теорема 3.8.** Если почти периодическая функция  $f(x)$  имеет равномерно непрерывную на  $R_1$  производную  $f'(x)$ , то эта производная также почти периодическая функция.

**Теорема 3.9.** (Теорема Боля — Бора.) Неопределенный интеграл от почти периодической функции  $f(x)$  является почти периодической функцией тогда и только тогда, когда он ограничен.

**Теорема 3.10.** (Теорема о среднем значении.) Каждая почти периодическая функция  $f(x)$  имеет конечное среднее значение  $\mathcal{L}\{f\}$ .

**Теорема 3.11.** Если  $f(x)$  — почти периодическая функция, то равенство  $\mathcal{L}\{f(x+a)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$  справедливо при всех  $a \in R_1$ .

Среднее значение почти периодической функции обладает следующими свойствами:

$$1) \forall a \in R_1, \mathcal{L}\{af(x)\} = a\mathcal{L}\{f(x)\}.$$

2) Среднее значение суммы почти периодических функций  $f(x)$  и  $g(x)$  равно сумме их средних значений:  $\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{g(x)\}$ .

3) Если последовательность  $\{f_n(x)\}$  почти периодических функций сходится равномерно в  $R_1$  к функции  $f(x)$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f_n(x)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}.$$

**Теорема 3.12.** Если  $f(x)$  — не равная тождественно нулю и не отрицательная почти периодическая функция, то  $\mathcal{L}\{f(x)\} > 0$ .

Если  $f(x)$  — почти периодическая функция и  $\lambda \in R_1$  — произвольное число, то по теореме 3.4  $f(x)\exp(-i\lambda x)$  — почти периодическая функция. Функция  $a(\lambda) = \mathcal{L}\{f(x)\exp(-i\lambda x)\}$  называется *спектральной функцией* почти периодической функции  $f(x)$ .

**Теорема 3.13.** Спектральная функция  $a(\lambda) \in C(R_1)$  и отлична от нуля в не более чем счетном числе значений  $\lambda$ .

**Определение 3.2.** Те значения  $\lambda$ , для которых спектральная функция  $a(\lambda)$  принимает ненулевое значение, называются *показателями Фурье* почти периодической функции  $f(x)$ , а числа  $A_n = a(\lambda_n) = \mathcal{L}\{f(x)\exp(-i\lambda_n x)\}$  — ее *коэффициентами Фурье*. Совокупность всех показателей Фурье почти периодической функции  $f(x)$  называется ее *спектром*.

**Теорема 3.14.** (Теорема Бора.) Пусть  $f(x)$  — почти периодическая функция и  $\inf_{x \in R_1} |f(x)| > 0$ . Тогда интеграл функции  $f(x)$  представим в виде

$$\int_0^x f(t) dt = cx + g(x), \text{ где } g(x) \text{ — почти периодическая функция и } c = \mathcal{L}\{f(x)\}.$$

**Определение 3.3.** Совокупность всех почти периодических функций образует линейное пространство  $\Pi$  — *пространство почти периодических функций*.

Скалярное произведение в пространстве  $\Pi$  можно задать посредством равенства  $(f, g) = \mathcal{L}\{f(x)g(x)\}$ , где  $f, g \in \Pi$ .

**Определение 3.4.** *Нормой функции*  $f(x) \in \Pi$  называется неотрицательное число  $\|f\|_{\Pi} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\mathcal{L}\{f^2(x)\}}$ .

#### 4. Гамильтоновы системы и теория возмущений

В настоящем разделе излагаются сведения об условно-периодическом движении, описываемом гамильтоновой системой дифференциальных уравнений. Здесь же формулируется теорема Арнольда о существовании условно-периодических решений гамильтоновых систем и об устойчивости этих решений в общем эллиптическом случае. Материал раздела подробно изложен в работах [15, 19, 25, 108, 117].

Рассмотрим движение, описываемое гамильтоновой системой порядка  $2n$ :

$$dp/dt = -\partial H/\partial q, \quad dq/dt = \partial H/\partial p, \quad (\text{П.4.1})$$

где гамильтониан  $H(p, q, \mu)$  аналитичен по  $n$ -мерным векторам  $p, q$  и  $2\pi$ -периодичен по  $q$ ;  $\mu$  — некоторый малый параметр. Фазовое пространство системы (П.4.1) представляет собой декартово произведение  $n$ -мерного тора на область  $n$ -мерного евклидова пространства.

Пусть гамильтониан  $H$  зависит только от переменных  $p$  и  $H=H(p)$ . Тогда система (П.4.1) принимает вид

$$dp/dt = 0, \quad dq/dt = \partial H/\partial p = \omega(p, \mu). \quad (\text{П.4.2})$$

Система (П.4.2) имеет решение

$$p = p_0 = \text{const}, \quad q = \omega t + q_0, \quad (\text{П.4.3})$$

где  $\omega(p, \mu) = \omega(p_0, \mu) = \text{const}$  и  $q_0 = \text{const}$ .

В этом случае каждый тор  $p = p_0$  инвариантен.

Кроме того, если компоненты  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  вектора  $\omega$  несонизмеримы, то движение на торе  $p = p_0$  с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  условно-периодично.

В теории возмущений ставится следующая основная задача. Имеет ли система (П.4.1) инвариантные торы, близкие к тору  $p = p_0$  системы (П.4.2), и будет ли движение на этих торах условно-периодическим?

Решение этой задачи получено в виде следующей теоремы [8].

**Теорема 4.1.** (Теорема Арнольда.) Пусть гамильтониан  $H(p, q) = H(p_0, p_1, q_0, q_1, \mu)$ , где  $p_0$  и  $q_0$  —  $m$ -мерные векторы,  $p_1$  и  $q_1$  —  $(n-m)$ -мерные векторы и  $\mu$  ( $0 < \mu < \mu_0$ ) — некоторый малый параметр,  $2\pi$ -периодичен по переменным  $q_0$ :

$$H(p_0, p_1, q_0 + 2\pi, q_1, \mu) = H(p_0, p_1, q_0, q_1, \mu)$$

и является аналитическим в  $2n$ -мерной области:

$$p_0 \in P_0, \quad |\text{Im} q_0| < \beta, \quad \|x_1\| \leq R, \quad x_1 = (p_1, q_1). \quad (\text{П.4.4})$$

Пусть гамильтониан  $H$  представим в виде

$$H(p, q) = \bar{H}_1(p_0, p_1, q_1), \quad (\text{П.4.5})$$

где  $H_2$  порядка  $\mu^2$  и имеют место равенства

$$H_1(p, q) = \bar{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \tilde{H}_1(p_0, p_1, q_0, q_1),$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \tilde{H}_1 dq_0 = 0,$$

$$\bar{H}_1(p_0, p_1, q_1) = \bar{H}(p_0, \tau) + \tilde{\tilde{H}}(p_0, p_1, q_1),$$

$$\bar{H}_1(p_0, \tau) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^{k_1} \alpha_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j=k}^{k_1} \alpha_{ijs} \tau_i \tau_j \tau_k.$$

Здесь величины  $\alpha_0, \alpha_i, \alpha_{ij} = \alpha_{ij}$  и  $\alpha_{ijs}$  зависят только от переменных  $p_0$  и  $2\tau_i = p^2_{m+i} + q^2_{m+i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k_1$ ).

Пусть в области (П.4.4) выполнены условия

$$|\tilde{H}_1| \leq a, \quad |H_1| \leq a, \quad |\tilde{\tilde{H}}_1| \leq a, \\ |\tilde{\tilde{H}}| \leq a \|x_1\|^2, \quad |H_2| < \mu^2 a,$$

а в области  $p_0$  —

$$\det |\partial^2 H_0 / \partial P_0^2| \neq 0, \quad \det |\lambda_{ij}(P_0)| \neq 0.$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta(\varepsilon, H_0, H_1, p_0, \rho, R, a, \mu_0) > 0$ , что если  $0 < \delta < \delta_0$  и  $0 < \mu < \delta^4$ , то справедливы утверждения:

1. Область

$$\text{Re } F_\delta = \begin{cases} p_0 \in \text{Re } P_0, \\ |\text{Im } q_0| = 0, \\ 0 < \tau_i < \delta \end{cases}$$

состоит из двух множеств  $F_\delta$  и  $f_\delta$ , из которых множество  $F_\delta$  инвариантно относительно канонических уравнений с гамильтонианом (П.4.5), а множество  $f_\delta$  мало в смысле меры

$$\sigma f_\delta < \varepsilon.$$

2. Множество  $F_\delta$  состоит из инвариантных  $n$ -мерных аналитических торов  $T_\omega$ , задаваемых параметрическими уравнениями:

$$p_0 = p_0 \omega + f_{0\omega}(Q), \quad q_0 = Q_0 + g_{0\omega}(Q), \\ p_1 = \sqrt{2 [\tau_\omega + f_{1\omega}(Q)]} \cos [Q_1 + g_{1\omega}(Q)], \\ q_1 = \sqrt{2 [\tau_\omega + f_{1\omega}(Q)]} \sin [Q_1 + g_{1\omega}(Q)],$$

где  $Q = (Q_0, Q_1)$  — угловые переменные,  $p_{0\omega}$  и  $\tau_\omega$  — постоянные, зависящие от номера тора  $\omega$ .

