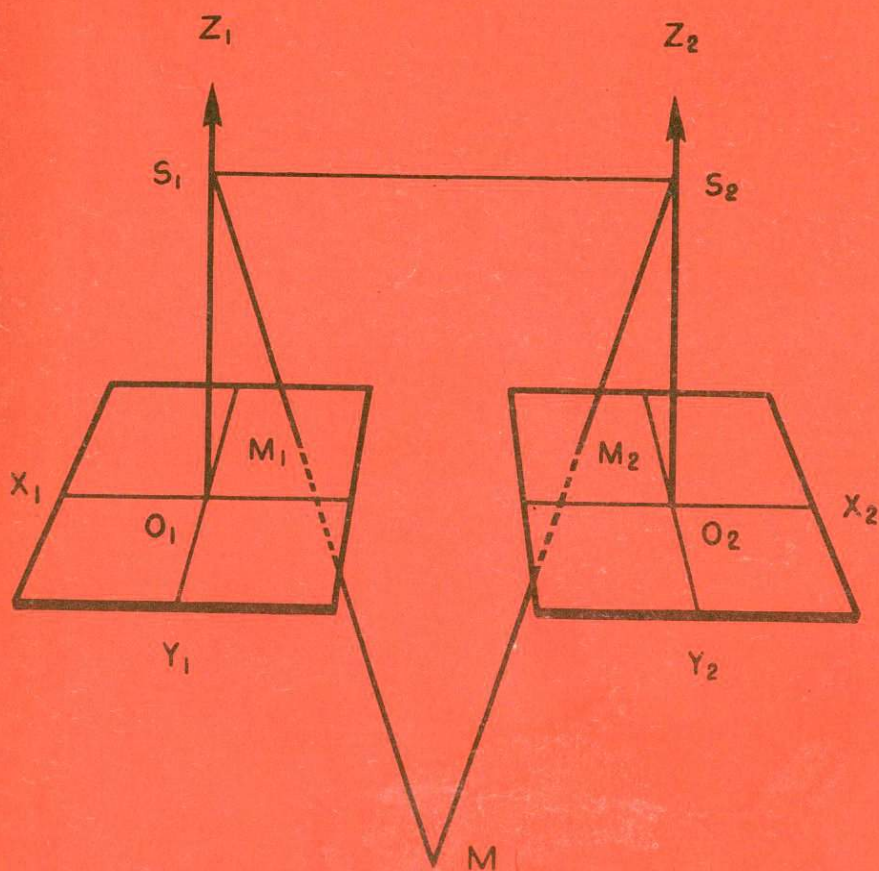


И. Ф. КУШТИН  
Г. А. ЛЫСКОВ

# ФОТОГРАММЕТРИЯ СНИМКА И СТЕРЕОСКОПИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ



И. Ф. КУШТИН  
Г. А. ЛЫСКОВ

# ФОТОГРАММЕТРИЯ СНИМКА И СТЕРЕОСКОПИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

4526



МОСКВА «НЕДРА»

1984



Куштин И.Ф., Лысков Г.А. Фотограмметрия снимка и стереоскопических моделей. М., Недра, 1984, 169 с.

Изложены результаты исследований по теории одиночного снимка и стереопары. Дан анализ искажений, вызываемых различными факторами. Изложены методы определения элементов ориентирования и приведен анализ точности. Приведены формулы для выбора параметров крупномасштабной аэрофотосъемки, способствующие уменьшению "мертвых" зон на снимках застроенных территорий. Описаны методы и приемы работ на обрабатывающих приборах по установочным данным, полученным из аналитической обработки снимков.

Для специалистов, занимающихся обработкой одиночных снимков и моделей. Может быть полезна студентам геодезических и фотограмметрических специальностей.

Табл. 24, ил. 44, список лит. — 47 назв.

Рецензент — канд. техн. наук *П.Н. Бруевич* (МГИ)

Иван Федорович Куштин, Геннадий Александрович Лысков

## ФОТОГРАММЕТРИЯ СНИМКА И СТЕРЕОСКОПИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Редактор издательства Т.С. Корниенко  
Обложка художника К.М. Прасолова  
Художественный редактор Е.Л. Юрковская  
Технический редактор О.А. Колотвина  
Корректор Э.А. Ляхова  
Оператор Л.А. Миронова  
ИБ № 5026

Подписано в печать 30.07.84. Т-16252. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная № 2. Набор выполнен на наборно-пишущей машине типа ИБМ "Композер".  
Гарнитура Пресс-роман. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,5. Усл. кр.-отг. 10,88.  
Уч.-изд. л. 9,45. Тираж 2850 экз. Заказ 2331 /9026-15. Цена 55 коп.

Ордена "Знак Почета" издательство "Недра", 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Московская типография № 9 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва Ж-33, Волочаевская, 40.

1902020000 — 418

К \_\_\_\_\_ 6 — 84

©Издательство "Недра", 1984

(043) 01 — 84

## ВВЕДЕНИЕ

Фотограмметрические методы исследования различных объектов — от изучения звезд и планет Солнечной системы до предметов микромира — находят в настоящее время широкое применение в различных областях науки, техники и народного хозяйства. Используемые в фотограмметрии снимки получают в различных зонах спектра электромагнитного излучения и с различных расстояний до исследуемого объекта. Значительно повысилось метрическое качество изображения на снимке, сконструированы и используются на производстве высокоточные фотограмметрические приборы, созданы и внедрены в практику фотограмметрии быстродействующие электронные вычислительные машины.

Прогресс в фотограмметрии, достигнутый в нашей стране, определен трудами советских ученых: Н.Г. Келля, Н.М. Алексапольского, Н.А. Урмаева, А.С. Скиридова, Ф.В. Дробышева, Н.Я. Бобира, М.Д. Коншина, А.Н. Лобанова, Г.В. Романовского, М.М. Русинова, В.Я. Финковского, В.Ф. Дейнеко, В.М. Сердюкова, Б.Н. Родионова, Ф.Ф. Лысенко, И.Т. Антипова, В.Б. Дубиновского, Ю.С. Тюфлина и многих других.

Повышение метрического качества снимков дало возможность для создания топографических карт использовать снимки, масштаб которых в несколько раз меньше масштаба создаваемой карты. На снимках, полученных с больших высот и из космоса, часто изображается большое количество опорных точек, позволяющее обрабатывать одиночные снимки и стереопары без дополнительного сгущения съемочного обоснования. Подобная ситуация складывается и при крупномасштабном картографировании населенных пунктов.

Поэтому возникает необходимость разработки вопросов, связанных с высокоточной аналитической обработкой одиночных снимков и стереоскопических моделей. К таким вопросам относятся анализ на снимке искажений, вызванных различными факторами, и отыскание методов полного или частичного учета влияния этих факторов; переход от фотограмметрической пространственной прямоугольной системы координат к системе нормальных высот и плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса—Крюгера, в которой должны быть получены результаты высокоточной фотограмметрической обработки снимка.

Изображение на снимках большого количества опорных точек позволяет определять по ним элементы ориентирования снимков, для чего целесообразно разработать способы точного и строгого получения их значения при сравнительно небольшом объеме вычислений на различных вычислительных машинах, включая и микрокалькуляторы. Введение, главы 1—4 и § 22 главы 5 написал проф. И.Ф. Куштин, § 23—25 главы 5 и главу 6 — доц. Г.А. Лысков.

# ГЛАВА I

## АНАЛИЗ НА СНИМКЕ ИСКАЖЕНИЙ, ВЫЗЫВАЕМЫХ РАЗЛИЧНЫМИ ФАКТОРАМИ

### § 1. ПОСТРОЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРЕДМЕТА

При выводе формул, связывающих между собой характеристики объекта и его изображения, полагают, что снимок получают идеальным объективом в центральной проекции.

Теория идеальной оптической системы была создана в 1841 г. Гауссом. Согласно этой теории сохраняется гомоцентричность пучков (исходящий из одной точки пучок лучей после прохождения оптической системы изображается точкой), изображение плоского предмета, расположенного перпендикулярно к оптической оси, подобно самому предмету и каждой точке в пространстве объектов соответствует точка в пространстве изображений (эти точки называются сопряженными) [5, 24].

Теория идеальной оптической системы является чисто геометрической теорией, устанавливающей связь между точками, линиями и плоскостями. В теории Гаусса используется ряд кардинальных точек и плоскостей, позволяющих полностью описать все свойства оптической системы, не рассматривая реального хода лучей [24, с. 294].

На рис. 1 показана оптическая система, состоящая из ряда сферических поверхностей, в которой дугами отмечены первая и последняя поверхности. Если центры всех сферических поверхностей лежат на одной прямой, то такая система называется центрированной. Прямая  $Q_1 Q_2$ , соединяющая центры сферических поверхностей, является осью симметрии центрированной системы и называется оптической осью. Луч  $A_1 B_1$ , параллельный оптической оси  $Q_1 Q_2$ , войдет в оптическую систему в точке  $B_1$ . Этому лучу в пространстве изображений соответствует сопряженный луч  $C_2 F_2$ , выходящий из оптической системы в точке  $C_2$  (ход лучей внутри идеальной системы не рассматривается). Второй луч  $F_1 O_1$  совпадает с оптической осью. В пространстве изображений ему соответствует сопряженный луч  $O_2 F_2$ , также совпадающий с оптической осью. Лучи  $C_2 F_2$  и  $O_2 F_2$  пересекутся в точке  $F_2$ , которая является изображением точки пересечения лучей  $A_1 B_1$  и  $F_1 O_1$  в пространстве объектов. Так как  $A_1 B_1$  параллельна  $F_1 O_1$ , то точка, сопряженная с  $F_2$ , находится в пространстве объектов в бесконечности. Точка  $F_2$ , в которой сходятся после прохождения через оптическую систему все лучи, параллельные оптической оси, называется задним фокусом оптической системы. Аналогичные рассуждения для лучей  $A_2 B_2$  и  $F_2 O_2$  позволяют определить точку  $F_1$ , являющуюся передним фокусом рассматриваемой системы.

Пересечения  $F_1 C_1$  и  $F_2 C_2$  с  $A_1 B_1$  и  $A_2 B_2$  дают точки  $H_1$  и  $H_2$ , которые являются сопряженными, так как в них пересекаются попарно сопряженные лучи. Следовательно, точка  $H_2$  является изображением точки  $H_1$ .

Плоскости  $H_1S_1$  и  $H_2S_2$ , содержащие точки  $H_1$  и  $H_2$  и перпендикулярные к оптической оси  $F_1F_2$ , называются передней и задней главными плоскостями соответственно. Точки  $S_1$  и  $S_2$ , в которых главные плоскости пересекают оптическую ось, называются передней и задней главными точками оптической системы.

Точки  $H_1$  и  $H_2$  находятся на одинаковом расстоянии от оптической оси, поэтому линейное поперечное увеличение

$$\beta = \frac{H_2S_2}{H_1S_1} = 1.$$

Очевидно,  $\beta = 1$  и для других сопряженных точек, лежащих в плоскостях  $H_1S_1$  и  $H_2S_2$ . Следовательно, плоскость  $H_1S_1$  изображается плоскостью  $H_2S_2$  с линейным поперечным увеличением, равным единице. Расстояние  $f_2 = S_2F_2$  называется задним фокусным расстоянием, а  $f_1 = S_1F_1$  — передним фокусным расстоянием.

Плоскости  $F_1'F_1$  и  $F_2'F_2$ , проходящие через фокусы  $F_1$  и  $F_2$  перпендикулярно к оптической оси, называются передней и задней фокусными плоскостями.

Кроме линейного увеличения оптическую систему можно характеризовать также угловым увеличением (рис. 2)

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u_2}{\operatorname{tg} u_1}, \quad (1.1)$$

где  $u_1, u_2$  — углы между лучами  $Q_1M_1$  и  $Q_2M_2$  и оптической осью. Так как  $M_1S_1 = M_2S_2$ , то

$$\gamma = \frac{d_1}{d_2}. \quad (1.2)$$

Сопряженные точки, в которых угловое увеличение  $\gamma = 1$ , называются узлами, или узловыми точками. В этих точках сопряженные лучи, проходящие через узлы, параллельны друг другу, так как в них  $u_1' = u_2'$ . В каждой оптической системе такой парой точек будут сопряженные точки  $N_1$  и  $N_2$  (см. рис. 2), отстоящие от переднего и заднего фокусов соответственно на расстояния, равные заднему и переднему фокусным расстояниям, т.е.

$$F_1N_1 = f_2, \quad F_2N_2 = f_1.$$

Плоскости  $N_1'N_1$  и  $N_2'N_2$ , проходящие через узлы перпендикулярно к оптической оси, называются узловыми плоскостями. Шесть плоскостей

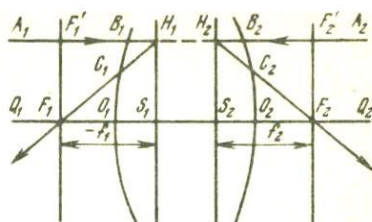


Рис. 1

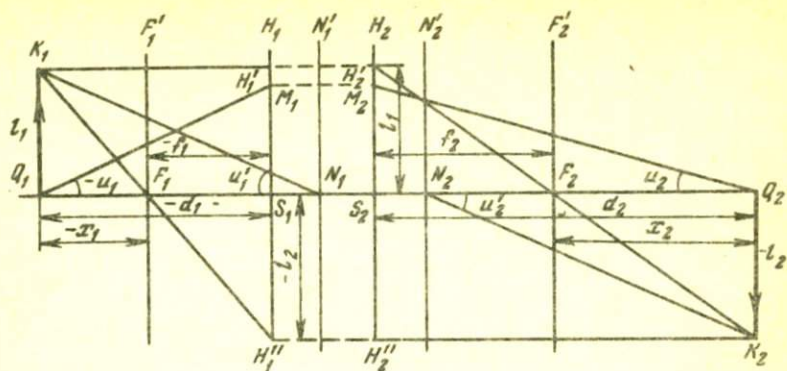


Рис. 2

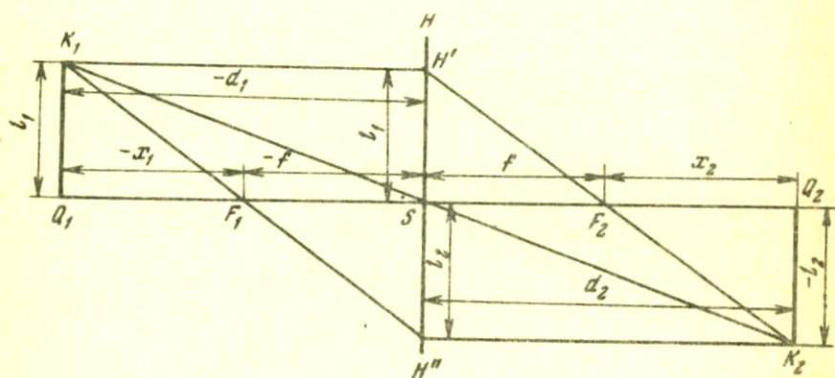


Рис. 3

(две фокальные, две главные, две узловые) и шесть точек главной оси, им соответствующие (фокусы, главные точки, узлы), называются кардинальными плоскостями и точками [24]. Расположение кардинальных плоскостей  $F_1', F_2'$ ;  $H_1, H_2$ ;  $N_1', N_2'$  и точек  $F_1, F_2$ ;  $S_1, S_2$ ;  $N_1, N_2$  приведено на рис. 2.

Используя свойства кардинальных плоскостей и точек, можно построить изображения лучами, исходящими из одной точки. На рис. 2 луч  $K_1 H_1'$ , проведенный параллельно оптической оси, пересекает заднюю главную плоскость в точке  $H_2'$  и далее проходит через задний фокус  $F_2'$ . Луч  $K_1 H_1''$ , проходящий через передний фокус  $F_1'$ , пересекает переднюю главную плоскость в точке  $H_1''$  и далее идет параллельно оптической оси. Луч  $K N_1$  входит в переднюю узловую точку  $N_1$  и выходит из задней узловой точки  $N_2$  параллельно прежнему направлению, т.е.  $K_1 N_1 \parallel N_2 K_2$ . Все три луча пересекаются в точке  $K_2$ , являющейся изображением точки  $K_1$ .

Если по обе стороны системы имеется одна и та же среда, то узловые точки сливаются с главными, а заднее и переднее фокусные расстояния будут равны между собой, т.е.  $-f_1 = +f_2 = f$ . При этом оптическая система характеризуется положением четырех кардинальных точек и плоскостей.

Так как расстояние между главными плоскостями не влияет на направление лучей в пространстве изображений, то главные плоскости  $H_1$  и  $H_2$  можно считать совпадающими. Построение изображения при этом упрощается (рис. 3) и показывает, что оптическое изображение является центральной проекцией с центром проекции в точке  $S$ .

На рис. 2 из подобных треугольников  $K_1Q_1F_1$  и  $F_1S_1H_1''$ ;  $H_2S_2F_2$  и  $F_2Q_2K_2$  имеем

$$\frac{l_1}{-l_2} = \frac{-x_1}{-f_1} = \frac{f_2}{x_2},$$

откуда получим известную формулу

$$x_1 x_2 = f_1 f_2. \quad (1.3)$$

Подставляя в полученную формулу  $x_1 = d_1 - f_1$ ,  $x_2 = d_2 - f_2$ , находим

$$(d_1 - f_1)(d_2 - f_2) = f_1 f_2.$$

Раскрыв скобки и поделив на  $d_1 d_2$ , имеем формулу Гаусса

$$\frac{f_1}{d_1} + \frac{f_2}{d_2} = 1. \quad (1.4)$$

Если оптическая система находится в однородной среде, то  $-f_1 = f_2 = f$  и вместо формул (1.3) и (1.4) получим

$$x_1 x_2 = -f^2, \quad -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}. \quad (1.5)$$

Из второй формулы (1.5) находим

$$d_2 = \frac{d_1 f}{d_1 + f} = \frac{f}{1 + \frac{f}{d_1}} = f \left(1 + \frac{f}{d_1}\right)^{-1}.$$

При  $f \ll d_1$  имеем

$$d_2 = f - \frac{f^2}{d_1}.$$

При  $f = 100$  мм,  $d_1 = 100$  м второе слагаемое равно 0,1 мм. Следовательно, при аэрофотосъемке, когда высота фотографирования определяется сотнями метров или километров, расстояние от задней узловой точки объектива до плоскости изображения (эмульсионного слоя) практически равно фокусному расстоянию объектива, т.е. плоскость изображения совпадает с задней фокальной плоскостью.

Линейное поперечное увеличение оптической системы с учетом рис. 3 и формулы (1.2)

$$\beta = \frac{l_2}{l_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{\gamma},$$

где  $\gamma$  — угловое увеличение.

При аэрофотосъемке  $d_2 = f$ ,  $d_1 = H$ , а

$$\beta = \frac{f}{H} = \frac{1}{m}, \quad (1.6)$$

т.е. масштабу съемки.

Поскольку на практике получают изображение пространственных предметов, отдельные точки которых находятся на различных расстояниях от главной плоскости, то для характеристики отношения длины изображения  $\Delta x_2$  к длине изображаемого отрезка  $\Delta x_1$ , вводят продольное увеличение

$$a = \Delta x_2 / \Delta x_1.$$

Дифференцируя формулу (1.3) по  $x_1$  и  $x_2$  и переходя к конечным приращениям, получим

$$x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 = 0.$$

С учетом этого

$$a = - \frac{x_2}{x_1} = - \frac{f_1 f_2}{x_1^2} = - \frac{x_2^2}{f_1 f_2} = -\beta^2 \frac{f_2}{f_1}. \quad (1.7)$$

При  $f_1 = -f_2$

$$a = \beta^2. \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) следует, что объемные предметы нельзя сфотографировать без искажения, так как увеличение по направлению оптической оси и по перпендикулярному к ней направлению не являются одинаковыми.

## § 2. ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА ФОТОКАМЕРЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ВНУТРЕННЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ И ДИСТОРСИЯ

Фотокамера, используемая для топографической съемки, имеет жесткую конструкцию и состоит из объективной 1, камерной 2 и кассетной 3 частей (рис. 4). В объективной части расположена оптическая система (объектив 5, светофильтр, отенитель и другие детали), при помощи которой получается изображение снимаемой местности. В верхней части корпуса (камерной части) расположена прикладная рамка 4, плоскость которой совмещена с задней фокальной плоскостью объектива. К прикладной рамке во время экспонирования прижимается пленка. На прикладной рамке имеются координатные метки 1, 2, 3, 4 (рис. 5), определяющие положение координатной системы снимка  $o'x'y'$ . Линии, соединяющие противоположные метки, должны быть взаимно перпендикулярны. Если это условие не выполнено, то координатная система снимка определяется следующим образом. Пересечение линий, соединяющих противоположные координатные метки, дает точку  $o'$ . Линию 1-2 принимают за ось абсцисс, а линию, проходящую через точку  $o'$  перпендикулярно к линии 1-2, — за ось ординат.

Кассетная часть фотокамеры служит для размещения пленки и приведения ее светочувствительного слоя в плоскость прикладной рамки во время экспонирования.

Элементы внутреннего ориентирования определяют положение внутреннего центра проекции  $S'$  относительно системы координат снимка  $o'x'y'$ . Пространственное положение точки  $S'$  однозначно определяется величинами  $x_0, y_0$  — координатами главной точки снимка  $o$  и фокусным расстоянием фотокамеры  $f = S'o$ . Главная точка снимка  $o$  получается при пересечении оптической оси фотокамеры с плоскостью прикладной рамки. Оптической осью фотокамеры называют прямую, проходящую через узловую точку объектива  $S'$  перпендикулярно к плоскости прикладной рамки.

Изображение, получаемое при использовании реального объектива, отличается от строго подобного (ортоскопического) изображения, создаваемого идеальным объективом. Вследствие нарушения ортоскопии возникает дисторсия. Дисторсия объектива делится на радиальную и тангенциальную. Радиальная дисторсия зависит от расчета объектива, качества его изготовления, условий эксплуатации и других причин. Тангенциальная дисторсия в основном возникает из-за ошибок центрирования линз объектива и ее действие аналогично влиянию помещенного перед объективом оптического клина.

Выполненные в ЦНИИГАиК исследования показали, что необходимо учитывать как радиальную, так и тангенциальную дисторсии. Для учета влияния дисторсии можно использовать предложенные М.М. Русиновым полиномы третьего порядка

$$\delta x_i = a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2 + a_6 x_i^3 + a_7 x_i^2 y_i +$$

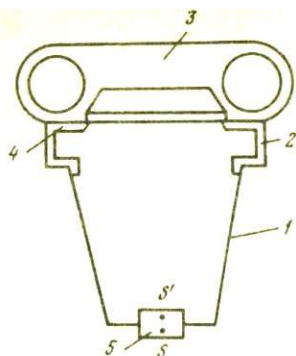
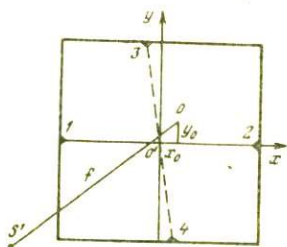


Рис. 4

Рис. 5



$$\begin{aligned}
 &+ a_8 x_i y_i^2 + a_9 y_i^3; \\
 \delta y_i = &b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i^2 + b_4 x_i y_i + b_5 y_i^2 + b_6 x_i^3 + b_7 x_i^2 y_i + \\
 &+ b_8 x_i y_i^2 + b_9 y_i^3,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

в которых  $\delta x_i, \delta y_i$  – составляющие дисторсии по координатным осям  $x$  и  $y$ ;  $x_i, y_i$  – координаты точек снимка;  $a_i, b_i$  – коэффициенты, определяемые для каждого объектива по результатам калибровки съемочной аппаратуры. Так как в каждую из формул (1.9) входят 9 неизвестных коэффициентов, то для их определения необходимо иметь не менее 9 точек, в которых значения  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$  определены по материалам калибровки. При наличии избыточных данных задача решается по методу наименьших квадратов.

Кроме того, учет дисторсии аэросъемочных объективов можно выполнить по графикам, построенным на площади снимка по методике, изложенной в работе [43]. Обычно на графиках показаны линии одинаковой радиальной дисторсии, поэтому для получения составляющей дисторсии по осям  $x$  и  $y$  необходимо использовать формулы

$$\delta x_i = \frac{x_i}{r_i} \delta r_i; \quad \delta y_i = \frac{y_i}{r_i} \delta r_i, \tag{1.10}$$

где  $\delta r_i$  – дисторсия по направлению радиус-вектора  $r_i$ .

В случаях, когда распределение дисторсии по полю снимка является сложным, для более точного учета ее влияния на координаты точек снимка целесообразно использовать графический метод. Если же величина дисторсии достаточно полно и точно аппроксимируется полиномами (1.9) и обработка снимков выполняется аналитическими методами с использованием ЭВМ, то для определения поправок за дисторсию можно использовать эти полиномы.

§ 3. ИСКАЖЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ, ВЫЗЫВАЕМОЕ  
НЕСОВПАДЕНИЕМ АЭРОФОТОПЛЕНКИ С ПЛОСКОСТЬЮ  
ПРИКЛАДНОЙ РАМКИ

Известно, что в момент экспонирования аэрофотопленка при строгом рассмотрении не является плоскостью, а представляет сложную поверхность, которая получается при огибании аэрофотопленкой различных неровностей прижимного стола, мелких частиц, находящихся между аэропленкой и прижимным столом. Получаемая поверхность аэрофотопленки имеет сложный вид, что затрудняет ее точное математическое описание. В некоторой степени подобные вопросы рассматриваются в теории анизотропных оболочек, но из-за сложности они чаще всего решаются приближенными методами. Поверхности, образуемой аэрофотопленкой при огибании неровности, наиболее полно соответствует поверхность круглой пластины при действии на нее нагрузок, когда край пластины заделан и срединный элемент поверхности закреплен. Поверхность такой пластины выражается формулой \*

$$\omega = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2, \quad (1.11)$$

где  $\omega$  — прогиб пластины (пленки);  $q$  — интенсивность распределительной нагрузки;  $D$  — жесткость пластины при изгибе (цилиндрическая жесткость);  $a$  — радиус пластины (расстояние от центра пластины, являющегося началом координат, до заделанного края);  $r$  — расстояние от центра пластины до данной точки.

Формула (1.11) получена для чистого изгиба в предположении симметричности изгиба относительно центра. В свою очередь жесткость пластины при изгибе

$$D = - \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (1.12)$$

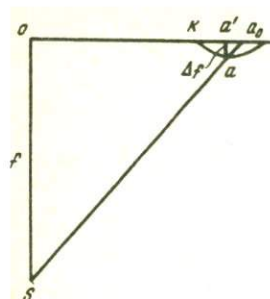
где  $E$  — модуль упругости (модуль Юнга);  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина пластины.

Из формулы (1.11) видно, что максимальное значение изгиба будет при  $r = 0$ . В этом случае

$$\omega = \frac{qa^4}{64D}. \quad (1.13)$$

После подстановки в формулу (1.13) вместо  $D$  его значения из выражения (1.12) получим

\* С.А. Амбарцумян. Теория анизотропных оболочек. М., Физматиздат, 1961.



$$\omega = \frac{3qa^4(1-\nu^2)}{16Eh^3}$$

Полагая  $q = P$ ,  $\omega = \Delta f$ ,  $a = \frac{L}{2}$ ,  $h = \delta$  при  $\nu \approx 0,33$  находим

$$L = \sqrt[4]{\frac{96\Delta f E \delta^3}{P}} \quad (1.14)$$

Рис. 6

Формула (1.14) получена Е.П. Аржановым и является частным случаем формулы (1.11).

Величина искажения  $\Delta$  вдоль радиус-вектора (рис. 6)

$$\Delta = ka_0 - ka = ka' + a'a_0 - ka$$

Из подобных треугольников  $oSa_0$  и  $a'a_0$  имеем

$$a'a_0 = \frac{o a_0 \Delta f}{f}$$

Учитывая  $ka' = \frac{L}{2}$ ,  $o a_0 = r_0$ ,  $ka = s$ , получим

$$\Delta = \frac{L}{2} + \frac{r_0 \Delta f}{f} - s \quad (1.15)$$

Значение  $s$  может быть найдено из дифференциала дуги  $s$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2} dr,$$

откуда дуга

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2} dr.$$

Используя формулу (1.11), получим

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{qr}{16D} (a^2 - r^2)$$

и

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \left[\frac{qr}{16D} (a^2 - r^2)\right]^2} dr \quad (1.16)$$

Интеграл в формуле (1.16) является эллиптическим и не выражается через элементарные функции. Учитывая, что второе слагаемое подкоренного выражения значительно меньше единицы, разложим подынтегральную функцию в ряд по биному Ньютона, ограничиваясь первыми тремя членами ряда. После этого получим

$$s = \int_0^a \left[ 1 + \frac{k^2}{2} r^2 (r^2 - a^2)^2 - \frac{1}{8} k^4 r^4 (r^2 - a^2)^4 \right] dr,$$

где

$$k = q/(16D).$$

После интегрирования и преобразований имеем

$$s = a + \frac{4}{105} k^2 a^7 - \frac{607}{6006} k^4 a^{13}. \quad (1.17)$$

Из формулы (1.11) при  $r = 0$  получим

$$\omega = \frac{qa^4}{64D},$$

откуда

$$k = q/16D = 4\omega/a^4.$$

С учетом этого значения  $k$  вместо выражения (1.17) находим

$$s = a + 0,610 (\omega^2/a) - 25,87 (\omega^4/a^3).$$

Или в обозначениях, принятых Е.П. Аржановым для формулы (1.14), получим

$$s = 0,5L + 1,219 (\Delta f^2/L) - 207,0 (\Delta f^4/L^3). \quad (1.18)$$

При  $L = 5$  мм и максимальной величине  $\Delta f = 0,04$  мм третий член формулы (1.18) не превышает 0,004 мкм, т.е. является пренебрегаемо малым и его можно не учитывать. Второе слагаемое при этих же значениях аргументов равно 0,4 мкм, т.е. также является величиной малой и в случае, если точность измерений не превышает 1 – 2 мкм, им можно пренебречь. Следовательно, можно считать

$$s = L/2,$$

а

$$\Delta = (r_0 \Delta f)/f, \quad (1.19)$$

т.е. формулу искажения изображения, вызванного выравниванием аэрофотопленки в плоскость прикладной рамки, можно считать точной, если точность измерений не выше 1 – 2 мкм. Если точность измерений будет порядка десятых долей микрона, то величиной второго слагаемого формулы (1.18) пренебрегать нельзя и величина искажения в этом случае должна определяться по формуле

$$\Delta = \frac{r_0 \Delta f}{f} - 1,22 \frac{\Delta f^2}{L} . \quad (1.20)$$

При выводе формулы (1.20) предполагалось, что кривая  $s$  после действия нагрузок не изменила своей величины. В действительности кроме огибания имеет место упругая и остаточная деформации. При этом упругая деформация стремится уменьшить величину  $s$  до размеров  $L/2$ , т.е. в реальных условиях второй член формулы (1.20) будет меньше приведенного. Следовательно, значение второго слагаемого формулы (1.20) будет уменьшено и максимальное его значение будет менее 0,4 мкм.

Искажение координат точек снимка из-за несовпадения аэрофотопленки с плоскостью прикладной рамки

$$\Delta x = \frac{r_0 \cos \varphi}{f} \Delta f - 1,22 \frac{\Delta f^2}{L} , \quad \Delta y = \frac{r_0 \sin \varphi}{f} \Delta f - 1,22 \frac{\Delta f^2}{L} .$$

Значение второго члена формулы (1.20) не зависит от направления линии, проходящей через точку, т.е. не зависит от  $\varphi$ .

Так как  $r_0 \cos \varphi = x$ ,  $r_0 \sin \varphi = y$ , то

$$\Delta x = \frac{x \Delta f}{f} - 1,22 \frac{\Delta f^2}{L} , \quad \Delta y = \frac{y \Delta f}{f} - 1,22 \frac{\Delta f^2}{L} . \quad (1.21)$$

Если пренебречь вторым слагаемым, то

$$\Delta x = (x \Delta f) / f; \quad \Delta y = (y \Delta f) / f. \quad (1.22)$$

Для определения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  нужно кроме  $x$ ,  $y$  и  $f$  знать величину  $\Delta f$ . Поэтому можно говорить только о средних и максимальных погрешностях координат, вносимых рассматриваемым фактором. Основываясь на результатах исследований отечественных и зарубежных ученых, Н.А. Соколова в работе [43] приходит к выводу, что максимальные величины отклонений аэрофильма от выравнивающей поверхности составляют 20 мкм, что, в свою очередь, может вызвать максимальные ошибки в абсциссах точек 20 мкм при  $f = 70$  мм и 14 мкм при  $f = 100$  мм.

Если предположить, что максимальные искажения абсцисс точек снимка равны максимальным искажениям разностей продольных параллаксов, то максимальные искажения высот составят 1:3500 от  $H$  при  $f = 70$  мм и 1:5000 от  $H$  при  $f = 100$  мм.

#### § 4. РЕФРАКЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В АТМОСФЕРЕ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК СНИМКА

При выводе формул фотограмметрии предполагается, что световой луч от объекта до центра проекции является прямой линией. В действительности луч света, проходя через слои атмосферы, имеющие различные

плотности, искривляется. Это искривление называется рефракцией.

Летательный аппарат, в котором находится приемник излучения, перемещаясь в атмосфере, создает вблизи себя поток обтекания, атмосферная среда в котором по своим оптическим характеристикам отличается от атмосферной среды в свободной атмосфере. Оптические лучи, проходя через поток обтекания, получают дополнительное искривление, называемое рефракцией в потоке обтекания. Затем оптические лучи проходят через иллюминатор и воздушную среду внутри летательного аппарата. Так как оптические характеристики иллюминатора и атмосферы внутри летательного аппарата отличаются от атмосферных условий в потоке обтекания, то возникает искривление и преломление оптических лучей в системе: поток обтекания — иллюминатор — атмосфера внутри летательного аппарата, называемое внутренней рефракцией.

Угол  $r_f$  с вершиной в центре проекции между касательной к траектории оптического луча и прямой, соединяющей центр проекции с точкой, от которой идет оптический луч, называется углом фотограмметрической рефракции. На рис. 7 угол фотограмметрической рефракции

$$r_f = \rho'' \frac{y}{D}, \quad (1.23)$$

где  $\rho'' = 206265''$ ;  $D$  — расстояние между точкой  $A$  и центром проекции  $S$ . Для определения величины  $y$  рассмотрим элементарный участок пути оптического луча  $B'B$ , для которого

$$dy = D_i \frac{dr_c}{\rho''}. \quad (1.24)$$

На границе элементарных слоев с коэффициентами преломления  $n$  и  $n + dn$ , используя известный из геометрической оптики закон преломления Снеллиуса

$$n_i \sin \varphi_i = (n_i + dn) \sin (\varphi_i + dr_c) = (n_i + dn) (\sin \varphi_i \cos dr_c + \cos \varphi_i \sin dr_c)$$

и полагая ввиду малости значения  $dr_c \cos dr_c = 1$ ,  $\sin dr_c = \frac{dr_c}{\rho''}$ , получим

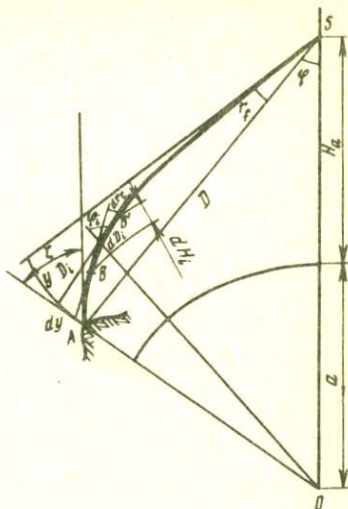


Рис. 7

$$dr_c = -\rho'' \frac{dn}{n_i} \operatorname{tg} \varphi_i = -\rho'' \cdot 10^{-6} \frac{dN}{n_i} \operatorname{tg} \varphi_i, \quad (1.25)$$

где индекс преломления

$$N = (n - 1) \cdot 10^6.$$

В свою очередь на рис. 7

$$dD_i = \sec \varphi_i dH,$$

откуда

$$D_i = \int_{H_g}^H \sec \varphi_i dH, \quad D = \int_{H_g}^{H_a} \sec \varphi_i dH. \quad (1.26)$$

Подставляя значение  $D_i$  из формулы (1.26) и  $dr_c$  из (1.25) в выражение (1.24), имеем

$$dy = -10^{-6} \left( \int_{H_g}^H \sec \varphi_i dH \right) \frac{\operatorname{tg} \varphi_i}{n_i} dN.$$

С учетом этого вместо формулы (1.23) получим строгую формулу угла фотограмметрической рефракции [5]

$$r_f = -\rho'' \cdot 10^{-6} \frac{N_a \left( \int_{H_g}^H \sec \varphi_i dH \right) (\operatorname{tg} \varphi_i / n_i) dN}{\int_{H_g}^{H_a} \sec \varphi_i dH}. \quad (1.27)$$

Формула (1.27) позволяет определять углы  $r_f$  в атмосфере с произвольными параметрами и газовым составом для любых высот и зенитных расстояний. Так как строгое интегрирование в формуле (1.27) невозможно, то задача может быть решена методом численного интегрирования, для чего в точках траектории оптического луча (узлах интегрирования) нужно иметь значения аргументов, входящих в формулу (1.27). При прочих равных условиях точность решения задачи повышается с увеличением количества узлов интегрирования.

Для общего случая, когда узлы интегрирования располагаются произвольно, для численного интегрирования можно использовать следующие формулы:

трапеций

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \frac{1}{2} [y_0 (x_1 - x_0) + y_1 (x_2 - x_0) + y_2 (x_3 - x_1) + \dots +$$

$$+ y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + y_n(x_n - x_{n-1})] \quad (1.28)$$

или парабол ( $n$  – четное)

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} (x_{2i} - x_{2i-2}) (A_i y_{2i-2} + B_i y_{2i-1} + C_i y_{2i}),$$

где

$$A_i = 2 - Q_i; B_i = 2 + Q + \frac{1}{Q}; C = 2 - \frac{1}{Q}; Q = \frac{x_{2i} - x_{2i-1}}{x_{2i-1} - x_{2i-2}};$$

$$A + B + C = 6. \quad (1.29)$$

В формулах (1.29)  $i = n/2$  – число пар интервалов между узлами интегрирования.

Для сферической модели атмосферы входящий в формулу (1.27) угол  $\varphi_i$  в текущей точке можно определить, используя выражение

$$\sin \varphi_i = \frac{(a + H_g)(1 + N_g \cdot 10^{-6}) \sin \zeta}{(a + H)(1 + N \cdot 10^{-6})} = \frac{(a + H_a)(1 + N_a \cdot 10^{-6}) \sin \varphi}{(a + H)(1 + N \cdot 10^{-6})}, \quad (1.30)$$

где  $H_g, N_g, \zeta; H_a, N_a, \varphi; H, N, \varphi_i$  – высота, индекс преломления и зенитное расстояние в начальной, конечной и текущей точках траектории оптического луча соответственно;  $a$  – радиус планеты.

При зенитных расстояниях  $\zeta \leq 70^\circ$  можно пренебречь кривизной поверхности с одинаковым коэффициентом преломления (изодиоптрических поверхностей) и с достаточной точностью считать, что  $\varphi_i = \zeta$ . С учетом этого для плоской модели атмосферы, полагая  $n \approx 1$ , вместо выражения (1.25) получим

$$dr_c = -\rho'' \cdot 10^{-6} \operatorname{tg} \zeta dN, \quad (1.31)$$

а вместо (1.26) –

$$D_i = H_i \sec \zeta, D = (H_a - H_g) \sec \zeta. \quad (1.32)$$

Тогда, учитывая формулы (1.31) и (1.32) и интегрируя по частям, вместо выражения (1.27) получаем

$$r_f = -\frac{\rho'' \cdot 10^{-6} \operatorname{tg} \zeta}{H_a - H_g} \frac{N_a}{N_g} \int_a^N H dN = \frac{\rho'' \cdot 10^{-6} \operatorname{tg} \zeta}{H_a - H_g} \left[ \int_{H_g}^{H_a} N dH - (H_a - H_g) N_a \right]. \quad (1.33)$$

Согласно основному уравнению статики атмосферы и гидросферы

$$-dp = g\rho dH,$$

где  $p, \rho$  – давление и плотность газовой среды. Учитывая, что

$$g = g_0 \frac{a^2}{(a + H)^2},$$

где  $g_0, g$  – ускорение силы тяжести в начальной точке ( $H = 0$ ) и на высоте  $H$ ;  $a$  – радиус Земли, получим

$$-dp = g_0 \rho \frac{a^2}{(a + H)^2} dH = g_0 \rho d\Phi, \quad (1.34)$$

где

$$d\Phi = \frac{a^2}{(a + H)^2} dH;$$

$\Phi = aH / (a + H)$  геопотенциальная высота, которой называется работа, необходимая для подъема единицы массы в поле силы тяжести от исходного уровня до данной точки.

На основании формулы Гладстона и Дала

$$N = C_\lambda \rho \cdot 10^{-6}, \quad (1.35)$$

где  $C_\lambda$  – коэффициент, зависящий от длины волны. Из формулы (1.35) для данной длины волны имеем

$$\frac{N}{\rho} = \frac{N_0}{\rho_0} = C_\lambda \cdot 10^{-6} = \text{const} \quad (1.36)$$

или, учитывая

$$\rho = p / (R_c T_v),$$

где  $R_c, T_v$  – удельная газовая постоянная смеси газов и виртуальная температура соответственно, получим

$$\frac{NT_v}{p} = \frac{N_0 T_{v0}}{p_0} = \frac{C_\lambda}{R_c} \cdot 10^{-6} = \text{const} = C_0, \quad (1.37)$$

откуда

$$N = \frac{N_0 T_{v0}}{p_0} \frac{p}{T_v} = C_0 \frac{p}{T_v}. \quad (1.38)$$

Подставляя вместо  $N$  и  $dH$  их значения из формул (1.36) и (1.34) в интеграл выражения (1.33), находим

$$\int_{H_g}^{H_a} NdH = - \frac{N_0}{g_0 \rho_0} \int_{p_g}^{p_a} \left( \frac{a + H}{a} \right)^2 dp \approx \frac{N_0}{g_0 \rho_0} (p_g - p_a) =$$

$$= \frac{N_0 T_{v0}}{p_0} \frac{R_c}{g_0} (p_g - p_a).$$

С учетом этого вместо формулы (1.33) имеем

$$r_f = C_0 \left[ \frac{R_c (p_g - p_a)}{g_0 (H_a - H_g)} - \frac{p_a}{T_a} \right] \operatorname{tg} \zeta, \quad (1.39)$$

где

$$C_0 = \rho'' \cdot 10^{-6} \frac{N_0 T_{v0}}{p_0}. \quad (1.40)$$

Формула (1.39) показывает, что при зенитных расстояниях до  $70^\circ$  угол фотограмметрической рефракции зависит от разности давлений в начальной и конечной точках траектории оптического луча и от давления и температуры в конечной точке траектории (вблизи центра проектирования). При этом предполагалось, что центр проектирования находится в условиях свободной атмосферы.

В случаях, когда оптический луч проходит последовательно через атмосферу, поток обтекания, иллюминатор и атмосферу кабины летательного аппарата, его траектория является более сложной (рис. 8). В этом случае в радианной мере

$$r_f = y/D, \quad (1.41)$$

где

$$y = y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = r_{f1} D_1 + r_{п} D_2 - r_{и} D_3 + r_{к} D_4. \quad (1.42)$$

В формуле (1.42)  $r_{f1}$  — угол фотограмметрической рефракции после прохождения оптического луча через атмосферу;  $r_{п}$  — рефракция оптического луча в потоке обтекания;  $r_{и}$  — изменение направления оптического луча после его прохождения через границу потока обтекания и иллюминатора;  $r_{к}$  — изменение направления оптического луча после прохождения через границу иллюминатор — кабина летательного аппарата.

Величина угла  $r_{f1}$  может быть определена по формуле (1.27) или (при  $\zeta \leq 70^\circ$ ) — по формуле (1.39). Рефракция оптического луча  $r_{п}$  в потоке обтекания зависит от распределения индекса преломления внутри потока обтекания, формы изодиоптрических поверхностей в потоке обтекания и положения оптического луча в этом потоке. В общем случае учет величины  $r_{п}$  является сложной задачей, требующей обширных исследований для данного типа летательного аппарата. В случаях, когда изодиоптрические поверхности в потоке обтекания являются плоскостями, параллельными плоскости иллюминатора, задача учета угла  $r_{п}$  значитель-

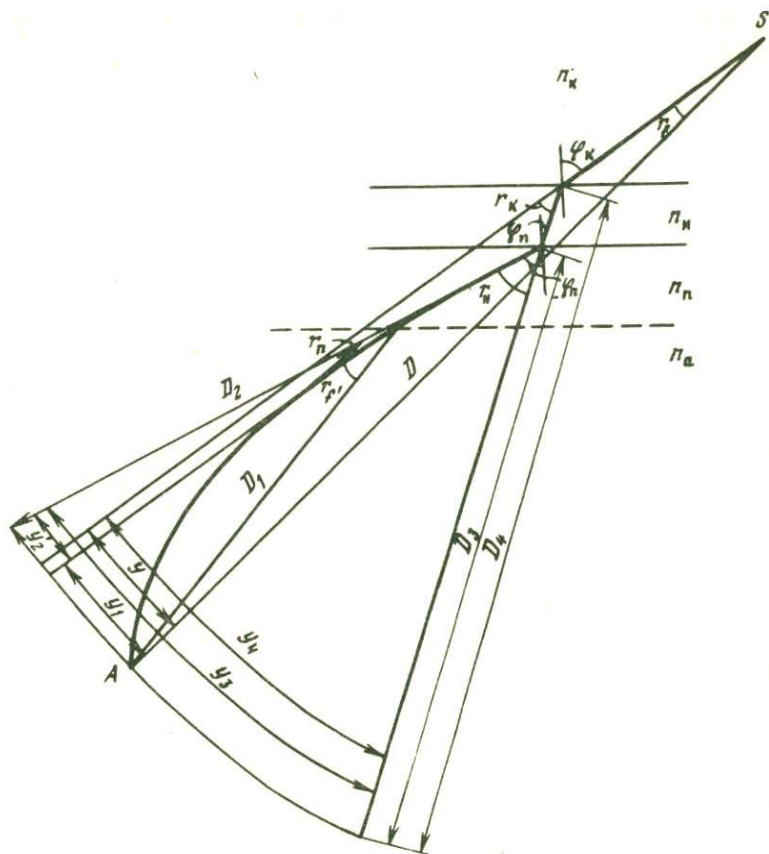


Рис. 8

но упрощается. В этом случае, используя закон преломления Снеллиуса, получим

$$n_a \sin \varphi_a = n_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi}, \quad (1.43)$$

откуда при известных  $n_a$ ,  $\varphi_a$ ,  $n_{\Pi}$  можно определить угол  $\varphi_{\Pi}$  и

$$r_{\Pi} = \varphi_{\Pi} - \varphi_a. \quad (1.44)$$

Аналогичным образом из выражения

$$n_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi} = n_{\text{и}} \sin \varphi_{\text{и}} \quad (1.45)$$

при известных значениях  $n_{\Pi}$ ,  $\varphi_{\Pi}$  и  $n_{\text{и}}$  можно определить  $\varphi_{\text{и}}$  и величину

$$r_{\text{и}} = \varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{и}} = -(\varphi_{\text{и}} - \varphi_{\text{п}}), \quad (1.46)$$

а из выражения

$$n_{\text{и}} \sin \varphi_{\text{и}} = n_{\text{к}} \sin \varphi_{\text{к}} \quad (1.47)$$

при известных значениях  $n_{\text{и}}$ ,  $\varphi_{\text{и}}$  и  $n_{\text{к}}$  — определить  $\varphi_{\text{к}}$  и

$$r_{\text{к}} = \varphi_{\text{к}} - \varphi_{\text{и}}. \quad (1.48)$$

В большинстве случаев, особенно при сравнительно больших высотах фотографирования, с достаточной для наших целей точностью можно принять

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D.$$

С учетом этого вместо выражения (1.41) с учетом формул (1.44), (1.46), (1.48) получим

$$r_f = r_{f1} + r_{\text{п}} - r_{\text{и}} + r_{\text{к}} = r_{f1} + \varphi_{\text{к}} - \varphi_{\text{а}} = r_{f1} - r_b. \quad (1.49)$$

Суммируя левые и правые части выражений (1.43), (1.45), (1.47), находим

$$n_{\text{а}} \sin \varphi_{\text{а}} = n_{\text{к}} \sin \varphi_{\text{к}}, \quad (1.50)$$

откуда при известных  $n_{\text{к}}$ ,  $\varphi_{\text{к}}$  и  $n_{\text{а}}$  можно определить  $\varphi_{\text{а}}$ .

Выражение (1.50) показывает, что в случаях, когда изодиоптрические поверхности в средах, через которые проходит оптический луч, являются плоскими и параллельными друг другу, траектория луча не зависит от оптических характеристик промежуточных сред (в данном случае потока обтекания и иллюминатора).

Учитывая

$$\varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{к}} + (\varphi_{\text{а}} - \varphi_{\text{к}}) = \varphi_{\text{к}} + r_b,$$

$$n_{\text{а}} = n_{\text{к}} - (n_{\text{к}} - n_{\text{а}}) = n_{\text{к}} - (N_{\text{к}} - N_{\text{а}}) \cdot 10^{-6},$$

получим

$$[n_{\text{к}} - (N_{\text{к}} - N_{\text{а}}) \cdot 10^{-6}] (\sin \varphi_{\text{к}} \cos r_b + \cos \varphi_{\text{к}} \sin r_b) = n_{\text{к}} \sin \varphi_{\text{к}}.$$

Так как угол  $r_b$  мал, то можно принять  $\cos r_b = 1$ , а  $\sin r_b = r_b$ . Тогда после небольших преобразований находим

$$r_b = \frac{(N_{\text{к}} - N_{\text{а}}) \cdot 10^{-6}}{n_{\text{а}}} \operatorname{tg} \varphi_{\text{к}} \approx (C_{\text{к}} \frac{p_{\text{к}}}{T_{\text{к}}} - C_0 \frac{p_{\text{а}}}{T_{\text{а}}}) \operatorname{tg} \varphi_{\text{к}}. \quad (1.51)$$

Подставляя значение  $r_b$  из формулы (1.51) и  $r_{f1}$  из (1.39) в выражение (1.49), имеем

$$r_f = \left[ C_0 \frac{R_c(p_g - p_a)}{g_0(H_a - H_g)} - C_{\kappa} \frac{p_{\kappa}}{T_{\kappa}} \right] \operatorname{tg} \zeta, \quad (1.52)$$

где

$$C_{\kappa} = \rho'' \frac{N_{0\kappa} T_0}{p_0} \cdot 10^{-6};$$

$N_{0\kappa}$  — индекс преломления газовой среды в кабине при давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ .

Формула (1.52) показывает, что когда изодиоптрические слои во всех средах, через которые проходит оптический луч, являются плоскими и параллельными друг другу, угол фотограмметрической рефракции зависит от газового состава атмосферы кабины, ее давления и температуры и от давления атмосферы у снимаемого предмета и вблизи потока обтекания летательного аппарата.

