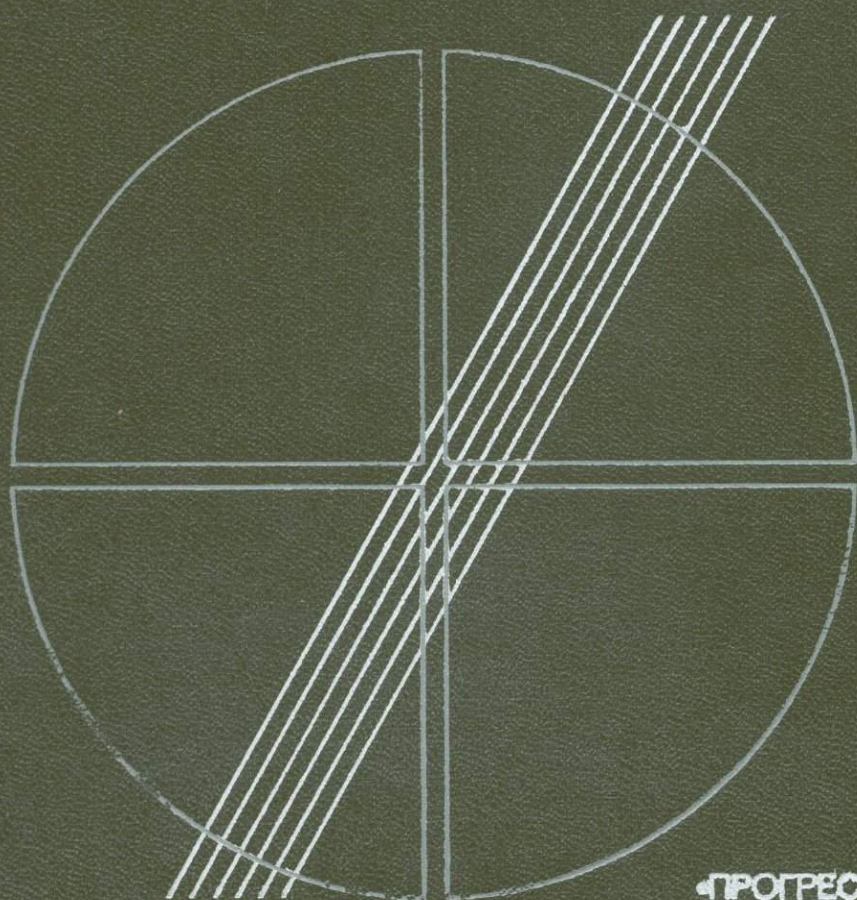


Самнер Г.

# Математика для географов



«ПРОГРЕСС»

# Mathematics for Physical Geographers

Graham N. Sumner

Edward Arnold  
London 1978

Самнер Г.

# Математика для географов

Перевод с английского И. М. ЗЕЙДИСА

Редакция и предисловие Ю. Г. СИМОНОВА



Москва

Издательство «Прогресс»

1981



3401

В настоящее время математические методы находят все большее применение в географических исследованиях.

В данной книге в доступной и ясной форме излагаются сведения по различным областям математики. Наряду с широко известными статистическими методами рассматриваются элементы линейной алгебры (векторы и матрицы), дифференциального и интегрального исчисления, разложение функций в ряды, дифференциальные уравнения. Даются примеры использования этих дисциплин при решении конкретных географических задач. В книге имеется много упражнений, решение которых помогает лучшему усвоению материала.

Рекомендуется для географов всех специальностей, а также для геологов и биологов.

*Редакция литературы по географии*

© Graham N. Sumner, 1978

© Перевод на русский язык, предисловие, примечания, издательство «Прогресс», 1981

С 20901—370  
006(01)—81 60—81

1905010000

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Г. Самнера «Математика для географов» представляет интерес для советского читателя как специально адресованное учебное пособие, написанное не математиком, а географом и для географов. В этом основная особенность и главное достоинство книги. Но невольно встает вопрос: существует ли какая-то особая математика для географов, и если да, то чем она отличается от математики вообще (математики для математиков), от математики для историков и филологов и т. д.? Ответ читатель найдет ниже, в нашем описании характерных черт книги, касающихся ее содержания, стиля, композиции. Однако прежде несколько замечаний относительно общей проблемы соотношения двух наук при проникновении одной из них в другую.

Как известно, математика, став методом исследования для ряда наук, способствовала решению многих трудных задач, считавшихся ранее нематематическими. Это оказалось возможным лишь при наличии современных вычислительных машин с их огромной памятью и значительным быстродействием. Решение таких задач, разумеется, — это очевидный успех и самой математики, и нематематических дисциплин. Естественно, что в процессе внедрения математики в науки, весьма от нее далекие, одинаково важную роль должны играть и математики, и представители «математизирующихся научных дисциплин».

Однако географу надлежит всегда помнить, и Г. Самнер неоднократно пишет об этом, что изучение математики для географов не может быть самоцелью и что географы должны рассматривать математику в качестве помощницы в своей работе и как средство дальнейшего развития своей науки.

Предназначенность книги для географов обусловила некоторые особенности ее структуры и авторской манеры изложения материала. Математика для географов должна быть прежде всего доступной географам. Читателю, прошедшему полный курс математики, книга Г. Самнера может показаться лишенной привычной строгой

формы изложения математического материала. Однако такая «адаптация» совершенно необходима для успешного восприятия текста специалистами — географами, так как географическое мышление имеет свои особенности и отличается от математического мышления, которое географам кажется нередко абстрактным, отвлеченным от реального мира. По этой же причине в книге наряду с математическим материалом приводятся еще и некоторые географические сведения.

Далее читатель, несомненно, заметит и необычную композицию книги, а точнее, имеющиеся в ней отклонения от стандартов в последовательности изложения математического материала. Так, например, в главе 3 довольно неожиданно описываются вместе тригонометрические отношения и векторы. Ряды рассматриваются как совместно с арифметической и геометрической прогрессиями, так и с интегрированием (главы 6 и 8). Вообще в книге часто разделы, с которыми учащиеся знакомятся в средней школе, сочетаются с разделами, преподающимися в высших учебных заведениях.

При подборе материала и расстановке акцентов Г. Самнер идет также не стандартным путем. Известно, что в процессе математизации географии наиболее просто в нее вошла элементарная математическая статистика. Это можно видеть, в частности, по числу публикаций. Количество статей, в которых использован аппарат математической статистики, в общем объеме «математизированной» географической литературы заметно преобладает по сравнению с публикациями, где использован иной математический аппарат. Это объясняется не только тем, что сам аппарат корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализов опирается на простую и известную базу средней школы. Имеются еще по крайней мере две основные причины. Во-первых, традиционные географические описания при стандартизации легко сводятся в таблицы и полученный обширный фактический материал легко «свертывается» с помощью статистического анализа. Операции сравнения, выявления сходства и различий между объектами при создании классификаций или при районировании (традиционные географические задачи) также в значительной мере опираются на приемы, вытекающие из статистических описаний. Во-вторых, анализ взаимных связей между факторами, определяющими структуру географических объектов, между состояниями объектов и процессами их развития может как будто бы опираться на выявление корреляций. Эта точка зрения так прочно вошла в географический анализ, что уже пора предупреждать начинающих математизироваться географов о том, что физические связи типа «причина — следствие» далеко не всегда могут быть выявлены с помощью статистического анализа. Словом, статистика заняла уже более или менее прочное место в географических исследованиях, в то время как другие разделы математики осваиваются географией значительно медленнее. И видимо, по этой причине в книге Г. Самнера,

вопреки обыкновению, статистическим вопросам анализа географических объектов уделено меньше места. Повлияло, вероятно, и то, что по применению статистических методов в географии и смежных науках за рубежом имеется большое число учебных пособий, как, впрочем, и у нас в Советском Союзе.

Несколько слов о содержании отдельных глав книги.

В главе 1 изложены основные сведения об алгебраических операциях, рациональных и иррациональных числах, системах счисления, приближенных вычислениях. В отношении этой главы Г. Самнер пишет, что не собирается приносить извинений по поводу ее включения в книгу, поскольку по своему опыту знает, что очень многие студенты имеют весьма туманные представления по излагаемому предмету. Присоединяясь к точке зрения автора, скажем, что действительно многое из школьного курса математики с годами забывается и поэтому повторение некоторых простых ее разделов является необходимым условием успешного усвоения последующего материала.

Глава 2 посвящена тригонометрии и векторам. Она как бы продолжает первую главу в том смысле, что также создает фундамент для последующего изложения и повторяет материал средней школы. Однако уже при описании векторов и операций с ними материал дается нетрадиционно. Он как бы нацелен на пространственный анализ географических процессов и классификаций, что хорошо видно и при геометрической интерпретации операций над векторами, и при последующем увязывании их с компонентным анализом. Такой подход направлен на облегчение восприятия идей, заложенных в анализе главных компонент и в факторном анализе, которые в географии широко используются. Эта мысль становится более отчетливой, если рассмотреть положение объектов в многомерном пространстве параметров.

Глава 3 посвящена линейным функциям. Она как бы расширяет содержание первой главы. Большое число географических примеров помогает лучшему усвоению материала. Очень важным является раздел 3.4, перебрасывающий мостик между функциями и статистическим анализом. Автор книги как бы подготавливает читателя к более полному восприятию аппарата статистики (который он не рассматривает) через лучшее знание свойств функций.

В главе 4 даются основные понятия матричного исчисления и описываются операции над матрицами — их сложение, умножение, транспонирование, нахождение обратной матрицы, вычисление определителя. Это очень нужный для решения ряда географических задач раздел математики. Обычно его преподают в курсах линейной алгебры, поэтому в принятых курсах математической подготовки географов он опущен. На самом же деле этот раздел совершенно необходим, поскольку с помощью алгебры матриц обычные географические описания (по существу, многомерные)

переводятся на формализованный язык, доступный дальнейшей математической обработке.

Глава 5 посвящена исследованию нелинейных функций: степенных, тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных и логарифмических. Здесь же вводится понятие производной, с помощью которой изучаются свойства отдельных функций и их комбинации. Глава содержит большое количество полезных сведений, совершенно обязательных для географа, работающего с массивами чисел и пытающегося устанавливать взаимосвязи между ними. Быть может, здесь недостает раздела, который показывал бы, что связи между свойствами объектов, обнаруженные при тех или иных измерениях, могут быть описаны различными способами. Географам чрезвычайно полезно было бы знать, например, что одна и та же связь между двумя параметрами, которая графически показана некоторым способом, аналитически (то есть в виде функции) может быть описана целым множеством уравнений. Это могут быть и полином, и экспонента, и сумма синусов и косинусов, и многие другие функции. Иными словами, один и тот же процесс или свойство объекта могут иметь множество видов математических описаний, каждое из которых будет в математическом смысле вполне правомерным.

Глава 6 содержит описание свойств арифметической и геометрической прогрессий, которое далее подготавливает читателя к восприятию определенных операций с функциями с помощью их разложения в ряды. Эта глава как бы продолжает наращивать знания по высшей математике, опираясь на фундамент, заложенный еще в средней школе. Она наряду с другими главами развивает у читателя вычислительные навыки.

Глава 7 посвящена описанию и анализу вероятностей. Автор знакомит читателя с понятиями о вероятностях событий, вводит представление о вероятностном пространстве, которое связывает теорию множеств с теорией вероятностей. Здесь же даются сведения о цепях Маркова, описываются различные виды распределения вероятностей. Из всего арсенала теоретических кривых распределений Г. Самнер останавливается на биномиальном, Пуассона, нормальном, Пирсона, логнормальном и гамма-распределениях; кроме того, описываются свойства распределений экстремальных величин по Гумбелю.

Глава 8 посвящена интегрированию. Представляется интересным включение в нее раздела, связанного с разложением функций в ряд Фурье, этого важного аппарата современного гармонического анализа. Глава кратко знакомит читателя с разделом, который в обычном курсе математического анализа бывает особенно труден для усвоения. Здесь содержится материал, способствующий развитию вычислительных навыков, и описываются две области приложения: во-первых, вычисление площадей и объемов, находя-

дение центров тяжести и моментов инерции и, во-вторых, гармонический анализ.

Глава 9 посвящена элементарным дифференциальным уравнениям. Ее включение в книгу целесообразно потому, что география и все ее отрасли внимательно изучают и описывают процессы, протекающие в сложных природных и природно-хозяйственных системах. Отсюда очевидно, что овладение географами арсеналом средств решения дифференциальных уравнений просто необходимо. В этой главе Г. Самнер знакомит читателя с основными обыкновенными дифференциальными уравнениями, кратко останавливается на уравнениях в частных производных и системах дифференциальных уравнений. Главное внимание уделено вычислительным процедурам. Следует думать, что краткость изложения и та быстрота, с которой автор продвигается вперед, предполагают, что читатель хорошо усвоил весь предыдущий материал. Вероятно, начинающие математизироваться географы в этой заключительной главе столкнутся со значительными трудностями. Может быть, для полноты этого раздела необходимо было бы более подробно остановиться на приемах составления дифференциальных уравнений.

После краткого заключения в тексте помещены пять приложений, имеющих полезный справочный характер. В каждой главе имеется достаточно много упражнений, которые хорошо продуманы и способствуют усвоению материала книги. При переводе все упражнения были проверены и замеченные ошибки устранены. В книге содержится большое число ссылок на литературу, значительная часть которой недоступна советскому читателю. Поэтому мы предлагаем дополнительный список опубликованных на русском языке учебников и учебных пособий.

В английском варианте Г. Самнер сужает круг читателей, которым он адресует книгу, называя ее «Математикой для физико-географов». Но сам автор в силу целого ряда причин вынужден нередко обращаться к примерам из экономической географии, которая располагает более обширной статистикой, а в решении научных и практических задач с помощью математического аппарата имеет большую историю по сравнению с физической географией. Г. Самнер отмечает близость подходов к использованию математического аппарата между этими двумя основными ветвями географической науки. Он пишет: «Нельзя сказать, что тем, кто занимается экономической географией, следует игнорировать эту книгу. Математические требования к экономико-географам столь же велики, и области математики, знакомство с которыми им необходимо, совпадают с теми, какие необходимо знать физико-географам». По словам автора, его вариант названия обусловлен его собственными научными интересами и потребностью физической географии в учебниках по математике. Учитывая это, редакция, подготавливая русское издание книги, сочла возможным изменить

ее название в целях расширения аудитории возможных читателей. В то же время вступительный и заключительный разделы книги, в которых Г. Самнер обращается преимущественно к физико-географам, оставлены в авторском изложении. Думается, что наряду с географами всех специальностей в этой книге найдут много полезного и интересного биологи и геологи или по крайней мере те из них, которые делают первые шаги в области математизации своих знаний.

В Советском Союзе процесс математизации географии протекает довольно успешно. Этому способствовали и специальные школы-семинары по математике для географов, и всесоюзные совещания по количественным методам исследования, и тесное сотрудничество с математиками. Вопросы, связывающие математику с проблемами географии, рассматриваются во многих публикациях и на общегеографических форумах. Но естественно, что процесс математизации не всегда протекает достаточно быстро и гладко. Среди нерешенных проблем и та, как наилучшим образом преподавать математику для географов. Здесь имеются как бы две составляющие обучения — научить читать и понимать содержание математических описаний и научить проводить вычисления, то есть решать поставленные задачи. Современное обучение географов математике бывает чаще направлено на достижение второй цели. Книгу Г. Самнера в решении всей проблемы можно рассматривать как один из возможных подходов с уклоном в область вычислений.

Перед современной географией стоят сложные научные проблемы по составлению прогнозов результатов хозяйственной деятельности человека, по созданию региональных и отраслевых банков географических данных, по автоматизации исследований и обработке больших объемов дистанционных измерений состояния природных ресурсов Земли, по автоматизации составления карт и многие другие. В решении этих проблем надежными помощниками географов будут математика и математики. И именно поэтому так важно, чтобы географы в наше время умели понимать их язык и их образ мышления.

**Ю. Г. СИМОНОВ,**  
*доктор географических наук,*  
*профессор*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Математические методы исследования являются важной составной частью научного метода познания. Физическая география, как и прочие естественные науки, стремится осуществить анализ наблюдаемых в природе зависимостей и вывести статистические или другие научные законы, которые в дальнейшем можно было бы использовать для предсказания аналогичных явлений либо их исходов в будущем. По преимуществу физическая география имеет дело с процессами, причинами, их вызывающими, а также со скоростью, с какой протекают эти процессы. Результаты полевых или лабораторных экспериментов, поставленных с целью нахождения зависимостей и возможного преобразования их в научные законы, позволяют предугадывать последствия прогнозируемых явлений лишь с некоторой степенью точности. На помощь приходит математика, которая представляет собой тот универсальный аппарат, с помощью которого можно объективно описать выявленные зависимости и тем самым получить возможность составить верный прогноз. В физической географии часто складывается ситуация, когда мы не можем быть абсолютно уверенными в достоверности нашего прогноза, ибо он сам зависит от действия статистических законов, которые в свою очередь излагаются на языке математики. Отсюда очевидно, что использование и понимание математики становится твердым фундаментом решения многих задач физической географии, если, разумеется, рассматривать ее как «точную» науку.

Весьма важное место в физико-географических исследованиях занимает статистика. В физической географии нам редко удается установить однозначные зависимости между двумя параметрами: в наблюдения очень часто вкрадывается слишком много «шума», что делает выявленную связь малоприменимой для целей прогнозирования. Этот шум происходит как по причине влияния других параметров, внешних по отношению к изучаемым, так и из-за инструментальных ошибок и неточности натуральных измерений. Но наша книга не является учебником по статистике, и поэтому, когда мы, например, обращаем внимание читателя к *функциям* (главы 3 и 5), представляющим собой математические выражения зависимости между переменными величинами, то мы неизбежно предполагаем

ем его некоторую осведомленность в области статистических методов и понятий. Читатель, совершенно не знакомый с основами статистики, может почерпнуть необходимые сведения из Приложения 5 нашей книги или же обратиться к соответствующим фундаментальным учебникам.

Наиболее важными в данной книге представляются, по-видимому, главы 3 и 5. Правильный выбор математической функции для описания наблюдаемых связей — это более чем половина успеха при создании математической модели изучаемого явления. Однажды выбрав функцию, мы можем исследовать скорости изменения одного параметра по отношению к другому с помощью *производной* функции (глава 5), а в дальнейшем также выразить совокупный эффект влияния одного параметра на другой, беря *интеграл* функции (глава 8). Однако, как уже указывалось, выявленные взаимосвязи часто бывают не полностью определены, и, следовательно, знание теории вероятностей превращается в то главное звено математического образования, без которого физико-географу трудно обойтись. С этим аспектом читатель столкнется в главе 7.

Очень часто физико-географы бывают заинтересованы в моделировании целостных природных *систем*. Среди упоминаемых в географической литературе последних лет наиболее известны экосистемы и гидрологические циклы. Мы можем, например, исследовать процесс прохождения воды через речной бассейн. Атмосферные осадки, выпавшие на территорию водосбора, означают собой вход в систему. Эта вода пройдет через речной бассейн различными путями — в виде руслового потока либо как подземный или поверхностный сток. Каждой форме движения присуща своя скорость: от очень высокой (сток реки) до очень незначительной (движение влаги в почве), и каждая форма представляет собой конечный результат взаимодействия различных процессов. Вся вода в конце концов покидает бассейн путем испарения, транспирации, через потери на подземный сток или просто излившись через устье реки в море. Можно математически описать перемещение воды в границах изучаемой системы. Мы знаем, что за конечный промежуток времени количество воды на входе в систему должно равняться количеству воды на выходе, в противном случае будет наблюдаться постепенное обводнение или осушение территории бассейна. Мы сталкиваемся здесь с функцией, отдельные элементы которой описывают вклад различных процессов: инфильтрации, открытого руслового течения и т. д. Все эти процессы выражаются через скорости течения воды и записываются в виде *дифференциального уравнения* очень простого типа. Способы решения дифференциальных уравнений рассматриваются в последней, девятой главе книги. Изучение речного бассейна, несомненно, влечет за собой обращение к понятию пространственной изменчивости. Графическое изображение того, как явление разворачивается в пространстве, не является сложной математической задачей. Расширение понятия ко-

ординат точек (глава 1) через динамическое пространство (движение) к векторам (глава 2) приводит далее к понятию матриц (глава 4), еще одной важной для математического образования географов области математики.

Конечно, физическая география как наука опирается не только на математику. Использование законов физики и химии здесь одинаково важно. В то же время математика является существенной составной частью физики и химии и всех других связанных с ними дисциплин. На всем протяжении этой книги мы будем отсылать читателя к книге Д. А. Дэвидсона «Наука для физико-географов» (*Science for Physical Geographers by D. A. Davidson*)<sup>1</sup>. Обе книги дополняют друг друга и преследуют цель преподать полный объем физической географии выпускникам географических факультетов, которые получают в основном гуманитарное образование и многие из которых, по-видимому, скорее не могут преодолеть некий психологический «барьер» в отношении точных наук и математики, нежели имеют врожденную неспособность понять суть этих дисциплин. Математика не более трудна для усвоения, чем иностранный язык. Приобрести математическую квалификацию вполне возможно так же, как и научиться бегло говорить по-немецки или даже по-уэльски. Различные степени знания достигаются постепенно на пути от самых азов через элементарные конструкции к наиболее труднодостижимым.

Эта книга не претендует на особую сложность. Она начинается с изложения общих принципов математики и заканчивается введением в более сложные ее области, такие, например, как интегральное исчисление и решение дифференциальных уравнений (главы 8 и 9). Если эти две последние главы можно оценивать как некий верхний уровень математических знаний, к достижению которого следует стремиться географам, то содержание семи предыдущих глав сегодняшний выпускник географического факультета должен рассматривать как необходимый для себя *рабочий минимум*. Обратим внимание читателя также на то, что в первой главе книги излагаются основы арифметики, обычно изучаемые в средней школе. Но автор вовсе не собирается приносить извинения по поводу включения этой главы в текст книги, так как по опыту знает, что очень многие студенты имеют весьма туманные представления по данному предмету. Каждая последующая глава строится на основе предыдущей, причем для иллюстрации вариантов использования того или другого метода даются примеры из физической географии, хотя, повторяем, основная цель книги состоит прежде всего в том, чтобы привить читателям математические навыки. Книга предназначена для студентов, желающих специализироваться в физической географии. Но нельзя сказать,

<sup>1</sup> Советскому читателю мы рекомендовали бы воспользоваться книгой: К. К. Марков, О. П. Добродеев, Ю. Г. Симонов, И. А. Суетова, 1978: Введение в физическую географию. М., «Высшая школа». — *Прим. ред.*

что тем, кто занимается экономической географией, следует игнорировать эту книгу. Математические требования к экономико-географам столь же велики, и области математики, знакомство с которыми им необходимо, совпадают с теми, какие необходимо знать физико-географам. Название этой книги обусловлено лишь собственными научными интересами автора и потребностью физической географии в учебниках по математике.

В каждой главе имеются задачи, ответы на большинство которых приводятся в конце книги. Решение задач — залог успеха в познании математики. Попытка решить все задачи потребует от читателя больших усилий и тщательной работы над ними. Если получен неправильный ответ, то особенно важно найти причину ошибки, ибо, как гласит пословица, «на ошибках учатся».

Автор надеется, что книга удовлетворит спрос географов на учебники по основам высшей математики. От читателя не требуется каких-либо начальных математических знаний, не предполагается даже, что он изучил обычный курс математики, хотя подавляющее число студентов прослушало такой курс. Тем, кому постижение основ математики необходимо как вспомогательное средство при изучении географии, эта книга пригодится в качестве учебного пособия, с которым надлежит работать систематически. Тем же, кто, возможно, прошел курс математики повышенного уровня, мы должны принести извинения за, быть может, излишне подробное, на их взгляд, изложение материала, но мы надеемся, что и они извлекут пользу из чтения этой книги, хотя бы уж ту, что освежат свою память. Тем и другим полное понимание содержания книги позволит в дальнейшем свободно читать основную массу научных публикаций по географии, и возможно, они будут ловить себя первое время на той мысли, что математические формулы и функции, содержащиеся в этих работах, выражают их сущность гораздо более емко, чем соседствующий с ними словесный текст.

В заключение автор приносит благодарность своему терпеливому научному консультанту д-ру Маурину Джонсу за критическое прочтение ранних вариантов этой книги; мисс Анджелле Биенел и мистеру Филлу Венью, бакалавру гуманитарных наук, которые, будучи еще студентами, убедили автора в том, что книга окажется полезной тем, кому она предназначена; д-ру Д. А. Дэвидсону, который выдвинул множество идей, послуживших толчком к написанию данной книги.

Автор и издатели выражают также свою признательность следующим лицам и организациям за разрешение воспроизвести или использовать в измененном виде принадлежащие им материалы: «W. H. Freeman and Co» (рис. 5.12), Лондонскому геологическому обществу (рис. 5.16), Издательству Кембриджского университета (таблицы в Приложениях 3 и 4).

*Грэхем Н. Самнер*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА

Традиционное деление элементарной математики на арифметику, алгебру и геометрию по-прежнему представляет главную основу, на которой строится математическая практика. В математике неуклонно расширяется сфера применения различных дисциплин, таких, как дифференциальное и интегральное исчисление (главы 5 и 8 этой книги), векторная алгебра (глава 2) и исследование функций (главы 3 и 5), которые вышли из области исключительно чистой математики и через другие точные науки проникли в географию и сейчас образуют в ней важное средство исследовательской работы и важный аспект процесса обучения. В итоге для решения какой-либо проблемы науки с помощью математики мы имеем ряд путей. Однако в конечном счете вся математика сводится на нескольких очень простых правилах, которые управляют всеми основными арифметическими, алгебраическими и геометрическими операциями. Числа в арифметике, используемые в качестве символов буквы английского или греческого алфавитов в алгебре (см. Приложение 1), пространство с введенной в нем метрикой в геометрии (раздел 2.8.) — вот главные конструктивные блоки математики. Мы строго различаем, что следует иметь в виду под числом и количеством, но нам, кроме этого, нужны средства, с помощью которых мы могли бы обращаться с этими понятиями. Способ, избираемый нами для этого, обозначается с помощью символов, он должен быть тщательно сформулирован и осмыслен, если мы хотим жестко очертить границы области, в которой нам предстоит работать.

В самом общем смысле математика немного похожа на музыку и литературу, язык которых также состоит из символов со строго фиксированными значениями. Мелодия симфонии просто отображается на бумаге при помощи символов, указывающих время звучания каждой ноты, и графических знаков, положение которых на нотной линейке определяет высоту звука, причем здесь прослеживается аналогия с осью координат (раздел 1.8). Слова литературного

произведения и буквы, из которых эти слова состоят, выполняют ту же функцию, а грамматика имеет ярко выраженную параллель с гармонией в музыке. Правила, существующие в математике, накладываются друг на друга весьма определенным образом, так что возникает очень жесткая и действенная структура. Числа в математике (раздел 1.3) играют такую же роль, как ноты в музыке или буквы в алфавите и слова. Какие манипуляции можно производить с числами, указывается посредством аббревиатур, общих для всех областей математики. Хотя правила использования сокращенной записи математических операций просты, мы тем не менее можем с их помощью выразить весьма сложные, а часто и абстрактные понятия. Так, например, относительно трудная процедура решения дифференциальных уравнений, изложенная в главе 9, очень близка правилам, излагаемым в данной главе, подобно тому, как музыка десятой симфонии Шостаковича, несмотря на все ее разнообразное звучание, управляется одной тональностью, в которой написана симфония, — ми минор.

## 1.1 Операции

Символы, используемые для обозначения действия в математике, делятся на два обширных класса: те, которые *информируют*, такие, например, как «=», обозначающие равенство величин двух предметов, и те которые *инструктируют*, такие, как «+» и «-», являющиеся *операторами*. В пределах первого класса обычно используются следующие символы:

- = равно
- ≠ не равно
- ≡ тождественно равно
- ~ пропорционально, изменяется как
- < меньше ( $\leq$  меньше или равно)
- $\sum$  больше ( $\geq$  больше или равно)
- $\nless$  не меньше
- $\nless$  не больше
- $\approx$  или  $\simeq$  или  $\doteq$  приближенно равно

Большинство символов второго класса хорошо знакомы всем читателям: +, -,  $\times$ , : (сложение, вычитание, умножение и деление), хотя употребляются и другие символы, что часто приводит к путанице. Другими обозначениями действий умножения или деления двух величин  $a$  и  $b$  могут быть:

$a$  умноженное на  $b$  представляется как  $a \times b$ , или  $a \cdot b$ , или  $ab$   
 $a$  деленное на  $b$  как  $a : b$ , или  $\frac{a}{b}$  или  $a/b$ , или  $ab^{-1}$ .