3. Инвариантные торы  $T_\omega$  мало отличаются от торов

$$p_0 = p_{0\omega} = \text{const}, \quad \tau = \tau_\omega = \text{const}.$$

Это отличие дается оценками

$$|f_{0\omega}(Q)| < \varepsilon \delta, \quad |f_{1\omega}(Q)| < \varepsilon \delta, \quad |g_{0\omega}(Q)| < \varepsilon \delta, \quad |g_{1\omega}(Q)| < \varepsilon \delta.$$

4. Движение на торе  $T_\omega$  условно-периодично с  $n$  частотами:

$$dQ_0/dt = \omega_0, \quad dQ_1/dt = \omega_1, \\ \omega_0 = \partial H_0 / \partial p_{0\omega}, \quad \omega_1 = \mu \partial H / \partial \tau_\omega.$$

Теорема Арнольда и ее доказательство дают условия существования и метод построения условно-периодических решений планетного варианта задачи многих тел.

Дифференциальные уравнения движения тел планетной системы могут быть записаны в различных канонических элементах. Однако гамильтониан от таких канонических переменных не всегда представим в виде (П.4.5), в котором он удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Следовательно, необходимо выбрать специальные канонические переменные, в которых гамильтониан представим в виде (П.4.5) и удовлетворяет условиям теоремы 4.1 после ряда пред-

варительных преобразований. В небесной механике разработана целая система подобных канонических переменных. Среди них для теории возмущений условно-периодического движения удобны канонические элементы Делоне. Введем эти переменные.

**Определение 4.1.** Элементами орбиты называются величины, однозначно определяющие положение орбиты в пространстве, ее размеры и форму, а также положение тела на самой орбите.

Эллиптическая орбита характеризуется шестью кеплеровскими элементами (3.2.24). Эти величины с каноническими элементами Делоне связаны формулами

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\tilde{\mu}a}, & G &= \sqrt{\tilde{\mu}a(1-e^2)}, & H &= \sqrt{\tilde{\mu}a(1-e^2)} \cos i, \\ l &= \tilde{n}(t-\tau), & g &= \pi - \Omega, & R &= \Omega. \end{aligned} \quad (\text{П.4.6})$$

Рассмотрим схему применения теоремы Арнольда для построения условно-периодического решения задачи о возмущенном движении планет, рассматриваемых как материальные точки.

Пусть дана каноническая система дифференциальных уравнений в переменных Делоне:

$$x = \partial H / \partial y, \quad y = -\partial H / \partial x \quad (\text{П.4.7})$$

с гамильтонианом

$$H(x, y) = H_{00}(x_0) + \nu H_1(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y}_0, \bar{y}_1), \quad (\text{П.4.8})$$

где  $\nu$  — малый параметр,  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y}_0, \bar{y}_1$  — векторы

$$\bar{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \bar{y}_0 = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (\text{П.4.9})$$

$$\bar{x}_1 = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \quad \bar{y}_1 = (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n),$$

причем  $\bar{y}_0$  — угловая переменная (с периодом  $2\pi$  по всем ее компонентам),  $\bar{x}_0, \bar{y}_1$  — позиционные переменные.

Функции  $H_{00}$  и  $\nu H_1$  представляют невозмущенную и возмущающую части гамильтониана  $H$  соответственно.

Предположим, что функция  $H(x, y)$  по обоим переменным  $x$  и  $y$  аналитична в некоторой области

$$\bar{x}_0 \in P^0, \quad |\bar{x}_1| \leq R, \quad |\bar{y}_1| \leq R, \quad |\text{Im} \bar{y}_0| \leq \rho \quad (\text{П.4.10})$$

и представима сходящимся степенным рядом относительно переменных  $\bar{x}_1$  и  $\bar{y}_1$ .

Согласно структуре (П.4.8) функция  $H_0$  зависит лишь от переменной  $\bar{x}_0$ , и поэтому гессиан

$$\det (\partial^2 H_0 / \partial \bar{x}_0^2) \equiv 0,$$

т. е. имеет место случай собственного вырождения. Однако

$$\det (\partial^2 H_0 / \partial \bar{x}_0^2) \neq 0. \quad (\text{П.4.11})$$

В функции  $H_1$  (П.4.8) выделим вековую часть относительно переменных  $y_0$  и представим гамильтониан  $H$  в виде

$$H(x, y) = H_0(x_0) + \sqrt{\hbar} \bar{H}_1(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y}_1) + \sqrt{\hbar} \tilde{H}_1(x, y), \quad (\text{П.4.12})$$

где  $\bar{H}_1$  —  $2\pi$ -периодическая по каждой из компонент вектора  $\bar{y}_0$  часть функции  $H$ .

Известно, что в задаче многих тел функция  $H_1$  может быть записана в виде

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_{10} + \bar{H}_{12} + \bar{H}_{14} + \bar{H}_{16} + \dots, \quad (\text{П.4.13})$$

где  $\bar{H}_{1j}$  — однородная форма  $j$ -й степени относительно  $\bar{x}_1$  и  $\bar{y}_1$  с коэффициентами, зависящими от  $\bar{x}_0$ ,  $j$  — четное число, т. е.  $\bar{H}_1$  — степенной ряд, содержащий лишь четные степени переменных  $\bar{x}_1$  и  $\bar{y}_1$ .

Гамильтониан (П.4.12) не удовлетворяет условиям теоремы Арнольда. Поэтому прежде необходимо выполнить ряд преобразований над гамильтонианом  $H$ . Укажем эти предварительные преобразования.

Ограничим гамильтониан (П.4.12) функцией  $\bar{H}_1$ , содержащей лишь первые два члена ряда (П.4.13), и рассмотрим уравнения относительно

$$\bar{x}_1 = -\partial \bar{H}_{12} / \partial \bar{y}_1, \quad \bar{y}_1 = \partial \bar{H}_{12} / \partial \bar{x}_1. \quad (\text{П.4.14})$$

Первое предварительное преобразование гамильтониана представляет собой линейное каноническое преобразование. Относительно переменных  $x_1$  и  $y_1$  оно имеет вид

$$\bar{x}_1 = A\bar{x}'_1 + B\bar{y}'_1, \quad \bar{y}_1 = C\bar{x}'_1 + D\bar{y}'_1, \quad (\text{П.4.15})$$

где  $A, B, C$  и  $D$  — матрицы с элементами, являющимися аналитическими функциями переменных  $\bar{x}_0$  в области  $P^0$ . Это же преобразование по отношению к переменным  $\bar{x}$  и  $y$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x}'_0 &= \bar{x}_0, & \bar{y}'_0 &= y_0 + \partial s / \partial \bar{x}_0, \\ \bar{x}'_1 &= \partial s / \partial y_1, & \bar{y}'_1 &= \partial s / \partial x'_1, \end{aligned} \quad (\text{П.4.16})$$

где  $s = s(\bar{x}_0, \bar{x}'_1, \bar{y}_1)$  — производящая функция канонического преобразования П.4.15.

Преобразование П.4.16 выполнено для подбора таких переменных  $\bar{x}'_1$  и  $\bar{y}'_1$ , чтобы линейная часть (П.4.14) уравнений (П.4.7) с гамильтонианом (П.4.12), (П.4.16) имела нормальную форму:

$$\bar{H}_{12}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, y_1) = \bar{H}'_{12}(\bar{x}'_0, \bar{x}'_1, \bar{y}'_1) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \lambda_s [(x'_{1s})^2 + (y'_{1s})^2]. \quad (\text{П.4.17})$$

Здесь  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  и является корнем характеристического уравнения линейной системы (П.4.14) при произвольном фиксированном значении  $\bar{x}_0 \in P^0$ .

Преобразования (П.4.16) при переходе к новым переменным сохраняют вид функций  $H_{00}(\bar{x}_0)$  и  $\bar{H}_{10}(\bar{x}_0)$ . Поэтому гамильтониан  $H$  в новых переменных

имеет вид

$$H'(\bar{x}', \bar{y}') = H'_{00}(\bar{x}'_0) + \nu H'_1(\bar{x}'_0, \bar{x}'_1, \bar{y}'_1) + \nu \tilde{H}'_1(\bar{x}', \bar{y}'), \quad (\text{П.4.18})$$

где  $\tilde{H}'_1$  — его периодическая часть по  $\bar{y}'_0$ , а  $\bar{H}'_1$  — сумма однородных форм степени  $m$  ( $m$  — четное число) переменных  $\bar{x}'_1$  и  $\bar{y}'_1$  с коэффициентами, зависящими от  $\bar{x}'_0$ :

$$\bar{H}'_1 = \bar{H}'_{10} + \bar{H}'_{12} + \bar{H}'_{14} + \bar{H}'_{16} + \dots, \quad (\text{П.4.19})$$

причем  $\bar{H}'_{12}$  — линейная форма вида (П.4.17).