Индекс преломления в кабине, газовый состав атмосферы которой отличается от газового состава воздуха, можно определить по формуле

$$N_{0\kappa} = \sum_1^n N_i v_i,$$

где  $N_i$ ,  $v_i$  — индекс преломления компонента газовой среды и его долевое содержание по объему.

Если газовый состав атмосферы в кабине летательного аппарата не отличается от газового состава внешней атмосферы, то  $C_{\kappa} = C_0$ , а

$$r_f = C_0 \left[ \frac{R_c(p_g - p_a)}{g_0(H_a - H_g)} - \frac{p_{\kappa}}{T_{\kappa}} \right] \operatorname{tg} \zeta. \quad (1.53)$$

В случаях, когда атмосферные условия в кабине летательного аппарата соответствуют их значениям на земной поверхности, т.е.  $p_{\kappa} = p_g$ ,  $T_{\kappa} = T_g$ , то величина

$$r_f = -r_g, \quad (1.54)$$

где  $r_g$  — угол земной рефракции.

Поправки  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$  за фотограмметрическую рефракцию в координаты точек трансформированного снимка можно определить по формулам

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= - \frac{r_f^0 (x^{02} + y^{02} + f^2) x^0}{f^2 \rho''} = \frac{x^0}{y^0} \delta y^0; \\ \delta y^0 &= - \frac{r_f^0 (x^{02} + y^{02} + f^2) y^0}{f^2 \rho''} = \frac{y^0}{x^0} \delta x^0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

в которых  $x^0, y^0$  — координаты точки на трансформированном снимке;  $f$  — фокусное расстояние фотокамеры. Значение

$$r_f^0 = r_f \operatorname{ctg} \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между надирным и проектирующим лучами.

Поправки  $\delta x, \delta y$  за фотограмметрическую рефракцию в точки наклонного снимка определяют по формулам

$$\delta x = \frac{r_f^0 (x^2 + y^2 + f^2) (c_1 f + c_3 x)}{\rho'' f (c_1 x + c_2 y - c_3 f)};$$

$$\delta y = \frac{r_f^0 (x^2 + y^2 + f^2) (c_2 f + c_3 y)}{\rho'' f (c_1 x + c_2 y - c_3 f)},$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — направляющие косинусы, определяемые по формулам

$$c_1 = \sin \alpha \cos \kappa + \cos \alpha \sin \omega \sin \kappa;$$

$$c_2 = -\sin \alpha \sin \kappa + \cos \alpha \sin \omega \cos \kappa;$$

$$c_3 = \cos \alpha \cos \omega,$$

где  $\alpha, \omega$  — продольный и поперечный углы наклона снимка;  $\kappa$  — угол поворота снимка в своей плоскости.

При определении углов фотограмметрической рефракции для введения поправок в положение точек снимка формулам  $r_f$  имеет смысл придать более удобный для практического использования вид. В формулах (1.52), (1.53) для данной атмосферы и местности  $C_0, R_c, g_0, C_k$  можно считать постоянными. Для данного залета можно считать постоянными и величины  $H_a, p_a, T_a, p_k, T_k$ . Так как давление  $p_g$  зависит от высоты  $H_g$ , то целесообразно вместо двух переменных иметь одну —  $H_g$ .

С достаточной для многих практических целей точностью можно принять

$$p_g = p_0 - \frac{H_g - H_0}{\Delta p},$$

где  $p_0$  — давление в точке, имеющей высоту  $H_0$  и расположенной на аэродроме, ближайшей к участку съемки метеостанции или другом месте с известными давлением и высотой;  $\Delta p$  — барометрическая ступень. Для политропной атмосферы, в которой температура с высотой изменяется по линейному закону, барометрическая ступень может быть определена по формуле

$$\Delta p = (R_c T_c) / (g_0 p_c),$$

где  $T_c, p_c$  — средняя абсолютная температура и среднее давление из их значений в начальной и определяемой точках, имеющих высоты  $H_0$  и  $H_g$ .

В формуле (1.53) при  $\zeta \leq 70^\circ$  с достаточной для многих практических целей точностью можно считать  $\zeta \approx \varphi$ . С учетом этого получим

$$r_f^0 = C_0 \left[ \frac{R_c (p_g - p_a)}{g_0 (H_a - H_g)} - \frac{p_k}{T_k} \right]. \quad (1.56)$$

Подставляя в эту формулу вместо  $p_g$  его значение

$$p_g = p_0 - \frac{(H_g - H_0) g_0 p_c}{R_c T_c},$$

после преобразований находим

$$r_f^0 = C_0 \left[ \frac{R_c (p_0 - p_a)}{g_0 (H_a - H_0)} - \frac{p_k}{T_k} \right] + C_0 \left[ \frac{R_c (p_0 - p_a)}{g_0 (H_a - H_0)} - \frac{p_c}{T_c} \right] \frac{H_g - H_0}{H_a - H_0}. \quad (1.57)$$

Первое слагаемое формулы для данного залета можно считать величиной постоянной. Второе слагаемое зависит в основном от изменения высот точек  $H_g$ , т.е. от рельефа снимаемой местности.

Для атмосферного воздуха согласно ГОСТ 4401-81  $R_c = 287,05287 \text{ м}^2/\text{с}^2\text{К}$ . По решению XVI Генеральной ассамблеи МАС (Гренобль, 1976) ускорение силы тяжести вычисляется по формуле

$$g_0 = 978,0317521 (1 + 0,005302450462 \sin^2 B + 0,00000584972 \sin^2 2B + 0,00000003180 \sin^2 B \sin^2 2B),$$

где  $B$  — широта.

Индекс преломления можно определять по формуле

$$N = (77,541 + 0,43909\lambda^{-2} + 0,00367\lambda^{-4}) (1 - 0,133 \frac{e}{p}) \frac{p}{T},$$

где  $\lambda$  — длина волны оптического излучения в мкм;  $F$ ,  $e$  — давление и влажность в миллибарах;  $T$  — абсолютная температура в кельвинах.

Для атмосферного сухого воздуха при  $\lambda = 0,53$  мкм (зеленая часть спектра),  $T_{V_0} = 273,15 \text{ К}$ ,  $p = 1013,25 \text{ мбар}$ ,  $e = 0$  индекс преломления  $N = 293,61$ . По формуле (1.40) имеем  $C_0 = 16,3260 \text{ с. дуги} \cdot \text{К/мбар}$ . Для  $B = 58^\circ$ , примерно соответствующей средней широте территории нашей страны, получим  $g_0 = 9,81766063 \text{ м/с}^2$ . С учетом этих значений находим

$$r_f^0 = \left( 477,346 \frac{p_0 - p_a}{H_a - H_0} - 16,3260 \frac{p_k}{T_k} \right) + \left( 477,346 \frac{p_0 - p_a}{H_a - H_0} - 16,3260 \frac{p_c}{T_c} \right) \frac{H_g - H_0}{H_a - H_0}, \quad (1.58)$$

где  $p_0$ ,  $p_a$ ,  $p_k$  — в мбарах,  $T_k$ ,  $T_c$  — в кельвинах,  $H_a$ ,  $H_g$ ,  $H_0$  — в метрах.

Для определения погрешностей формулы (1.57) по сравнению с (1.53) по этим формулам были вычислены углы  $r_f^0$  для параметров, принятых при получении формулы (1.58), и значений  $p$ , принятых в стандартной атмосфере для высот  $H_a = 5, 10, 16, 100$  км. Сравнение полученных значений показало, что разности не превышают  $0,07''$ , т.е. являются небольшими. Следовательно, с достаточной для многих практических целей точностью значения  $r_f^0$  можно вычислять по формуле (1.57), в которой, как отмечалось ранее, первое слагаемое можно считать постоянным для данного залета, а второе слагаемое является функцией только одного переменного  $H_g$  — высоты точки земной поверхности, в изображение которой вводится поправка за фотограмметрическую рефракцию.

Рассмотрим определение  $r_f^0, \delta x^0, \delta y^0$  на примере. Положим, что снимаемая местность имеет минимальную и максимальную отметки  $H_{g \min} = 47,15$  м,  $H_{g \max} = 517,18$  м. На метеостанции, расположенной примерно в центре участка залета и имеющей высоту  $H_0 = 110,18$  м и широту  $B = 58^\circ$ , в 6, 9 и 12 ч измерены: давление  $p_6 = 915,3, p_9 = 914,5, p_{12} = 913,8$  мбар (индекс соответствует времени измерения); температура  $t_6 = 14,3, t_9 = 16,2, t_{12} = 21,3$  °C; влажность  $e_6 = 5,7, e_9 = 6,8, e_{12} = 9,4$  мбар. Начало залета 6 ч 30 мин, окончание 9 ч 45 мин. За бортом самолета давление  $p_a = 546,8$  мбар. Абсолютная высота фотографирования  $H_a = 5100$  м. Газовый состав атмосферы в кабине самолета и за бортом одинаков. Температура  $t_k = +20,4$  °C, давление  $p_k = 1010,1$  мбар,  $e_k = 9,1$  мбар в кабине во время залета сохранялись постоянными. Снимаемая местность покрыта растительностью и имеет в основном зеленый цвет. Фотографирование выполнялось камерой, фокусное расстояние которой  $f = 100$  мм.

Так как газовый состав атмосферы в кабине и за бортом самолета одинаков, а  $\lambda$  и  $g_0$  в рассматриваемом примере соответствуют их значениям в формуле (1.58), то вычисления можно выполнять по этой формуле.

Интерполируя данные метеостанции, имеем:

для 6 ч 30 мин (начало залета)  $p_{он} = 915,2$  мбар,  $t_{он} = 14,6$  °C,  $e_{он} = 5,9$  мбар;

для 9 ч 45 мин (конец залета)  $p_{ок} = 914,3$  мбар,  $t_{ок} = 17,5$  °C,  $e_{ок} = 7,4$  мбар.

Для учета влажности воздуха в формулу (1.58) вместо  $T_k$  и  $T_c$  необходимо подставить соответствующие виртуальные температуры, определяемые по формуле

$$T_V = T \left( 1 + 0,138 \frac{e}{p} \right).$$

Подсчитанная по этой формуле виртуальная температура в кабине самолета  $T_{V_k} = 293,91$  К.

Полагая, что средние атмосферные условия на участке залета соответствуют атмосферным условиям на метеостанции, получим  $p_{сн} = p_{он}, p_{ск} = p_{ок}, t_{сн} = t_{он}, t_{ск} = t_{ок}, T_{V_{сн}} = 288,01$  К,  $T_{V_{ск}} = 290,97$  К. Подставляя эти значения в формулу (1.58), имеем:

для начала залета  $r_f^0 = -21,30566'' - 0,0033794 (H_g - H_0)$ ;

для конца залета  $r_f^0 = -21,39069'' - 0,0032818 (H_g - H_0)$ .

Используя полученные формулы и формулы (1.55), вычислим значения  $r_f^0$ ,  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$  для атмосферных условий в начале и конце залета для точек участка с минимальной и максимальной отметками при  $x^0 = y^0 = 80$  мм,  $f = 100$  мм. Для точки с минимальной отметкой  $H_{g \min} = 47,15$  м имеем:

для начала залета  $r_{fH}^0 = -21,09''$ ,  $\delta x_H^0 = \delta y_H^0 = 18,65$  мкм;

для конца залета  $r_{fK}^0 = -21,18''$ ,  $\delta x_K^0 = \delta y_K^0 = 18,73$  мкм.

Для точки участка с максимальной отметкой  $H_{g \max} = 517,18$  м имеем:

для начала залета  $r_{fH}^0 = -22,68''$ ,  $\delta x_H^0 = \delta y_H^0 = 20,06$  мкм;

для конца залета  $r_{fK}^0 = -22,73''$ ,  $\delta x_K^0 = \delta y_K^0 = 20,10$  мкм.

Для других точек участка залета значения  $r_f^0$ ,  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$  будут находиться между вычисленными для точек с минимальной и максимальной отметками.

Анализ полученных значений показывает, что  $r_f^0$ ,  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$  для начала и конца залета отличаются менее чем на  $0,1''$  и  $0,1$  мкм соответственно, поэтому, если параметры аэрофотосъемки и характер изменения метеорологических условий в течение залета примерно соответствует приведенному в примере, то с достаточной точностью можно принять давление, температуру и влажность в течение всего залета постоянными и равными их средним значениям.

Изменения  $r_f^0$  и  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$  в зависимости от рельефа снимаемой местности в рассматриваемом примере равны в среднем  $1,6''$  и  $1,4$  мкм соответственно при превышении между точками  $470,0$  м. Так как изменения  $r_f^0$ ,  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$  в зависимости от рельефа являются сравнительно небольшими и носят случайный характер, то при аэрофотосъемке равнинных и всхолмленных участков местности с достаточной для многих практических целей точностью можно принять  $r_f^0$  равным его значению, полученному для средних значений характеристики атмосферы и рельефа местности.

## § 5. РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СНИМКА

Разрешающая способность снимка  $K_0$  зависит от разрешающей способности эмульсионного слоя  $N$  и разрешающей силы объектива фотокамеры  $R$ . Эта зависимость выражается формулой

$$1/R_0 = 1/R - 1/N. \quad (1.59)$$

Разрешающая способность характеризуется предельным числом темных линий, передаваемых на  $1$  мм. Для определения разрешающей способности снимка фотографируют в полевых или лабораторных условиях штриховые и радиальные тест-объекты или миры, состоящие из черных и белых полос.

Для определения разрешающей способности в условиях реальной съемки миры создают непосредственно на местности, например из белых

и черных полотнищ. В лабораторных условиях для определения разрешающей способности миры помещают в коллиматор, имитирующий практическую бесконечность.

Из-за сравнительно больших габаритов штриховых мир их использование в коллиматорах затруднительно. Разрешающую способность при помощи радиальной миры определяют по формуле

$$R = n / (\pi d), \quad (1.60)$$

где  $n$  — число штрихов радиальной миры;

$\bar{d}$  — диаметр кружка нерезкости в центре изображения миры.

Величина разрешающей способности изменяется в зависимости от контраста миры, условий фотографирования, способа обработки фотоматериала, субъективного характера визуальной оценки качества изображения, поэтому определяется с невысокой точностью.

В последнее время находят применение другие способы оценки изображительных свойств системы объектив — пленка. Один из них основан на фотографировании границы между черными и белыми объектами, например лезвие бритвы на белом фоне. По крутизне пограничной кривой, показывающей распределение световой энергии на границе темной и светлой полос, оценивают качество системы [4].

Другим критерием оценки системы объектив плюс эмульсионный слой является частотно-контрастная характеристика — ЧКХ, показывающая зависимость между частотой штрихов  $N$  и контрастом их изображения  $K$ . Для определения ЧКХ используют миры с синусоидальным распределением плотности и специальные оптические скамьи. Графики ЧКХ для различных участков углов поля зрения  $\beta$  приведены на рис. 9 [5]. По этим графикам можно определить и разрешающую способность, как предельное значение частоты, при которой еще различаются отдельные штрихи.

Несмотря на довольно широкое использование понятия ЧКХ и других характеристик в научной литературе, общепринятой методики их определения еще нет [4].

## § 6. УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ АЭРОФИЛЬМА

Ошибки, вызываемые деформацией аэрофильма, оказывают существенное влияние на точность фотограмметрических построений. Деформация бывает равномерная, разностная (разность между продольной и поперечной деформациями) и случайная. На основе исследований различных авторов в работе [43] сделано заключение о том, что деформация аэрофильмов на нитроцеллюлозной основе очень велика, в том числе велика и разностная деформация даже при сравнительно небольших сроках хранения аэрофильмов. После трех лет хранения аэрофильмов деформа-

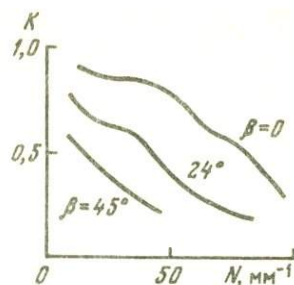


Рис. 9

ции достигли весьма ощутимых величин: 0,4 — 0,6 % и разностная 0,19 % (т.е. 0,7—1,1 и 0,34 мм соответственно при формате кадра 180x180 мм).

Аэрофильмы на триацетатной основе имеют деформацию несколько меньшую, чем на нитроцеллюлозной (по данным В.К. Орлова, продольная деформация от  $-0,039$  для  $-0,232$  %, поперечная от  $-0,063$  до  $-0,216$  %, максимальное значение разностной деформации 0,038 %). Существенным недостатком триацетатной основы аэрофильмов является изменение размеров при изменении влажности окружающего воздуха [43].

Аэрофильмы на пластиках типа "эстар" или "кронар" меньше деформируются во времени и менее чувствительны к изменениям влажности и температуры, чем на триацетатной основе. Для лавсановой основы продольная деформация равна 0,020 %, поперечная 0,032 %, разностная 0,012 % [41]. На основании анализа работ отечественных и зарубежных авторов в работе [43] сделан вывод о том, что так называемые недеформирующиеся аэрофильмы подвержены значительным систематическим деформациям. Величины этих деформаций в некоторых случаях получаются не меньшими, чем для пленок на триацетатной основе. Однако деформация во времени у этих аэрофильмов незначительная. Несколько большие изменения вызывает колебание влажности. На основе исследования и анализа большого числа работ [43] отмечается, что случайную деформацию пленки как на триацетатной, так и на полиэстровой основе в среднем можно считать равной 8—10 мкм [43].

Учет деформации аэрофильма в аналитических способах обработки снимков выполняется с помощью меток, впечатанных в момент экспозиции. Если метки имеются только по периметру снимка, то исправленные за деформацию аэрофильма координаты  $x'$ ,  $y'$  определяются по формулам [5, 27, 28]

$$\begin{aligned} x' &= x + a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + gxy^2 + hx^2y; \\ y' &= y + a' + b'x + c'y + d'xy + e'y^2 + f'xy^2 + h'x^2y, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где  $x, y$  — измеренные координаты точки на снимке;  $a, b, \dots, h$  и  $a', b', \dots, h'$  — коэффициенты, характеризующие деформацию снимка.

Для определения коэффициентов необходимо составить уравнения (1.61) для восьми и более точек. Если число точек больше восьми, то значения коэффициентов определяют, используя метод наименьших квадратов.

Если метки размещены равномерно по всему снимку и являются изображениями перекрестий контрольной сетки, координаты  $x, y$  которых известны из материалов калибровки аэрофотоаппарата, то исправленные за деформацию координаты  $x', y'$  определяются по формулам

$$x' = x + \Delta x; \quad y' = y + \Delta y, \quad (1.62)$$

где  $\Delta x, \Delta y$  — приращения координат точки относительно ближайшего перекрестия.

## § 7. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ МНОГОСРЕДНОСТИ И КЛИНОВИДНОСТИ СВЕТОФИЛЬТРА НА ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК СНИМКА

Известно, что оптические лучи, строящие фотоизображение, проходят расстояние от объекта до светочувствительного слоя через среды, имеющие различные оптические характеристики. Нередко оптическая характеристика изменяется внутри каждой среды. Отмеченные факторы существенно влияют на фотограмметрическое качество фотоизображения. Для получения высокоточных результатов при фотограмметрической обработке снимков необходимо тщательно учитывать влияние внешних и других сред на положение точек снимка.

Для решения этой задачи в общем случае, когда границы сред располагаются произвольно, для определения поправок  $\delta x$  и  $\delta y$  в координаты точек горизонтального снимка получены формулы

$$\delta x = \sum_1^n \delta x_i, \quad \delta y = \sum_1^n \delta y_i, \quad (1.63)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= - \frac{h (x_i + f \operatorname{tg} k_x)}{HF}; \\ \delta y_i &= - \frac{h (y_i + f \operatorname{tg} k_y)}{HF}, \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

где  $x_i, y_i$  — координаты точки на горизонтальном снимке;  $f$  — фокусное расстояние фотокамеры;  $h$  — высота границы сред в точке преломления проектирующего луча;  $H$  — высота фотографирования относительно горизонтальной плоскости, проходящей через данную точку;  $k_x, k_y$  — составляющие углы наклона границы сред (угол  $k$ ) в плоскостях, параллельных плоскостям  $XOZ$  и  $YOZ$  пространственной системы координат  $XYZ$  горизонтального снимка.

Входящая в формулы (1.64) величина  $F$  определяется по формуле

$$F = 1 + \frac{f}{\sqrt{\frac{(n_2^2 - n_1^2) d^2}{n_1^2 k_2} + \frac{k_1^2}{k_2^2} - \frac{k_1}{k_2}}}, \quad (1.65)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f - x_i \operatorname{tg} k_x - y_i \operatorname{tg} k_y; \\ k_2 &= 1 + \operatorname{tg}^2 k_x + \operatorname{tg}^2 k_y = \sec^2 k; \\ d &= \sqrt{x^2 + y^2 + f^2}; \end{aligned} \quad (1.66)$$

$n_1, n_2$  — коэффициенты преломления первой и второй сред, на границах

которых происходит преломление (первая среда ближе к центру проектирования  $S$ ).

Поправки следует вычислять в определенном порядке сначала поправки  $\delta x_1, \delta y_1$  за преломление луча на ближайшей к центру проектирования  $S$  границе; введя полученные поправки  $\delta x_1, \delta y_1$  в координаты изображения точки, определять поправки  $\delta x_2, \delta y_2$  вследствие преломления на второй от точки  $S$  границе, причем вместо  $x_1, y_1$  в формулы (1.64)–(1.66) нужно подставить  $x_1' = x_1 + \delta x_1, y_1' = y_1 + \delta y_1$ ; затем вычислять  $\delta x_3, \delta y_3$ , подставляя  $x_1'' = x_1' + \delta x_2, y_1'' = y_1' + \delta y_2$  и т.д.

Формулы (1.63)–(1.66) строгие и их можно использовать для высокоточного определения поправок за преломление лучей на границах сред с различными коэффициентами преломления, причем границы сред в пространстве могут располагаться произвольно. Эти формулы можно использовать для определения поправок в координаты точек горизонтальных снимков, полученных из герметизированных носителей, находящихся на самых различных высотах в атмосфере, в космическом пространстве, в водной и других прозрачных средах.

Если граница преломляющих сред горизонтальна, то в формулах (1.66)  $k_x = k_y = 0, k_1 = f, k_2 = 1$ ; в формуле (1.65)

$$F = \frac{\sqrt{n_2^2 d^2 - n_1^2 r^2}}{\sqrt{n_2^2 d^2 - n_1^2 r^2} - n_1 f}, \quad (1.67)$$

а вместо (1.64) получим

$$\begin{aligned} \delta x_i &= -\frac{h x_i}{H} \left( 1 - \frac{n_1 f}{\sqrt{n_2^2 d^2 - n_1^2 r^2}} \right); \\ \delta y_i &= -\frac{h y_i}{H} \left( 1 - \frac{n_1 f}{\sqrt{n_2^2 d^2 - n_1^2 r^2}} \right), \end{aligned} \quad (1.68)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Из выражений (1.68) легко получить формулу [47]

$$\delta r = \sqrt{\delta x_i^2 + \delta y_i^2} = \frac{h}{H} \left( r - \frac{n_1 f}{n_2 \sqrt{(n_2^2 - n_1^2) / n_2^2 - f^2 / r^2}} \right). \quad (1.69)$$

Если границы сред незначительно отклоняются от плоскости, параллельной плоскости снимка, то целесообразно использовать более простые, но достаточно точные формулы, которые можно получить из строгих формул (1.64)–(1.66). Рассмотрим случай, когда проектирующий луч проходит через иллюминатор или светофильтр, плоскости которых имеют

небольшие углы наклона относительно плоскости снимка. Для первой границы после подстановки в формулы (1.64)–(1.66)  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n$ ,  $k_2 \approx 1$ ,  $h \approx H$ , преобразований и отбрасывания малых по своему значению членов и индекса  $i$  при  $x$ ,  $y$  получим

$$\begin{aligned} \delta x_i &= -x + \frac{fx}{\sqrt{n^2 d^2 - r^2}} + \left( \frac{f}{\sqrt{n^2 d^2 - r^2}} - 1 \right) x \\ &\times \left[ f \operatorname{tg} k_{x_1} + \frac{fx(x \operatorname{tg} k_{x_1} + y \operatorname{tg} k_{y_1})}{n^2 d^2 - r^2} \right]; \\ \delta y_i &= -y + \frac{fy}{\sqrt{n^2 d^2 - r^2}} + \left( \frac{f}{\sqrt{n^2 d^2 - r^2}} - 1 \right) x \\ &\times \left[ f \operatorname{tg} k_{y_1} + \frac{fy(x \operatorname{tg} k_{x_1} + y \operatorname{tg} k_{y_1})}{n^2 d^2 - r^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Выполнив аналогичные действия для второй границы и подставив в формулы (1.64)–(1.66) вместо  $x$  и  $y$  значения  $x' = x + \delta x_1$  и  $y' = y + \delta y_1$ ,  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  определяются по формулам (1.70), найдем

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= -\delta x_1 + \left( \frac{\sqrt{n^2 d^2 - r^2}}{f} - 1 \right) \frac{(f^2 + x^2)(\operatorname{tg} k_{x_2} - \operatorname{tg} k_{x_1}) +}{f} \\ &\quad + \frac{xy(\operatorname{tg} k_{y_2} - \operatorname{tg} k_{y_1})}{f}; \\ \delta y_2 &= -\delta y_1 + \left( \frac{\sqrt{n^2 d^2 - r^2}}{f} - 1 \right) \frac{(f^2 + y^2)(\operatorname{tg} k_{y_2} - \operatorname{tg} k_{y_1}) +}{f} \\ &\quad + \frac{xy(\operatorname{tg} k_{x_2} - \operatorname{tg} k_{x_1})}{f}. \end{aligned} \right\} (1.71)$$

С учетом равенств (1.70), (1.71), принимая во внимание, что углы  $k_{x_1}$ ,  $k_{x_2}$ ,  $k_{y_1}$  и  $k_{y_2}$  небольшие, можно считать

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} k_{x_2} - \operatorname{tg} k_{x_1} &\approx k_{x_2} - k_{x_1} = k_x; \\ \operatorname{tg} k_{y_2} - \operatorname{tg} k_{y_1} &\approx k_{y_2} - k_{y_1} = k_y; \\ k_x &\approx \sin \alpha \cos \theta; \\ k_y &\approx -\sin \alpha \sin \theta, \end{aligned} \right\} (1.72)$$

где  $\alpha$  – угол наклона;  $\theta$  – угол между осью абсцисс горизонтального

снимка и следом нормального сечения клина, получим формулы\*

$$\left. \begin{aligned} \Delta x = -\delta x = -(\delta x_1 + \delta x_2) &= \sin \alpha \left[ \frac{\sqrt{n^2(f^2 + x^2 + y^2) - x^2 - y^2}}{f} - \right. \\ - 1 \left. \right] \frac{f^2 \cos \theta + x^2 \cos \theta - xy \sin \theta}{f}; \\ \Delta y = -\delta y = -(\delta y_1 + \delta y_2) &= -\sin \alpha \left[ \frac{\sqrt{n^2(f^2 + x^2 + y^2) - x^2 - y^2}}{f} - \right. \\ - 1 \left. \right] \frac{xy \cos \theta - y^2 \sin \theta - f^2 \sin \theta}{f}. \end{aligned} \right\} (1.73)$$

Формулы (1.63)–(1.66) можно использовать для учета влияния многосредности при произвольном расположении границ между средами и как исходные для получения формул, решающих частные задачи.

## ГЛАВА 2

### СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. АНАЛИЗ СНИМКА

#### § 8. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЗУЕМЫЕ В ГЕОДЕЗИИ И ФОТОГРАММЕТРИИ

В геодезии используют различные системы координат: прямоугольную пространственную  $X, Y, Z$  с началом координат в центре референц-эллипсоида; геодезическую, состоящую из геодезической широты  $B$ , геодезической долготы  $L$  и геодезической высоты  $H$ ; плоские прямоугольные в проекции Гаусса – Крюгера и др. В практике топографо-геодезических работ чаще других используется система плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса – Крюгера, поэтому рассмотрим ее подробнее. В конформной проекции Гаусса – Крюгера изображение поверхности эллипсоида на плоскости выполняется без искажений углов с сохранением подобия между малыми фигурами на эллипсоиде и их изображениями на плоскости. В этой проекции осевой (средний) меридиан и экватор, принятые за оси координат, изображаются прямыми линиями, а все другие меридианы и параллели – кривыми.

В пределах небольшого участка в этой проекции масштаб является одинаковым по всем направлениям и приближенно равен [36]

\*М.Д. Кошкин. Об ошибках, вызываемых клиновидностью светофильтров. – Геодезия и картография, 1962, № 10, с. 21–28.

$$m = \frac{d\sigma}{ds} = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \frac{y^6}{720R^6}, \quad (2.1)$$

где  $ds$  – длина малого отрезка на эллипсоиде;  $d\sigma$  – его изображение на плоскости;  $y$  – ордината средней точки этого отрезка;  $R$  – средний радиус кривизны эллипсоида в средней точке отрезка.

При удалении от осевого меридиана до 1000 км между длиной геодезической линии  $s$  и длиной хорды  $d$ , соединяющей конечные точки изображения геодезической линии на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера, существует зависимость

$$\left. \begin{aligned} d &= s \left( 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} + \frac{y_m^6}{720R_m^6} \right); \\ s &= d \left( 1 - \frac{y_m^2}{2R_m^2} - \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{5y_m^4}{24R_m^4} - \frac{61y_m^6}{720R_m^6} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

При обработке триангуляции 1 класса формулы (2.2) используются без последних слагаемых в круглых скобках, т.е. слагаемых в шестой степени. При  $s \approx d = 25$  км,  $y_m = 270$  км,  $R_m = 6400$  км слагаемые в четвертой степени равны 3,3 и 16,5 мм для первой и второй формул соответственно, что составляет 1/7600000 и 1/1500000 величины  $d$  или  $s$ . Поэтому при обработке триангуляции 2 класса эти слагаемые не учитываются. В сетях ниже 2 класса в выражениях в круглых скобках достаточно учитывать два первых слагаемых. Для определения  $d$  и  $s$  с точностью 1–2 мм координаты  $y_m$  следует определять с точностью 5–10 м, а расстояние  $s$  с точностью 1–2 м.

Поправки за кривизну изображения геодезической линии на плоскости в проекции Гаусса–Крюгера (редукция направлений) определяются по формуле

$$\delta_{12} = -\frac{\Delta x}{2R_m^2} \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} \right) + \frac{y_m \Delta x}{24R_m^4} (4y_m^2 - \Delta x^2) - \frac{e'^2 \sin 2B_m}{24R_m^3} \times \\ \times [(12y_m^2 - \Delta x^2)\Delta y + (4y_m - \Delta y)(\Delta x^2 - \Delta y^2)]. \quad (2.3)$$

При обработке триангуляции 1 класса используют формулу

$$\delta_{12} = -f \Delta x \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) - \rho'' \frac{e'^2 \sin 2B_m}{2R_m^3} y_m^2 \Delta y, \quad (2.4)$$

где

$$f = \frac{\rho''}{2R_m^2}, \quad \Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1.$$

Формула (2.4) при  $s \leq 70$  км,  $y_m = 350$  км позволяет определять  $\delta_{12}$  с точностью порядка 0,001".

В триангуляции 2 класса при длинах сторон менее 20 км в формуле (2.4) можно ограничиться только первыми двумя членами. Тогда

$$\delta_{12} = -f(x_2 - x_1) \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} \right) = -\frac{f}{3} (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2). \quad (2.5)$$

В триангуляции низших классов применяют более простую формулу

$$\delta_{12} = -\delta_{21} = -f(x_2 - x_1)y_m = -0,00253(x_2 - x_1)y_m,$$

где  $\delta_{12}, \delta_{21}$  — в секундах дуги;  $x_1, x_2$  и  $y_m$  — в километрах.

Для вычисления редукций по приведенным выше формулам должны быть известны плоские координаты начального и конечного пунктов: в триангуляции 1 класса с точностью до 1 м, в триангуляции 2 класса — до 10 м и в низших классах триангуляции — до 0,1 км [36].

Чтобы величина  $\Delta s$  не превышала графическую точность топографических карт, ограничивают ширину изображаемой полосы по обе стороны от осевого меридиана, разделяя поверхность эллипсоида по меридианам на шести- и трехградусные зоны. Искажения  $\Delta s$  на краях шестиградусной зоны в пределах территории СССР достигают величины порядка 1:1100, а на краях трехградусной — 1:4400.

Счет зон ведется от гринвичского меридиана к востоку. Гринвичский меридиан является западной границей первой и восточной границей — последней (шестидесятой) шестиградусных зон. В шестиградусной зоне средний (осевой) меридиан принимается за ось абсцисс, а изображение экватора — за ось ординат. Счет абсцисс ведется от экватора к северу со знаком плюс, а к югу — со знаком минус. Для удобства практического использования проекции Гаусса—Крюгера ко всем ординатам прибавляют 500000 м, а перед ординатой ставят номер зоны. С учетом этого условно принимают  $\bar{y} = (1000000N + 500000 + y)$  м. Например, если точка находится в восьмой координатной зоне ( $N = 8$ ) и имеет ординату  $y = -55451,54$  м, то  $\bar{y} = 8444548,46$ .

В "Основных положениях по содержанию топографических карт масштаба 1:25000, 1:50000, 1:100000, 1:200000, 1:500000, 1:1000000" предусмотрены перекрытия координатных зон к востоку и к западу от гринвичского меридиана на 1° до широты 28°, на 2° для широт 28—76° и 3° — для широт более 76°.

При выполнении съемок в масштабах 1:5000, 1:2000 и крупнее применяют трехградусные зоны, осевыми меридианами которых являются осевые и граничные меридианы шестиградусных зон.

Для определения точки в пространстве кроме планового положения необходимо знать ее высоту. Наиболее частое применение имеют нормальные и геодезические высоты. Нормальные высоты  $H^N$  определяются относительно поверхности квазигеоида, а геодезические высоты  $H$  — относительно поверхности референц-эллипсоида. Эти высоты связаны между собой выражением

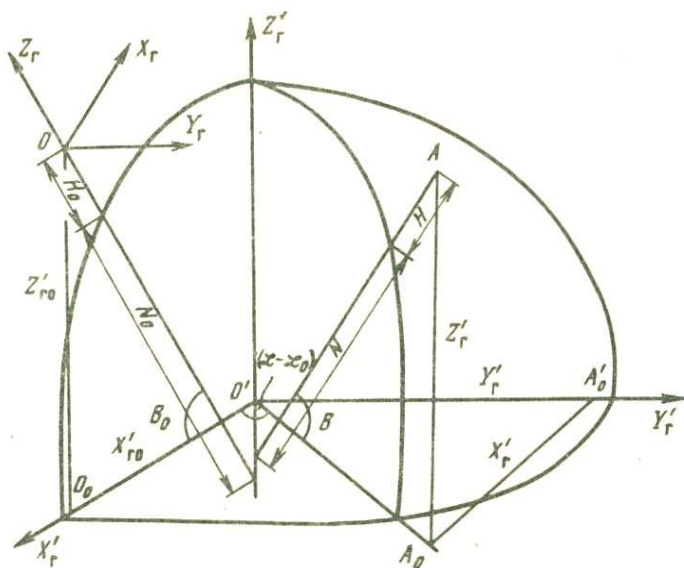


Рис. 10

$$H = H^{\gamma} + \zeta, \quad (2.6)$$

где  $\zeta$  — высота квазигеоида относительно поверхности референц-эллипсоида.

В фотограмметрии положение точек объекта определяют в пространственной прямоугольной системе координат  $XYZ$ . Это система координат правая, ее обычно устанавливают в пространстве так, чтобы математическая зависимость между координатами точек на местности и снимке имела наиболее простой вид. Начало координат может быть произвольным, в частных случаях оно может совпадать с точкой с известными координатами или с центром проектирования.

Для решения фотограмметрических задач на больших территориях используют прямоугольную геоцентрическую систему координат  $O'X'_{\Gamma}Y'_{\Gamma}Z'_{\Gamma}$  (рис. 10) с началом координат  $O'$  в центре эллипсоида, ось  $Z'_{\Gamma}$  в этой системе совпадает с малой осью эллипсоида, ось  $X'_{\Gamma}$  находится в плоскости начального меридиана, а ось  $Y'_{\Gamma}$  дополняет систему до правой.

Для определения положения точки на снимке применяют плоскую прямоугольную систему координат  $o'xu$  (см. рис. 5). Начало координат находится в пересечении линий, соединяющих противоположные координатные метки, ось  $x$  совпадает с линией 1–2, ось  $y$  проходит через  $o'$  перпендикулярно к оси  $x$ . Часто начало координат на снимке совмещают с точкой, координаты которой равны среднему значению координат меток 1–4.

§ 9. ПЕРЕХОД ОТ КООРДИНАТ В ПРОЕКЦИИ  
ГАУССА—КРЮГЕРА К ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ  
КООРДИНАТ И ОБРАТНО ЧЕРЕЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ  
КООРДИНАТЫ

В фотограмметрии принято определять положение точек в прямоугольной пространственной системе координат. В геодезии положение точек определяется плоскими прямоугольными координатами в конформной проекции Гаусса—Крюгера и нормальными высотами относительно нуля Кронштадского футштока (Балтийская система). Поэтому возникает задача перехода от фотограмметрической системы координат к геодезической.

При внешнем ориентировании сетей значительной протяженности или построенных по мелкомасштабным снимкам в работе [26] рекомендуется выполнять обработку в пространственной геоцентрической системе координат. Переход от системы координат в проекции Гаусса—Крюгера к пространственной геоцентрической выполняется через геодезическую систему координат по формулам, приведенным в работах [32, 25]. Геоцентрическую систему координат для решения фотограмметрических задач использовать неудобно, так как исследуемые объекты обычно находятся на земной поверхности и поэтому целесообразно использовать топцентрическую систему координат.

При высокоточном решении этого вопроса можно воспользоваться следующими соображениями. В пространственной прямоугольной системе координат с началом в центре эллипсоида, осью  $O'Z'_r$ , совпадающей с малой осью эллипсоида, осью  $O'X'_r$ , расположенной в плоскости меридианного эллипса, проходящего через точку, принятую за начальную, и осью  $O'Y'_r$ , дополняющей систему до правой (см. рис. 10), прямоугольные координаты  $X'_r Y'_r Z'_r$  связаны с геодезическими координатами  $B, (L - L_0), H$  известными формулами

$$\left. \begin{aligned} X'_r &= (N + H) \cos B \cos (L - L_0); \\ Y'_r &= (N + H) \cos B \sin (L - L_0); \\ Z'_r &= [N(1 - e^2) + H] \sin B, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где

$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$  — радиус кривизны первого вертикала;  $a$  — большая полуось эллипсоида;  $e$  — эксцентриситет меридианного эллипса;  $H$  — геодезическая высота точки;  $B, L$  — геодезические широта и долгота точки;  $L_0$  — геодезическая долгота меридиана, расположенного в координатной плоскости  $O'X'_r Z'_r$ .

Для точек, имеющих  $(L - L_0) = 0$ , вместо формул (2.7) получим

$$\left. \begin{aligned} X'_{r0} &= (N_0 + H_0) \cos B_0; \\ Y'_{r0} &= 0; \\ Z'_{r0} &= [N_0(1 - e^2) + H_0] \sin B_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

В пространственной прямоугольной системе координат  $O X_{\Gamma} Y_{\Gamma} Z_{\Gamma}$  с началом в точке  $O$ , осью  $O Z_{\Gamma}$ , совпадающей с нормалью к эллипсоиду, осью  $O X_{\Gamma}$ , лежащей в плоскости меридиана  $O' X'_{\Gamma} Z'_{\Gamma}$  и направленной на север, и осью  $O Y_{\Gamma}$ , дополняющей систему до правой, имеем (рис. 10, 11)

$$\left. \begin{aligned} X_{\Gamma} &= -(X'_{\Gamma} - X'_{\Gamma 0}) \sin B_0 + (Z'_{\Gamma} - Z'_{\Gamma 0}) \cos B_0; \\ Y_{\Gamma} &= Y'_{\Gamma}; \\ Z_{\Gamma} &= (X'_{\Gamma} - X'_{\Gamma 0}) \cos B_0 + (Z'_{\Gamma} - Z'_{\Gamma 0}) \sin B_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Если входящие в формулы (2.7)–(2.9) значения  $B$ ,  $B_0$ ,  $L$  и  $L_0$  не известны, то их можно определить по плоским координатам в проекции Гаусса–Крюгера, используя приведенные в сфероидической геодезии методы и формулы. Если вычисления выполняются на ЭВМ, то для этой цели в работе [36] получены (для эллипсоида Красовского) формулы

$$\left. \begin{aligned} B &= B_x + \left( ((A_{28} z^2 - A_{26}) z^2 + A_{24}) z^2 - 1 \right) z^2 A_{22}; \\ l &= \left( ((B_{17} z^2 + B_{15}) z^2 + B_{13}) z^2 + 1 \right) z, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где

$$\beta = \frac{x}{6367558,497},$$

$$B_x = [(2382 \cos^2 \beta + 293609) \cos^2 \beta + 50221747] \sin \beta \cos \beta \cdot 10^{-10} + \beta,$$

$$A_{22} = (0,003369263 \cos^2 B_x + 0,5) \sin B_x \cos B_x,$$

$$A_{24} = [(0,0056154 - 0,0000151 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x + 0,1616128] x \cos^2 B_x + 0,25,$$

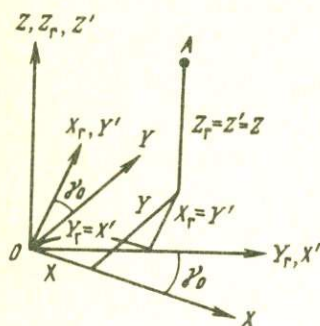


Рис. 11

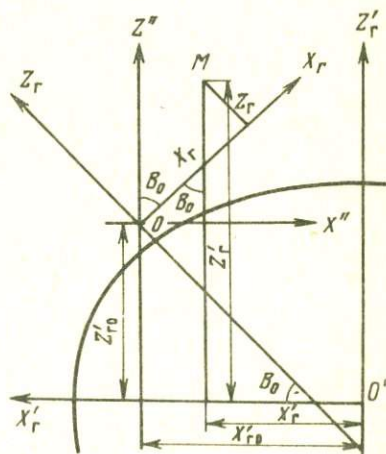


Рис. 12

$$\begin{aligned}
 A_{26} &= [(0,00389 \cos^2 B_x + 0,04310) \cos^2 B_x - 0,00168] \cos^2 B_x + 0,125, \\
 A_{28} &= [(0,013 \cos^2 B_x + 0,008) \cos^2 B_x - 0,031] \cos^2 B_x + 0,078, \\
 B_{13} &= [0,16666667 - 0,00112309 \cos^2 B_x \cos^2 B_x - 0,33333333, \\
 B_{15} &= [(0,008783 - 0,000112 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,166667] \cos^2 B_x + 0,2, \\
 B_{17} &= (0,1667 - 0,0361 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,1429, \\
 N_x &= [(0,605 \sin^2 B_x + 107,155) \sin^2 B_x + 21346,142] \sin^2 B_x + 6378245, \\
 z &= \frac{y}{N_x \cos B_x}.
 \end{aligned}$$

Геодезическая высота  $H$  может быть определена по формуле (2.6).

Обычно в фотограмметрии используется правая система координат  $X'Y'Z'$ . В этом случае в системе формул (2.9) нужно заменить  $X_\Gamma$  на  $Y'$ ,  $Y_\Gamma$  на  $X'$ ,  $Z_\Gamma$  на  $Z'$  и пользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned}
 X' &= Y'_\Gamma - Y'_{\Gamma_0}; \\
 Y' &= -(X'_\Gamma - X'_{\Gamma_0}) \sin B_0 + (Z'_\Gamma - Z'_{\Gamma_0}) \cos B_0; \\
 Z' &= (X'_\Gamma - X'_{\Gamma_0}) \cos B_0 + (Z'_\Gamma - Z'_{\Gamma_0}) \sin B_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Формулы (2.7), (2.8), (2.11) являются строгими, но при вычислении требуют сохранения 10–11 значащих цифр (для получения результата с точностью до 0,001 м) и при вычислении по этим формулам не всегда можно использовать настольные вычислительные машины, например нельзя пользоваться микрокалькуляторами, позволяющими вычислять с точностью до 7–8 значащих цифр. Поэтому эти формулы целесообразно преобразовать так, чтобы они были свободны от отмеченного недостатка. Подставляя в формулы (2.11) вместо  $X'_\Gamma$ ,  $Y'_\Gamma$ ;  $X'_{\Gamma_0}$ ,  $Y'_{\Gamma_0}$  их значения из формул (2.7) и (2.8) после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned}
 X' &= (N + H) \cos B \sin(l_1 - l_0); \\
 Y' &= (N + H) \sin \Delta B + v \cos B \sin B_0 - Q \cos B_0; \\
 Z' &= \left[ \frac{N_0 e^2 \sin \Delta B \sin(B + B_0)}{V(V_0 + V)} + (H - H_0) \right] \cos \Delta B - 2(N_0 + \\
 &+ H_0) \sin^2 \frac{\Delta B}{2} - v \cos B \cos B_0 - Q \sin B_0,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 v &= 2(N + H) \sin^2 \frac{l}{2}; \\
 Q &= e^2 (N \sin B - N_0 \sin B_0);
 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}; \\ V_0 &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

В случаях, когда ось абсцисс пространственной системы принимается параллельной плоскости осевого меридиана, систему  $X'Y'Z'$  необходимо повернуть вокруг оси  $OZ'$  на угол  $\gamma_0$ , равный сближению осевого и проходящего через начало координат  $O$  меридианов. После поворота на угол  $\gamma_0$  имеем

$$\left. \begin{aligned} X &= X' \cos \gamma_0 - Y' \sin \gamma_0; \\ Y &= Y' \cos \gamma_0 + X' \sin \gamma_0; \\ Z &= Z'. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Сближение меридианов можно определить по приведенным в сфероидической геодезии формулам.

Получив координаты опорных точек в фотограмметрической системе координат, их можно использовать для решения различных задач фотограмметрии: для совместного и раздельного определения элементов внешнего и внутреннего ориентирования, для геодезического ориентирования и уравнивания сети фототриангуляции и т.д.

Для перехода от фотограмметрической пространственной системы координат к плоским координатам в проекции Гаусса–Крюгера и нормальным высотам следует выполнить следующее.

1. От системы  $XYZ$  перейти к системе  $X'Y'Z'$  или к системе  $X_{\Gamma}Y_{\Gamma}Z_{\Gamma}$  по формулам (рис. 12)

$$\begin{aligned} X_{\Gamma} &= Y' = Y \cos \gamma_0 - X \sin \gamma_0, \\ Y_{\Gamma} &= X' = X \cos \gamma_0 + Y \sin \gamma_0, \\ Z_{\Gamma} &= Z' = Z. \end{aligned}$$

2. От системы  $X_{\Gamma}Y_{\Gamma}Z_{\Gamma}$  перейти к системе  $X''Y''Z''$  (см. рис. 11), применяя формулы

$$\begin{aligned} X'' &= X_{\Gamma} \sin B_0 - Z_{\Gamma} \cos B_0, \\ Y'' &= Y_{\Gamma}, \\ Z'' &= Z_{\Gamma} \sin B_0 + X_{\Gamma} \cos B_0. \end{aligned}$$

Входящая в эти формулы геодезическая широта  $B_0$  начала координат определяется с помощью формулы (2.10) по известным плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса–Крюгера.

3. По формулам (2.8) определить координаты  $X'_{\Gamma_0}, Y'_{\Gamma_0}, Z'_{\Gamma_0}$ .

4. Определить  $X'_{\Gamma}, Y'_{\Gamma}, Z'_{\Gamma}$  (см. рис. 11) по формулам

$$X'_r = -(X' - X'_{r0}), Y'_r = Y' = Y_r, Z'_r = Z' + Z'_{r0}.$$

5. Определить геодезические координаты  $B, L, H$ , используя формулы

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 + \operatorname{arctg} \frac{Y'_r}{X'_r}; \\ \operatorname{ctg} B &= \frac{R}{Z'_r} (1 - e^2) + \frac{e^2 R H}{(N + H) Z'_r}; \\ H &= Z'_r / \sin B - N(1 - e^2) = R \sec B - N, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

где

$$R = \sqrt{X'^2_r + Y'^2_r}.$$

Так как в формулы для определения  $B$  входит значение  $H$ , а в формулу  $H$  входит значение  $B$ , то задача решается методом приближений. В первом приближении при определении  $B$  можно принять  $H = 0$  или его приближенному значению.

6. Выполнить переход от геодезических координат  $B, (L - L_0), H$  к плоским координатам в проекции Гаусса-Крюгера и нормальным высотам, используя известные в сфероидической геодезии формулы. Для вычисления плоских координат на ЭВМ с использованием постоянных для эллипсоида Красовского можно использовать приведенные в работе [36] формулы

$$\left. \begin{aligned} x &= 6367558,497B - ((a_{28}l^2 - a_{26})l^2 + a_{24})l^2 + 0,5)l^2N - \\ &- a_0) \sin B \cos B; \\ y &= (((b_{17}l^2 + b_{15})l^2 + b_{13})l^2 + 1)lN \cos B, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где

$$N = [(0,605 \sin^2 B + 107,155) \sin^2 B + 21346,142] \sin^2 B + 6378245;$$

$$a_0 = (0,7032 \cos^2 B - 135,3277) \cos^2 B + 32140,4046;$$

$$a_{24} = [(0,0000076 \cos^2 B + 0,0025269) \cos^2 B + 0,25] \cos^2 B - 0,0416667;$$

$$a_{26} = [(0,00562 \cos^2 B + 0,16358) \cos^2 B - 0,08333] \cos^2 B + 0,00139;$$

$$a_{28} = [(0,125 \cos^2 B - 0,104) \cos^2 B + 0,014] \cos^2 B;$$

$$b_{13} = (0,00112309 \cos^2 B + 0,33333333) \cos^2 B - 0,16666667;$$

$$b_{15} = [(0,004043 \cos^2 B + 0,196743) \cos^2 B - 0,166667] \cos^2 B + 0,008333;$$

$$b_{17} = [(0,1429 \cos^2 B - 0,1667) \cos^2 B + 0,0361] \cos^2 B - 0,0002.$$

В приведенных формулах величины  $B$  и  $l$  выражены в радианах.