В соответствии с международной системой единиц измерения СИ (National Physical Laboratory, 1970)<sup>1</sup>, запись  $ab$ ,  $a/b$  или  $ab^{-1}$  предпочтительнее. Как мы увидим в главе 2, точку для указания действия умножения можно использовать только при скалярном умножении векторов. Другие символы будут введены в текст по мере надобности в последующих главах. Существуют, однако, два весьма нужных обозначения, не вошедшие ни в тот, ни в другой классы, но часто используемые в математике; это символ  $\therefore$ , означающий «следовательно», и более редко употребляемый символ  $\because$ , означающий «потому что».

## 1.2 Порядок вычисления

Если при вычислении производится несколько операций, порядок их выполнения может влиять на результат. При вычислениях типа  $a + bc/d$  умножение и деление предшествуют сложению и вычитанию, то есть выражение  $bc/d$  вычисляется в первую очередь, а полученный результат складывается с  $a$  (но не  $a$  складывается с  $bc$ , с последующим делением суммы на  $d$ ). Если необходимо изменить задаваемый порядок операций, то употребляются скобки, заключающие в себе операцию, которая подлежит выполнению прежде других. Следовательно, если мы напишем  $(a + b)c/d$ , то это означает, что величина  $a$  должна быть сложена с  $b$ , а сумма затем умножена на  $c/d$ . Результат в каждом из двух случаев будет различен. Например, если  $a = 2$ ,  $b = 6$ ,  $c = 1$  и  $d = 4$ , то

$$\begin{aligned} a + bc/d &= 2 + 6/4 = 3,5 \\ (a + b)c/d &= (2 + 6)1/4 = 2,0. \end{aligned}$$

Особенно важно помнить об этих правилах при работе с компьютерами.

Скобки применяются также в *распределительном законе для умножения*. Например, выражение

$$ac + ad + bc + bd$$

удобнее записать в виде:

$$(a + b)(c + d).$$

Здесь мы разложили исходное выражение на множители, заметив, что все его четыре члена содержат  $a$  или  $b$  и  $c$  или  $d$ . Попарно группируя и вынося соответствующие множители за скобки, мы получим выражение  $(a + b)(c + d)$ . Выполнив же сначала операцию  $a(c + d)$ , а потом  $b(c + d)$ , мы имеем  $ac + ad + bc + bd$ , то есть исходное выражение.

<sup>1</sup> См. Приложение 2. — Прим. ред.



Очень часто в физической географии в вычислениях участвуют как *положительные*, так и *отрицательные* величины, с тем чтобы указать, что значения противоположны, или для того, чтобы ранжировать величины относительно нуля от  $-n$  до  $+n$ . Если, скажем,  $f$  обозначает величину ускорения, то  $+f$  будет обозначать ускорение в одном направлении, а  $-f$  — в другом. Как  $-f$ , так  $+f$  имеют абсолютное значение  $f$ , которое можно записать через  $|f|$ : «модуль  $f$ ». Особенно важен знак для указания направления при использовании векторов (глава 2). Г. Самнер (Sumner, 1977a) использовал векторы при изучении развития морских и береговых бризов. Считая скорость ветра, дующего с моря на сушу, положительной величиной, а скорость ветра, дующего с суши в сторону моря, — отрицательной, мы можем оценить вклад ветра каждого направления на развитие бризов, при условии ясного неба и, как следствие этого, незначительной конвекции (Davidson, 1978). Ветры редко дуют точно под прямым углом к береговой линии или от нее. Воздействие ветра, дующего с моря на сушу со скоростью  $v$  метров в секунду, будет, конечно, наибольшим, когда ветер дует перпендикулярно к береговой линии, и наименьшим, когда он дует примерно параллельно ей. В этом случае воздействие ветра уменьшается по мере того, как уменьшается угол между его направлением и линией берега (рис. 1.1). Действительно (в главе 2 эти выкладки будут рассмотрены более подробно), *компонента* скорости ветра, дующего на сушу, равна  $v \sin \alpha$  или  $v \sin \beta$ , как показано на рис. 1.1, причем  $\sin \alpha$  — положителен, а  $\sin \beta$  — отрицателен (см. табл. 2.1).

При вычислении выражений, содержащих как положительные, так и отрицательные величины, применяются некоторые дополнительные правила. За исключением случая, когда символ  $+$  исполь-

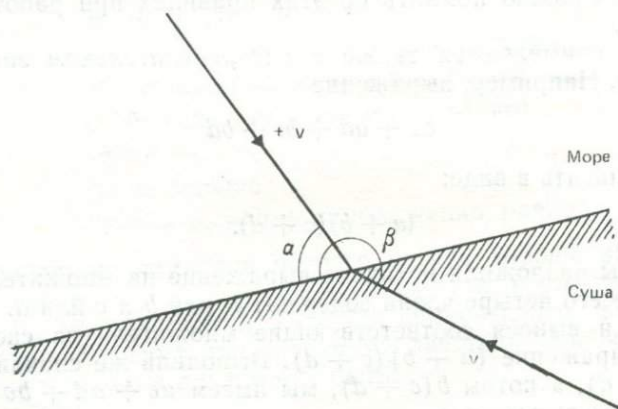


Рис. 1.1 Компоненты вектора скорости морского и берегового бриза.

зается для обозначения операции сложения, он опускается, если только он не служит для обозначения различий в знаках числовых величин, как это было в приведенном выше примере с морским и береговым бризом. При производстве действий сложения или вычитания отрицательный знак всегда «уничтожает» положительный, поэтому при вычитании  $+b$  из  $+a$  мы получим  $a - b$ :

$$(+a) - (+b) = a - b$$

и аналогично

$$(+a) + (-b) = a - b.$$

При умножении и делении, которые, вообще говоря, являются одной и той же операцией, поскольку  $a/b = a(1/b)$ , правило несколько усложняется. Если имеется *четное* количество отрицательных величин, то результат будет всегда *положителен*, так

$$(-a)(-b) = +ab$$

или

$$(-a)(-b)(-b)/(-c) = (-ab)^2/(-c) = +(ab^2/c).$$

При *нечетном* количестве отрицательных величин результат всегда *отрицателен*, так

$$\begin{aligned} (-a)(+b) &= -ab \\ (-a)(-b)/(-c) &= +ab/-c = -(ab/c) \\ (-a)(-a)(-a) &= -a^3. \end{aligned}$$

### 1.3 Величина и число

До сих пор мы ограничивали наше внимание основными арифметическими операциями в их наиболее общем виде. Алгебраическая запись использовалась только для того, чтобы показать, куда именно следует подставлять числа. Величины  $a$  и  $b$  в предыдущих примерах могли равным образом представлять собой любое свойство или процесс, числовые значения которых легко можно определить, будь то количество русловых отложений в реке или скорость испарения. Величина и ее измерение всегда были неотъемлемой частью физико-географических исследований. Настоятельная необходимость в измерении количества того или иного явления привела к развитию некоторых соглашений и концепций для того, чтобы можно было сформулировать жесткую «грамматическую» основу, в пределах которой полученные данные могли бы трактоваться однозначно. «Язык» математики просто осуществляет эту цель при помощи систем счисления, для чего были разработаны всевозможные системы и символы. Мы пользуемся *десятичной* системой (считающей десятками), поскольку для наших действий она является наиболее удобной. Другие системы имеют ограниченное использование. Например, остатки *двенадцатиричной* (дуоде-

цимальной) системы для выражения количества сохранились до сих пор в так называемых «дюжинах». Была изобретена также наиболее простая, *двоичная*, система, давшая толчок развитию цифровых компьютеров. В двоичной системе существуют только два символа: 0 и 1, обозначающие в машинной логике «отсутствие» или «наличие» соответственно. Каждое число можно представить, пользуясь любой системой, но надо помнить, что двоичная система дает очень длинное цифровое изображение. *Основание* десятичной системы — число 10 (десять цифр от 0 до 9), а двоичная система имеет в основании число 2 (две цифры: 0 и 1). В любой из перечисленных систем каждому разряду (цифре) приписывается определенное значение, что позволяет упорядочивать величины наиболее простым образом. Величины чисел определяются *положением* разрядов, отсчитываемых справа налево в возрастающем порядке. В десятичной системе счисления цифра, стоящая на первом месте (справа налево), обозначает число «единиц», вторая — «десятков», третья — «сотен» и т. д. Отсюда вытекают удобные обозначения *степеней* числа 10, являющегося основанием системы, то есть величина третьего порядка (тысяча) есть  $10^3$ , второго —  $10^2$ , а первого —  $10^1$ . Тогда 200 есть  $2 \times 10^2$ , 500 000 есть  $5 \times 10^5$ , а 40 есть  $4 \times 10^1$ . Логически можно продолжить эту последовательность в нисходящем порядке от  $10^1$ , принимая, что  $10^0$  есть единица. Действительно, в результате возведения *любого* числа в нулевую степень всегда получается единица, то есть:

$$1^0 = 6^0 = 500\,000^0 = 1.$$

Таким образом, число 3551 представляет собой краткую запись выражения

$$(3 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (1 \times 10^0).$$

Аналогичную последовательность можно указать для всех систем счисления. Так, используя в качестве основания системы число 5 (цифры от 0 до 4), число 2441 можно было бы записать следующим образом:

$$(2 \times 5^3) + (4 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (1 \times 5^0).$$

Очевидно, что переводить числа из одной системы в другую дело довольно несложное. Рассмотрим весьма простой пример. Десятичное число 53 можно представить в двоичной системе, найдя наибольшую степень числа 2, которая «уложится» один раз в 53 (то есть не превосходит 53). Величина  $2^5$  равна 32, но уже  $2^6$  есть 64, так что, вычитая  $2^5$  из 53 (табл. 1.1), мы получим остаток, равный 21 (колонка 4). Наибольшая степень числа 2, которая не превосходит 21, является следующей частью двоичного представления десятичного числа 53 и т. д. В конце концов в колонке остатков появится нуль, и тогда, суммируя степени числа 2 в колонке

(а), мы получаем двоичный эквивалент числа 53. Итак, десятичное число 53 в двоичной форме имеет вид:

$$(1 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0),$$

или 110101.

Т а б л и ц а 1.1

Двоичное представление десятичного числа 53

Степень (а)	Подсчитанная величина (б)	Общая сумма (в)	Остаток (г)
$2^5$	32	32	21
$2^4$	16	48	5
$2^2$	4	52	1
$2^0$	1	53	0

Понятие системы счисления, введенное выше, позволяет достаточно просто определить *целые* числа (*натуральное* число — одно из перечисленных целых 1, 2, 3, ..., N). *Действительные* числа, например математическая константа 3,1412 ( $\pi$ ), равная: целое число  $3 + 0,1412$  (действительное число), — могут быть аналогично представлены через степени числа, взятого за основание системы счисления, учитывая при этом также дробную десятичную часть. Представление чисел, меньших единицы, осуществляется продолжением разложения по отрицательным степеням основания системы. Наличие десятичной запятой показывает, что имеются отрицательные степени. Так, число 23,6057 представляет собой сокращенную запись выражения

$$(2 \times 10^1) + (3 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (0 \times 10^{-2}) + \\ + (5 \times 10^{-3}) + (7 \times 10^{-4}).$$

Заметим, что цифры числа, стоящие слева от десятичной запятой, обычно записывают по три в группе и отделяют друг от друга пробелом<sup>1</sup>. Величина числа отражает положение разряда в последовательности цифр. Так,  $10^2$  означает «одна сотня раз»,  $10^{-2}$  означает «одна сотая часть» или представляется дробью  $1/100$ . Таким образом, число  $10^{-2}$  является *обратным* числу  $10^2$  ( $1/10^2$ ). Используя это свойство, можно записать очень большие или очень малые числа в виде обычных десятичных чисел, умноженных на степень числа десять. Например, 3 456 000 можно записать как «3456 миллионов» или как  $3,456 \times 10^6$ ; аналогично число 0,000034 можно изобразить как  $3,4 \times 10^{-5}$ .

<sup>1</sup> В отечественной научной литературе это правило не используется. — Прим. ред.

## 1.4 Рациональные и иррациональные числа

Многие действительные числа можно также записать более кратко в виде дробей. Число 2,64 есть, таким образом,  $2\frac{64}{100}$  или  $2\frac{16}{25}$ . Число называется *рациональным*, если его можно представить дробью, используя два целых числа. Однако многие действительные числа так выразить не удастся, и тогда они называются *иррациональными*. Примерами иррациональных чисел могут служить величина  $\pi$ , равная 3,14159265 с точностью до восьмого знака после запятой, или  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и т. д. Однако дробь  $2/9$  — это рациональное число, хотя его десятичный эквивалент равен 0,2222222222..., причем цифра 2 повторяется вновь и вновь. Повторяющуюся, или периодическую, часть десятичной дроби можно записать короче, поставив точку над повторяющейся цифрой, и тогда эту дробь следует переписать в виде 0,2. Надо иметь в виду, что, хотя эта цифра повторяется до бесконечности, точное значение числа равно 0,2. Аналогично, дробь  $1/3$  можно записать как 0,3, но заметьте, что  $2/7$  — это 2,285714, что означает повторение всех шести цифр:

0,285714285714285714285714 и т. д.

Идея десятичной дроби, цифры которой повторяются бесконечное число раз, не отличается, таким образом, большой сложностью. В то же время иррациональное число нельзя записать в виде десятичной дроби с периодом какой бы то ни было длины. Его десятичное изображение не может быть полным, поскольку отсутствует повторяемость, или периодичность. Однако, хотя представление таких чисел связано с бесконечной и неповторяющейся последовательностью цифр, значение числа *конечно*. Любое натуральное число имеет конечное значение. Теоретически допустимо изобразить для примера такие числа на некоторой шкале значений, представить же их себе невозможно. Гораздо менее строго можно изобразить цепочку цифр бесконечной длины иррационального числа. Проблемы, однако, возникают тогда, когда последовательность, состоящая из бесконечного числа цифр, может в результате дать бесконечно большую величину.

На практике бесконечность представляет собой удобную концепцию, используемую при развитии математической теории. Если читатель заинтересуется дополнительными сведениями о некоторых парадоксах, связанных с бесконечностью, он может обратиться к книге Р. Вильдера (R. L. Wilder, 1968: *Evolution of mathematical concepts: an elementary study*. New York: Wiley) <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Для советского читателя мы рекомендуем: Т. Д. Гильберт. О бесконечности. — В кн.: Т. Д. Гильберт, 1948: *Основания геометрии*, добавление VIII. М. — Л. — *Прим. ред.*

## 1.5 Приближение и точность

Примерами иррациональных чисел могут служить  $\sqrt{2}$  или  $\pi$ . Мы часто *приближаем*  $\sqrt{2}$  путем сокращения его записи до 1,414. Это дает  $\sqrt{2}$ , выраженный с точностью до трех значащих цифр, то есть до  $10^{-3}$ . Мы можем еще более приблизиться к истинному значению  $\sqrt{2}$ , если продолжим представление, скажем, до  $10^{-15}$ , в этом случае мы получим 1,414213562369326. Приближение обычно применяется, если нет других причин для того, чтобы сэкономить место и избавиться от утомительного написания длинных последовательностей цифр. Однако во всех случаях важно определить, с какой степенью точности дано представление. Более детальное руководство по приближениям и их точности можно найти в книге Дэвидсона (Davidson, 1978)<sup>1</sup>. Любое сокращение в представлении числа неизбежно включает «округление» десятичных дробей, так что для приближения с точностью, скажем, до шести десятичных знаков после запятой необходимо знать значение седьмого знака. Если цифра, стоящая на  $(n + 1)$ -ом месте, больше или равна пяти, то цифра, стоящая на  $n$ -ом месте, увеличивается на единицу. Следовательно,  $\sqrt{2}$ , извлеченный с точностью до шести значащих цифр, равен 1,414214, а не 1,414213, поскольку седьмая цифра в этой дроби — пять. Аналогично приближенное значение числа 2,98 с точностью до одного десятичного знака после запятой будет 3,0.

## 1.6 Корни и логарифмы

Физическая география часто оперирует выражениями, содержащими степени с действительными показателями. Например, Дьюри (Dury, 1959) показал, что для рек Нен и Грейт-Уз в Восточной Англии расход воды с периодом повторяемости в 2,33 года связан с площадью водосбора следующим образом:

$$q = 5,1a^{0,98}, \quad (1.1)$$

где  $q$  — расход воды в куб. футах/сек,  $a$  — общая площадь водосбора в квадратных милях. Для того чтобы избежать путаницы, связанной с переводом из одной системы единиц в другую, здесь используются принятые в Англии единицы измерения. Максимальный расход в паводок с периодом повторяемости (см. главу 7) 2,33 года оказался равным среднегодовому паводочному стоку, что имеет большое значение при гидрологическом прогнозировании. Идею возведения числа в степень 0,98 понять довольно трудно, и поэтому лучше обратиться к более простым дробным десятичным показателям степени, таким, как 0,5 или 0,3. Возвести число в

<sup>1</sup> Подобное руководство читатель найдет в книге: В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, М. И. Скакави, 1974: *Элементарная математика*, М. — Прим. ред.

степень 0,5 — это все равно что извлечь из него квадратный корень:  $x^{0,5} = \sqrt{x}$ . Аналогично  $x^{0,3} = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ ,  $x^{0,25}$  — это корень четвертой степени,  $\sqrt[4]{x}$ , и т. д. Приведем еще несколько примеров, поскольку очень часто возможность выразить одну и ту же степень различным образом ведет к некоторой путанице. Возьмем прежде всего величину  $2^3$ . Элементарные вычисления дают в результате число 8 ( $2 \times 2 \times 2$ ). Следовательно, мы можем написать  $\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} = 8^{0,3} = 2$ . Теперь, поскольку  $\sqrt{4} = 4^{1/2} = 2$ , то  $(4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 4^{1,5} = 8$ . Аналогично  $3^3 = 9^{3/2} = 27$  и  $4^5 = 16^{5/2} = 1024$  и т. д. Мы можем сформулировать в общем виде один важный закон для производства операций с величинами, содержащими степени:

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (1.2)$$

Для степенных выражений имеются также два других закона. Например, можно арифметическим путем проверить, что  $2^5$  — это все равно, что  $2^2 \times 2^3$  или  $(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$ . В общем виде можно записать:

$$a^m a^n = a^{(m+n)} \quad (1.3)$$

и аналогично

$$a^m / a^n = a^{(m-n)}. \quad (1.4)$$

Возвращаясь к примеру с водосборами рек Нен и Грейт-Уз, мы видим, что выражение  $a^{0,98}$  можно *приближенно* записать так:

$$\sqrt{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[7]{a} \text{ или } a^{0,5} a^{0,3} a^{0,14} = a^{0,97}.$$

Таким образом, для проведения вычислений, содержащих умножение и деление, имеется весьма удобное средство. Если, как в приведенном выше примере, мы можем выразить числа, которые надо умножить или разделить, через степени с одинаковым основанием, то при умножении показатели степеней этих чисел складываются, а при делении вычитаются. Величины степеней, приведенные к одинаковому основанию, называются *логарифмами* исходных чисел. Например, весьма элементарное произведение  $10 \times 100 = 1000$  можно выразить как  $10^1 \times 10^2 = 10^3$ , используя общее основание 10. Степень, в которую возводится основание 10, будет, таким образом, логарифмом данного числа по этому основанию. Отсюда логарифм 100 по этому основанию равен 2, или

$$\log_{10} 100 = 2, \quad \text{поскольку} \quad 10^2 = 100.$$

Аналогично

$$\log_{10} 10 = 1, \quad \text{поскольку} \quad 10^1 = 10$$

$$\log_{10} 1 = 0, \quad \text{поскольку} \quad 10^0 = 1$$

$$\log_{10} 0,1 = -1, \quad \text{поскольку} \quad 10^{-1} = 0,1$$

и т. д. Сложение логарифмов чисел с одинаковым основанием позволяет нам получать произведение, а их вычитание — частное. Сказанное можно записать в общем виде:

$$\begin{aligned} \text{если} \quad & x^m = a, \quad \text{то} \quad \log_x a = m \\ & x^n = b, \quad \text{то} \quad \log_x b = n. \end{aligned}$$

Более формально, логарифм числа по основанию  $x$  есть показатель степени, в которую необходимо возвести это основание, чтобы получить данное число. Далее, мы можем утверждать, что

$$\log_x a + \log_x b = \log_x (ab) \quad (1.5)$$

и

$$\log_x a - \log_x b = \log_x (a/b). \quad (1.6)$$

Чаще всего в качестве основания  $x$  используется число 10, поскольку с ним как основанием системы счисления мы часто оперируем и тогда, когда не применяем логарифмы. Однако иногда основанием логарифмов служит число  $e$ . Происхождение числа  $e$  объясняется в главе 6, здесь же мы только дадим его приближенное значение, равное 2,71828 с точностью до пятого знака после запятой. Это — так называемые *Неперовы*, или *натуральные*, логарифмы, и обычно они записываются в виде  $\log_e x$  или  $\ln x$ . Но вообще принято, что если основание логарифма не указано, то подразумевается основание 10, и далее в этой главе мы ограничим наше внимание десятичными логарифмами<sup>1</sup>.

Относительно легко перейти к следующему шагу — рассмотреть логарифмы чисел, отличных от тех, которые точно кратны основанию, хотя на первый взгляд показатели степеней этих чисел довольно непривычны. Ясно, например, что логарифмы всех чисел, заключенных между единицей и десятью, должны лежать между 0 и 1; для чисел от 10 до 100 логарифмы лежат между 1 и 2 и т. д., так что вся область значений четко определена. Логарифмы чисел, заключенных между соседними степенями числа 10, можно вычислить, но гораздо удобнее их искать с помощью таблиц, дающих, как правило, логарифмы с точностью от четырех или более десятичных знаков после запятой. Например, «Четырехзначные таблицы логарифмов», содержащие величины логарифмов с точностью до четырех знаков после запятой, даны в Приложении 3, фрагмент которого помещен в табл. 1.2 с целью проиллюстрировать способ получения логарифма числа<sup>2</sup>. Мы можем воспользоваться этой таблицей для нахождения логарифма любого числа от 5,200 до 5,499. Пары чисел в крайней левой колонке представляют две первые цифры числа, для которого надо найти логарифм. Следующая группа колонок, пронумерованных от 0 до 9, содержит значение

<sup>1</sup> В литературе на русском языке логарифм числа по основанию десять записывается как  $\lg x$ . — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> Дробная часть логарифма числа называется мантиссой, а целая часть — характеристикой. — *Прим. ред.*

## Фрагмент четырехзначных

	0	1	2	3	4	5
52	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202
53	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284
54	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364

третьей цифры числа и последняя группа — величину поправки на последнюю цифру. Числа, помещенные в таблицу, дают четырехзначные логарифмы, состоящие из трех значащих цифр после запятой. Десятичная запятая может быть опущена, но она подразумевается стоящей слева от числа. Следовательно,  $\lg 5,30$  можно получить, читая строку, начинающуюся с 53 и расположенную под колонкой 0, и это число будет 0,7243. Аналогично  $\lg 5,36$  будет 0,7292. Для нахождения логарифмов чисел, состоящих из четырех цифр, следует к логарифму трехзначного числа *прибавить* поправку на четвертую цифру, стоящую в последней группе колонок. Таким образом,  $\lg 5,301$  равен 0,7243 плюс 0,0001 ( $= 0,7244$ ), а  $\lg 5,365 = 0,7292 + 0,0004 = 0,7296$ .

Из таблиц в Приложении 3 можно видеть, что

$$\lg 2 = 0,3010 \quad \text{или} \quad 10^{0,3010} = 2$$

$$\lg 3 = 0,4771 \quad \text{или} \quad 10^{0,4771} = 3$$

$$\lg 5 = 0,6990 \quad \text{или} \quad 10^{0,6990} = 5$$

$$\lg 5,1 = 0,7076 \quad \text{или} \quad 10^{0,7076} = 5,1.$$

Аналогично логарифмы чисел от 10 до 100 заключены между значениями 1 и 2. Здесь следует иметь в виду дополнительный множитель 10, логарифм которого равен 1, так что, например,  $\lg 22,0 = 1,3424$ , поскольку  $22,0 = 2,20 \times 10^1$ , отсюда  $\lg 22,0 = \lg 2,20 + \lg 10^1 = 0,3424 + 1,0000$ . Аналогично логарифмы чисел, меньших единицы, можно найти следующим образом:

$$\lg 0,0364 = \lg 3,64 + \lg 10^{-2} = 0,5611 + (-2,000),$$

что записывается как:  $\bar{2},5611$  («два с чертой вверху запятая 5611»). Заметим, в частности, что правая часть логарифма остается *положительной*, даже если  $\bar{2}$  означает, что его левая часть отрицательна. Таким образом, чтобы вычислить с помощью логарифмов выражение  $0,0123 \times 0,0019 / 0,2401$ , мы должны взять (из Приложения 3):

$$\lg 0,0123 = -2 + 0,0899 = \bar{2},0899$$

$$\lg 0,0019 = -3 + 0,2788 = \bar{3},2788$$

$$\lg 0,2401 = -1 + 0,3804 = \bar{1},3804,$$

таблиц логарифмов

6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,7210	0,7218	0,7226	0,7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0,7292	0,7300	0,7308	0,7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0,7372	0,7380	0,7388	0,7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

так что

$$\begin{aligned}
 \lg(0,0019/0,2401) &= (\bar{3},2788) - (\bar{1},3804) = \\
 &= (-3 + 0,2788) - (-1 + 0,3804) = \\
 &= -2 + (0,2788 - 0,3804) = \\
 &= -2 - 1 + 0,8984 = \bar{3},8984.
 \end{aligned}$$

Отсюда  $\lg(0,0123 \times 0,0019/0,2401)$  равен  $\bar{2},0899 + \bar{3},8984$ . Складывая отдельно левую и правую части, получим:

$$\bar{2},0899 + \bar{3},8984 = -5 + 0,9883 = \bar{5},9883.$$

Возвращаясь к примеру и взяв *антилогарифм* из таблиц, получим:

$$\text{antilg}(\bar{5},9883) = 9,734 \times 10^{-5}.$$

Если логарифмы используются в других целях, а не в качестве средства для облегчения вычислений, как в только что рассмотренном примере, то следует принимать во внимание всю совокупность знаков в логарифме числа, стоящих по ту и другую стороны от десятичной точки. В следующей главе мы увидим, что решение уравнений, включающих логарифмы, требует их обращения в обычные действительные числа. Так, например,  $\lg(0,011) = \bar{2},0414$ , что представляет собой выражение  $0,0414 - 2,0000 = -1,9586$ .

Логарифмы позволяют вычислять значения корней и действительных степеней чисел. Рассмотрим соотношение (1.2)

$$(x^m)^n = x^{mn}.$$

Отсюда,

$$\text{если } a = x^m, \text{ то } \log_x(a^n) = n \log_x a. \quad (1.7)$$

Так, например, число  $2^{0,5}$  можно найти, умножая  $\lg 2$  на  $0,5$ :

$$\lg 2 = 0,3010 \text{ (из таблиц)}$$

$$\therefore 0,5 \lg 2 = 0,1505$$

$$\text{и } 2^{0,5} = 1,415 \text{ (из таблиц).}$$

Аналогично для  $54,6^7$

$$\begin{aligned}\lg(54,6)^7 &= 7 \lg 54,6 = \\ &= 7 \times 1,7372 = \\ &= 12,2\end{aligned}$$

$$\text{и } \therefore 54,6^7 = \text{antilg } 12,2 = 1,445 \times 10^{12}.$$

Теперь мы в состоянии решить уравнение (1.1) для данной площади водосбора. Допустим,  $a = 22,0$  кв. мили, тогда, взяв логарифмы обеих частей уравнения, получим:

$$\begin{aligned}\lg q &= \lg 5,1 + 0,98 \lg 22,0 = \\ &= 0,7076 + 0,98 \times 1,3424 = \\ &= 2,0232\end{aligned}$$

$$\text{и } \therefore q = 105,4 \text{ куб. футов/сек (из таблиц).}$$

Возможно, читатель пожелает найти, пользуясь таблицами из Приложения 3, следующие логарифмы (а для чисел, меньших единицы, также и их действительные эквиваленты), а затем попрактиковаться в решении арифметических задач.