Запишем каноническую систему уравнений в новых переменных  $\bar{x}'$  и  $\bar{y}'$  с гамильтонианом (П.4.18)

$$d\bar{x}'/dt = -\partial H'/\partial \bar{y}', \quad \partial \bar{y}'/dt = \partial H'/\partial \bar{x}'. \quad (\text{П.4.20})$$

Рассмотрим уравнения (П.4.20) относительно переменных  $\bar{x}'_1$  и  $\bar{y}'_1$  при условии, что гамильтониан содержит функцию (П.4.19) с тремя ее первыми членами:

$$d\bar{x}'_1/dt = -\lambda \bar{y}'_1 - \partial \bar{H}'_{14}/\partial \bar{y}'_1, \quad \partial \bar{y}'_1/dt = \lambda \bar{x}'_1 + \partial \bar{H}'_{14}/\partial \bar{x}'_1. \quad (\text{П.4.21})$$

Второе из предварительных преобразований называется *преобразованием Биркгофа* и представляет собой каноническое преобразование вида

$$\bar{x}''_0 = \bar{x}'_0, \quad \bar{y}''_0 = \bar{y}'_0 + \partial S_1/\partial \bar{x}'_0, \quad (\text{П.4.22})$$

$$\bar{x}''_1 = \bar{x}'_1 + \partial S_1/\partial \bar{y}'_1, \quad \bar{y}''_1 = \bar{y}'_1 + \partial S_1/\partial \bar{x}'_1.$$

Здесь  $S_1 = S_1(\bar{x}'_1, \bar{x}''_1, \bar{y}''_1)$  — производящая функция преобразования (П.4.21), которая строится по коэффициентам формы  $\bar{H}'_{14}$ . Форма  $\bar{H}'_{14}$  в новых переменных  $\bar{x}''$  и  $\bar{y}''$  записывается следующим образом:

$$\bar{H}''_{14} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\bar{x}''_0) [(\bar{x}''_{ij})^2 + (\bar{y}''_{ij})^2] [(\bar{x}''_{1i})^2 + (\bar{y}''_{1i})^2],$$

где  $a_{ij}(\bar{x}''_0)$  — коэффициенты, аналитические по переменным  $\bar{x}''_0$ . Гамильтониан  $H$  после двух предварительных преобразований (П.4.16) и (П.4.22) принимает общий вид

$$H''(x'', y'') = H_{00}(\bar{x}''_0) + \mu \bar{H}''_1(\bar{x}''_0, \bar{x}''_1, \bar{y}''_1) + \mu \tilde{H}''_1(\bar{x}'', \bar{y}''). \quad (\text{П.4.23})$$

Здесь функция  $\tilde{H}''_1$  представляет собой чисто периодическую часть по переменным  $\bar{y}''_0$  гамильтониана  $H''$ , а функция  $\bar{H}''_1$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \bar{H}''_1 = & \bar{H}''_{10} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \alpha_s [(\bar{x}''_{1s})^2 + (\bar{y}''_{1s})^2] + \\ & + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\bar{x}''_0) [(\bar{x}''_{ij})^2 + (\bar{y}''_{ij})^2] [(\bar{x}''_{1i})^2 + (\bar{y}''_{1i})^2 + \bar{H}''_{16} \dots]. \end{aligned} \quad (\text{П.4.24})$$

В этой сумме последующие формы  $\bar{H}_{1m}$  ( $m=6, 8, \dots$ ) имеют четные степени переменных  $\bar{x}_1''$  и  $\bar{y}_1''$  не ниже шестой и их коэффициенты зависят от  $\bar{x}_0''$ .

Применим к системе уравнений с гамильтонианом (П.4.23) операцию усреднения по быстрой переменной  $\bar{y}''$ . Она представляет третье предварительное каноническое преобразование

$$\bar{x}'' = \bar{X} + \partial s / \partial \bar{y}'', \quad \bar{Y} = \bar{y}'' + \partial s / \partial \bar{X}, \quad (\text{П.4.25})$$

где  $\bar{X} = (\bar{X}_0, \bar{X}_1)$ ,  $\bar{Y} = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_1)$ , причем  $\bar{X}_0$  и  $\bar{Y}_0$  —  $k$ -мерные,

$\bar{X}_1$  и  $\bar{Y}_1$  —  $(n - k)$ -мерные векторы.

Если разложение в ряд Фурье функции  $\bar{H}_1''(\bar{x}'', \bar{y}'')$  имеет вид

$$\bar{H}_1''(\bar{x}'', \bar{y}'') = \sum_{\|s_0\| > 0} h_{s_0}(\bar{x}'', \bar{y}_1'') \exp [i(s_0, \bar{y}_0'')],$$

то производящая функция  $s$  преобразования (П.4.25) запишется следующим образом:

$$S(\bar{X}, \bar{y}'') = \mu \sum_{1 \leq \|s_0\| \leq N} S(s_0, \bar{y}_0'') \exp [i(s_0, \bar{y}_0'')],$$

$$S_{s_0}(\bar{x}, \bar{y}_1'') = i h_{s_0}(\bar{X}, \bar{y}_1'') \left( S_0, \frac{\partial H_{00}(x_0)}{\partial x_0} \right)^{-1}.$$

Здесь  $N$  — число, определяемое формулой

$$N = (1/\nu)(h/\mu),$$

и  $3\delta < \nu \leq 1$ ,  $\delta = \mu^{T-1}$ ,  $T \geq 2n + 10$ .

Движения в новых канонических переменных  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  описываются уравнениями

$$d\bar{X}/dt = -\partial H^*/\partial \bar{Y}, \quad d\bar{Y}/dt = \partial H^*/\partial \bar{X},$$

где

$$H^*(\bar{X}, \bar{Y}) = H_{00}(\bar{X}_0) + \mu \bar{H}_1''(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{Y}_1) + \mu \tilde{H}_1(\bar{X}, \bar{Y}). \quad (\text{П.4.26})$$

Функции  $H_{00}$ ,  $\bar{H}_1''$  — те же, что и в гамильтониане  $H''$ . Четвертое предварительное преобразование состоит в переходе от переменных  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  к полярным координатам  $\bar{p} = (\bar{p}_0, \bar{p}_1)$  и  $\bar{q} = (\bar{q}_0, \bar{q}_1)$  по формулам

$$\bar{X}_0 = \bar{p}_0, \quad \bar{Y} = \bar{q}_0, \quad (\text{П.4.27})$$

$$\bar{X}_1 = \sqrt{2\bar{p}_1} \cos \bar{q}_1, \quad \bar{Y}_1 = \sqrt{2\bar{p}_1} \sin \bar{q}_1.$$

Обозначив через  $H^{**}$  гамильтониан  $H^*$  в новых канонических переменных (П.4.27), получим следующие дифференциальные уравнения относительно переменных  $\bar{p}$  и  $\bar{q}$ :

$$d\bar{p}/dt = -\partial H^{**}/\partial \bar{q}, \quad d\bar{q}/dt = \partial H^{**}/\partial \bar{p},$$

где

$$H^{**}(\bar{p}, \bar{q}) = H_{00}(\bar{p}_0) + \mu H_1^{**}(\bar{p}, \bar{q}_1) + \mu \tilde{H}_1^{**}(\bar{p}, \bar{q}). \quad (\text{П.4.28})$$

Здесь  $\tilde{H}_1^{**}$  и  $\tilde{H}_1^*$  получаются соответственно из функций  $\tilde{H}_1''$  и  $\tilde{H}_1'$  с учетом замен (П.4.27)

Из выражения (П.4.24) функции  $\tilde{H}_1''$  представим соответствующую ей функцию  $H_1^{**}$  в виде

$$H_1^{**}(\bar{p}, \bar{q}) = H_{01}^{**}(\bar{p}) + H_1^{**}(\bar{p}, \bar{q}_1).$$

Здесь

$$H_{01}^{**}(\bar{p}) = \bar{H}_{10}(\bar{p}_0) + (\alpha, \bar{p}_1) + \sum_{i,j=1}^n 4a_{ij}(\bar{p}_0) p_{1i} p_{1j},$$

$$H_1^*(\bar{p}, \bar{q}_1) = \bar{H}_{16}''[\bar{X}(\bar{p}, \bar{q}_1) - \bar{Y}(\bar{p}, \bar{q}_1)] + \dots,$$

где  $p_{1i}$  и  $p_{1j}$  — компоненты вектора  $p_1$ .