Таблица 1

Элементы формул	Численные значения		Элементы формул	Численные значения	
	точка <i>O</i>	точка <i>I</i>		точка <i>O</i>	точка <i>I</i>
<i>x</i> , м	6140794,660	6109939,518	<i>l</i>	3°43'07,800"	3°51'17,950"
<i>y</i> , м	235949,468	246316,596	<i>H</i> , м	500,000	2490,000
$\beta$	0,96438764	0,95954195	<i>N</i> , м	6392734,306	6392635,296
<i>B<sub>x</sub></i>	0,96674398	0,96190682	( <i>N+H</i> ), м	6393234,306	6395125,296
<i>A<sub>22</sub></i>	0,2342444	0,2351005	<i>l</i> <sub>1</sub> - <i>l</i> <sub>0</sub>	0	0,1361527°
<i>A<sub>24</sub></i>	0,3027208	0,3034695	$\Delta B$	0	-0,2815972°
<i>A<sub>26</sub></i>	0,1290741	0,1291990	$\nu$ , м		18,0562
<i>A<sub>28</sub></i>	0,0693	0,0692	<i>Q</i> , м		-120,5855
<i>B<sub>13</sub></i>	-0,2796828	-0,2789310	<i>X</i> ' <sub>1</sub> , м		8705,194
<i>B<sub>15</sub></i>	0,1471428	0,1464134	<i>Y</i> ' <sub>1</sub> , м		-31353,529
<i>B<sub>17</sub></i>	-0,09288	-0,09223	<i>X</i> , м	0	10366,519
<i>N<sub>x</sub></i> <sup>17</sup> , м	6392754,149	6392656,777	<i>Y</i> , м	0	-30844,115
<i>z</i>	0,064982461	0,067367275	<i>Z</i> , м	0	1907,048
<i>B</i>	55°20'01,500"	55°03'07,750"			

Таблица 2

Элементы формул	Численные значения	Элементы формул	Численные значения
<i>B</i> <sub>0</sub>	55°20'01,500"	<i>Z</i> ' <sub>Г0</sub> , м	5223109,3
<i>L</i> <sub>0</sub>	24°43'07,800"	<i>X</i> ' <sub>Г1</sub> , м	3663312,9
<i>H</i> <sub>0</sub> , м	500,000	<i>Y</i> ' <sub>Г1</sub> , м	8705,194
<i>N</i> <sub>0</sub> , м	6392734,306	<i>Z</i> ' <sub>Г1</sub> , м	5206844,1
$\gamma$ <sub>0</sub>	3°03'36,2212"	<i>R</i> <sub>1</sub> , м	3663323,2
<i>X</i> <sub>1</sub> , м	10366,519	$\frac{R_1}{Z_{Г1}}(1 - e^2)$	0,69885003
<i>Y</i> <sub>1</sub> , м	-30844,115	<i>B</i> <sup>I</sup>	55,052224°
<i>Z</i> <sub>1</sub> , м	1907,048	<i>N</i> <sup>I</sup> , м	6392635,3
<i>X</i> <sub>Г1</sub> , м	-31353,529	<i>H</i> <sup>I</sup> , м	2484,493
<i>Y</i> <sub>Г1</sub> , м	+8705,194	<i>B</i> <sup>II</sup>	55°03'07,76"
<i>Z</i> <sub>Г1</sub> , м	1907,048	<i>N</i> <sup>II</sup> , м	6392635,3
<i>X</i> <sub>1</sub> ' <sub>Г1</sub> , м	-26872,346	<i>H</i> <sup>II</sup> , м	2490,209
<i>Y</i> <sub>1</sub> ' <sub>Г1</sub> , м	8705,194	<i>B</i> <sup>III</sup>	55°03'07,758"
<i>Z</i> <sub>1</sub> ' <sub>Г1</sub> , м	-16265,228	<i>N</i> <sup>III</sup> , м	6392635,3
<i>X</i> <sub>Г0</sub> ' <sub>Г1</sub> , м	3636440,6	<i>H</i> <sup>III</sup> , м	2490,165
<i>Y</i> <sub>Г0</sub> ' <sub>Г1</sub> , м	0		

На основании формулы (2.6) нормальная высота

$$H^\gamma = H - \xi. \quad (2.17)$$

В табл. 1 приведены вычисления координат точки в фотограмметрической системе по ее координатам в проекции Гаусса—Крюгера.

Численный пример перехода от фотограмметрической системы координат  $XYZ$  к плоским координатам  $x, y$  в проекции Гаусса—Крюгера и к геодезическим высотам  $H$  приведен в табл. 2.

В табл. 2 решение задачи доведено до определения геодезических координат точки. Переход от геодезических координат к плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса—Крюгера выполняется по известным формулам (2.16) в вычислительной ведомости, приведенной в работе [36, с. 227].

Изложенная методика перехода от координат в проекции Гаусса—Крюгера к фотограмметрической системе координат и обратно позволяет решать задачу при любом расположении точек относительно осевого меридиана и выбранного начала пространственной фотограмметрической системы. Задача решается и для случаев, когда обрабатываемый участок располагается в нескольких координатных зонах.

#### § 10. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПЕРЕХОД ОТ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА—КРЮГЕРА И НОРМАЛЬНЫХ ВЫСОТ К ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

Переход от плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса—Крюгера к пространственным прямоугольным координатам через геодезические координаты, изложенный в предыдущем параграфе, является достаточно точным, не требует ограничений размеров обрабатываемых участков и положения начала координат, но содержит большой объем вычислительных работ. Поэтому целесообразно найти более простое решение поставленной задачи.

Положим, что плоские прямоугольные координаты  $x, y$  в проекции Гаусса—Крюгера и нормальная высота  $H^y$  точки известны и необходимо определить пространственные прямоугольные координаты  $X, Y, Z$  этой точки. Будем считать, что начало координат пространственной прямоугольной системы совпадает с одной из опорных точек, например с точкой  $O$ , с известными значениями  $x_0, y_0, H_0^y$ . Примем направление оси  $OZ$  совпадающим с нормалью к эллипсоиду в точке  $O$ , координатную плоскость  $OYZ$  параллельной, а  $OZX$  — перпендикулярной к осевому меридиану. Плоскость  $OYZ$  будет повернута относительно плоскости меридиана точки  $O$  на угол  $\gamma_0$ , равный сближению осевого меридиана и меридиана, проходящего через точку  $O$ , принятую за начало координат прямоугольной пространственной системы.

Решение задачи выполняется следующим образом. По разностям координат данной и начальной точек определяют полярные координаты с началом в точке  $O$  и полярной осью  $ox$ , для чего используют формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0};$$

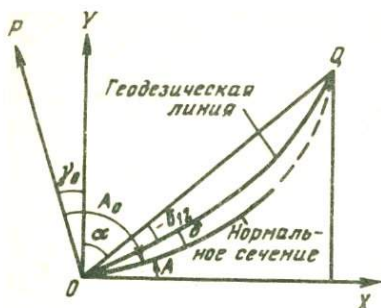
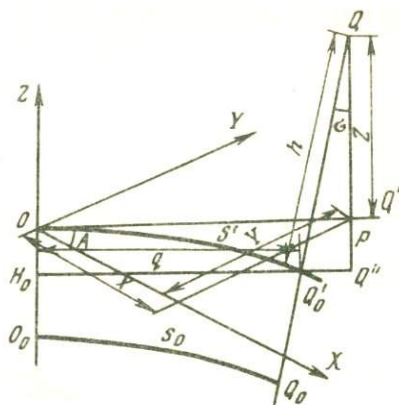


Рис. 13

Рис. 14



$$d = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} = \frac{x_i - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y_i - y_0}{\sin \alpha} = (x_i - x_0) \cos \alpha + (y_i - y_0) \sin \alpha, \quad (2.18)$$

где  $\alpha$ ,  $d$  – дирекционный угол и длина линии соответственно. Используя формулы (2.2)–(2.4) редукиций длин и направлений, от длины хорды  $d$  переходим к длине геодезической линии  $s$  на поверхности эллипсоида и от дирекционного угла  $\alpha$  к углу  $A$  между осью  $OX$  и геодезической линией  $s$ . На рис. 13  $OXYZ$  – прямоугольная пространственная система координат с началом в точке  $O$ . Линия  $OQ'$  получается при пересечении плоскости  $XOY$  с плоскостью прямого нормального сечения, проходящего через начало координат и данную точку  $Q$ . При пересечении плоскости нормального сечения с поверхностью эллипсоида имеем линию  $O_0Q_0 = s_0$ . Линия  $OQ'_0 = s'$  параллельна линии  $s_0$ .

Обычно размеры участка, на который выполнена аэросъемка, не превышают  $100 \times 100$  км, поэтому при выводе формул будем считать, что значения  $s \approx \Delta x \approx \Delta y \leq 50$  км.

На рис. 13.

$$\left. \begin{aligned} X &= OQ' \cos A; \\ Y &= OQ' \sin A; \\ Z &= h \cos \sigma - p, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где

$$OQ' = q + h \sin \sigma. \quad (2.20)$$

На рис. 14

$$A = 90^\circ - (\alpha - \delta_{12} + \delta). \quad (2.21)$$



$$\cos \sigma = \frac{R_A + H_0 - p}{R_A + H_0} = 1 - \frac{p}{R_A + H_0}. \quad (2.25)$$

С учетом выражений (2.20), (2.21), (2.25) вместо формул (2.19) находим

$$\left. \begin{aligned} X &= D \sin(\alpha - \delta_{0i}); \\ Y &= D \cos(\alpha - \delta_{0i}); \\ Z &= h - p - \frac{ph}{R_A + H_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

где

$$D = q \left( 1 + \frac{h}{R_A + H_0} \right).$$

Входящие в формулы (2.22) значения  $s_0$  можно определить, используя вторую из формул (2.2), а значение  $s'$  можно найти по формуле

$$s' = s_0 \left( 1 + \frac{H_0}{R_A} \right). \quad (2.27)$$

С учетом изложенного в окончательном виде имеем

$$\left. \begin{aligned} X &= D \sin(\alpha - \delta_{0i}); \\ Y &= D \cos(\alpha - \delta_{0i}); \\ Z &= h - s'(g - \beta), \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D &= s' \left( 1 - \frac{2}{3} g^2 \right); \\ s' &= s_0 \left( 1 + \frac{h}{R_A + H_0} \right) \left( 1 + \frac{H_0}{R_A} \right); \\ s_0 &= d \left[ 1 - \epsilon \left( 1 - \frac{5}{6} \epsilon \right) - \frac{\Delta y^2}{24 R_m^2} \right]; \\ g &= \frac{s_0}{2 R_A}; \\ \beta &= \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{2 N_0^2} s_0^2 \approx \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0}{2 N_0^2} s_0 \Delta x; \\ \epsilon &= \frac{y_m^2}{2 R_m^2}; \\ d &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \arctg \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}; \\
 \eta_0^2 &= e^2 \cos^2 B_0 = 0,0067385254 \cos^2 B_0; \\
 A_0 &= a + \gamma_0 - \delta_{0i}; \\
 \gamma_0 &= \frac{y_0}{N_0} \operatorname{tg} B_0; \\
 \delta_{0i} &= \delta_{12} - \delta = -\frac{\Delta x}{2R_m^2} (y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{2\epsilon y_m}{3} + \frac{e'^2 \cos^2 B_0}{3} \Delta y); \\
 N_0 &= c/V_0; \quad R_m = c/V_0^2; \quad V_0 = \sqrt{1 + \eta_0^2}.
 \end{aligned} \right\}$$

В табл. 3 приведен пример определения пространственных фотограмметрических координат по исходным данным табл. 1 и по формулам (2.28), (2.29).

Сравнение полученных значений  $X, Y, Z$  с вычисленными в табл. 1 показывает, что расхождения  $\delta X = +10$  мм,  $\delta Y = +3$  мм,  $\delta Z = +7$  мм, т.е. не превышают 10 мм, что свидетельствует о достаточно высокой точности формул (2.28), (2.29).

Сравнив разности пространственных координат и плоских координат в проекции Гаусса—Крюгера, можно сделать вывод, что они мало отличаются друг от друга и поэтому вместо перехода от одной системы координат к другой имеет смысл определять поправки к соответствующим разностям координат.

Прибавляя и вычитая в правых частях формул (2.28) значения  $d \sin a$  для  $X$  и  $d \cos a$  для  $Y$ , после небольших преобразований

Таблица 3

Элементы формул	Численные значения	Элементы формул	Численные значения
$x_0, \text{ м}$	6140794;660	$\gamma_0$	3,0579055°
$Y_0, \text{ м}$	235949,468	$\epsilon$	$7,129449 \cdot 10^{-4}$
$H_0, \text{ м}$	500,000	$\delta_{01}$	$18,6655'' = 0,0051849^\circ$
$x_1, \text{ м}$	6109939,518	$A_0$	164,48071°
$y_1, \text{ м}$	246316,596	$R_m^A, \text{ м}$	6379821,3
$H_1, \text{ м}$	2490,000	$d, \text{ м}$	32550,225
$h = H_1 - H_0, \text{ м}$	1990,000	$s, \text{ м}$	32527,027
$B_0$	$55^\circ 20' 01,500''$	$g$	$2,54921 \cdot 10^{-3}$
$\eta_0^2$	0,00218010	$\beta$	$-3,9318 \cdot 10^{-8}$
$V_0 = \sqrt{1 + \eta_0^2}$	1,0010895	$s', \text{ м}$	32539,722
$c, \text{ м}$	6399698,9	$D, \text{ м}$	32539,581
$N_0 = \frac{c}{V_0}, \text{ м}$	6392734,2	$X, \text{ м}$	10366,529
$R_m = \frac{c}{V_0^2}, \text{ м}$	6385776,7	$Y, \text{ м}$	-30844,112
$y_m, \text{ м}$	241133,032	$Z, \text{ м}$	1907,055
$a$	161,427985°		

$$X = D \sin(\alpha + \delta_{oi}) + d \sin \alpha - d \sin \alpha = D(\sin \alpha \cos \delta_{oi} - \cos \alpha \sin \delta_{oi}) + \Delta y - d \sin \alpha = \Delta y + (D-d) \frac{\Delta y}{d} - 2D \frac{\Delta y}{d} \sin^2 \frac{\delta_{oi}}{2} - \frac{D \Delta x}{d} \sin \delta_{oi},$$

$$Y = D \cos(\alpha + \delta_{oi}) + d \cos \alpha - d \cos \alpha = \Delta x + (D-d) \frac{\Delta x}{d} - 2D \frac{\Delta x}{d} \sin^2 \frac{\delta_{oi}}{2} + \frac{D}{d} \Delta y \sin \delta_{oi}.$$

$$\text{При } \frac{D}{d} \Delta x \approx \frac{D}{d} \Delta y = 50 \text{ км, } \delta_{oi} \leq 40'' \quad \frac{2D}{d} \Delta y \sin^2 \frac{\delta_{oi}}{2} = \\ = \frac{2D}{d} \Delta x \sin^2 \frac{\delta_{oi}}{2} = 2 \text{ мм.}$$

Отбрасывая эти слагаемые, получаем

$$X_j = \Delta y + \delta X, \quad Y = \Delta x + \delta Y, \quad Z = h + \delta h, \quad (2.30)$$

где

$$\delta X = k \Delta y - (k+1) \Delta x \delta_{oi};$$

$$\delta Y = k \Delta x + (k+1) \Delta y \delta_{oi};$$

$$\delta h = -s'(g - \beta);$$

$$k = \frac{D}{d} - 1 = A + E + \frac{(1+A)(1+E)}{R_A} \left( H_0 - \frac{s_0^2}{6R_A} \right);$$

$$A = -\epsilon \left( 1 - \frac{5}{6} \epsilon \right) - \frac{\Delta y^2}{24R_m^2};$$

$$E = \frac{h}{R_A + H_0};$$

$$g = s_0 / (2R_A); \quad \epsilon = y_m^2 / (2R_m^2);$$

$$\delta_{oi} = -\frac{\Delta x}{2R_m^2} \left[ y_m^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \epsilon \right) - \frac{\Delta y}{6} \left( 1 - 2\eta_0^2 \right) \right];$$

$$R_m = c/V_0^2; \quad N_0 = c/V_0; \quad R_A = \frac{N_0}{1 + \eta_0^2 \cos^2 A_0};$$

$$\eta_0^2 = e'^2 \cos^2 B_0 = 0,0067385254 \cos^2 B_0;$$

$$A_0 = \alpha + \frac{y_0}{N_0} \operatorname{tg} B_0 - \delta_{oi},$$

$$s_0 = d(1+A)$$

(2.31)

Элементы формул	Численные значения	Элементы формул	Численные значения
$H_0, \text{ м}$	500,000	$R_{A'}, \text{ м}$	6379821,3
$R, \text{ м}$	1990,000	$A$	$-7,12631 \cdot 10^{-4}$
$x_0, \text{ м}$	6140794,660	$E$	$3,11896 \cdot 10^{-4}$
$x_1, \text{ м}$	6109939,518	$d, \text{ м}$	32550,225
$\Delta x = x_1 - x_0, \text{ м}$	-30855,142	$s, \text{ м}$	32527,029
$y_0, \text{ м}$	235949,468	$s', \text{ м}$	32539,724
$y_1, \text{ м}$	246316,596	$g$	$2,54921 \cdot 10^{-3}$
$\Delta y = y_1 - y_0, \text{ м}$	+10367,128	$\beta$	$-3,9318 \cdot 10^{-8}$
$y_m = \frac{1}{2}(y_0 + y_1), \text{ м}$	241133,032	$k$	$-3,26728 \cdot 10^{-4}$
$B_0$	$55^\circ 20' 01,500''$	$\delta X, \text{ м}$	-0,596
$\eta_0^2$	0,00218010	$\delta Y, \text{ м}$	+11,019
$N_0, \text{ м}$	6392734,2	$\delta h, \text{ м}$	-82,952
$R_m, \text{ м}$	6385776,7	$X, \text{ м}$	10366,532
$\epsilon$	$7,129449 \cdot 10^{-4}$	$Y, \text{ м}$	-30844,123
$\delta_{0.1}$	$0,0051849^0$	$Z, \text{ м}$	1907,048
$A_0$	$164,48071^\circ$		

$$\left. \begin{aligned} s' &= s_0 \left(1 + E\right) \left(1 + \frac{H_0}{R_A}\right); \\ \beta &= \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{2N_0^2} s_0^2. \end{aligned} \right\}$$

В табл. 4 приведен пример определения поправок  $\delta X, \delta Y, \delta Z$  и координат  $X, Y, Z$  по формулам (2.30), (2.31) и исходным данным табл. 3.

Полученные в табл. 4 значения  $X, Y, Z$  отличаются от вычисленных в табл. 1 на +13, +8 и 0 мм, что свидетельствует о том, что все формулы являются достаточно точными и приводят практически к одному результату.

#### § 11. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПЕРЕХОД ОТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ К ПЛОСКИМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА-КРЮГЕРА И НОРМАЛЬНЫМ ВЫСОТАМ

Решение этой задачи может быть осуществлено следующим образом. Так как за начало пространственной системы  $OXYZ$  принята опорная точка, то будем считать, что для точки  $O$  известны плоские координаты  $x_0, y_0$  в проекции Гаусса-Крюгера и нормальная высота  $H_0^y$ , по которым можно определить геодезические координаты  $B_0, L_0, H_0$ .

Из первых двух формул системы (2.28) находим

$$\alpha = \delta_{oi} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{X}{Y} \quad (2.32)$$

и

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (2.33)$$

После этого определяем

$$s' = \frac{D}{1 - \frac{2}{3} g^2} \quad (2.34)$$

и

$$s_0 = \frac{s'}{\left(1 + \frac{h}{R_A + H_0}\right) \left(1 + \frac{H_0}{R_A}\right)}, \quad (2.35)$$

а затем вычисляем значение [36, с. 244]

$$d = s_0 \left(1 + \frac{y_m^2}{2 R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24 R_m^2} + \frac{y_m^4}{24 R_m^4}\right) = s_0 \left[1 + \epsilon \left(1 + \frac{\epsilon}{6}\right) + \frac{\Delta y^2}{24 R_m^2}\right]. \quad (2.36)$$

Входящие в эти формулы аргументы определяются по формулам системы (2.29). После нахождения  $d$  и  $a$  координаты точек на плоскости проекции Гаусса–Крюгера определяются по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 + d_i \cos \alpha_i; \\ y_i &= y_0 + d_i \sin \alpha_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Из последней формулы системы (2.28) имеем

$$h = Z + s'(g - \beta). \quad (2.38)$$

Так как входящие в формулы (2.29) значения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $h$ ,  $y_m$ ,  $d$ ,  $s_0$  являются неизвестными, то в общем случае задача решается методом приближений. В первом приближении можно считать  $\Delta x' \approx Y$ ,  $\Delta y' \approx X$ ,  $h' = Z + \frac{D^2}{2R_m}$ . Во многих случаях разности  $\Delta x - Y$ ,  $\Delta y - X$  и  $h - h'$  являются сравнительно небольшими, поэтому с достаточной для практических целей точностью можно ограничиться первым приближением.

В табл. 5 дан пример определения плоских координат  $x$ ,  $y$  в проекции Гаусса–Крюгера и превышения  $h$  по фотограмметрическим координатам  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Вычисления, выполненные в табл. 5, показывают, что для условий приведенного примера при определении  $x$  и  $y$  с ошибкой не более 10 мм потребовалось только одно приближение. Для вычисления  $h$  возникает необходимость во втором приближении определить значение  $g$ , т.е. выполнить дополнительно еще одну вычислительную операцию.

Элементы формул	Численные значения	Элементы формул	Численные значения
$X, \text{ м}$	10366,519	$\epsilon' = \frac{y_m'^2}{2R_m^2}$	$7,12943 \cdot 10^{-4}$
$Y, \text{ м}$	-30844,115	$\delta_{oi}$	$0,00518532^0$
$Z, \text{ м}$	1907,048	$A'_0 = \alpha' + \gamma_0 - \delta_{oi}$	$164,47554^\circ$
$B_0$	$55^\circ 20' 01,500''$	$R_{A', \text{ м}}$	6379821,9
$H_0, \text{ м}$	500,000	$\alpha$	$161,4280023^\circ$
$\eta_0^2$	0,0021010	$g' = \frac{D}{2R_A}$	$2,55019 \cdot 10^{-3}$
$V_0$	1,0010895	$s', \text{ м}$	32539,719
$N_0, \text{ м}$	6392734,2	$s_0, \text{ м}$	32527,024
$R_m, \text{ м}$	6385776,7	$g = \frac{s_0}{2R_A}$	$2,54921 \cdot 10^{-3}$
$h' = Z + \frac{D^2}{2R_m}, \text{ м}$	1989,953	$d, \text{ м}$	32550,220
$\alpha' = \text{arc tg } \frac{X}{Y}$	161,422817°	$x, \text{ м}$	6109939,520
$x_0, \text{ м}$	6140794,660	$y, \text{ м}$	246316,586
$y_0, \text{ м}$	235949,468	$\beta$	$-3,9318 \cdot 10^{-8}$
$y' = y_0 + X, \text{ м}$	246315,987	$h = Z + s'(g - \beta), \text{ м}$	1990,000
$\hat{y}_m = \frac{y_0 + y'}{2}, \text{ м}$	241132,728		
$\gamma_0$	3,0579055°		

Определение плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера и превышения  $h$  по фотограмметрическим координатам  $X, Y, Z$  путем вычисления поправок  $\delta X, \delta Y, \delta h$  осуществляется по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + Y - \delta Y; \\ y &= y_0 + X - \delta X; \\ h &= Z - \delta h, \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где} \quad \delta h &= - \frac{\delta h' \left( 1 - \frac{D}{R_A} \eta_0^2 \text{tg } B_0 \cos A_0 \right)}{\left( 1 - \frac{\delta h'}{3R_A} \right)^2 \left( 1 + \frac{H_0 + Z + \delta h'}{R_A + H_0} \right)} ; \\ \delta h' &= D^2 / (2R_A); \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (2.40)$$

Значения  $\delta X$ ,  $\delta Y$  определяются по формулам (2.31). Так как входящие в формулы (2.31) значения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $y_m$ ,  $d$ ,  $s_0$  являются неизвестными, то в общем случае задача решается методом приближений. В первом приближении принимают

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &\approx \Delta x' = Y; \\ \Delta y &\approx \Delta y' = X; \\ h &\approx h' = Z + D^2/(2R_m); \\ s_0 &\approx D. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Пример вычисления значений  $x$ ,  $y$ ,  $h$  по фотограмметрическим координатам с использованием формул (2.30), (2.31), (2.39) приведен в табл. 6.

Полученные результаты показывают, что отклонения  $x$  и  $y$  от их точных значений равны  $\pm 12$  мм, а  $h$  от его точного значения — 1 мм. Сле-

Таблица 6

Элементы формул	Численные значения	Элементы формул	Численные значения
$X, \text{ м}$	10366,519	$y'_m = \frac{y_0 + y'}{2}, \text{ м}$	241132,728
$Y, \text{ м}$	-30844,115	$\epsilon$	$7,12943 \cdot 10^{-4}$
$Z, \text{ м}$	1907,048	$\delta_{0i}$	$0,00518532^0$
$B_0$	$55^0 20' 01,500''$	$A'_0 = a' + \frac{y_0}{N_0} \text{tg} B_0 - \delta_{0i}$	$164,475537^0$
$H_0, \text{ м}$	500,000	$R_A, \text{ м}$	6379821,9
$\eta_0^2$	0,00218010	$\delta h' = \frac{D^2}{2R_A}, \text{ м}$	82,9811
$V_0$	1,0010895	$\delta h, \text{ м}$	-82,9507
$N_0, \text{ м}$	6392734,2	$h, \text{ м}$	1989,999
$R_m, \text{ м}$	6385776,7	$A$	$-7,126292 \cdot 10^{-4}$
$D, \text{ м}$	32539,349	$E$	$3,11896 \cdot 10^{-4}$
$h' = Z + \frac{D^2}{2R_m}, \text{ м}$	1989,952	$k$	$-3,267264 \cdot 10^{-4}$
$a' = \text{arc tg } \frac{X}{Y}$	$161,422817^0$	$\delta X, \text{ м}$	-0,5965
$x_0, \text{ м}$	6140794,660	$\delta Y, \text{ м}$	+11,0155
$y_0, \text{ м}$	235949,468	$x, \text{ м}$	6109939,530
$y' = y_0 + X, \text{ м}$	246315,987	$y, \text{ м}$	246316,584

довательно, для исходных данных приведенного примера точность решения задачи является достаточно высокой при выполнении только одного первого приближения.

## § 12. ЭЛЕМЕНТЫ ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ

Элементы внешнего ориентирования позволяют определять положение снимка относительно пространственной фотограмметрической системы координат. Элементы внешнего ориентирования разделяются на линейные и угловые. Линейные элементы внешнего ориентирования  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$  определяют положение центра проектирования  $S$  относительно пространственной фотограмметрической системы координат.

Угловыми элементами внешнего ориентирования являются углы  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  (рис. 16) или  $\alpha_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $t$  (рис. 17). На рис. 16  $\alpha$  — продольный угол наклона снимка, лежит в плоскости  $SXZ$  и равен углу между осью  $SZ$  и линией пересечения плоскостей  $SXZ$  и  $YSO$ ;  $\omega$  — поперечный угол наклона снимка, находится в плоскости  $SYO$  и равен углу между главной оптической осью  $So$  и линией пересечения плоскостей  $SXZ$  и  $YSO$ ;  $\kappa$  — угол поворота снимка в своей плоскости, равен углу между осью  $oY$  снимка и следом плоскости  $oSY$  на плоскости снимка.

На рис. 17  $\alpha_0$  — угол наклона снимка, лежит в плоскости главного вертикала  $SnV$ , равен углу между осью  $SZ$  пространственной системы координат и главной оптической осью фотокамеры  $So$ ;  $\kappa_0$  — угол поворота снимка в своей плоскости, равен углу между осью  $oY$  снимка и линией главного вертикала  $oV$ ;  $t$  — дирекционный угол проекции главного луча  $So$  на плоскость  $SXY$ , находится в плоскости  $SXY$  и равен углу между осью  $SX$  пространственной системы координат и линией пересечения плоскости  $SXY$  с плоскостью главного вертикала  $SnV$ .

В наземной фотограмметрии элементы внутреннего ориентирования соответствуют элементам внутреннего ориентирования аэроснимка. Эле-

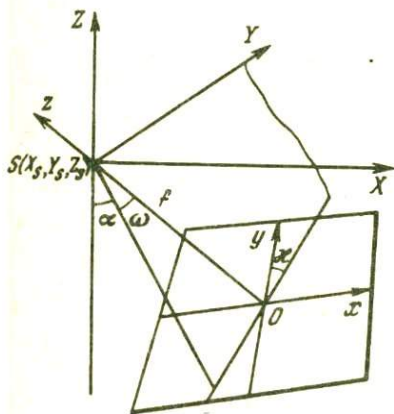


Рис. 16

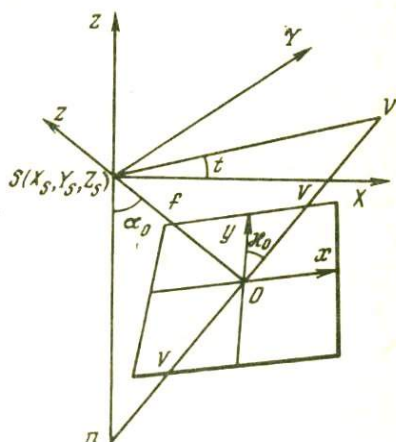


Рис. 17

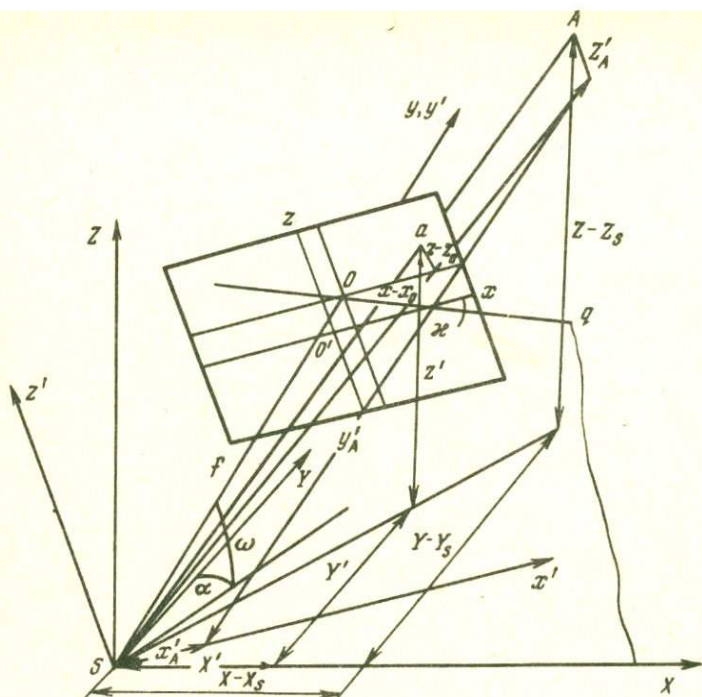


Рис. 18

ментами внешнего ориентирования являются координаты точки фотографирования  $X_{rS}$ ,  $Y_{rS}$ ,  $Z_{rS}$ , дирекционный угол  $\alpha$  оптической оси (угол между осью  $SY$  и проекцией главного луча  $So$  на плоскость  $XU$ ), угол наклона  $\omega$  оптической оси камеры относительно плоскости  $XU$  и угол поворота  $\kappa$  снимка (угол между осью  $x$  снимка и следом  $oq$  на снимке плоскости  $oSX$  (рис. 18).

### § 13. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ СООТВЕТСТВЕННЫХ ТОЧЕК СНИМКА И МЕСТНОСТИ

В первую очередь найдем зависимость между координатами соответственных точек местности и горизонтального снимка. На рис. 19 имеем

$$\left. \begin{aligned} X - X_S &= (Z_S - Z) \frac{x - x_0}{f}; \\ Y - Y_S &= (Z_S - Z) \frac{y - y_0}{f}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

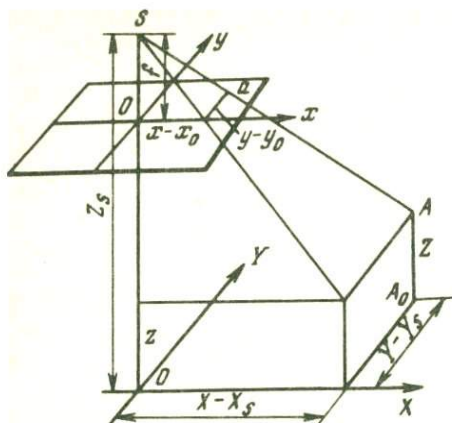


Рис. 19

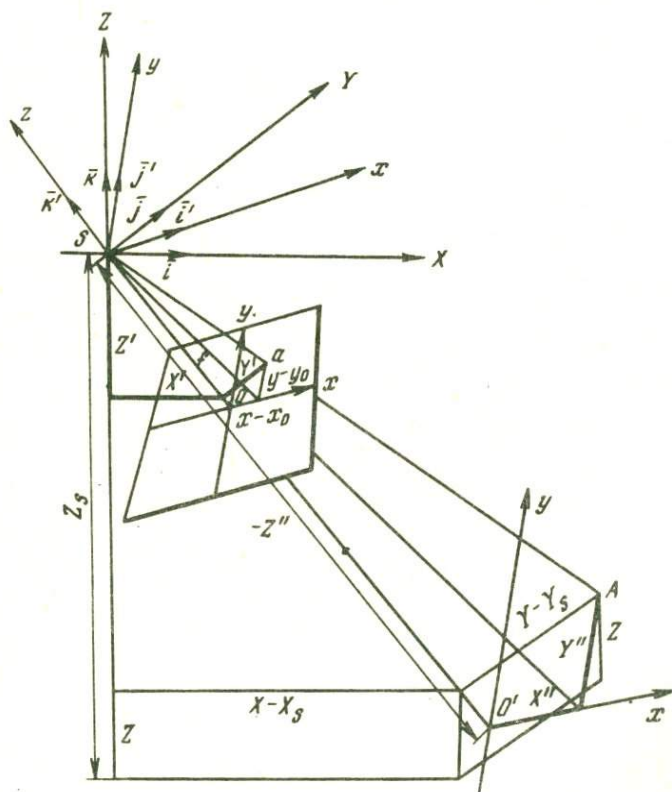


Рис. 20

Для наземной съемки находим

$$\left. \begin{aligned} X - X_S &= \frac{Y - Y_S}{f} S(x - x_0); \\ Z - Z_S &= \frac{Y - Y_S}{f} S(z - z_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

В этих формулах  $x_0, y_0$  — координаты главной точки снимка.

Для практических целей удобнее определять приращения координат точек относительно твердой точки с известными координатами. Учитывая эти соображения и формулы (2.42) для точек 1 и 2, получаем

$$\left. \begin{aligned} X_2 - X_1 &= \frac{1}{f} [(Z_S - Z_2)(x_2 - x_0) - (Z_S - Z_1)(x_1 - x_0)]; \\ Y_2 - Y_1 &= \frac{1}{f} [(Z_S - Z_2)(y_2 - y_0) - (Z_S - Z_1)(y_1 - y_0)] \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 = \frac{Z_S - Z_1}{f}(x_2 - x_1) - \frac{Z_2 - Z_1}{f}(x_2 - x_0); \\ \Delta Y &= Y_2 - Y_1 = \frac{Z_S - Z_1}{f}(y_2 - y_1) - \frac{Z_2 - Z_1}{f}(y_2 - y_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Аналогичным образом для наземной съемки находим

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 = \frac{Y_1 - Y_S}{f}(x_2 - x_1) + \frac{Y_2 - Y_1}{f}(x_2 - x_0); \\ \Delta Z &= Z_2 - Z_1 = \frac{Y_1 - Y_S}{f}(z_2 - z_1) + \frac{Y_2 - Y_1}{f}(z_2 - z_0). \end{aligned} \right\}$$

Из формул (2.44) видно, что вторые слагаемые этих формул являются поправками за рельеф, т.е. значительно меньшими по своей величине по сравнению с первыми слагаемыми. Анализ формул (2.44) показывает, что для определения приращений координат  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  не нужно знать линейные элементы внешнего ориентирования  $X_S, Y_S$ . При вычислении первых, основных слагаемых, кроме разностей координат точек снимка нужно знать отношение  $(Z_S - Z_1)/f$ , равное знаменателю масштаба изображения горизонтальной плоскости, проходящей через точку 1, на горизонтальном снимке.

При вычислении вторых слагаемых, являющихся поправочными членами, кроме прочих величин необходимо иметь фокусное расстояние фотокамеры и координаты главной точки снимка, т.е. элементы внутреннего ориентирования фотокамеры. Очевидно, что для определения вторых слагаемых с той же точностью, что и первых, координаты точек снимка и элементы внутреннего ориентирования достаточно знать с точностью,

которая может быть в  $\frac{Z_S - Z_1}{Z_2 - Z_1}$  раз ниже точности разностей координат при вычислении первых слагаемых. Следовательно, для определения приращений координат точек местности по координатам их изображений на горизонтальном снимке нет необходимости знать линейные элементы внешнего ориентирования  $X_S, Y_S$ , а требования к точности определения элементов внутреннего ориентирования могут быть снижены.

Для определения связи между координатами соответствующих точек на местности и на наклонном снимке на рис. 20 и 18 (для наземной съемки) в системе пространственных фотограмметрических координат  $SXYZ$  имеем

$$\frac{X - X_S}{X'} = \frac{Y - Y_S}{Y'} = \frac{Z - Z_S}{Z'}. \quad (2.45)$$

В системе пространственных координат снимка  $Sxyz$  для аэро- и наземных снимков (рис. 20 и 18) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - x_0}{x''} &= \frac{y - y_0}{y''} = -\frac{f}{z''}; \\ \frac{x - x_0}{x'_A} &= \frac{f}{y'_A} = \frac{z - z_0}{z'_A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Отрезки  $d = Sa$  и  $D = SA$  в системах  $SXYZ$  и  $Sxyz$  соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} X'\bar{i} + Y'\bar{j} + Z'\bar{k} &= (x - x_0)\bar{i}' + (y - y_0)\bar{j}' + z\bar{k}'; \\ (X - X_S)\bar{i} + (Y - Y_S)\bar{j} + (Z - Z_S)\bar{k} &= X''\bar{i}'' + Y''\bar{j}'' + Z''\bar{k}'', \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

где  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$  — единичные векторы систем координат  $SXYZ$  и  $Sxyz$  соответственно. Умножим скалярно левые и правые части первого выражения системы (2.47) последовательно на  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , а второго — на  $\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''$ . Учитывая, что скалярное произведение является скаляром, модуль которого равен произведению модулей векторов на косинус угла между ними, а

$$\begin{aligned} \bar{i}\bar{i} &= \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = 1; \\ \bar{i}\bar{j} &= \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0, \end{aligned}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} X' &= (x - x_0)\cos(X, x) + (y - y_0)\cos(X, y) + z\cos(X, z); \\ Y' &= (x - x_0)\cos(Y, x) + (y - y_0)\cos(Y, y) + z\cos(Y, z); \\ Z' &= (x - x_0)\cos(Z, x) + (y - y_0)\cos(Z, y) + z\cos(Z, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

и

$$\left. \begin{aligned} X'' &= (X - X_S) \cos(x, X) + (Y - Y_S) \cos(x, Y) + (Z - Z_S) \cos(x, Z); \\ Y'' &= (X - X_S) \cos(y, X) + (Y - Y_S) \cos(y, Y) + (Z - Z_S) \cos(y, Z); \\ Z'' &= (X - X_S) \cos(z, X) + (Y - Y_S) \cos(z, Y) + (Z - Z_S) \cos(z, Z), \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

где  $\cos(X, x)$ ,  $\cos(X, y)$ ,  $\dots$ ,  $\cos(z, Z)$  — направляющие косинусы, т.е. косинусы углов между осями  $X$  и  $x$ ,  $X$  и  $y$ ,  $\dots$ ,  $z$  и  $Z$ .

Для выражения направляющих косинусов через угловые элементы внешнего ориентирования  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  и  $\alpha_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $t$  из центра  $S$  проведем сферу единичного радиуса, при пересечении которой с координатными плоскостями  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$  получается сферический треугольник  $XYZ$ , у которого все углы и стороны прямые. Для перехода от системы координат  $SXYZ$  к системе  $Sxyz$  необходимо выполнить последовательно повороты на угол  $\alpha$  вокруг оси  $SY$ , на угол  $\omega$  вокруг оси  $SX'$  и на угол  $\kappa$  вокруг оси  $SZ''$  (рис. 21, 22) при использовании угловых элементов внешнего ориентирования  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  и на углы  $t$  вокруг оси  $SZ$ ,  $\alpha_0$  — вокруг оси  $SY'$  и  $\kappa_0$  — вокруг оси  $SZ''$  для угловых элементов внешнего ориентирования  $t$ ,  $\alpha_0$ ,  $\kappa_0$  (рис. 23, 24).

На рис. 22 по теореме косинусов в сферических треугольниках  $XxX''$ ,  $XX''y$ ,  $XX''z$ ,  $YX''x$ ,  $YX''y$ ,  $YZ'z$  (дуга, равная  $90^\circ + \omega$ ),  $xX''Z$ ,  $yX''Z$ ,  $ZZ'z$  находим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos(X, x) = \cos \alpha \cos \kappa - \sin \alpha \sin \omega \sin \kappa; \\ a_2 &= \cos(X, y) = -\cos \alpha \sin \kappa - \sin \alpha \sin \omega \cos \kappa; \\ a_3 &= \cos(X, z) = -\sin \alpha \cos \omega; \\ b_1 &= \cos(Y, x) = \cos \omega \sin \kappa; \\ b_2 &= \cos(Y, y) = \cos \omega \cos \kappa; \\ b_3 &= \cos(Y, z) = -\sin \omega; \\ c_1 &= \cos(Z, x) = \sin \alpha \cos \kappa + \cos \alpha \sin \omega \sin \kappa; \\ c_2 &= \cos(Z, y) = -\sin \alpha \sin \kappa + \cos \alpha \sin \omega \cos \kappa; \\ c_3 &= \cos(Z, z) = \cos \alpha \cos \omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

На рис. 24 изображен сферический треугольник  $XYZ$ , получаемый при пересечении сферой единичного радиуса с центром в точке  $S$  координатных плоскостей системы  $SXYZ$ . Поворотом системы координат на угловые элементы внешнего ориентирования  $t$ ,  $\alpha_0$ ,  $\kappa_0$  (рис. 23, 24) от системы координат  $XYZ$  переходим к системе  $xyz$ . На рис. 24 по теореме косинусов в сферических треугольниках  $XxH(x)_1$ ,  $XyH(x)_1$ ,  $XzZ$ ,  $YxH(x)_1$ ,  $YyH(x)_1$ ,  $YZz$ ,  $Zzx$ ,  $Zzy$  и для дуги  $Zz = \alpha_0$  имеем

$$a_1 = \cos(X, x) = \cos \kappa_0 \sin t + \cos \alpha_0 \sin \kappa_0 \cos t; \quad (2.51)$$

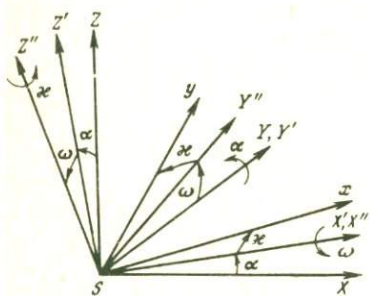


Рис. 21

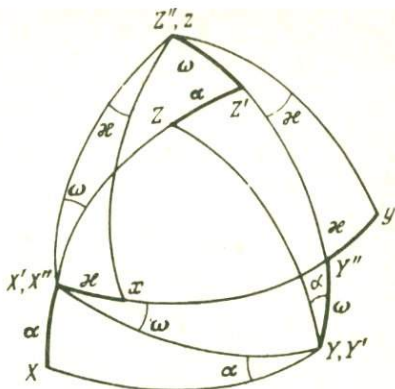


Рис. 22

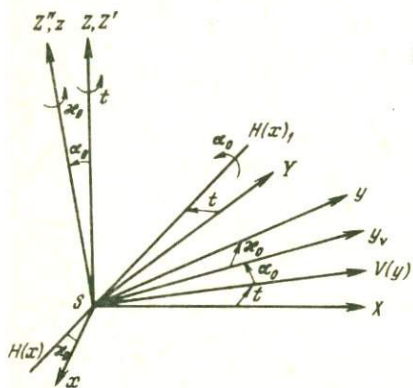


Рис. 23

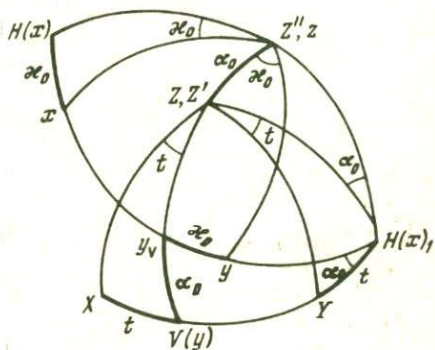


Рис. 24

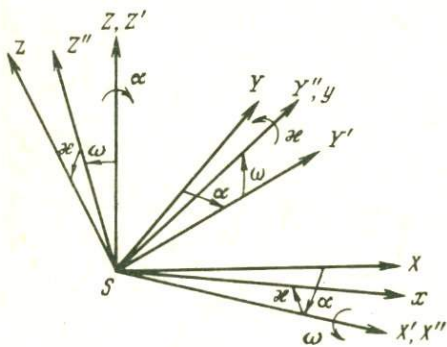


Рис. 25

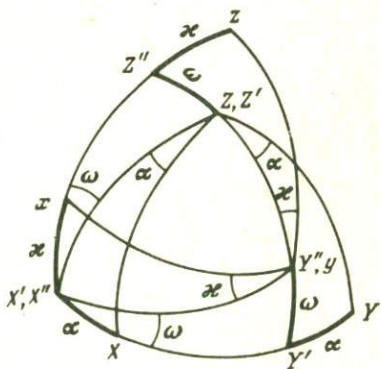


Рис. 26

$$\left. \begin{aligned}
 a_2 &= \cos(X, y) = -\sin \kappa_0 \sin t + \cos \alpha_0 \cos \kappa_0 \cos t; \\
 a_3 &= \cos(X, z) = -\sin \alpha_0 \cos t; \\
 b_1 &= \cos(Y, x) = -\cos \kappa_0 \cos t + \cos \alpha_0 \sin \kappa_0 \sin t; \\
 b_2 &= \cos(Y, y) = \sin \kappa_0 \cos t + \cos \alpha_0 \cos \kappa_0 \sin t; \\
 b_3 &= \cos(Y, z) = -\sin \alpha_0 \sin t; \\
 c_1 &= \cos(Z, x) = \sin \alpha_0 \sin \kappa_0; \\
 c_2 &= \cos(Z, y) = \sin \alpha_0 \cos \kappa_0; \\
 c_3 &= \cos(Z, z) = \cos \alpha_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

На рис. 25, 26 по теореме косинусов в сферических треугольниках  $XX'x$ ,  $XX'y$ ,  $XX'z$ ,  $YX'x$ ,  $YY'y$ ,  $YX'z$ ,  $Zyx$  дуга  $Zy = 90^\circ - \omega$ ,  $ZZ''z$  для наземной съемки находим

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \cos(X, x) = \cos a \cos \kappa - \sin a \sin \omega \sin \kappa, \\
 a_2 &= \cos(X, y) = \sin a \cos \omega, \\
 a_3 &= \cos(X, z) = -\cos a \sin \kappa - \sin a \sin \omega \cos \kappa, \\
 b_1 &= \cos(Y, x) = -\sin a \cos \kappa - \cos a \sin \omega \sin \kappa, \\
 b_2 &= \cos(Y, y) = \cos a \cos \omega, \\
 b_3 &= \cos(Y, z) = \sin a \sin \kappa - \cos a \sin \omega \cos \kappa, \\
 c_1 &= \cos(Z, x) = \cos \omega \sin \kappa, \\
 c_2 &= \cos(Z, y) = \sin \omega, \\
 c_3 &= \cos(Z, z) = \cos \omega \cos \kappa.
 \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (2.45) значения  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  из выражений (2.48), с учетом формул (2.50) и  $z = -f$  имеем

$$\left. \begin{aligned}
 X - X_S &= (Z - Z_S) \frac{a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) - a_3f}{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) - c_3f}; \\
 Y - Y_S &= (Z - Z_S) \frac{b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) - b_3f}{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) - c_3f}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

После подстановки в формулы (2.46) вместо  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  их значений из выражений (2.49) с учетом формул (2.50) получим

$$x - x_0 = -f \frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}; \quad (2.53)$$

$$y - y_0 = -f \frac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}. \quad (2.53)$$

Аналогичным образом для наземной съемки находим

$$\left. \begin{aligned} X - X_S &= (Y - Y_S) \frac{a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3f}{b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3f}; \\ Z - Z_S &= (Y - Y_S) \frac{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3f}{b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3f}; \\ x - x_0 &= f \frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}; \\ y - y_0 &= f \frac{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Формулы (2.52) и первые две формулы системы (2.54) позволяют определять координаты точек местности по координатам их изображений на снимке с произвольными углами наклона, а формулы (2.53) и последние две формулы системы (2.54) позволяют решать обратную задачу, т.е. определять координаты точек на снимке по координатам соответственных точек на местности.

Из сравнения соответствующих направляющих косинусов в формулах (2.50) и (2.51) получим связь между угловыми элементами  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  и  $\alpha_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $t$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a_3}{c_3} &= \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_0 \cos t; \\ -b_3 &= \sin \omega = \sin \alpha_0 \sin t; \\ \frac{b_1}{b_2} &= \operatorname{tg} \kappa = \frac{\cos \alpha_0 \operatorname{tg} \kappa_0 \operatorname{tg} t - 1}{\operatorname{tg} \kappa_0 + \cos \alpha_0 \operatorname{tg} t}; \\ \frac{b_3}{a_3} &= \operatorname{tg} t = \operatorname{tg} \omega / \sin \alpha; \\ \operatorname{tg} \alpha_0 &= \operatorname{tg} \alpha \sec t = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \omega}}{\cos \alpha \cos \omega}; \\ \sqrt{c_1^2 + c_2^2} &= \sin \alpha_0 = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \omega}; \\ \frac{c_1}{c_2} &= \operatorname{tg} \kappa_0 = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \kappa \sin \omega}{\sin \omega - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \kappa}. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$



$$= H \frac{y + f \operatorname{tg} \alpha_0}{f - y \operatorname{tg} \alpha_0} \quad (2.57)$$

Если начало координат поместить в точку нулевых искажений  $c$  и ее проекцию  $C$ , то согласно рис. 27. имеем

$$\left. \begin{aligned} Y_N &= Y + H \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = Y + H \frac{1 - \cos \alpha_0}{\sin \alpha_0}, \\ y_0 &= y - f \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = y - f \frac{1 - \cos \alpha_0}{\sin \alpha_0}, \end{aligned} \right\}$$

где  $Y_N, y_0$  — ординаты, входящие в формулы (2.57) (для отличия от ординат  $c$  началом в точках  $C$  и  $c$  им приданы индексы начал координат в формулах (2.57)). Подставляя эти значения вместо  $Y$  и  $y$  в формулы (2.57), после преобразований находим

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{H}{f - y \sin \alpha_0} x; \\ Y &= \frac{H}{f - y \sin \alpha_0} y. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

#### § 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА НА МЕСТНОСТИ ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЮ НА СНИМКЕ

Для вывода формулы, позволяющей определить отрезок на местности по его изображению на снимке, воспользуемся формулами (2.57) и (2.58). Используя формулы (2.57), для разности координат (начало координат в главной точке  $o$ ) определяем

$$\left. \begin{aligned} X_2 - X_1 &= H_1 \frac{f(x_2 - x_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \operatorname{tg} \alpha_0}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0) \cos \alpha_0} - h \frac{x_2}{(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0) \cos \alpha_0}; \\ Y_2 - Y_1 &= H_1 \frac{f(y_2 - y_1)}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0) \cos^2 \alpha_0} - h \frac{y_2 + f \operatorname{tg} \alpha_0}{f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

где  $h = H_2 - H_1$  — превышение точки 2 над точкой 1.