#### Задачи 1.6

1.6.1  $\lg 0,0150$ .

1.6.2  $\lg 12,24$ .

1.6.3  $\lg 56,847$ .

1.6.4  $\lg 0,0025$ .

1.6.5  $\lg(5,4 \times 10^{-2})$ .

1.6.6  $\lg(54 \times 10^{-3})$ .

Теперь решите следующие задачи.

1.6.7 Вычислите произведение  $2,56 \times 3,012/10,8$ , используя логарифмы.

1.6.8 Вычислите произведение  $0,8024 \times 0,0543$ , используя логарифмы.

1.6.9 Найдите  $\sqrt{2}$ ;  $42,36^3$ ;  $5,25^4$  и  $\sqrt[3]{3}$ , используя логарифмы.

1.6.10 Используя логарифмы, покажите, что в уравнении (1.1) при  $a = 300$  кв. миль  $q = 1365$  куб. футов/сек.

### 1.7 Понятие функции

Выражение, используемое в уравнении (1.1), было введено для иллюстрации природы степеней и логарифмов чисел. Уравнение (1.1) отражает также связь между водосборной площадью  $a$  и расходом реки  $q$ . Мы можем решить это уравнение относительно  $q$  при любых значениях  $a$ , лежащих в пределах, которые Дьюри использовал для нахождения связи. Величины  $q$  и  $a$  есть *переменные*, и это означает, что для каждого *одного* значения  $a$  величина  $q$

имеет соответствующее значение, определяемое уравнением. Каждая переменная может принимать одно любое значение в пределах, используемых для установления связи (максимальный и минимальный размер водосбора). Следовательно, мы говорим, что  $a$  всегда имеет значение, лежащее в группе величин, называемых *множеством*  $A$ , а величина  $q$  — в группе величин, называемых *множеством*  $Q$ . Иными словами,  $a$  есть элемент  $A$ , а  $q$  есть элемент  $Q$ , или:

$$a \in A$$

$$q \in Q,$$

и при этих ограничениях

$$q = 5,1a^{0,98}.$$

Это уравнение задает *функцию*, связывающую  $q$  с  $a$ , или:

$$q = f(a).$$

В результате мы говорим, что  $q$  пропорционально  $a$  ( $q \sim a$ ), или что  $q$  зависит от  $a$ .

В физической географии очень часты ситуации, когда на какой-либо фактор среды оказывают влияние одновременно несколько других факторов. В этих случаях мы нередко находим функции, зависящие более чем от одной переменной. Например, мы вправе утверждать, что тип почвы ( $s$ ) зависит от климата ( $c$ ), растительности ( $v$ ), жизнедеятельности организмов ( $o$ ), материнской породы ( $p$ ), осадков ( $r$ ) и времени ( $t$ ). Не касаясь того, каким образом каждая из этих переменных влияет на формирование данного типа почвы, мы можем сокращенно написать:

$$s = f(c, v, o, p, r, t).$$

Впоследствии мы могли бы поставить в поле эксперимент, чтобы выяснить, какое участие каждый из факторов принимает в образовании почвы. Полученные результаты являлись бы хорошей отправной точкой для планирования дальнейших исследований. Задание любой математической функции в форме уравнения, например (1.1), говорит о том, что между переменными величинами существует определенная связь. Это утверждение весьма важно в чисто математическом смысле, но как физико-географы мы должны в то же время знать, что в большинство географических связей, с которыми мы имеем дело, почти всегда входят некоторые неопределенные и неизвестные факторы. Отсюда следует ряд важных моментов, которые заставляют нас сомневаться в справедливости многих математических функций, отражающих географические зависимости.

Во-первых, в географии, если  $q$  зависит от  $a$ , то, вообще говоря, не всегда можно утверждать обратное. В этом случае математическая функция должна быть аналогична односторонней «импликация». Термин «импликация» означает следующее: «если наблюдается увеличение величины  $a$ , то должно происходить и соответствующее

шее увеличение величины  $q$ ». Имеются различные способы обозначения таких выражений, и, если читатель пожелает заняться подробнее этим аспектом математической логики, ему следует обратиться к соответствующей литературе<sup>1</sup>. Принято называть переменную, вызывающую изменения в свойствах другой или других переменных, *независимой* переменной, а ту, которая испытывает изменения, — *зависимой* переменной.

Во-вторых, уравнение, выведенное Дьюри, как и другие подобные уравнения, было получено в результате анализа относительно небольшой выборки, взятой из гораздо большей совокупности речных бассейнов. Таким образом, у нас опять нет абсолютной уверенности в том, что выявленная связь является бесспорной, как это предполагает описывающая ее математическая функция. Как мы увидим в главе 3, отсутствие такой уверенности означает, что при интерпретации подобных зависимостей следует соблюдать известную осторожность.

В-третьих, имеется ряд факторов, которые также могут влиять на величину среднегодового паводочного стока, например сезонное распределение и тип выпадающих осадков. Крупным бассейнам соответствует, как правило, среднегодовой паводочный сток большой величины, но легко видеть, что если в некотором бассейне наблюдается весьма значительный паводочный сток, то это необязательно означает одновременно и его значительную площадь водосбора.

Возвращаясь теперь к форме самой функции, можно сказать, что запись вида  $q = f(a)$  или  $y = f(x)$  просто сообщает о наличии определенного вида связи, но не отражает существа этой связи. Например, она не сообщает: (1) во сколько раз меняется  $y$  при изменении  $x$  на единицу (или соответственно  $q$  и  $a$ ); (2) всегда ли приращение  $x$  приводит к такому же приращению  $y$ , и если нет, то какова тенденция изменения приращения  $y$ , связанного с приращением  $x$ ; (3) если  $x$  равен нулю, равен ли нулю  $y$ .

Уравнение (1.1) представляет собой некоторый тип уравнений, утверждающий, что

$$q = f(a^n), \text{ где } n \neq 0 \text{ или } 1. \quad (1.8)$$

Если бы  $n$  было равно 1, а не 0,98, то в выражении

$$q = 5,1a$$

изменение  $a$  на единицу вызвало бы соответствующие изменения  $q$ , всегда равного  $5,1a$  (см. табл. 1.3). Функции такого типа называются *линейными* по причинам, которые станут ясными в главе 3. Заметим, однако, что когда  $a = 0$ , то  $q = 0$ . Если бы существовало уравнение  $q = 5,1a + 6,4$ , то при  $a = 0$ ,  $q = 6,4$ ; при  $a = 1$ ,  $q = 5,1 + 6,4 = 11,5$  и т. д. Здесь имеется прибавление *постоянного*

<sup>1</sup> Мы рекомендуем, в частности: П. С. Новиков, 1973: *Элементы математической логики*. 2 изд., М. — *Прим. ред.*

члена и в общем виде линейную функцию можно записать, как

$$y = mx + k.$$

Член  $m$  в уравнении удовлетворяет условию (1), указанному выше, а постоянный член — условию (3). Условие (2) в этом случае не рассматривается, поскольку мы установили, что приращения  $y$  для всех величин  $x$  постоянны.

Таблица 1.3

Таблица расходов воды (в м<sup>3</sup>/сек) для данной водосборной площади (в км<sup>2</sup>)

$a$	1	2	3	4	5	6
$q$	5,1	10,2	15,3	20,4	25,5	30,6

Из уравнения (1.8) мы знаем, что  $n \neq 0$  или 1 и что, таким образом,  $q$  есть *степенная функция*  $a$ . Это означает, что изменение  $a$  на единицу не дает постоянного приращения  $q$ . Опять же по причинам, которые скоро станут очевидными, степенная функция — это *нелинейная* функция. Этот тип функций разбирается в главе 5.

Если значения  $n$  больше нуля, то имеется *прямая пропорциональность*. Ее можно определить следующим образом: *увеличение*  $a$  всегда вызывает *увеличение*  $q$ . Если  $n = 0$ , то  $q$  было бы постоянным, поскольку любое число, возведенное в нулевую степень, равно единице. Если  $n$  меньше нуля, то наблюдается обратная пропорциональность: *увеличение*  $a$  вызывает *уменьшение*  $q$ . Теперь мы имеем два типа нелинейных функций, которые можно записать как:

$$y = x^n \quad (\text{прямо пропорциональная зависимость, } n > 0)$$

$$y = x^{-n} \quad (\text{обратно пропорциональная зависимость}).$$

Многие связи, полученные в естественных науках, являются нелинейными, и поэтому имеются многочисленные типы соответствующих функций, например:

$$y = \lg x$$

$$y = e^x$$

$$y = \sin x.$$

Конкретную форму их мы рассмотрим в главе 5

## 1.8 Координаты и графики

Любую математическую функцию можно изобразить графически относительно *осей координат*. В самом деле, большинство понятий, использованных в разделе 1.7 при описании математических функций, в значительной степени опираются на внешний вид

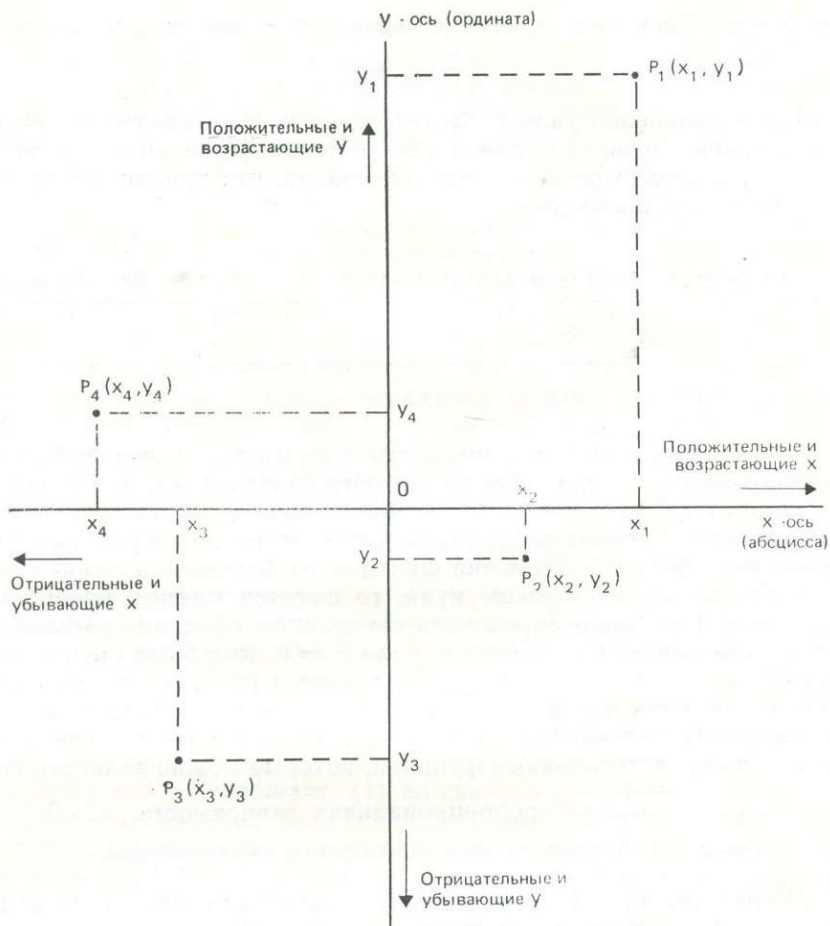


Рис. 1.2 Прямоугольная система координат.

графиков этих функций. В предыдущем разделе мы имели дело с линейными функциями, изображаемыми в виде прямой линии, и с нелинейными функциями, график которых имеет форму кривой. Точки отсчета изображаются на осях графика таким же образом, как порядковые номера линий проставляются в восточном и северном направлениях на топографических картах, с той лишь разницей, что сетка линий отсчета заменяется здесь сеткой *координат*. Значения переменных наносятся вдоль осей графика; каждая переменная на своей оси. Осей координат будет столько, сколько переменных имеется в функции, которую надо изобразить графически. Хотя большинство зависимостей в физической географии *многомерны*, то есть они содержат более двух переменных, мы, по крайней

мере на этот раз, ограничимся рассмотрением только *двумерных* связей, поскольку они более удобны для изображения на двумерных страницах книги.

Наиболее распространенной является *прямоугольная*, или *Декартова, система координат*, оси которой взаимно перпендикулярны. Вертикальная ось, ось *y*, или *ордината*, всегда представляет зависимую переменную, в то время как горизонтальная ось, ось *x* или *абсцисса*, всегда представляет независимую переменную. Оси пересекаются в точке, называемой *началом координат*. В этой точке значения по обеим осям равны нулю. Значения, лежащие на оси *y* ниже начала координат и на оси *x* влево от начала, всегда отрицательны. Следовательно, точка  $P_1$  на рис. 1.2 имеет положительные координаты  $(x_1, y_1)$ , а у точки  $P_3(x_3, y_3)$  — они отрицательны. В двух оставшихся квадрантах у точки  $P_2(x_2, y_2)$  координата *y* отрицательна, *x* — положительна, а у точки  $P_4(x_4, y_4)$  — координата *y* положительна, а *x* — отрицательна. Наглядное изображение любой функции можно дать по отношению к осям координат, последовательно нанося на них пары координат.

Менее распространена *полярная система координат*. Декартовы координаты представляют собой более гибкую систему. В полярной системе, представленной на рис. 1.3, положение точки *A* определяется координатами  $(r, \theta)$ , где *r* — расстояние от *полюса (P)* до точки *A*, а  $\theta$  — *полярный угол*, образованный прямой *AP* с *начальной*

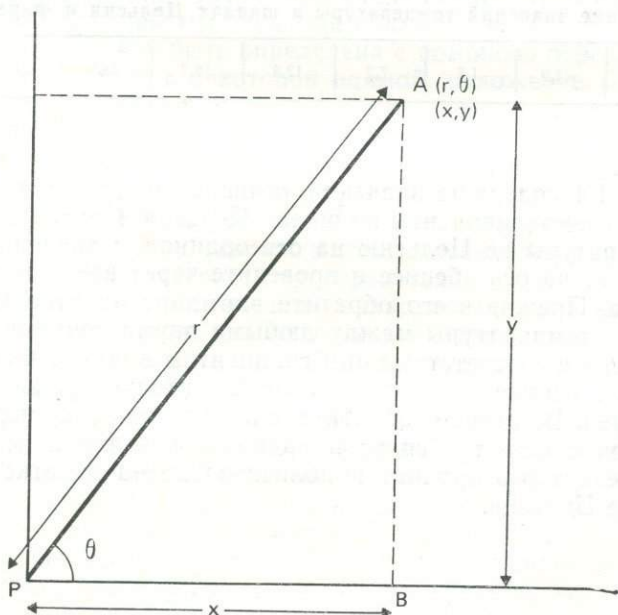


Рис. 1.3 Полярная система координат.

*прямой РВ.* Круговые графики, использующие полярную сетку, применяются в различных аспектах физической географии, например для построения розы ветров или диаграмм ориентации обломков породы. Здесь следует опасаться некоторой путаницы, которая может возникнуть при измерении ориентации в градусах в направлении *по часовой стрелке* от точки *север* (0 градусов), так что точка юг соответствует  $180^\circ$ , запад —  $270^\circ$  и т. д., и при измерении в направлении *против часовой стрелки* от начальной горизонтальной линии, показанной на рис. 1.3. Полярная координатная сетка используется в основном для представления *векторных* величин (глава 2), например при разложении скорости и направления ветра.

### Задачи 1.3

Читатель, возможно, пожелает изобразить графически эти два простых примера линейных функций.

- 1.8.1 Постройте оси  $x$  и  $y$ , отложив по осям от начала координат соответственно значения 6 и 40. Нанеся величины  $q$  на ось  $y$ , а величину  $a$  на ось  $x$ , постройте график функции  $q = 5,1a$ , значения которой лежат в пределах, указанных в табл. 1.3. Проверьте графически, что при значении  $a$  около  $4 q$  приблизительно равно 20.

Таблица 1.4

Соотношение значений температуры в шкалах Цельсия и Фаренгейта

C°	-9,4	-3,9	1,7	7,2	12,8	18,3	23,9	29,4	35,0
F°	15	25	35	45	55	65	75	85	15

- 1.8.2 Табл. 1.4 содержит значения температуры по шкале Фаренгейта и ее эквиваленты по шкале Цельсия. Нанесите значения температуры по Цельсию на ось ординат, а значения по Фаренгейту на ось абсцисс и проведите через все точки прямую линию. Прежде всего обратите внимание на отношение градиента температуры между любыми двумя точками в шкале Цельсия к соответствующим градиентам в шкале Фаренгейта. Это отношение должно быть приблизительно равно 0,5 (точнее  $5/9$ ). Во-вторых, обратите внимание на точку пересечения прямой с осями абсцисс и ординат. Убедитесь, что прямая пересекает ось ординат приблизительно на отметке  $-16^\circ$  по шкале Цельсия.

## ТРИГОНОМЕТРИЯ И ВЕКТОРЫ

Измерение перемещений и пространства — одна из главных тем изучения в физической географии. Процесс неотделим от движения, география же по своей сути призвана рассматривать процессы и формы их протекания с пространственной точки зрения. Понятия длин, площадей и объемов представляют собой удобные меры для измерения пространства, и, как мы видели в главе 1, любой элементарной ячейке в пространстве мы можем поставить в соответствие координаты точки относительно системы отсчета. В конце предыдущей главы мы обратили внимание на то, что с таким же успехом точка может быть определена с помощью отрезка длины  $r$ , образующего угол  $\theta$  с некоторой прямой, положение которой считается заданным. От этого представления легко перейти к понятию *вектора*. В свою очередь векторы проводят нас к изучению *матриц*, которым посвящена глава 4. Векторы и матрицы обуславливают необходимость обобщить на многомерный случай те математические операции, которые уже были рассмотрены в этой книге. Они также позволяют лучше усвоить математические принципы, связанные с понятием многомерного пространства.

В этой главе математический аппарат занимает значительное место. Сейчас имеется довольно много специальных математических учебников, всецело посвященных векторам и матрицам (см., например, Knight, Adams, 1975). В данной книге мы сможем изложить только основы теории векторов и матриц (главы 2 и 4). Понимание того, как векторы применяются для изучения динамики природной среды, может оказаться очень полезным при интерпретации многих частных процессов, как-то геоморфологических, гидрологических и других, связанных с теми или иными аспектами географии. Ознакомление с принципами, основывающимися на алгебре матриц, позволит читателю глубже разобраться в существовании многомерных статистических методов, таких, например, как анализ главных компонент, и, кроме того, оценить удобства, связанные с введением понятия многомерного «пространства». Тем, кто интере-

суется применением компьютеров для анализа данных, владение операциями с матрицами поможет лучше понять некоторые вопросы машинного программирования. Здесь мы введем лишь основные принципы обращения с векторами и матрицами. Повысить уровень владения этим аппаратом читатель сможет, обратившись к географическим, а также математическим и статистическим работам. Некоторые рекомендации приведены в списке литературы в конце книги.

## 2.1 Измерение углов: градусы и радианы

При решении многих задач, требующих рассмотрения тригонометрических соотношений, углы достаточно измерить в градусах, минутах и секундах, например,  $24^{\circ}34'02''$ , где 60 секунд (") равны одной минуте ('), а 60 минут — одному градусу, причем 360 градусов охватывают всю окружность. Однако при исследованиях, пред-

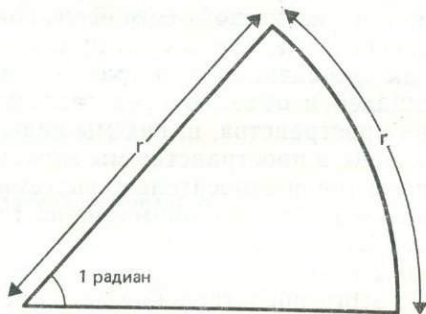


Рис. 2.1 Определение радиана.

полагающих более высокий математический уровень и особенно в случае, когда тригонометрические отношения рассматриваются как функции числового аргумента, например  $y = \sin x$ , углы измеряются в *радианах*. Радиан определяется как угол, образованный двумя, проведенными из центра окружности радиусами, и вырезающий на окружности дугу, длина которой равна радиусу окружности  $r$  (рис. 2.1). Тогда, поскольку длина окружности равна  $2\pi r$ , полная окружность, соответствующая  $360^{\circ}$ , содержит  $2\pi r/r$  радиан, или  $360^{\circ} = 2\pi$  радиан. Отсюда  $90^{\circ} = \pi/2$  радиан,  $180^{\circ} = \pi$  радиан и один градус соответствует  $0,0175$  радиана, а один радиан — это  $57^{\circ}17'45'' = 57,296^{\circ}$ .

## 2.2 Тригонометрические соотношения

Прежде чем мы сможем свободно оперировать с векторами и рассмотреть соответствующие математические функции, следует вывести некоторые тригонометрические соотношения. Полярный

угол  $\theta$ , показанный на рис. 1.3, служит для иллюстрации основных тригонометрических отношений. Эти отношения позволяют выразить прямоугольные координаты  $(x, y)$  через полярные координаты  $(r, \theta)$ . С изменением величины угла  $\theta$  меняются соотношения между сторонами треугольника  $PAB$ :  $PA$ ,  $AB$  и  $BP$  (соответственно гипотенуза, противолежащий и прилежащий углу  $APB$  катеты). Угол  $APB$  — прямой. Когда  $\theta$  стремится к  $0^\circ$ , сторона  $AB$  становится очень маленькой, а стороны  $PA$  и  $BP$  почти равными, хотя, по определению,  $BP$  всегда меньше  $PA$ . Когда  $\theta$  равен  $45^\circ$ , то длины сторон  $AB$  и  $BP$  одинаковы и треугольник становится *равнобедренным*. Сравнение длин любой пары сторон, представленное в форме тригонометрического отношения, позволяет определить величину угла  $\theta$ , пользуясь таблицами. По таблицам Приложения 4 читатель может найти значения основных трех тригонометрических функций (синуса, косинуса и тангенса) для углов от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Методика пользования этими таблицами аналогична методике нахождения логарифмов (см. раздел 1.6). Каждая из основных тригонометрических функций выражается через отношение сторон треугольника  $PAB$  в виде:

$$\text{Синус, или} \quad \sin \theta = AB/AP = y/r \quad (2.1)$$

$$\text{Косинус, или} \quad \cos \theta = BP/AB = x/r \quad (2.2)$$

$$\text{Тангенс, или} \quad \text{tg } \theta = AB/BP = y/x \quad (2.3)$$

$$\text{Косеканс, или} \quad \text{csc } \theta = AP/AB = r/y \quad (2.4)$$

$$\text{Секанс, или} \quad \text{sec } \theta = AP/BP = r/x \quad (2.5)$$

$$\text{Котангенс, или} \quad \text{ctg } \theta = BP/AB = x/y. \quad (2.6)$$

Так как

$$\cos \theta = x/r,$$

то

$$x = r \cos \theta \text{ (умножая на } r \text{)}$$

и аналогично

$$y = r \sin \theta.$$

Таким образом, для прямоугольной сетки координат точка  $A$  с полярными координатами  $(r, \theta)$  будет иметь прямоугольные координаты  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , считая, что точка  $P$  совпадает с началом Декартовой системы координат — точкой  $O$ .

Читателю следует обратить внимание, что, во-первых,  $\text{csc } \theta = 1/\sin \theta$ ,  $\text{sec } \theta = 1/\cos \theta$ , а  $\text{ctg } \theta = 1/\text{tg } \theta$  и, во-вторых, что синус угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, косинус — прилежащего катета к гипотенузе, а тангенс — катета противолежащего к прилежащему.

На основании теоремы Пифагора имеем:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad (2.7)$$

или квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Теперь, деля обе части равенства на  $r^2$ , получим:

$$1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

и, следовательно (из равенства 2.1 и 2.2):

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad (2.8)$$

или

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

и

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta.$$

Точно так же, поскольку

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \theta = \frac{y/r}{x/r},$$

то

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (2.9)$$

Деля обе части равенства (2.8) на  $\cos^2 \theta$ , получим:

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad (2.10)$$

и аналогично

$$\therefore \operatorname{ctg}^2 \theta + 1 = \operatorname{csc}^2 \theta. \quad (2.11)$$

Полученные соотношения пригодятся в последующих главах. Они должны быть большинству читателей уже знакомы, в противном случае их следует запомнить. Соответствующие формулы можно получить и для комбинации углов. В случае суммы углов ( $\alpha + \beta$ ), представленной на рис. 2.2, *a*, можно показать, что

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2.12)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.13)$$

и

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (2.14)$$

Если угол  $\alpha$  включает угол  $\beta$ , как показано на рис. 2.2, *b*, то

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (2.15)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2.16)$$

и

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (2.17)$$

В частности, если  $\alpha = \beta$ , то  
из (2.12):

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.18)$$

из (2.13):

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

и из (2.14):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (2.20)$$

Доказательство этих формул читатель может найти в книге Flanders, Price, 1973.

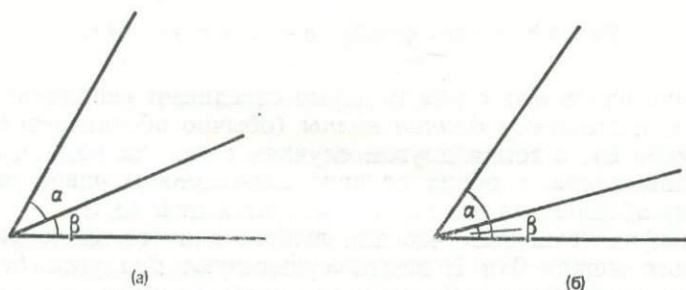


Рис. 2.2 Тригонометрические соотношения для совокупности двух углов:  $(\alpha + \beta)$  и  $(\alpha - \beta)$ .

Тригонометрические соотношения были получены для углов, меньших  $90^\circ$ . Очевидно, что эти соотношения можно применять для любых углов от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  (от 0 до  $2\pi$  радиан). Значения тригонометрических функций таких углов можно получить из равенств (2.7) — (2.20), подставляя, где нужно, вместо  $\alpha$  значения углов  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  или  $270^\circ$ , например  $\sin 146^\circ = \sin (90^\circ + 56^\circ)$  и т. д. Подробнее исследование тригонометрических отношений удобнее проводить, используя тригонометрические функции вида  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  и  $y = \operatorname{tg} x$ . Эти функции являются *периодическими*, то есть их значения циклически повторяются, как повторяются цифры в дробной части периодической десятичной дроби.

График «синусоиды», то есть функции  $y = \sin x$ , показан на рис. 2.3. Из рисунка видно, что значению синуса, равному 1, соответствует много углов. Выражая углы в радианах, получим, что синус равен 1 при значениях  $x$ , равных  $\pi/2$ ,  $5\pi/2$ ,  $9\pi/2$  и т. д. (или  $90^\circ$ ,  $450^\circ$ ,  $810^\circ$  и т. д.). Далее, углы, при которых синус обращается в нуль, повторяются через каждые  $\pi$  радиан, или  $180^\circ$ , и равны 0,  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ ,  $4\pi$  и т. д. Для функции  $y = \cos x$  имеется так же последовательность, но сдвинутая по фазе вдоль оси  $x$  на  $\pi/2$  радиан.