Наконец, сделаем одну замену переменных:

$$p_0 = \varepsilon \bar{p}_0, \quad \varepsilon p_1 = \bar{p}_1 - \varepsilon, \quad q_0 \equiv \bar{q}_0, \quad q \equiv \bar{q}_1. \quad (\text{П.4.29})$$

Преобразование (П.4.29) является каноническим. Относительно переменных  $p$  и  $q$  получаем систему уравнений

$$dp/dt = -\partial H^0/\partial q, \quad dq/dt = \partial H^0/\partial p \quad (\text{П.4.30})$$

с гамильтонианом

$$H^0(p, q) = \frac{1}{\varepsilon} H^{**}[\bar{p}(p), q],$$

где

$$H^0(p, q) = H_0^0(p_0) + \mu H_{01}^0(p) + \mu \varepsilon H_2^0(p, q), \quad (\text{П.4.31})$$

$$H_2^0(p, q) = \sum_{\|k\|>1} h_k(p) \cos(kq), \quad (\text{П.4.32})$$

т. е.  $H_2^0$  — чисто периодическая часть по переменным  $q$  функции  $H^0$ .

В преобразовании (П.4.29) величина  $\varepsilon$  — положительное малое число, позволяющее изменить масштаб.

Укажем условия, накладываемые приведенной схемой на гамильтониан (П.4.31) системы (П.4.30).

1. Гамильтониан  $H^0(p, q)$  имеет вид (П.4.31) и рассматривается в области  $F^0$ :

$$F^0 = \{p \in G^0, \quad \|\text{Im} q\| < \delta \leq 1\},$$

где через  $G^0$  представлено произведение областей  $\|p_1\| < 1$ ,  $p_0 \in (1/\varepsilon)(G_{kN}^{00} - 2\beta)$  и  $\delta_0 = \min(1, \delta_1 - 2\gamma)$ .

2. Гамильтониан  $H^0(p, q)$  является аналитической функцией своих переменных  $p$  и  $q$ , где  $q$  — угловая переменная.

3. Справедлива оценка

$$|H_2^0(p, q)| < \sqrt{\varepsilon}$$

для всех переменных  $p \in F^0$  и  $q \in F^0$ .

4. В области  $F^0$  справедливы соотношения

$$\det (\partial^2 H_0^0 / \partial p_0^2) \neq 0, \quad \|\partial^2 H_0^0 / \partial p_0^2\| < \varepsilon \theta_{00}, \quad \|\partial^2 H_{01}^0 / \partial p_1^2\| \leq \varepsilon \theta_{01}.$$

Константы  $\delta_0, \delta_1, \gamma, \beta, \theta_{00}, \theta_{01}$  и области  $G_0, G_{kN}^{00}$  возникают в результате упомянутых выше преобразований, причем  $\theta_{00} > 0, \theta_{01} > 0$ .

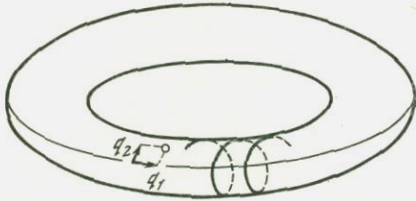
Предположим, что в области  $F^0$  выполнено условие

$$\det (\partial^2 H_{01}^0 / \partial p_1^2) = \\ = 4 \det (a_{ij}(\varepsilon p_0)) \neq 0. \quad (\text{П.4.33})$$

Тогда условия теоремы Арнольда для системы уравнений (П.4.30) проверяются непосредственно и можно убедиться в их справедливости.

Теорема Арнольда утверждает, что если начальные значения  $p_0$  и  $q_0$  задачи (П.4.30) выбраны благоприятным образом, то предельные выражения приводят к точному решению.

**Рис. П.1.** Схема условно-периодического движения по двумерному тору  $q_1, q_2$  — переменные



Обозначим через  $T_0$  невозмущенный тор, соответствующий гамильтониану  $H_0^0$ . Параметры  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$  тора  $T^0$  вдоль его поверхности являются функциями угловых координат  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$  и изменяются «мало». В то же время угловые координаты  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$  претерпевают вековые изменения с несоизмеримыми частотами  $\omega_1^\infty, \omega_2^\infty, \dots, \omega_n^\infty$ . Поэтому траектория движения (П.4.45) является условно-периодической с фиксированным для тора частотным базисом  $\omega_1^\infty, \omega_2^\infty, \dots, \omega_n^\infty$ , определяемым начальными условиями  $p_0$  и  $q_0$  задачи (П.4.30).

Картина движения наглядно представляется в случае двух степеней свободы ( $n=2$ ), когда фазовое пространство четырехмерно. Тор имеет вид, изображенный на рис. П.1. Условно-периодические траектории являются всюду плотными обмотками нерезонансного тора.

Инвариантные торы, образующие всюду плотное множество в фазовом пространстве, называются *нерезонансными торами*, если на этих торах число частот максимально возможное, т. е. равно  $n$ .

В работах Арнольда [7, 8], Мозера [57, 58] и других исследованиях торы невозмущенной системы в фазовом пространстве образуют множество полной меры, иначе говоря, мера Лебега объединения всех резонансных торов невозмущенной невырожденной системы равна нулю. Однако резонансные инвариантные торы порождаются начальными данными, выражаемыми рациональными числами. Как известно, рациональные числа на числовой прямой  $R_1$  образуют всюду плотное множество. Это обстоятельство затрудняет применение теоремы в конкретных задачах, так как в них начальные условия фиксируются из наблюдений и измерений. Тем не менее малость меры неблагоприятных начальных условий приводит к тому, что вероятность попадания на резонансный тор при случайном выборе начальной точки в фазовом пространстве невозмущенной системы очень мала. Поэтому, пренебрегая множествами ма-

лой меры, говорят, что почти все инвариантные торы в невырожденной невозмущенной системе являются нерезонансными и имеют полный набор рационально зависимых частот. Теорема Арнольда отвечает на вопрос об эволюции упомянутых инвариантных гамильтоновых возмущений. Оказывается, что указанные инвариантные торы при наличии малых гамильтоновых возмущений не исчезают, а эволюционируют, испытывая малую деформацию вместе с фазовыми кривыми, заполняющими их всюду плотно и обматывающими этот тор условно-периодически. Указанные деформированные инвариантные торы сохраняют число частот начальной невозмущенной системы и образуют большинство в том смысле, что мера дополнений к их объединению мала вместе с действующим возмущением.

## 5. НЬЮТОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Этот раздел написан по материалам работ [2, 73, 76, 126].

Рассмотрим абсолютно твердое тело  $M$  с интегрируемой плотностью  $\rho$  по его объему  $V$ . Силовая функция  $U$  тела выражается решением задачи Дирихле.

Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в области  $V_1 = R^3 \setminus \bar{V}$  непрерывную функцию  $U \in C(\bar{V}_1)$ , принимающую на поверхности  $S = \bar{V} \setminus V$  тела  $M$  заданные значения  $U_S^+$  и обращающуюся в нуль на бесконечности.

Решение задачи представимо в виде

$$U(r, \varphi, \theta) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta), \quad (\text{П.5.1})$$

где функции  $R$ ,  $\Phi$  и  $\Theta$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0, \quad (\text{П.5.2})$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + i\Phi = 0, \quad (\text{П.5.3})$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \cos\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [n(n+1) + m^2/\cos^2\theta] \Theta = 0. \quad (\text{П.5.4})$$

Из (П.5.4) подстановкой  $v = \cos\theta$  получим уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dv} \left[ (1-v^2) \frac{dP}{dv} \right] + [n(n+1) - m^2/(1-v^2)] P = 0,$$

которое при  $m=0$  имеет частное решение, определяемое формулой Родрига

$$P_n(v) = (1/2^n n!) (d^n (v^2 - 1)^n / dv^n). \quad (\text{П.5.5})$$

Формула (П.5.5) определяет многочлен  $n$ -й степени, содержащий только четные степени переменной  $v$ , если  $n$  — четное число, и только нечетные степени переменной  $v$ , если  $n$  — нечетное. Эти полиномы называют *полиномами Лежандра*.

Отметим свойства полиномов Лежандра.

Свойство 1. Полином Лежандра  $P_n(v)$  является единственным независимым решением уравнения (П.5.15) при  $m=0$  в пространстве  $L_2(-1,1)$

суммируемых с квадратом непрерывных и дважды дифференцируемых функций на отрезке  $[-1, 1]$ .

Свойство 2. Полиномы Лежандра  $P_n(v)$  образуют ортогональную систему в классе  $L_2[-1, 1]$  функций с интегрируемым квадратом на отрезке  $[-1, 1]$ .

Свойство 3. Система полиномов Лежандра  $P_n(v)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) полна в классе  $L_2(-1, 1)$ .

Свойство 4. Абсолютное значение полинома Лежандра  $P_n(v)$  для любой точки отрезка  $[-1, 1]$  не превосходит единицы по совокупности  $n$ .