С учетом формул (2.58) (начало координат в точке нулевых искажений  $c$ ) имеем

$$X_2 - X_1 = H_1 \frac{f(x_2 - x_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \sin \alpha_0}{(f - y_1 \sin \alpha_0)(f - y_2 \sin \alpha_0)} - h \frac{x_2}{f - y_2 \sin \alpha_0};$$

$$Y_2 - Y_1 = H_1 \frac{f(y_2 - y_1)}{(f - y_1 \sin \alpha_0)(f - y_2 \sin \alpha_0)} - h \frac{y_2}{f - y_2 \sin \alpha_0} \quad (2.60)$$

Учитывая для вторых слагаемых полученных формул значения, определяемые по формулам (2.57) и (2.58), вместо (2.59), (2.60) находим

$$\left. \begin{aligned} X_2 - X_1 + h \frac{X_2}{H_2} &= H_1 \frac{f(x_2 - x_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \operatorname{tg} \alpha_0}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0) \cos \alpha_0} ; \\ Y_2 - Y_1 + h \frac{Y_2}{H_2} &= H_1 \frac{f(y_2 - y_1)}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0) \cos^2 \alpha_0} ; \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 - X_1 + h \frac{X_2}{H_2} &= H_1 \frac{f(x_2 - x_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \sin \alpha_0}{(f - y_1 \sin \alpha_0)(f - y_2 \sin \alpha_0)} ; \\ Y_2 - Y_1 + h \frac{Y_2}{H_2} &= H_1 \frac{f(y_2 - y_1)}{(f - y_1 \sin \alpha_0)(f - y_2 \sin \alpha_0)} . \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Возведя правые и левые части полученных выражений в квадрат и складывая после этого соответствующие части, для формул (2.61) имеем

$$\begin{aligned} D_0^2 &= \left( X_2 - X_1 + h \frac{X_2}{H_2} \right)^2 + \left( Y_2 - Y_1 + h \frac{Y_2}{H_2} \right)^2 = \\ &= H_1^2 \frac{[f(x_2 - x_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \operatorname{tg} \alpha_0]^2 \cos^2 \alpha_0 + f^2 (y_2 - y_1)^2}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)^2 (f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0)^2 \cos^4 \alpha_0} ; \end{aligned} \quad (2.63)$$

для формул (2.62) получим

$$\begin{aligned} D_0^2 &= \left( X_2 - X_1 + h \frac{X_2}{H_2} \right)^2 + \left( Y_2 - Y_1 + h \frac{Y_2}{H_2} \right)^2 = \\ &= H_1^2 \frac{[f(x_2 - x_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \sin \alpha_0]^2 + f^2 (y_2 - y_1)^2}{(f - y_1 \sin \alpha_0)^2 (f - y_2 \sin \alpha_0)^2} . \end{aligned} \quad (2.64)$$

В формулах (2.63), (2.64)  $D_0$  — центральная проекция отрезка 1—2 местности на горизонтальную плоскость, проходящую через точку 1. В формуле (2.63)

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = 2S_{012} = p_0 d, \quad (2.65)$$

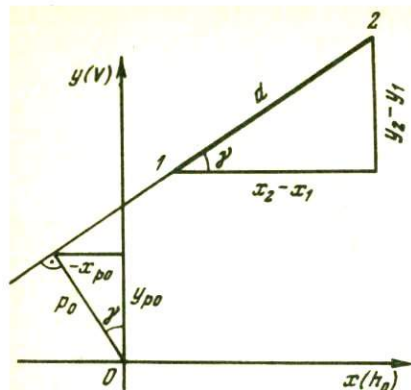


Рис. 28.

а в формуле (2.64)

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = 2S_{c12} = p_c d, \quad (2.66)$$

где  $S_{012}$ ,  $S_{c12}$  — площади треугольников  $o12$  и  $c12$ ;  $p_0$ ,  $p_c$  — длины перпендикуляров, опущенных из главной точки  $o$  и точки нулевых искажений  $c$  на отрезок  $d$ , изображающий на снимке отрезок местности  $12 = D$ .

После небольших преобразований вместо (2.63), (2.64) находим

$$D_0 = \frac{fH_1 d \sec \alpha_0}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0)} \left[ 1 + \left( \frac{y_2 - y_1}{d} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2 - \frac{2(x_2 - x_1)p_0}{fd} \operatorname{tg} \alpha_0 + \left( \frac{p_0}{f} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} ;$$

$$D_0 = \frac{fH_1 d}{(f - y_1 \sin \alpha_0)(f - y_2 \sin \alpha_0)} \left[ 1 - \frac{2(x_2 - x_1)p_c}{fd} \sin \alpha_0 + \left( \frac{p_c}{f} \sin \alpha_0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (2.67)$$

Принимая во внимание (рис. 28)

$$\frac{x_2 - x_1}{d} = \frac{y p_0}{p_0}$$

и по аналогии

$$\frac{x_2 - x_1}{d} = \frac{y p_c}{p_c},$$

вместо (2.67) определяем

$$D_0 = \frac{H_1 d \sec \alpha_0}{f \left( 1 - \frac{y_1}{f} \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \left( 1 - \frac{y_2}{f} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)} \left[ 1 + \left( \frac{y_2 - y_1}{d} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2 - \frac{2y p_0}{f} \operatorname{tg} \alpha_0 + \left( \frac{p_0}{f} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} ;$$

$$D_0 = \frac{H_1 d}{f \left(1 - \frac{y_1}{f} \sin \alpha_0\right) \left(1 - \frac{y_2}{f} \sin \alpha_0\right)} \left[ 1 - \frac{2y_{p_c}}{f} \sin \alpha_0 + \left(\frac{p_c}{f} \sin \alpha_0\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.68)$$

Анализ формул (2.68) показывает, что для определения отрезка  $D_0$  по его изображению  $d$  на снимке необходимо знать положение линии главного вертикала (для измерения координат  $y_1, y_2, y_{p_c}, y_{p_c}$ ) или угловой элемент внешнего ориентирования  $\alpha_0$ , угол наклона  $\alpha_0$ , фокусное расстояние камеры  $f$ , превышение  $h$  точки 2 над точкой 1, высоту фотографирования  $H_1$  относительно горизонтальной плоскости, проходящей через точку 1, координаты  $X_2, Y_2$  точки 2 на местности в системе пространственных координат с началом в точке надира  $N$  или в точке  $S$  и разности координат точек 2 и 1.

Так как  $D_0$  не зависит от поворота системы координат, то нет необходимости знать положение осей  $X, Y$  пространственной системы координат относительно линии направления съемки, т.е. не нужно знать угловой элемент внешнего ориентирования  $t$ .

Первая из формул (2.68) является более удобной для практического использования, так как положение главной точки  $o$  на снимке определяется проще, чем точка нулевых искажений  $s$ , но вторая из формул (2.68) является более простой и ее целесообразно использовать для анализа снимка.

Учитывая, что

$$p_c^2 = x_{p_c}^2 + y_{p_c}^2,$$

вместо второй из формул (2.68) находим

$$D_0 = \frac{H_1 d}{f \left(1 - \frac{y_1}{f} \sin \alpha_0\right) \left(1 - \frac{y_2}{f} \sin \alpha_0\right)} \left[ \left(1 - \frac{y_{p_c}}{f} \sin \alpha_0\right)^2 + \frac{x_{p_c}^2}{f^2} \sin^2 \alpha_0 \right]^{\frac{1}{2}}$$

или, учитывая, что при  $h = 0$   $D_0 = D$ , имеем

$$D = \frac{H_1 d \left(1 - \frac{y_{p_c}}{f} \sin \alpha_0\right)}{f \left(1 - \frac{y_1}{f} \sin \alpha_0\right) \left(1 - \frac{y_2}{f} \sin \alpha_0\right)} \left[ 1 + \left(\frac{x_{p_c} \sin \alpha_0}{f - y_{p_c} \sin \alpha_0}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.69)$$

Так как

$$\operatorname{tg}(\gamma - A) = \frac{x_{p_c} \sin \alpha_0}{f - y_{p_c} \sin \alpha_0},$$

где  $(\gamma - A)$  – искажение направления на снимке (см. § 15) ( $\gamma$  – угол между осью  $o x(h)$  и отрезком  $d$  (см. рис. 28), на плоской местности углу  $\gamma$  соответствует угол  $A$ ), то

$$D = \frac{H_1 d (1 - \frac{y_{p_c}}{f} \sin \alpha_0) \sec(\gamma - A)}{f (1 - \frac{y_1}{f} \sin \alpha_0) (1 - \frac{y_2}{f} \sin \alpha_0)}. \quad (2.70)$$

Рассмотрим частные случаи расположения отрезка  $d$  на снимке.

1. Отрезок  $d$  расположен на линии неискаженного масштаба  $h_c h_c$ . В этом случае  $y_1 = y_2 = x_{p_c} = y_{p_c} = 0$ , а

$$D = H_1 d / f, \quad (2.71)$$

т.е. в этом случае отрезок  $D$  определяется по формуле, используемой для горизонтального снимка.

2. Отрезок  $d$  находится на горизонтали,  $y_1 = y_2 = y_{p_c} = y$ ,  $x_{p_c} = 0$ , а

$$D = \frac{H_1 d}{f - y \sin \alpha_0}. \quad (2.72)$$

3. Отрезок  $d$  проходит через точку нулевых искажений, при этом  $x_{p_c} = y_{p_c} = 0$ , а

$$D = \frac{H_1 d}{f (1 - \frac{y_1 + y_2}{f} \sin \alpha_0 + \frac{y_1 y_2}{f^2} \sin^2 \alpha_0)}. \quad (2.73)$$

По этой же формуле определяется отрезок  $D$  и для случая, когда отрезок  $d$  находится на линии главного вертикала  $sv$ . Формула (2.73) переходит в формулу (2.71) для горизонтального снимка при условии

$$\frac{y_1 y_2}{f} \sin \alpha_0 - (y_1 + y_2) = 0,$$

т.е. при

$$y_1 = - \frac{y_2}{1 - \frac{y_2}{f} \sin \alpha_0}. \quad (2.74)$$

Следовательно, если отрезок  $d$  проходит через точку  $c$  и его концы на снимке будут иметь ординаты  $y_1$  и  $y_2$ , отвечающие условию (2.74), то такой отрезок будет равен соответствующему ему отрезку на горизонтальном снимке, т.е. не будет иметь искажения за угол наклона снимка.

При плановой аэро съемке второе слагаемое в знаменателе формулы (2.74) значительно меньше единицы, поэтому для этого случая приближенно можно считать  $y_1 \approx -y_2$ , т.е. на плановом аэроснимке при симметричном расположении концов отрезка  $d$  относительно точки нулевых искажений  $c$  этот отрезок не будет иметь искажения за угол наклона снимка.

4. Один из концов отрезка, например точка 1, совпадает с точкой нулевых искажений  $c$ . В этом случае  $y_1 = x_{pc} = y_{pc} = 0$ . Принимая  $d = r$ ,  $D = R$  и учитывая, что  $y_2 = y = r \sin \varphi$ , вместо формулы (2.69) находим

$$R = \frac{H_1 r}{f - y \sin \alpha_0} = \frac{H_1 r}{f - r \sin \alpha_0 \sin \varphi}. \quad (2.75)$$

На трансформированном снимке радиус-вектор

$$r_0 = R \frac{f}{H_1} = \frac{fr}{f - r \sin \alpha_0 \sin \varphi}. \quad (2.76)$$

Смещение точки снимка  $\delta r$  вследствие угла наклона

$$\begin{aligned} \delta r = r - r_0 &= r_0 \left( 1 - \frac{f}{f - r \sin \alpha_0 \sin \varphi} \right) = - \frac{r^2 \sin \alpha_0 \sin \varphi}{f - r \sin \alpha_0 \sin \varphi} = \\ &= - \frac{r r_0}{f} \sin \alpha_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Так как угол наклона  $\alpha_0$  всегда положителен, то в первой и второй четвертях, т.е. выше линии неискаженного масштаба,  $h_c h_c \delta r$  будет отрицательным, а в третьей и четвертой четвертях, т.е. ниже линии  $h_c h_c$ , — положительным. При  $\varphi = 0, 180^\circ$   $\delta r = 0$ .

Максимальное по абсолютной величине смещение за угол наклона имеют точки, расположенные на линии главного вертикала ( $\sin \varphi = \pm 1$ ) и максимально удаленные от точки  $c$ , т.е.

$$\delta r_{\max} = \frac{r_0 r \sin \alpha_0}{f}. \quad (2.78)$$

Решая (2.77) относительно  $r$ , получим выражение

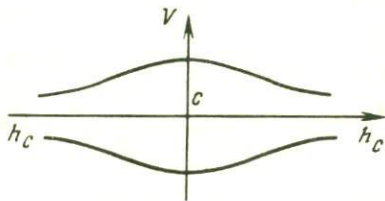


Рис. 29

$$r = \frac{\delta r}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta r^2}{4} - \frac{f \delta r}{\sin \alpha_0 \sin \varphi}}, \quad (2.79)$$

определяющее геометрическое место точек, для которых  $\delta r = \text{const}$  (рис. 29). Кривые на рис. 29 ограничивают на снимке зону, в пределах которой радиальное смещение из-за угла наклона  $\alpha_0$  не превышает заданной величины.

### § 15. СВЯЗЬ МЕЖДУ УГЛАМИ НА СНИМКЕ И МЕСТНОСТИ

На рис. 30

$$\text{tg} A = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}. \quad (2.80)$$

Подставляя в эту формулу вместо  $X_2 - X_1$  и  $Y_2 - Y_1$  их значения из формул (2.59), получим

$$\text{tg} A = \frac{f(y_2 - y_1) \sec \alpha_0 - \frac{h}{H_1} (y_2 + f \text{tg} \alpha_0) (f - y_1 \text{tg} \alpha_0) \cos \alpha_0}{f(x_2 - x_1) - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \text{tg} \alpha_0 - \frac{h x_2}{H_1} (f - y_1 \text{tg} \alpha_0)}.$$

Поделив числитель и знаменатель на  $f(x_2 - x_1)$  для начала координат в точке  $o$  находим

$$\text{tg} A = \frac{\text{tg} \gamma \sec \alpha_0 - \frac{h (y_2 + f \text{tg} \alpha_0) (f - y_1 \text{tg} \alpha_0)}{H_1 f (x_2 - x_1)} \cos \alpha_0}{1 - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{f (x_2 - x_1)} \text{tg} \alpha_0 - \frac{h x_2 (f - y_1 \text{tg} \alpha_0)}{H_1 f (x_2 - x_1)}}. \quad (2.81)$$

На рис. 31 с учетом формулы (2.65) имеем

$$\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = \frac{p_0 d}{x_2 - x_1} = y V_0, \quad (2.82)$$

где  $y V_0$  — ордината точки пересечения линии 1–2 с главной вертикалью  $o V$ . С учетом этого вместо формулы (2.81) при  $h = 0$  находим

$$\text{tg} A = \frac{\text{tg} \gamma}{\cos \alpha_0 - \frac{y V_0 \sin \alpha_0}{f}}. \quad (2.83)$$

Рис. 30

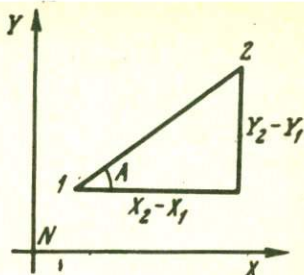
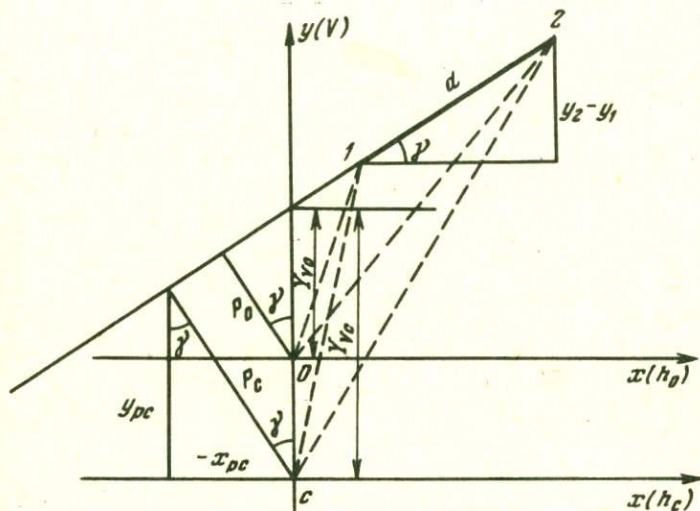


Рис. 31



Аналогичным образом, подставляя в выражение (2.80) вместо  $Y_2 - Y_1$  и  $X_2 - X_1$  их значения из уравнений (2.60), для начала координат в точке нулевых искажений  $c$  получим

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} \gamma - \frac{h y_2 (f - y_1 \sin \alpha_0)}{H_1 f (x_2 - x_1)}}{1 - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{f (x_2 - x_1)} \sin \alpha_0 - \frac{h x_2 (f - y_1 \sin \alpha_0)}{H_1 f (x_2 - x_1)}} \quad (2.84)$$

При  $h = 0$  с учетом уравнения (2.82), но с началом координат в точке  $c$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{1 - \frac{y_{Vc}}{f} \sin \alpha_0} \quad (2.85)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Снимок горизонтальный,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\text{tg}A = \text{tg}\gamma$ , т.е. на горизонтальном снимке плоской местности направления и углы не искажаются.

2. Направление на снимке проходит через главную точку  $o$ . В этом случае  $y_{V_0} = 0$ , а  $\text{tg}A = \text{tg}\gamma \sec\alpha_0$ . (2.86)

3. Направление на снимке проходит через точку нулевых искажений  $c$ , т.е.  $y_V = 0$ , а  $\text{tg}A = \text{tg}\gamma$ . Следовательно, направления, проходящие через точку  $c$ , не искажаются.

4. Направление на снимке проходит через точку надира  $n$ ,  $y_V = -f \text{tg}\alpha_0$ , а  $\text{tg}A = \text{tg}\gamma \cos\alpha_0$ . (2.87)

Для определения углового искажения, равного разности углов  $\gamma$  и  $A$ , с учетом формулы (2.83)

$$\text{tg}(\gamma - A) = \frac{\text{tg}\gamma - \text{tg}A}{1 + \text{tg}\gamma \text{tg}A} = \text{tg}\gamma \frac{\cos\alpha_0 - \frac{y_{V_0}}{f} \sin\alpha_0 - 1}{\cos\alpha_0 - \frac{y_{V_0}}{f} \sin\alpha_0 + \text{tg}^2\gamma}, \quad (2.88)$$

а с учетом формулы (2.85) получим

$$\text{tg}(\gamma - A) = - \frac{y_{V_c} \text{tg}\gamma \sin\alpha_0}{f \sec^2\gamma - y_{V_c} \sin\alpha_0}$$

или

$$\text{tg}(\gamma - A) = - \frac{y_{V_c} \sin\gamma \cos\gamma \sin\alpha_0}{f - y_{V_c} \cos^2\gamma \sin\alpha_0}.$$

Учитывая (рис. 31)

$$y_{V_c} \cos\gamma = p_c, \quad p_c \sin\gamma = -x_{p_c}^*, \quad p_c \cos\gamma = y_{p_c},$$

определяем

$$\text{tg}(\gamma - A) = - \frac{p_c \sin\gamma \sin\alpha_0}{f - p_c \cos\gamma \sin\alpha_0} = \frac{x_{p_c}^* \sin\alpha_0}{f - y_{p_c}^* \sin\alpha_0}. \quad (2.89)$$

Формула (2.89) показывает, что угловые искажения на наклонном снимке равны нулю при  $x_{p_c}^* = 0$ . Последнее условие выполняется, когда направления проходят через точку нулевых искажений  $c$  и когда направления перпендикулярны линии главного вертикала  $cv$ .

Известно, что масштаб

$$1/m = dd/dD = dd/dD_0.$$

Подставляя в это выражение первую формулу системы (2.68), формулы (2.69), (2.70) и учитывая, что для бесконечно малого расстояния  $dd$   $y_1 = y_2$ , после небольших преобразований находим

$$\frac{1}{m} = \frac{f(1 - \frac{y}{f} \operatorname{tg} \alpha_0)^2 \cos \alpha_0}{H \left[ \left(1 - \frac{y p_0}{f} \operatorname{tg} \alpha_0\right)^2 + \left(\frac{1}{p_0^2} + \frac{1}{f^2}\right) x p_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.90)$$

и

$$\frac{1}{m} = \frac{f(1 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0)^2}{H \left[ \left(1 - \frac{y p_c}{f} \sin \alpha_0\right)^2 + \frac{x p_c^2}{f^2} \sin^2 \alpha_0 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{f(1 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0)^2 \cos(\gamma - A)}{H \left(1 - \frac{y p_c}{f} \sin \alpha_0\right)}, \quad (2.91)$$

где  $(\gamma - A)$  определяется по формуле (2.89).

В формуле (2.90) начало координат находится в главной точке снимка  $o$ , а в формуле (2.91) — в точке нулевых искажений  $c$ .

Полученные формулы показывают, что на снимке плоской местности масштаб на бесконечно малом участке (около точки) зависит от высоты фотографирования  $H$ , фокусного расстояния фотокамеры  $f$ , угла наклона снимка  $\alpha_0$ , от координат основания перпендикуляра, опущенного из точки  $o$  или  $c$  на направление, проходящее через данную точку, и от ординаты точки.

Учитывая  $f' = \frac{f}{\sin \alpha_0}$  и (рис. 32)

$$\left. \begin{aligned} -x_{p_c} &= p_c \sin \gamma = r \sin(\varphi - \gamma) \sin \gamma; \\ y_{p_c} &= p_c \cos \gamma = r \sin(\varphi - \gamma) \cos \gamma, \end{aligned} \right\} (2.92)$$

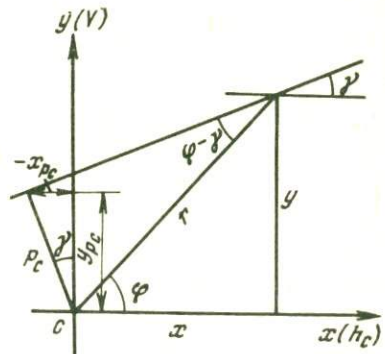


Рис. 32

вместо выражения (2.91) после небольших преобразований получим

$$\frac{1}{m} = \frac{f(f' - r \sin \varphi)^2}{Hf' [f'^2 - 2rf' \sin(\varphi - \gamma) \cos \gamma + r^2 \sin^2(\varphi - \gamma)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.93)$$

Для определения экстремальных значений масштаба найдем экстремум функции

$$u = f'^2 - 2rf' \sin(\varphi - \gamma) \cos \gamma + r^2 \sin^2(\varphi - \gamma).$$

Беря первую производную по  $\gamma$  и приравнявая ее нулю, получим

$$\frac{du}{d\gamma} = -2rf' [-\cos(\varphi - \gamma) \cos \gamma - \sin(\varphi - \gamma) \sin \gamma] - 2r^2 \sin(\varphi - \gamma) \cos(\varphi - \gamma) = 0$$

или

$$2f' \cos(\varphi - 2\gamma) = r \sin 2(\varphi - \gamma).$$

После преобразований находим

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{2f \cos \varphi - r \sin \alpha_0 \sin 2\varphi}{2f \sin \varphi + r \sin \alpha_0 \cos 2\varphi} = -\frac{x - \frac{xy}{f} \sin \alpha_0}{y + \frac{x^2 - y^2}{2f} \sin \alpha_0}.$$

Для планового снимка второе слагаемое в числителе и знаменателе полученной формулы значительно меньше первых. Например, при  $x = y = 70$  мм,  $f = 100$  мм,  $\alpha_0 = 2^\circ$  второе слагаемое в числителе равно 1,71 мм, т.е. примерно в 41 раз меньше первого слагаемого. Отбрасывая вторые слагаемые, получим

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg}(90^\circ + \varphi) = \operatorname{tg}(270^\circ + \varphi),$$

откуда

$$\gamma_1 = 45^\circ + \varphi/2, \quad \gamma_2 = 135^\circ + \varphi/2.$$

Следовательно, экстремальные масштабы имеют взаимно перпендикулярные направления.

Анализ полученных формул показывает, что направление  $\gamma_1$ , проходящее через данную точку, имеет минимальное значение масштаба  $(\frac{1}{m})_{\min}$ , а направление  $\gamma_2$  — максимальное значение  $(\frac{1}{m})_{\max}$ .

Полученные общие формулы масштабов позволяют получить формулы масштабов для частных случаев.

1. Масштаб горизонтального снимка. В этом случае  $\alpha_0 = 0$ , а  $1/m = f/H$ .

2. Масштаб наклонного снимка по направлениям, проходящим через главную точку  $o$ . В этом случае в формуле (2.90)  $x_{p_0} = y_{p_0} = p_0 = 0$ ,  $(\frac{x_{p_0}}{p_0})^2 = \sin^2 \gamma = \sin^2 \varphi = \frac{y^2}{r^2}$ , а

$$\frac{1}{m} = \frac{f(1 - \frac{y}{f} \operatorname{tg} \alpha_0)^2 \cos \alpha_0}{H(1 + \frac{y^2}{r^2} \operatorname{tg}^2 \alpha_0)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.94)$$

Для главной вертикали  $y = r$ , а вместо уравнения (2.94) находим

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} (\cos \alpha_0 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0)^2. \quad (2.95)$$

3. Масштаб наклонного снимка по направлениям, проходящим через точку нулевых искажений  $c$ . В этом случае  $x_{p_c} = y_{p_c} = 0$ , а вместо уравнения (2.91) получим

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} (1 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0)^2. \quad (2.96)$$

Если начало координат совпадает с главной точкой снимка, то, подставляя в формулу (2.96)

$$y = y + f \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = y + f \frac{1 - \cos \alpha_0}{\sin \alpha_0},$$

после преобразований получаем

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} (\cos \alpha_0 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0)^2. \quad (2.97)$$

В точке нулевых искажений  $y = 0$ . С учетом этого вместо формулы (2.96)

имеем  $\frac{1}{m} = \frac{f}{H}$ , т.е. масштаб в точке нулевых искажений по любому направлению равен масштабу горизонтального снимка.

4. Масштаб снимка по горизонталям. Горизонталями на снимке называют прямые, параллельные линии горизонта или перпендикулярные к главной вертикали. В этом случае  $x_{p_0} = 0, y_{p_0} = p_0 = y$ , а вместо формулы (2.90) для начала координат в точке  $o$  получим

$$\frac{1}{m_h} = \frac{f}{H} (\cos \alpha_0 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0). \quad (2.98)$$

Если начало координат находится в точке нулевых искажений  $c$ , то учитывая, что  $x_{p_c} = 0, y_{p_c} = y$ , вместо формулы (2.91) имеем

$$\frac{1}{m_h} = \frac{f}{H} \left(1 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0\right). \quad (2.99)$$

Для горизонтали, проходящей через точку нулевых искажений в формуле (2.99)  $y = 0$ , а  $1/m_h = f/H$ , т.е. равен масштабу горизонтального снимка. Следовательно, масштаб из-за наклона снимка не искажается и поэтому горизонталь, проходящую через точку нулевых искажений, называемой линией неискаженного масштаба.

Для плановых снимков в формуле (2.91) с учетом выражения (2.89) можно считать

$$\cos(\gamma - A) = 1 - \frac{(\gamma - A)^2}{2} = 1 - \frac{x_{p_c}^2 \sin^2 \alpha_0}{2(f - y_{p_c} \sin \alpha_0)^2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} \frac{\left(1 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0\right)^2}{\left(1 - \frac{y_{p_c}}{f} \sin \alpha_0\right)} \left[1 - \frac{x_{p_c}^2 \sin^2 \alpha_0}{2(f - y_{p_c} \sin \alpha_0)^2}\right]. \quad (2.100)$$

При  $\alpha_0 = 3^\circ$ ,  $x_{p_c} = f$ ,  $y_{p_c} = 0$  формула (2.100) позволяет определять масштаб, отличающийся от его точного значения на  $1/350000$  от величины  $\frac{1}{m}$ .

Для горизонтали  $x_{p_c} = 0$ ,  $y_{p_c} = y$  и формула (2.100) переходит в строгую формулу (2.99). Для главной вертикали  $x_{p_c} = y_{p_c} = 0$ , а формула (2.100) соответствует строгой формуле (2.96). Следовательно, для горизонталей и главной вертикали формула (2.100) является строгой.

С погрешностью порядка  $1/7000$  при ( $\alpha_0 = 3^\circ$ ,  $x_{p_c} = f = y_{p_c}$ ) можно считать

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} \left(1 - \frac{y}{f} \sin \alpha_0\right)^2 \frac{1 - \frac{x_{p_c}^2 \sin^2 \alpha_0}{2f^2}}{1 - \frac{y_{p_c} \sin \alpha_0}{f}}. \quad (2.101)$$

Отбрасывая члены, в которых  $\sin \alpha_0$  во второй степени и выше, после небольших преобразований получим известную формулу [5]

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} \left\{1 - \frac{\sin \alpha_0}{f} \left[\gamma(1 + \sin^2 \gamma) + \frac{x}{2} \sin 2\gamma\right]\right\}. \quad (2.102)$$

Средний масштаб в произвольной точке планового снимка

$$\frac{1}{m_{cp}} = \frac{f}{H} \left\{1 - \frac{\sin \alpha_0}{f} \left[\gamma(1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma d\gamma) + \frac{x}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\gamma d\gamma\right]\right\}.$$

После интегрирования и подстановки пределов находим [5]

$$\frac{1}{m_{\text{ср}}} = \frac{f}{H} \left( 1 - \frac{3y \sin \alpha_0}{2f} \right). \quad (2.103)$$

Средний масштаб планового снимка можно считать равным  $f/H$ , так как согласно формуле (2.99) для горизонталей, симметричных относительно точки нулевых искажений, средний масштаб равен масштабу горизонтального снимка, т.е.  $f/H$ , и главная точка  $o$  находится вблизи точки  $c$ .

## ГЛАВА 3

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ И ПОПРАВОК В КООРДИНАТЫ ТОЧЕК СНИМКА ПО ОПОРНЫМ ТОЧКАМ

#### § 17. СОВМЕСТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ И ПОПРАВОК В КООРДИНАТЫ ТОЧЕК СНИМКА ПО ОПОРНЫМ ТОЧКАМ

Решение многих задач фотограмметрии требует знания значений элементов внутреннего и внешнего ориентирования. В последнее время эта необходимость значительно увеличилась в связи с калибровкой снимков по материалам фотографирования специальных полигонов, при которой наряду с поправками в координаты точек снимка определяют элементы внутреннего и внешнего ориентирования. Кроме того, фотографирование из космического пространства дает возможность получать снимки мелкого масштаба. На каждом таком снимке, как правило, изображается большое число опорных точек, позволяющих определять элементы ориентирования без дополнительных работ по развитию геодезической опорной сети.

Для определения элементов внутреннего и внешнего ориентирования используют две группы методов [5].

Первая группа включает методы, связанные с применением зависимости между координатами опорных точек и соответствующих им точек снимка (обратная засечка).

Вторая группа основана на использовании специальных приборов, установленных на борту летательного аппарата и фиксирующих положение съемочной камеры относительно различных объектов (инерциальных и изобарических полей, линии горизонта, звезд, поверхности снимаемого объекта и т.п.).

В данной работе будет рассмотрена первая группа методов. Эту группу можно разделить на способы, в которых элементы внешнего и внутреннего (или только внешнего) ориентирования определяются одновременно

из решения системы уравнений, связывающих координаты точек местности и точек снимка, и позволяющих определять раздельно элементы внутреннего и внешнего ориентирования или некоторые из этих элементов (например, раздельно угловые и линейные элементы внешнего ориентирования).

Совместное определение элементов ориентирования, связанное с решением системы уравнений с 9 или 11 неизвестными, может быть выполнено только методом приближений и является громоздким. Кроме того, при совместном определении всех элементов ориентирования возможна взаимная деформация определяемых элементов.

Дифференцированные методы позволяют определять элементы ориентирования и поправки в координаты точек раздельным решением независимых между собой уравнений, при этом каждая система содержит небольшое число неизвестных. Эти методы более простые с точки зрения вычислений и особенно для анализа получаемых результатов.

Совместное определение элементов внутреннего и внешнего ориентирования и поправок в координаты точек снимка по опорным точкам основано на решении обратной пространственной фотограмметрической засечки. Определяемыми неизвестными являются элементы внутреннего ориентирования  $x_0, y_0, f$ ; элементы внешнего ориентирования  $\alpha, \omega, \kappa, X_S, Y_S, Z_S$  и поправки  $\delta x, \delta y$  к координатам точек снимков за суммарное влияние всех источников ошибок [13].

Между координатами  $X_S, Y_S, Z_S$  центра проектирования, пространственными прямоугольными координатами  $X, Y, Z$  точки местности и координатами  $x, y$  ее изображения на снимке существует известная зависимость

$$X = X_S + (Z - Z_S) \frac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} = X_S + (Z - Z_S) \frac{X'}{Z'}; \quad (3.1)$$

$$Y = Y_S + (Z - Z_S) \frac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} = Y_S + (Z - Z_S) \frac{Y'}{Z'},$$

где  $f$  – фокусное расстояние аэрокамеры;  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – направляющие косинусы, определяемые по формулам (2.50).

Координаты  $x_i, y_i$  точек снимка связаны с измеренными координатами  $(x_i), (y_i)$  формулами [13]

$$\left. \begin{aligned} x_i &= (x_i) + x_0 + \delta \bar{x}; \\ y_i &= (y_i) + y_0 + \delta \bar{y}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) являются нелинейными относительно неизвестных, поэтому их целесообразно решать методом приближений. Линеаризация уравнений (3.1) приводит к уравнениям поправок [13]

$$a \delta x_0 + b \delta y_0 + c \delta f + d \delta \bar{x}_i + e \delta \bar{y}_i + f \delta \alpha + g \delta \omega + h \delta \kappa + i \delta X_S + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} &+ j\delta Y_S + k\delta Z_S + l = v; \\ &a'\delta x_0 + b'\delta y_0 + c'\delta f + d'\delta \bar{x}_j + e'\delta \bar{y}_j + f'\delta \alpha + g'\delta \omega + h'\delta \kappa + \\ &+ i'\delta X_S + j'\delta Y_S + k'\delta Z_S + l' = v', \end{aligned} \right\} (3.3)$$

где  $\delta x_0, \delta y_0, \delta f$  — поправки к приближенным значениям элементов внутреннего ориентирования снимков;  $\delta \bar{x}_j, \delta \bar{y}_j$  — поправки к координатам точки  $j$  за суммарное влияние всех источников систематических ошибок;  $\delta \alpha, \delta \omega, \delta \kappa, \delta X_S, \delta Y_S, \delta Z_S$  — поправки к приближенным значениям элементов внешнего ориентирования снимков;  $l = (X) - X, l' = (Y) - Y$  — свободные члены уравнений поправок разности между вычисленными по формулам (3.1) значениями  $(X), (Y)$  и определенными геодезическими методами координатами  $X, Y$  точек местности;  $a, b, \dots, k'$  — коэффициенты (частные производные), определяемые по формулам

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\partial X}{\partial x_0} = d = \frac{\partial X}{\partial x} = (Z - Z_S) \frac{a_1 Z' - c_1 X'}{Z'^2}; \\ b &= \frac{\partial X}{\partial y_0} = e = \frac{\partial X}{\partial y} = (Z - Z_S) \frac{a_2 Z' - c_2 X'}{Z'^2}; \\ c &= \frac{\partial X}{\partial f} = -(Z - Z_S) \frac{a_3 Z' - c_3 X'}{Z'^2}; \\ f &= \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -(Z - Z_S) \frac{X'^2 + Z'^2}{Z'^2}; \\ g &= \frac{\partial X}{\partial \omega} = -(Z - Z_S) \frac{Y'Z' \sin \alpha + X'Y' \cos \alpha}{Z'^2}; \\ h &= \frac{\partial X}{\partial \kappa} = (Z - Z_S) \frac{Z'(a_2 x - a_1 y) - X'(c_2 x - c_1 y)}{Z'^2}; \\ i &= \partial X / \partial X_S = 1; \quad j = \partial X / \partial Y_S = 0; \quad k = \partial X / \partial Z_S = -X' / Z'; \\ a' &= \frac{\partial Y}{\partial x_0} = d' = \frac{\partial Y}{\partial x} = (Z - Z_S) \frac{b_1 Z' - c_1 Y'}{Z'^2}; \\ b' &= \frac{\partial Y}{\partial y_0} = e' = \frac{\partial Y}{\partial y} = (Z - Z_S) \frac{b_2 Z' - c_2 Y'}{Z'^2}; \\ c' &= \frac{\partial Y}{\partial f} = -(Z - Z_S) \frac{b_2 Z' - c_2 Y'}{Z'^2}; \end{aligned} \right\} (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} f' &= \frac{\partial Y}{\partial a} = -(Z - Z_S) \frac{X' Y'}{Z'^2}; \\ g' &= \frac{\partial Y}{\partial \omega} = (Z - Z_S) \frac{Z' [(x \sin \kappa + y \cos \kappa) b_3 + f \cos \omega] - Y'^2 \cos \alpha}{Z'^2}; \\ h' &= \frac{\partial Y}{\partial \kappa} = (Z - Z_S) \frac{Z' (b_2 x - b_1 y) - Y' (c_2 x - c_1 y)}{Z'^2}; \\ i' &= \partial Y / \partial X_S = 0, \quad j' = \partial Y / \partial Y_S = 1; \quad k' = \partial Y / \partial Z_S = -Y' / Z'. \end{aligned} \right\}$$

Используя измеренные координаты  $(x)$ ,  $(y)$  точек снимка, пространственные координаты  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  опорных точек и приближенные значения  $\alpha_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $X_{S_0}$ ,  $Y_{S_0}$ ,  $Z_{S_0}$  элементов внешнего ориентирования снимков, вычисляют: по формулам (3.4) коэффициенты  $a$ ,  $b$ , ...,  $k'$ ; по формулам (3.1) значения  $(X)$ ,  $(Y)$ ; по формулам

$$l = (X) - X; \quad l' = (Y) - Y \quad (3.5)$$

— свободные члены; по формулам (3.3) составляют систему уравнений и решают ее с использованием метода наименьших квадратов.

Величины коэффициентов при неизвестных зависят от рельефа местности, положения точки на снимке и от углов наклона снимка. Как отмечается в работе [13], с увеличением углов наклона значения коэффициентов возрастают, причем величины коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$  растут быстрее, чем коэффициенты  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $k$  и  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$ ,  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ . Коэффициенты второй группы (при элементах внешнего ориентирования) больше, чем коэффициенты первой группы, поэтому с увеличением углов наклона и поворота различие в величинах коэффициентов групп становятся меньше, а решение задачи — точнее. Наиболее точно задача решается при углах наклона и поворота снимков  $15 - 30^\circ$  и всхолмленной местности [13].

Каждая опорная точка дает возможность составить два уравнения с 11 неизвестными. Девять из этих неизвестных являются общими для всех уравнений, составленных для точек данного снимка, а два  $(\delta \bar{x}, \delta \bar{y})$  относятся только к данной точке. Поэтому решить задачу полной калибровки по одному снимку нельзя.

При решении задачи по нескольким снимкам неизвестные  $\delta \bar{x}$  и  $\delta \bar{y}$  можно определить из уравнений, составленных по разным точкам местности, изображившимся в одной и той же зоне на каждом из снимков, т.е. поправки  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  будут относиться ко всем точкам на всех снимках, расположенных в  $i$ -й зоне. Количество зон и их расположение зависят от числа снимков, точек полигона и конкретных целей калибровки.

В работе [13] отмечается, что обязательным условием высокоточной калибровки является наличие нескольких снимков с одинаковыми по абсолютной величине и противоположными по знаку углами наклона, достигающими  $15 - 30^\circ$ .

Задача решается в два этапа.

**Первый этап.** По результатам измерений на каждом снимке составля-

ют системы уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} f\delta a + g\delta\omega + h\delta\kappa + i\delta X_S + j\delta Y_S + k\delta Z_S + l = v; \\ f'\delta a + g'\delta\omega + h'\delta\kappa + i'\delta X_S + j'\delta Y_S + k'\delta Z_S + l' = v', \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

из решения которых определяют поправки  $\delta a$ ,  $\delta\omega$ ,  $\delta\kappa$ ,  $\delta X_S$ ,  $\delta Y_S$ ,  $\delta Z_S$  и определяют значения неизвестных по формулам

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta a; & X_S &= X_{S_0} + \delta X_S; \\ \omega &= \omega_0 + \delta\omega; & Y_S &= Y_{S_0} + \delta Y_S; \\ \kappa &= \kappa_0 + \delta\kappa; & Z_S &= Z_{S_0} + \delta Z_S. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

По исправленным значениям неизвестных опять составляют уравнения вида (3.6), решают их и так продолжают до тех пор, пока поправки к неизвестным не станут меньше установленных допусков, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \delta a \\ \delta\omega \\ \delta\kappa \end{aligned} \right\} \leq \epsilon_1, \quad \left. \begin{aligned} \delta X_S \\ \delta Y_S \end{aligned} \right\} \leq \epsilon_2, \quad \delta Z_S \leq \epsilon_3. \quad (3.8)$$

Допуск  $\epsilon$  определяют в зависимости от качества снимков, точности измерений на снимке координат точек, точности определения координат опорных точек.

**Второй этап.** Используя полученные на первом этапе значения неизвестных, составляют и решают систему всех уравнений вида (3.3). Задачу решают методом приближений. После каждого решения системы исправляют значения элементов внешнего ориентирования по формулам (3.7) и параметров калибровки по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \delta x_{01} + \delta x_{02} + \dots; \\ y_0 &= \delta y_{01} + \delta y_{02} + \dots; \\ \delta x_i &= \delta x_{i1} + \delta x_{i2} + \dots; \\ \delta y_i &= \delta y_{i1} + \delta y_{i2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Вычисления заканчивают, когда поправки

$$\delta\xi (\xi = a, \omega, \kappa, X_S, Y_S, Z_S, \delta x_0, \delta y_0, \delta f, \delta\bar{x}, \delta\bar{y})$$

станут меньше допустимого значения  $\epsilon$ .

По результатам последнего приближения по формулам (3.6) вычисляют значения  $v$ , используя которые, определяют ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[v v]}{2n - i}}, \quad (3.10)$$

где  $n$  — число опорных точек,  $i$  — число неизвестных.

Определив весовые коэффициенты  $Q_{ii}$ , выполняют оценку точности неизвестных по формулам

$$\left. \begin{aligned} m_{x_0} &= \mu \sqrt{Q_{11}}; & m_a &= \mu \sqrt{Q_{66}}; \\ m_{y_0} &= \mu \sqrt{Q_{22}}; & m_{\omega} &= \mu \sqrt{Q_{77}}; \\ m_f &= \mu \sqrt{Q_{33}}; & m_{\kappa} &= \mu \sqrt{Q_{88}}; \\ m_{\delta x} &= \mu \sqrt{Q_{44}}; & m_{X_S} &= \mu \sqrt{Q_{99}}; \\ m_{\delta y} &= \mu \sqrt{Q_{55}}; & m_{Y_S} &= \mu \sqrt{Q_{1010}}; \\ & & m_{Z_S} &= \mu \sqrt{Q_{1111}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

В работе [3] доказывается, что решение рассматриваемой задачи можно без ущерба для строгости и точности конечного результата значительно упростить, так как при калибровке АФА по снимкам эталонного полигона нет необходимости совместного решения обратных фотограмметрических засечек для группы снимков. Достаточно руководствоваться следующим простым порядком работы: 1) определение из одиночных обратных фотограмметрических засечек элементов ориентирования снимков; 2) вычисление вероятнейших поправок  $v$  и  $v'$  для изображений точек полигона; 3) интерполирование на всех снимках величин  $v$  и  $v'$  для перехода от изображений точек полигона к ближайшим калибровочным узлам; 4) вывод средних поправок в узлы.

Эти выводы показывают, что совместные и отдельные методы определения элементов ориентирования и поправок в координаты точек практически приводят к одному и тому же результату. Поэтому целесообразно разработать более простые методы отдельного определения элементов ориентирования и поправок в координаты точек.

## § 18. РАЗДЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ И ПОПРАВОК В КООРДИНАТЫ ТОЧЕК СНИМКА ПО ОПОРНЫМ ТОЧКАМ

### 1. Определение угловых элементов внешнего ориентирования

Анализ формул (2.44) показал, что для определения приращений координат точек местности по координатам их изображений на снимке нет необходимости знать линейные элементы внешнего ориентирования

$X_S, Y_S$ , а требования к точности определения элементов внутреннего ориентирования могут быть снижены, т.е. их достаточно знать с точностью, которая может быть в  $Z_S - Z_1/Z_2 - Z_1$  раз ниже точности определения разностей координат точек снимка.

Этот вывод имеет большое значение для практики выполнения фотограмметрических работ, так как позволяет принимать элементы внутреннего ориентирования равными их значениям, полученным при лабораторных исследованиях фотокамеры. Следовательно, будем считать значения  $x_0, y_0$  и  $f$  известными.

Использование для определения элементов внешнего ориентирования формул (2.52), связывающих соответственные координаты точек местности и снимка, приводит к решению систем уравнений с шестью неизвестными. Для уменьшения количества неизвестных, используя формулы (2.52), найдем формулы разностей координат точек 2 и 1. После небольших преобразований с учетом  $Z_2 = Z_1 + h$  находим

$$\left. \begin{aligned} X_2 - X_1 &= \frac{Z_1 - Z_S}{Z'_1 Z'_2} \left\{ [(x_2 - x_0)(y_1 - y_0) - \right. \\ &- (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)] (a_1 c_2 - c_1 a_2) - f(x_2 - x_1)(a_1 c_3 - c_1 a_3) - \\ &- f(y_2 - y_1)(a_2 c_3 - a_3 c_2) \left. \right\} + h \frac{X'_2}{Z'_2}; \\ Y_2 - Y_1 &= \frac{Z_1 - Z_S}{Z'_1 Z'_2} \left\{ [(x_2 - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)x \right. \\ &x(y_2 - y_0)] (b_2 c_1 - b_1 c_2) - f(x_2 - x_1)(b_3 c_1 - b_1 c_3) - \\ &- f(y_2 - y_1)(b_3 c_2 - b_1 c_3) \left. \right\} + h \frac{Y'_2}{Z'_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X'_2 &= a_1(x_2 - x_0) + a_2(y_2 - y_0) - a_3 f; \\ Y'_2 &= b_1(x_2 - x_0) + b_2(y_2 - y_0) - b_3 f; \\ Z'_1 &= c_1(x_1 - x_0) + c_2(y_1 - y_0) - c_3 f; \\ Z'_2 &= c_1(x_2 - x_0) + c_2(y_1 - y_0) - c_3 f. \end{aligned} \right\}$$

Значение определителя третьего порядка, составленного из направляющих косинусов, равно единице, т.е.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \\
 &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \\
 &- c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

В свою очередь

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

Из сравнения этих выражений получим

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad a_2 = - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}; \quad a_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}; \\
 b_1 &= - \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}; \quad b_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}; \\
 c_1 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad c_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \quad c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \right\} \tag{3.14}$$

С учетом выражений (3.14) вместо формул (3.12) находим

$$\left. \begin{aligned}
 X_2 - X_1 &= \frac{Z_S - Z_1}{Z_1' Z_2'} \left\{ -b_1 f(y_2 - y_1) + b_2 f(x_2 - x_1) + \right. \\
 &+ b_3 [(x_2 - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)] \left. \right\} + h \frac{X_2'}{Z_2'}; \\
 Y_2 - Y_1 &= \frac{Z_S - Z_1}{Z_1' Z_2'} \left\{ a_1 f(y_2 - y_1) - a_2 f(x_2 - x_1) - \right. \\
 &- a_3 [(x_2 - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)] \left. \right\} + h \frac{Y_2'}{Z_2'}.
 \end{aligned} \right\} \tag{3.15}$$

Из сравнения формул (3.15) имеем

$$[(X_2 - X_1) + h \frac{x_2^0}{f}] [a_1 (y_2 - y_1) - a_2 (x_2 - x_1) - a_3 \frac{2S_{012}}{f}] =$$

$$= [(Y_2 - Y_1) + h \frac{y_2^0}{f}] [-b_1(y_2 - y_1) + b_2(x_2 - x_1) + b_3 \frac{2S_{012}}{f}], \quad (3.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_2^0 &= -f \frac{a_1(x_2 - x_0) + a_2(y_2 - y_0) - a_3f}{c_1(x_2 - x_0) + c_2(y_2 - y_0) - c_3f} = -f \frac{X_2'}{Z_2'}; \\ y_2^0 &= -f \frac{b_1(x_2 - x_0) + b_2(y_2 - y_0) - b_3f}{c_1(x_2 - x_0) + c_2(y_2 - y_0) - c_3f} = -f \frac{Y_2'}{Z_2'}, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где  $x_2^0, y_2^0$  — трансформированные координаты точки 2 снимка;  $S_{012}$  — площадь треугольника 012.

В формуле (3.16) отсутствуют линейные элементы внешнего ориентирования. При использовании этой формулы для определения угловых элементов внешнего ориентирования имеем систему уравнений с тремя неизвестными. Так как каждое уравнение содержит разности координат двух точек, то для решения поставленной задачи необходимо иметь как минимум три опорные точки.

Непосредственно использовать формулу (3.16) для решения рассматриваемой задачи неудобно, поскольку угловые элементы внешнего ориентирования  $\alpha, \omega, \kappa$  выражены через направляющие косинусы. Поэтому формулу (3.16) целесообразно преобразовать так, чтобы  $\alpha, \omega, \kappa$  выражались в явном виде. Учитывая, что для плановых аэроснимков значения  $\alpha, \omega, \kappa$  не превышают  $3^0$ , а для перспективных снимков известны их приближенные значения, по которым можно выполнять трансформирование, преобразование будем выполнять таким образом, чтобы в качестве неизвестных принимались величины первого порядка малости, т.е.  $\sin \alpha, \sin \omega, \sin \kappa$ , а значения величин второго и более порядка малости будут входить в свободные члены уравнений и вычисление будет выполняться методом приближений.

Подставляя в формулу (3.16) значения направляющих косинусов из формул (2.50), после преобразований находим

$$A \sin \alpha + B \sin \omega + C \sin \kappa + l = 0, \quad (3.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2S_{012}}{f} \Delta X' \cos \omega = B \frac{\Delta X'}{\Delta Y'} \cos \omega; \\ B &= \frac{2S_{012}}{f} \Delta Y' = A \frac{\Delta Y'}{\Delta X' \cos \omega}; \\ C &= (x_2 - x_1) \Delta X' \cos \alpha + (y_2 - y_1) \Delta Y' \cos \omega; \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 l &= \Delta X' [a_1 (y_2 - y_1) + (x_2 - x_1) \sin a \sin \omega \cos \kappa] - \\
 &- \Delta Y' (x_2 - x_1) \cos \omega \cos \kappa; \\
 \Delta X' &= (X_2 - X_1) + h \frac{x_2^0}{f}; \\
 \Delta Y' &= (Y_2 - Y_1) + h \frac{y_2^0}{f}; \\
 a_1 &= \cos a \cos \kappa - \sin a \sin \omega \sin \kappa.
 \end{aligned} \right\}$$

Значения  $x_2^0, y_2^0$  определяются по формулам (3.17).