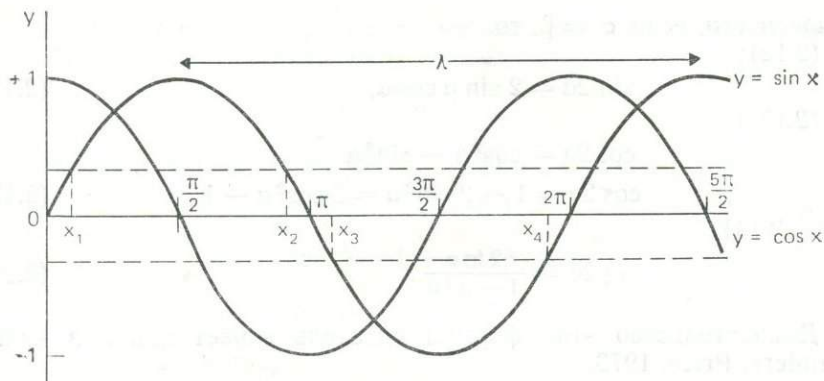


Рис. 2.3 Графики функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$ .

Расстояние вдоль оси  $x$  между двумя соседними «впадинами» или «пиками», называемое *длиной волны* (обычно обозначается греческой буквой  $\lambda$ ), в том и другом случаях равно  $2\pi$  радиан. Амплитуда волны также в обоих случаях одинакова и равна единице, поскольку абсолютная величина  $y$  меняется от 0 до 1.

Из графика очевидно, что для любого данного значения  $y$ , заключенного между 0 и 1, всегда существуют два угла ( $x_1$  и  $x_2$ ) в промежутке от 0 до  $2\pi$  радиан, для которых  $y$  является синусом. Аналогичная картина наблюдается, когда значения синуса отрицательны (для углов  $x_3$  и  $x_4$ ). Таким образом, справедливы следующие равенства:

$$\sin x_2 = \sin (180^\circ - x_2) \quad (2.21)$$

$$\sin x_3 = -\sin (x_3 - 180^\circ) \quad (2.22)$$

$$\sin x_4 = -\sin (360^\circ - x_4). \quad (2.23)$$

Аналогичные соотношения имеются для косинуса и тангенса. График функции  $y = \operatorname{tg} x$  показан на рис. 2.4. Очевидно, что

$$\cos x_2 = -\cos (180^\circ - x_2) \quad (2.24)$$

$$\cos x_3 = -\cos (x_3 - 180^\circ) \quad (2.25)$$

$$\cos x_4 = \cos (360^\circ - x_4) \quad (2.26)$$

$$\operatorname{tg} x_2 = -\operatorname{tg} (180^\circ - x_2) \quad (2.27)$$

$$\operatorname{tg} x_3 = \operatorname{tg} (x_3 - 180^\circ) \quad (2.28)$$

$$\operatorname{tg} x_4 = -\operatorname{tg} (360^\circ - x_4). \quad (2.29)$$

Заметим, что в данном случае функция также стремится к *плюс* бесконечности при приближении  $x$  к  $\pi/2$  и  $3\pi/2$  слева, а при переходе через эти точки начинает стремиться из *минус* бесконечности.

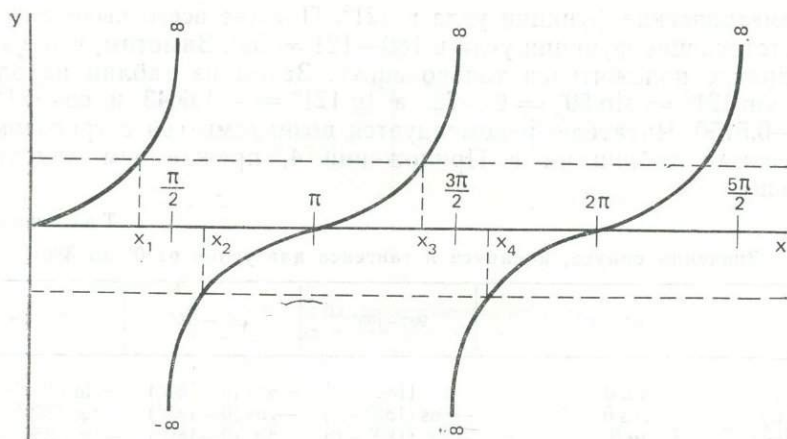


Рис. 2.4 График функции  $y = \operatorname{tg} x$ .

Все три основные тригонометрические функции положительны в промежутке от 0 до  $\pi/2$  радиан, но в трех других квадрантах (четвертях круга) положительна только одна из них. Правило определения тригонометрических функций для углов от  $90^\circ$  до  $360^\circ$  применимо ко всем функциям с той оговоркой, что знаки каждой функции различны в каждом квадранте. Это правило отражено в табл. 2.1 и на рис. 2.5. В соответствии с ним найдем, скажем, три-

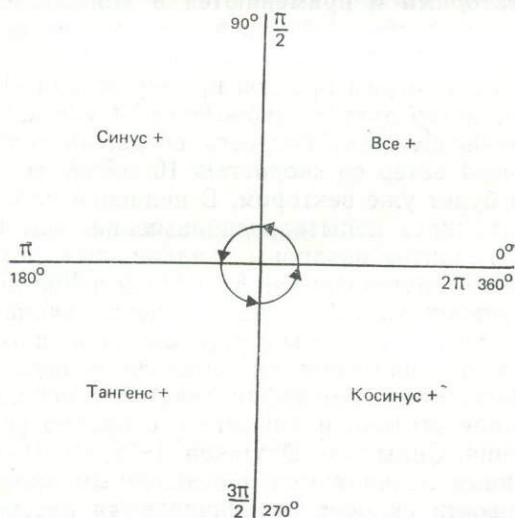


Рис. 2.5 Положительность тригонометрических функций для углов, заключенных между  $0^\circ$  и  $360^\circ$ .

гонометрические функции угла в  $121^\circ$ . Прежде всего вычислим соответствующие функции угла в  $180 - 121 = 59^\circ$ . Заметим, что в этом квадранте положителен только синус. Затем из таблиц находим, что  $\sin 121^\circ = \sin 59^\circ = 0,8572$ , а  $\operatorname{tg} 121^\circ = -1,6643$  и  $\cos 121^\circ = -0,5150$ . Читателю рекомендуется познакомиться с тригонометрическими таблицами в Приложении 4, прежде чем двигаться дальше.

Таблица 2.1

Значения синуса, косинуса и тангенса для углов от  $0^\circ$  до  $360^\circ$

	$0^\circ - 90^\circ$	$90^\circ - 180^\circ$	$180^\circ - 270^\circ$	$270^\circ - 360^\circ$
Синус	$\sin \theta$	$\sin (180^\circ - \theta)$	$-\sin (\theta - 180^\circ)$	$-\sin (360^\circ - \theta)$
Косинус	$\cos \theta$	$-\cos (180^\circ - \theta)$	$-\cos (\theta - 180^\circ)$	$\cos (360^\circ - \theta)$
Тангенс	$\operatorname{tg} \theta$	$-\operatorname{tg} (180^\circ - \theta)$	$\operatorname{tg} (\theta - 180^\circ)$	$-\operatorname{tg} (360^\circ - \theta)$

### 2.3 Векторы и скаляры

До сих пор мы имели дело с числами как средством выражения некоторого количества: например,  $85 \text{ м}^3/\text{сек}$ ,  $100 \text{ кг}$  или  $25^\circ\text{C}$ . Это примеры *скалярных* величин, которые означают просто определенную *числовую величину*. Имеется также более общая группа объектов, указывающих не только величину, но и *направление*. Они называются *векторами* и применяются в климатологии при рассмотрении ветровых движений или в геоморфологии, где с их помощью оценивают влияние наклона долины на степень размыва речного русла. Рассмотрим простой пример из климатологии. Если мы скажем, что ветер дует со скоростью  $10 \text{ м/сек}$ , то тем самым введем скалярную величину *скорости* ветра, но если мы скажем, что дует *северный* ветер со скоростью  $10 \text{ м/сек}$ , то в этом случае скорость ветра будет уже вектором. В недавней работе Hindi, Kellway, 1977 предпринята попытка использования алгебры векторов, с тем чтобы «сгладить» изохроны осадков, вызванных прохождением области низкого давления над Англией и Уэльсом. Необходимость этой операции вызвана тем, что первоначальные изохроны были получены на основе редкой сети самопишущих дождемеров, причем инерция этих приборов, как правило, велика. Решение многих проблем физической географии связано с использованием основных принципов статики и динамики, особенно когда изучается механизм явления. Силы (см. Davidson, 1978, ch. 3) — это векторы, и операции с ними подчиняются определенным правилам. Многие теории устойчивости склонов ограничиваются рассмотрением сил, вызванных ускорением силы тяжести ( $g$ ). Поэтому в соответствующей литературе часто можно встретить выражение:  $g \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол, образованный поверхностью склона с горизонтальной пло-

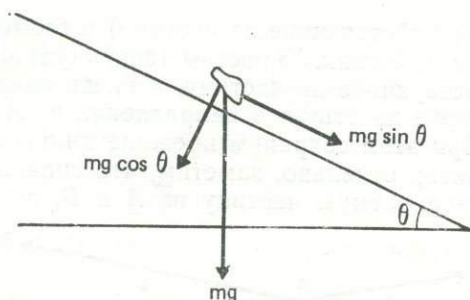


Рис. 2.6 Силы, действующие на частицу, лежащую на наклонной плоскости:  $mg$  — сила тяжести,  $\theta$  — угол наклона.

скостью (см. рис. 2.6). В метеорологии также используется аналогичное выражение более общего вида для математического описания изменения силы Кориолиса вдоль поверхности Земли. Это выражение имеет вид:  $\omega \sin \varphi$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли, а  $\varphi$  — широта точки, для которой вычисляется сила Кориолиса. Очевидно, что вращение Земли вызывает изменение траектории горизонтально движущейся частицы воздуха. Причем горизонтальная плоскость, в которой движется частица, параллельна земной оси на широте  $0^\circ$  и перпендикулярна ей на полюсе. Эффект вращения Земли, таким образом, равен нулю на экваторе, но максимален на полюсе. Для учета этого эффекта требуется ввести некоторый параметр, пропорциональный широте и изменяющийся от нуля до единицы. По причинам, которые станут вскоре понятны, за такой параметр следует взять синус широты. Согласно определению, параметр Кориолиса отражает эффект вращения Земли. В этом случае угловая скорость вращения Земли приводит нас к векторным величинам.

## 2.4 Алгебра векторов

В алгебре векторы, как правило, печатают жирным шрифтом. Например, вектор величины  $v$ , представленный на рис. 2.7 отрезком  $AB$ , обозначается через  $v$  или  $\vec{AB}$ :

$$v = \vec{AB}. \quad (2.30)$$

Равенство означает, что вектор величины  $v$  направлен от  $A$  к  $B$ . На рисунке показаны также векторы  $w = \vec{AC}$  и  $z = \vec{AD}$ . Каждый из векторов на рисунке представлен таким образом, что его величина соответствует длине отрезка этого направления. Иными словами,  $v = AB$ ,  $w = AC$  и  $z = AD$ . Имеется непосредственное соответствие между взаимодействием векторов в пространстве (пред-

ставьте себе силы, действующие на частицу) и геометрической картиной этого взаимодействия. Упростим теперь ситуацию, взяв только две силы, действующие на частицу, и вновь начертим диаграмму так, что вектор  $v$  действует в направлении из  $A$  в  $B$ , а  $w$  из  $B$  в  $C$  (рис. 2.8). При этом сохраним прежние длины и направления. Беря каждый вектор отдельно, заметим, что сначала вектор  $v$  перемещает рассматриваемую частицу из  $A$  в  $B$ , а затем вектор  $w$

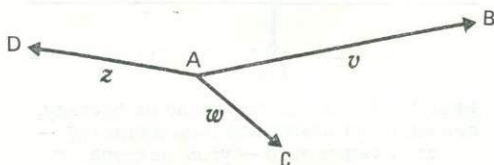


Рис. 2.7 Простая векторная диаграмма.

перемещает ее из  $B$  в  $C$ . В итоге частица попадет в точку  $C$ , так что получится *резльтирующий* вектор  $(v + w)$ , действующий из  $A$  в  $C$ . Такое геометрическое построение называется *правилом треугольника* для векторов. Если векторы будут иметь вдвое большую

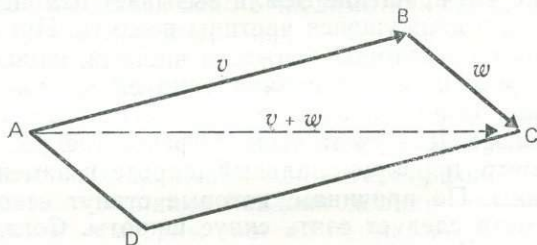


Рис. 2.8 Правило треугольника и параллелограмма.

длину (но такое же направление), то, очевидно, что длина результирующего вектора увеличится также вдвое. Так,

$$v + w = (v + w)$$

$$2v + 2w = 2(v + w).$$

Здесь очень важно обратить внимание на различие между сложением векторов и обычным арифметическим сложением. Как читатель мог убедиться, эти операции совершенно различны геометрически. Далее, умножение векторов на скаляр дает другой вектор. Заметим, однако, что умножение вектора на  $-1$  меняет его направление, оставляя неизменной длину, в результате чего получится вектор  $-v$ . Так, западный ветер можно представить как отрицательный восточный ветер. Возможности, вытекающие из этого факта, будут рассмотрены в следующем разделе.

Одним из следствий правила треугольника является построение параллелограмма  $ABCD$  путем зеркального отражения треугольника  $ABC$  на рис. 2.8 относительно результирующего вектора  $AC$ . Назовем площадь параллелограмма  $ABCD$  *векторной*, или *ориентированной*, площадью ( $S$ ) и векторов  $v$  и  $w$ , иначе:

$$S = v \wedge w. \quad (2.31)$$

Из тригонометрических соотношений, приведенных в разделах 2.1 и 2.2, следует:

$$S = AB \cdot BC \sin (\text{угла } ABC),$$

где  $S$  — длина вектора  $S$ . Здесь вновь векторные величины непосредственно связаны с геометрией. Построение параллелограмма, «натянутого» на два вектора, часто применяется, когда мы имеем дело с силами, приложенными к какой-либо точке, и в этом случае такой параллелограмм называется *параллелограммом сил*.

## 2.5 Компоненты

В разделе 2.3, где было введено понятие вектора, мы уже фактически оперировали *компонентами*, хотя явно их так и не называли. Ускорение, обусловленное гравитацией, направлено вертикально вниз, поэтому, когда мы рассматриваем, например, явление устойчивости склона, то одним из факторов, который мы обязаны принимать во внимание, должна стать *вертикальная компонента  $g$* , действующая на участок поверхности склона. Ясно, что если поверхность склона близка к горизонтальной, то компонента полной вертикальной силы, воздействующей на частицу породы или почвы вдоль склона, чрезвычайно мала. Всякий параметр, характеризуемый величиной и направлением, может быть разложен по любым другим направлениям. Мы можем взять горизонтальную или вертикальную, западную или северную или какие-либо другие компоненты и разложить их по любым требуемым направлениям. Если среди ветров, дующих в данном месте, нас интересуют западные ветры, то хорошей отправной точкой для анализа было бы выделение западной компоненты скорости ветра. Так, для ветра, дующего со скоростью 5 м/сек точно с запада, западная компонента равна +5 м/сек, а восточный ветер, дующий с такой же скоростью, будет иметь западную компоненту —5 м/сек. Таким образом, ветер, дующий точно с севера или юга, западной компонентой не обладает.

Очевидно, что сделанное нами преобразование заключается в приведении векторной величины к стандартному виду, в результате чего ее можно непосредственно сравнивать с другими характеристиками явления. Такое сравнение часто очень удобно, а получение компонент заключается в этом случае в использовании простых тригонометрических функций синуса и косинуса.

Рассмотрим ветер, дующий со скоростью 10 м/сек с северо-запада под углом  $30^\circ$  к северу или, как это принято говорить, под углом  $330^\circ$ , отсчитываемых от севера в направлении по часовой стрелке. В этой ситуации не представляет труда вычислить северную и западную компоненты. Обратимся к рис. 2.9. Процедура нахождения компонент является обратной по отношению к процедуре нахождения результирующего вектора, рассмотренной в разделе 2.4.

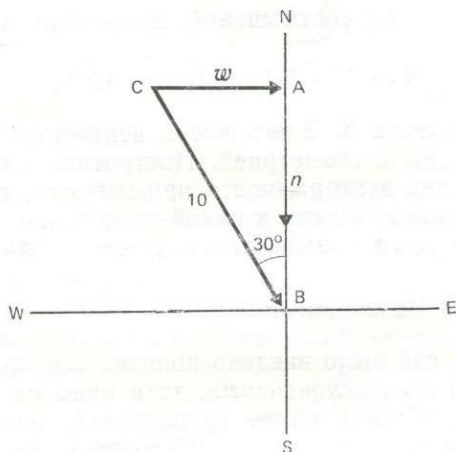


Рис. 2.9 Компоненты ( $\omega$  и  $n$ ) вектора скорости ветра, дующего в направлении  $330^\circ$ .

В данном случае результирующий вектор (10 м/сек под углом  $330^\circ$ ) известен и требуется найти два взаимно перпендикулярных вектора, дающих при сложении данный результирующий вектор. Мы можем выразить северную ( $n$ ) и западную ( $\omega$ ) компоненты в следующем виде:

$$\omega = 10 \sin 30^\circ = 5 \text{ м/сек}$$

и

$$n = 10 \cos 30^\circ = 8,66 \text{ м/сек.}$$

Разумеется, поскольку треугольник  $ABC$  прямоугольный, то  $n^2 + \omega^2 = 10^2$ .

Эти вычисления наводят на мысль, что мы можем получить формулу для выражения компонент вектора в более общем виде. До сих пор мы рассматривали наиболее простой случай, используя только два измерения, что дало нам возможность разобраться в сути дела. Поскольку пространство трехмерно, целесообразно расширить нашу систему отсчета до трех осей координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  и выразить векторные соотношения в виде общих алгебраических формул по каждой оси. Возьмем выходящий из начала координат вектор  $\mathbf{a}$ , который можно выразить через три взаимно перпендику-

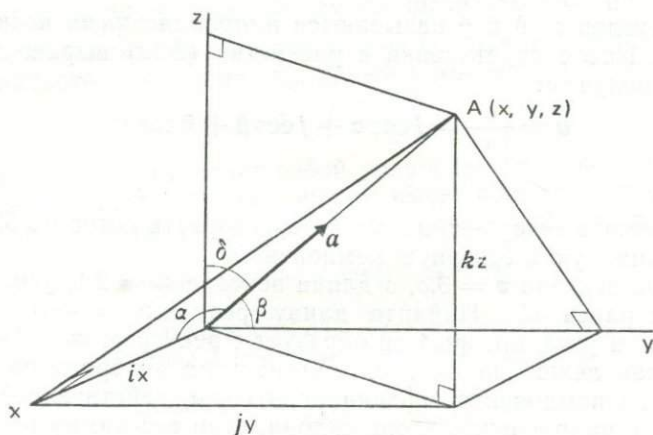


Рис. 2.10 Векторы в трехмерном пространстве.

лярных компоненты, причем пусть его концом является точка  $A(x, y, z)$ . Если мы зададим точку  $A$  с помощью вектора  $\mathbf{a}$ , то мы вправе назвать его *вектором положения*, поскольку он будет точно определять, где находится точка  $A$  относительно трех осей координат. Теперь можно задать вектор  $\mathbf{a}$  в виде:

$$\mathbf{a} = x + y + z.$$

Здесь целесообразно ввести понятие *единичного вектора*. Единичный вектор, как и следует из его названия, — это вектор, длина которого равна единице. Чтобы проводить более сложные вычисления, целесообразно выразить входящие в рассматриваемое выражение векторы через единичный вектор. Для обозначения единичного вектора, соответствующего вектору  $\mathbf{a}$ , используется символ  $\hat{\mathbf{a}}$ . Тогда вектор  $\mathbf{a}$  можно определить как  $a\hat{\mathbf{a}}$ . Во избежание путаницы длину, или модуль, вектора следует записывать как  $|\mathbf{a}|$ . Если мы обозначим единичные векторы вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  через  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  соответственно, то приведенное выше равенство можно переписать в виде:

$$\mathbf{a} = ix + jy + kz. \quad (2.32)$$

Из рис. 2.10 очевидно, что по теореме Пифагора

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}. \quad (2.33)$$

Аналогично *направление*, задаваемое вектором  $\mathbf{a}$ , определяется следующими равенствами:

$$x = |\mathbf{a}| \cos \alpha \quad (2.34)$$

$$y = |\mathbf{a}| \cos \beta \quad (2.35)$$

$$z = |\mathbf{a}| \cos \gamma. \quad (2.36)$$

Косинусы углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  называются *направляющими косинусами* вектора  $\mathbf{a}$ . После подстановки в равенство (2.32) выражений для  $x$ ,  $y$ ,  $z$  мы получим:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma. \quad (2.37)$$

### Задачи 2.5

- 2.5.1 Разложить северо-западный ветер, скорость которого 5,7 м/сек, на западную и северную компоненты.
- 2.5.2 Длина вектора  $\mathbf{v} = 3,3$ , а длина вектора  $\mathbf{w} = 2,1$ ; угол между ними равен  $45^\circ$ . Найдите длину результирующего вектора  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  и угол, который он образует с вектором  $\mathbf{w}$ .
- 2.5.3 Камень лежит на склоне, тангенс угла которого равен  $1/7$ . Какова компонента вертикальной силы, действующей на камень в направлении вдоль склона, если вес камня равен  $mg$ ?
- 2.5.4 Найдите направление и скорость ветра, являющегося результатом взаимного действия морского бриза, дующего на берег со скоростью 14 м/сек, и ветра, дующего с берега на море со скоростью 9 м/сек и под углом  $60^\circ$  к береговой линии.
- 2.5.5 Ветер, дующий в горизонтальном направлении со скоростью 2,5 м/сек, обуславливает подъем некоторой массы кучевых облаков со скоростью 5 м/сек. Определите направление и скорость движения облаков.

### 2.6 Прямая линия

Теперь мы можем вывести уравнение прямой линии в векторной форме. Предположим, что  $P$  — произвольная точка на прямой (рис. 2.11), а  $Q$  — другая точка на этой же прямой. Если точка  $O$

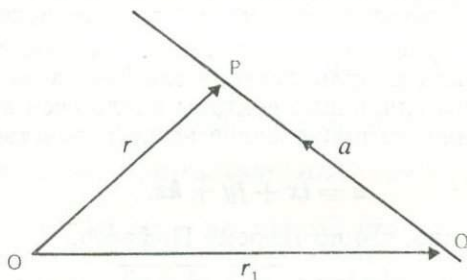


Рис. 2.11 Прямая линия.

является началом системы координат, то пусть положение точки  $P$  определяется вектором  $\mathbf{r}$ , а положение точки  $Q$  — вектором  $\mathbf{r}_1$ , но  $\overrightarrow{QP} = \mathbf{a}$ , тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}.$$

С другой стороны, было бы лучше выразить это уравнение через единичный вектор  $\hat{a}$  так, что вектор  $\vec{QP}$  будет равен произведению единичного вектора на скалярный множитель  $t$ , то есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\hat{a}. \quad (2.38)$$

Это уравнение представляет собой уравнения прямой линии в векторной форме. Теперь пусть точка  $P$  имеет координаты  $(x_1, y_1, z_1)$ , точка  $Q$  координаты  $(x_2, y_2, z_2)$ . Из уравнения (2.37) следует, что

$$\hat{a} = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma.$$

Тогда, используя уравнения (2.34), (2.35) и (2.36) для прямоугольной системы координат с центром в точке  $O$ , получим

$$\frac{(x_2 - x_1)}{\cos \alpha} = \frac{(y_2 - y_1)}{\cos \beta} = \frac{(z_2 - z_1)}{\cos \gamma} = t. \quad (2.39)$$

Выражение для каждого  $x$ ,  $y$  и  $z$  через  $t$  и направляющие косинусы называется *параметрической формой* уравнения прямой.

## 2.7 Скалярное произведение

Теперь представляется целесообразным посмотреть, что дает проектирование одного вектора на направление, задаваемое другим, или, иначе, *проекция* одного вектора на другой. Проектируя вектор  $\mathbf{a}$  на направление, задаваемое вектором  $\mathbf{b}$ , и умножая ре-

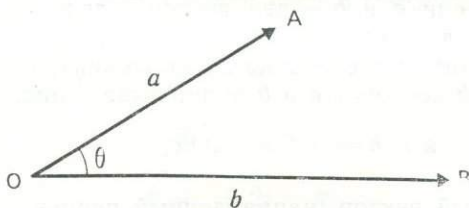


Рис. 2.12 Скалярное произведение.

зультат на длину вектора  $\mathbf{b}$ , из простых геометрических соотношений (рис. 2.12), получим выражение

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta. \quad (2.40)$$

Проекция вектора  $\mathbf{b}$  на вектор  $\mathbf{a}$ , умноженная на длину вектора  $\mathbf{a}$ , аналогично дала бы  $|\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \theta$ , то есть выражение (2.40). Эта операция называется *скалярным произведением* двух векторов, так что, обозначая скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  через  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , мы можем записать

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta. \quad (2.41)$$

Если каждый из векторов разложен по трем осям, то из уравнения (2.32) следует:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}. \quad (2.43)$$

Теперь, если перемножить эти разложения для получения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , то будем иметь

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \quad (2.44)$$

поскольку

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

так как угол  $\theta$  между этими векторами равен нулю, и

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

так как угол  $\theta$  между этими векторами равен  $90^\circ$ .

## 2.8 Векторное произведение

В то время как скалярное произведение двух векторов дает их комбинацию в скалярной форме, пропорциональную произведению одного вектора на другой, *векторное произведение* дает их комбинацию, имеющую как величину, так и направление, иными словами, другой вектор. Векторное произведение определяется следующим образом. Если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — два вектора, лежащих в одной плоскости, а  $\theta$  — угол между ними, измеряемый по направлению от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  (как мы увидим, эта оговорка очень важна), то векторным произведением  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  будет выражение:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \hat{\mathbf{c}}, \quad (2.45)$$

где  $\hat{\mathbf{c}}$  — единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой лежат вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (рис. 2.13)<sup>1</sup>. Векторным произведением  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  является вектор, длина которого равна  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$  и направление которого совпадает с направлением вектора  $\hat{\mathbf{c}}$ . Площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (уравнение 2.31), будет равна  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ . Заметим, что векторное произведение  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$  равно

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} &= |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin (-\theta) \hat{\mathbf{c}} = \\ &= -|\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin \theta \hat{\mathbf{c}} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

<sup>1</sup> Следует добавить: вектор  $\hat{\mathbf{c}}$  направлен так, что с его конца поворот от вектора  $\mathbf{a}$  к вектору  $\mathbf{b}$  виден происходящим против часовой стрелки. — Прим. ред.

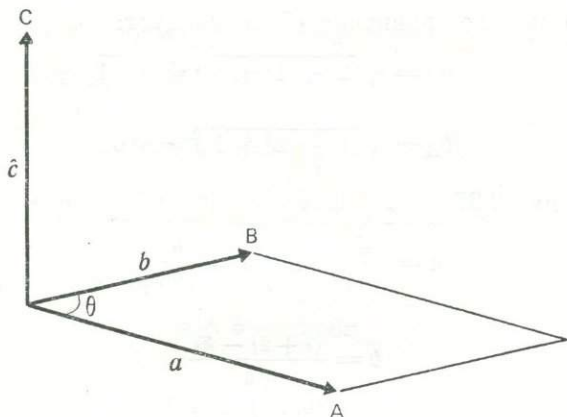


Рис. 2.13 Векторное произведение.

поскольку угол  $\theta$  измеряется теперь от  $b$  к  $a$ . Следовательно, скалярное произведение коммутативно, в то время как векторное произведение некоммутативно. Это всегда следует помнить при проведении вычислений.

## 2.9 Применение скалярного и векторного произведений

Предположим, мы хотим найти угол  $\theta$  между двумя векторами  $a$  и  $b$ , заданными их координатами. Это можно сделать с помощью правил как скалярного, так и векторного произведений, описанных в разделах 2.7 и 2.8. Пусть

$$a = 2i + j + 3k$$

и

$$b = i + 2j - k,$$

разложенные по трем осям  $x, y, z$ , где  $i, j, k$  — единичные векторы вдоль каждой оси.