Свойство 5. При любом значении  $v$ , принадлежащем интервалу  $(-1, 1)$ , полином Лежандра  $P_n(v)$  равномерно стремится к нулю как  $1/\sqrt{n}$ .

Свойство 6. Полиномы Лежандра являются коэффициентами разложения производящей функции  $N(\alpha, v)$  по полиномам Лежандра:

$$N(\alpha, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(v). \quad (\text{П.5.6})$$

Уравнение (П.5.6) при  $\alpha \neq 0$  имеет частное решение вида

$$P_{nm}(v) = (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} d^m P_n(v) / dv^m, \quad (\text{П.5.7})$$

где функция  $P_{nm}(v)$  — полином степени  $n$ , если  $m$  — четное число, или полином степени  $(n-1)$ , помноженный на  $\sqrt{1-v^2}$ , если  $m$  — нечетное. Функция  $P_{nm}(v)$ , определяемая выражением (П.5.7), называется *присоединенным полиномом Лежандра*. Выделим свойства присоединенных полиномов Лежандра.

Свойство 7. При каждом  $m \geq 0$  совокупность присоединенных полиномов Лежандра  $P_{nm}(v)$  ( $n=0, 1, 2, \dots; m=0, 1, \dots, n$ ) ортогональна в  $L_2(-1, 1)$ .

Свойство 8. При каждом  $m \geq 0$  система присоединенных полиномов Лежандра  $P_{nm}(v)$  ( $n=0, 1, 2, \dots; m=0, 1, \dots, n$ ) полна в  $L_2(-1, 1)$ .

Обозначим  $Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi)\Theta(\theta)$  и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + (n+1) n Y_n = 0. \quad (\text{П.5.8})$$

Всякая функция  $Y_n(\varphi, \theta)$ , принадлежащая классу  $C^\infty(s)$  и удовлетворяющая уравнению (П.5.8), называется *сферической функцией порядка  $n$* .

Сферические функции обладают следующими свойствами.

Свойство 9. Сферические функции  $Y_{nm}$  образуют ортогональную и полную систему в пространстве  $L_2(S)$ , где  $S$  — единичная сфера.

Свойство 10. Сферические функции  $Y_{nm}(\varphi, \theta)$  исчерпывают все линейно независимые сферические функции.

## Литература

1. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. 2-е изд. М.: Наука, 1976. 864 с.
2. *Абалакин В. К.* Основы эфемеридной астрономии. М.: Наука, 1979. 448 с.
3. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 367 с.
4. *Алексеев В. М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика.— УМН, 1981, 36, вып. 4, с. 161—176.
5. *Аносов Д. В., Синай Я. Г.* Некоторые гладкие эргодические системы.— УМН, 1967, 22, № 5, с. 107—172.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика: Пер. с фр. М.: Физматгиз, 1960. Т. 2. 463 с.
7. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— УМН, 1963, 18, вып. 5, с. 13—39.
8. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике.— УМН, 1963, 18, вып. 6, с. 92—191.
9. *Арнольд К.* Методы спутниковой геодезии: Пер. с нем. М.: Недра, 1973. 285 с.
10. *Баркин Ю. В.* Уравнения поступательно-вращательного движения небесных тел в оскулирующих элементах.— Астрон. журн., 1977, 54, вып. 2, с. 413—424.
11. *Белецкий В. В.* Некоторые вопросы поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском поле сил.— В кн.: Искусственные спутники Земли: М.: Изд-во АН СССР, 1963, вып. 16, с. 13—26.
12. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
13. *Гаврилов Н. И.* Об устойчивости решений одного класса систем Гамильтона при малых изменениях функции  $H$ .— Дифференц. уравнения, 1982, 18, № 2, с. 219—234.
14. *Гаврилов Н. И.* О безусловной устойчивости математической модели Солнечной системы.— Дифференц. уравнения, 1982, 18, № 3, с. 383—397.
15. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971. 444 с.
16. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М.: Наука, 1978. 126 с.
17. *Грушинский А. П.* Теория фигуры Земли. 2-е изд. М.: Наука, 1976. 446 с.
18. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
19. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
20. *Демин В. Г.* Судьба Солнечной системы. 2-е изд. М.: Наука, 1975. 264 с.
21. *Депри А., Анрар Ж., Ром А.* Аналитическая теория Луны: Средние движения.— Бюл. Ин-та теорет. астрономии АН СССР, 1971, 12, № 1, с. 1—16.

22. Джеффрис Г. Неупругие смещения на Земле и планетах.— В кн.: Верхняя мантия. М.: Мир, 1975, с. 257—266.
23. Дубошин Г. Н. О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения.— Астрон. журн., 1958, 35, вып. 2, с. 212—223.
24. Дубошин Г. Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
25. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978. 540 с.
26. Ержанов Ж. С. Вековые вариации вращения Земли.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации: (К 60-летию академика И. Ф. Образцова). М.: Машиностроение, 1982, с. 101—115.
27. Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А. О направлении и скорости векового движения земных полюсов.— ДАН СССР, 1975, 223, № 4, с. 1113—1117.
28. Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А. Точное решение задачи о динамической уравновешенности Земли.— Вестн. АН КазССР, 1975, № 3, с. 2—14.
29. Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А. Теория векового движения полюсов Земли.— В кн.: Материалы IV Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Киев: Наук. думка, 1976, с. 15.
30. Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А. О вращательных движениях Земли как тела с трехосным эллипсоидом инерции.— Прикл. механика, 1976, 12, № 11, с. 33—39.
31. Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А., Егоров Ал. К. Вековое замедление вращения абсолютно твердой Земли.— Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1977, № 5, с. 32—40.
32. Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А., Егоров Ал. К. К проблеме редукции, связанной с осевым вращением Земли.— Вестн. АН КазССР, 1977, № 10, с. 44—55.
33. Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
34. Изотов А. А., Зубинский В. И., Макаренков Н. Л., Микиша А. М. Основы спутниковой геодезии. М.: Недра, 1974. 318 с.
35. История механики (с конца XVIII века до середины XX века). М.: Наука, 1972. 415 с.
36. Ишлинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука, 1981. 192 с.
37. Кагановский Е. М. Изменение широты Ташкента в связи с вековым движением полюсов Земли.— Докл. АН УзССР, 1972, № 7, с. 5—8.
38. Калыбаев А. А. О первых интегралах вращательного движения абсолютно твердой Земли.— Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1976, № 3, с. 75—77.
39. Калыбаев А. А. О классификации группы переменных, описывающих поступательно-вращательное движение планетной системы как функции времени.— Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1980, № 3, с. 69—73.
40. Қан М. А. Определение фигуры Земли и аномалии массы по возмущениям орбит искусственных спутников.— В кн.: Земная кора и верхняя мантия. М.: Мир, 1967, с. 298—313.
41. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
42. Қозлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
43. Қолмоғоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика: Международный математический конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961, с. 187—208.
44. Қолмоғоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука 1975. 544 с.

45. Костина Л. Д., Сахаров В. И. О вековом движении географического полюса Земли.— В кн.: Астрометрия и астрофизика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 28, с. 7—13.
46. Куликов К. А. Изменяемость широт и долгот. М.: Наука, 1969. 403 с.
47. Лагранж Ж. Аналитическая механика: Пер. с франц. М.: Изд-во АН СССР, 1950. Т. 1. 594 с.; Т. 2. 440 с.
48. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
49. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.
50. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. Т. 2. Ч. 1. 436 с.; Ч. 2. 556 с.
51. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
52. Маров М. Я. Планеты и спутники. М.: Наука, 1981. 256 с.
53. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей. М.: Недра, 1979. 338 с.
54. Мельхиор П. Земные приливы и движение полюса.— В кн.: Верхняя мантия. М.: Мир, 1975, с. 149—157.
55. Михайлов А. А. О вековых изменениях географических координат.— Астрон. журн., 1968, 45, вып. 3, с. 413—417.
56. Михайлов А. А. О движении земных полюсов.— Астрон. журн., 1971, 48, вып. 6, с. 1301—1304.
57. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения: Пер. с англ.— УМН, 1968, 23, вып. 4, с. 179—238.
58. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды: Пер. с англ.— УМН, 1969, 24, вып. 2, с. 165—211.
59. Немыцкий В. В. Топологические вопросы теории динамических систем.— УМН, 4, вып. 6, 1949, с. 91—153.
60. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 449 с.
61. Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.— УМН, 1977, 32, вып. 6 (198), с. 5—66.
62. Никольский С. М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1975. Т. 2. 408 с.
63. Орлов А. Я. Избранные труды. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. Т. 1. 327 с.
64. Осипов Ю. С. Геометрическая интерпретация задачи Кеплера.— УМН, 1972, 27, вып. 2. 161 с.
65. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.
66. Подобед В. В., Нестеров В. В. Общая астрометрия. 2-е изд. М.: Наука, 1982. 576 с.
67. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.
68. Пуанкаре А. Избранные труды. М.: Наука, 1971. Т. 1. 771 с.; 1972. Т. 2. 801 с.
69. Румянцев В. В. Об устойчивости движений по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ, 1957, № 4, с. 12—24.
70. Седов Л. И. О некоторых работах Туллио Леви-Чивита в аналитической механике.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики: (К 60-летию академика В. Н. Челомея). М.: ВИНТИ, 1974, с. 625—640.
71. Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел.— ДАН СССР, 1960, вып. 2, с. 304—306.
72. Солнечная система: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 200 с.

73. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946. 319 с.
74. Стандартная Земля (геодезические параметры Земли на 1966 г.): Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 227 с.
75. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. Т. 1. 320 с.; 1937. Т. 2. 278 с.
76. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.
77. Тихонов А. Н. О решении нелинейных интегральных уравнений.— ДАН СССР, 1964, 156, № 6, с. 1296—1299.
78. Федоров Е. П., Корсунь А. А., Майор С. П. и др. Движение полюса Земли с 1890.0 по 1969.0. Киев: Наук. думка, 1972. 264 с.
79. Федоров Е. П. Существует ли вековое движение полюса Земли? Астрометрия и астрофизика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 27, с. 3—6.
80. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: НГУ, 1965. 210 с.
81. Холшевников К. В. О величине коэффициентов разложения потенциала.— Вестн. ЛГУ, № 13, 1965. 155 с.
82. Хильми Г. Ф. Проблема  $n$  тел в небесной механике и космогонии. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 127 с.
83. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов.— ПММ, 1963, 27, вып. 3, с. 247—259.
84. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Наука, 1962. 536 с.
85. Щербаков Б. А. Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1972. 320 с.
86. Эйлер Л. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академией наук СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 611 с.
87. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством максимума или минимума, или решение изопериметрических задач, взятых в самом широком смысле. М.; Л.: ОНТИ, 1934. 401 с.
88. Яров-Яровой М. С. О силовой функции притяжения планеты и ее спутников.— В кн.: Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 259—277.
89. Яцкив Я. С., Миронов Н. Т., Корсунь А. А., Тарадий В. К. Движение полюсов и неравномерность вращения Земли.— В кн.: Астрономия. М.: ВИНТИ, 1976, ч. 1, с. 104; ч. 2, с. 120. (Итоги науки и техники).
90. Andoyer H. Cours de mecanique celeste. P.: Gnathier — Villars, 1923, p. 420.
91. Birkhoff G. D. Dynamical systems: N. Y., 1927. Пер. на рус. яз.: Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
92. D'Alembert F. Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système Newtonien. P.: Acad., Pres. 1749. 184 p.
93. Erzhanov Zh. S. Secular polar motion of the earth and its parameters computation from artificial satellites observations.— In: 3rd Intern. Symp. «Geodesy and Physics of the Earth». Proc. Potsdam, 1977, pt 1. p. 129—144.
94. Erzhanov Zh. S., Kalybaev A. A. Dynamically non-symmetric rotation theory.— In: 4th Intern. Symp. «Geodesy and Physics of the Earth». Abstr. Potsdam, 1980, p. 9.
95. Erzhanov Zh. S., Kalybaev A. A., Egorov Al. K. On the equations of precession and nutation of the dynamically unbalanced earth... N. Y., 1980. 157 p.

96. Euler L. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis natural cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in nujusmodi corporacaderere possunt, accomodata.—Opera omnia, 1948, vol. 3, s. 3, p. 327; 1959, vol. 4, s. 2, p. 359 (1-е изд.: Rostochii et Gvyphiswaldicce, 1765, p. 624).
97. Gaposhkin E. M., Lambeck K. Earth's gravity field to the sixteenth degree and station coordinates from satellite and terrestrial data.—J. Geophys. Res., 1971, 76, N 20, p. 4203—4223.
98. Gaposhkin E. M. Earth's gravity field to the eighteenth degree and station coordinates for 104 stations from satellite and terrestrial data.—J. Geophys. Res., 1974, 79, N 35, p. 5377—5411.
99. Gaposhkin E. M. Gravity field determination using laser observations Centre for Astrophysics. SAO Prepr. Ser., 1976.
100. Geodetic reference system 1967. Publications speciale du Bulletin géodésique.—Paris: Bureau Central de l'AIG, 1970. 116 p.
101. Kinoshita H. Theory of the rotation of the rigid earth.—Celest. Mech., 1977, 15, N 3, p. 3—75.
102. Lambeck K. Earth's variable rotation. Cambridge: Univ. press, 1980. 449 p.
103. Lerch F. J., Wagner C. A., Smith D. E. et al. Gravitational field models for the Earth (GEM-1 and 2).—In: NASA/GSFC. Doc. X-553-72-146. Greenbelt (Md), 1972, p. 261—267.
104. Lerch F. J., Wagner C. A., Putney B. H. et al. Gravitational field models GEM-3 and 4.—In: NASA Tech. Memo, Nat. Tech. Inform. Serv. Springfield (Va), 1972, p. 37—43.
105. Lerch F. J., Klosko S. M., Laubscher R. E., Wagner C. A. Gravity model improvement using Geos-3 (GEM-9 and 10).—J. Geophys. Res., 1979, vol. 84, N 138, p. 3897—3916.
106. Markowitz Wm. Sudden changes in rotational acceleration of the Earth and secular motion of the Pole.—In: Earthquake Displacement Fields and the Rotation of the Earth. Dordrecht, 1970, p. 69—81.
107. Markowitz Wm. Astronomical programs for the study of secular variations in position.—In: Intern. Symp. Earth's Gravit. and Secul. variat. Posit. Sydney, 1973, p. 21.
108. Moser J. Lectures on hamiltonian systems. N. Y.: Courant Inst. Math. Sci., 1968. Пер. на рус. яз.: Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973, 168 с.
109. Mueller I. I. Introduction to satellite geodesy. N. Y.: Frederik Ungar Publ. Co. 1964. Пер. на рус. яз.: Меллер И. Введение в спутниковую геодезию. М.; Мир, 1967. 367 с.
110. Munk W. H., Macdonald G. T. F. The rotation of the Earth. Cambridge. Univ. press, 1960. Пер. на рус. яз.: Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. М.: Мир, 1964. 384 с.
111. On Reference Coordinate systems for Earth Dynamics: Colloquim. W-wa. 1975, N 26. 478 p.
112. Poma A., Proverboi E. The secular motion of the pole from BIH results.—In: Pap. presented to the IV Gen. Assembly of Assoc. Geophys., Italiana, Roma, 1975, p. 3—5.
113. Rapp R. H. Potential coefficients determinations from 5° — terrestrial gravity data.—Rep. Dep. Geod. Sci. Ohio St. Univ., 1977, N 251, p. 1—77.
114. Rochester M. G. Polar Wobble and Drift: A bief history.—In: Earthquake displacement and the rotation of the Earth. Publishing Dordrecht, 1970, p. 3—13.
115. Rochester M. G. The Erath's rotation. EOS.—Trans. Amer. Geophys. Union, 1973, vol. 54, N 8, p. 769—811.
116. Roche N., Habets P., Laloy N. Stability theory by Liapunov's direct method. N. Y.: Spring-Verl., 1977. Пер. на рус. яз.: Пуш Н., Абевс П., Ла-

лу М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

117. *Siegel C. L.* Lectures on Celestial Mechanics. В. etc.: Spring-Verl., 1971. Пер. на рус. яз.: *Зигель С. Л.* Лекции по небесной механике. М.: Мир, 1973. 168 с.
118. *Smart W. M.* Celestial mechanics. L. etc.: Longmanns, Green and Co, 1953. Пер. на рус. яз.: *Смарт У.* Небесная механика. М.: Мир, 1965. 502 с.
119. *Smith D. E., Lerch F. J., Narsh J. G.* et al. Contributions to the national geodetic satellite program by Goddard Space Flight Center.— *J. Geophys. Res.*, 1976, vol. 81, N 5, p. 1006—1026.
120. *Stoyko A., Stoyko N.* Variations de latitudes et mouvement de l'ocorce terrestre.— In: Problems of recent crustal movements of the Earth. Moscow, 1969, p. 425—428.
121. *Stoyko A.* Les variations de la Terre et les problèmes connexes.— *Ann. Guépard*, 1970, N 46.
122. *Tisserand F.* Traite de mecanique celeste. P.: Cathiev-Villars, 1881. Vol. 2. 425 p.
123. *Vicente R., Yumi S.* Coordinates of the pole referred to the Conventional International Origin.— *Publ. JZO, Mizusawa VII*, 1969, N 1, p. 79.
124. *Wagner C. A.* Zonal gravity harmonics from long satellite arcs by a seminumeric method.— *J. Geophys. Res.*, 1973, vol. 78, N 17, p. 3271—3280.
125. *Wagner C. A., Lerch F. J.* Improvement in the geopotential derived from satellite and surface data (GEM-7 and 8).— *J. Geophys. Res.*, 1977, vol. 82, N 5, p. 901—914.
126. *Wermer J.* Potential Theory. В. etc.: Spring-Verl., 1974. Пер. на рус. яз.: *Уэрмер Дж.* Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 136 с.
127. *Winter A.* The analytical foundations of celestial mechanics Princeton (N. J.): Princeton Univ. press, 1941. Пер. на рус. яз.: *Уинтер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 523 с.
128. *Woolard E. W.* Theory of the rotation of the Earth around its center of mass. Wash.: US gov. print. off., 1953. Пер. на рус. яз.: *Вуллард Э.* Теория вращения Земли около центра масс. М.: Физматгиз, 1963. 167 с.
129. *Yumi S., Wako J.* Secular motion of the pole.— In: Earthquake displacement fields and the rotation of the Earth. Dordrecht, 1970, p. 82—87.