Формула (3.18) является строгой. Поскольку в значения коэффициентов и в свободный член входят определяемые неизвестные, то задача решается методом приближений. В первом приближении для плановых аэроснимков считают  $a = \omega = \kappa = 0$ , а для перспективных снимков принимают равными их приближенным значениям.

Правильность формулы (3.18) проверена по аналитическим моделям местности и снимка.

Задачу можно решить двумя методами. В первом методе после определения  $a, \omega, \kappa$  в первом приближении их значения подставляют в формулы (3.19) и выполняют второе приближение и т.д. Во втором методе после первого приближения выполняют трансформирование снимка и во втором приближении вычисляют поправки  $\delta a, \delta \omega, \delta \kappa$ , т.е. определяют угловые элементы внешнего ориентирования относительно трансформированного после первого приближения снимка. После второго приближения подобным образом выполняют третье и последующие приближения.

При использовании второго метода формулы (3.18), (3.19) можно упростить, отбрасывая величины второго и более высокого порядка малости. В итоге вместо уравнений (3.18), (3.19) получим

$$Aa + B\omega + C\kappa + l = 0, \quad (3.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 A &= K\Delta X'; \quad B = K\Delta Y'; \\
 C &= (x_2 - x_1)\Delta X' + (y_2 - y_1)\Delta Y'; \\
 l &= \Delta X'(y_2 - y_1) - \Delta Y'(x_2 - x_1); \\
 K &= \frac{2S_{012}}{f} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{f}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Значения  $\Delta X'$  и  $\Delta Y'$  в формулах (3.21) определяются по соответствующим формулам, входящим в систему (3.19). В свободный член уравнения (3.20) входят определяемые угловые элементы внешнего ориентирования.

ния (в значения  $\Delta X'$  и  $\Delta Y'$ ), которые могут оказывать заметное влияние на его величину в рельефной местности. Поэтому целесообразно выполнить преобразование, позволяющее учитывать члены, имеющие значения  $a, \omega, \kappa$  в первой степени.

Подставляя в формулах (3.20) и (3.21) в  $\Delta X'$  и  $\Delta Y'$  вместо  $x_2^0, y_2^0$  их значения с учетом величин первого порядка малости, т.е. [5]

$$\left. \begin{aligned} x_2^0 &= x_2 + \left(f + \frac{x_2^2}{f}\right)a + \frac{x_2 y_2}{f} \omega - y_2 \kappa; \\ y_2^0 &= y_2 + \frac{x_2 y_2}{f} a + \left(f + \frac{y_2^2}{f}\right)\omega + x_2 \kappa, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

после преобразований находим

$$A'a + B'\omega + \kappa + l' = 0, \quad (3.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{1}{Q} [K(X_2 - X_1) + h(Y_2 - Y_1)]; \\ B' &= \frac{1}{Q} [k(Y_2 - Y_1) - h(x_2 - x_1)]; \\ C' &= 1; \\ l' &= \frac{\rho''}{Q} [(Y_2 - Y_1)(X_2 - X_1) - (x_2 - x_1)(Y_2 - Y_1) - kh]; \\ Q &= (x_2 - x_1)(X_2 - X_1) + (y_2 - y_1)(Y_2 - Y_1); \\ k &= \frac{1}{f} (x_2 y_1 - x_1 y_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Формулы (3.20), (3.21) можно использовать для непосредственного определения угловых элементов внешнего ориентирования  $a$  и  $\omega$ . Поделив все слагаемые формулы (3.20) на  $C$ , получим

$$\frac{A}{C} a + \frac{B}{C} \omega + \kappa + l''' = 0,$$

где (рис. 33)

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{C} &= \frac{K \Delta X'}{(x_2 - x_1) \Delta X' + (y_2 - y_1) \Delta Y'} = \frac{p_0 \Delta X'}{f D'} \approx \frac{p_0}{f} \cos \gamma = \frac{y p_0}{f}, \\ \frac{B}{C} &= \frac{K \Delta Y'}{(x_2 - x_1) \Delta X' + (y_2 - y_1) \Delta Y'} = \frac{p_0 \Delta Y'}{f D'} \approx \frac{p_0}{f} \sin \gamma = -\frac{x p_0}{f}. \end{aligned} \right\}$$

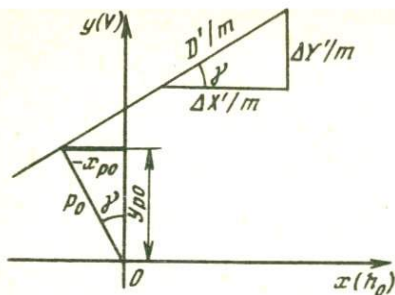


Рис. 33

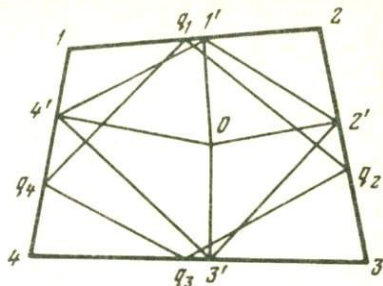


Рис. 34

С учетом полученных значений для двух отрезков, например 1–2 и 3–4, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{P_{01}}}{f} \alpha - \frac{x_{P_{01}}}{f} \omega + \kappa + l_1'' &= 0; \\ \frac{y_{P_{03}}}{f} \alpha - \frac{x_{P_{03}}}{f} \omega + \kappa + l_3'' &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим

$$\frac{y_{P_{03}} - y_{P_{01}}}{f} \alpha - \frac{x_{P_{03}} - x_{P_{01}}}{f} \omega + (l_3'' - l_1'') = 0.$$

Для двух пар отрезков получим систему из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{P_{03}} - y_{P_{01}}}{f} \alpha - \frac{x_{P_{03}} - x_{P_{01}}}{f} \omega + (l_3'' - l_1'') &= 0; \\ \frac{y_{P_{04}} - y_{P_{02}}}{f} \alpha - \frac{x_{P_{04}} - x_{P_{02}}}{f} \omega + (l_4'' - l_2'') &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эти уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -f \frac{(x_{P_{03}} - x_{P_{01}})(l_4'' - l_2'') - (x_{P_{04}} - x_{P_{02}})(l_3'' - l_1'')}{(x_{P_{03}} - x_{P_{01}})(y_{P_{04}} - y_{P_{02}}) - (x_{P_{04}} - x_{P_{02}})(y_{P_{03}} - y_{P_{01}})}; \\ \omega &= -f \frac{(y_{P_{03}} - y_{P_{01}})(l_4'' - l_2'') - (y_{P_{04}} - y_{P_{02}})(l_3'' - l_1'')}{(x_{P_{03}} - x_{P_{01}})(y_{P_{04}} - y_{P_{02}}) - (x_{P_{04}} - x_{P_{02}})(y_{P_{03}} - y_{P_{01}})} \end{aligned} \right\} (3.25)$$

$$x_0 = y_0 = 0, f = 75 \text{ мм}$$

Номер точки	x, мм	y, мм	X, м	Y, м	Z, м
1	-78,89690	64,87740	2100,000	1400,000	2,000
2	64,98940	73,36805	3500,000	1400,000	85,000
3	70,43750	-68,28268	3500,000	15,000	19,000
4	-82,09999	-89,19385	2100,000	3,000	51,000

В формулах (3.25) значение  $l_i'' = \frac{l_i}{C_i} = \text{tg}(\gamma_i - A_i) \approx \gamma_i - A_i$ ,

$$(x_{p_{03}} - x_{p_{01}})(y_{p_{04}} - y_{p_{02}}) - (x_{p_{04}} - x_{p_{02}})(y_{p_{03}} - y_{p_{01}}) = 2S_{1'2'3'4'}$$

где  $S_{1'2'3'4'}$  — площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки 1', 2', 3', 4', т.е. основания перпендикуляров, опущенных из главной точки  $o$  на отрезки 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 соответственно (рис. 34).

После определения  $a$  и  $\omega$  из формулы (3.20) находят значение  $\kappa$ .

В табл. 7-10 приведен пример определения угловых элементов внешнего ориентирования путем решения уравнений (3.23). Исходные данные приведены в табл. 7.

Вычисление коэффициентов уравнений типа (3.23) в первом приближении дано в табл. 8.

Коэффициенты, полученные в табл. 8, были использованы для вычисления коэффициентов нормальных уравнений. В результате получена система нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1,955899 a - 0,155248 \omega - 0,119901 \kappa - 21258,33 &= 0, \\ -0,155248 a + 1,965245 \omega + 0,153124 \kappa - 10903,76 &= 0, \\ -0,119901 a + 0,153124 \omega + 6,000000 \kappa + 63963,23 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение полученных нормальных уравнений приводит к значениям угловых элементов внешнего ориентирования в первом приближении

$$\begin{aligned} \alpha^I &= 10791,02'' = 2,9975056^\circ, \\ \omega^I &= 7228,96'' = 2,0080444^\circ, \\ \kappa^I &= -10629,38'' = -2,9526056^\circ. \end{aligned}$$

Определив  $\alpha^I$ ,  $\omega^I$ ,  $\kappa^I$  в первом приближении, выполняют трансформирование снимка, используя формулы (3.17) (табл. 9).

Таблица 8

Номер линии $i - j$	$x_j - x_i$	$y_j - y_i$	$X_j - X_i$	$Y_j - Y_i$	$h = Z_j - Z_i$
1-2	143,88630	8,49065	1400,000	0	83,000
1-3	149,33440	- 133,16008	1400,000	- 1385,000	17,000
1-4	- 3,20309	- 154,07125	0	- 1397,000	49,000
2-3	5,44810	- 141,65073	0	- 1385,000	- 66,000
2-4	- 147,08939	- 162,56190	- 1400,000	- 1397,000	- 34,000
3-4	- 152,53749	- 20,91117	- 1400,000	- 12,000	32,000

Продолжение табл. 8

$K$	$Q$	$A^I$	$B^I$	$C^I$	$l^I$
133,39807	201440,82	0,930606	- 0,059286	1	834,38
- 10,89987	393494,31	- 0,044533	0,031913	1	10792,67
- 164,84736	215237,54	- 0,035075	1,070672	1	3452,61
128,07350	196186,26	0,047653	- 0,902317	1	16820,35
- 3,02482	433024,12	0,022543	- 0,001791	1	10479,35
158,51466	213803,42	- 1,041095	0,013933	1	21583,87

Таблица 9

$$\sin \alpha^I = 0,0522924, \quad \cos \alpha^I = 0,9986318$$

Номер точки	Направляющие косинусы			$Z^I$	$x^{0I}$	$y^{0I}$
	$a_i^I$	$b_i^I$	$c_i^I$			
1	0,9974004	- 0,0514782	0,0504205	- 76,38750	- 70,25405	70,14330
2	0,0496095	0,9980592	0,0376389	- 68,81310	78,88730	79,02722
3	- 0,0522603	- 0,0350398	0,9980185	- 73,86998	71,86929	- 70,20596
4				- 82,34807	- 75,03992	- 74,83454

После определения трансформированных координат  $x^{0I}, y^{0I}$  вычисляют коэффициенты уравнений типа (3.23) во втором приближении (табл. 10).

Затем получают нормальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} 1,934460 \delta \alpha_1 - 0,155244 \delta \omega_1 + 0,056366 \delta \kappa_1 + 0,7112104 &= 0, \\ - 0,155244 \delta \alpha_1 + 1,951514 \delta \omega_1 - 0,102740 \delta \kappa_1 + 25,724901 &= 0, \\ 0,056366 \delta \alpha_1 - 0,102740 \delta \omega_1 + 6,000000 \delta \kappa_1 + 1028,627 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Таблица 10

Номер линий $i - j$	$x_j^{0I} - x_i^{0I}$	$y_j^{0I} - y_i^{0I}$	$K$
1-2	149,14135	8,88392	147,80530
1-3	142,12334	- 140,34926	1,45195
1-4	- 4,78587	- 144,97784	- 140,27970
2-3	- 7,01801	- 149,23318	149,57318
2-4	- 153,92722	- 153,86176	- 0,35602
3-4	- 146,90921	- 4,62858	141,95406

Продолжение табл. 10

Номер линий $i - j$	$Q$	$A''$	$B''$	$C''$	$I''$
1-2	208797,9	0,998105	- 0,059286	1	167,590
1-3	393356,4	- 0,000898	- 0,011255	1	171,563
1-4	202534,0	- 0,035075	0,968752	1	191,305
2-3	206687,9	0,047653	- 1,004519	1	151,575
2-4	430443,0	0,013311	- 0,011003	1	171,567
3-4	205728,4	- 0,966730	0,014571	1	175,027

и, решая их, получают значения поправок

$$\delta\alpha_1 = 2,88'', \delta\omega_1 = -22,03'', \delta\kappa_1 = -171,84''.$$

Учитывая полученные значения поправок, во втором приближении находят

$$\alpha^{II} = 10793,90'' = 2,9983056^\circ,$$

$$\omega^{II} = 7206,93'' = 2,0019250^\circ,$$

$$\kappa^{II} = -10801,22'' = -3,0003389^\circ.$$

Точные значения  $\alpha = 3^\circ = 10800''$ ,  $\omega = 2^\circ = 7200''$ ,  $\kappa = -3^\circ = -10800''$ , т.е. уже второе приближение позволяет получить угловые элементы внешнего ориентирования с ошибкой не более  $7''$ .

Выполняя третье приближение, находим

$$\delta\alpha_2 = +6,24'', \delta\omega_2 = -6,54'', \delta\kappa_2 = +0,84''.$$

и значения

$$\alpha^{III} = 10800,14'', \omega^{III} = 7200,39'', \kappa^{III} = -10800,38''.$$

Следовательно, третье приближение дает  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  с ошибкой не более  $0,4''$ , т.е. практически точное их значение.

## 2. Определение линейных элементов внешнего ориентирования

Используя вычисленные описанным ранее способом угловые элементы внешнего ориентирования  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  и формулы (3.17), определяют трансформированные значения координат изображенных на снимке опорных точек. После этого определяют высоту фотографирования относительно опорной точки  $i$ , используя формулы

$$Z_S - Z_i = f \frac{D_{ij}^0}{d_{ij}^0} = f \sqrt{\frac{\Delta X_{ij}^2 + \Delta Y_{ij}^2}{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2}}, \quad (3.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{ij} &= X_j - X_i + \frac{h_i}{f} x_j^0; \\ \Delta Y_{ij} &= Y_j - Y_i + \frac{h_i}{f} x_j^0; \\ \Delta x_{ij}^0 &= x_j^0 - x_i^0; \\ \Delta y_{ij}^0 &= y_j^0 - y_i^0; \\ Z_S &= (Z_S - Z_i) + Z_i. \end{aligned} \right\}$$

Из всех полученных значений  $Z_S$  находят среднее весовое значение

$$Z_S = \frac{\sum_1^n p Z_S}{\sum_1^n p}. \quad (3.27)$$

За вес принимается величина, пропорциональная квадрату расстояния между опорными точками, используемыми для определения  $Z_S - Z_i$ , т.е.

$$p_i = c d_{ij}^{02} = c D_{ij}^{02}.$$

После определения высоты фотографирования определяют координаты центра проектирования, используя формулы

$$X_{S_i} = X_i - \frac{Z_S - Z_i}{f} x_i^0; \quad \left\{ \right.$$

$$Y_{S_i} = Y_i - \frac{Z_S - Z_i}{f} y_i^0 \quad (3.28)$$

Для каждой опорной точки можно определить значение  $X_S$  и  $Y_S$ . За окончательный результат принимают среднеарифметическое их значение, так как при одинаковой точности определения координат точек снимка, являющихся изображениями опорных точек, точность определения  $X_S$  и  $Y_S$ , а следовательно, и веса определения этих величин будут одинаковыми, т.е.

$$X_S = \frac{\sum_1^n X_{S_i}}{n}, \quad Y_S = \frac{\sum_1^n Y_{S_i}}{n} \quad (3.29)$$

Приведем пример определения линейных элементов внешнего ориентирования. Предварительно, используя формулы (3.17), (2.50) и вычисленные в третьем приближении значения угловых элементов внешнего ориентирования, выполняют трансформирование снимка (табл. 11).

После определения трансформированных значений координат точек вычисляют значения  $Z_S$  (табл. 12).

Полученное значение  $Z_S$  совпадает с его точным значением.

Определив  $Z_S$ , вычисляют значения  $X_S$  и  $Y_S$ , используя формулы (3.28), (3.29) (табл. 13). Точное значение  $X_S = 2800,000$  м и  $Y_S = 700,000$  м. Ошибки определения  $\delta X_S = -1$  мм и  $\delta Y_S = -3$  мм являются малыми величинами.

Анализ полученных формул и численных примеров показывает, что разработанная методика отдельного определения элементов внешнего ориентирования позволяет с высокой точностью решать поставленную задачу. Метод итераций необходимо использовать только для определения угловых элементов внешнего ориентирования, при этом достаточно выполнить только 2–3 приближения, т.е. меньшее число приближений, чем при методике совместного определения элементов внешнего ориентирования. Линейные элементы внешнего ориентирования в разработанной и изложенной в данном параграфе методике определяются по строгим и весьма простым формулам (3.26)–(3.29). Простота формул и методики позволяет определять элементы ориентирования, используя микрокалькуляторы, т.е. простейшую вычислительную технику.

После определения элементов внешнего ориентирования, полагая, что элементы внутреннего ориентирования известны из лабораторных исследований, можно решать различные задачи фотограмметрии. Если определены элементы ориентирования снимка испытательного или эталонного полигона, то поправки  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  к координатам точки за суммарное влияние всех источников систематических ошибок определяют следующим образом. Используя прямоугольные пространственные координаты опорных точек испытательного полигона и известные элементы ориентирования, по формулам (2.53) вычисляют истинные координаты точек снимка  $x_i^0$ ,  $y_i^0$ . Измерив координаты  $x_i$ ,  $y_i$  изображений этих точек на

$$\sin \alpha^{\text{III}} = 0,0523366, \cos \alpha^{\text{III}} = 0,998295$$

Номер точки	Направляющие косинусы			$Z^{\text{III}}$	$x^{\text{0III}}$	$y^{\text{0III}}$
	$a_i^{\text{III}}$	$b_i^{\text{III}}$	$c_i^{\text{III}}$			
1	0,9973564	- 0,0523059	0,0504407	- 76,395382	- 70,187099	70,187533
2	0,0504419	0,9980210	0,0375449	- 68,818876	78,947748	78,947587
3	- 0,0523047	- 0,0349013	0,9980211	- 73,862332	71,819255	- 70,280324
4				- 82,341538	- 75,107176	- 74,784938

Таблица 12

Номер линии $i-j$	$(x_j^{\text{0III}} - x_i^{\text{0III}})$ ,	$(y_j^{\text{0III}} - y_i^{\text{0III}})$ ,	$\Delta X_{ij}, \text{м}$	$\Delta Y_{ij}, \text{м}$	$D^0, \text{м}$	$Z_S - Z_T, \text{м}$	$Z_S, \text{м}$	$p = p_i/p_1$
1-2	149,13485	8,76005	1487,3688	87,3687	1489,9326	747,9987	749,9987	1
1-3	142,00635	- 140,46786	1416,2790	- 1400,9302	1992,0973	747,9999	749,9999	1,79
1-4	- 4,92008	- 144,97247	- 49,0700	- 1445,8595	1446,6919	748,0004	750,0004	0,94
2-3	- 7,12849	- 149,22791	- 63,2009	- 1323,1533	1324,6619	664,9995	749,9995	0,79
2-4	- 154,05492	- 153,73253	- 1365,9514	- 1363,0975	1929,7300	665,0000	750,0000	1,68
3-4	- 146,92643	- 4,50461	- 1432,0457	- 43,9082	1432,7187	731,0015	750,0015	0,92

$$Z_S = \frac{\sum_1^n pZ}{\sum_1^n p} =$$

$$= 750,0001 = 750,000 \text{ м}$$

Номер точки	$X_i$	$Y_i$	$\frac{Z_S - Z_i}{f} x_i^0$	$\frac{Z_S - Z_i}{f} y_i^0$	$X_{S_i}, \text{м}$	$Y_{S_i}, \text{м}$
1	2100,000	1400,000	- 699,9993	700,0037	2799,9993	699,9963
2	3500,000	1400,000	700,0034	700,0019	2799,9966	699,9981
3	3500,000	15,000	699,9983	- 684,9989	2800,0017	699,9989
4	2100,000	3,000	- 699,9989	- 696,9956	2799,9989	699,9956
Среднее значение					2799,999	699,997

снимке при помощи высокоточного моно-или стереокомпаратора, поправки  $\delta \bar{x}_i, \delta \bar{y}_i$  определяют по формулам

$$\delta \bar{x}_i = x_i^0 - x_i, \quad \delta \bar{y}_i = y_i^0 - y_i. \quad (3.30)$$

Переход от поправок к изображениям точек эталонного полигона к ближайшим калибровочным узлам осуществляется интерполированием.

#### § 19. РАЗДЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ ИЗ СРАВНЕНИЯ ОТРЕЗКОВ НА МЕСТНОСТИ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА СНИМКЕ

Используя формулу (2.63), для центральной проекции  $D_0$  отрезка снимка на горизонтальную плоскость, проходящую через точку 1, найдем

$$D_0 = \sqrt{(X_2 - X_1 + h \frac{x_2^0}{f})^2 + (Y_2 - Y_1 + h \frac{y_2^0}{f})^2} =$$

$$= \frac{f H_1 \sqrt{[x_2 - x_1 - \frac{1}{f} (x_2 y_1 - x_1 y_2) \operatorname{tg} \alpha_0]^2 \cos^2 \alpha_0 + (y_2 - y_1)^2}}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0) (f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0) \cos^2 \alpha_0}$$

При этом принято во внимание, что

$$h \frac{X_2}{H_2} = h \frac{x_2^0}{f}, \quad h \frac{Y_2}{H_2} = h \frac{y_2^0}{f}.$$

После небольших преобразований получится

$$D_0 = \frac{fH_1 \sec \alpha_0}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0)} \sqrt{[(x_2 - x_1) - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{f} \operatorname{tg} \alpha_0]^2 + (y_2 - y_1)^2 \sec^2 \alpha_0} \quad (3.31)$$

или

$$D_0 = \frac{fH_1 d \sec \alpha_0}{(f - y_1 \operatorname{tg} \alpha_0)(f - y_2 \operatorname{tg} \alpha_0)} \sqrt{1 - \frac{2(x_2 - x_1)(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{fd^2} \operatorname{tg} \alpha_0 + \left[ \left( \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{fd} \right)^2 + \left( \frac{y_2 - y_1}{d} \right)^2 \right] \operatorname{tg}^2 \alpha_0} \quad (3.32)$$

Раскладывая в ряд по биному Ньютона и ограничиваясь величинами первого порядка малости, получим

$$D_0 = \frac{H_1 d}{f(1 - \frac{y_1 + y_2}{f} \operatorname{tg} \alpha_0)} \left[ 1 - \frac{(x_2 - x_1)(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{fd^2} \operatorname{tg} \alpha_0 \right] \quad (3.33)$$

В формулах (3.31)–(3.33) ось ординат на снимке совпадает с главной вертикалью, а ось абсцисс – с горизонталью, проходящей через главную точку снимка. Если за оси координат на снимке принять линии, соединяющие координатные метки, то нужно систему координат  $x(h_0)$ ,  $y(v)$  повернуть на угол  $\kappa_0$  (рис. 35). Тогда значение

$$\left. \begin{aligned} x(h) &= x \cos \alpha_0 - y \sin \alpha_0; \\ y(v) &= x \sin \alpha_0 + y \cos \alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

В формулах (3.31)–(3.33) величина

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = 2S_{012},$$

где  $S_{012}$  – площадь треугольника 012, которая является инвариантной относительно положения осей координат. Поэтому преобразование координат нужно выполнять только для входящих в формулу (3.33) значений

$$x_2 - x_1 = x(h_0)_2 - x(h_0)_1,$$

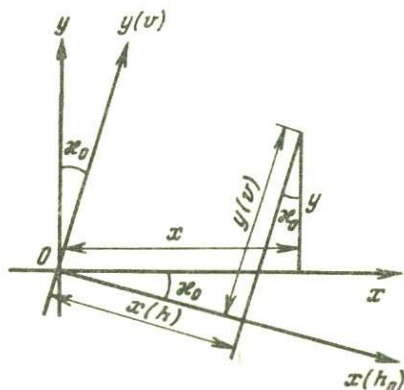


Рис. 35

$$y_1 + y_2 = y(v)_1 + y(v)_2.$$

Учитывая (3.34), получим

$$\begin{aligned} x(h_0)_2 - x(h_0)_1 &= (x_2 - x_1) \cos \kappa_0 - (y_2 - y_1) \sin \kappa_0, \\ y(v)_1 + y(v)_2 &= (x_1 + x_2) \sin \kappa_0 + (y_1 + y_2) \cos \kappa_0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание найденные значения и

$$\alpha_x = \operatorname{tg} \alpha_0 \sin \kappa_0, \quad \alpha_y = \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \kappa_0, \quad (3.35)$$

вместо (3.33) имеем

$$\begin{aligned} [(x_1 + x_2)D_0 + q \frac{H_1 d}{f} (y_2 - y_1)] \alpha_x + [(y_1 + y_2)D_0 - q \frac{H_1 d}{f} (x_2 - \\ - x_1) \alpha_y + H_1 d - D_0 f = 0. \end{aligned}$$

Так как  $H_1 d/f \approx D_0$ ,  $d/D_0 = d'/D$ , то, принимая

$$H_1 = H_0 + \delta H, \quad (3.36)$$

находим

$$X_q \alpha_x + Y_q \alpha_y + Q \delta H + l = 0, \quad (3.37)$$

где

$$X_q = x_1 + x_2 + q(y_2 - y_1);$$

$$Y_q = y_1 + y_2 - q(x_2 - x_1);$$

$$Q = \frac{d'}{D} = \frac{d}{D_0}; \quad l = H_0 Q - f;$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad (3.38)$$

$$d' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2};$$

$$D = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2};$$

$$q = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{d^2};$$

$$x_i' = x_i - h_i \frac{x_i}{H_1};$$

$$y_i' = y_i - h_i \frac{y_i}{H_1}.$$

В формулах (3.37), (3.38)  $X_q, Y_q$  – координаты точки  $q$ , симметричной основанию перпендикуляра, опущенного на данный отрезок из главной точки, относительно середины отрезка.

Уравнение (3.37) имеет три неизвестных:  $\alpha_x, \alpha_y, \delta H$ . Решение уравнений типа (3.37) позволяет определить угловые элементы  $\alpha_0, \kappa_0$ , и значение  $Z_S$ . Задача решается методом приближений. Определив  $\alpha_x, \alpha_y$  в первом приближении, вычисляют  $x^0, y^0$ , используя формулы (2.57), которые после преобразований с учетом (3.35) имеют вид

$$x^0 = \frac{f'}{Z''} (x \alpha_y - y \alpha_x); \quad (3.39)$$

$$y^0 = \frac{f''}{Z''} (u + f \operatorname{tg}^2 \alpha_0),$$

где

$$\left. \begin{aligned} Z'' &= f - u, \quad u = x \alpha_x + y \alpha_y, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha_0 &= \alpha_x^2 + \alpha_y^2, \\ f' &= f / \sin \alpha_0 = f \sqrt{1 + 1/\operatorname{tg}^2 \alpha_0} = f \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}, \\ f'' &= f / \operatorname{tg} \alpha_0 = f / \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

После вычисления трансформированных значений координат выполняют второе приближение, при этом в формулы (3.38) вместо  $x$  и  $y$  подставляют  $x^0, y^0$ . В результате находят поправки  $\delta \alpha_x, \delta \alpha_y$  к значениям  $\alpha_x, \alpha_y$ , полученным в первом приближении. После второго приближения при необходимости выполняют третье и последующие приближения.

Определив окончательное значение элементов внешнего ориентирования  $\alpha_x, \alpha_y$  и  $Z_S$  по формулам (3.39), (3.40) вычисляют трансформированные значения координат изображений опорных точек на снимке. После этого определяют значения  $(X - X_S)'$  и  $(Y - Y_S)'$  в системе координат, которая повернута в плоскости  $SXY$  на угол  $t$ , используя формулы

$$\left. \begin{aligned} (X - X_S)'_i &= \frac{Z_S - Z_i}{f} x_i^0; \\ (Y - Y_S)'_i &= \frac{Z_S - Z_i}{f} y_i^0. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Затем вычисляют

$$\operatorname{tg} A'_{ij} = \frac{(Y_j - Y_S)' - (Y_i - Y_S)'}{(X_j - X_S)' - (X_i - X_S)'} = \frac{(Y_j - Y_i)'}{(X_j - X_i)'}; \quad (3.42)$$

$$\operatorname{tg} A_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i} . \quad (3.42)$$

Определив  $A'$  и  $A$ , находят

$$t = A - A' . \quad (3.43)$$

От значений  $\alpha_x, \alpha_y$  переходят к угловым элементам внешнего ориентирования  $\alpha_0$  и  $\kappa_0$ , применяя формулы

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \kappa_0 &= \alpha_x / \alpha_y, \\ \operatorname{tg} \alpha_0 &= \alpha_x / \sin \kappa_0 = \alpha_y / \cos \kappa_0 = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} . \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Затем по формулам (2.51) вычисляют направляющие косинусы, по формулам (3.17) — трансформированные координаты изображений опорных точек и по формулам (3.28), (3.29) — координаты центра проектирования  $X_S, Y_S$ . После этого по описанной в § 18 методике можно найти поправки  $\delta x_i, \delta y_i$  в координаты точки  $i$  за суммарное влияние всех источников систематических ошибок.

Так как при решении задачи в первом приближении высота фотографирования неизвестна, то ее определяют предварительно по формуле

$$H = f \frac{D_0}{d} = f \frac{D}{d'} .$$

Кроме того, в первом приближении целесообразно вместо  $x', y'$  вычислять значения

$$X' = X + h \frac{x}{f}, \quad Y' = Y + h \frac{y}{f} . \quad (3.45)$$

В этом случае в формулах (3.38)

$$\begin{aligned} Q &= d/D_0; \\ d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \\ D_0 &= \sqrt{(X_2' - X_1')^2 + (Y_2' - Y_1')^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

При этом отпадает необходимость предварительного определения высоты фотографирования.

Во втором и последующих приближениях вычисления необходимо выполнять по формулам (3.38), так как при трансформировании координат точек снимка после первого приближения оси координат на снимке будут повернуты относительно осей пространственной системы координат

и использование формул (3.45), (3.46) приведет к ошибочным результатам.

Значения  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  можно также определить путем решения уравнений типа (3.37) следующим образом. Для двух отрезков, например 1-2 и 3-4 (см. рис. 34), имеем

$$X_{q1} \alpha_x + Y_{q1} \alpha_y + Q_1 \delta H + l_1 = 0,$$

$$X_{q3} \alpha_x + Y_{q3} \alpha_y + Q_3 \delta H + l_3 = 0.$$

Умножив первое уравнение на  $Q_3$ , а второе на  $Q_1$  и вычитая из второго уравнения первое, получим

$$(X_{q3} Q_1 - X_{q1} Q_3) \alpha_x + (Y_{q3} Q_1 - Y_{q1} Q_3) \alpha_y + l_3 Q_1 - l_1 Q_3 = 0. \quad (3.47)$$

Учитывая, что в формулах (3.38)  $l_i = H_0 Q_i - f$ , находим

$$l_3 Q_1 - l_1 Q_3 = (H_0 Q_3 - f) Q_1 - (H_0 Q_1 - f) Q_3 = f(Q_3 - Q_1).$$

С учетом этого, принимая для коэффициентов при  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$

$$Q_1 \approx Q_3 \approx d'/D \approx f/H_0,$$

вместо формулы (3.47) имеем

$$(X_{q3} - X_{q1}) \alpha_x + (Y_{q3} - Y_{q1}) \alpha_y + H_0(Q_3 - Q_1) = 0.$$

Для двух пар отрезков, например 1-2, 3-4 и 2-3, 4-1, получим систему из двух уравнений

$$(X_{q3} - X_{q1}) \alpha_x + (Y_{q3} - Y_{q1}) \alpha_y + H_0(Q_3 - Q_1) = 0;$$

$$(X_{q4} - X_{q2}) \alpha_x + (Y_{q4} - Y_{q2}) \alpha_y + H_0(Q_4 - Q_2) = 0$$

Решение этих уравнений приводит к значениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{H_0}{2S_{q1234}} [(Q_4 - Q_2)(Y_{q3} - Y_{q1}) - (Q_3 - Q_1)(Y_{q4} - Y_{q2})]; \\ \alpha_y &= -\frac{H_0}{2S_{q1234}} [(Q_4 - Q_2)(X_{q3} - X_{q1}) - (Q_3 - Q_1)(X_{q4} - X_{q2})]; \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

где

$$2S_{q1234} = (X_{q3} - X_{q1})(Y_{q4} - Y_{q2}) - (X_{q4} - X_{q2})(Y_{q3} - Y_{q1})$$

— удвоенная площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки  $q_1, q_2, q_3, q_4$  (см. рис. 34).

После определения  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  значение  $\delta H$  определяют по формуле

$$\delta H = -\frac{1}{Q} (X_q \alpha_x + Y_q \alpha_y + l). \quad (3.49)$$

Из  $n$  значений  $\delta H$  определяют среднее весовое значение, за единицу веса принимают величину, пропорциональную квадрату расстояния между опорными точками.

После определения значений  $\alpha_x, \alpha_y$  выполняют трансформирование координат изображений опорных точек на снимке и по формулам (3.48) выполняют второе приближение, в результате определяют поправки  $\delta\alpha_x, \delta\alpha_y$  к значениям  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$ , полученным в первом приближении. При необходимости подобным образом выполняют третье и последующие приближения.

Высоту фотографирования относительно первой опорной точки после первого приближения целесообразно определять по формуле

$$H_0 = f(D/d'), \quad (3.50)$$

используя диагонали четырехугольника  $D$  на местности и их изображения  $d'$  на снимке, причем согласно формулам (3.38) в трансформированные координаты точек, по которым вычисляют диагональ  $d'$ , предварительно вводят поправки за рельеф. Из двух значений  $H_0$  вычисляют среднее или, если длины диагоналей значительно отличаются по своей величине, средневесовое. За единицу веса принимают величину, пропорциональную квадрату расстояния.

После окончательного определения углов  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  высоту фотографирования  $H_0$  определяют по формуле (3.50), используя значения всех сторон и диагоналей. За окончательное принимают средневесовое ее значение.

Величина  $Z_S = H_0 + Z_1$ , где  $Z_1$  — высота начальной плоскости, проходящей через опорную точку 1, относительно которой определяли значения  $H_0$ .

## ГЛАВА 4

### АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ ПО ОПОРНЫМ ТОЧКАМ

#### § 20. ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ

Решение этой задачи путем анализа совместного определения элементов ориентирования и поправок в координаты точек снимка за влияние различных факторов, искажающих геометрию снимка, является сложным

и практически трудно выполнимым из-за большого числа связей между исходными уравнениями. Поэтому при решении поставленной задачи целесообразно использовать формулы, полученные для отдельного определения элементов внешнего ориентирования.

В первую очередь выведем формулы средних квадратических ошибок определения угловых элементов внешнего ориентирования, используя в качестве исходных формулы (3.20), (3.25), (3.48), которые после преобразований примут вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{f}{2S_{1'2'3'4'}} [(x_{p_{03}} - x_{p_{01}})(l_4'' - l_2'') - (x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \times \\ &\times (l_3'' - l_1'')]; \\ \omega &= -\frac{f}{2S_{1'2'3'4'}} [(y_{p_{03}} - y_{p_{01}})(l_4'' - l_2'') - (y_{p_{04}} - \\ &- y_{p_{02}})(l_3'' - l_1'')]; \\ \kappa &= \frac{x_{p_0}}{f} \omega - \frac{y_{p_0}}{f} \alpha - l'' \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{H_0}{2S_{q_{1234}}} [(y_{q_3} - y_{q_1})(Q_4 - Q_2) - (y_{q_4} - y_{q_2}) \times \\ &\times (Q_3 - Q_1)]; \\ \alpha_y &= \frac{H_0}{2S_{q_{1234}}} [(x_{q_3} - x_{q_1})(Q_4 - Q_2) - (x_{q_4} - x_{q_2}) \times \\ &\times (Q_3 - Q_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Анализ формул (4.1), (4.2) показывает, что основное влияние на точность определения углов  $\alpha$ ,  $\omega$ ;  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  будут оказывать ошибки определения координат опорных точек на местности и их изображений на снимке, а также положение изображений опорных точек на снимке. От положения изображений опорных точек на снимке зависят величины площадей четырехугольников, вершинами которых являются основания перпендикуляров, опущенных из главной точки снимка на отрезки, соединяющие опорные точки [формулы (4.1)], и от площадей четырехугольников, вершинами которых являются точки  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , расположенные симметрично основаниям перпендикуляров относительно середин отрезков [формулы (4.2)].

Если опорные точки будут располагаться симметрично относительно оснований перпендикуляров, т.е. основания перпендикуляров будут сов-

падать с серединами отрезков, то в этом случае точки  $i'$  и  $q_i$  будут совпадать, а значение (см. рис. 34)  $2S_{1'2'3'4'} = 2S_{q_1234} = S_{1234}$ , т.е. площади  $S_{1234}$  четырехугольника, вершинами которого являются изображения опорных точек. Очевидно, при прочих равных условиях точность определения угловых элементов внешнего ориентирования будет возрастать пропорционально увеличению площади отмеченного четырехугольника, поэтому при выборе опорных точек нужно стремиться к тому, чтобы они располагались ближе к краям снимка.

Анализ формул (4.1) показывает, что основное влияние на точность определения углов  $\alpha$  и  $\omega$  будут оказывать ошибки определения  $l_i''$ , поэтому будем считать, что ошибки всех других аргументов, входящих в формулы (4.1), являются пренебрегаемо малыми.

Дифференцируя формулы (4.1) по переменным  $l_i''$ , находим

$$\left. \begin{aligned} d\alpha &= -k[(x_{p_{03}} - x_{p_{01}})(dl_4'' - dl_2'') - (x_{p_{04}} - x_{p_{02}})(dl_3'' - \\ &- dl_1'')]; \\ d\omega &= -k[(y_{p_{03}} - y_{p_{01}})(dl_4'' - dl_2'') - (y_{p_{04}} - y_{p_{02}})(dl_3'' - \\ &- dl_1'')], \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где

$$k = f/2S_{1'2'3'4'}.$$

Для определения  $dl_i''$  воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} l_i'' &= \frac{l_i}{C_i} = \frac{\Delta X'(y_j - y_i) - \Delta Y'(x_j - x_i)}{\Delta X'(x_j - x_i) - \Delta Y'(y_j - y_i)} = \operatorname{tg}(\gamma_i - A_i) \approx \\ &\approx \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y_j - Y_i + h \frac{y_j^0}{f}}{X_j - X_i + h \frac{x_j^0}{f}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя по переменным  $x_i, y_i; x_j, y_j; X_i, Y_i; X_j, Y_j; x_j^0, y_j^0, h$  после преобразований имеем

$$\begin{aligned} dl_i'' &= \frac{\cos \gamma_{ij}}{d_{ij}} (dy_j - dy_i) - \frac{\sin \gamma_{ij}}{d_{ij}} (dx_j - dx_i) - \\ &- \frac{\cos A_{ij}}{D_{0ij}} (dY_j - dY_i + \frac{h}{f} dy_j^0 + \frac{y_j^0}{f} dh) + \frac{\sin A_{ij}}{D_{0ij}} (dX_j - dX_i + \\ &+ \frac{h}{f} dx_j^0 + \frac{x_j^0}{f} dh). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Положим, что опорные точки являются вершинами четырехугольника 1 2 3 4 (см. рис. 34) и  $h = 0$ . Подставляя значение  $dl_i''$  из (4.4) в (4.3) с учетом сделанных упрощений и

$$\gamma_{ij} \approx A_{ij}, \quad \frac{d_{ij}}{D_{0ij}} dX_{ij} = \frac{dX_{ij}}{m}, \quad \frac{d_{ij}}{D_{0ij}} dY_i = \frac{dY_{ij}}{m},$$

где  $m$  — знаменатель масштаба снимка, находим

$$\begin{aligned} da = k & \left\{ \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \sin \gamma_{41}}{d_{41}} - \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \sin \gamma_{12}}{d_{12}} \right] \left( dx_1 - \frac{dX_1}{m} \right) - \right. \\ & - \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \cos \gamma_{41}}{d_{41}} - \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \cos \gamma_{12}}{d_{12}} \right] \left( dy_1 - \frac{dY_1}{m} \right) + \\ & + \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \sin \gamma_{23}}{d_{23}} - \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \sin \gamma_{12}}{d_{12}} \right] \left( dx_2 - \frac{dX_2}{m} \right) - \\ & - \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \cos \gamma_{23}}{d_{23}} + \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \cos \gamma_{12}}{d_{12}} \right] \left( dy_2 - \frac{dY_2}{m} \right) - \\ & - \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \sin \gamma_{23}}{d_{23}} - \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \sin \gamma_{34}}{d_{34}} \right] \left( dx_3 - \frac{dX_3}{m} \right) + \\ & + \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \cos \gamma_{23}}{d_{23}} - \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \cos \gamma_{34}}{d_{34}} \right] \left( dy_3 - \frac{dY_3}{m} \right) + \\ & + \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \sin \gamma_{41}}{d_{41}} - \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \sin \gamma_{34}}{d_{34}} \right] \left( dx_4 - \frac{dX_4}{m} \right) + \\ & \left. + \left[ \frac{(x_{p_{03}} - x_{p_{01}}) \cos \gamma_{41}}{d_{41}} + \frac{(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \cos \gamma_{34}}{d_{34}} \right] \left( dy_4 - \frac{dY_4}{m} \right) \right\} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Полагая, что ошибки координат опорных точек на местности и координат их изображений на снимке являются случайными и независимыми, после перехода к квадратам средних квадратических ошибок, принимая  $m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{y_3} = m_{y_4} = m_{x, y} = m_{X_1} = m_{X_2} = \dots = m_{Y_3} = m_{Y_4} = m_{X, Y}$ , имеем

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_{41} - \gamma_{12}) &= \cos(180^\circ - \beta_1) = -\cos \beta_1, \quad \cos(\gamma_{23} - \gamma_{34}) = \\ &= \cos(180^\circ - \beta_3) = -\cos \beta_3, \quad \cos(\gamma_{23} - \gamma_{12}) = \cos(180^\circ + \beta_2) = -\cos \beta_2, \\ \cos(\gamma_{34} - \gamma_{41}) &= \cos(180^\circ - \beta_4) = -\cos \beta_4, \end{aligned}$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  — внутренние углы четырехугольника в его вершинах 1, 2, 3, 4. С учетом этого

$$\begin{aligned} m_a^2 &= 2k^2 \left[ (x_{p_{03}} - x_{p_{01}})^2 \left( \frac{1}{d_{41}^2} + \frac{1}{d_{23}^2} \right) + (x_{p_{04}} - x_{p_{02}})^2 \left( \frac{1}{d_{12}^2} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{d_{34}^2} \right) + (x_{p_{03}} - x_{p_{01}})(x_{p_{04}} - x_{p_{02}}) \left( \frac{\cos \beta_1}{d_{12} d_{14}} + \frac{\cos \beta_3}{d_{23} d_{34}} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{\cos \beta_2}{d_{12} d_{23}} - \frac{\cos \beta_4}{d_{34} d_{41}} \right) \right] \left( m_{x,y}^2 + \frac{m_{X,Y}^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогичный вывод для угла  $\omega$  приводит к

$$\begin{aligned} m_\omega^2 &= 2k^2 \left[ (y_{p_{03}} - y_{p_{01}})^2 \left( \frac{1}{d_{41}^2} + \frac{1}{d_{23}^2} \right) + (y_{p_{04}} - y_{p_{02}})^2 \left( \frac{1}{d_{12}^2} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{d_{34}^2} \right) + (y_{p_{03}} - y_{p_{01}})(y_{p_{04}} - y_{p_{02}}) \left( \frac{\cos \beta_1}{d_{12} d_{14}} + \frac{\cos \beta_3}{d_{23} d_{34}} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{\cos \beta_2}{d_{12} d_{23}} - \frac{\cos \beta_4}{d_{34} d_{41}} \right) \right] \left( m_{x,y}^2 + \frac{m_{X,Y}^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для квадрата углы  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 90^\circ$ ,  $d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{41} = d$ , а вместо формул (4.6) и (4.7) получим

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha}^2 &= \frac{4k^2}{d^2} [(x_{p_{03}} - x_{p_{01}})^2 + (x_{p_{04}} - x_{p_{02}})^2] (m_{x,y}^2 + \frac{m_{X,Y}^2}{m^2}); \\ m_{\omega}^2 &= \frac{4k^2}{d^2} [(y_{p_{03}} - y_{p_{01}})^2 + (y_{p_{04}} - y_{p_{02}})^2] (m_{x,y}^2 + \frac{m_{X,Y}^2}{m^2}). \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что для квадрата  $k = f/d^2$ , то

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha} &= \frac{2f}{d^3} \sqrt{[(x_{p_{03}} - x_{p_{01}})^2 + (x_{p_{04}} - x_{p_{02}})^2] (m_{x,y}^2 + \\ &+ m_{X,Y}^2/m^2)}, \\ m_{\omega} &= \frac{2f}{d^3} \sqrt{[(y_{p_{03}} - y_{p_{01}})^2 + (y_{p_{04}} - y_{p_{02}})^2] (m_{x,y}^2 + \\ &+ m_{X,Y}^2/m^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Поскольку для квадрата

$$(x_{p_{03}} - x_{p_{01}})^2 + (x_{p_{04}} - x_{p_{02}})^2 = (y_{p_{03}} - y_{p_{01}})^2 + (y_{p_{04}} - y_{p_{02}})^2 = d^2,$$

то

$$m_{\alpha} = m_{\omega} = \frac{2f}{d^2} \sqrt{m_{x,y}^2 + m_{X,Y}^2/m^2}. \quad (4.9)$$

В табл. 14 приведены значения  $m_{\alpha}$ ,  $m_{\omega}$  в секундах дуги для  $m_{X,Y} = \pm 0,2$  м;  $m_{x,y} = \pm 0,02$  мм;  $1:m = 1:10000$  для различных значений  $f$  и  $d$ .

Анализ данных, приведенных в табл. 14, показывает, что точность определения угловых элементов  $\alpha$  и  $\omega$  повышается с уменьшением фокусного расстояния фотокамеры и с увеличением площади квадрата, вершинами которого являются изображения опорных точек. При прочих равных условиях точность определения  $\alpha$  и  $\omega$  будет выше для снимков большого формата.

Выполняя вывод, аналогичный приведенному, для формул (4.2), в которых для горизонтальной местности

$$Q_i^2 = \frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2},$$

в результате получаем формулы

$$m_{\alpha_x}^2 = \frac{f^2}{2S_{q \ 1 \ 2 \ 3 \ 4}^2} \left[ [(y_{q3} - y_{q1})^2 \left( \frac{1}{d_{23}^2} + \frac{1}{d_{41}^2} \right) + (y_{q4} - y_{q2})^2] x \right]$$

d	Фокусное расстояние, мм			
	70	100	150	200
100	81,7"	116,7"	175,0"	233,4"
120	56,7	81,0	121,5	162,1
140	41,7	59,5	89,3	119,1
160	31,9	45,6	68,4	91,2
180	25,2	36,0	54,0	72,0
200	20,4	29,2	43,8	58,3
220	16,9	24,1	36,2	48,2

$$x \left( \frac{1}{d_{12}^2} + \frac{1}{d_{34}^2} \right) + (y_{q3} - y_{q1})(y_{q4} - y_{q2}) \left( \frac{\cos \beta_1}{d_{12} d_{14}} - \frac{\cos \beta_2}{d_{12} d_{23}} + \frac{\cos \beta_3}{d_{23} d_{34}} - \frac{\cos \beta_4}{d_{34} d_{41}} \right) \left( m_{x,y}^2 + \frac{m_{X,Y}^2}{m^2} \right); \quad (4.10)$$

$$m_{a_y}^2 = \frac{f^2}{2S_{q_{1234}}^2} \left[ (x_{q3} - x_{q1})^2 \left( \frac{1}{d_{23}^2} + \frac{1}{d_{41}^2} \right) + (x_{q4} - x_{q2})^2 \left( \frac{1}{d_{12}^2} + \frac{1}{d_{34}^2} \right) + (x_{q3} - x_{q1})(x_{q4} - x_{q2}) \left( \frac{\cos \beta_1}{d_{12} d_{14}} - \frac{\cos \beta_2}{d_{12} d_{23}} + \frac{\cos \beta_3}{d_{23} d_{34}} - \frac{\cos \beta_4}{d_{34} d_{41}} \right) \right] \left( m_{x,y}^2 + \frac{m_{X,Y}^2}{m^2} \right).$$

Если изображения опорных точек являются вершинами квадрата, в центре которого находится главная точка снимка, то углы  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 90^\circ$ ,  $d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{41} = d$ ,  $2S_{q_{1234}} = S_{1234} = d^2$ , а вместо формул (4.10) имеем

$$m_{a_x} = m_{a_y} = \frac{2f}{d^2} \sqrt{m_{x,y}^2 + \frac{m_{X,Y}^2}{m^2}}. \quad (4.11)$$

Формула (4.11) полностью совпадает с формулой (4.9). Следовательно, оба метода определения угловых элементов внешнего ориентирования для случая, когда опорные точки являются вершинами квадрата, в центре которого находится главная точка, приводят к одинаковым по точности результатам.

При определении  $k$  из третьей формулы системы (4.1) по всем линиям, соединяющим опорные точки, включая и диагонали, имеем

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_1 &= \frac{x_{p_{01}}}{f} \omega - \frac{x_{p_{01}}}{f} a - l_1''; \\
 \kappa_2 &= \frac{x_{p_{02}}}{f} \omega - \frac{y_{p_{02}}}{f} a - l_2''; \\
 \kappa_3 &= \frac{x_{p_{03}}}{f} \omega - \frac{y_{p_{03}}}{f} a - l_3''; \\
 \kappa_4 &= \frac{x_{p_{04}}}{f} \omega - \frac{y_{p_{04}}}{f} a - l_4''; \\
 \kappa_5 &= \frac{x_{p_{05}}}{f} \omega - \frac{y_{p_{05}}}{f} a - l_5''; \\
 \kappa_6 &= \frac{x_{p_{06}}}{f} \omega - \frac{y_{p_{06}}}{f} a - l_6''.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Точность определения  $\kappa_i$  зависит в основном от точности определения значений  $l_i''$ . Анализ формулы (4.4) показывает, что при прочих равных условиях изменение  $l_i''$  из-за ошибок координат опорных точек и их изображений на снимке обратно пропорционально расстоянию  $d_{ij}$  между точками. Поскольку вес обратно пропорционален квадрату средней квадратической ошибки, то на основании изложенного можно считать вес определения  $\kappa_i$  пропорциональным квадрату расстояния между точками.