Рассмотрим случай скалярного произведения. Поскольку:

$$\hat{a} = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma \quad (\text{из уравнения 2.37})$$

и поскольку

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0,$$

а

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1,$$

то

$$\hat{a}^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Теперь поскольку из уравнения (2.33) следует:

$$|a| = \sqrt{(2^2 + 1^2 + 3^2)} = \sqrt{14}$$

и

$$|b| = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 1^2)} = \sqrt{6},$$

а из уравнения (2.37)

$$\hat{a} = \frac{a}{|a|} \quad \text{и} \quad \hat{b} = \frac{b}{|b|},$$

то

$$\hat{b} = \frac{(i + 2j - k)}{\sqrt{6}},$$

$$\hat{a} = \frac{(2i + j + 3k)}{\sqrt{14}},$$

и из уравнения (2.41),  $\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos \theta$ , так что

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2i + j + 3k)(i + 2j + k)}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = \\ &= \frac{(2 + 2 - 3)}{\sqrt{84}} = \frac{1}{\sqrt{84}} = 0,1091, \end{aligned}$$

и тогда  $\theta = 83^\circ 44'$  (из таблиц).

Используя векторное произведение, запишем:

$$\hat{a} \wedge \hat{b} = \frac{(2i + j + 3k)}{\sqrt{14}} \wedge \frac{(i + 2j - k)}{\sqrt{6}}, \quad (2.47)$$

но для векторного произведения

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0,$$

поскольку синус угла между ними равен нулю. Однако, так как оси системы координат взаимно перпендикулярны и  $\theta = 90^\circ$ , а  $\sin \theta = 1$ , то

$$i \wedge j = k \quad \text{и} \quad -j \wedge i = k \quad (2.48)$$

$$j \wedge k = i \quad \text{и} \quad -k \wedge j = i \quad (2.49)$$

$$k \wedge i = j \quad \text{и} \quad -i \wedge k = j. \quad (2.50)$$

Рекомендуем читателю выучить наизусть эти векторные произведения и заметим, что изменение знака *одного* вектора каждой пары приводит к смене знака результата, а изменение знаков *обоих* векторов дает тот же самый результат. Перемена порядка векторов (скажем,  $i \wedge j$  на  $j \wedge i$ ) также приводит к смене знака резуль-

тата. Итак, в нашем примере векторное произведение примет вид:

$$\begin{aligned}\widehat{a} \wedge \widehat{b} &= \frac{(2i + j + 3k) \wedge (i + 2j - k)}{\sqrt{84}} = \\ &= \frac{4(i \wedge j) + 2(i \wedge -k) + (j \wedge i) + (j \wedge -k) + 3(k \wedge i) + 6(k \wedge j)}{\sqrt{84}} = \\ &= \frac{4k + 2j + 3j - k - i - 6i}{\sqrt{84}} = \frac{-7i + 5j + 3k}{\sqrt{84}}.\end{aligned}$$

Теперь, поскольку по определению

$$\widehat{a} \wedge \widehat{b} = \sin \theta \widehat{c},$$

то

$$|\widehat{a} \wedge \widehat{b}| = |\sin \theta|,$$

и отсюда

$$\sin^2 \theta = \frac{(-7i + 5j + 3k) \cdot (-7i + 5j + 3k)}{84},$$

(заметим, что здесь мы имеем скалярное произведение), то есть

$$\sin^2 \theta = \frac{49 + 25 + 9}{84}$$

$$\sin \theta = 0,9940$$

$$\theta = 83^\circ 44'.$$

### Задачи 2.9

Найдите скалярное  $(a \cdot b)$  и векторное  $(a \wedge b)$  произведения, а также величину угла  $\theta$  для следующих векторов, выраженных через единичные векторы  $i, j$  и  $k$ :

2.9.1  $a = 5i + 2j + k$

$$b = 3i + 5j + 2k.$$

2.9.2  $a = 2j - 6k$

$$b = 2i - 3j - k.$$

2.9.3  $a = 5,2i - 3,6j + 0,1k$

$$b = -9,7i + 3,1j + 10,2k.$$

## ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие математической функции было введено в главе 1. Функция определяется как зависимость между двумя переменными, например между  $x$  и  $y$ . Во-первых, эта зависимость должна быть фиксированным соотношением между  $x$  и  $y$ , определенным при любых допустимых значениях каждой переменной, и, во-вторых, должен быть задан вид этого соотношения. В функции  $y = 3x$  отношение  $y$  к  $x$  всегда 3:1, но в функции  $y = 3x^2$  отношение между двумя переменными возрастает по мере возрастания  $x$ . В этой главе мы будем рассматривать исключительно функции первого типа — *линейные функции*.

### 3.1 Основные свойства линейных функций

Общее уравнение линейной функции, связывающей  $y$  и  $x$  ( $y = mx + k$ ), было дано в главе 1, а его выражение в векторной форме было введено в предыдущей главе. Здесь мы будем считать, что  $k = 0$  и, следовательно, что  $x$  и  $y$  всегда связаны постоянным отношением  $1 : m$ , означаящим, что при изменении  $x$  на единицу  $y$  изменяется на  $m$  единиц. Беря последовательно значения  $x$ , равные 1, 2 и 3, получим значения  $y$ , равные  $1m$ ,  $2m$  и  $3m$ . Если  $m=2$ , то координаты пары  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $1 : 2$ , например (1, 2), (2, 4) и (3, 6). Если эти точки нанести на график, то линия, соединяющая их, будет прямой и пройдет через начало координат (0, 0). Это так называемая элементарная линейная функция вида  $y = 2x$  (рис. 3.1), и вместе с другими линейными функциями при  $k = 0$  она отражает случай постоянного отношения между  $x$  и  $y$ . Однако ясно, что хотя функция  $y = 2x^2$  имеет общую точку (0, 0) с функцией  $y = 2x$ , отношение между  $x$  и  $y$  при  $x = 1$  равно  $1 : 2$ , при  $x = 2$  равно  $1 : 4$ , при  $x = 3$  равно  $1 : 6$  и т. д. Эта нелинейная функция также изображена на рис. 3.1,

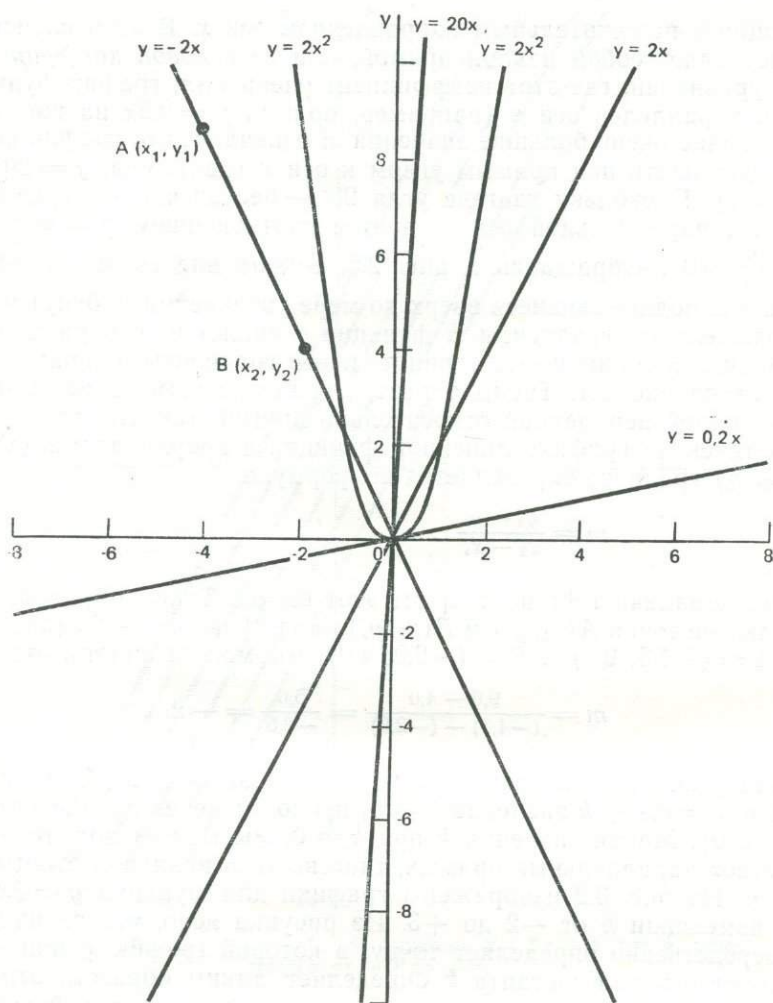


Рис. 3.1 Простые линейные функции:  $y = -2x$ ,  $y = 0,2x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 20x$  и нелинейная функция  $y = 2x^2$ .

Многие зависимости в физической географии можно выразить, используя линейные функции, только приближенно. Например, функция  $q = 5,1 a^{0,98}$ , приведенная в главе 1, близка к линейной, поскольку, как мы видели, линейная функция  $q = 5,1 a$  очень мало отличается от нее. Здесь просто член, содержащий  $a$ , умножен на  $a^{0,02}$  ( $a^{1,0} = a^{0,98} \cdot a^{0,02}$ ). Коэффициент  $m$  в общем уравнении, помимо того что он указывает величину отношения между  $q$  и  $a$  или между  $y$  и  $x$ , является также тангенсом угла между графиком линейной

функции и положительным направлением оси  $x$ . В этом случае он представляет собой наклон прямой, или ее *угловой коэффициент*. Для уравнений, где этот коэффициент очень мал, график функции почти параллелен оси  $x$  (например, прямая  $y = 0,2x$  на рис. 3.1). Аналогично очень большие значения  $m$  означают, что график функции идет почти под прямым углом к оси  $x$  (например,  $y = 20x$  на рис. 3.1). Поскольку тангенс угла  $90^\circ$  — бесконечность, уравнение прямой, параллельной оси  $y$ , дается соотношением  $y = \infty x$  или  $x = \frac{y}{\infty} = 0^1$ . Обращаясь к рис. 2.5, можно видеть, что графики функций, поднимающиеся вверх по мере увеличения  $x$ , будут иметь положительные градиенты, а функции с наклоном в обратном направлении должны иметь отрицательные градиенты, например  $y = -2x$  на рис. 3.1. Таким образом, градиент есть *скорость изменения* одной переменной относительно другой, так что для любых двух точек на графике линейной функции с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  градиент определяется по формуле

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.1)$$

Решение задачи 1.8.1 подтвердит этот вывод. Таким образом, взяв две любые точки  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  на графике  $y = -2x$  (рис. 3.1), где  $A = (-4,5; 9,0)$  и  $B = (-2,0; 4,0)$ , мы можем видеть, что

$$m = \frac{9,0 - 4,0}{(-4,5) - (-2,0)} = \frac{5,0}{-2,5} = -2.$$

Графики всех линейных функций, для которых в общем выражении  $y = mx + k$  значение  $k = 0$ , проходят через начало координат  $(0, 0)$ . Меняя значения  $k$  при  $k \neq 0$ , мы можем получить «семейство» параллельных прямых, тангенс угла наклона которых равен  $m$ . На рис. 3.2 изображены графики для функции  $y = 2x + k$  при изменении  $k$  от  $-2$  до  $+3$ . Из рисунка ясно, что величина  $k$  непосредственно определяет точку, в которой график функции пересекает ось  $y$ . Константа  $k$  определяет, таким образом, *отрезок, отсекаемый* на оси ординат, причем для прямой, заданной уравнением в общем виде, пересечение ее с осью  $y$  происходит в точке  $(0, k)$ . Связь между значениями температуры по Фаренгейту и Цельсию, использованная в задаче 1.8.2, представляет собой подходящий и хорошо известный пример использования линейных функций. Соотношение между одним градусом Фаренгейта и одним градусом Цельсия равно  $9 : 5$ , поскольку между точкой замерзания и точкой кипения воды по шкале Фаренгейта отсчитывается  $180^\circ$  ( $212 - 32$  градуса), а по шкале Цельсия между этими же точками —

<sup>1</sup> Запись вида  $y = \infty x$  или  $x = \frac{y}{\infty}$  носит условный характер. — Прим. ред.

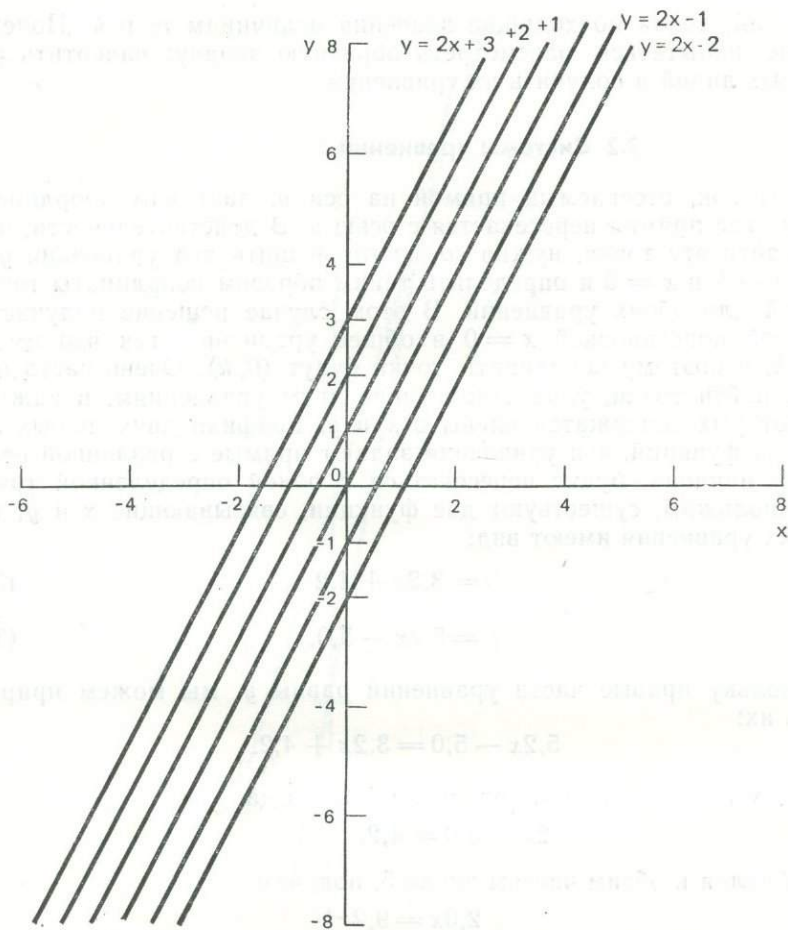


Рис 3.2 Семейство линейных функций  $y = 2x + k$ , где  $k$  изменяется от  $-2$  до  $+3$ .

$100^\circ$ . Поэтому функция, связывающая  $F^\circ$  с  $C^\circ$ , имеет тангенс угла наклона  $m$ , равный  $1,8$ , так что:

$$F = 1,8C + k.$$

Однако мы уже знаем, что точка замерзания по Цельсию равна  $0^\circ$ , по Фаренгейту  $32^\circ$ , и поэтому, подставляя  $F = 32$  и  $C = 0$  в наше уравнение, получим  $k = 32$ , а окончательное линейное уравнение будет иметь вид:  $F = 1,8C + 32$ . Читателю мы настоятельно советуем самостоятельно ознакомиться с графиками линейных

функций, давая подходящие значения величинам  $m$  и  $k$ . Полезно также попытаться рассмотреть обратную задачу: начертить ряд прямых линий и получить их уравнения.

### 3.2 Системы уравнений

Отрезок, отсекаемый прямой на оси  $y$ , дает нам координаты точки, где прямая пересекается с осью  $y$ . В действительности, чтобы найти эту точку, нужно *совместно* решить два уравнения  $y = mx + k$  и  $x = 0$  и определить таким образом координаты точки, общей для обоих уравнений. В этом случае решение получается простой подстановкой  $x = 0$  в общее уравнение, так что имеем  $y = k$ , и поэтому координаты точки будут  $(0, k)$ . Очень часто нам надо найти точки, удовлетворяющие двум уравнениям, в каждом из которых содержатся члены с  $x$  и  $y$ . Графики двух любых линейных функций, чьи уравнения задают прямые с различной величиной наклона, будут пересекаться в *одной* определенной точке. Предположим, существуют две функции, связывающие  $x$  и  $y$ , так что их уравнения имеют вид:

$$y = 3,2x + 4,2 \quad (3.2)$$

и

$$y = 5,2x - 5,0. \quad (3.3)$$

Поскольку правые части уравнений равны  $y$ , мы можем приравнять их:

$$5,2x - 5,0 = 3,2x + 4,2.$$

Вычтем из обеих частей уравнения  $3,2x$ , тогда

$$2x - 5,0 = 4,2.$$

Прибавляя к обеим частям число 5, получим:

$$2,0x = 9,2$$

и

$$\therefore x = 4,6.$$

Таким образом, обе функции имеют общее значение  $x = 4,6$ , иными словами, их графики пересекаются в точке, координата  $x$  которой равна 4,6. Подставляя это значение в любое из уравнений (3.2) и (3.3), можно найти соответствующую координату  $x$  координату  $y$ . То есть:

$$y = 5,2 \times 4,6 - 5,0 \quad (\text{из (3.3)})$$

и

$$\therefore y = 23,9 - 5,0 = 18,9.$$

Общая координата равна 18,9, а координаты точки пересечения графиков функции —  $(4,6; 18,9)$  (рис. 3.3). Оба уравнения (3.2) и

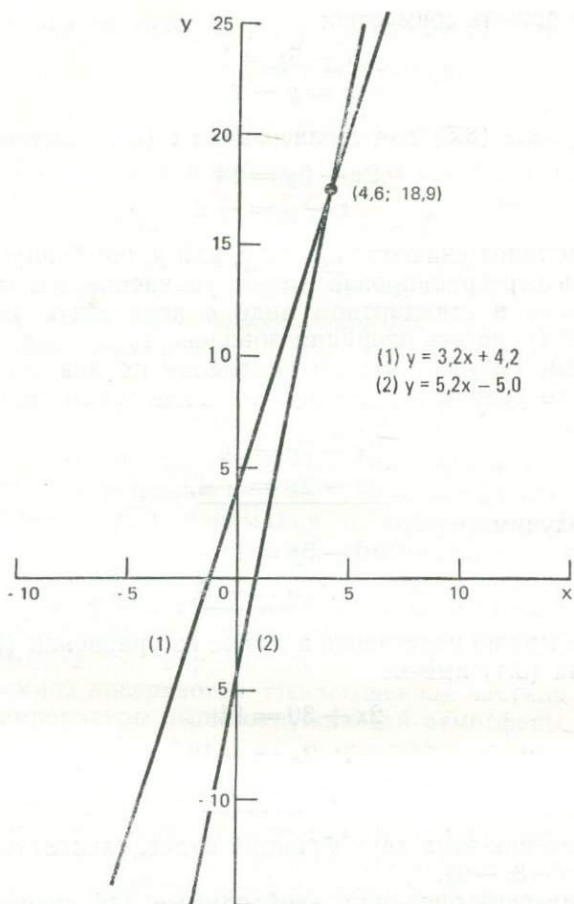


Рис. 3.3 Графическое решение системы уравнений  $y = 3,2x + 4,2$  и  $y = 5,2x - 5,0$ .

(3.3) написаны в стандартном виде  $y = mx + k$ . Однако очень часто уравнения бывают представлены в виде, отличном от стандартного. Например, уравнение  $4y - x = 16$  задано не в стандартном виде, но, прибавляя  $x$  к обеим частям уравнения, получим  $4y = x + 16$ , а затем, деля это равенство на четыре, получим  $y = \frac{1}{4}x + 4$ , так что  $m = \frac{1}{4}$  и  $k = 4$ . Очень часто желательно, хотя на практике и необязательно, при решении системы уравнений преобразовать члены в каждом уравнении так, чтобы все члены в обоих уравнениях, содержащие  $x$  и  $y$ , были сгруппированы в одинаковом порядке. Рассмотрим пример, в котором уравнения (3.4)

и (3.5) надо решить совместно:

$$2x - 5y = 14 \quad (3.4)$$

$$x = y - 2. \quad (3.5)$$

Перегруппировав (3.5) для согласования с (3.4), имеем:

$$2x - 5y = 14$$

$$x - y = -2.$$

Теперь мы должны уничтожить или  $x$ , или  $y$ , комбинируя оба уравнения. Вновь перегруппировав второе уравнение, мы можем получить уравнение в стандартном виде и подставить значение  $y$  в уравнение (3.4), но эта операция довольно трудоемка. Вместо этого мы можем, умножив второе уравнение на два, затем вычесть его из первого уравнения, и в результате получим значение  $y$ . Таким образом

$$2x - 5y = 14$$

$$2x - 2y = -4.$$

Вычитая, получим:

$$0 - 3y = 18$$

$$\therefore \underline{y = -6.}$$

Это решение можно подставить в любое из уравнений (3.4) и (3.5). Из уравнения (3.4) имеем:

$$2x + 30 = 14$$

$$\therefore 2x = -16$$

$$\therefore \underline{x = -8.}$$

Точка пересечения этих двух функций будет, следовательно, иметь координаты  $(-8, -6)$ .

Арифметические операции, необходимые для решения системы уравнений в более общем виде, сводятся к следующему. Пусть градиенты двух линейных функций будут  $m_1$  и  $m_2$ , а отрезки, отсекаемые ими на оси  $y$ ,  $k_1$  и  $k_2$ , так что уравнения имеют вид

$$y = m_1x + k_1 \quad (3.6)$$

$$y = m_2x + k_2, \quad (3.7)$$

тогда

$$m_1x + k_1 = m_2x + k_2.$$

Собирая члены с  $x$  в одну часть, а величины отсекаемых отрезков — в другую, получим

$$x(m_1 - m_2) = k_2 - k_1,$$

тогда

$$x = \frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2}. \quad (3.8)$$

Умножая уравнение (3.6) на  $m_2$  и уравнение (3.7) на  $m_1$ , получим

$$m_2y = m_2m_1x + m_2k_1 \quad (3.9)$$

и

$$m_1y = m_1m_2x + m_1k_2. \quad (3.10)$$

Вычитая (3.10) из (3.9) и собирая члены с  $y$  в левую часть уравнения, имеем:

$$\begin{aligned} y(m_2 - m_1) &= m_2k_1 - m_1k_2. \\ \therefore y &= \frac{m_2k_1 - m_1k_2}{m_2 - m_1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

то есть координаты точки пересечения графиков двух любых линейных функций будут равны

$$\left( \frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2}; \frac{m_2k_1 - m_1k_2}{m_2 - m_1} \right). \quad (3.12)$$

Теперь мы можем применить математические свойства линейных функций для решения простейших задач физической географии, в частности для понимания и интерпретирования связей между различными атмосферными вертикальными градиентами. Рассмотрим следующий пример. Степень устойчивости атмосферы определяется содержанием влаги в воздухе и степенью его насыщения, скоростью убывания температуры с высотой (вертикальный градиент температуры окружающей атмосферы — ВГА) и температурой у земной поверхности. Ненасыщенная частица воздуха, нагретая до температуры выше окружающей атмосферы, будет перемещаться вертикально вверх со скоростью, определяемой действующей на нее подъемной силой (которая сама является функцией разницы температур частицы воздуха и окружающей атмосферы), и будет охлаждаться при сухоадиабатическом процессе (сухоадиабатический вертикальный градиент температуры (СГТ) равен  $0,98^\circ\text{C}/100$  м подъема) до тех пор, пока воздух остается ненасыщенным. Следовательно, функция, связывающая температуру с высотой подъема при условии ненасыщения, имеет угловой коэффициент ( $m$ ) —  $0,98$ . Температура ( $T$ ) на данной высоте ( $z$  м  $\times 10^2$ ) для ненасыщенной частицы определяется этим угловым коэффициентом и первоначальной температурой ( $T_0$ ) у поверхности Земли, где  $z = 0$ . Таким образом, она равна величине отрезка, отсекаемого на оси ординат. В итоге функция, связывающая  $T$  с  $z$ , имеет вид:

$$T = -0,98z + T_0. \quad (3.13)$$

Если приземная температура равна  $20,0^\circ\text{C}$ , то на высоте  $z = 800$  м температура частицы воздуха будет:

$$T = -0,98 \times 8 + 20,0 = 12,2^\circ\text{C}.$$

Это уравнение справедливо до тех пор, пока частица воздуха остается ненасыщенной. Когда частица насыщается влагой, высвобож-

денне скрытой теплоты парообразования (теплоты конденсации) по мере ее подъема частично компенсируется убыванием температуры с высотой, и поэтому в описание этого процесса уже следует ввести вторую функцию, включающую влажноадиабатический вертикальный градиент температуры (ВГТ). Вообще говоря, ВГТ непостоянен, то есть он неравномерно убывает с высотой (это имеет место, если функция нелинейна), поскольку количество высвобождаемой скрытой теплоты зависит от абсолютного содержания влаги в частице и, следовательно, от ее температуры. Однако для простоты мы примем ВГТ постоянным и равным  $-0,50^\circ\text{C}/100\text{ м}$  (его значение на высоте примерно 1000 м при температуре  $10^\circ\text{C}$ ). И вновь возникает необходимость установить начальную температуру, с тем чтобы полностью определить функцию ВГТ:

$$T = -0,50z + k. \quad (3.14)$$

За высоту, на которой изменение температуры частицы воздуха подчиняется уравнению, содержащему ВГТ вместо СГТ, принимается высота, где первый раз достигается точка выпадения росы. Таким образом, если приземная температура равна  $20,0^\circ\text{C}$ , а точка росы  $11,0^\circ\text{C}$ , то искомую высоту можно определить, подставляя значение точки росы в уравнение (3.13) при  $T_0 = 20,0$ :

$$T = 20,0 - 0,98z \quad (3.15)$$

$$11,0 = 20,0 - 0,98z$$

и

$$0,98z = 9,0$$

$$z = 9,2 \text{ (или } 920 \text{ м).}$$

Эта высота отмечает точку, в которой поднимающаяся частица воздуха, охлаждающаяся по сухой адиабате, станет насыщенной, — это уровень адиабатической конденсации, выше которого начинает работать уравнение для ВГТ (3.14). Функция ВГТ будет, следовательно, иметь  $T = 11,0$  при  $z = 9,2$ , и, подставляя эти значения в уравнение (3.14), имеем

$$11,0 = -4,6 + k$$

$$k = 15,6,$$

тогда полное уравнение для ВГТ примет вид

$$T = -0,50z + 15,6. \quad (3.16)$$

Соотношение между уравнениями (3.13) и (3.16) показано графически на рис. 3.4. Оси координат здесь переставлены, как это принято в метеорологии, так что высота ( $z$ ), независимая переменная, отложена на оси ординат. Такая манипуляция просто способствует более удобной графической интерпретации. Понятие вертикального градиента температуры окружающей атмосферы также следует перевести на математический язык. Пока было сделано

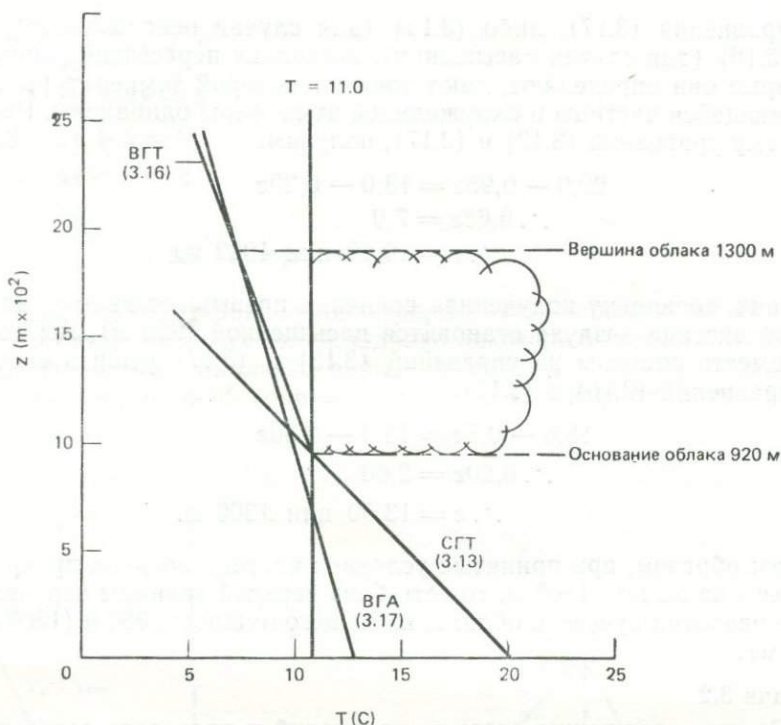


Рис. 3.4 Совместное решение уравнений с различными вертикальными градиентами.