## Предметный указатель

- Аксонд неподвижный** 14  
— подвижный 14
- Аномалия истинная** 93  
— средняя 94  
— эксцентрическая 95
- Апоцентр** 92
- Апсиды** 92
- Аргумент перицентра** 93  
— широты 94
- Базис рациональный** 61  
— целый 61
- Вариации элементов вращения Земли**  
вековые 161  
— — — — периодические 174
- Вектор Лапласа** 90
- Возмущения** 99  
— вековые 99  
— периодические 99  
— смешанные 99  
—  $s$ -го порядка 99
- Вырождение собственное** 102
- Гамильтониан** 123
- Гармоники геопотенциала** 201  
— зональные 201  
— секториальные 201  
— тессеральные 201
- Градиент функции** 116
- Геопотенциал** 198
- Движение** 29  
— вековое полюса Земли 11, 13  
— изохронное (в смысле возвращаемости по времени) 62  
— — ... отрицательно 62  
— — ... положительно 62  
— периодическое 30  
— почти периодическое 31  
— равномерно изохронное (в смысле возвращаемости по времени) 63  
— — — ... отрицательно 63  
— — — ... положительно 63  
— равномерно сравнимое (в смысле возвращаемости по времени) 63  
— — — ... отрицательно 62  
— — — ... положительно 62  
— рекуррентное 46, 47  
— сравнимое (в смысле возвращаемости по времени) 62  
— — ... отрицательно 62  
— — ... положительно 62  
— среднее 95  
— условно-периодическое 51, 61, 162  
— устойчивое 40  
— — по Биркгофу 44  
— — по Лагранжу 40  
— — — — отрицательно 40  
— — — — положительно 40  
— — по Пуассону 42  
— — — — отрицательно 42  
— — — — положительно 42
- Динамическая система** 28, 29
- Динамическое сжатие** 208
- Дифференциал функции** 116
- Диффузия Арнольда** 103
- Длина временная** 29
- Долгота восходящего узла** 93
- Дуга конечная** 29
- Задача двух тел** 88  
— Дирихле внешняя 241  
—  $n$  тел 81
- Закон Кеплера первый** 92  
— — второй 93  
— — третий 95  
— — — обобщенный 95
- Законы Кеплера** 88  
— сохранения 83
- Замедление вековое** 169
- Изменения широты** 218  
— — непериодические 218  
— — неполярные 218  
— — периодические 218  
— — полярные 218
- Инвариант интегральный** 127
- Инварианты векового уравнения** 217
- Инвариантные соотношения** 82
- Интеграл площадей** 16  
— энергии 16, 84
- Интегралы Лапласа** 90  
— моментов 82, 152  
— площадей 82, 155
- Кинетический момент вращения** 152
- Количество движения** 152

- Конус неподвижный 15, 16  
 — прецессии 15, 16  
 Куб  $n$ -мерный 230
- Лагранжиан** 133  
**Линия апсид** 92  
 — узлов 93
- Малые знаменатели** 61  
**Мера внешняя** 230  
 — Лебега 230  
 — элементов множества 230  
**Мера Каратеодори** 125  
 — — инвариантная 125
- Множеств**  
 — разность 227  
 — пересечение 227  
 — сумма (объединение) 227
- Множества**  
 — дополнение 227  
 — образ 227  
 — прообраз 227
- Множество вполне ограниченное** 67, 229  
 — замкнутое 31, 228  
 — измеримое по Лебегу 230  
 — инвариантное 32, 46, 74, 126  
 — колмогоровское 103  
 — минимальное 46, 74  
 — компактное 67, 229  
 — ограниченное 31  
 — открытое 228  
 — относительно плотное 49  
 — плотное 228  
 — предкомпактное 67, 229  
 — собственное 228  
 — элементарное 230  
 —  $\sigma$ -измеримое 126  
 —  $\alpha$ -предельное 34  
 —  $\lambda$ -предельное 34  
 —  $\omega$ -предельное 34
- Модель геопотенциала** 187  
 — — «Годдардская модель Земли» 187, 204, 205  
 — — «Стандартная Земля» 187, 204, 205, 206
- Момент главных внешних сил** 152  
 — инерции полярный 83  
 — количества движения 152
- Моменты инерции главные центральные** 211  
 — — осевые 210  
 — — центробежные 210
- Наклонение орбиты** 93  
**Неравенство Зундмана** 87  
 — Коши—Буняковского 87  
 — осцилляционное 88
- Норма** 229, 232  
**Нутация** 10, 13, 152
- Операция основная** 162  
**Орбиты оскулирующие** 98  
**Ось вращения** 14  
 — инерции 136  
 — фокальная 92
- Параметр кривой** 96  
**Переменные Андуайе** 136  
 — Делоне 235  
 — Кеплера 92  
 — Лагранжа 98, 235
- Период свободный Эйлера** 10  
 — чандлеровский 11
- Перицентр** 92
- Плотность интегрального инварианта** 127
- Плоскость неизменяемая Лапласа** 83, 180
- Полиномы Лежандра** 142, 201, 241  
 — нормированные 202  
 — обычные 142, 201  
 — полностью нормированные 202  
 — присоединенные 142, 201  
 — стандартные 201
- Полутраектория отрицательная** 29  
 — положительная 29
- Покой** 32  
 — относительный 30
- Последовательность времени** 77  
 — — направляющая 77  
 — — отрицательно 77  
 — — — положительно 77  
 — —  $\alpha$  34  
 — —  $\lambda$  34  
 — —  $\omega$  34  
 — — собственная 61, 70  
 — — —  $\alpha$  62, 70  
 — — —  $\lambda$  62, 70  
 — — —  $\omega$  61, 71  
 — фундаментальная 66  
 — функций 65  
 — — локально равномерно сходящаяся 66, 67  
 — — сходящаяся 65
- Постоянная нутации** 223  
 — прецессии 223  
 — энергии 16, 83
- Постоянные Лапласа** 90  
 — площадей 83  
 — стоксовы 187  
 — универсальные 207
- Преобразования канонические** 162  
 — основные 162  
 — предварительные 162
- Прецессия обратная** 14  
 — общая 14  
 — прямая 14
- Пространство банахово** 230  
 — действительное линейное 229  
 — метрическое 228  
 — непрерывных функций 64

- нормированное 230
- полное 229
- почти периодических функций 232
- Расстояние угловое перигенетра от узла** 93
- Решение допустимое** 105
  - непродолжаемое влево 38
  - — вправо 38
  - продолжаемое 38
  - — влево 38
  - — вправо 38
- Силовая функция** 82, 141, 241
- Система астрономических постоянных** 223
  - основная 223
  - производная 223
- Система планетная** 96, 105
  - Солнечная 96, 105, 135
  - $n$  тел 81, 105
- Система координат** 8
  - — барисентрическая 8
  - — главных центральных осей инерции 8, 13
  - — земная 8, 12, 208
  - — инерциальная 8, 13
  - — квазикенигова 8, 13
  - — кенигова 8, 13
  - — Условного международного начала 8, 12, 208
- Соизмеримость рациональная** 97
  - — попарно 96
- Состояние движения** 30
  - начальное 29
  - в момент времени 29
  - предельное 30
  - —  $\alpha$  34
  - —  $\lambda$  34
  - —  $\omega$  34
- Сравнимость** 62
  - отрицательная 62
  - положительная 62
  - равномерная 63
- Среднее значение** 59
- Теорема Америо** 124
  - Арнольда 101, 223
  - Арцела 69
  - Биркгофа 48
  - Боля-Бора 231
  - Бора 60, 232
  - Колмогорова 101
  - Коши 66
  - Лапласа 100
  - Лапласа-Лагранжа 100
  - Лиувилля 126
  - о граничном условии 40
  - — движении центра масс
  - — достаточном условии продолжаемости 39
- — единственности и существования решения 37
- — непрерывной зависимости 39
- — непродолжаемости 38
- — среднем значении 57, 232
- — существовании аппроксимации 232
- Пуанкаре-Каратеодори 127
- Пуассона 100
- Стокса 197
- Хаусдорфа 67
- Траектория** 29
  - замкнутая 31
  - минимальная 46
- Тело центральное** 96
- Теория модифицированная Киношита** 12, 192
  - прецессии и нутации 11, 191
  - Стандартная 11, 12, 190
- Торы инвариантные** 239
  - невозмущённые 239
  - нерезонансные 240
- Точка блуждающая**
  - внутренняя 228
  - изолированная 228
  - множества 228
  - неблуждающая 44
  - покоя 30
  - предельная 31
  - —  $\alpha$  31
  - —  $\lambda$  31
  - —  $\omega$  31
  - прикосновения 228
  - устойчивая по Пуассону 42
  - — — отрицательно 42
  - — — положительно 42
- Узел** 93
  - восходящий 93
  - нисходящий 93
- Углы Эйлера** 13
  - нутации 14
  - прецессии 14
  - собственного вращения 14
- Уравнение Кеплера** 95
  - Лагранжа-Якоби 84
  - неизменяемой плоскости Лапласа 91
- Уравнения динамические движения Солнечной системы** 152, 154
  - — Эйлера 16
  - — кинематические Эйлера 16
  - — невозмущенного движения 89
  - Пуассона 189
- Устойчивость по Биркгофу** 44
  - — Лагранжу 40
  - — Пуассону 42
  - — отрицательная по Лагранжу 40
  - — — Пуассону 42
  - — — положительная по Лагранжу 40
  - — — Пуассону 42