Если опорные точки являются вершинами квадрата, то, принимая вес определения  $\kappa_i$  по сторонам квадрата равным 1, для углов  $\kappa_i$ , определяемых по диагоналям, вес будет равен 2. С учетом этого средневесовое значение угла  $\kappa_i$  из всех 6 значений, приведенных в формулах (4.12), будет определяться по формуле

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{1}{8} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 + 2\kappa_5 + 2\kappa_6) = \frac{\omega}{8f} (x_{p_{01}} + x_{p_{02}} + x_{p_{03}} + \\
 &+ x_{p_{04}} + 2x_{p_{05}} + 2x_{p_{06}}) - \frac{a}{8} (y_{p_{01}} + y_{p_{02}} + y_{p_{03}} + y_{p_{04}} + 2y_{p_{05}} + \\
 &+ 2y_{p_{06}}) - \frac{1}{8} (l_1'' + l_2'' + l_3'' + l_4'' + 2l_5'' + 2l_6'').
 \end{aligned}$$

Дифференцируя по переменным  $a, \omega, l_i''$ , получим

$$\begin{aligned}
 d\kappa &= \frac{x_{p_0}}{f} d\omega - \frac{y_{p_0}}{f} da - \frac{1}{8} (dl_1'' + dl_2'' + dl_3'' + dl_4'' + 2dl_5'' + \\
 &+ 2dl_6''), \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_{p_0} &= \frac{1}{8} (x_{p_{01}} + x_{p_{02}} + x_{p_{03}} + \\ &+ x_{p_{04}} + 2x_{p_{05}} + 2x_{p_{06}}), \\ y_{p_0} &= \frac{1}{8} (y_{p_{01}} + y_{p_{02}} + y_{p_{03}} + \\ &+ y_{p_{04}} + 2y_{p_{05}} + 2y_{p_{06}}). \end{aligned} \right\}$$

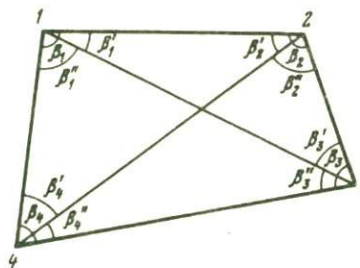


Рис. 36

Учитывая, что значения  $x_{p_0}/f$  и  $y_{p_0}/f$  значительно меньше единицы, а искажения  $da$ ,  $d\omega$ ,  $dk$  — величины одного порядка, без ущерба для точности первым и вторым слагаемыми в формулах (4.12) можно пренебречь. Тогда с учетом выражения (4.4) при  $h = 0$   $A_{ij} \approx \gamma_{ij}$ ,  $d_{ij}/D_{0ij} = 1/m$ , после преобразований находим

$$\begin{aligned} dk &= -\frac{1}{8} \left[ \left( \frac{\sin \gamma_{12}}{d_{12}} - \frac{\sin \gamma_{41}}{d_{41}} + \frac{2 \sin \gamma_{13}}{d_{13}} \right) \left( dx_1 - \frac{dX_1}{m} \right) - \right. \\ &- \left( \frac{\cos \gamma_{12}}{d_{12}} - \frac{\cos \gamma_{41}}{d_{41}} + \frac{2 \cos \gamma_{13}}{d_{13}} \right) \left( dy_1 - \frac{dY_1}{m} \right) - \left( \frac{\sin \gamma_{12}}{d_{12}} - \right. \\ &- \frac{\sin \gamma_{23}}{d_{23}} - \frac{2 \sin \gamma_{24}}{d_{24}} \left. \right) \left( dx_2 - \frac{dX_2}{m} \right) + \left( \frac{\cos \gamma_{12}}{d_{12}} - \frac{\cos \gamma_{23}}{d_{23}} - \right. \\ &- \frac{2 \cos \gamma_{24}}{d_{24}} \left. \right) \left( dy_2 - \frac{dY_2}{m} \right) - \left( \frac{\sin \gamma_{23}}{d_{23}} - \frac{\sin \gamma_{34}}{d_{34}} + \frac{2 \sin \gamma_{13}}{d_{13}} \right) \times \\ &\times \left( dx_3 - \frac{dX_3}{m} \right) + \left( \frac{\cos \gamma_{23}}{d_{23}} - \frac{\cos \gamma_{34}}{d_{34}} + \frac{2 \cos \gamma_{13}}{d_{13}} \right) \left( dy_3 - \frac{dY_3}{m} \right) - \\ &- \left( \frac{\sin \gamma_{34}}{d_{34}} - \frac{\sin \gamma_{41}}{d_{41}} + \frac{2 \sin \gamma_{24}}{d_{24}} \right) \left( dx_4 - \frac{dX_4}{m} \right) + \left( \frac{\cos \gamma_{34}}{d_{34}} - \right. \\ &- \left. \left( \frac{\cos \gamma_{41}}{d_{41}} + \frac{2 \cos \gamma_{24}}{d_{24}} \right) \left( dy_4 - \frac{dY_4}{m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Полагая, что ошибки координат опорных точек на местности и ошибки координат изображений этих точек на снимке случайные и независи-

мые, после перехода к квадратам средних квадратических ошибок, принимая  $m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{y_4} = m_{x, y}$ ;  $m_{X_1} = m_{X_2} = \dots = m_{Y_4} = m_{X, Y}$ , после преобразований имеем (рис. 36)

$$m_K^2 = \frac{1}{32} \left[ \frac{1}{d_{12}^2} + \frac{1}{d_{41}^2} + \frac{1}{d_{23}^2} + \frac{1}{d_{34}^2} + \frac{4}{d_{13}^2} + \frac{4}{d_{24}^2} - \frac{\cos(\gamma_{12} - \gamma_{41})}{d_{12} d_{41}} + \frac{2 \cos(\gamma_{12} - \gamma_{13})}{d_{12} d_{13}} - \frac{2 \cos(\gamma_{41} - \gamma_{13})}{d_{41} d_{13}} - \frac{\cos(\gamma_{12} - \gamma_{23})}{d_{12} d_{23}} - \frac{2 \cos(\gamma_{12} - \gamma_{24})}{d_{12} d_{24}} + \frac{2 \cos(\gamma_{23} - \gamma_{24})}{d_{23} d_{24}} - \frac{\cos(\gamma_{23} - \gamma_{34})}{d_{23} d_{34}} + \frac{2 \cos(\gamma_{23} - \gamma_{13})}{d_{23} d_{13}} - \frac{2 \cos(\gamma_{34} - \gamma_{13})}{d_{34} d_{13}} - \frac{\cos(\gamma_{34} - \gamma_{41})}{d_{34} d_{41}} + \frac{2 \cos(\gamma_{34} - \gamma_{24})}{d_{34} d_{24}} - \frac{2 \cos(\gamma_{41} - \gamma_{24})}{d_{41} d_{24}} \right] \left( m_{x, y}^2 + \frac{m_{X, Y}^2}{m^2} \right).$$

ИЛИ

$$m_K^2 = \frac{1}{32} \left( \frac{1}{d_{12}^2} + \frac{1}{d_{41}^2} + \frac{1}{d_{23}^2} + \frac{1}{d_{34}^2} + \frac{4}{d_{13}^2} + \frac{4}{d_{24}^2} + \frac{\cos \beta_1}{d_{12} d_{41}} + \frac{2 \cos \beta_1'}{d_{12} d_{13}} + \frac{2 \cos \beta_1''}{d_{41} d_{13}} + \frac{\cos \beta_2}{d_{12} d_{23}} + \frac{2 \cos \beta_2^1}{d_{12} d_{24}} + \frac{2 \cos \beta_2''}{d_{23} d_{24}} + \frac{\cos \beta_3}{d_{23} d_{34}} + \frac{2 \cos \beta_3'}{d_{23} d_{13}} + \frac{2 \cos \beta_3''}{d_{34} d_{13}} + \frac{\cos \beta_4}{d_{34} d_{41}} + \frac{2 \cos \beta_4''}{d_{34} d_{24}} + \frac{2 \cos \beta_4'}{d_{41} d_{24}} \right) \left( m_{x, y}^2 + \frac{m_{X, Y}^2}{m^2} \right). \quad (4.14)$$

Для квадрата, вершинами которого являются изображения опорных точек, имеем

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 90^\circ, \quad \beta_i' = \beta_i'' = 45^\circ, \\ d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{41} = d_{13} / \sqrt{2} = d_{24} / \sqrt{2} = d.$$

С учетом этого

$$m_K = \frac{0,707\rho}{d} \sqrt{m_{x, y}^2 + m_{X, Y}^2 / m^2}. \quad (4.15)$$

d, мм	m <sub>κ</sub> при m <sub>x, y</sub> в мм		d, мм	m <sub>κ</sub> при m <sub>x, y</sub> в мм	
	0,01	0,02		0,01	0,02
100	20,6''	41,3''	180	11,5	22,9
120	17,2	34,4	200	10,3	20,6
140	14,7	29,5	220	9,4	18,8
160	12,9	25,8			

Формула (4.15) получается и для случая, когда в квадрате для определения  $\kappa$  используют только одни диагонали.

В табл. 15 приведены значения  $m_\alpha$  (при  $m_{x, y} = m_{X, Y}/m$ ), вычисленные по формуле (4.15) для различных значений  $d$ .

Данные табл. 15 показывают, что для одинаковых условий точность определения угла  $\kappa$  выше, чем точность определения углов  $\alpha$  и  $\omega$ . Сравнение формул (4.9) и (4.15) показывает, что

$$\frac{m_\kappa}{m_{\alpha, \omega}} = 0,35 \frac{d}{f},$$

т.е. точность определения  $m_\kappa, m_\alpha, m_\omega$  будет одинаковой при условии, если сторона квадрата на снимке  $d \approx 2,86f$ . Это условие может быть выполнено при сравнительно небольшом фокусном расстоянии фотокамеры и большом формате снимка.

## § 21. ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВНЕШНЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ

В первую очередь найдем среднюю квадратическую ошибку определения высоты фотографирования  $H_0 = Z_S - Z_1$ . Для случая, когда опорные точки являются вершинами четырехугольника, находим

$$H_0 = \frac{p_{12}H_{12} + p_{23}H_{23} + p_{34}H_{34} + p_{14}H_{41} + p_{13}H_{13} + p_{24}H_{24}}{p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{41} + p_{13} + p_{24}}. \quad (4.16)$$

Учитывая формулу (3.50), для квадрата, принимая во внимание, что вес диагонали в два раза больше веса стороны, получим

$$H_0 = \frac{f}{8} \left( \frac{D_{12}}{d'_{12}} + \frac{D_{23}}{d'_{23}} + \frac{D_{34}}{d'_{34}} + \frac{D_{41}}{d'_{41}} + \frac{2D_{13}}{d'_{13}} + \frac{2D_{24}}{d'_{24}} \right). \quad (4.17)$$

Значение

$$\begin{aligned} dH_0 = & \frac{1}{8} \left( \frac{f}{d'_{12}} dD_{12} - \frac{H_0}{d'_{12}} dd'_{12} + \frac{f}{d'_{23}} dD_{23} - \frac{H_0}{d'_{23}} dd'_{23} + \right. \\ & \left. + \frac{f}{d'_{34}} dD_{34} - \frac{H_0}{d'_{34}} dd'_{34} + \frac{f}{d'_{41}} dD_{41} - \frac{H_0}{d'_{41}} dd'_{41} + \frac{2f}{d'_{13}} dD_{13} - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{2H_0}{d'_{13}} dd'_{13} + \frac{2f}{d'_{24}} dD_{24} - \frac{2H_0}{d'_{24}} dd'_{24} \Big) + \frac{H}{f} df. \quad (4.18)$$

Выражая длины отрезков через координаты их концов, для плоской местности имеем

$$\left. \begin{aligned} D_{ij}^2 &= (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2; \\ d_{ij}^2 &= (x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2. \end{aligned} \right\}$$

Дифференцируя по переменным  $X_i, Y_i; X_j, Y_j; x_i^0, y_i^0; x_j^0, y_j^0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} dD_{ij} &= \frac{X_j - X_i}{D_{ij}} (dX_j - dX_i) + \frac{Y_j - Y_i}{D_{ij}} (dY_j - dY_i); \\ dd_{ij} &= \frac{x_j^0 - x_i^0}{d'_{ij}} (dx_j^0 - dx_i^0) + \frac{y_j^0 - y_i^0}{d'_{ij}} (dy_j^0 - dy_i^0). \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Подставляя эти значения в формулу (4.18) и принимая  $\gamma_{ij} \approx A_{ij}, \frac{d'_{ij}}{D_{ij}} \approx \frac{1}{m}$ , находим

$$\begin{aligned} dH_0 &= \frac{H_0}{8} \left[ \left( \frac{\cos \gamma_{12}}{d'_{12}} - \frac{\cos \gamma_{41}}{d'_{41}} + \frac{2 \cos \gamma_{13}}{d'_{13}} \right) \left( dx_1^0 - \frac{dX_1}{m} \right) + \right. \\ &+ \left( \frac{\sin \gamma_{12}}{d'_{12}} - \frac{\sin \gamma_{41}}{d'_{41}} + \frac{2 \sin \gamma_{13}}{d'_{13}} \right) \left( dy_1^0 - \frac{dY_1}{m} \right) - \left( \frac{\cos \gamma_{12}}{d'_{12}} - \right. \\ &- \frac{\cos \gamma_{23}}{d'_{23}} - \frac{2 \cos \gamma_{24}}{d'_{24}} \left. \right) \left( dx_2^0 - \frac{dX_2}{m} \right) - \left( \frac{\sin \gamma_{12}}{d'_{12}} - \frac{\sin \gamma_{23}}{d'_{23}} - \right. \\ &- \frac{2 \sin \gamma_{24}}{d'_{24}} \left. \right) \left( dy_2^0 - \frac{dY_2}{m} \right) - \left( \frac{\cos \gamma_{23}}{d'_{23}} - \frac{\cos \gamma_{34}}{d'_{34}} + \frac{2 \cos \gamma_{13}}{d'_{13}} \right) \times \\ &\times \left( dx_3^0 - \frac{dX_3}{m} \right) - \left( \frac{\sin \gamma_{23}}{d'_{23}} - \frac{\sin \gamma_{34}}{d'_{34}} + \frac{2 \sin \gamma_{13}}{d'_{13}} \right) \left( dy_3^0 - \frac{dY_3}{m} \right) - \\ &- \left( \frac{\cos \gamma_{34}}{d'_{34}} - \frac{\cos \gamma_{41}}{d'_{41}} + \frac{2 \cos \gamma_{24}}{d'_{24}} \right) \left( dx_4^0 - \frac{dX_4}{m} \right) - \\ &- \left. \left( \frac{\sin \gamma_{34}}{d'_{34}} - \frac{\sin \gamma_{41}}{d'_{41}} + \frac{2 \sin \gamma_{24}}{d'_{24}} \right) \left( dy_4^0 - \frac{dY_4}{m} \right) + \frac{H}{f} df. \right] \end{aligned}$$

Полагая, что ошибки координат опорных точек на местности и ошибки координат соответствующих им точек на снимке случайные и независимые, после перехода к квадратам средних квадратических ошибок, принимая  $m_{x_1^0} = m_{x_2^0} = \dots = m_{y_4^0} = m_{x^0, y^0}$ ;  $m_{X_1} = m_{X_2} = \dots = m_{Y_4} = m_{X, Y}$ ; после преобразований (см. рис. 36) находим

$$m_{H_0}^2 = \frac{H_0^2}{32} \left( \frac{1}{d_{12}'^2} + \frac{1}{d_{41}'^2} + \frac{4}{d_{13}'^2} + \frac{1}{d_{23}'^2} + \frac{4}{d_{24}'^2} + \frac{1}{d_{34}'^2} + \frac{\cos \beta_1}{d_{12}' d_{41}'} + \right. \\ \left. + \frac{2\cos \beta_1'}{d_{12}' d_{13}'} + \frac{2\cos \beta_1''}{d_{41}' d_{13}'} + \frac{\cos \beta_2}{d_{12}' d_{23}'} + \frac{2\cos \beta_2'}{d_{12}' d_{24}'} + \frac{2\cos \beta_2''}{d_{23}' d_{24}'} + \frac{\cos \beta_3}{d_{23}' d_{34}'} + \right. \\ \left. + \frac{2\cos \beta_3'}{d_{23}' d_{13}'} + \frac{2\cos \beta_3''}{d_{34}' d_{13}'} + \frac{2\cos \beta_4}{d_{34}' d_{41}'} + \frac{2\cos \beta_4'}{d_{34}' d_{24}'} + \frac{2\cos \beta_4''}{d_{41}' d_{24}'} \right) \times \\ \times \left( m_{x^0, y^0}^2 + \frac{m_{X, Y}^2}{m^2} \right) + \frac{H_1^2}{f^2} m_f^2.$$

Учитывая

$$\frac{2\cos \beta_1'}{d_{12}' d_{13}'} + \frac{2\cos \beta_3'}{d_{23}' d_{13}'} = \frac{2\cos \beta_1' \sin \beta_1' + 2\cos \beta_3' \sin \beta_3'}{2S_{123}} = \\ = \frac{2\sin(\beta_1' + \beta_3') \cos(\beta_1' - \beta_3')}{d_{12}' d_{23}' \sin \beta_2} = \frac{2\cos(\beta_1' - \beta_3')}{d_{12}' d_{23}'},$$

аналогичным образом получим

$$\frac{2\cos \beta_1''}{d_{41}' d_{13}'} + \frac{2\cos \beta_3''}{d_{34}' d_{13}'} = \frac{2\cos(\beta_1'' - \beta_3'')}{d_{34}' d_{41}'}; \\ \frac{2\cos \beta_2'}{d_{12}' d_{24}'} + \frac{2\cos \beta_4'}{d_{41}' d_{24}'} = \frac{2\cos(\beta_2' - \beta_4')}{d_{12}' d_{14}'}; \\ \frac{2\cos \beta_2''}{d_{23}' d_{24}'} + \frac{2\cos \beta_4''}{d_{34}' d_{24}'} = \frac{2\cos(\beta_2'' - \beta_4'')}{d_{23}' d_{34}'}.$$

С учетом полученных значений вместо (4.20) находим

$$\begin{aligned}
m_{H_0}^2 = & \frac{H_0^2}{32} \left[ \frac{1}{d_{12}'^2} + \frac{1}{d_{41}'^2} + \frac{4}{d_{13}'^2} + \frac{1}{d_{23}'^2} + \frac{4}{d_{24}'^2} + \frac{1}{d_{34}'^2} + \right. \\
& + \frac{\cos \beta_1 + 2\cos(\beta_2' - \beta_4')}{d_{12}' d_{41}'} + \frac{\cos \beta_2 + 2\cos(\beta_1' - \beta_3')}{d_{12}' d_{23}'} + \\
& \left. + \frac{\cos \beta_3 + 2\cos(\beta_2'' - \beta_4'')}{d_{23}' d_{34}'} + \frac{\cos \beta_4 + 2\cos(\beta_1'' - \beta_3'')}{d_{34}' d_{41}'} \right] \times \\
& \times \left( m_{x^0, y^0}^2 + \frac{m_{X, Y}^2}{m^2} \right) + \frac{H_1^2}{f^2} m_f^2. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Для квадрата  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 90^\circ$ ,  $\beta_i' = \beta_i'' = 45^\circ$ ,  $d_{12}' = d_{23}' = d_{34}' = d_{41}' = d_{13}' / \sqrt{2} = d_{24}' / \sqrt{2} = d$ .

С учетом этого

$$m_{H_0} = H_0 \sqrt{\frac{1}{2d^2} (m_{x^0, y^0}^2 + \frac{m_{X, Y}^2}{m^2}) + \frac{m_f^2}{f^2}}. \quad (4.21)$$

В формулу (4.21) входит средняя квадратическая ошибка трансформированной точки снимка, поэтому необходимо найти зависимость между величинами  $m_{x^0, y^0}$  и  $m_{x, y}$ , где  $m_{x, y}$  — средняя квадратическая ошибка координат, измеренных на снимке. Используя формулы приближенного трансформирования (3.22), после дифференцирования по переменным  $x, y, a, \omega, \kappa$ , опуская индексы при  $x$  и  $y$ , получим

$$\left. \begin{aligned}
dx^0 &= dx + \left(f + \frac{x^2}{f}\right) da + \frac{xy}{f} d\omega - yd\kappa; \\
dy^0 &= dy + \frac{xy}{f} da + \left(f + \frac{y^2}{f}\right) d\omega + x d\kappa.
\end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Подставляя эти значения в формулу (4.19), находим

$$\begin{aligned}
dd_{ij}' = & \frac{x_j^0 - x_i^0}{d_{ij}'} [(dx_j - dx_i) + (x_j^2 - x_i^2) \frac{da}{f} + (x_j y_j - \\
& - x_i y_i) \frac{d\omega}{f} - (y_j - y_i) d\kappa] + \frac{y_j^0 - y_i^0}{d_{ij}'} [(dy_j - dy_i) + (x_j y_j - \\
& - x_i y_i) \frac{da}{f} + (y_j^2 - y_i^2) \frac{d\omega}{f} + (x_j - x_i) d\kappa].
\end{aligned}$$

Если изображения опорных точек располагаются в углах снимка, то для них координаты  $x_i$  и  $y_i$  будут примерно равны по абсолютной величине. С учетом этого

$$\frac{1}{f} (x_j^2 - x_i^2) = 0, \quad \frac{1}{f} (y_j^2 - y_i^2) = 0.$$

Кроме того, коэффициенты при  $d\kappa$  практически равны между собой, но имеют противоположные знаки. Принимая это во внимание, имеем

$$dd'_{ij} = \frac{x_j^0 - x_i^0}{d'_{ij}} (dx_j - dx_i) + \frac{y_j^0 - y_i^0}{d'_{ij}} (dy_j - dy_i) + \frac{x_j y_j - x_i y_i}{f d'_{ij}} [(x_j^0 - x_i^0) d\omega + (y_j^0 - y_i^0) da].$$

Подставляя в формулу (4.18) в каждое  $dd'_{ij}$  только последнее слагаемое полученного выражения, после суммирования определим

$$\begin{aligned} \delta dH_0 = & -\frac{H_0}{8} \left\{ \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{f d_{12}'^2} [(x_2^0 - x_1^0) d\omega + (y_2^0 - y_1^0) da] + \right. \\ & + \frac{x_3 y_3 - x_2 y_2}{f d_{23}'^2} [(x_3^0 - x_2^0) d\omega + (y_3^0 - y_2^0) da] + \frac{x_4 y_4 - x_3 y_3}{f d_{34}'^2} \times \\ & \times [(x_4^0 - x_3^0) d\omega + (y_4^0 - y_3^0) da] + \frac{x_1 y_1 - x_4 y_4}{f d_{41}'^2} [(x_1^0 - x_4^0) d\omega + \\ & + (y_1^0 - y_4^0) da] + \frac{2(x_3 y_3 - x_1 y_1)}{f d_{13}'^2} [(x_3^0 - x_1^0) d\omega + (y_3^0 - y_1^0) da] + \\ & \left. + \frac{2(x_4 y_4 - x_2 y_2)}{f d_{24}'^2} [(x_4^0 - x_2^0) d\omega + (y_4^0 - y_2^0) da] \right\}. \end{aligned}$$

Для точек, расположенных в углах снимка, имеем

$$-x_1 = x_2 = x_3 = -x_4 = x, \quad y_1 = y_2 = -y_3 = -y_4 = y.$$

С учетом этого получаем  $\delta dH_0 = 0$ . Следовательно, ошибки в угловых элементах внешнего ориентирования при расположении изображений опорных точек в углах планового снимка практически не влияют на точность определения высоты фотографирования и для рассматриваемого случая в формуле (4.21) можно считать  $m_{x^0}, y^0 = m_{x, y}$ :

Анализ формулы (4.21) показывает, что основное влияние на вели-

$d, \text{мм}$	Фокусное расстояние, мм			
	70	100	150	200
100	1:2867	1:3536	1:4160	1:4472
120	1:3023	1:3841	1:4685	1:5145
140	1:3130	1:4069	1:5117	1:5735
160	1:3207	1:4240	1:5472	1:6247
180	1:3262	1:4371	1:5762	1:6690
200	1:3304	1:4472	1:6000	1:7071
220	1:3335	1:4552	1:6197	1:7399

чину средней квадратической ошибки высоты фотографирования оказывает средняя квадратическая ошибка фокусного расстояния. Например, при  $m_{x, y} = m_{X, Y}/m = m_f = m$

$$m_{H_0} = H_0 m \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{f^2}},$$

т.е. влияние ошибок координат опорных точек, их изображений и фокусного расстояния будут одинаковыми только при  $d = f$ .

В табл. 16 приведены значения  $m_{H_0}/H_0$  для  $m = 0,02$  мм и различных значений  $d$  и  $f$ .

Из табл. 16 видно, что относительная ошибка определения высоты фотографирования уменьшается с увеличением  $d$  и фокусного расстояния  $f$ .

Для вывода формулы средней квадратической ошибки определения координат центра проектирования  $X_S, Y_S$  воспользуемся выражениями (3.28). Если значения координат  $X_{S_i}, Y_{S_i}$  центра проектирования определяются по четырем опорным точкам, то

$$\left. \begin{aligned} X_S &= \frac{1}{4} \sum_1^4 X_{S_i} = \frac{1}{4} [x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + x_4^0 + \frac{Z_S - Z_1}{f} (x_1^0 + \\ &+ x_2^0 + x_3^0 + x_4^0)]; \\ Y_S &= \frac{1}{4} \sum_1^4 Y_{S_i} = \frac{1}{4} [y_1^0 + y_2^0 + y_3^0 + y_4^0 + \frac{Z_S - Z_1}{f} (y_1^0 + \\ &+ y_2^0 + y_3^0 + y_4^0)]. \end{aligned} \right\}$$

Дифференцируя по переменным  $X_i, Y_i, x_i^0, y_i^0, Z_S - Z_1 = H_0, f$  получаем

$$\left. \begin{aligned} dX_S &= \frac{1}{4} [dX_1 + dX_2 + dX_3 + dX_4 + \frac{H_0}{f} (dx_1^0 + dx_2^0 + dx_3^0 + \\ &+ dx_4^0) + (x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + x_4^0) d(\frac{H_0}{f})] ; \\ dY_S &= \frac{1}{4} [dY_1 + dY_2 + dY_3 + dY_4 + \frac{H_0}{f} (dy_1^0 + dy_2^0 + \\ &+ dy_3^0 + dy_4^0) + (y_1^0 + y_2^0 + y_3^0 + y_4^0) d(\frac{H_0}{f})] . \end{aligned} \right\} (4.23)$$

Если изображения опорных точек находится в углах планового снимка, то

$$x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + x_4^0 \approx 0,$$

$$y_1^0 + y_2^0 + y_3^0 + y_4^0 \approx 0.$$

В формулы (4.23) входят значения  $dx_i^0, dy_i^0$ . Подставляя в выражения (4.23) вместо  $dx_i^0, dy_i^0$  их значения из формул (4.22), имеем

$$\begin{aligned} dx_1^0 + dx_2^0 + dx_3^0 + dx_4^0 &= dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4 + (f + \\ &+ \frac{x_1^2}{f}) da + \frac{x_1 y_1}{f} d\omega - y_1 d\kappa + (f + \frac{x_2^2}{f}) da + \frac{x_2 y_2}{f} d\omega - \\ &- y_2 d\kappa + (f + \frac{x_3^2}{f}) da + \frac{x_3 y_3}{f} d\omega - y_3 d\kappa + (f + \frac{x_4^2}{f}) da + \\ &+ \frac{x_4 y_4}{f} d\omega - y_4 d\kappa. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая  $-x_1 = x_2 = x_3 = -x_4 = x, y_1 = y_2 = -y_3 = -y_4 = y$ . Тогда

$$\begin{aligned} dx_1^0 + dx_2^0 + dx_3^0 + dx_4^0 &= dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4 + 4(f + \\ &+ x^2/f) da. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} dy_1^0 + dy_2^0 + dy_3^0 + dy_4^0 &= dy_1 + dy_2 + dy_3 + dy_4 + 4(f + \\ &+ y^2/f) d\omega. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в формулу (4.23), находим

$$\left. \begin{aligned} dX_S &= \frac{1}{4} [(dX_1 + dX_2 + dX_3 + dX_4) + \frac{H_0}{f}(dx_1 + dx_2 + \\ &+ dx_3 + dx_4) + 4H_0(1 + \frac{x^2}{f^2})da]; \\ dY_S &= \frac{1}{4} [(dY_1 + dY_2 + dY_3 + dY_4) + \frac{H_0}{f}(dy_1 + dy_2 + \\ &+ dy_3 + dy_4) + 4H_0(1 + \frac{y^2}{f^2})d\omega]. \end{aligned} \right\} (4.24)$$

Величины  $da$  и  $d\omega$ , входящие в формулы (4.24), являются функциями ошибок координат опорных точек на местности и на снимке. При строгом решении задачи необходимо вместо  $\delta a$  и  $\delta \omega$  в формулы (4.24) подставить их значения из выражения (4.5) для  $\delta a$  и аналогичные значения для  $\delta \omega$ , привести подобные члены и после этого перейти к квадратам средних квадратических ошибок. Для упрощения решения задачи положим, что изображения опорных точек на снимке являются вершинами квадрата, стороны которого параллельны осям координат, а главная точка снимка находится в центре квадрата. С учетом отмеченного вместо формулы (4.5) имеем

$$da = k[-dy_1 + dy_2 - dy_3 + dy_4 + \frac{f}{H_0}(dY_1 - dY_2 + dY_3 - dY_4)].$$

Аналогично

$$d\omega = k[-dx_1 + dx_2 - dx_3 + dx_4 + \frac{f}{H_0}(dX_1 - dX_2 + dX_3 - dX_4)].$$

Подставляя вместо  $da$  и  $d\omega$  полученные значения в формулы (4.24), находим

$$\begin{aligned} dX_S &= \frac{1}{4} (dX_1 + dX_2 + dX_3 + dX_4) + \frac{H_0}{4f} (dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4) + \\ &+ H_0(1 + \frac{x^2}{f^2}) \frac{f}{d^2} [-dy_1 + dy_2 - dy_3 + dy_4 + \frac{f}{H_0} (dY_1 - dY_2 + \\ &+ dY_3 - dY_4)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dY_S &= \frac{1}{4} (dY_1 + dY_2 + dY_3 + dY_4) + \frac{H_0}{4f} (dy_1 + dy_2 + dy_3 + dy_4) + \\ &+ H_0(1 + \frac{y^2}{f^2}) \frac{f}{d^2} [-dx_1 + dx_2 - dx_3 + dx_4 + \frac{f}{H_0} (dX_1 - dX_2 + \\ &+ dX_3 - dX_4)]. \end{aligned}$$

d, мм	Фокусное расстояние, мм				d, мм	Фокусное расстояние, мм			
	70	100	150	200		70	100	150	200
100	0,44	0,72	1,42	2,41	180	0,27	0,35	0,55	0,85
120	0,36	0,55	1,03	1,72	200	0,25	0,32	0,48	0,72
140	0,32	0,45	0,80	1,30	220	0,24	0,29	0,43	0,63
160	0,29	0,39	0,65	1,03					

Полагая, что ошибки в координатах являются случайными и независимыми, переходя к квадратам средних квадратических ошибок и принимая  $m_{X_i} = m_{Y_i} = m_{X, Y}$ ,  $m_{x_i} = m_{y_i} = m_{x, y}$ ;  $x^2 = y^2 = (\frac{d}{2})^2$ , после преобразований получим

$$m_{X_S} = m_{Y_S} = \sqrt{[0,25 + (2f^2/d^2 + 0,5)^2] (m_{X, Y}^2 + H_0^2/f^2 m_{x, y}^2)}. \quad (4.25)$$

В табл. 17 приведены значения  $m_{X_S} = m_{Y_S}$  в метрах, вычисленные для  $m_{X, Y} = \frac{H_0}{f} m_{x, y} = 0,2$  м для различных  $d$  и  $f$ .

Анализ формул (4.23) – (4.25) и данных табл. 17 показывает, что основной вклад в  $m_{X_S}$  вносят ошибки углового элемента внешнего ориентирования  $\alpha$ , а в  $m_{Y_S}$  – ошибки  $\omega$ . Если считать  $dx = d\omega = 0$ , то

$$m_{X_S} = m_{Y_S} = 0,5 \sqrt{m_{X, Y}^2 + \frac{H_0^2}{f^2} m_{x, y}^2} \quad (4.26)$$

т.е. в этом случае  $m_{X_S}$ ,  $m_{Y_S}$  зависят только от ошибок координат опорных точек и не зависят от положения изображений этих точек на поле снимка. Подставляя в формулу (4.26)  $m_{X, Y} = \frac{H_0}{f} m_{x, y} = 0,2$  м, получим

$$m_{X_S} = m_{Y_S} = 0,14 \text{ м,}$$

что в 1,7 – 17,2 раза меньше значений, приведенных в табл. 17.

АНАЛИЗ ПАРЫ СНИМКОВ

§ 22. КООРДИНАТЫ, ПАРАЛЛАКСЫ И ЭЛЕМЕНТЫ  
ОРИЕНТИРОВАНИЯ ПАРЫ СНИМКОВ

Соответственные точки на паре снимков (стереопаре) определяются в плоских прямоугольных системах координат (см. рис. 5). На левом снимке точка  $a_1$  имеет координаты  $x_1, y_1$ , соответственная ей точка  $a_2$  на правом снимке — координаты  $x_2, y_2$ . Начала координат  $o_1$  на левом и  $o_2$  на правом снимках находятся на пересечении прямых, соединяющих координатные метки, ось абсциссов совмещают с линией, соединяющей координатные метки  $l-2$ .

Разность абсцисс соответственных точек стереопары  $p = x_1 - x_2$  называют продольным параллаксом, а разность ординат этих точек  $q = y_1 - y_2$  — поперечным параллаксом.

Элементы внутреннего ориентирования (фокусное расстояние фотокамеры  $f$  и координаты главной точки  $x_0, y_0$ ) позволяют определить положение центра проекции относительно снимка и восстановить связку лучей, существовавшую в момент фотографирования. При аэрофото съемке левый и правый снимки обычно получают одной фотокамерой, поэтому можно считать элементы внутреннего ориентирования для обоих снимков одинаковыми.

Элементы внешнего ориентирования стереопары определяют положение левого и правого снимков в момент фотографирования относительно пространственной системы координат. Элементами внешнего ориентирования пары снимков являются:  $X_{S_1}, Y_{S_1}, Z_{S_1}; X_{S_2}, Y_{S_2}, Z_{S_2}$  — координаты левого  $S_1$  и правого  $S_2$  центров проектирования;  $\alpha_1, \omega_1, \kappa_1; \alpha_2, \omega_2, \kappa_2$  — продольный, поперечный углы наклона и угол поворота снимка в своей плоскости левого и правого снимков соответственно.

Следовательно, стереопара имеет шесть линейных и шесть угловых элементов внешнего ориентирования.

Элементы взаимного ориентирования пары снимков позволяют установить снимки относительно друг друга в положение, которое они занимали в момент фотографирования. Взаимное ориентирование может быть выполнено угловыми движениями обоих снимков при неподвижном базисе (базисная система) или движениями правого снимка относительно неподвижного левого снимка (система координат левого снимка).

В базисной системе (рис. 37) начало пространственной системы координат  $X'_1, Y'_1, Z'_1$  совпадает с левым центром проектирования  $S_1$ , ось  $X'_1$  с базисом, ось  $Z'_1$  располагается в главной базисной плоскости  $S_1 S_2 o_1$  перпендикулярно базису  $S_1 S_2$ , ось  $Y'_1$  дополняет систему до правой. Элементами взаимного ориентирования в этой системе являются [5]:  $\alpha'_1$  — угол между осью  $Z'_1$  и главным лучом  $S_1 o_1$  левого снимка;  $\kappa'_1$  — угол на левом снимке между осью  $Y'$  и следом плоскости  $S_1 o_1 Y'_1$ ;  $\alpha'_2$  — угол



между осью  $Z'_2$  и проекцией главного луча  $S_2 o_2$  правого снимка на плоскость  $X'_1 Z'_1$ ;  $\omega'_2$  — угол между главным лучом и его проекцией на плоскость  $X'_1 Z'_1$ ;  $\kappa'_2$  — угол на правом снимке между осью  $y_2$  и следом плоскости  $S_2 o_2 Y'_2$ .

В системе координат левого снимка (рис. 38) начало координат совпадает с центром проекции левого снимка  $S_1$ , оси  $X'_1$  и  $Y'_1$  параллельны осям координат левого снимка, ось  $Z'_1$  совпадает с главным лучом  $S_1 o_1$  левого снимка и направлена в сторону, противоположную от точки  $o_1$ . Элементами взаимного ориентирования в этой системе являются [5]:  $\tau$  — угол между осью  $X'_1$  и проекцией базиса на плоскость  $X'_1 Y'_1$ ;  $\nu$  — угол наклона базиса относительно плоскости  $X'_1 Y'_1$ ;  $\Delta\alpha$  — взаимный продольный угол наклона снимков, заключенный между осью  $Z'_2$  и проекцией главного луча  $S_2 o_2$  на плоскость  $X'_2 Z'_2$ ;  $\Delta\omega$  — взаимный поперечный угол наклона снимков, расположенный между главным лучом  $S_2 o_2$  и его проекцией на плоскость  $X'_2 Z'_2$ ;  $\Delta\kappa$  — взаимный угол поворота снимков — угол на правом снимке между осью  $y_2$  и следом плоскости  $S_2 o_2 Y'_2$ .

Элементы взаимного ориентирования определяют из решения систем уравнений, устанавливающих связь между координатами соответственных точек снимка и элементами взаимного ориентирования.

В базисной системе координат условие пересечения одноименных проектирующих лучей может быть представлено в виде

$$\begin{vmatrix} B & 0 & 0 \\ X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \end{vmatrix} = Y'_1 Z'_2 - Z'_1 Y'_2 = 0, \quad (5.1)$$

где  $X'_1, Y'_1, Z'_1$  — координаты точки  $m_1$  в системе  $S_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$ ;  $X'_2, Y'_2, Z'_2$  — координаты соответственной точки  $m_2$  в системе  $S_1 X'_2 Y'_2 Z'_2$ .

Согласно формулам (2.48), (2.50)

$$\left. \begin{aligned} Y'_1 &= b_1 x_1 + b_2 y_1 - b_3 f_1; \\ Y'_2 &= b'_1 x_2 + b'_2 y_2 - b'_3 f_2; \\ Z'_1 &= c_1 x_1 + c_2 y_1 - c_3 f_1; \\ Z'_2 &= c'_1 x_2 + c'_2 y_2 - c'_3 f_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \sin \kappa'_1; & c_1 &= \sin a'_1 \cos \kappa'_1; \\ b_2 &= \cos \kappa'_1; & c_2 &= -\sin a'_1 \sin \kappa'_1; \\ b_3 &= 0; & c_3 &= \cos a'_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

и

$$\left. \begin{aligned}
 b_1' &= \cos \omega_2' \sin \kappa_2'; \\
 b_2' &= \cos \omega_2' \cos \kappa_2'; \\
 b_3' &= -\sin \omega_2'; \\
 c_1' &= \sin a_2' \cos \kappa_2' + \cos a_2' \sin \omega_2' \sin \kappa_2'; \\
 c_2' &= -\sin a_2' \sin \kappa_2' + \cos a_2' \sin \omega_2' \cos \kappa_2'; \\
 c_3' &= \cos a_2' \cos \omega_2'.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

С учетом формул (5.2)–(5.4) вместо выражения (5.1) после преобразований получим

$$a \sin a_1' + b \sin a_2' + c \sin \omega_2' + d \sin \kappa_1' + e \sin \kappa_2' + l = 0, \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 a &= x_1 y_2 \cos \omega_2' \cos \kappa_1' \cos \kappa_2'; \\
 b &= -x_2 y_1 \cos \kappa_1' \cos \kappa_2'; \\
 c &= -(f_1 f_2 \cos a_1' + y_1 y_2 \cos a_2' \cos \kappa_1' \cos \kappa_2') \\
 d &= c_3' f_2 x_1 = x_1 f_2 \cos a_2' \cos \omega_2'; \\
 e &= -x_2 f_1 \cos a_1' \cos \omega_2'; \\
 l &= (b_2 c_3' f_2 y_1 - b_2' c_3 f_1 y_2) - b_1 x_1 (c_1' x_2 + c_2' y_2) - \\
 &- b_2 y_1 (x_2 \cos a_2' \sin \omega_2' \sin \kappa_2' - y_2 \sin a_2' \sin \kappa_2') + \\
 &+ c_1 x_1 (b_1' x_2 - b_3' f_2) + c_2 y_2 y_1.
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Уравнение (5.5) является строгим. В коэффициенты уравнения входят косинусы определяемых величин, а в свободный член — произведения синусов и косинусов неизвестных, значения которых, кроме первого слагаемого, являются величинами второго и более высокого порядка малости.

Задача решается методом приближений. В первом приближении при плановой аэрофотосъемке косинусы неизвестных принимают равными единице, а произведения синусов — равными нулю. При обработке снимков, элементы взаимного ориентирования которых значительны по величине, коэффициенты и свободный член уравнения (5.5) вычисляются по их известным приближенным значениям. Во втором и последующих приближениях при вычислении коэффициентов и свободного члена используют элементы взаимного ориентирования, вычисленные в предыдущем приближении.

В системе координат левого снимка условие пересечения одноименных лучей имеет вид [5]

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} \tau & \operatorname{tg} \nu \sec \tau \\ x_1 & y_1 & -f_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Из формулы (5.7) получаем уравнение

$$a' \operatorname{tg} \tau + b' \operatorname{tg} \nu + c' \sin \Delta \alpha + d' \sin \Delta \omega + e' \sin \Delta \kappa + l' = 0, \quad (5.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a' &= -(f_1 X'_2 - x_1 Z'_2); \\ b' &= (x_1 Y'_2 - y_1 X'_2) \sec \tau; \\ c' &= x_2 y_1 \cos \Delta \kappa; \\ d' &= f_1 f_2 + y_1 y_2 \cos \Delta \alpha \cos \Delta \kappa; \\ e' &= x_2 f_1 \cos \Delta \omega; \\ l' &= y_1 (x_2 \cos \Delta \alpha \sin \Delta \omega - y_2 \sin \Delta \alpha) \sin \Delta \kappa - \\ &\quad - (y_1 f_2 \cos \Delta \alpha - y_2 f \cos \Delta \kappa) \cos \Delta \omega; \\ X'_2 &= a'_1 x_2 + a'_2 y_2 - a'_3 f_2; \\ a'_1 &= \cos \Delta \alpha \cos \Delta \kappa - \sin \Delta \alpha \sin \Delta \omega \sin \Delta \kappa; \\ a'_2 &= -\cos \Delta \alpha \sin \Delta \kappa - \sin \Delta \alpha \sin \Delta \omega \cos \Delta \kappa; \\ a'_3 &= -\sin \Delta \alpha \cos \Delta \omega. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Уравнение (5.8) является строгим. В коэффициенты уравнения и в свободный член входят определяемые неизвестные, поэтому задача решается методом приближений. В первом приближении для плановых снимков принимают косинусы неизвестных равными единице, а произведения синусов — равным нулю. Для снимков с большими значениями элементов взаимного ориентирования при вычислении коэффициентов и свободных членов в первом приближении учитывают приближенные значения этих элементов. Во втором и последующих приближениях при вычислении коэффициентов и свободных членов используют элементы взаимного ориентирования, вычисленные в предыдущем приближении.

Уравнения (5.5) и (5.8) содержат пять неизвестных, поэтому для их определения необходимо как минимум на пяти точках стереопары измерить координаты на обоих снимках или координаты на левом снимке и продольные и поперечные параллаксы.

Если в уравнениях (5.5) и (5.8) ограничиться членами первого порядка малости, то получим известные уравнения [5]:

для базисной системы

$$x_1 y_2 a_1' - x_2 y_1 a_2' - (f_1 f_2 + y_1 y_2) \omega_2' + x_1 f_2 \kappa_1' - x_2 f_1 \kappa_2' + (f_2 y_1 - f_1 y_2) = 0,$$

для системы координат левого снимка

$$(x_1 f_2 - f_1 x_2) \tau + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \nu + x_2 y_1 \Delta \alpha + (f_1 f_2 + y_1 y_2) \Delta \omega + x_2 f_1 \Delta \kappa + (f_1 y_2 - y_1 f_2) = 0.$$

При  $f_1 = f_2 = f$  уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{x_1 y_2}{f} a_1' - \frac{x_2 y_1}{f} a_2' - \left( f + \frac{y_1 y_2}{f} \right) \omega_2' + x_1 \kappa_1' - x_2 \kappa_2' + \\ & + q = 0; \\ & p \tau + y_1 p \frac{\nu}{f} + \frac{x_2 y_1}{f} \Delta \alpha + \left( f + \frac{y_1 y_2}{f} \right) \Delta \omega + x_2 \Delta \kappa - q = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

где

$$p = x_1 - x_2,$$

$$q = y_1 - y_2.$$

Решение систем, составленных из первых или вторых уравнений (5.10), выполняется методом приближений. После каждого приближения необходимо выполнить трансформирование, для чего используют формулы (3.17). Направляющие косинусы в базисной системе определяют по формулам (2.50) по вычисленным значениям  $a_1'$ ,  $\kappa_1'$  для левого и  $a_2'$ ,  $\omega_2'$ ,  $\kappa_2'$  — для правого снимков.

В системе координат левого снимка трансформирование выполняют в два этапа [5]. Сначала по формулам (3.17) определяют координаты  $x_2^0$ ,  $y_2^0$  по угловым элементам  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \omega$ ,  $\Delta \kappa$ , после чего в эти координаты вводят поправки за углы  $\tau$  и  $\nu$ . В результате координаты определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_2^0 &= x_1^0 - \frac{p}{1 + \frac{x_2^0}{f} \operatorname{tg} \nu \sec \tau}, \\ y_2^0 &= y_2^0 - p \frac{y_2^0 \operatorname{tg} \nu - f \sin \tau}{f \cos \tau - x_2^0 \operatorname{tg} \nu}, \\ p &= x_1^0 - x_2^0. \end{aligned} \right\}$$

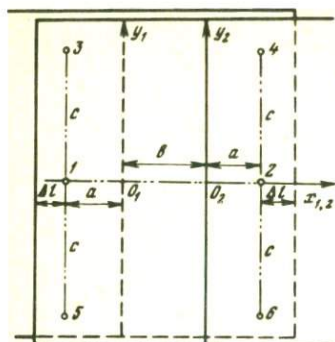


Рис. 39

При избыточном числе точек задача решается по методу наименьших квадратов. При увеличении числа точек с 6 до 12 точность определения элементов взаимного ориентирования возрастает примерно на 50 %, дальнейшее увеличение числа точек приводит к небольшому повышению точности при значительном увеличении измерений на снимках. Поэтому оптимальным числом точек считается число не более 12.

При выполнении некоторых фотограмметрических работ допускается использование элементов взаимного ориентирования пониженной точности. В этих случаях

для упрощения задачи точки на стереопаре располагают по стандартной схеме.

Положим, что точки 1-6 (рис. 39), используемые для определения элементов взаимного ориентирования, имеют следующие координаты:

- точка 1:  $x_{11}, y_{11} = 0; x_{21}, y_{21} = 0;$   
 " 2:  $x_{12}, y_{12} = 0; x_{22}, y_{22} = 0;$   
 " 3:  $x_{13} = x_{11}, y_{13} = c; x_{23} = x_{21}, y_{23} = c;$   
 " 4:  $x_{14} = x_{12}, y_{14} = c; x_{24} = x_{22}, y_{24} = c;$   
 " 5:  $x_{15} = x_{11}, y_{15} = -c; x_{25} = x_{21}, y_{25} = -c;$   
 " 6:  $x_{16} = x_{12}, y_{16} = -c; x_{26} = x_{22}, y_{26} = -c.$

Подставляя эти координаты в первое уравнение (5.10), найдем

$$\left. \begin{aligned}
 \text{точка 1:} & \quad -x_{21}\kappa_2' + q_1 = 0; & \quad -f\omega_2' + x_{11}\kappa_1' - \\
 \text{" 2:} & \quad -x_{22}\kappa_2' + q_2 = 0; & \quad -f\omega_2' + x_{12}\kappa_1' - \\
 \text{" 3:} & \quad \frac{x_{13}c}{f}a_1' - \frac{x_{23}c}{f}a_2' - (f + \frac{c^2}{f})\omega_2' + x_{11}\kappa_1' - \\
 & \quad -x_{21}\kappa_2' + q_3 = 0; \\
 \text{" 4:} & \quad \frac{x_{14}c}{f}a_1' - \frac{x_{24}c}{f}a_2' - (f + \frac{c^2}{f})\omega_2' + x_{12}\kappa_1' - \\
 & \quad -x_{22}\kappa_2' + q_4 = 0;
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{точка 5: } -\frac{x_{11}^c}{f} a_1' + \frac{x_{21}^c}{f} a_2' - (f + \frac{c^2}{f}) \omega_2' + x_{11} \kappa_1' - \\ \quad - x_{21} \kappa_2' + q_5 = 0; \\ \text{'' 6: } -\frac{x_{12}^c}{f} a_1' + \frac{x_{22}^c}{f} a_2' - (f + \frac{c^2}{f}) \omega_2' + x_{12} \kappa_1' - \\ \quad - x_{22} \kappa_2' + q_6 = 0. \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{точка 5:} \\ \text{'' 6:} \end{array}} \right\}$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (5) и из (4)–(6), получим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2cx_{11}}{f} a_1' - \frac{2cx_{21}}{f} a_2' + (q_3 - q_5) = 0; \\ \frac{2cx_{12}}{f} a_1' - \frac{2cx_{22}}{f} a_2' + (q_4 - q_6) = 0. \end{array} \right\}$$

Решение этих уравнений приводит к

$$a_1' = -\frac{f[x_{22}(q_3 - q_5) - x_{21}(q_4 - q_6)]}{2c(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})},$$

$$a_2' = -\frac{f[x_{12}(q_3 - q_5) - x_{11}(q_4 - q_6)]}{2c(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})}.$$

Для определения  $\omega_2'$  решим уравнения по схеме (3)+(5) – 2(1) и (4)+(6) – 2(2). В результате имеем

$$\omega_2' = \frac{f}{2c^2} (q_3 + q_5 - 2q_1),$$

$$\omega_2' = \frac{f}{2c^2} (q_4 + q_6 - 2q_2).$$

Среднее из этих значений

$$\omega_2' = \frac{f}{4c^2} [q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)].$$

Решая совместно первое и второе уравнения, находим

$$\kappa_1' = \frac{f(x_{22} - x_{21})\omega_2' - (q_1x_{22} - q_2x_{21})}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}} = \frac{f^2(x_{22} - x_{21})[q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - (q_1x_{22} - q_2x_{21})}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}},$$

$$\kappa_2' = \frac{f(x_{12} - x_{11})\omega_2' - (q_1x_{12} - q_2x_{11})}{x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}} = \frac{f^2(x_{12} - x_{11})[q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - (q_1x_{12} - q_2x_{11})}{x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}}.$$

На рис. 39

$$x_{11} = -a, \quad x_{22} = a, \quad x_{12} = b + a, \quad x_{21} = -(b + a).$$

С учетом этих обозначений имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' &= - \frac{f[a(q_3 - q_5) + (b + a)(q_4 - q_6)]}{2bc(b + 2a)}; \\ \alpha_2' &= - \frac{f[(b + a)(q_3 - q_5) + a(q_4 - q_6)]}{2bc(b + 2a)}; \\ \omega_2' &= \frac{f}{4c^2} [q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)]; \\ \kappa_1' &= \frac{f}{4c^2} \frac{(2a + b)[q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - [q_1a + q_2(b + a)]}{b(b + 2a)}; \\ \kappa_2' &= \frac{f^2}{4c^2} \frac{(b + 2a)[q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - [q_1(b + a) + q_2a]}{b(b + 2a)}. \end{aligned} \right\} (5.11)$$

Если  $a = 0$ , т.е. точки располагаются на осях ординат левого и правого снимков, то вместо (5.11) получим известные формулы [5]

$$\alpha'_1 = -\frac{f}{2bc}(q_4 - q_6);$$

$$\alpha'_2 = -\frac{f}{2bc}(q_3 - q_5);$$

$$\omega'_2 = \frac{f}{4c^2}[q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)];$$

$$\kappa'_1 = \frac{f^2}{4bc^2}[q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - \frac{q_2}{b} = \frac{f}{b}\omega'_2 - \frac{q_2}{b};$$

$$\kappa'_2 = \frac{f^2}{4bc^2}[q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - \frac{q_1}{b} = \frac{f}{b}\omega'_2 - \frac{q_1}{b}.$$

Для вывода формул средних квадратических ошибок определения элементов взаимного ориентирования продифференцируем формулы (5.11) по переменным  $q_i$ . В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} d\alpha'_1 &= -\frac{f}{2bc(b+a)}[a(dq_3 - dq_5) + (b+a)(dq_4 - dq_6)]; \\ d\alpha'_2 &= -\frac{f}{2bc(b+a)}[(b+a)(dq_3 - dq_5) + a(dq_4 - dq_6)]; \\ d\omega'_2 &= \frac{f}{4c^2}[dq_3 + dq_4 + dq_5 + dq_6 - 2(dq_1 + dq_2)]; \\ d\kappa'_1 &= \frac{f^2}{4bc^2}(dq_3 + dq_4 + dq_5 + dq_6) - \left[ \frac{f^2}{2bc^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{b(b+a)} \right] dq_1 - \left[ \frac{f^2}{2bc^2} + \frac{b+a}{b(b+a)} \right] dq_2; \\ d\kappa'_2 &= \frac{f^2}{4bc^2}(dq_3 + dq_4 + dq_5 + dq_6) - \left[ \frac{f^2}{2bc^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b+a}{b(b+a)} \right] dq_1 - \left[ \frac{f^2}{2bc^2} + \frac{a}{b(b+a)} \right] dq_2. \end{aligned} \right\} (5.12)$$

Анализ полученных формул показывает, что изменение элементов взаимного ориентирования  $da'_1$ ,  $da'_2$  вследствие ошибок определения поперечных параллаксов будет уменьшаться с увеличением величины знаменателя, т.е.

$$F = 2bc(b + 2a) = bS_{3465},$$

где  $S_{3465}$  – площадь прямоугольника, вершинами которого являются точки 3, 4, 5, 6, на которых измеряют поперечные параллаксы. Величина площади будет возрастать с увеличением продольного перекрытия снимков, но при этом будет уменьшаться величина базиса  $b$ . При 100 % перекрытии снимков базис  $b = 0$ , значит и  $F = 0$ , т.е. в этом случае возникает неопределенность решения задачи определения элементов взаимного ориентирования  $a'_1$  и  $a'_2$ . Действительно, при совмещении центров проектирования левого и правого снимков базис  $B$  и базисные плоскости будут отсутствовать и направление оси абсцисс может быть произвольным. В этом случае целесообразно использовать систему координат левого снимка, в которой  $B_X = B_Y = B_Z = 0$  и для взаимного ориентирования снимков достаточно знать три угловых элемента взаимного ориентирования  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\kappa$  – вместо пяти.