ВГТ—влажноадиабатический вертикальный градиент температуры, ВГА—вертикальный градиент окружающей атмосферы, СГТ—сухоадиабатический вертикальный градиент.

предположение о том, что атмосфера неустойчива: температура воздуха в поднимающейся частице всегда выше, чем в окружающей атмосфере. В реальной атмосфере скорость изменения температуры с высотой никогда не бывает постоянной на всех уровнях, и любая функция, связывающая  $T$  с  $z$ , будет нелинейной и весьма сложной. Однако предположим, как мы делали это для влажноадиабатического процесса, что это изменение можно с удовлетворительной степенью точности аппроксимировать при помощи уравнения

$$T = -0,30z + 13,0, \quad (3.17)$$

показывающего, что температура у поверхности равна  $13,0^{\circ}\text{C}$ , а убывание температуры составляет  $0,3^{\circ}\text{C}/100$  м. График этого уравнения также представлен на рис. 3.4. Высота, на которой частица воздуха, нагретая у поверхности до  $20,0^{\circ}\text{C}$ , прекратила бы дальнейший подъем, определяется из решения системы, состоящей

из уравнения (3.17), либо (3.13) (для случая ненасыщения), либо (3.16) (для случая насыщения), поскольку пересечение прямых, которые они определяют, дают точку, в которой температуры поднимающейся частицы и окружающей атмосферы одинаковы. Решая систему уравнений (3.13) и (3.17), получим:

$$\begin{aligned} 20,0 - 0,98z &= 13,0 - 0,30z \\ \therefore 0,68z &= 7,0 \\ \therefore z &= 10,29 \text{ или } 1029 \text{ м.} \end{aligned}$$

Однако, поскольку полученная величина превышает высоту, на которой частица воздуха становится насыщенной (920 м), мы должны вместо системы из уравнений (3.13) и (3.17) решить систему из уравнений (3.16) и (3.17):

$$\begin{aligned} 15,6 - 0,5z &= 13,0 - 0,30z \\ \therefore 0,20z &= 2,60 \\ \therefore z &= 13,00 \text{ или } 1300 \text{ м.} \end{aligned}$$

Таким образом, при принятых условиях частица воздуха прекратит подъем на высоте 1300 м, то есть близ верхней границы вертикального развития кучевого облака, имеющего мощность 380 м (1300 м — 920 м).

### Задачи 3.2

Решите следующие системы уравнений и проверьте результаты графически

$$\begin{aligned} 3.2.1 \quad y &= 3x - 4 \\ y &= 12x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2.2 \quad y &= 1 - x \\ 17x - 3y &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2.3 \quad 5x - 2y &= 0 \\ x &= 2y - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2.4 \quad x + y &= 0 \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2.5 \quad 2y &= 5x + 2 \\ y &= 6. \end{aligned}$$

Постройте графики следующих функций для определения точек пересечения прямых и проверьте результаты, решая систему уравнений:

$$\begin{aligned} 3.2.6 \quad y &= 12x + 2 \\ y &= 2 - 12x. \end{aligned}$$

$$3.2.7 \quad \frac{1}{2}y = x + 1$$

$$2y = 4x + 5.$$

$$3.2.8 \quad 2x + y = 0$$

$$4x + y = 2.$$

### 3.3 Поворот осей

Изложенная теория удовлетворяет большинству математических и статистических целей. Однако некоторые статистические методы (например, анализ главных компонент, глава 4) предусматривают поворот осей координат с целью «трансформации» уравне-

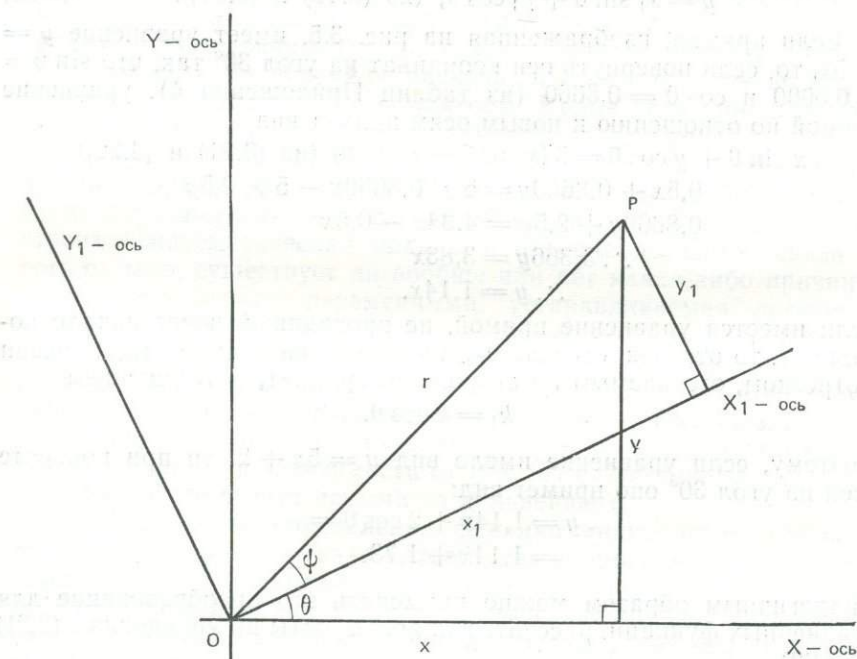


Рис. 3.5 Поворот осей.

ний. Рассмотрим точку  $P$  (рис. 3.5) с координатами  $(x, y)$  по отношению к осям  $X$  и  $Y$  и координатами  $(x_1, y_1)$  по отношению к осям  $X_1$  и  $Y_1$ . Пусть оси  $X$  и  $Y$  наклонены к осям  $X_1$  и  $Y_1$  под углом  $\theta$ , причем обе системы координат имеют общее начало, так что в обеих системах длина отрезка  $OP$  равна  $r$ . Прямая  $OP$  образует

угол  $\phi$  с осью  $X_1$  и угол  $(\theta + \phi)$  с  $X$ . Тогда

$$x = r \cos(\theta + \phi) \quad (3.18)$$

$$\therefore x = r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi, \text{ (из (2.13))}$$

но

$$x_1 = r \cos \phi \quad (3.19)$$

и

$$y_1 = r \sin \phi \quad (3.20)$$

и

$$\therefore x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \quad (3.21)$$

а

$$y = r \sin(\theta + \phi)$$

$$\therefore y = r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi, \text{ (из (2.12))}$$

так что

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta, \text{ (из (3.19) и (3.21)).} \quad (3.22)$$

Если прямая, изображенная на рис. 3.5, имеет уравнение  $y = 5x$ , то, если повернуть оси координат на угол  $30^\circ$  так, что  $\sin \theta = 0,5000$  и  $\cos \theta = 0,8660$  (из таблиц Приложения 4), уравнение прямой по отношению к новым осям примет вид:

$$x \sin \theta + y \cos \theta = 5(x \cos \theta - y \sin \theta) \text{ (из (3.21) и (3.22))}$$

$$0,5x + 0,8660y = 5 \times 0,8660x - 5 \times 0,5y$$

$$0,8660y + 2,5y = 4,33x - 0,5x$$

$$\therefore 3,366y = 3,83x$$

$$\therefore y = 1,14x.$$

Если имеется уравнение прямой, не проходящей через начало координат, то отрезок, отсекаемый на новой оси ординат ( $k_1$ ), связан с отрезком, отсекаемым на старой оси ординат, соотношением

$$k_1 = k \cos \theta.$$

Поэтому, если уравнение имело вид  $y = 5x + 2$ , то при повороте осей на угол  $30^\circ$  оно примет вид:

$$y = 1,14x + 2 \cos \theta =$$

$$= 1,14x + 1,73.$$

Аналогичным образом можно применять это преобразование для нелинейных функций, рассчитывая координаты по уравнениям (3.21) и (3.22).

### 3.4 Математические функции и статистические связи

Рассмотрим применение линейных функций в физической географии. Выше, на примере адиабатического процесса, мы получили функцию, связывающую температуру с высотой. Подобные функции задают однозначное соответствие, отражающее физический закон, который связывает в данном случае два параметра  $T$  и  $z$ . От-

метим, что подобное соотношение может быть получено и теоретическим путем (см., например, McIntosh, Thom, 1969; Davidson, 1978). С помощью этого соотношения можно определить величину  $z$  для данной величины  $T$ , так же как мы получали  $T$  в зависимости от  $z$ . В этом случае мы просто условимся, что роль  $z$  играет  $T$ . Такое соотношение представляет собой математическую функцию, точную и недвусмысленную.

В естественных науках, как уже было упомянуто в главе 1, установить взаимосвязи с подобной степенью точности не всегда представляется возможным. Как правило, мы используем скорее индуктивные, нежели дедуктивные методы исследования и опираемся при этом на лишь относительно точные полевые измерения. В своих попытках создать модель изучаемого явления или процесса в виде соответствующих функций мы можем рассчитывать только на некоторое приближение к реальности. В соотношении  $q = 5,1a^{0,98}$ , связывающем расход воды в реке с площадью водосбора (глава 1), изменение площади  $a$  не объясняет всех изменений расхода, так как на величину расхода, помимо размера водосбора, влияют и некоторые другие факторы. Кроме того, при выведении уравнения использовалась информация, полученная в поле, где ошибки неизбежны. Способ выбора математической функции, наилучшим образом описывающей данные натуральных наблюдений, зависит от репрезентативности самих данных, на основе которых строится математическая модель, и от природы самой связи (то есть от того, существует ли вообще или нет какая-либо причинная зависимость между переменными, устанавливаемая логически). В большинстве географических связей можно установить причинность, однако любая такая связь, как правило, не является полной, поэтому для *статистических* расчетов становится *важным* определение зависимых и независимых переменных. Использование связи, полученной для определения значений  $y$  в зависимости от  $x$ , в целях получения  $x$  в зависимости от  $y$  будет статистически неверным. Причины этого станут ясными из дальнейшего.

Необходимость определения функции «наилучшего соответствия» к наблюдаемым связям ставит два вопроса, в равной степени относящихся к нелинейным и многомерным случаям. Во-первых, график уравнения наилучшего соответствия должен быть наиболее близок ко всей совокупности наблюдений. Во-вторых, так как функция не полностью соответствует всем эмпирическим точкам, то необходимо оценить *степень достоверности* выявленной связи с тем, чтобы судить о возможности использования ее в целях прогнозирования. Для обеспечения одного или обоих этих требований существуют определенные статистические методы, к которым мы теперь и обратимся. Детальное описание и вывод этих методов выходит за рамки этой книги, необходимые же статистические формулы приведены в Приложении 5. Читатель может также обратиться к учебникам по статистике (например: S. G e g o y, 1970: Sta-

tistical methods and the geographer. London: Longman; E. C. Bryant, 1966: Statistical analysis. New York: McGraw-Hill; S. Siegel, 1956: Non-parametric statistics. New York: McGraw-Hill)<sup>1</sup>.

### 3.5 Линейное соответствие

Весьма простой путь нахождения математических функций, приблизительно описывающих связь между переменными, заключается в нанесении данных на график и проведении «на глаз» прямой, наиболее близкой ко всем точкам. К сожалению, в этом случае отсутствует надежный способ оценки соответствия прямой точкам на графике, и поэтому такой метод весьма субъективен. Однако со временем по мере накопления опыта можно достичь такого совершенства в построении прямых, что полученные на их основе функции будут мало отличаться от функций, построенных на основе статистических методов. Такая ситуация, в частности, имеет место, когда разброс точек вдоль прямой мал, то есть когда налицо высокая корреляция (см. Приложение 5.2). Прямую следует проводить так, чтобы минимизировать общее отклонение от нее всех точек. Пример прямой, проведенной «на глаз», показан на рис. 3.6. График показывает общую тенденцию уменьшения средней годовой температуры воздуха (по Цельсию) с высотой местности ( $m \times 10^2$ ) для Танзании, выявленную по данным 35 метеостанций (East African Meteorological Department, 1964). Корреляция довольно высока. Уравнение прямой можно определить, взяв на ней произвольные точки, например  $A(5,0; 24,2)$  и  $B(13,0; 20,0)$ , и подставив их координаты в общее уравнение  $y = mx + k$ :

$$24,2 = 5,0m + k \quad (3.23)$$

$$20,0 = 13,0m + k. \quad (3.24)$$

Чтобы исключить  $k$ , вычтем (3.24) из (3.23):

$$4,2 = -8,0m$$

$$m = -0,53 \quad (\text{или } -0,5 \text{ с точностью до одного знака после запятой}).$$

В этом примере нецелесообразно добиваться большей точности, используя более одного десятичного знака. Подставив величину  $m$  в уравнение (3.23), получим:

$$24,2 = 5,0 \times (-0,5) + k$$

$$k = 24,2 + 2,5 = 26,7.$$

Искомое уравнение будет вида

$$t = 26,7 - 0,5a. \quad (3.25)$$

<sup>1</sup> См. также: Ю. В. Линник, 1962: Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз. — Прим. ред.

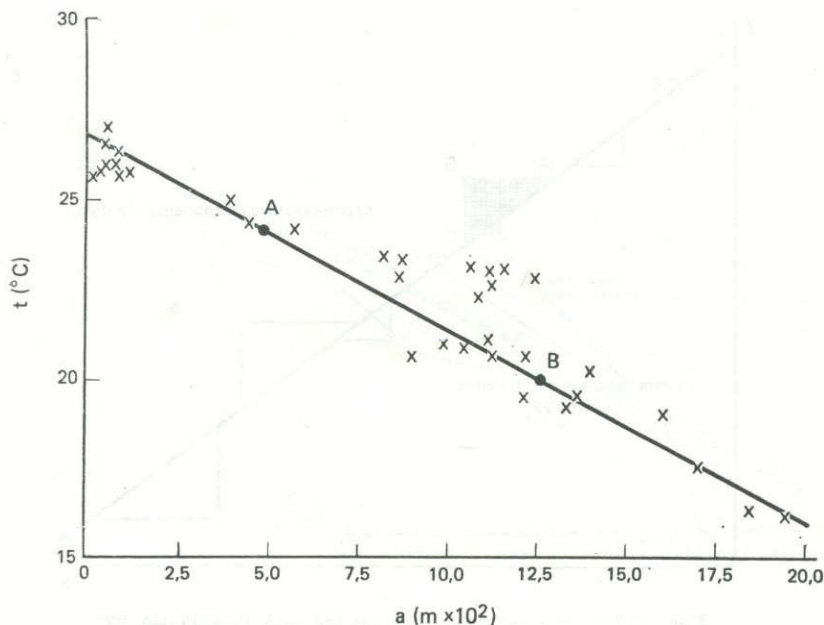


Рис. 3.6 Зависимость между средней годовой температурой воздуха  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) и высотой местности  $a$  ( $10^2$  м) для Танзании. Прямая проведена «на глаз».

Можно только заметить, что при  $a = 0$  (точка пересечения с осью ординат)  $t$  равно 26,9, и поскольку  $m$  определяется соотношением  $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$  (из равенства (3.1)), то функция, связывающая  $t$  с  $a$ , имеет вид

$$t = \left( \frac{20,0 - 24,2}{13,0 - 5,0} \right) a + 26,9$$

$$\underline{t = 26,9 - 0,5a.} \quad (3.26)$$

Обратите внимание, что уравнения (3.25) и (3.26) отличны. Различия связаны с общей неточностью получения функций таким методом. Такой способ удобен своей простотой, но зато отсутствует возможность статистических оценок. У нас нет возможности убедиться, что выведенное уравнение на самом деле является наилучшим для рассматриваемых данных. Мы не в состоянии также оценить степень достоверности получаемых с помощью этого уравнения значений  $t$  в зависимости от  $a$ .

Функцию можно определить более точно, если использовать статистические методы. Но, применяя статистику для получения прямой наилучшего соответствия, необходимо соединить объективность с возможностью оценить достоверность выявленной связи. Для получения *регрессионной* прямой наилучшего соответствия обычно

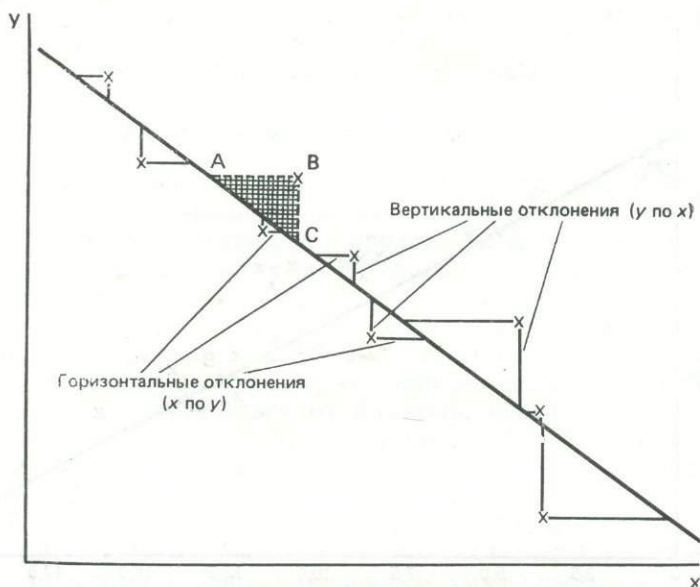


Рис. 3.7 Суммирование отклонений для различных регрессионных методов. Минимизация площадей (ABC) проведена по методу приведенной главной оси, горизонтальных отклонений для регрессии  $x$  по  $y$  по методу наименьших квадратов и вертикальных отклонений для регрессии  $y$  по  $x$ .

используются два статистических метода. Простейший из них включает вывод уравнения регрессии по методу *приведенной главной оси* (см. Приложение 5, раздел 3), разработанным Пирсоном в 1901 г. Ранее было установлено, что, минимизируя суммарное отклонение точек от прямой, можно добиться наилучшего соответствия прямой точкам на графике. Регрессионная прямая по методу приведенной главной оси получается при минимизации суммарной площади треугольников, лежащих между прямой и точками (например, треугольник ABC на рис. 3.7). За выводом соответствующих формул читателю следует обратиться к Miller, Kahn, 1962<sup>1</sup>. При выводе этих формул предполагается, что оба ряда данных по крайней мере приблизительно имеют нормальное распределение (см. Приложение 5, раздел 4 и главу 7). Наклон регрессионной прямой определяется отношением стандартных отклонений переменных  $y$  и  $x$  ( $\sigma_y$  и  $\sigma_x$ , см. Приложение 5, раздел 1). Следовательно,

$$m = \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

<sup>1</sup> См. примечание на стр. 68. — Прим. ред.

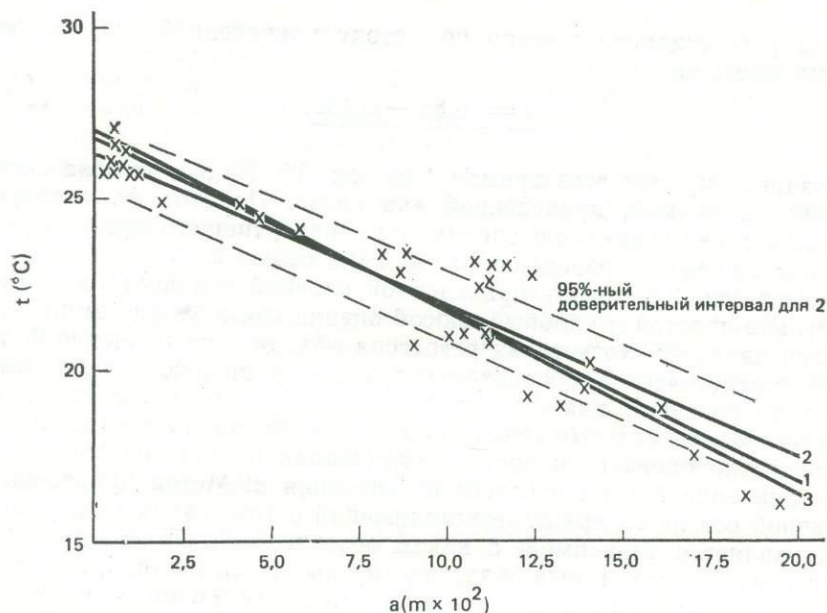


Рис. 3.8. Зависимость между средней годовой температурой воздуха  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) и высотой местности  $a$  ( $10^2$  м) для Танзании. Прямая 1 проведена по методу приведенной главной оси; прямая 2 — регрессия  $y$  по  $x$  по методу наименьших квадратов; прямая 3 — регрессия  $x$  по  $y$  по методу наименьших квадратов.

причем прямая проходит через точку, отвечающую средним значениям обоих рядов  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Из предположения о нормальности распределения вытекает «возможность» оценить степень достоверности связи. Для связи между температурой и высотой, изображенной на рис. 3.8, имеем  $\bar{t} = 22,74$ ,  $\bar{a} = 8,43$ ,  $\sigma_t = 2,93$  и  $\sigma_a = 5,97$ . Следовательно, наклон регрессионной прямой равен

$$m = \frac{2,93}{5,97} = 0,49.$$

Полученное значение не дает, к сожалению, никакой информации о *знаке* наклона прямой. Знак наклона необходимо определить заранее по общей тенденции расположения точек на графике. В случае большого разброса точек или если зависимость одного параметра от другого слабо выражена, применение метода наталкивается на большие трудности. В рассматриваемом примере наклон явно отрицателен, и поэтому, подставляя в общее уравнение значение  $m$ , равное  $-0,49$ , и значения средних по переменным  $t$  и  $a$ , получим

$$\begin{aligned} 22,74 &= -0,49 \times 8,43 + k \\ k &= 26,88, \end{aligned}$$

тогда регрессионная прямая по методу приведенной главной оси будет иметь вид

$$t = 26,88 - 0,49a. \quad (3.27)$$

Указанная прямая есть прямая  $l$  на рис. 3.8. Видно, что она очень близка к прямой, проведенной «на глаз». Но этот факт скорее отражает квалификацию специалиста, начертившего прямую, чем точность способа проведения прямой «на глаз».

Регрессия по методу приведенной главной оси дает нам относительно простой и удобный способ оценки связи между эмпирическими данными. Хотя такая регрессия обладает несравненно большей статистической обоснованностью по сравнению с субъективным проведением прямой «на глаз», мы способны оценить лишь достоверность *наличия* связи, но мы не в состоянии в этом случае объективно оценить точность предсказания по уравнению регрессии значения  $t$  в зависимости от значения  $a$ . Метод приведенной главной оси не содержит предположений о том, какая из переменных является зависимой, а какая независимой. Он может найти применение в некоторых областях научных исследований, где нельзя установить зависимость и независимость переменных, например при сравнении морфологических параметров в палеонтологии или биологических науках. В физической географии его применение по сравнению с другими регрессионными методами более ограничено. Это, возможно, связано с необходимостью установления причинности в большинстве физико-географических исследований. Однако в тех случаях, где причинность выявлять не требуется или где она себя не обнаруживает, метод оказывается весьма полезным для определения различий между связями, наблюдаемыми в одной и той же совокупности данных. Д. Дэвидсон (Davidson, 1977) пользовался этим довольно простым методом для характеристики горных почв среднего Уэльса. Там же, где зависимость и независимость определить можно и где важна точность предсказания, следует использовать более строгий регрессионный метод — *метод наименьших квадратов*. Он позволяет оценить точность величины зависимой переменной, предсказанной уравнением. Регрессия по методу наименьших квадратов соединяет в себе объективность построения прямой наилучшего соответствия с возможностью оценки надежности связи при помощи *коэффициента корреляции* (см. Приложение 5, раздел 2). При оценке значимости очень важно иметь возможность каким-либо образом установить, что оба ряда данных распределены более или менее нормально. Для получения уравнения регрессии по методу наименьших квадратов минимизируется суммарное отклонение точек от прямой, отсчитываемое параллельно *какой-либо* оси координат. Чем ниже коэффициент корреляции, тем больше различаются между собой два уравнения регрессии для каждой пары коррелируемых переменных. Таким образом мож-

но получить регрессию « $y$  по  $x$ », минимизирующую отклонение величин  $y$  от прямой, или регрессию « $x$  по  $y$ », минимизирующую отклонение величин  $x$  (см. рис. 3.7). Поскольку общепринято, что независимая переменная откладывается по оси  $x$ , а зависимая по оси  $y$ , то мы почти исключительно будем обращаться к регрессии  $y$  по  $x$ . Если бы мы взяли регрессию  $x$  по  $y$ , то не сумели бы учесть те изменения переменной  $y$ , которые не полностью обусловлены изменением переменной  $x$ .

Уравнение регрессии по методу наименьших квадратов получается в результате решения системы двух линейных уравнений (так называемых *нормальных уравнений*). Вывод этих уравнений выходит за пределы этой главы, как в смысле математического аппарата, содержащего в этом случае дифференциальные уравнения (глава 9), так и в смысле статистики. Требуемая система представлена уравнениями (3.28) и (3.29). Обозначая, как и раньше, параметры прямой регрессии через  $k$  и  $m$  и вспомнив, что символ « $\Sigma$ » означает «взять сумму значений», имеем:

$$nk + m \sum x = \sum y \quad (3.28)$$

$$k \sum x + m \sum x^2 = \sum xy \quad (3.29)$$

где  $n$  — размер выборки,

$\sum x$  — сумма всех  $x$ -ов,

$\sum y$  — сумма всех  $y$ -ов,

$\sum x^2$  — сумма всех  $x^2$ -ов,

$\sum xy$  — сумма всех произведений  $xy$ .

Тогда параметр  $m$  определяется по формуле

$$m = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)} \quad (3.30)$$

Заметим, что в большинстве учебников по статистике для обозначения параметров прямой регрессии вместо буквы  $k$  используется буква  $a$ , а вместо  $m$  пишется  $b$ . Во избежание путаницы мы и впредь будем употреблять в нашем тексте буквы  $k$  и  $m$ . Параметр  $k$  определяется равенством:

$$k = \bar{y} - m\bar{x} \quad (3.31)$$

В приведенном выше примере

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{a} &= 8,43 & \text{и} & \quad \bar{y} = \bar{t} = 22,74, & n &= 35 \\ x &= 295,04 & & & y &= 796,00 \\ x^2 &= 3735,85 & & & xy &= 6136,3. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнение (3.30), получим:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{(35 \times 6136,5) - (796,0 - 295,04)}{(35 \times 3735,9) - (295,04 \times 295,04)} = \\
 &= \frac{-20074,3}{130\,756,5 - 87\,048,6} = \\
 &= -0,46,
 \end{aligned}$$

а после подстановки в уравнение (3.31)

$$\begin{aligned}
 k &= 22,74 - (-0,46 \times 8,43) = \\
 &= 22,74 + 3,88 = \\
 &= 26,62.
 \end{aligned}$$

Отсюда уравнение прямой регрессии  $y$  по  $x$  по методу наименьших квадратов имеет вид

$$t = 26,62 - 0,46a. \quad (3.32)$$

На рис. 3.8 этому уравнению соответствует прямая 2. Вычисление параметров прямой регрессии  $x$  по  $y$  (прямая 3 на рис. 3.8) дает результат:

$$a = 51,86 - 1,91t$$

или, переписывая в виде, аналогичном (3.32)

$$t = 27,16 - 0,52a. \quad (3.33)$$

Обе прямые пересекаются в точке  $(\bar{a}, \bar{t})$ , и, следовательно, они в этой же точке пересекаются с прямой, проведенной по методу приведенной главной оси.

### Задачи 3.5

Решая задачи 3.5.1 и 3.5.2, нанесите данные табл. 3.1 и 3.2 соответственно на график, а затем проведите прямую «на глаз» и получите уравнения регрессии с помощью метода приведенной главной оси и метода наименьших квадратов.