- Фаза динамической системы 27
- Функционал 229
  - линейный 229
- Функции градиент 116
  - дифференциал 116
  - первообразная 56, 72
  - производная 56, 70
  - $\epsilon$ -смещение 51
  - $\tau$ -сдвиг 51
    - — отрицательный 51
    - — положительный 51
- Функция возмущающая (пертурбационная) 198
  - дифференцируемая в области 117
  - — — точке 116
  - изохронная 70
    - — отрицательно 70
    - — положительно 70
  - периодическая 30
  - почти периодическая 231
  - предкомпактная 72
    - — отрицательно 72
    - — положительно 72
  - производящая полиномов Лежандра 194
  - равномерно изохронная 70, 77
    - — — отрицательно 70, 77
    - — — положительно 70, 77
  - силовая 141
    - спектральная 232
    - сравнимая 70
      - — отрицательно 70
      - — положительно 70
    - сферическая  $n$ -го порядка 242
    - устойчивая по Лагранжу 68
      - — — отрицательно 68
      - — — положительно 68
      - — — Пуассону 69
      - — — отрицательно 68
      - — — положительно 68
    - уходящая 74
      - — отрицательно 74
      - — положительно 74
- Фурье коэффициенты 60, 232
  - показатели 60, 232
- Центр масс Земли 8, 194, 205
  - — системы  $n$  тел 8, 96
  - — Солнечной системы 8, 96
- Эксцентриситет 96
- Элементы Делонэ 94, 235
  - Кеплера 94, 235
  - орбиты 94, 235
  - оскулирующие 98
- Энергия кинетическая 16, 83
  - полная 83
  - потенциальная 83

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	3
<b>Основные сокращения и обозначения</b> . . . . .	7
Глава первая	
<b>Введение</b> . . . . .	9
1. Краткие исторические сведения . . . . .	9
2. Кинематика вращательного движения Земли в углах Эйлера и переменных Андуайе . . . . .	13
3. Постановка задач общей теории вращения Земли . . . . .	22
Глава вторая	
<b>Динамические системы в метрических пространствах</b> . . . . .	26
1. Понятие динамической системы . . . . .	28
2. Устойчивые движения . . . . .	40
3. Рекуррентные движения . . . . .	46
4. Почти периодические и условно-периодические движения . . . . .	51
5. Сравнимые по возвращаемости движения . . . . .	61
6. Связь устойчивых движений с непрерывными функциями . . . . .	64
Глава третья	
<b>Качественные свойства поступательного движения тел Солнечной системы</b> . . . . .	81
1. Задача $n$ тел и ее первые интегралы . . . . .	81
2. Задача двух тел и законы Кеплера . . . . .	88
3. Проблема Лагранжа—Лапласа об устойчивости движения Солнечной системы . . . . .	96
4. Признак динамической системы . . . . .	106
5. Критерий устойчивости по Лагранжу и устойчивости по Пуассону движения . . . . .	107
6. Критерий рекуррентности движений . . . . .	122
7. Минимальность по Биркгофу движения и соизмеримость средних движений . . . . .	125
8. Физическая интерпретация результатов . . . . .	132
Глава четвертая	
<b>Закономерности вращения Земли и орбитального движения тел Солнечной системы</b> . . . . .	135
1. Выбор системы отсчета. Кинематические уравнения вращательных движений Земли . . . . .	136
2. Силовая функция Солнечной системы . . . . .	141
3. Динамические уравнения движения тел Солнечной системы и их первые интегралы . . . . .	152
4. Вековые вариации элементов вращательного движения Земли . . . . .	161
5. Периодические вариации элементов вращательного движения Земли . . . . .	170
6. Механизм векового удаления Луны от Земли . . . . .	173

7. Механизм сближения плоскости орбит тел Солнечной системы с ее неизменяемой плоскостью Лапласа . . . . .	176
<b>Глава пятая</b>	
<b>Вычисление элементов вращательного движения Земли . . . . .</b>	<b>187</b>
1. Некоторые замечания о существующих теориях вращения Земли . . . . .	187
2. Современные модели геопотенциала . . . . .	193
3. Определение элементов эллипсоида инерции Земли по моделям геопотенциала . . . . .	208
4. Параметры векового движения полюсов Земли . . . . .	216
5. Постоянные прецессии и нутации земной оси . . . . .	223
<b>Приложение</b>	
<b>Обозначения, термины и необходимые сведения . . . . .</b>	<b>227</b>
1. Теоретико-множественные термины и обозначения . . . . .	227
2. Метрические и нормированные пространства . . . . .	228
3. Почти периодические функции в смысле Бора . . . . .	231
4. Гамильтоновы системы и теория возмущений . . . . .	232
5. Ньютоновский потенциал и его основные свойства . . . . .	241
<b>Литература . . . . .</b>	<b>243</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>249</b>

ЖАҚАН СУЛЕЙМАНОВИЧ ЕРЖАНОВ,  
АЙСУЛТАН АБДУЛЛОВИЧ КАЛЫБАЕВ

Общая теория  
вращения  
ЗЕМЛИ

Утверждено к печати  
Институтом сейсмологии  
Академии наук Казахской ССР

Редактор издательства В. Н. Некрасова  
Художник И. А. Слюсарев  
Художественный редактор Т. П. Поленова  
Технический редактор В. Д. Прилепская  
Корректоры А. Б. Васильев, Н. И. Казарина

ИБ № 27072

Сдано в набор 9.08.83  
Подписано к печати 17.10.83  
Т-16673. Формат 60×90<sup>1/16</sup>  
Бумага типографская № 1  
Гарнитура литературная  
Печать высокая  
Усл. печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 15,8. Усл. кр. отт. 16,25  
Тираж 2150 экз. Тип. зак. 4662  
Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Наука»  
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»  
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

**Издательство «НАУКА»**  
**ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ КНИГИ:**

**Международная конференция по аналитическим методам в теории чисел и анализе.** (Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 163). 24 л. 4 р. 10 к.

Сборник составлен из материалов Международной конференции по аналитическим методам в теории чисел и анализе (Москва, 14—19 сентября 1981 г.), посвященной академику И. М. Виноградову в связи с его 90-летием. Приведены статьи по методу тригонометрических сумм И. М. Виноградова, методам большого и малого решета, аналитическим методам алгебраической теории чисел, диофантовым аппроксимациям и их приложениям к диофантовым уравнениям и другим разделам аналитической теории чисел.

Сборник рассчитан на специалистов в области теории чисел, теории функций комплексной переменной и алгебре, а также в других областях математики.

**ЖДАНОВ М. С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей.** 20 л. 3 р. 50 к.

На основе единого подхода, использующего аппарат интеграла типа Коши и его трехмерных аналогов (интегралы типа Стрэттона-Чу) рассматриваются вопросы теории интерпретации гравитационных, постоянных магнитных и переменных электромагнитных полей Земли. Развиваются методы выделения и анализа геофизических аномалий, интегральных преобразований поля, исследуются вопросы неоднозначности обратных задач гравиметрии, геомагнетизма и геоэлектрики.

Книга рассчитана на научных работников — геофизиков и специалистов, занимающихся вопросами математической теории интерпретации геофизических аномалий.

**ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ КНИГ ПОЧТОЙ ЗАКАЗЫ ПРОСИМ НАПРАВЛЯТЬ ПО АДРЕСУ:**

117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой»  
Центральной конторы «Академкнига»;  
197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига»  
ИЛИ В БЛИЖАЙШИЙ МАГАЗИН «АКАДЕМКНИГА»

1 p. 60 к.

4202