Для определения этих величин можно использовать методы и формулы, полученные в главе 3 для определения угловых элементов внешнего ориентирования  $a$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  для  $h = 0$  при замене координат точек местности координатами точек левого снимка.

Выясним, при каком продольном перекрытии значение функции  $F = 2bc(b + 2a)$  будет максимальным. Учитывая, что

$$b = \frac{l(100 - P_X)}{100} = l\left(1 - \frac{P_X}{100}\right) = l(1 - x),$$

$$a = l(x - 0,5 - \Delta l/l),$$

$$b + 2a = l(x - 2\Delta l/l),$$

где  $x = P_X/100$ ;  $\Delta l$  – расстояние от краев стереопары до ближайших линий, на которых располагаются стандартные точки. Принимая во внимание эти значения, получим

$$F = 2l^2c(1 - x)(x - 2\Delta l/l).$$

Для определения экстремума функции приравняем первую производную нулю. В результате получим

$$dF/dx = 2l^2c[-(x - 2\Delta l/l) + (1 - x)] = 0,$$

откуда

$$x = 0,5 + \Delta l / l,$$

$$P_X = (0,5 + \Delta l / l) 100\%.$$

При  $\Delta l = 10$  мм,  $l = 180$  мм  $P_X = 55,6\%$ ; при  $\Delta l = 18$  мм и том же значении  $l$   $P_X = 60\%$ . Вторая производная имеет знак минус, следовательно при полученном значении  $P_X$  имеем максимум функции  $F$ . Подставляя полученное значение  $x$  в формулы  $b$  и  $a$ , находим  $b = 0,5l - \Delta l$ ;  $a = 0$ , т.е. функция  $F$  имеет максимальное значение при расположении стандартных точек на осях ординат снимков стереопары.

Точность определения угла  $\omega_2'$  при прочих равных условиях зависит от расстояния  $c$  от оси абсцисс до точек 3-б, используемых при определении элементов взаимного ориентирования. Ошибки определения углов  $\kappa_1'$  и  $\kappa_2'$  из-за неточного измерения поперечных параллаксов зависят от значения  $c$  и от величины  $b$  и  $a$ .

Для определения средних квадратических ошибок определения элементов взаимного ориентирования положим, что ошибки измерения поперечных параллаксов являются случайными и независимыми. Используя формулы (5.12) и переходя к средним квадратическим ошибкам, полагая  $m_{q1} = m_{q2} = \dots = m_{q6} = m_q$ , находим

$$m_{\alpha_1'} = m_{\alpha_2'} = \frac{f m_q}{bc(b+2a)} \sqrt{\frac{1}{2} [a^2 + (b+a)^2]},$$

$$m_{\omega_2'} = \frac{f\sqrt{3}}{2c^2} m_q,$$

$$m_{\kappa_1'} = m_{\kappa_2'} = \frac{m_q}{b} \sqrt{\frac{3f^4}{4c^4} + \frac{f^2}{c^2} + \frac{(b+a)^2 + a^2}{(b+2a)^2}}.$$

При  $a = 0$

$$m_{\alpha_1'} = m_{\alpha_2'} = \frac{f m_q}{bc\sqrt{2}};$$

$$m_{\omega_2'} = \frac{f\sqrt{3}}{2c^2} m_q;$$

$$m_{\kappa_1'} = m_{\kappa_2'} = \frac{m_q}{b} \sqrt{1 + \frac{f^2}{c^2} + \frac{3}{4} \frac{f^4}{c^4}}.$$

В табл. 18 приведены средние квадратические ошибки определения элементов взаимного ориентирования для  $m_q = 0,015$  мм,  $l = 180$  мм,  $\Delta l = 10$  мм,  $c = 80$  мм для различных значений фокусных расстояний и продольных перекрытий.

Анализ формул средних квадратических ошибок определения элемен-

$P_X$ %	$a$ , мм	$f$ , мм	$m_{\alpha_1}' = m_{\alpha_2}', "$	$m_{\omega_2}', "$	$m_{\kappa_1}' = m_{\kappa_2}', "$
40	-28	70	28,9	29,3	58,1
		100	41,3	41,9	70,5
		150	61,9	62,8	112,6
		200	82,5	83,7	177,1
55,6	0	70	23,9	29,3	57,5
		100	34,2	41,9	81,1
		150	51,3	62,8	143,7
		200	68,4	83,7	234,0
70	26	70	28,1	29,3	77,6
		100	40,2	41,9	114,9
		150	60,3	62,8	209,9
		200	80,4	83,7	344,6
80	44	70	39,2	29,3	113,6
		100	55,9	41,9	170,5
		150	83,9	62,8	313,8
		200	111,9	83,7	516,3
80	0	70	53,2	29,3	127,6
		100	76,0	41,9	180,1
		150	113,9	62,8	319,1
		200	151,9	83,7	519,6

тов взаимного ориентирования и данные табл. 18 показывают, что значение  $m_{\omega_2}$  не зависит от величины продольного перекрытия, увеличивается пропорционально росту фокусного расстояния и уменьшается пропорционально квадрату ординат точек 3, 4, 5, 6. Средние квадратические ошибки взаимных продольных углов наклона  $m_{\alpha_1}'$  и  $m_{\alpha_2}'$  имеют наименьшее значение при продольном перекрытии  $P_X = 55,6\%$  (при  $a = 10$  мм). При отклонении  $P_X$  от 55,6 % значения  $m_{\alpha_1}'$  и  $m_{\alpha_2}'$  увеличиваются. При одном и том же  $P_X$  (табл. 18 для  $P_X = 80\%$ )  $m_{\alpha_1}'$  и  $m_{\alpha_2}'$  возрастают при  $a = 0$ . Значения  $m_{\kappa_1}'$  и  $m_{\kappa_2}'$  увеличиваются с ростом продольного перекрытия  $P_X$  и фокусного расстояния и в несколько раз превосходят значения  $m_{\alpha_1}'$ ,  $m_{\alpha_2}'$ ,  $m_{\omega_2}'$  (примерно в 2 раза при  $P_X = 40\%$  и в 2,9 – 4,6 раза при  $P_X = 80\%$  и  $a = 44$  мм).

Уравнения (5.10) содержат пять неизвестных. Для их определения по стандартно расположенным точкам используются шесть уравнений, одно уравнение является избыточным и вследствие этого возникает одно условное уравнение [26, с. 242].

$$2v_1 - 2v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 + \omega = 0,$$

где

$$\omega = 2q_1 - 2q_2 - q_3 + q_4 - q_5 + q_6.$$

Уравнивание методом коррелат позволяет получить поправки к измеренным поперечным параллаксам

$$-v_1 = v_2 = \frac{\omega}{6}, \quad v_3 = v_5 = -v_4 = -v_6 = \frac{\omega}{12}.$$

При введении этих поправок в измеренные поперечные параллаксы в формулах  $a'_1, a'_2, \omega'_2$  системы (5.11) поправки взаимно уничтожают друг друга и формулы остаются без изменения, а формулы  $\kappa'_1$  и  $\kappa'_2$  приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \kappa'_1 &= \frac{\frac{f^2}{4c^2} (2a + b) [q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - [a q_1 + (b + a) q_2] - b \frac{\omega}{6}}{b(b + 2a)}; \\ \kappa'_2 &= \frac{\frac{f^2}{4c^2} (2a + b) [q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2(q_1 + q_2)] - [(b + a) q_1 + a q_2] + b \frac{\omega}{6}}{b(b + 2a)}. \end{aligned} \right\}$$

Используя эти формулы для определения средних квадратических ошибок, находим

$$m_{\kappa'_1} = m_{\kappa'_2} = \frac{m_q}{b} \sqrt{\frac{3f^4}{4c^4} + \frac{f^2}{c^2} + \frac{2[(a + b)^2 + a(b + 2a)]}{3(b + 2a)^2}}.$$

При  $a = 0$

$$m_{\kappa'_1} = m_{\kappa'_2} = \frac{m_q}{b} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{f^2}{c^2} + \frac{3f^4}{c^4}}.$$

Для  $f = 70$  мм,  $c = 80$  мм,  $a = 0$   $m_{\kappa'_1} = m_{\kappa'_2} = 117,6''$ , т.е. на  $10''$  меньше значения, приведенного в табл. 18.

Геометрическая модель местности, построенная по паре снимков, из-за влияния погрешностей, сопровождающих любые фотограмметрические преобразования, всегда деформирована. Наиболее ощутимые по величине и трудные для устранения искажения модели возникают под действием случайных ошибок измерений и дисторсии изображения. Влияние указанных факторов определяет в основном остаточную деформацию геометрической модели местности.

Известно, что наиболее значительно модель местности, построенная по аэроснимкам, деформируется по высоте. В работе\* приведена формула деформации модели по высоте, обусловленная погрешностями определения элементов взаимного ориентирования,

$$\delta h_{\text{в}} = \frac{H}{p} \left[ p \frac{x_{\text{п}}}{f} \delta \nu + y_{\text{дк}} - \frac{x_{\text{п}} y}{f} \delta \omega - \frac{x_{\text{п}}^2}{f} \delta \alpha \right], \quad (5.13)$$

где  $x_{\text{п}}$ ,  $y = y_{\text{п}}$  — координаты точек на правом снимке;  $\delta \nu$ ,  $\delta \kappa$ ,  $\delta \omega$ ,  $\delta \alpha$  — погрешности элементов взаимного ориентирования.

Здесь и далее при выводах принимается, что местность равнинная и поэтому значения  $\Delta p$  невелики и их влиянием можно пренебречь.

Погрешность внешнего ориентирования модели вызывают ее деформацию, которую можно выразить уравнением

$$\delta h_{\text{г}} = \frac{B}{p} [x_{\text{п}} \eta + y \xi] + A_0, \quad (5.14)$$

где  $\eta$  и  $\xi$  — погрешности углов наклона модели;  $A_0$  — погрешность установки счетчика высот.

Для повышения точности определения элементов взаимного ориентирования необходимо выбирать точки ближе к углам полезной площади стереопары. В общем случае независимо от величины продольного перекрытия снимков схема расположения точек должна быть следующей (см. рис. 39).

Учитывая, что при горизонтировании модели по четырем опорным точкам, расположенным вблизи стандартных точек 3, 4, 5 и 6, произойдет полная компенсация ошибок, линейно зависящих от координат  $x$  и  $y$ , остаточную деформацию модели из-за погрешностей взаимного ориентирования на основании формулы (5.14) и рис. 39 запишем в виде

$$\delta h_{\text{в}}' = \frac{H}{pf} \left[ y(x_{\text{п}} + \frac{1}{2}c) \delta \omega - (x_{\text{п}} - a)(x_{\text{п}} + c) \delta \alpha \right], \quad (5.15)$$

где  $c = a + b$ .

\* И.Т. Ангилов. Выбор числа и размещения ориентированных точек для аналитического способа взаимного ориентирования аэроснимков. — Труды НИИГАиК, т. XVIII, вып. 2, Новосибирск, 1965, с. 13–26.

Элементы взаимного и внешнего ориентирования находятся в результате уравнивания по избыточным точкам. Поэтому, переходя от случайных погрешностей  $\delta h'_B$  и  $\delta h'_\Gamma$  к средним квадратическим  $m_{h'_B}$  и  $m_{h'_\Gamma}$ , получим

$$m_{h'_B}^2 = \frac{H^2}{p^2 f^2} \mu_q^2 \left[ y^2 \left( x_{\Pi} + \frac{1}{2} c \right)^2 Q_{\omega\omega} + (x_{\Pi}^2 + x_{\Pi} p - a c)^2 Q_{\alpha\alpha} + 2y(x_{\Pi}^2 + x_{\Pi} p - a c) Q_{\alpha\omega} \right], \quad (5.16)$$

$$m_{h'_\Gamma}^2 = \frac{B^2}{p^2} \mu_p^2 \left[ x_{\Pi}^2 Q_{\eta\eta} + y^2 Q_{\xi\xi} + \frac{f_k^2}{H^2} Q_{A_0 A_0} + 2x_{\Pi} y Q_{\eta\xi} + \frac{2x_{\Pi} f}{H} Q_{\eta A_0} + \frac{2y f}{H} Q_{\xi A_0} \right]. \quad (5.17)$$

Здесь  $Q_{ij}$  — соответствующие весовые коэффициенты;  $\mu_q$  и  $\mu_p$  — средние квадратические ошибки единицы веса. Причем в дальнейших рассуждениях примем  $\mu_q = m_q$ , а  $\mu_p = m_p$  ( $m_q$  и  $m_p$  — средние квадратические ошибки измерения поперечного и продольного параллаксов).

Значения весовых коэффициентов получим из решения систем нормальных уравнений для взаимного ориентирования по шести точкам и внешнего ориентирования — по четырем точкам [1]

$$Q_{ij} = D_{ij} / D, \quad (5.18)$$

где  $D$  — определитель, составленный из коэффициентов нормальных уравнений;  $D_{ij}$  — алгебраическое дополнение соответствующего коэффициента определителя.

В табл. 19 и 20 приведены готовые формулы для расчета весовых коэффициентов элементов ориентирования по шести и четырем точкам с учетом координат точек, используемых для взаимного ориентирования и горизонтирования модели.

С учетом полученных весовых коэффициентов уравнения (5.16) и (5.17) примут вид

$$m_{h'_B} = \frac{H}{pc} m_q \sqrt{\frac{3(2x_{\Pi} + c)^2 y^2}{16c^2} + \frac{(x_{\Pi}^2 + x_{\Pi} p - a c)^2}{(a + c)^2}}, \quad (5.19)$$

$$m_{h'_\Gamma} = \frac{B}{p} m_p \sqrt{\frac{x_{\Pi}^2}{(a + c)^2} + \frac{y^2}{4c^2} + \frac{a^2 + c^2}{2(a + c)^2} + \frac{x_{\Pi}(c - a)}{(a + c)^2}}. \quad (5.20)$$

В общем случае дисторсия изображения представляет собой некоторый

Таблица 19

Коэффициент	$Q_a$	$Q_\omega$	$Q_K$	$Q_T$	$Q_\nu$
$Q_a$	$\frac{f^2}{c^2(a+c)^2}$	0	0	0	$\frac{f^2(c-a)}{2c^2p^2(a+c)}$
$Q_\omega$		$\frac{3f^2}{4c^2}$	0	$-\frac{f(2c^2+3f^2)}{4cp^4}$	0
$Q_K$			$\frac{2}{3(a+c)^2}$	$\frac{1}{3(a+c)^2}$	0
$Q_T$				$\frac{9f^4+12f^2c^2+c^4}{12(a+c)^2c^4}$	0
$Q_\nu$					$\frac{f^2(a^2+c^2)}{2c^2p^2(a+c)^2}$

Таблица 20

Коэффициент	$Q_\eta$	$Q_\xi$	$Q_{A_0}$
$Q_\eta$	$\frac{1}{(a+c)^2}$	0	$\frac{H(c-a)}{2f(a+c)^2}$
$Q_\xi$		$\frac{f}{4c^2}$	0
$Q_{A_0}$			$\frac{H^2(a^2+c^2)}{2f^2(a+c)^2}$

вектор, произвольно ориентированный относительно координатной системы снимка. Обычно определяют его компоненты  $\delta x$ ,  $\delta y$  в прямоугольной системе координат по координатным осям  $x$  и  $y$  и в полярной системе координат —  $\delta r$ ,  $\delta t$ , составляющие вектор по радиальным (к центру снимка) и тангенциальным, перпендикулярно к радиальной составляющей, направлениям. Причем эти составляющие принято называть радиальной и тангенциальной дисторсией.

Поправки за радиальную  $\Delta r_x$  и  $\Delta r_y$  и тангенциальную  $\Delta t_x$  и  $\Delta t_y$  дисторсию в координаты точек снимка в общем случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta r'_x &= k_1 x + k_2 r^2 x; \\ \Delta r'_y &= k_1 y + k_2 r^2 y; \\ \Delta t'_x &= t_1 (r^2 + 2x^2) + 2t_2 xy; \\ \Delta t'_y &= 2t_1 xy + t_2 (r^2 + 2y^2), \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  — коэффициенты полинома, определяющие радиальную и тангенциальную дисторсии;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Учитывая, что при фотограмметрических работах компенсируются искажения, выражающиеся зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 xy; \\ \Delta y &= a_1 y + a_2 xy + a_3 y^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

остаточные (некомпенсированные) искажения координат точек снимка за дисторсию изображения могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta r'_x &= k_2 (x^3 + xy^2); \\ \Delta r'_y &= k_2 (x^2y + y^3); \\ \Delta t'_x &= t_1 (x^2 + y^2); \\ \Delta t'_y &= t_2 (x^2 + y^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Уравнения суммарных некомпенсируемых искажений координат точек снимка за дисторсию изображения могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{\text{д}} &= \Delta r'_x + \Delta t'_x = k_2 xr^2 + t_1 r^2; \\ \Delta y_{\text{д}} &= \Delta r'_y + \Delta t'_y = k_2 yr^2 + t_2 r^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

На основании формул (5.24), принимая во внимание, что  $x_{\text{л}} - x_{\text{п}} = p$ ,  $y_{\text{л}} = y_{\text{п}} = y$ ,  $\Delta p = \Delta x_{\text{л}} - \Delta x_{\text{п}}$ ,  $\Delta q = \Delta y_{\text{л}} - \Delta y_{\text{п}}$ , искажения продольных и поперечных параллаксов за дисторсию изображения на левом и

правом снимках стереопары можно записать

$$\Delta p_{\text{д}} = k_2 p(3x_{\text{л}}^2 - 3x_{\text{л}} p + p^2 + y^2) + t_1 p(2x_{\text{л}} - p), \quad (5.25)$$

$$\Delta q_{\text{д}} = k_2 p y(2x_{\text{л}} - p) + t_2 p(2x_{\text{л}} - p). \quad (5.26)$$

Величины искажений элементов взаимного ориентирования  $\delta\alpha_{\text{л}}$ ,  $\delta\alpha_{\text{п}}$ ,  $\delta\omega$  с учетом координат стандартных точек (см. рис. 39) определим по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha_{\text{л}} &= \frac{k_2 f p}{a - c} (2c - 2a - p); \\ \delta\alpha_{\text{п}} &= -\frac{k_2 f p}{a - c}; \\ \delta\omega &= -\frac{t_2 f p}{c^2} (a - c - p). \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Учитывая, что

$$c - a - p = 0, \quad (5.28)$$

получим

$$\delta\alpha_{\text{л}} = -k_2 f p, \quad \delta\alpha_{\text{п}} = k_2 f p, \quad \delta\omega = 0. \quad (5.29)$$

Как видно из полученных формул, дисторсия изображения вызывает искажение продольных углов наклона снимков.

Окончательно будем иметь

$$\delta p_{\alpha, \omega} = k_2 p(2px_{\text{л}} - 2x_{\text{л}}^2 - p^2). \quad (5.30)$$

Суммарная погрешность продольного параллакса после взаимного ориентирования снимков будет равна

$$\sigma p_{\text{д}} = \Delta p_{\text{д}} + \delta p_{\alpha, \omega} \quad (5.31)$$

или с учетом формул (5.26), (5.30)

$$\sigma p_{\text{д}} = k_2 p(x_{\text{л}}^2 - px_{\text{л}} + y^2) + t_1 p(2x_{\text{л}} - p). \quad (5.32)$$

Ранее отмечалось, что при горизонтировании модели компенсируются члены уравнения поправок в продольный параллакс, которые линейно зависят от координат  $x$ ,  $y$ , а также частично компенсируются члены, пропорциональные  $x^2$  и  $y^2$ . Таким образом, формулы (5.32) можно записать

$$\sigma p'_d = k_2 p (x_{л}^2 - p x_{л} - a p + y^2 - c^2). \quad (5.33)$$

Деформация модели по высоте из-за остаточного влияния дисторсии изображения может быть представлена в виде

$$\sigma h_d = \frac{H}{p} d p'_d = H k_2 [(x_{л}^2 + y^2) - p(a + x_{л}) - c^2]. \quad (5.34)$$

Радиальная дисторсия  $\Delta r_{\max}$  на краю снимка ( $x = y = c$ ) выражается зависимостью

$$\Delta r_{\max} = k_2 r^3 = 2\sqrt{2} k_2 c^3. \quad (5.35)$$

Полагая, что величина  $\Delta r_{\max}$  известна, можно записать

$$\sigma h_d = \frac{H}{2\sqrt{2} c^3} [(x_{л}^2 + y^2) - p(a + x_{л}) - c^2] \Delta r_{\max}. \quad (5.36)$$

Поверхность, представленная уравнением (5.36), называется эллиптическим параболоидом. Сечения этой поверхности горизонтальными плоскостями  $x$  и  $y$  – эллипсы. Проекция сечений на горизонтальную плоскость соответствует линиям равных искажений высот точек модели из-за остаточного влияния дисторсии изображения (рис. 40).

Таким образом, при обработке одиночных моделей максимальные ошибки высот из-за влияния дисторсии изображения следует ожидать вблизи линии центров стереопары, что хорошо согласуется с исследованиями, выполненными в ЦНИИГАиК Н.А. Соколовой [43].

#### § 24. ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТ И КООРДИНАТ ТОЧЕК МЕСТНОСТИ В ОДИНОЧНОЙ МОДЕЛИ

А.Н. Лобановым [26] предложено предвычислять ожидаемую точность определения координат и высот точек в одиночной модели по формулам

$$m_{X_{\Gamma}}^2 = m_{X_S}^2 + (H/f)^2 [m_x^2 + (x/b)^2 m_p^2]; \quad (5.37)$$

$$m_{Y_{\Gamma}}^2 = m_{Y_S}^2 + (H/f)^2 [m_y^2 + (y/b)^2 m_p^2]; \quad (5.38)$$

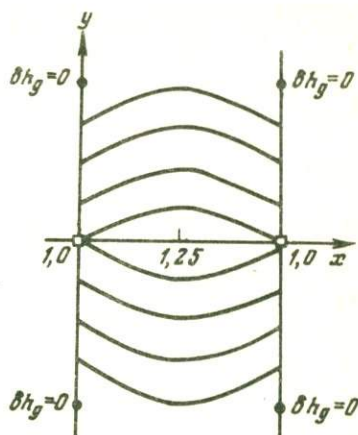


Рис. 40

$$m_{Z_S}^2 = m_Z^2 + (H/b)^2 m_p^2. \quad (5.39)$$

Полагая, что координаты и высоты опорных точек известны с высокой степенью точности ( $m_{X_S} = m_{Y_S} = m_{Z_S} = 0$ ) и учитывая, что  $\frac{x}{b} = \frac{y}{b} = \frac{c}{p}$ , формулы (5.37)–(5.39) запишем в виде

$$m_{X_\Gamma}^2 = (H/f)^2 m_x^2 + (c/p)^2 m_h^2; \quad (5.40)$$

$$m_{Y_\Gamma}^2 = (H/f)^2 m_y^2 + (c/p)^2 m_h^2; \quad (5.41)$$

$$m_{Z_\Gamma}^2 = m_h^2 = (H/p)^2 m_p^2. \quad (5.42)$$

Ошибкаку определения фотограмметрических высот в одиночной модели представим формулой

$$m_h = \sqrt{m_{h_B}'^2 + m_{h_\Gamma}'^2 + m_{h_D}'^2 + m_{h_{и}}'^2}, \quad (5.43)$$

где  $m_{h_B}'$  — ошибка влияния погрешностей взаимного ориентирования снимков;  $m_{h_\Gamma}'$  — ошибка влияния высот из-за погрешностей горизонтирования модели;  $m_{h_D}'$  — ошибка влияния высот из-за дисторсии изображения;  $m_{h_{и}}'$  — ошибка измерений.

При выводе формул (5.19), (5.20), (5.36) учитывалось, что ошибки  $m_{h_B}'$ ,  $m_{h_\Gamma}'$ ,  $m_{h_D}'$  не должны зависеть друг от друга.

В значения  $m_{h_B}'$ ,  $m_{h_\Gamma}'$ ,  $m_{h_{и}}'$  должны входить одинаковые по величине средние квадратические ошибки измерений продольных и поперечных параллаксов  $m_p$  и  $m_q$ . Величины  $m_p$  и  $m_q$  зависят от влияния таких факторов, как случайная деформация аэрофильма и его невыравнивание, ошибки изготовления диапозитивов, инструментальные ошибки и погрешности измерения. В свою очередь последние зависят от разрешающей способности системы "объектив—пленки" и "смаза" изображений.

Логично предположить, что если все указанные факторы хорошо изучены, то можно получить суммарную величину погрешностей  $m_p$  и  $m_q$ . Так, С.С. Перлов [40] на основе анализа литературных источников и большого объема экспериментальных работ установил, что средняя квадратическая ошибка измерений по снимкам, обусловленная нестабильной частью систематических искажений, равна 9–11 мкм в зависимости от  $f$ . Причем здесь не учтено влияние таких факторов, как ошибки определения и отождествления контрольных точек, шероховатость земной поверхности, ухудшение качества изображения из-за "смаза", которое может быть выявлено лишь эмпирическим путем.

В этой связи в ЦНИИГАиК были выполнены специальные работы, результаты которых приведены в работе Н.А. Соколовой [43]. По резуль-

татам обработки большого количества контрольных точек аэрофотосъемки опытного полигона были получены эмпирические зависимости для АФА различной широкоугольности. Запишем их в общем виде

$$m_{\Delta p} = \pm (\delta \Delta p_0 + \delta \Delta p_1 \frac{10^4}{m}) 10^3, \quad (5.44)$$

где  $\delta \Delta p_0$  — ошибка, зависящая от качества аэроснимка;  $\delta \Delta p_1$  — ошибка определения и отождествления контрольных точек, шероховатости земной поверхности, ухудшения качества изображения из-за "смаза";  $m$  — знаменатель масштаба фотографирования.

Недостатком этих зависимостей является то, что их параметры получены по снимкам одного ( $f = 70$  и  $140$  мм) или двух АФА ( $f = 100$  и  $200$  мм) каждого типа и точность их определения не высока (15–25 %). Сравнение параметров, полученных для АФА с разными метрическими свойствами, показало, что они значительно различаются между собой.

Таким образом, задача установить единую величину погрешности  $m_{\Delta p}$  для АФА различной широкоугольности и в зависимости от масштаба аэрофотосъемки осталась нерешенной. Возможно результаты могли быть и лучше, если бы при эксперименте было устранено влияние дисторсии изображения.

Ранее отмечалось, что по величине  $\Delta r_{\max}$  (максимальное значение некомпенсируемой радиальной дисторсии) можно количественно оценить деформацию модели из-за влияния некомпенсируемой дисторсии изображения.

Средняя ошибка продольного параллакса для всей площади стереопары может быть получена из выражения (5.33) интегрированием его по  $x$  и  $y$  и делением на площадь стереопары.

Учитывая, что средняя погрешность определяется как сумма модулей погрешностей, деленная на их число, мы должны выбрать такие пределы интегрирования, при которых функция не меняет знака. Анализ показывает, что при интегрировании по  $x$  и  $y$  могут быть установлены пределы от 0 до  $+C$ . Площадь части стереопары будет равна  $C^2$ .

Следовательно,

$$\sigma_{p_{\text{д.ср}}} = \frac{k_2 p}{c^2} \int_0^c dy \int_0^c (x_{\text{л}}^2 - px_{\text{л}} - ap + y^2 - c^2) dx. \quad (5.45)$$

После интегрирования и подстановки пределов получим

$$\sigma_{p_{\text{д.ср}}} = - \frac{k_2 p}{6} [2c^2 + 3p(c + 2a)]. \quad (5.46)$$

Подставив в формулу (5.46) значения  $k_2$  из выражения (5.35), получим

$$\sigma p_{\text{д.ср}} = \frac{\Delta r_{\text{max}}^p}{17c^3} [2c^2 + 3p(c + 2a)]. \quad (5.47)$$

Таким образом,

$$m'_{h_{\text{д}}} = \frac{H}{17c^3} [2c^2 + 3p(c + 2a)] \Delta Z_{\text{max}}. \quad (5.48)$$

Исходные данные для определения величины  $\Delta r_{\text{max}}$  можно взять из паспорта АФА и определить ее по графику изменения дисторсии по одному из радиальных направлений (рис. 41)

$$\Delta r_{\text{max}} = \frac{8}{3} (\Delta r_{50} - 0,5 \Delta r_{100}). \quad (5.49)$$

При выводе формулы (5.49) предполагалось, что радиальная дисторсия изменяется по закону  $\Delta r_i = kr_i^3$ .

Для снимков с продольным перекрытием  $P_x = 60\%$  средняя ошибка продольного параллакса по площади стереопары

$$\sigma p_{\text{д.ср}} = 0,3 \Delta r_{\text{max}}, \quad (5.50)$$

а для  $P_x = 80\%$

$$\sigma p_{\text{д.ср}} = 0,15 \Delta r_{\text{max}}. \quad (5.51)$$

Для определения средних значений  $m'_{h_{\text{в}}}$  и  $m'_{h_{\text{г}}}$  по площади стереопары необходимо проинтегрировать формулы (5.19) и (5.20) по  $x$  и  $y$ , а результат разделить на площадь стереопары. За пределы интегрирования по  $x_{\text{п}}$  примем  $-c, 0$ , а по  $y$  —  $-c, +c$

$$m'_{h_{\text{в}}} = \frac{H}{cp} m_q \sqrt{\frac{\int_{-c}^{+c} dy \int_{-c}^0 \left[ \frac{3(2x_{\text{п}} + c)}{16c^2} + \frac{(x_{\text{п}} + x_{\text{п}}p - ac)^2}{(a+c)^2} \right] dx_{\text{п}}}{2c^2}}, \quad (5.52)$$

$$m'_{h_{\text{г}}} = \frac{B}{p} m_p \sqrt{\frac{\int_{-c}^{+c} dy \int_{-c}^0 \left[ \frac{x_{\text{п}}^2}{(a+c)^2} + \frac{y^2}{4c^2} + \frac{a^2 + c^2}{2(a+c)^2} + \frac{x_{\text{п}}(c-a)}{(a+c)^2} \right] dx_{\text{п}}}{2c^2}}. \quad (5.53)$$

После интегрирования и подстановки пределов, а также с учетом того,

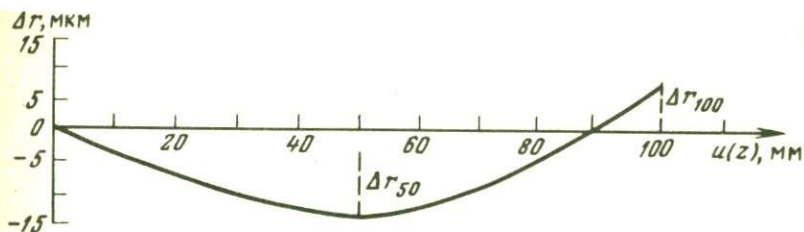


Рис. 41

что  $B = (H/f)p$ , получим

$$m'_{h_B} = \frac{H}{p} \sqrt{\frac{6c^2 + 10ac - 5p(2a + c)}{30(a + c)^2}} + \frac{1}{48} m_q, \quad (5.54)$$

$$m'_{h_r} = \frac{H}{2(a + c)f} \sqrt{\frac{7a^2 + 11c^2 - 4ac}{3}} m_p. \quad (5.55)$$

Подставив выражения (5.48), (5.54), (5.55) в формулу (5.43) при  $m_p = m_q \sqrt{2}$ , получим

$$m_h = \frac{H}{p} \sqrt{\left[ \frac{p^2(11c^2 + 7a^2 - 4ac)}{12(a + c)^2 f^2} + \frac{6c^2 + 10ac - 5p(2a + c)}{60(a + c)^2} + \dots \right]} + 1 \left] m_p^2 + \frac{p^2}{289c^6} \left[ 2c^2 + 3p(c + 2a) \right]^2 \Delta r_{\max}^2. \quad (5.56)$$

По формуле (5.56) можно предвычислить ожидаемую среднюю квадратическую ошибку определения высоты точки по всей площади стереопары при любом продольном перекрытии снимков. Для этого нужно задавать величины  $a$ ,  $c$  и  $p$ . Например, при  $P_x = 60\%$  ( $a = 0$ ,  $p = c$ ) и  $P_x = 80\%$  ( $c = 2a = 2p$ ) формула (5.56) примет вид

$$m_{h_{(P_x = 60\%)}} = \frac{H}{p} \sqrt{\left( \frac{11p^2}{12f^2} + 1 \right) m_p^2 + \frac{1}{10} \Delta r_{\max}^2}; \quad (5.57)$$

$$m_{h_{(P_x = 80\%)}} = \frac{H}{p} \sqrt{\left( \frac{43p^2}{108f^2} + 1 \right) m_p^2 + \frac{1}{40} \Delta r_{\max}^2}. \quad (5.58)$$

$P_x, \%$	$f, \text{мм}$	$\Delta r_{\text{max}}, \text{мкм}$	$m_h/H$	$\Delta r_{\text{max}}, \text{мкм}$	$m_h/H$	$\Delta r_{\text{max}}, \text{мкм}$	$m_h/H$
60	70	0	1:5000	30	1:4100	60	1:3000
	100		1:5800	30	1:4600	60	1:3100
	140		1:6400	15	1:5800	30	1:4800
	200		1:6700	15	1:6100	30	1:5000
80	70	0	1:3300	30	1:2800	60	1:2500
	100		1:3400	30	1:2900	60	1:2500
	140		1:3500	15	1:3300	30	1:3100
	200		1:3500	15	1:3400	30	1:3200

Из формул (5.57) и (5.58) следует, что точность определения высот точек зависит не только от величины продольного параллакса, но и от фокусного расстояния съемочной камеры. Влияние дисторсии изображения на точность определения высот тем меньше, чем больше продольное перекрытие снимков.

В табл. 21 приведены результаты расчета ожидаемой относительной точности определения высот  $m_h/H$  в одиночной модели по формулам (5.57) и (5.58) при  $m_p = \pm 0,010$  мм и разных  $\Delta r_{\text{max}}$  для  $P_x = 60$  и  $80\%$ .

Из анализа табл. 21 следует, что точность определения высот по снимкам, полученным АФА с бездисторсионными объективами, тем выше, чем меньше продольное перекрытие снимков. Например, для снимков с  $f = 70$  мм отношение  $m_h (P_x = 80\%) / m_h (P_x = 60\%) = 1,5$ , а для снимков с  $f = 200$  м — 1,9. Это отношение заметно меняется и приближается к единице при использовании АФА с объективами, дисторсия которых предельно допустима.

С целью проверки высказанных предположений проводились исследования точности построения продольных и поперечных параллаксов в зависимости от величины продольного перекрытия. Для этого были смоделированы калибровочные поправки в параллаксы точек стереопары по калибровочным поправкам  $\vartheta_x, \vartheta_y$  координат узловых точек стандартной сетки (шаг 10 мм) снимков, полученных АФА — 41/10 № 300 с  $f = 98,23$  мм и АФА — 41/20 № 90257 с  $f = 200,20$  мм. Калибровочные поправки  $\vartheta_p$  и  $\vartheta_q$  вычислялись по формулам

$$\vartheta_{p_i} = \vartheta_{x_{л_i}} - \vartheta_{x_{п_i}}, \quad \vartheta_{q_i} = \vartheta_{y_{л_i}} - \vartheta_{y_{п_i}}. \quad (5.59)$$

Калибровочные поправки  $\vartheta_{x_{л_i}}, \vartheta_{x_{п_i}}, \vartheta_{y_{л_i}}$  и  $\vartheta_{y_{п_i}}$  выбирались из паспорта для точек, координаты которых связаны уравнениями

$$p_i = x_{л_i} - x_{п_i}, \quad q_i = y_{л_i} - y_{п_i}. \quad (5.60)$$

Таблица 22

 $f = 100 \text{ мм}$ 

$p, \text{ мм}$	10	30	35	40	50	60	70
$\theta_p, \text{ мкм}$	5,2	12,1	13,5	15,0	17,0	19,0	19,7
$\theta_q, \text{ мкм}$	4,4	8,0	8,0	9,7	10,5	11,6	12,1
$m_p = 1,25 \theta_p$	6,5	15,1	17,4	18,8	21,2	23,8	24,6
$m_q = 1,25 \theta_q$	5,5	10,0	11,0	12,1	13,1	14,5	15,1
$\eta = m_p/m_q$	1,2	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6
$m_h/H$			$\frac{1}{2100}$				$\frac{1}{2300}$

Продолжение табл. 22

 $f = 200 \text{ мм}$ 

$p, \text{ мм}$	10	30	35	40	50	60	70
$\theta_p, \text{ мкм}$	2,2	4,7	5,3	5,9	6,8	7,8	8,7
$\theta_q, \text{ мкм}$	2,1	4,1	4,4	4,8	5,4	5,6	5,9
$m_p = 1,25 \theta_p$	2,8	5,9	6,6	7,4	8,5	9,8	10,9
$m_q = 1,25 \theta_q$	2,6	5,1	5,6	6,0	6,8	7,0	7,4
$\eta = m_p/m_q$	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5
$m_h/H$			$\frac{1}{5300}$				$\frac{1}{5900}$

Величины  $p_i$  задавались в пределах 10–70 мм с интервалом 10 мм. Величина  $q_i$  принималась равной 0. По полученным  $\vartheta_{p_i}$  и  $\vartheta_{q_i}$  вычислялись средние калибровочные поправки

$$\theta_p = \frac{i=n}{\sum_{i=1}^n} |\vartheta_p| / n, \quad (5.61)$$

$$\theta_q = \frac{i=n}{\sum_{i=1}^n} |\vartheta_q| / n, \quad (5.62)$$

которые можно принять за средние ошибки измерения параллаксов, вызванные влиянием систематических ошибок построения изображения.

Ошибки  $m_p$  и  $m_q$  определялись по формулам

$$m_p = 1,25 \theta_p, \quad (5.63)$$

$$m_q = 1,25 \theta_q. \quad (5.64)$$

где 1,25 — коэффициент связи средней и среднеквадратической ошибок измерений.

Результаты вычислений записаны в табл. 22.

С увеличением продольного перекрытия снимков уменьшаются ошибки продольных и поперечных параллаксов. Ожидаемая точность определения высот при  $P_x = 60$  и 80 % для обеих камер получилась примерно одинаковой, что подтверждает ранее сделанные выводы.

Кроме того, были обработаны две стереопары с  $P_x = 82$  и 60 %,  $f = 100$  мм,  $H = 450$  м. На каждой стереопаре было намечено до 40 точек, высоты которых определялись техническим нивелированием. В первом случае получили  $m_h = \pm 0,32$  м, во втором  $\pm 0,30$  м.

#### § 25. ВЫБОР ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕКРЫТИЯ СНИМКОВ ПРИ КРУПНОМАСШТАБНОЙ АЭРОФОТОТОПОГРАФИЧЕСКОЙ СЪЕМКЕ ЗАСТРОЕННЫХ ТЕРРИТОРИЙ

При крупномасштабной аэрофототопографической съемке городов с многоэтажной застройкой в масштабе 1:2000 и крупнее изображения больших площадей на снимках получают закрытыми перспективными изображениями зданий или других высоких объектов. Эти участки принято называть "мертвыми" зонами.

Величина мертвой зоны зависит от габаритов здания и его расположения на аэрофотоснимке. При обработке аэрофотоснимков застроенных территорий на универсальных приборах наблюдатель видит стереоскопически не всю поверхность около здания, а только ее часть в зависимости от расположения здания относительно линии базиса фотографирования. В работе [43] подробно рассмотрен этот вопрос и даны рекомендации по съемке участков местности на универсальных приборах, даже если они не видны стереоскопически. Такая возможность существует для зон, образуемых перспективой стен зданий, расположенных перпендикулярно линии базиса фотографирования. Закрытые перспективой контуры объектов можно наносить только монокулярно по одному из снимков стереопары. Рисовка рельефа в этих зонах невозможна, а точность нанесения объектов в значительной степени зависит от разности высот основания здания и выбранной для стереоскопического визирования точки местности.

Если здание изобразилось не на линии базиса фотографирования, то за одной из его продольно расположенных стен будет оставаться зона, в пределах которой нанесение закрытых объектов по снимкам вообще невозможно.

Условимся разделять закрытые перспективой объектов участки местности, т.е. мертвые зоны, на проективные полутени (пп) и тени (пт).

К проективным полутеням отнесем участки, закрытые только на одном снимке стереопары, а к проективным теням — участки, закрытые на обоих снимках стереопары.

При фотограмметрической обработке снимков на универсальных приборах проективные полутени менее опасны, чем проективные тени, так как они позволяют дешифрировать и наносить на карту целый ряд объектов, даже если объекты не видны стереоскопически. Наличие проективных теней на снимках требует в конечном итоге инструментальной досъемки неизобразившихся объектов. Опыт некоторых организаций показывает, что при картографировании населенных пунктов с высокими зданиями и значительным числом зеленых насаждений объем работ по инструментальной досъемке может достигать 40 % и более.

Таким образом, при проектировании аэрофотосъемки городов для создания карты в масштабе 1:2000 и крупнее необходимо так выбирать параметры съемки и направления осей маршрутов, чтобы площади проективных теней были минимальны, а длины проективных полутеней — сравнительно короткими.

Для того чтобы дать конкретные рекомендации по этому вопросу, необходимо рассмотреть геометрию появления проективных теней и полутеней, а также их связь с параметрами съемки и требованиями к точности составления топографических карт различных масштабов.

На рис. 42 показана геометрия получения проективных теней и полутеней. Отрезки  $A_0A'$  и  $B_0B'$  — длина проективных полутеней для случая, когда объект съемки находится между центрами проектирования  $S_1$  и  $S_2$ . Если объект съемки выходит за базис фотографирования, то дополнительно появляются проективные тени  $C_0C'$ .

Обозначим общую длину проективной полутени от здания  $AB$  через  $(D_{пп})_X$

$$(D_{пп})_X = A_0A' + B_0B'. \quad (5.65)$$

Из рис. 42 следует, что

$$A_0A' = - \frac{(x_2)_A}{f} h_3, \quad (5.66)$$

$$B_0B' = \frac{(x_1)_B}{f} h_3, \quad (5.67)$$

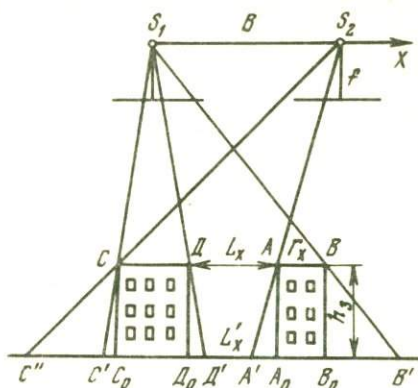


Рис. 42

где  $(x_1)_B$  и  $(x_2)_A$  — координаты точек на левом и правом снимках,  $h_3$  — высота здания.  
Тогда

$$(D_{\text{пп}})_X = \frac{h_3}{f} [(x_1)_B - (x_2)_A]. \quad (5.68)$$

Точки  $A$  и  $B$  имеют одинаковые высоты, а следовательно, и одинаковые горизонтальные параллаксы, в этом случае

$$[(x_1)_A - (x_1)_B - (x_2)_A - (x_2)_B] = 0. \quad (5.69)$$

С учетом того, что

$$(x_2)_A - (x_2)_B = -\Gamma_X \frac{f}{H}, \quad (5.70)$$

где  $\Gamma_X$  — габариты здания по оси  $X$ ;  $H$  — высота фотографирования, получим

$$(x_1)_A - (x_1)_B + \frac{f}{H} \Gamma_X = 0. \quad (5.71)$$

Из формулы (5.68) определим

$$(x_1)_B = \frac{f}{h_3} [(D_{\text{пп}})_X + \frac{(x_2)_A}{f} h_3]. \quad (5.72)$$

Подставив выражение (5.72) в уравнение (5.69) и учитывая, что  $(x_1)_A - (x_2)_B = p = B \frac{f}{H}$ , окончательно получим

$$(D_{\text{пп}})_X = \frac{h_3}{H} (B + \Gamma_X). \quad (5.73)$$

Таким образом, из формулы (5.73) следует, что длина проективной тени зависит от двух факторов: во-первых, от параметров аэросъемки  $B$  и  $H$ , во-вторых, от габаритов зданий  $h_3$  и  $\Gamma_X$ .

По аналогии, для здания  $CD$ , смещенного относительно базиса фотографирования влево, получим длину проективной полутени  $C'C''$

$$(D_{\text{пп}})_X = \frac{B h_3}{H} \quad (5.74)$$

и длину проективной тени  $C_0C'$

$$(D_{\text{пт}})_X = - \frac{(x_1)_c h_3}{f} \quad (5.75)$$

Для здания, смещенного вправо относительно базиса фотографирования, получим соответственно

$$(D_{\text{пп}})_X = \frac{B h_3}{H}; \quad (5.76)$$

$$(D_{\text{пт}})_X = \frac{(x_2)_c h_3}{f} \quad (5.77)$$

Вдоль оси  $Y$  (в направлении, перпендикулярном к оси маршрута) проективных теней не будет, а будут образовываться только проективные тени, длины которых можно выразить формулой

$$(D_{\text{пт}})_Y = \frac{y}{f} h_3, \quad (5.78)$$

где  $y$  – ордината точки на снимке.

Таким образом, анализ формул (5.76) – (5.78) показывает следующее:

1. Проективные полутени имеют направление вдоль оси маршрута, и их длины зависят только от отношения  $B/H$  и габаритов здания или другого высокого объекта.

2. Проективные тени могут иметь направление вдоль (вне базиса фотографирования) и поперек оси маршрута, и их длина зависит от габаритов объектов и отношений  $x/f$ ,  $y/f$ , где  $x$  и  $y$  – координаты точки на левом или правом снимке стереопары, к центру которого ближе всего расположена точка.

Условия стереоскопических наблюдений зависят также от взаимного положения зданий. Стереоскопически будет просматриваться участок местности между точками  $A'$  и  $D'$ , т.е. отрезок  $A'D' = L'_X$ , а не  $A_0D_0 = L_X$  (см. рис. 42). Примем отношение  $A'D'/A_0D_0$  за коэффициент стереоскопического просматривания местности  $k_c$ . При  $k_c = 1$  условия наблюдений снимков наиболее благоприятны, а при  $k_c \leq 0$  местность между зданиями стереоскопически просматриваться не будет.

Из рис. 42 следует, что

$$A'D' = L'_X = B - \frac{H}{f} [(x_1)_D - (x_2)_A]. \quad (5.79)$$

Учитывая, что  $(x_2)_A = (x_2)_D + L_X \frac{f}{H - h_3}$ ,  $(x_1)_D - (x_2)_D = B \frac{f}{H - h_3}$ ,

получим

$$L'_X = B - \frac{H}{H - h_3} (B - L_X). \quad (5.80)$$

Коэффициент стереоскопического просмотра выразим формулой

$$k_c = \frac{B - \frac{H}{H - h_3} (B - L_X)}{L_X}. \quad (5.81)$$

После преобразований и упрощений окончательно получим

$$k_c = 1 - \frac{B h_3}{H L_X}. \quad (5.82)$$

На основании формулы (5.82) следует вывод о том, что условия стереоскопических наблюдений снимков с изображением застроенной территории тем лучше, чем меньше длина базиса фотографирования или больше продольное перекрытие снимков. Если  $B \geq \frac{H L_X}{h_3}$ , то  $k_c \leq 0$ , т.е. условия наблюдения снимков будут самыми неблагоприятными, что необходимо учитывать при проектировании параметров аэрофото-съемки.