Таблица 3.1

$x$	5,0	2,6	1,0	6,8	7,6	9,6	5,6	5,2	6,4	2,0	10,8
$y$	3,6	2,6	2,0	5,6	6,4	7,0	5,0	4,4	4,8	2,0	8,2
$\bar{x}$	5,53		$\bar{y}$ = 4,60		$\sigma_x$ = 2,83		$\sigma_y$ = 1,89				

Таблица 3.2

$x$	33	54	54	5	30	72	43	10	19	45	68	38	30	
$y$	16	35	24	55	35	25	50	40	50	31	28	35	43	
$\bar{x}$	38,5			$\bar{y}$ = 35,9				$\sigma_x$ = 19,7			$\sigma_y$ = 11,0			

### 3.6 Значимость результатов

Хотя данная книга не является учебником по статистике, здесь все же целесообразно будет обсудить значимость результатов, полученных на основе регрессионного анализа. Более общие вопросы, связанные с оценкой значимости и понятием вероятности, содержатся в книге Д. Дэвидсона (Davidson, 1978) или в любом фундаментальном учебнике по статистике (например, Bryant, 1966)<sup>1</sup>. В главе 1 и в данной главе уже подчеркивалось, что анализ очень многих зависимостей в физической географии связан с необходимостью извлечения выборок из некоторой совокупности данных. Кроме того, как уже указывалось, из-за инструментальных ошибок приборов и влияния ряда других независимых переменных мы в большинстве случаев не можем провести регрессионную прямую, которая проходила бы через все точки на графике. Прямая на рис. 3.8 довольно хорошо аппроксимирует точки, нанесенные на график. Из-за этого были очень близки оба уравнения регрессии и сами прямые, полученные по методу наименьших квадратов. Прямая, построенная по методу приведенной главной оси, проходит посередине между двумя этими прямыми. Если бы в целях прогнозирования мы пожелали использовать функцию, связывающую температуру с высотой, то с ее помощью могли бы с определенной степенью достоверности предсказать температуру для данной высоты. Теперь обратимся к совокупности данных, нанесенных на рис. 3.9. В этом примере приводится возможная связь между разностью температур, вызванной появлением бриза ( $T_c$ ), и первоначальной разностью температур воздуха и поверхности моря ( $T_s$ ) (Sumner, 1977b). Большой разброс точек на графике сильно затрудняет построение прямой «на глаз». Уравнения прямой регрессии по методу наименьших квадратов имеют вид:

$$T_c \text{ по } T_s: T_c = 0,08T_s + 0,65 \quad (3.34)$$

$$T_s \text{ по } T_c: T_c = 0,80T_s - 2,68. \quad (3.35)$$

Здесь очевидно большое различие между двумя регрессионными прямыми, и поэтому любая попытка использовать их для прогнозирования дала бы результат, далекий от действительности.

Таким образом, кроме расчетов самих уравнений регрессии, нам необходимо иметь способы для оценки степени нашего доверия к полученным результатам, иначе говоря статистической значимости связи. Ключевой момент такой оценки заключается в расчете коэффициента корреляции. Значение коэффициента корреляции всегда лежит между  $-1$  и  $+1$ . Коэффициент корреляции, равный  $+1$ , означает полную корреляцию, причем с возрастанием величин

<sup>1</sup> См. также: Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский, 1959: Краткий курс математической статистики для технических приложений. М., Физматгиз. — Прим. ред.

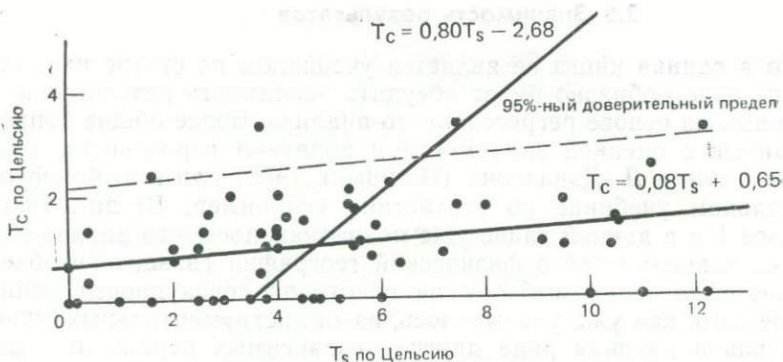


Рис. 3.9 Соотношение различий температур воздуха и поверхности моря при появлении бриза ( $T_c$ ) и без него ( $T_s$ ) для Лампетера, Уэльс, 1973—1975 гг.

ны  $x$  будет соответственно возрастать и величина  $y$ . В этом случае прямая регрессии будет проходить через все точки, нанесенные на график, и обе регрессионные прямые совпадут. Таким образом, тангенс угла наклона прямой регрессии представляет собой отношение двух стандартных отклонений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Коэффициент корреляции, равный  $-1$ , также означает полную связь, но в этом случае увеличение величины  $y$  связано с *уменьшением* величины  $x$ , и поэтому наклон прямой отрицателен, однако абсолютная величина углового коэффициента по-прежнему равна отношению стандартных отклонений. Как для положительной, так и для отрицательной корреляции при уменьшении величины ( $r$ ) прямые регрессии расходятся, пока при  $r = 0$  они не станут перпендикулярны друг к другу. Коэффициент корреляции для данных, представленных на рис. 3.8, равен  $-0,9372$ , а в последнем примере между параметрами  $T_c$  и  $T_s$  он равен только  $0,3108$ . Степень статистического объяснения зависимого переменного через независимое определяется значением  $r^2$ , так что в нашем первом примере мы можем вычислить около 88% изменений  $t$  через изменения  $a$ , в последнем же примере только 10% изменений  $T_c$  объясняются изменениями  $T_s$ .

Добавим, что значимость коэффициента корреляции зависит от размера выборки. Совершенно ясно, что если выборка слишком мала, то даже при высоком коэффициенте корреляции возрастает возможность ложного толкования связи, что приводит к неправильному виду уравнения регрессии. Поэтому значимость коэффициента корреляции определяется как вероятность того, что соотношение, полученное на основании выборки, будет справедливым для всей совокупности данных. Значимость коэффициента корреляции можно оценить, применив *критерий t Стьюдента* (см. Приложение 5, раздел 5) и соответствующие таблицы. Таблицы распределения  $t$  предполагают нормальное распределение данных. Этим вновь под-

черквивается необходимость убедиться с самого начала в том, что оба ряда данных распределены по закону, близкому к нормальному. Если применить  $t$ -критерий при коэффициенте корреляции  $-0,9372$  для оценки выборки размером  $n = 35$ , то обнаружится, что связь между температурой и высотой для Танзании значима при уровне значимости менее чем  $0,1\%$ , то есть мы можем более чем на  $99,9\%$  быть уверенными в том, что полученная прямая регрессии отражает связь, которая справедлива для любого места в Танзании. Во втором примере  $t$ -критерий Стьюдента равен  $2,5$  и при  $n = 61$  связь будет значима только при  $2\%$ -ном уровне значимости, так что в этом случае наша уверенность составляет  $98\%$ .

Если мы пожелаем использовать уравнение регрессии для целей прогноза, то следует вычислить *стандартную ошибку* (SE) предсказанных по уравнению значений  $y$ . Стандартная ошибка выражается через коэффициент корреляции и стандартное отклонение зависимой переменной по формуле

$$SE = \sigma_y \sqrt{(1 - r^2)}. \quad (3.36)$$

Тогда, опять считая, что данные распределены нормально, получим, что приблизительно  $95\%$  предсказанных по уравнению регрессии значений  $y$  будут лежать в интервале  $-2SE \leq y \leq +2SE$ . В первом примере стандартная ошибка величины  $y$  равна  $0,51$ , так что, например, на высоте  $500$  м предсказанная на основании уравнения (3.32) среднегодовая температура будет составлять  $24,3^\circ\text{C}$ , но в  $95\%$  случаев мы бы обнаружили, что температура на этой высоте лежит между значениями  $24,3 - 1,02^\circ\text{C}$  и  $24,3 + 1,02^\circ\text{C}$ , то есть в промежутке от  $23,3$  до  $25,3^\circ\text{C}$ . Проведя на графике две прямые, параллельные прямой, задаваемой уравнением (3.32), но на расстоянии  $t = -1,02$  и  $t = +1,02$  от нее, мы тем самым построим  $95\%$ -ные доверительные пределы уравнения регрессии. Действуя таким же образом, получим, что во втором примере стандартная ошибка составляет  $0,76$ , так что для  $T_s = 5^\circ\text{C}$  величина  $T_c$ , найденная из уравнения (3.34), будет равна  $1,05^\circ\text{C}$ . С достоверностью в  $95\%$  разность в  $5^\circ\text{C}$  между температурой поверхности моря и вышележащей воздушной массы будет вызвана изменением температуры в  $1,1^\circ\text{C} \pm 1,5^\circ$  при появлении бриза. Очевидно, что это очень плохое предсказание!

Ввиду недостатка места мы не можем провести здесь детальное рассмотрение корреляции и уровней значимости. Этими вопросами занимается статистика, и за более подробным объяснением читателю следует обратиться к соответствующим учебникам (например, Gregory, 1970; Bryant, 1966)<sup>1</sup>. Однако необходимо подчеркнуть, что для объективной статистической оценки достоверности предсказанных результатов метод наименьших квадратов следует предпочесть

<sup>1</sup> См. примечания на с. 68 и 75. — Прим. ред.

всем другим методам<sup>1</sup>. Пользуясь методом приведенной главной оси, нельзя получить стандартные ошибки для оценки предсказанных значений  $y$ , а можно только вычислить стандартную ошибку углового коэффициента и найти отрезки, отсекаемые на осях координат. Уравнение, полученное исключительно на основании прямой, проведенной «на глаз», не обладает никакой статистической значимостью. Читателю следует использовать коэффициенты корреляции и стандартные ошибки из табл. 3.1 и 3.2 (задачи 3.5.1 и 3.5.2) с целью нахождения доверительных пределов уравнений регрессии, которые требуется получить в этих упражнениях. Коэффициенты корреляции для этих данных равны соответственно 0,9853 и  $-0,6183$ .

### 3.7 Многомерные связи

Анализ линейных связей позволяет видеть основные свойства линейных функций. Простые графики таких функций в значительной степени способствуют пониманию категории функции в целом. Но физическая география, как правило, имеет дело с многомерными связями, поэтому полностью объяснить одну переменную через другую удастся крайне редко, даже если предположить отсутствие в наблюдениях инструментальной ошибки. Однако большую часть изменений зависимой переменной очень часто можно объяснить с помощью лишь одной независимой переменной. В примере, где рассматривалось изменение температуры с высотой для Танзании, общее статистическое объяснение равно 88%. Но очень важно подчеркнуть разницу между статистическим и научным объяснением. Отметим, что 88% статистического объяснения не обязательно означают 88% научного объяснения. Ошибки измерений, предположение о полной независимости физико-географических параметров сокращают возможность научного объяснения. Это, конечно, ни в коей мере не свидетельствует о том, что мы не должны вовлекать в круг нашего исследования все новые и новые факторы, с тем чтобы повысить уровень научного объяснения, и с помощью многомерной статистики не стремиться получить статистические модели, аналогичные двумерной корреляции и прямой регрессии. Разумеется, необходимые для этого вычисления (но не сам математический аппарат!) гораздо более сложны, зачастую требуют привлечения компьютера, и лишь по этой причине функции многих переменных не подвергаются здесь такому подробному рассмотрению, как более простые функции. Читателям, желающим полнее рассмотреть статистику для многомерных связей, мы рекомендуем, в частности, учебник Bryant, 1966, а тем, кто интересуется примене-

---

<sup>1</sup> Оценка, полученная методом наименьших квадратов, соответствует минимуму дисперсии оценки любой линейной комбинации параметров, и поэтому, в частности, она имеет столь большое значение. — *Прим. ред.*

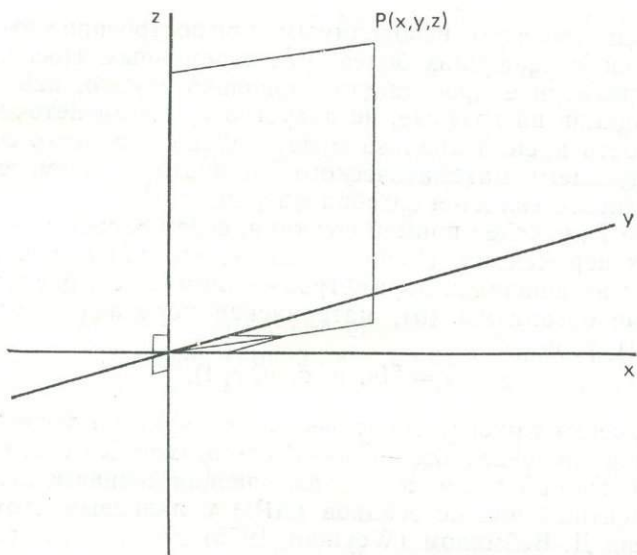


Рис. 3.10 Трехмерная система координат.

нием многомерных отношений при решении задач физической географии, — работы Miller, Kahn, 1962; Panofsky, Brier, 1958<sup>1</sup>.

Функции многих переменных в самом простом виде содержат всего три переменные (одну зависимую и две независимые.) Мы перенесем на трехмерный случай относительно простую методику изучения двумерных связей, но несколько обобщим ее, так как здесь появляется еще одна ось координат — ось  $z$ . Таким образом, получается система трех взаимно перпендикулярных осей, которые без особых трудностей можно изобразить и на обычном листе бумаги (рис. 3.10). Любую точку относительно этих осей можно выразить через три координаты. Графическим представлением функции, включающей три переменные (одну зависимую и две независимые), является *поверхность* в отличие от линии для случая только двух переменных (одной зависимой и одной независимой). Для расчета трендовых поверхностей, как, например, это сделал Дж. Грей (Gray, 1974) для скальных плато Шотландии, подходят математические функции двух независимых переменных, поскольку с их помощью легче аппроксимировать пространственное распределение данных. Для полного понимания множественной регрессии и корреляционного анализа необходимо знакомство с основными понятиями и операциями алгебры матриц (глава 4). Оно

<sup>1</sup> Советскому читателю мы рекомендуем обратиться к книгам, указанным в примечаниях на стр. 68 и 75, а также: М. К. Бочаров, 1971: Методы математической статистики в географии, М., «Мысль». — *Прим. ред.*

оказывается особенно необходимым при построении математических моделей, содержащих более трех переменных. Поскольку изобразить трехмерное пространство довольно трудно, как, впрочем, и сами функции на графике, не допустив при этом неточностей, то достоверность нашего анализа будет целиком зависеть от выбора соответствующего математического аппарата, важной составной частью которого является алгебра матриц.

В главе I приведен пример функции, содержащей несколько независимых переменных. Предполагалось, что тип почвы ( $s$ ) определяет ряд независимых параметров — климат ( $c$ ), растительность ( $v$ ), живые организмы ( $o$ ), материнская порода ( $p$ ), осадки ( $r$ ) и время ( $t$ ), то есть:

$$s = f(c, v, o, p, r, t). \quad (3.37)$$

Для построения такой математической функции на основе полевых наблюдений следовало бы применить многомерные статистические методы. Более простая модель, связывающая ливневые осадки ( $P_s$ ) и antecedentный индекс осадков ( $API$ ) с ливневым стоком ( $Q_s$ ), предложена Д. Вейманом (Weuman, 1975) для участка реки в Сомерсетшире (Англия):

$$Q_s = -3,16 + 0,35P_s + 0,34API.$$

В трехмерном пространстве эта зависимость представляет собой плоскость. В физической географии подобные функции нескольких переменных встречаются относительно редко, и даже в этом примере определение antecedentного индекса осадков связано с вычислением взвешенного среднего по предыдущим ежедневным осадкам в соответствии со степенной функцией (см. главы 5 и 6). Как  $P_s$ , так и  $API$  вызывают изменение величины  $Q_s$ , и все выражение дает 65% статистического объяснения общей изменчивости ливневого стока. Рассмотрение дополнительных независимых переменных, конечно, увеличивает процент статистического объяснения.

### 3.8 Уравнение неразрывности<sup>1</sup>

В физической географии существует много примеров функций, содержащих более двух переменных, научное объяснение которых является полным. Нередко эти функции используются только для описания какой-либо одной частной системы. Подход к изучению физико-географических процессов с позиций системного анализа был широко распространен в недавнем прошлом (см., например, Chorley, Kennedy, 1971; Russwurm, Sommerville, 1974). В системе должен иметь место баланс между входом и выходом, который

<sup>1</sup> Уравнением неразрывности обычно называется закон сохранения массы в дифференциальной форме. В этом разделе рассматриваются балансовые соотношения. — *Прим. ред.*

можно описать с помощью *уравнения неразрывности*. Такие уравнения применяются, например, в климатологии при описании радиационного баланса земной поверхности. Например, в уравнении (3.38) записано, что количество суммарной поглощенной радиации ( $R_n$ ) должно уравниваться разностью между приходом солнечной радиации на земную поверхность ( $R_c$ ) и собственным излучением поверхности ( $R_b$ ), а также отраженной прямой или рассеянной солнечной радиации ( $rR_c$ , где  $r$  — альbedo земной поверхности):

$$R_n = R_c(1 - r) - R_b. \quad (3.38)$$

Такое уравнение отражает равновесие входов системы (левая часть уравнения) и ее выходов (правая часть уравнения). Подобные примеры встречаются и в гидрологии. Например, в уравнении водного баланса поступление осадков ( $P$ ) полностью уравнивается потерями на испарение ( $E$ ), поверхностным ( $R$ ) и подземным стоком ( $S$ ) и аккумуляцией влаги в почво-грунтах ( $M$ ), так что

$$P = E + R + S + M. \quad (3.39)$$

Общий вид уравнения не изменится и для условий, когда аккумуляющая способность почв незначительна. Уравнения такого типа могут применяться также с целью оценки тех параметров, которые нельзя непосредственно измерить приборами. Например, довольно легко, хотя и с ограниченной точностью, измерить  $P$  и  $E$  в пределах площади водосбора и оценить сумму величин  $S$  и  $R$  по их вкладу в расход реки, измеренному на замыкающем створе. Полученные данные позволяют получить изменение запаса почвенно-грунтовых вод во времени. Другими словами, мы пытаемся определить *скорость* впитывания воды в почву и достижения ею горизонта грунтовых вод. Обратившись к теории движения воды через почву в условия переменного увлажнения (Hudson, 1971), мы обнаружим, что скорость движения и, следовательно, скорость увеличения запаса грунтовых вод в свою очередь зависят от количества уже имеющейся в почве влаги (см., например, Quipp, 1977). Таким образом, в системе появляется еще один фактор, оказывающий сильное влияние на другие переменные. При постоянной интенсивности осадков скорость поступления дополнительной влаги в грунтовые воды не будет постоянной. Например, как только почва насытится влагой и ее инфильтрационная способность будет исчерпана, на поверхности почвы станет скапливаться большее количество воды. Избыток поверхностной влаги будет удаляться посредством испарения и поверхностного стока. В итоге имеем, что в то время, как величина  $M$  уменьшается, величины  $R$  и  $E$  возрастают, компенсируя потери влаги, и равновесие, таким образом, сохраняется. Конкретный вид уравнения баланса может быть гораздо сложнее, чем может показаться на первый взгляд, и во многих случаях приходится решать дифференциальные уравнения (глава 9).

В физической географии большинство двумерных связей являются по своему характеру нелинейными. Подобным образом нелинейны и многие многомерные связи. При построении модели, основывающейся на данных полевых или лабораторных наблюдений, как правило, приходится иметь дело с нелинейными связями, и только в исключительных случаях — с линейными. Аппроксимация точек на графике с помощью кривых, а не прямых линий осложняется только необходимостью заранее установить вид связи, которая бы наиболее подходила для совокупности эмпирических точек. Многие связи содержат логарифмические функции, например:

$$y = 32,2 \lg x + 0,8. \quad (3.4)$$

Подстановка  $t = \lg x$  приведет это соотношение к виду, в котором обычно записывается линейная функция. Такая операция позволяет нам найти подходы к решению задач, содержащихся в главе 5. Однако, прежде чем закончить разговор о линейных отношениях, заметим, что существует еще один важный подход к рассмотрению регрессионных моделей, полученных в разделе 3.5, — это анализ главных компонент. Этот вид анализа мы рассмотрим в следующей главе, когда будем знакомиться с алгеброй матриц.

#### 4.1 Основные понятия

Матрицы, как и векторы, в настоящее время широко используются в физической географии. Их применение, в частности, приносит пользу в тех случаях, когда данные подвергаются статистическому анализу, как мы увидим это в разделе 4.10 при применении алгебры матриц для нахождения главных компонент. Фактически векторы представляют собой матрицу самого простого вида. Но все же, как правило, матрицы изображаются не в виде векторов, а в виде таблиц. Матрица наиболее простого вида называется *строкой* или *столбцом* в зависимости от того, в горизонтальном или соответственно вертикальном направлении расположена последовательность величин. Отдельный ряд чисел образует строку либо столбец матрицы. Поскольку направление само по себе считается одним из условий задания матрицы, то эти два типа матриц имеют разные названия: вектор-строка и вектор-столбец. Так, последовательность значений среднемесячных температур, нередко фигурирующая в научных статьях, составляет строку матрицы. Простое перечисление величин, расположенных на листе бумаги в направлении сверху вниз, аналогично образует столбец матрицы.

В общем случае матрицы состоят из некоторого количества строк и столбцов, отчего они производят полное впечатление таблицы величин. Для иллюстрации рассмотрим некоторые данные, изложенные в табличной форме, которая может быть встречена в любом тексте (табл. 4.1).

Таблица показывает, какой из отраслей географии: физической, экономической или региональной — отдают предпочтение студенты географического факультета университета. Видно, что в целом физическая география гораздо более популярна, чем экономическая или региональная, и что процент женщин, выбирающих эту специальность (67%), много больше, чем процент мужчин (33%), что, разумеется, вполне естественно. Исключив общее количество из каждой строки и столбца, мы получим матрицу размером  $3 \times 2$

Таблица 4.1

**Специализация студентов разного пола  
по разным отраслям географии**

	Мужчины	Женщины	Всего
Физическая	20	40	60
Экономическая	33	15	48
Региональная	7	4	11
<b>Всего</b>	<b>60</b>	<b>59</b>	<b>119</b>

(3 строки и 2 столбца), которую можно записать в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 33 & 15 \\ 7 & 4 \end{pmatrix},$$

где  $A$  — наименование матрицы. Отдельные члены матрицы называются также ее *элементами*, или *компонентами*, и общее выражение для матрицы  $A_{mn}$ , имеющей  $m$  строк и  $n$  столбцов, имеет вид

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15} & \dots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} & i_{25} & \dots & i_{2n} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} & i_{35} & \dots & i_{3n} \\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} & i_{45} & \dots & i_{4n} \\ i_{51} & i_{52} & i_{53} & i_{54} & i_{55} & \dots & i_{5n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_{m1} & i_{m2} & i_{m3} & i_{m4} & i_{m5} & \dots & i_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Эта матрица размером  $mn$ . В предыдущем примере размер матрицы был  $2 \times 3 = 6$ . Читатели, уже имеющие опыт программирования, возможно заметят близкую аналогию между матрицей  $A_{mn}$  и массивом размера  $mn$ , который, например, на языке Фортран записывается в виде  $A(m, n)$ . Если  $m = n$ , то говорят, что матрица, вид которой задан соотношением (4.1), имеет главную *диагональ*, которую составляют элементы  $i_{11}$ ,  $i_{22}$ ,  $i_{33}$ ,  $i_{44}$  и т. д. Матрица, у которой  $m = n$ , называется *квадратной*.

Характер изменений элементов любой матрицы зависит от того, *симметрична* она или *нет*. Например, в большинстве географических справочников имеются таблицы расстояний между центральными городами и периферийными населенными пунктами. Если окажется, что в составленной матрице ее часть, стоящая под главной диагональю, является точным зеркальным отображением части, расположенной над главной диагональю, то мы вправе сказать, что

последовательность городов, взятых по строкам и столбцам, одна и та же. Можно привести более простой отвлеченный пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что эта матрица симметрична, поскольку ее элементы зеркально отображаются относительно главной диагонали, а, скажем, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

несимметрична. Несимметричные матрицы часто называют *асимметричными*. По определению симметричная матрица является квадратной. Очень важный тип симметричной матрицы представляет собой *единичная*, или *тождественная, матрица* ( $I$ ), элементы которой, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные — нулю. Такая матрица обладает рядом полезных свойств, которые будут раскрыты в следующих разделах этой главы. Например, мы увидим, что единичная матрица при умножении матриц играет такую же роль, как и число один при обычном умножении, так что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Следует также заметить, что матрица, все элементы которой нули, называется *нулевой матрицей* и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

#### 4.2 Равенство матриц

Если даны две матрицы  $A$  и  $B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ a & b \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} c & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

то  $A = B$  тогда и только тогда, когда  $b = c = 0$  и  $a = 2$ . Аналогично, если взять две матрицы  $A$  и  $B$  со следующими элементами:

$$A = \begin{pmatrix} x - 2 \\ 5y + 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} y + 1 \\ 4 + x \end{pmatrix},$$

то  $A = B$  тогда и только тогда, когда

$$x - 2 = y + 1 \quad (4.4)$$

и

$$4 + x = 5y + 2. \quad (4.5)$$

Вычитая (4.5) из (4.4), получим

$$-6 = -4y - 1$$

или

$$y = 1\frac{1}{4}.$$

Подставляя найденное значение  $y$  в (4.4), будем иметь:

$$x - 2 = 1\frac{1}{4} + 1$$

или

$$x = 4\frac{1}{4}.$$

Ясно, что мы могли бы записать и решать систему уравнений также в матричной форме (см. раздел 3.2). Эти методы будут рассмотрены позже, после того, как мы введем операции сложения и умножения матриц. Рассмотрим случай, когда

$$A = \begin{pmatrix} x + y & 5 \\ 3 + 2y & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & y \\ 3x + 1 & x + y \end{pmatrix}.$$

Тогда для первой строки

$$x + y = 6 \text{ и } y = 5, \text{ так что } x = 1 \text{ и } y = 5,$$

но для второй строки

$$3 + 2y = 3x + 1 \text{ и } y = x + y, \text{ откуда } x = 0 \text{ и } y = -1.$$

Следовательно, матрица  $A$  не равна матрице  $B$  ни при каких значениях  $x$  и  $y$ .

### 4.3 Операции с матрицами

Многие арифметические операции с матрицами логически вытекают из аналогичных операций со скалярными величинами. Исключение составляют операции умножения матриц, как и операция умножения векторов. Прежде всего обратимся к простому примеру сложения матриц. Рассмотрим случай, когда для какой-либо местности известно среднее количество дней с дождем для осени, зимы и весны, причем это количество равно соответственно 64, 57 и 46 дням. Мы можем представить эти данные в виде вектора — строки  $A$ , где запись

$$A = (64 \quad 57 \quad 46)$$

является матрицей, содержащей  $1 \times 3$  элемента. Сумма элементов матрицы дает строку, представляющую собой суммарное количество дней с дождем за три сезона вместе. Если мы хотим оценить возможное количество таких дней за пять последовательных лет, мы должны просто найти произведение матрицы  $A$  на число пять:

$$5A = (320 \quad 285 \quad 230).$$

Ясно, что произведение матрицы на скаляр представляет собой простую операцию, при которой каждый элемент матрицы умножается на этот скаляр, в результате чего получается новая матрица.

Если мы теперь предположим, что для той же самой местности имеются данные о числе дней со снегом, и сосредоточим свое внимание на рассмотрении сезона, который характеризуется выпадением осадков как в виде дождя, так и снега, то мы можем составить две матрицы размером  $2 \times 3$  для иллюстрации операции сложения матриц. Если в году  $x$  за три соответствующих сезона было 70, 64 и 39 дней с дождем и 4, 10 и 8 дней со снегом, а год  $y$  состоял из 71, 38 и 32 дней с дождем и 0, 35 и 10 дней со снегом, то можно задать матрицу  $A$ , отражающую выпадение осадков в виде дождя, и матрицу  $B$ , отражающую выпадение осадков в виде снега:

$$A = \begin{pmatrix} 70 & 64 & 39 \\ 71 & 38 & 32 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 0 & 35 & 10 \end{pmatrix}.$$

В каждой матрице строки представляют собой данные для соответствующего года, а столбцы — выпадение осадков по сезонам. Год  $x$  (верхняя строка), очевидно, был относительно дождливым и мягким, в то время как год  $y$  был особенно снежным зимой. Складывая обе матрицы, получим третью матрицу  $C$ , характеризующую совместное выпадение осадков как в виде дождя, так и снега в каждом году. Получение такой матрицы сводится к сложению соответствующих элементов каждого массива, так что

$$\begin{pmatrix} 70 & 64 & 39 \\ 71 & 38 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 0 & 35 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 74 & 47 \\ 71 & 73 & 42 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, хотя эта операция является очень простым обобщением арифметики чисел, мы должны помнить, что складывать можно лишь те матрицы, которые имеют одинаковое число элементов в каждой строке и каждом столбце.