Точность нанесения на карту точек, расположенных в зонах проективных полутеней, зависит от рельефа окружающей местности, т.е. разности уровней  $\delta h$  точек стереоскопического наведения измерительной марки и определяемой. Погрешность планового положения наносимых контуров

$$\delta L_X = \frac{x}{f} \delta h. \quad (5.83)$$

Наибольшая по величине погрешность будет для точек, имеющих  $x = \frac{1}{2} b$ , где  $b$  — базис фотографирования на снимке.

В этом случае

$$(\delta L_X)_{\max} = \frac{b}{2f} \delta h. \quad (5.84)$$

Учитывая, что  $\frac{b}{2f} = \frac{B}{2H}$ , формулу (5.84) представим в виде

$$(\delta L_X)_{\max} = \frac{B}{2H} \delta h. \quad (5.85)$$

Длина базиса фотографирования  $B$  рассчитывается, исходя из заданного перекрытия  $P_x$  и заданных параметров съемки  $H$  и  $f$  по формуле

$$B = \frac{l H (100 - P_x)}{100 f}, \quad (5.86)$$

где  $l$  — формат снимка.

Подставив формулу (5.86) в (5.85), получим

$$(\delta L_x)_{\max} = \frac{l (100 - P_x)}{200 f} \delta h. \quad (5.87)$$

Из формулы (5.87) следует, что с увеличением продольного перекрытия  $P_x$  и фокусного расстояния  $f$  уменьшается величина погрешности  $(\delta L_x)_{\max}$ .

В технической литературе в настоящее время отсутствуют способы количественного прогнозирования мертвых зон в зависимости от района работ и выбранных параметров аэрофотосъемки. Вместе с тем эти данные необходимо иметь и, следовательно, учитывать при составлении проектно-сметной документации на производство топографо-геодезических работ. В связи с этим ниже предлагаются формулы для количественной оценки мертвых зон.

Предположим, что застроенная часть картографируемой территории, площадь которой равна  $S$ , имеет плотность застройки  $\Pi_3$ , среднюю высоту  $h_3$ , среднюю площадь  $S_{3\text{ср}}$  зданий. Плотность застройки в этом случае определяется выражением

$$\Pi_3 = \frac{S_{3\text{ср}} k}{S} 100\%, \quad (5.88)$$

где  $k$  — число зданий на застроенной территории.

Если площадь мертвой зоны, образуемой одним зданием, в среднем равна  $\Delta S_3$ , то показатель мертвых зон, выраженный в процентах, будет равен

$$\Pi_{\text{мз}} = \frac{\Delta S_3 k}{S} 100\%. \quad (5.89)$$

Определив из формулы (5.88) величину  $k$  и подставив ее в выражение (5.89), получим

$$\Pi_{\text{мз}} = \frac{\Delta S_3 \text{ср}}{S_3 \text{ср}} \Pi_3. \quad (5.90)$$

Величина  $\Delta S_3$  зависит от габаритов здания и его расположения на аэрофотоснимке.

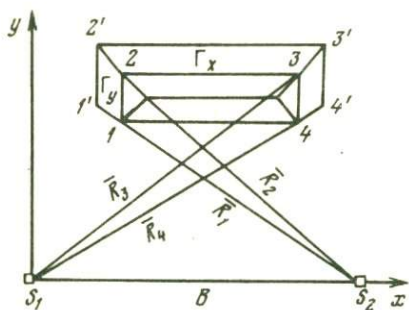


Рис. 43

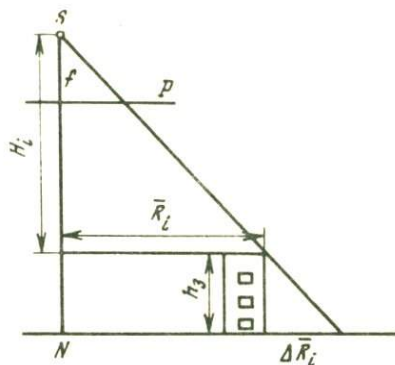


Рис. 44

Площадь мертвой зоны  $\Delta S_3$  для здания можно определить из рис. 43, на котором показаны проекции здания и базиса фотографирования на горизонтальную плоскость, а также граница мертвой зоны  $11'2'3'4'4321$ , полученная путем соединения точек пересечения проектирующих лучей, проходящих через углы крыши здания, с поверхностью земли.

Из рис. 43 следует, что

$$\Delta S_3 = S_{11'2'3'4'4} - \Gamma_X \Gamma_Y, \quad (5.91)$$

где  $\Gamma_X$  и  $\Gamma_Y$  — габариты здания вдоль осей  $X$  и  $Y$ .

Площадь  $S_{11'2'3'4'4}$  определяется по известной формуле

$$S_{11'2'3'4'4} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Y_i (X_{i+1} - X_{i-1}). \quad (5.92)$$

Координаты точек контура мертвой зоны можно найти, пользуясь формулами

$$X_i' = X_i + \Delta X_i, \quad Y_i' = Y_i + \Delta Y_i, \quad (5.93)$$

где  $\Delta X_i$  и  $\Delta Y_i$  — приращения координат при центральной проекции углов крыши здания на местность;  $X_i, Y_i$  — координаты углов здания.

Из рис. 44 следует, что

$$\Delta R_i = \bar{R}_i \frac{h_{zi}}{H_i}. \quad (5.94)$$

Нетрудно доказать, что

$$\Delta X_i = \frac{\Delta \bar{R}_i}{\bar{R}_i} X_i, \quad \Delta Y_i = \frac{\Delta \bar{R}_i}{\bar{R}_i} Y_i. \quad (5.95)$$

С учетом выражения (5.94) формулы (5.95) примут вид

$$\Delta X_i = \frac{h_{3i}}{H_i} X_i, \quad \Delta Y_i = \frac{h_{3i}}{H_i} Y_i. \quad (5.96)$$

При вычислении  $\Delta X_i$  и  $\Delta Y_i$  необходимо учитывать, что для точек 1 и 2 (см. рис. 43) они пропорциональны координатам, за начало которых принят правый центр проектирования  $S_2$ , а для точек 3 и 4 – координаты с началом в левом центре проектирования  $S_1$ . С учетом этого в табл. 23 даны приведенные к точке 2 координаты точек и их смещения в системе координат левого аэрофотоснимка.

Найдя по формулам (5.93) координаты контура мертвой зоны, определим из выражения (5.92)

$$S_{11'2'3'4'4} = \Gamma_X \Gamma_Y + [Y_2 \Gamma_X + \Gamma_Y (B_X + \Gamma_X)] \frac{h_3}{H} + \\ + [(B_X + \Gamma_X) (Y_2 + \Gamma_Y)] \frac{h_3^2}{H^2}. \quad (5.97)$$

Соответственно из формулы (5.97) получим

$$\Delta S_3 = [Y_2 \Gamma_X + \Gamma_Y (B_X + \Gamma_X)] \frac{h_3}{H} + [(B_X + \Gamma_X) (Y_2 + \\ + \Gamma_Y)] \frac{h_3^2}{H^2}. \quad (5.98)$$

Анализ формулы (5.98) показывает, что в самых неблагоприятных условиях второй член составляет менее  $\frac{1}{10}$  величины первого, следовательно, им можно пренебречь и для практических целей использовать формулу

$$\Delta S_3 = (B_X + \Gamma_X) \Gamma_Y \frac{h_3}{H} + Y_2 \Gamma_Y \frac{h_3}{H}. \quad (5.99)$$

Для вычисления среднего значения можно принять  $Y_2 = \frac{1}{2} B_X$ . Тогда после некоторых упрощений получим

$$\frac{\Delta S_3}{S_3} = \frac{h_3}{H} \left( \frac{B_X + \Gamma_X}{H \Gamma_X} + \frac{B_Y}{2H \Gamma_Y} \right), \quad (5.100)$$

Номер точки	$X_i$	$Y_i$	$\Delta X_i$	$\Delta Y_i$
1	$-(B_X - X_2)$	$(Y_2 - \Gamma_Y)$	$-(B_X - X_2) \frac{h_{zi}}{H_i}$	$(Y_2 - \Gamma_Y) \frac{h_{zi}}{H_i}$
2	$-(B_X - X_2)$	$Y_2$	$-(B_X - X_2) \frac{h_{zi}}{H_i}$	$Y_2 \frac{h_{zi}}{H_i}$
3	$(X_2 + \Gamma_X)$	$Y_2$	$(X_2 + \Gamma_X) \frac{h_{zi}}{H_i}$	$Y_2 \frac{h_{zi}}{H_i}$
4	$(X_2 + \Gamma_X)$	$(Y_2 - \Gamma_Y)$	$(X_2 + \Gamma_X) \frac{h_{zi}}{H_i}$	$(Y_2 - \Gamma_Y) \frac{h_{zi}}{H_i}$

где

$$B_X = l \frac{(100 - P_x) H}{100 f}; \quad B_Y = l \frac{(100 - P_y) H}{100 f}; \quad (5.101)$$

здесь  $l$  – размер снимка;  $P_x, P_y$  – продольное и поперечное перекрытие снимков.

Подставив формулу (5.100) в выражение (5.90), получим формулу для вычисления показателя мертвых зон для застроенной территории

$$\Pi_{мз} = \frac{h_3}{H} \left( \frac{B_X + \Gamma_X}{H \Gamma_X} + \frac{B_Y}{2H \Gamma_Y} \right) \Pi_3, \quad (5.102)$$

где  $\Gamma_X, \Gamma_Y, h_3$  – средние габариты здания, определенные по результатам измерений наиболее характерных зданий, расположенных на картографируемой территории.

Как видно из формулы (5.102), показатель  $\Pi_{мз}$  тем меньше, чем больше продольное и поперечное перекрытие снимков и фокусное расстояние съемочной камеры. Например, при  $P_x = 80\%$  показатель  $\Pi_{мз}$  будет в два раза меньше соответствующего показателя при  $P_x = 60\%$ .

Средние габариты зданий  $\Gamma_X, \Gamma_Y$  и  $h_3$ , а также показатель застройки  $\Pi_3$  следует определять по имеющимся картматериалам на данную территорию по наиболее характерным зданиям. При этом следует иметь в виду, что в настоящее время показатель застройки в городах может достигать 50%.

## ОБРАБОТКА СНИМКОВ ПО УСТАНОВОЧНЫМ ДАННЫМ

§ 26. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПО УСТАНОВОЧНЫМ ДАННЫМ  
НА УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРИБОРАХ

Эффективность аэрофототопографической съемки в крупных масштабах определяется в первую очередь соотношением масштабов снимка и карты. В настоящее время при соблюдении существующих допусков к положению точки в плане увеличение при составлении крупномасштабных карт может достигать 8–10 крат по отношению к масштабу снимка. Практическая обработка снимков с большими коэффициентами увеличения стала возможной благодаря повышению метрических свойств снимков, а также в связи с серийным выпуском стереографов СЦ и СПР с координатографами и с применением топокарта стереометрографа.

Использование общепринятой методики построения и измерения модели при больших коэффициентах увеличения связано с трудностями, заключающимися прежде всего в том, что увеличенная модель не помещается на планшете, что затрудняет процессы ее геодезического ориентирования, даже если используется вспомогательный планшет. Эти трудности можно преодолеть, если снимки обрабатывать по установочным данным, которые могут быть получены на ЭЦВМ в процессе аналитического сгущения планово-высотного обоснования по программе ГИВЦ-8 [2].

В Донецком политехническом институте [34] разработана и внедрена методика обработки снимков на стереометрографе по установочным данным, которые вычисляются на ЭВМ по результатам измерения снимков на стереокомпараторе. Зная места нулей шкал прибора, устанавливают вычисленные данные и получают ориентированную и масштабированную модель.

К недостаткам этой методики можно отнести то, что из-за неизбежных инструментальных погрешностей и неточной установки мест нулей шкал обрабатывающего прибора ориентирование модели чаще всего бывает недостаточно точным и на его корректировку приходится затрачивать дополнительное время.

В производственных условиях опробирована методика ввода установочных данных применительно к приборам, снабженным счетчиками координат (СПР-3, СЦ-1, СД-3). Ориентирование можно выполнять без использования планшетов с опорными точками.

По предлагаемой методике установка угловых элементов ориентирования стереопары производится по координатным меткам или крестам, нанесенным на стекло кассеты, для которых вычислены координаты, соответствующие координатам на трансформированном снимке. Масштабирование модели выполняется путем установки базисных компонент, которые вычислены на ЭВМ, а затем уточняется по высотам опорных точек.

Для реализации данной методики необходимо предусмотреть в прог-

раммах аналитического сгущения плано-высотного обоснования дополнительное вычисление следующих установочных данных.

1. В зависимости от технических возможностей прибора, масштаба снимков и рельефа местности выбираются оптимальные масштабы модели  $M_r$  и  $M_v$  (горизонтальный и вертикальный) и соответствующие шестерни для счетчика высот и координатографа. Вычисляются также фокусное расстояние прибора  $f_{пр}$ , базисные компоненты  $b_x, b_y, b_z$ .

2. Приборные трансформированные координаты меток для левого и правого снимков вычисляются по формулам

$$x_{л,п}^0 = f' \frac{f' \sin \alpha_{л,п} + x_{л,п} \cos \alpha_{л,п}}{f' \cos \alpha_{л,п} - x_{л,п} \sin \alpha_{л,п}} n_{л,п}, \quad (6.1)$$

$$y_{л,п}^0 = f' \frac{f' \sin \omega_{л,п} + y_{л,п} \cos \omega_{л,п}}{f' \cos \omega_{л,п} - y_{л,п} \sin \omega_{л,п}} n_{л,п}, \quad (6.2)$$

где  $\alpha_{л,п}$  и  $\omega_{л,п}$  — углы наклона снимков стереопары вокруг осей координат  $x$  и  $y$ ;  $x_{л,п}$  и  $y_{л,п}$  — координаты меток в прямоугольной системе координат левого и правого снимков;  $f'$  — фокусное расстояние съемочной камеры, исправленное за деформацию негатива;  $n_{л,п}$  — масштабные коэффициенты координатных счетчиков, зависящие от отношения выбранной высоты проектирования  $D$  и фокусного расстояния прибора  $f'_{пр}$  для снимков стереопары.

Величина  $n_l$  для левого снимка стереопары выбирается в зависимости от типа обрабатывающего прибора и вычисляется по формуле

$$n_l = D_{\max} / f'_{пр}, \quad (6.3)$$

где  $D_{\max}$  — максимально возможная высота проектирования. Например, для СЦ-1  $D_{\max} = 185$  мм.

Масштабный коэффициент  $n_{п}$  для правого снимка вычисляется по формуле

$$n_{п} = n_l + \frac{Z_{Sл} - Z_{Sп}}{f'_{пр} M_v} 1000, \quad (6.4)$$

где  $Z_{Sп}$  и  $Z_{Sл}$  — высоты центров проектирования соответственно правого и левого.

Для установки коэффициентов  $n_l$  и  $n_{п}$  на приборе предварительно для левого и правого снимков вычисляется расстояние между координатными метками 3 (верхняя метка, для которой  $y_p > 0$ ) и 4 (нижняя метка) вдоль оси  $y$

$$L_{л} = (y_3^0 - y_4^0) n_l, \quad L_{п} = (y_3^0 - y_4^0) n_{п}. \quad (6.5)$$

3. Децентрации снимков и коррекционных механизмов для каждого типа приборов вычисляют по общеизвестным формулам.

4. Высоты фотографирования над опорными высотными точками вычисляют в масштабе модели по формуле

$$Z_i = H_{\Phi_i} \frac{1000}{M_B}. \quad (6.6)$$

5. Приборные координаты  $x'_i$  и  $y'_i$  углов рамок планшета вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= n_{\pi} (a X_{r_i} + b Y_{r_i} + c_X) \frac{1000}{M_r}, \\ y'_i &= n_{\pi} (-a Y_{r_i} + b X_{r_i} + c_Y) \frac{1000}{M_r}, \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

где  $X_{r_i}$ ,  $Y_{r_i}$  — геодезические координаты углов рамки планшета;  $a$ ,  $b$ ,  $c_X$  и  $c_Y$  — коэффициенты для перевычисления геодезических координат в фотограмметрические координаты, которые заранее определяются по методу наименьших квадратов из решения системы уравнений вида

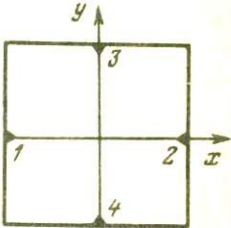

$$\left. \begin{aligned} a X_{r_i} + b Y_{r_i} + c_X - X_{\Phi_i} &= \vartheta_{x_i}, \\ -a Y_{r_i} + b X_{r_i} + c_Y - Y_{\Phi_i} &= \vartheta_{y_i}, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где  $X_{\Phi_i}$  и  $Y_{\Phi_i}$  — пространственные фотограмметрические координаты опорных точек.

Таким образом, для обработки одиночных пар снимков по установочным данным необходимо иметь следующие данные, приведенные в табл. 24.

При наличии вышеуказанных установочных данных работа по построению и ориентированию модели состоит из следующих этапов: 1) установка коэффициента  $n$ ; 2) трансформирование снимков стереопары на приборе по приборным трансформированным координатам меток; 3) масштабирование модели; 4) ориентирование планшета по приборным координатам углов рамки планшета; 5) контроль ориентирования и составление топографического плана.

Первый этап. Снимки тщательно центрируют в кассетах и закладывают в прибор. На соответствующих шкалах устанавливают  $f_{пр}$ , а на счетчике высот соответствующие шкалы и шестерни. На шкалах коррекционных механизмов и децентрацией устанавливают отсчеты, близкие к их местам нулей. На базисной каретке устанавливают  $O_{b_x} = MO_{b_x} + b_x$ ,  $O_{b_y} = MO_{b_y} + b_y$ . Для определения  $MO_{b_y}$  монокулярно совмещают левую марку с центром вращения левой кассеты (он обычно виден на просвет

Величины	Обозначения	Примечания
Горизонтальный масштаб	$M_{\Gamma}$	
Вертикальный масштаб	$M_{\text{в}}$	
Фокусное расстояние прибора	$f_{\text{пр}}$	
Базисные компоненты	$b_x, b_y, b_z$	
Масштабный коэффициент счетчиков координат прибора для левого и правого снимков	$n$	
Приборные трансформированные координаты меток для левого и правого снимков	$(x_2^0)_{\text{л}}, (y_3^0)_{\text{л}}$ $(x_4^0)_{\text{л}}, (y_1^0)_{\text{п}}$ $(y_3^0)_{\text{п}}, (y_4^0)_{\text{п}}$	
Приборные координаты для установки	$n$	
Приборные координаты углов рамок планшета	$x_i', y_i'$	

через снимок). Затем штурвалом  $X$  перемещают каретку прибора так, чтобы под правую марку спроектировался правый центр вращения правой кассеты. Несовмещение по оси  $y$  необходимо устранить движением  $b_y$ . Отсчет на шкале  $b_y$  и будет ее местом нуля.

Ориентирование снимков производят отдельно поворотами  $\kappa_{\text{л}}$  и  $\kappa_{\text{п}}$  таким образом, чтобы линии, соединяющие координатные метки, были параллельны соответствующим осям прибора.

Ножным штурвалом опускают базисную каретку в нижнее положение. При этом на абсолютном счетчике высот должен быть отсчет, равный  $O_Z = n_{\text{л}} f'_{\text{пр}}$ . При фиксированном отсчете на счетчике высот  $O_Z$  считывают со шкалы  $Y$  отсчеты при наведении левой и правой измерительных марок на координатные метки 3 и 4 левого и правого снимков. По этим отсчетам вычисляют поправки в установки базисной каретки по высоте  $\Delta Z$  и в базисную составляющую  $\Delta b_z$  по формулам.

$$\Delta Z (\text{м}) = D \frac{\Delta L_{\text{л}} M_{\text{в}}}{1000 L_{\text{л}}}, \quad (6.9)$$

$$\Delta b_z (\text{мм}) = D \frac{\Delta L_{\text{п}}}{L_{\text{п}}}, \quad (6.10)$$

где  $D$  — отсчет по абсолютному счетчику высот;  $\Delta L_{\text{л}} = L_{\text{л}} - L'_{\text{л}}$ ,  $\Delta L_{\text{п}} = L_{\text{п}} - L'_{\text{п}}$ . Здесь  $L_{\text{л}}$  и  $L'_{\text{л}}$  — вычисленные по формулам (6.5) расстояния между метками 3 и 4, а  $L_{\text{л}}$  и  $L'_{\text{л}}$  — измеренные расстояния.

Затем вычисляют отсчеты

$$O'_Z = O_Z + \Delta Z, \quad O'_{b_z} = O_{b_z} - \Delta b_z \quad (6.11)$$

и устанавливают их движениями  $Z$  и  $b_z$  на соответствующих шкалах.

Если после установки отсчетов вновь измеренные расстояния между координатными метками будут отличаться от исходных не более чем на  $\pm 0,03/n_{\text{л}}$  мм, то масштабные коэффициенты  $n_{\text{л}}$  и  $n_{\text{п}}$  счетчиков координат установлены точно. В противном случае установку повторяют. Записывают отсчет по шкале высот  $O_Z$ , являющийся местом нуля этой шкалы  $MO_Z$ , и отсчет по шкале  $O_{b_z}$  — место нуля  $MO_{b_z}$ . После этого счетчик высот фиксируют.

Второй этап. Левую измерительную марку совмещают с центром вращения кассеты и берут со счетчиков  $X$  и  $Y$  отсчеты  $O_X$  и  $O_Y$  (переключатели направлений счетчиков должны быть установлены таким образом, чтобы при возрастании отсчетов на них измерительная марка соответственно перемещалась в положительном направлении осей координат снимка). Для меток 3 и 4 левого снимка вычисляют отсчеты

$$O_{Y_3} = MO_Y + (y_3^0)_{\text{л}}, \quad O_{Y_4} = MO_Y - (y_4^0)_{\text{л}}. \quad (6.12)$$

Установив на счетчике  $Y$  отсчет  $O_{Y_3}$ , левую измерительную марку визуально совмещают с координатной меткой 3 движением  $(k_{\omega})_{\text{л}}$  прибора, после чего устанавливают отсчет  $O_{Y_4}$  и проверяют совмещение левой измерительной марки с координатной меткой 4. Измеренная величина несовмещения не должна превышать  $\pm 0,02 n_{\text{л}}$ . В противном случае уточняют установку  $(k_{\omega})_{\text{л}}$ . Аналогично устанавливают  $(k_{\omega})_{\text{п}}$ .

Установку  $(k_{\alpha})_{\text{л}}$  и  $(k_{\alpha})_{\text{п}}$  производят по координатным меткам 2 и 1 на левом и правом снимках. Отсчеты на счетчике  $X$  при этом должны быть следующие:

$$O_{X_2} = MO_X + (x_2^0)_{\text{л}}, \quad O_{X_1} = MO_X - (x_1^0)_{\text{п}}. \quad (6.13)$$

После этого устанавливают на шкалах децентраций вычисленные децентрации с учетом их мест нулей. На шкале  $b_z$  устанавливают отсчет

$$O_{b_z} = MO_{b_z} + b_z. \quad (6.14)$$

Ориентирование снимков по начальным направлениям производят движениями  $\kappa_{\text{л}}$  и  $\kappa_{\text{п}}$  обычным способом.

В результате выполненных операций процесс построения модели считается законченным. Остаточные вертикальные параллаксы не должны превышать  $1/4$  диаметра марки.

Третий этап. Для масштабирования модели по высотам фотографирования необходимо вычислить отсчеты для высотных опознаков по счетчику высот

$$O_{Z_i} = MO_Z - (Z_i - n_p f') \frac{M_B}{1000}, \quad (6.15)$$

где  $Z_i$  – высота фотографирования в масштабе модели, вычисленная по формуле (6.6).

Установив на счетчике высот отсчет  $O_{Z_i}$ , измерительную марку стереоскопически совмещают с данной точкой модели движением  $b_x$ . После этого на счетчике высот перемещением шкалы устанавливают абсолютную высоту точки. Расхождения в высотах на других опознаках не должны превышать  $\frac{1}{3000}H$ , где  $H$  – средняя высота фотографирования.

После масштабирования модели уточняют ориентирование вдоль начального направления и проверяют взаимное ориентирование снимков по остаточным поперечным параллаксам по всему полю стереопары. Остаточные параллаксы не должны превышать  $1/4$  диаметра марки.

Четвертый этап. Устанавливают на счетчиках координат отсчеты

$$O_{X_1} = MO_X + x_1', \quad O_{Y_1} = MO_Y + y_1', \quad (6.16)$$

где  $x_1'$  и  $y_1'$  – приборные координаты углов рамок планшета.

Подключают к прибору координатограф и под иглу чертежного устройства подводят левый нижний угол рамки планшета. Устанавливают на счетчиках координат отсчеты

$$O_{X_3} = MO_X + x_3', \quad O_{Y_3} = MO_Y + y_3' \quad (6.17)$$

и, поворачивая планшет вокруг точки 1, (см. табл. 24), добиваются совмещения иглы координатографа с точкой 3. Затем повторяют ориентирование по точкам 1 и 3.

Пятый этап. На счетчиках  $X$  и  $Y$  устанавливают отсчеты

$$O_{X_4} = MO_X + x_4', \quad O_{Y_4} = MO_Y + y_4'. \quad (6.18)$$

При этом несовмещение иглы координатографа с точкой 4 не должно быть более 0,3 мм.

Заключительный контроль осуществляют по плановым опознакам (точкам сгущения), расположенным на данном планшете.

## § 27. ТОЧНОСТЬ ОБРАБОТКИ СНИМКОВ ПО УСТАНОВОЧНЫМ ДАННЫМ

При выводе аналитической зависимости точности построения модели аналоговым методом по установочным данным рассмотрим две задачи: 1) ввод угловых и линейных элементов ориентирования производится независимо друг от друга и геодезическое ориентирование не уточняется

по опорным точкам; 2) ввод всех элементов ориентирования также выполняется независимо, но геодезическое ориентирование модели уточняется по опорным точкам.

Для решения первой задачи рассмотрим влияние погрешностей на определение высот точек одиночной геометрической модели, полученной в пространственной системе координат.

Известно, что в масштабе снимка фотограмметрические высоты точек геометрической модели, базис проектирования которой равен  $b$ , определяются по формуле

$$Z_i = -f \frac{b}{x_{лi}^0 - x_{пi}^0} = -f \frac{b}{p_i^0}, \quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned} p_i^0 \approx & b_x + fa_{л} - fa_{п} + \frac{x_{лi}^2}{f} a_{л} - \frac{x_{пi}^2}{f} a_{п} - \\ & - \frac{x_{лi} y_{лi}}{f} \omega_{л} + \frac{x_{пi} y_{пi}}{f} \omega_{п} - y_{лi} \kappa_{л} + y_{пi} \kappa_{п} + \\ & + \frac{b_z}{f} (x_{пi} - p_i). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Для вывода средних квадратических ошибок примем  $|y_{лi}| \approx |y_{пi}| = y$ ;  $fa_{л} = \Delta x_{л}$ ;  $fa_{п} = \Delta x_{п}$ , тогда равенство (6.20) запишем в виде

$$\begin{aligned} p_i^0 \approx & b_x + \Delta x_{пi} - \Delta x_{лi} + \frac{x_{лi}^2}{f} a_{л} - \frac{x_{пi}^2}{f} a_{п} - \frac{x_{лi} y}{f} \omega_{л} + \\ & + \frac{x_{пi} y}{f} \omega_{п} - y \kappa_{л} + y \kappa_{п} + \frac{b_z}{f} (x_{пi} - p_i). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Так как погрешности установки децентраций  $\Delta x_{л}$  и  $\Delta x_{п}$  в значительной степени устраняются при масштабировании модели и их остаточное влияние невелико, то равенство (6.21) запишем в виде

$$\begin{aligned} p_i^0 \approx & b_x + \frac{x_{пi}^2}{f} a_{п} - \frac{x_{лi}^2}{f} a_{л} - \frac{x_{лi} y}{f} \omega_{л} + \frac{x_{пi} y}{f} \omega_{п} - \\ & - y \kappa_{л} + y \kappa_{п} + \frac{b_z}{f} (x_{пi} - p_i). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Продифференцировав (6.22) по переменным  $b_x, a_{л}, a_{п}, \omega_{л}, \omega_{п}, \kappa_{л},$

$\kappa_{\Pi}, b_z$ , найдем среднюю квадратическую погрешность

$$m_{p_i^0}^2 \approx m_{b_x}^2 + \left(\frac{x_{\Pi i}^2}{f}\right)^2 m_{a_{\Pi}}^2 + \left(\frac{x_{\Pi i}^2}{f}\right)^2 m_{a_{\Pi}}^2 + \left(\frac{x_{\Pi i} y}{f}\right)^2 m_{\omega_{\Pi}}^2 +$$

$$+ \left(\frac{x_{\Pi i} y}{f}\right)^2 m_{\omega_{\Pi}}^2 + y^2 m_{\kappa_{\Pi}}^2 + y^2 m_{\kappa_{\Pi}}^2 + \left(\frac{x_{\Pi i} - p_i}{f}\right)^2 m_{b_z}^2. \quad (6.23)$$

С учетом методических особенностей ввода угловых элементов ориентирования в обрабатывающий прибор допустим

$$m_{a_{\Pi}} = m_{a_{\Pi}} = m_a, m_{\omega_{\Pi}} = m_{\omega_{\Pi}} = m_{\omega}, m_{\kappa_{\Pi}} = m_{\kappa_{\Pi}} = m_{\kappa}. \quad (6.24)$$

Подставив значения (6.24) в формулу (6.23), получим

$$m_{p_i^0}^2 = m_{b_x}^2 + \frac{x_{\Pi i}^4 + x_{\Pi i}^4}{f^2} m_a^2 + \frac{y^2 (x_{\Pi i}^2 + x_{\Pi i}^2)}{f^2} m_{\omega}^2 +$$

$$+ 2 y^2 m_{\kappa}^2 + \frac{(x_{\Pi i} - p_i)^2}{f^2} m_{b_z}^2. \quad (6.25)$$

Принимая во внимание то, что  $x_{\Pi} = x_{\Pi} - p$ , формулу (6.25) запишем в виде

$$m_{p_i^0}^2 = m_{b_x}^2 + \frac{x_{\Pi i}^4 (x_{\Pi i} - p_i)^4}{f^2} m_a^2 + \frac{y^2 [x_{\Pi i}^2 + (x_{\Pi i} - p_i)^2]}{f^2} m_{\omega}^2 +$$

$$+ 2 y^2 m_{\kappa}^2 + \frac{(x_{\Pi i} - p_i)^2}{f^2} m_{b_z}^2. \quad (6.26)$$

Значение средней квадратической ошибки для всей стереопары можно получить двойным интегрированием по  $x_{\Pi}$  и  $y$  выражения (6.26) и делением на величину площади

$$m_p = \pm \sqrt{\frac{\int_{-c}^{+c} \int_0^c dy \int_0^c m_{p_i^0}^2 dx_{\Pi}}{2c^2}}. \quad (6.27)$$

После интегрирования и подстановки пределов, а также с учетом  $c - p = a$  получим

$$m_p = \frac{1}{3\sqrt{5} f} \sqrt{45 m_{b_x}^2 f^2 + 9 [c^3 (2a - 3p) + 5p^2 (2ac + p^2)] m_a^2 + \dots}$$

$$\begin{aligned}
 & + 5c^2 [c(2a - p) + 3p^2] m_{\omega}^2 + 30c^2 f^2 m_{\kappa}^2 + 15m_{b_z}^2 [c(a - 2p) + \\
 & \dots \\
 & + 3p^2] . \tag{6.28}
 \end{aligned}$$

В случае обработки снимков, имеющих 60 %-ное продольное перекрытие, при  $c = p, a = 0$  получим

$$\begin{aligned}
 (m_p)_{P_x = 60\%} &= \frac{1}{3\sqrt{5}f} \sqrt{45f^2 m_{b_x}^2 + 18p^4 m_a^2 + 10p^4 m_{\omega}^2 +} \\
 & \dots \\
 & + 30p^2 f^2 m_{\kappa}^2 + 15p^2 m_{b_z}^2 . \tag{6.29}
 \end{aligned}$$

При  $P_x = 80\%$ ,  $a = p, c = 2p$

$$\begin{aligned}
 (m_p)_{P_x = 80\%} &= \frac{1}{3\sqrt{5}f} \sqrt{45f^2 m_{b_x}^2 + 153p^4 m_a^2 +} \\
 & \dots \\
 & + 100p^4 m_{\omega}^2 + 120p^2 f^2 m_{\kappa}^2 + 15p^2 m_{b_z}^2 . \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

Из рассмотренной выше методики следует, что для ввода в обрабатывающий прибор необходимо измерить абсциссы координатных меток  $l$  (см. табл. 24) на левом и правом снимках, а также центров вращения обеих кассет.

Из оценки точности решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta x_{л,п} &= (\delta x_{л,п})_1 \frac{1}{n} ; \\
 \frac{l^2 x_{л,п}}{f} \delta \alpha_{л,п} + \Delta x_{л,п} &= (\delta x_{л,п})_2 \frac{1}{n} ,
 \end{aligned} \right\} \tag{6.31}$$

где  $n = \frac{D}{f_{пр}}$ ,  $D_{пр}$  – высота проектирования в масштабе модели;  $f_{пр}$  – фокусное расстояние прибора, получим

$$m_{\alpha} = \frac{f\sqrt{2}}{nl^2_x} m_x , \tag{6.32}$$

где  $m_x$  – средняя квадратическая погрешность измерения абсцисс с помощью установленных на приборе координатных счетчиков.

При вводе углов  $\omega_{\text{л}}$  и  $\omega_{\text{п}}$  в обрабатывающий прибор возникают погрешности, которые можно представить в виде системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta y + \frac{1}{n} \delta y_1 &= \vartheta_1; \\ \frac{l^2}{f} \delta \omega + \delta \Delta y + \frac{1}{n} \delta y_3 &= \vartheta_3; \\ \frac{l^2}{f} \delta \omega + \delta \Delta y + \frac{1}{n} \delta y_4 &= \vartheta_4. \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Решая систему (6.33) при условии  $[\vartheta \vartheta] = \min$ , получим значения весовых коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} Q_{\Delta y \Delta y} &= 1/n^2; \\ Q_{\omega \omega} &= \frac{3 f^2}{4 l^4 y n^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

и среднеквадратических погрешностей

$$\left. \begin{aligned} m_{\Delta y} &= m_y/n; \\ m_{\omega} &= \frac{f\sqrt{3}}{2l^2 y n} m_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Аналогично получим

$$m_{\kappa} = \frac{m_x}{l_y \sqrt{2} n}. \quad (6.36)$$

Среднюю квадратическую ошибку ввода в обрабатывающий прибор элемента  $b_z$  можно найти из формулы

$$m_{b_z} = \frac{f_{\text{пр}}}{l_y} m_y. \quad (6.37)$$

Нетрудно также доказать, что

$$m_{b_x} = \frac{m_x \sqrt{2}}{n}. \quad (6.38)$$

Подставив значения формул (6.32)–(6.38) в (6.26) и приняв  $l_x = l_y = l$ ,  $m_x = m_y = m_{x,y}$ , окончательно получим

$$(m_{p^0})_{P_x = 60\%} = \frac{1}{3\sqrt{5}n} \sqrt{90 + 51 \frac{p^4}{l^4} + 15 \frac{p^2}{l^2} + 15 \frac{p^2 n^2}{l^2}} m_{x,y}; \quad (6.39)$$

$$(m_{p^0})_{P_x = 80\%} = \frac{1}{3\sqrt{5}n} \sqrt{90 + 456 \frac{p^4}{l^4} + 60 \frac{p^2}{l^2} + 15 \frac{p^2 n^2}{l^2}} m_{x,y}; \quad (6.40)$$

Учитывая, что  $l = 85$  мм, получим

$$(m_{p^0})_{P_x = 60\%} = \frac{1}{6,7n} \sqrt{124 + 10n^2} m_{x,y}; \quad (6.41)$$

$$(m_{p^0})_{P_x = 80\%} = \frac{1}{6,7n} \sqrt{113 + 2,5n^2} m_{x,y}; \quad (6.42)$$

Полученные формулы (6.41), (6.42) позволяют предвычислить ожидаемую среднюю квадратическую ошибку продольного параллакса геометрической модели, построенной по установочным данным. Например, при обработке снимков на СЦ-1 при  $l = 85$  мм,  $n = 1,42$  получим для  $P_x = 60$  и  $80\%$  соответственно

$$m_{p^0} = 1,26 m_{x,y}; \quad (6.43)$$

$$m_{p^0} = 1,11 m_{x,y}; \quad (6.44)$$

Если геометрическая модель будет восстанавливаться обычным путем, то по формулам (6.26) и (6.27) при  $m_p = m_q$  получим для  $P_x = 60\%$ ,  $p = f$

$$m_{p^0} = \sqrt{m_{p_{\text{во}}}^2 + m_{p_{\text{го}}}^2} = 0,98 m_p; \quad (6.45)$$

для  $P_x = 80\%$ ,  $p = \frac{1}{2}f$

$$m_{p^0} = 0,67 m_p. \quad (6.46)$$

Таким образом, сравнивая выражения (6.43) с (6.45), (6.44) с (6.46), можно сделать вывод о том, что построение модели по установочным данным без корректировки элементов ориентирования по опорным точкам уступает по точности построению модели по обычной методике.

Рассмотрим способ обработки снимков по установочным данным, когда элементы ориентирования корректируют по опорным точкам на заключительном этапе геодезического ориентирования модели.

Для определения средней квадратической ошибки продольного параллакса для всей стереопары из-за погрешностей ввода угловых элементов

ориентирования снимков, влияние которых не может быть полностью компенсировано при геодезическом ориентировании модели, воспользуемся формулой (5.16), которую представим в параллактическом виде

$$m_{p_{\text{во}}} = \frac{1}{f} \sqrt{y^2 (x_{\text{п}} + \frac{1}{2}c) m_{\omega}^2 + (x_{\text{п}} - a)^2 (x_{\text{п}} + c)^2 m_a^2}. \quad (6.47)$$

После интегрирования и подстановки пределов, а также с учетом формул (6.32) и (6.35) получим

$$m_{p_{\text{во}}} \approx \frac{c^2}{nl^2} \sqrt{\frac{1}{48} + \frac{6c^2 + 10ac - 5p(2a + c)}{21}} m_{x,y}. \quad (6.48)$$

Для  $P_x = 60\%$  при  $p = c = 70$  мм,  $l = 85$  мм,  $a = 0$ ,  $n = 1,42$

$$(m_{p_{\text{во}}})_{P_x = 60\%} = 0,12 m_{x,y}; \quad (6.49)$$

для  $P_x = 80\%$  при  $a = p = 35$  мм,  $c = 70$  мм,  $l = 85$  мм,  $n = 1,42$

$$(m_{p_{\text{во}}})_{P_x = 80\%} = 0,12 m_{x,y}. \quad (6.50)$$

Расчеты этих же погрешностей для случая, когда построение модели выполняется по обычной методике, приводят к следующим результатам:

$$(m_{p_{\text{во}}})_{P_x = 60\%} = 0,24 m_q; \quad (6.51)$$

$$(m_{p_{\text{во}}})_{P_x = 80\%} = 0,33 m_q. \quad (6.52)$$

Учитывая, что точность горизонтирования модели в обоих случаях будет одинаковой, получим суммарные погрешности построения геодезически ориентированной модели по формуле

$$M_p = \sqrt{m_{p_{\text{во}}}^2 + m_{p_{\text{го}}}^2}. \quad (6.53)$$

Для случая обработки снимков по установочным данным

$$(M_p)_{P_x = 60\%} = \sqrt{(0,12 m_{x,y})^2 + (0,95 \frac{p}{f})^2 m_p^2}; \quad (6.54)$$

$$(M_p)_{P_x = 80\%} = \sqrt{(0,12 m_{x,y})^2 + (0,63 \frac{p}{f})^2 m_p^2}. \quad (6.55)$$

Если построение модели выполняется по общепринятой методике, то

$$(M_p)_{P_x = 60\%} = \sqrt{(0,23 m_q)^2 + (0,95 \frac{p}{f})^2 m_p^2}; \quad (6.56)$$

$$(M_p)_{P_x} = 80 \% = \sqrt{(0,33 m_q)^2 + (0,63 \frac{p}{f})^2 m_p^2}. \quad (6.57)$$

Если положить  $m_p = m_q = \frac{m_{x,y}}{\sqrt{2}}$ , получим при  $f = 70$  мм: 1) по установочным данным

$$(M_p)_{P_x} = 60 \% = 0,96 m_p, \quad (6.58)$$

$$(M_p)_{P_x} = 80 \% = 0,35 m_p; \quad (6.59)$$

2) по обычной методике

$$(M_p)_{P_x} = 60 \% = 0,96 m_p, \quad (6.60)$$

$$(M_p)_{P_x} = 80 \% = 0,45 m_p. \quad (6.61)$$

Как видно из полученных результатов, точность построения геодезически ориентированной модели по снимкам, имеющим 60 %-ное продольное перекрытие, с использованием и без использования установочных данных остается одинаковой.

Точность построения модели по снимкам с 80 %-ным продольным перекрытием по установочным данным на 20 % выше, чем при построении модели по обычной методике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амромин П.Д., Андоленко В.И. Фотограмметрическая калибровка снимков при изучении динамических процессов. – В кн.: Стереофотограмметрическая съемка инженерных взрывов. М.: ВАГО при АН СССР, 1977, с. 96–105.
2. Антипов И.Т., Башкова Т.А. Определение элементов внешнего ориентирования одиночных снимков и стереопар. – Изв. вузов: Геодезия и аэрофотосъемка, 1981, № 1, с. 87–94.
3. Антипов И.Т., Гончаров А.П. Математическая трактовка задачи калибровки АФА по снимкам испытательного полигона. Тр. НИИГАиК, XXXV, 1974, с. 39–49.
4. Аржанов Е.П., Ильин В.Б. Аэрофотосъемочное оборудование. М.: Недра, 1972. 184 с.
5. Бобир Н.Я., Лобанов А.Н., Федорук Г.Д. Фотограмметрия. М.: Недра, 1974. 294 с.
6. Бруевич П.Н., Кириленко В.С., Лысков Г.А. Наземная фототопографическая съемка при инженерных изысканиях. М.: Недра, 1979. 254 с.
7. Васильев Л.Н. Экспериментальная оценка аэрофотоаппаратов при помощи съемки испытательного полигона. – Геодезия и картография, 1976, № 5, с. 25–31.
8. Васильев Л.Н. Корреляционный анализ поля снимка. – Геодезия и картография, 1976, № 9, с. 31–37.
9. Гонин Г.Б., Стрельников С.И., Яковлев Н.А. и др. Космическая фотосъемка и геологические исследования. Л.: Недра, 1975. 416 с.
10. Гончаров А.П. Точность решения обратной фотограмметрической засечки для одиночного снимка. Тр. НИИГАиК, т. XXXIII, 1974, с. 27–37.
11. Дробышев Ф.В. Исследования в стереофотограмметрии. М.: Недра, 1972. 121 с.
12. Дробышев Ф.В. Основы аэрофотосъемки и фотограмметрии. М.: Недра, 1973. 288 с.
13. Дубиновский В.Б., Гусаков И.Г., Пусачева Э.А. Калибровка аэрофотоаппаратов и фотоснимков. М.: ВИА, 1975. 60 с.
14. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. М.: Недра, 1976. 511 с.
15. Керн Х.Г., Ольбрих В. Опыт крупномасштабной топографической съемки городов. – Геодезия и картография, 1979, № 12, с. 41–46.
16. Киенко Ю.П. Аналитические методы определения координат в наземной стереофотограмметрии. М.: Недра, 1972. 136 с.
17. Кириленко В.С., Бруевич П.Н. Составление фронтальных планов и профилей по материалам фототеодолитной съемки. М.: Недра, 1970. 124 с.
18. Кислов В.В. Фотограмметрия. М.: Недра, 1979. 215 с.
19. Коншин М.Д. Ошибки аэроснимков и способы их учета при фотограмметрической обработке одиночных стереопар. – Тр. ЦНИИГАиК, 1977, вып. 217.
20. Коншин М.Д. Аэрофотограмметрия. М.: Недра, 1967. 348 с.
21. Красовский Ф.Н. Избранные сочинения. Т. IV. М.: Геодезиздат, 1955. 574 с.
22. Кучко А.С. Аэрофотография. М.: Недра, 1974. 272 с.
23. Лаврова Н.П., Стеценко А.Ф. Аэрофотосъемка. Аэрофотосъемочное оборудование. М.: Недра, 1981. 296 с.
24. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976. 928 с.
25. Лобанов А.Н., Дубиновский В.Б., Лысенко Ф.Ф. и др. Аналитические модели местности и снимков (макетные снимки). М.: Недра, 1973. 96 с.
26. Лобанов А.Н. Аэрофототопография. М.: Недра, 1978. 575 с.
27. Лобанов А.Н. Аналитическая фотограмметрия. М.: Недра, 1972. 224 с.
28. Лобанов А.Н., Овсянников Р.П., Дубиновский В.Б. и др. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины. М.: Недра, 1967. 292 с.

29. Лобанов А.Н., Чибуничев А.Г. Аналитическая обработка стереопар. М.: МИИГАиК, 1982. 50 с.
30. Лобанов А.Н., Кузнецова Ш.Е., Любомирский П.С. Аналитические методы фотограмметрии. — В сб.: Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка Т. 20. М.: ВИНТИ, 1982, с. 61—136.
31. Лысков Г.А., Лыскова К.М., Самсанов В.А. Прогнозирование "мертвых зон" при крупномасштабной стереотопографической съемке застроенных территорий. — В сб.: Геодезия и фотограмметрия. Ростов-на-Дону: РИСИ, 1982, с. 40—45.
32. Машимов М.М. Алгоритм преобразования координат на ЭЦВМ. — Сб.: Стандартные программы решения задач на ЭЦВМ "Урал-2". М.: ВИА, 1965.
33. Меррит Э.Л. Аналитическая фотограмметрия. Пер. с англ. Ф.Ф. Лысенко. М.: Геозиздат, 1961.
34. Могильный С.Г. Методика обработки аэрофотосъемки открытых горных работ. — В сб.: Фотограмметрия в горном деле. Свердловск, 1976, вып. 3, с. 31—39.
35. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1969. 304 с.
36. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. 296 с.
37. Нехин С.С. Исследование влияния дисторсии объектива на точность фотограмметрических определений координат. — Реферативный сб., № 52. М.: ОНТИ ЦНИИГАиК, 1977, с. 13—16.
38. Павлов В.И. Математическая обработка фотограмметрических измерений. Л.: Недра, 1976. 264 с.
39. Пеллинен Л.П. Высшая геодезия. М.: Недра, 1978. 264 с.
40. Перлов С.С. Об источниках погрешностей фотограмметрических координат. — В сб.: Методы инженерной геодезии и фотограмметрии в строительстве. Ростов-на-Дону: РИСИ, 1979, с. 24—34.
41. Портнова О.В. Исследование эффективности учета деформации аэропленки. — Реферативный сборник. М.: ОНТИ ЦНИИГАиК, 1971, № 13, с. 77—83.
42. Сердюков В.М. Фотограмметрия в промышленном и гражданском строительстве. М.: Недра, 1977. 245 с.
43. Соколова Н.А. Технология крупномасштабных аэрофотографических съемок. М.: Недра, 1973, 184 с.
44. Справочник геодезиста. Под ред. В.Д. Большакова и Г.П. Левчука. М.: Недра, 1975, 1056 с.
45. Тюфлин Ю.С. Способы стереофотограмметрической обработки снимков, полученных с подвижного базиса. М.: Недра, 1971, 169 с.
46. Финковский В.Я., Дорожинский А.А., Самсонов В.А., Тумская О.В., Любимов И.Н. Методы и алгоритмы создания цифровой модели рельефа для машинного проектирования мелиоративных систем. Львов. Вища школа, 1980, 200 с.
47. Шароватов Г.Л. Исключение влияния многосредности при подводном фотографировании. — Геодезия и картография, 1971, № 10, с. 57—61.

Введение . . . . .	4
Глава 1. Анализ на снимке искажений, вызываемых различными факторами . . . . .	4
§ 1. Построение изображения предмета . . . . .	4
§ 2. Принципиальная схема фотокамеры. Элементы внутреннего ориентирования и дисторсия . . . . .	9
§ 3. Искажение изображения, вызываемое несовпадением аэрофотопленки с плоскостью прикладной рамки. . . . .	11
§ 4. Рефракция оптических лучей в атмосфере и ее влияние на положение точек снимка. . . . .	14
§ 5. Разрешающая способность снимка. . . . .	26
§ 6. Учет деформации аэрофильма. . . . .	27
§ 7. Учет влияния многосредности и клиновидности светофильтра на положение точек снимка . . . . .	29
Глава 2. Системы координат. Анализ снимка . . . . .	32
§ 8. Системы координат, используемые в геодезии и фотограмметрии . . . . .	32
§ 9. Переход от координат в проекции Гаусса–Крюгера к фотограмметрической системе координат и обратно через геодезические координаты . . . . .	36
§ 10. Непосредственный переход от плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса–Крюгера и нормальных высот к пространственным прямоугольным координатам . . . . .	42
§ 11. Непосредственный переход от пространственных фотограмметрических координат к плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса–Крюгера и нормальным высотам. . . . .	48
§ 12. Элементы внешнего ориентирования . . . . .	52
§ 13. Зависимость между координатами соответственных точек снимка и местности . . . . .	53
§ 14. Определение длины отрезка на местности по его изображению на снимке. . . . .	62
§ 15. Связь между углами на снимке и местности . . . . .	68
§ 16. Масштаб снимка . . . . .	71
Глава 3. Определение элементов внутреннего и внешнего ориентирования и поправок в координаты точек снимка по опорным точкам . . . . .	75
§ 17. Совместное определение элементов внутреннего и внешнего ориентирования и поправок в координаты точек снимка по опорным точкам . . . . .	75
§ 18. Раздельное определение элементов внешнего ориентирования и поправок в координаты точек снимка по опорным точкам . . . . .	80
§ 19. Раздельное определение элементов внешнего ориентирования из сравнения отрезков на местности и их изображений на снимке . . . . .	93

Глава 4. Анализ точности определения элементов внешнего ориентирования по опорным точкам. . . . .	99
§ 20. Точность определения угловых элементов внешнего ориентирования . . . . .	99
§ 21. Точность определения линейных элементов внешнего ориентирования . . . . .	109
Глава 5. Анализ пары снимков . . . . .	118
§ 22. Координаты, параллаксы и элементы ориентирования пары снимков . . . . .	118
§ 23. Деформация геометрической модели местности . . . . .	132
§ 24. Точность определения высот и координат точек местности в одиночной модели. . . . .	137
§ 25. Выбор продольного перекрытия снимков при крупномасштабной аэрофототопографической съемке застроенных территорий. . . . .	144
Глава 6. Обработка снимков по установочным данным . . . . .	153
§ 26. Построение модели по установочным данным на универсальных приборах. . . . .	153
§ 27. Точность обработки снимков по установочным данным. . . . .	158
Список литературы . . . . .	166

55 коп.

10  
—  
/

4526

НЕДРА