Для иллюстрации закона умножения матриц используем наши данные об осадках при решении простой экономической задачи. Местная транспортная компания могла бы подсчитать стоимость убытков из-за задержек, вызванных дождем, снегом и туманом, в районе, для которого получены указанные выше данные. Если мы суммируем количество дней, когда выпадают осадки каждого вида

вне зависимости от сезона для каждого года, мы можем получить матрицу размером  $2 \times 3$ , в которой третий столбец показывает количество дней с туманом, а два первых — число дней с осадками соответственно в виде дождя и снега, так что  $C_{11} = B_{11} + B_{12} + B_{13}$  и  $C_{12} = A_{11} + A_{12} + A_{13}$  и т. д. Эта новая матрица  $C$  имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 173 & 12 \\ 45 & 141 & 15 \end{pmatrix}.$$

Теперь обозначим стоимость задержек транспорта, вызванных снегом ( $D_{11}$ ), дождем ( $D_{21}$ ) и туманом ( $D_{31}$ ) как столбец матрицы  $D$ :

$$D = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы можно было перемножить две матрицы, необходимо, чтобы количество строк второй матрицы было равно количеству столбцов первой. Столь же важно, чтобы переменные, представляющие собой столбцы первой матрицы и строки второй, имели отношение к одному и тому же предмету. Это становится ясным при умножении матриц  $C$  и  $D$ , поскольку каждый элемент первой строки матрицы  $C$  мы должны умножить на соответствующий элемент матрицы  $D$ . В результате получается матрица  $CD$ :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 22 & 173 & 12 \\ 45 & 141 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \times 50 + 173 \times 10 + 12 \times 20 \\ 45 \times 50 + 141 \times 10 + 15 \times 20 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3070 \\ 3960 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Общая стоимость убытков за год  $x$  составила, таким образом, 3070 единиц, а за год  $y$  — 3960 единиц. Такие же правила умножения распространяются на матрицы любого размера при условии, что при умножении двух произвольных матриц  $A_{mn}$  и  $B_{pq}$ ,  $p$  должно равняться  $n$ . В приведенном выше примере матрица  $C$  имела размер  $2 \times 3$ , а матрица  $D$  —  $3 \times 1$ . В результате получилась матрица размером  $2 \times 1$ , то есть

$$C_{mn}D_{pq} = E_{mq}. \quad (4.6)$$

Для иллюстрации случая, когда вторая матрица имеет более одного столбца, мы можем приписать к матрице  $D$  дополнительный вектор-столбец (скажем, стоимость убытков, связанная со случайными факторами из-за выпадения снега, дождя или тумана). В этом

случае мы должны произвести следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
 CD &= \begin{pmatrix} 22 & 173 & 12 \\ 45 & 141 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 10 \\ 10 & 1 \\ 20 & 8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 22 \times 50 + 173 \times 10 + 12 \times 20 & 22 \times 10 + 173 \times 1 + 12 \times 8 \\ 45 \times 50 + 141 \times 10 + 15 \times 20 & 45 \times 10 + 141 \times 1 + 15 \times 8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 3070 & 489 \\ 3960 & 711 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Опять мы видим, что соотношение (4.6) остается в силе и что матрица, являющаяся произведением, имеет столько же *строк*, сколько имеет *первая* матрица, и столько же *столбцов*, сколько имеет *вторая*. Заметим, что порядок вычислений состоит в следующем: *строки первой* и *столбцы второй*. Произведение матриц некоммукативно. Так, в результате произведения  $DC$  матриц, указанных выше, но взятых в другом порядке, должна получиться матрица размером  $3 \times 3$ . В общем виде для матриц можно написать

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad (4.7)$$

### Задачи 4.3

Найдите произведение  $A \cdot B$ , где

$$4.3.1 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.3.2 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 10 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.3.3 Определите величины  $x$  и  $y$ , если матрица  $A$  = матрице  $B$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3y + 2x & 10x - y \\ 3x - 2y & 9y + x \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3x + y & 8x - 15 \\ 2x & 5x + y \end{pmatrix}.$$

### 4.4 Законы алгебры матриц

Прежде чем перейти к новым темам, касающимся матриц, целесообразно напомнить здесь законы алгебры матриц.

4.4.1 Ассоциативный закон для сложения и умножения

$$\begin{aligned}
 A + (B + C) &= (A + B) + C \\
 A(BC) &= (AB)C.
 \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Коммутативный закон (только для сложения)

$$A + B = B + A.$$

#### 4.4.3 Дистрибутивный закон для сложения и умножения

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$k(A + B) = kA + kB$$

$$\kappa(AB) = \kappa AB$$

$$(k + l)A = kA + lA$$

$$(kl)A = k(lA).$$

Законы алгебры матриц совпадают с законами алгебры чисел, за исключением коммутативного закона, который справедлив только для сложения матриц.

#### 4.5 Транспонированная матрица

Транспонированная матрица — это матрица, в которой элементы столбцов и строк поменялись местами. Столбцом транспонированной матрицы будет строка исходной матрицы и наоборот. В общем виде, если матрица  $A$  задана как

$$A = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \\ i_{31} & i_{32} \end{pmatrix},$$

то транспонированной матрицей, обозначаемой через  $A'$  или  $A^T$ , станет

$$A^T = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{21} & i_{31} \\ i_{12} & i_{22} & i_{32} \end{pmatrix}.$$

Далее, транспонированное произведение двух матриц  $A$  и  $B$  равно произведению транспонированных матриц  $B$  и  $A$  или

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (4.8)$$

Проиллюстрируем сказанное: пусть

$$A = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} j_{11} \\ j_{21} \end{pmatrix},$$

так что

$$A^T = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{21} \\ i_{12} & i_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B^T = (j_{11} \ j_{21}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} i_{11}j_{11} + i_{12}j_{21} \\ i_{21}j_{11} + i_{22}j_{21} \end{pmatrix} \\(AB)^T &= (i_{11}j_{11} + i_{12}j_{21} \quad i_{21}j_{11} + i_{22}j_{21}) \\B^T A^T &= (j_{11}i_{11} + j_{21}i_{12} \quad j_{11}i_{21} + j_{21}i_{22}).\end{aligned}$$

#### 4.6 Обратная матрица

В обычной арифметике мы манипулируем с числами, обратными к данным, которые можно определить из соотношения  $k \frac{1}{k} = 1$ , где число  $\frac{1}{k}$  является обратным для числа  $k$ . Аналогичную роль в алгебре матриц играет обратная матрица такая, что

$$AB = BA = I \text{ (единичная матрица)}, \quad (4.9)$$

где  $B$  — матрица обратная для  $A$ . Однако операция, позволяющая найти обратную матрицу для  $A$ , не столь проста, как аналогичная операция при обращении со скалярными величинами (числами).

Если мы возьмем матрицу  $A$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то из определения (4.9) нам известно, что

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому в соответствии с разделом 4.3 мы можем, произведя умножение, получить систему четырех уравнений:

$$2a + 4c = 1 \quad (4.10)$$

$$2b + 4d = 0 \quad (4.11)$$

$$6a + 8c = 0 \quad (4.12)$$

$$6b + 8d = 1. \quad (4.13)$$

Решая совместно уравнения (4.12) и (4.10), мы найдем:

$$a = -1, \quad c = \frac{3}{4},$$

а из (4.13) и (4.11)

$$b = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ есть обратная для } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

и мы можем записать

$$B = A^{-1}. \quad (4.14)$$

В общем виде для такого расположения матриц мы имеем

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так что

$$ap + qc = 1 \quad (4.15)$$

$$bp + qd = 0 \quad (4.16)$$

$$ra + sc = 0 \quad (4.17)$$

$$rb + sd = 1, \quad (4.18)$$

отсюда

$$p = d/(ad - bc) \quad (4.19)$$

$$q = -b/(ad - bc) \quad (4.20)$$

$$r = -c/(ad - bc) \quad (4.21)$$

$$s = a/(ad - bc). \quad (4.22)$$

Тогда обратная матрица  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  есть

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Выражение  $(ad - bc)$  называется *определителем* (детерминантом) матрицы и обозначается как

$$\det A, \text{ или } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \quad (4.24)$$

Определитель, как мы увидим в разделе 4.7, можно найти для квадратной матрицы любого порядка, хотя это и не так просто. Заметим, что некоторые матрицы не имеют обратной матрицы. В таких случаях определитель равен нулю. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

не имеет обратной, поскольку ее определитель  $(ad - bc)$  есть нуль. Действительно, все матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$$

не имеют обратной. Такие матрицы относятся к *вырожденным матрицам*, в то время как, согласно определению, матрицы, для которых существует обратная матрица, являются *невырожденными*.

#### 4.7 Определители

Определители особенно удобны в случае применения алгебры матриц для решения систем уравнений (раздел 4.9), хотя для матрицы размером более  $2 \times 2$  задача усложняется по сравнению с той, какая была приведена в предыдущем разделе.

Пусть нам необходимо найти определитель третьего порядка, то есть определитель матрицы  $3 \times 3$ , используя систему обозначений уравнения (4.1). Мы можем, при желании, получить затем общее выражение для определителя, используя способ, подобный тому, какой представлен равенствами (4.15)–(4.23). Хотя такой способ довольно трудоемок, мы можем найти определитель квадратной матрицы *любого* размера относительно простым образом.

Определитель произвольной матрицы  $A_{mn}$  может быть найден из выражения

$$|A| = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{i+j} a_{ij} \alpha_{ij}, \quad (4.25)$$

где  $a_{ij}$  — это элемент  $i$ -той строки  $j$ -того столбца, а  $\alpha_{ij}$  — называется «минором» элемента  $a_{ij}$ . Минор связан с алгебраическим дополнением ( $A_{ij}$ ) к элементу  $a_{ij}$  следующим соотношением:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}. \quad (4.26)$$

Используя обозначения из равенства (4.1), выделим миноры элементов  $a_{11}$  и  $a_{21}$  в матрице размером  $3 \times 3$ , как это показано в (4.27):

$$\begin{array}{ccc|cc}
 \textcircled{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & & \\
 \textcircled{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & & \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & & 
 \end{array} \quad (4.27)$$

Тогда

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4.28)$$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (4.30)$$

и т. д. Здесь следует обратить внимание на индексы, означающие положение элементов в этих матрицах. В каждом случае строка и

столбец ( $i$  и  $j$ ), где находится  $a_{ij}$ , исключаются из рассмотрения, а элементы, стоящие в четырех углах той матрицы, которая остается от матрицы  $A$ , составляют новую матрицу, определитель которой есть минор  $\alpha_{ij}$ . Таким образом, мы разлагаем матрицу большого размера на ряд матриц меньшего размера, для которых вычисление определителя можно провести уже непосредственно. Для матриц размером более  $3 \times 3$  мы должны повторить этот процесс несколько раз, пока не получим ряд матриц размером  $2 \times 2$ . Минор ( $\alpha_{ij}$ ) с точностью до знака является алгебраическим дополнением к элементу  $a_{ij}$ . Зная алгебраические дополнения к каждому элементу  $a_{ij}$ , относительно легко найти определитель для матрицы большего размера, но, прежде чем обратиться к рассмотрению примеров, следует подчеркнуть два важных момента. Они упрощают операции и проясняют определение, даваемое равенством (4.25). Во-первых, знак алгебраического дополнения  $A_{ij}$ , определяемый множителем  $(-1)^{i+j}$ , просто чередуется при чередовании положения элементов. Так, знаком для  $\alpha_{11}$  является  $+$ , тогда как для  $\alpha_{12}$  —,  $\alpha_{13}$   $+$ ,  $\alpha_{21}$  — и т. д. Таким образом, мы можем получить матрицу знаков алгебраических дополнений  $A_{ij}$ , которая для матрицы размером  $3 \times 3$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Во-вторых, мы можем вычислить определитель, используя элементы только *одного* столбца ( $a_{ij}$ , где  $j$  фиксировано), а  $\alpha_{ij}$  вычислить из оставшихся строк и столбцов (см. равенства (4.27)–(4.30)). В случае, если при нахождении определителя используется какой-либо другой столбец, то результат должен получиться тем же самым, если мы, разумеется, не ошиблись в расчетах.

Возьмем теперь матрицу  $A$  вида

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Беря элементы первого столбца и подставляя их в равенство (4.25), имеем

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \times (-1 - 4) - 2 \times (-2 + 1) + 1 \times (-8 - 1) = \\ &= -22. \end{aligned}$$

Проводя вычисления со вторым столбцом, имеем

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \times (-2 + 4) + 1 \times (-3 - 1) + 1 \times (-12 - 2) = \\ &= -22, \end{aligned}$$

то есть получен такой же результат, как и прежде.

#### 4.8 Присоединенная матрица

Для того чтобы мы могли теперь применить определители для нахождения обратной матрицы, нам необходимо ввести понятие *присоединенной* матрицы  $A^*$ . Присоединенная матрица является просто транспонированной матрицей алгебраических дополнений всех элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A_{mn}$ . Так, для матрицы  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

матрицей алгебраических дополнений для матрицы  $A$  является

$$B = \begin{pmatrix} (2-6) & (6-0) & (3-0) \\ (4-4) & (10-0) & (10-0) \\ (12-4) & (30-12) & (5-6) \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 8 & 18 & -1 \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица  $B$  ( $B^T$ ) имеет вид:

$$B^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 6 & 10 & 18 \\ 3 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  равенства (4.23) имеет присоединенную матрицу  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Теперь общее выражение обратной матрицы для матрицы  $A$  может быть записано в виде

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}. \quad (4.33)$$

### Задачи 4.8

Найдите определители, а затем обратные матрицы для следующих матриц:

$$4.8.1 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4.8.2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4.8.3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

### 4.9 Связь между координатами точек и решением систем уравнений

Теперь мы можем наметить параллель между системами координат в двухмерном  $(x, y)$  и трехмерном  $(x, y, z)$  пространствах и простейшими матрицами. Координаты точки  $(1, 2)$  на плоскости непосредственно соответствуют элементу  $i_{12}$  матрицы, имея в виду, что если на графике ординаты отсчитываются в направлении снизу вверх, то в матрице столбцы рассматриваются сверху вниз. Как уже указывалось, линейные уравнения, содержащие переменные  $x$  и  $y$  или  $x, y$  и  $z$ , можно представить в матричной форме. В этом случае аналогия очевидна. Например, можно переписать уравнение  $y = 5x + 8$  в матричной форме как

$$(5-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-8).$$

Если мы теперь рассмотрим систему двух уравнений, каждое из которых содержит члены с  $x$  и  $y$ ,

$$5x + 5y = 15 \quad (4.34)$$

и

$$6x + 2y = 14, \quad (4.35)$$

то можно переписать ее в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Если положить

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad k = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то мы можем переписать уравнение в виде  $AX = k$ . Умножая слева обе части этого равенства на матрицу  $A^{-1}$ , обратную для матрицы  $A$ , мы будем иметь

$$A^{-1}AX = A^{-1}k,$$

так что

$$IX = A^{-1}k, \text{ поскольку } AA^{-1} = I,$$

и тогда

$$X = A^{-1}k. \quad (4.37)$$

Таким образом, решение системы уравнений можно получить путем умножения матрицы, обратной для  $A$ , на  $k$ . Обратной матрицей в соответствии с равенством (4.24) будет:

$$A^{-1} = \frac{1}{10-30} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} k = \\ &= \begin{pmatrix} -0,1 & 0,25 \\ 0,3 & -0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или  $x = 2$  и  $y = 1$ .

На первый взгляд, читателю может показаться, что системы уравнений гораздо проще решать обычными методами, изложенными в главе 3. Но во-первых, мы просто показали здесь саму возможность решения систем уравнений с применением матриц, а во-вторых, заметим, что матричная форма решения таких уравнений особенно целесообразна, когда эта задача решается численно на ЭВМ. В этом случае массивы переменных могут храниться в машине в виде матриц, как было показано выше. Применение более традиционных арифметических методов для решения систем с большим количеством уравнений, каждое из которых содержит много неизвестных, — процедура, как правило, весьма утомительная, в то же время матричные методы решения легко программируются для компьютера. В этом и заключается их главное достоинство. Рассмотрим пример решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Зададим исходную систему уравнений в виде:

$$3x + 2y + z = 14 \quad (4.38)$$

$$2x + y - 4z = 4 \quad (4.39)$$

$$x - y - z = 0. \quad (4.40)$$

Теперь мы должны найти обратную матрицу, используя методы, изложенные в разделах 4.7 и 4.8:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Нами уже был найден определитель такой матрицы (равенство (4.32)):

$$|A| = -22.$$

Помня о правиле чередующихся знаков, получим матрицу алгебраических дополнений к матрице  $A$ :

$$\begin{pmatrix} +(-1-4) & -(-2-(-4)) & +(-2-1) \\ -(-2-(-1)) & +(-3-1) & -(-3-2) \\ +(-8-1) & -(-12-2) & +(+3-4) \end{pmatrix},$$

которая принимает вид:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ +1 & -4 & +5 \\ -9 & +14 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -5 & +1 & -9 \\ -2 & -4 & +14 \\ -3 & +5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда решением  $X$  будет:

$$X = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} -5 & +1 & -9 \\ -2 & -4 & +14 \\ -3 & +5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или  $x = 3$ ,  $y = 2$  и  $z = 1$ . Читателю предоставляется возможность проверить результат, используя метод решения систем уравнений, изложенный в главе 3.

#### Задачи 4.9

Решите следующие системы уравнений, применяя алгебру матриц. Проверьте полученные ответы, решая системы обычным путем.

4.9.1  $3x - 4y + 2z = 19$   
 $2x + y - 4z = 2$   
 $x + 5y + z = 7.$

4.9.2  $2y - 3x + 4z = 10$   
 $x = y + z - 4$   
 $2z + y - 6x = 23.$

$$4.9.3 \quad 3x + 4z - 2y = 6.$$

$$2y - 3x - 4z = 6$$

$$3z + 2y - 10x = 1.$$

#### 4.10 Собственные векторы и собственные значения

Одно из наиболее важных применений матриц, возможно, заключается в использовании их в некоторых методах статистического анализа. Наиболее известен метод, при помощи которого мы выбираем «главные компоненты», объясняющие дисперсию данных в многомерном случае. Анализ главных компонент пытается объяснить всю дисперсию в новых осях, так что первая главная компонента выражает возможно большую часть дисперсии, а каждая последующая компонента все меньшую и меньшую ее части. Общая дисперсия в целом объясняется суммой дисперсий каждой компоненты. Сам метод, а отсюда и природу собственных векторов и собственных значений, которые необходимо вычислить, пожалуй, лучше всего можно понять, если обратиться к графику простой зависимости между двумя переменными (см. рис. 4.1).

На графиках 4.1, *a* — *г* — простая взаимосвязь между двумя переменными задана двумя способами. Наименования переменных и их реальный смысл в данном случае не имеют значения.

В первом примере (рис. 4.1, *a*) изображена ситуация, когда коэффициент корреляции между двумя переменными равен нулю и линии равной вероятности представляют собой ряд концентрических окружностей, координаты центра которых равны средним значениям по каждой переменной из представленных на графике. Если мы предположим, что оба ряда данных распределены нормально (см. главу 7) с нулевым средним значением и что по осям отложены величины стандартных отклонений, то на рис. 4.1, *a* мы можем видеть, что величинам *x*, меньшим одного стандартного отклонения, соответствует множество величин *y*, вероятность которых для этих *x* определяется по кривой нормального распределения. На рис. 4.1, *б* показан случай, когда коэффициент корреляции между переменными равен 0,5. Как уже отмечалось в главе 3, этому коэффициенту корреляции соответствуют две прямые регрессии, проведенные по методу наименьших квадратов. Косинус угла между двумя этими прямыми равен величине коэффициента корреляции. Поскольку в данном примере корреляция между двумя переменными выше, то линии равной вероятности в результате преобразуются, как это видно на рисунке, в эллипс, длинная ось которого лежит между двумя линиями регрессии вдоль одной главной оси, а короткая перпендикулярна ей. Эти две оси и определяют первую и вторую главные компоненты (рис. 4.1, *б*). Рис. 4.1, *в* содержит пример полной связи между двумя переменными. Тогда обе прямые регрессии

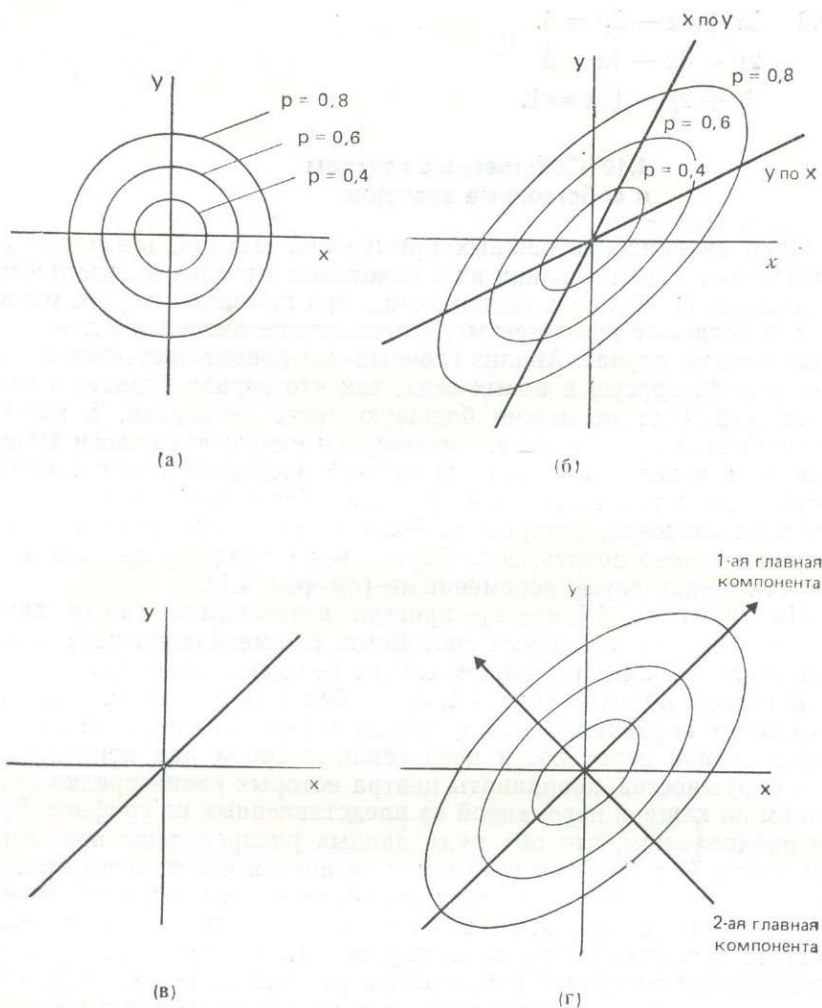


Рис. 4.1 Регрессионные прямые, линии равной вероятности и главные компоненты: (а)  $r = 0$ ; (б)  $r = 0,5$ ; (в)  $r = 1$ ; (г) главные компоненты.

совпадают, и, следовательно, обе они определяют главную компоненту. Ясно, что количество главных компонент будет таким же, как и число переменных, подвергающихся анализу. В задаче нахождения главных компонент мы ограничимся случаем, когда имеются только две оси, то есть рассматриваются только две переменные.

Для каждой главной компоненты существует выражение через собственный вектор (этого направления) и соответствующее соб-

ственное значение (обычно обозначаемое  $\lambda$ ), которое дает величину дисперсии, объясняемую этой компонентой. В данном случае мы имеем разложение векторов по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Собственные значения образуют диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Задача состоит в повороте координатных осей для преобразования исходной матрицы в такую, где координатными осями служат главные компоненты. Как было показано в главе 3, при повороте осей координат на угол  $\theta$  новые координаты выражаются через старые по формулам

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \quad (\text{из (3.21)})$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta. \quad (\text{из (3.22)})$$

То же самое мы можем записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Например, при повороте осей на угол  $42^\circ$  точка  $P_1(1, 2)$  переходит в точку  $P(x, y)$ , координаты которой, с учетом того, что  $\sin 42^\circ = 0,6691$  и  $\cos 42^\circ = 0,7432$ , определяются из выражения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,7432 & -0,6691 \\ 0,6691 & 0,7432 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -0,5950 \\ 2,1555 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Отсюда можно записать, что после поворота  $P_1(1, 2) \rightarrow P(-0,595, 2,1555)$ .

При любом повороте некоторые характеристики остаются «инвариантными» независимо от величины поворота. Например, если до поворота мы имели на плоскости четыре точки, каждая из которых представляет собой вершину многоугольника, то после поворота форма этой геометрической фигуры сохранится, хотя положение каждой из точек изменится. В этом случае форма является инвариантом. Собственный вектор представляет собой другой, особый, случай инварианта. Если матрицу  $A$  умножить на вектор  $X$ , так чтобы в результате получилось произведение некоторого числа на тот же самый вектор, то есть

$$AX = \lambda X, \quad (4.43)$$

то  $\lambda$  — есть собственное значение, а  $X$  — собственный вектор. Раскрывая уравнение (4.43), получим

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

или

$$\begin{aligned} (a - \lambda)x + by &= 0 \\ cx + (d - \lambda)y &= 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

или

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} X = 0. \quad (4.46)$$

Уравнения (4.45) однородны, так как их правые части равны нулю. Для того чтобы система однородных уравнений имела решение, отличное от  $x = y = 0$ , ее определитель должен быть равен нулю. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.47)$$

или

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

Такое уравнение называется *характеристическим уравнением* матрицы. Из него определяются собственные значения, а результат их подстановки в уравнение (4.45) дает собственный вектор.

Теперь найдем собственные значения и собственные векторы матрицы размером  $2 \times 2$ , где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (4.47) мы имеем:

$$\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)(0 - \lambda) - \frac{2}{3} = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3} = 0$$

или

$$3\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

По формуле для нахождения корней квадратного уравнения (раздел 5.6, формула (5.32)) определяем:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \\ &= 1 \quad \text{или} \quad -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в уравнения (4.45), получим для  $\lambda = 1$ .

$$\left(\frac{1}{3} - 1\right)x + 2y = 0$$

и

$$\frac{1}{3}x + (0 - 1)y = 0$$

или, когда в обоих случаях  $y = \frac{1}{3}x$ , первый собственный вектор; для  $\lambda = -\frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)x + 2y = 0$$

и

$$\frac{1}{3}x + \left(0 + \frac{2}{3}\right)y = 0,$$

или, в обоих случаях  $y = -\frac{1}{2}x$ , второй собственный вектор.

Этот пример был намеренно выбран таким простым, чтобы показать применение уравнений (4.43)–(4.47) для нахождения собственных векторов и собственных значений простой матрицы  $2 \times 2$ . Мы рассматриваем эту задачу скорее как математическую, чем статистическую, что и позволило привести столь несложный пример. Нашей целью было показать, что собой представляют собственные векторы и собственные значения, а не разбирать реальный случай, являющийся результатом статистического анализа совокупности данных. Если мы станем проводить анализ главных компонент на совокупности реальных данных в многомерном случае, то матрицей, для которой придется находить собственные значения и собственные векторы, будет матрица, состоящая из коэффициентов корреляции — корреляционная матрица. Этих коэффициентов будет столько, сколько было пар рядов наблюдений. В итоге собственные значения при анализе главных компонент дают «доли главных компонент», а их сумма равна количеству анализируемых переменных. Этих долей будет ровно столько, сколько переменных в анализе главных компонент. Так, если мы проводим анализ данных по четырем переменным, то в результате будем иметь четыре собственных значения, по одному для каждой компоненты в каждом измерении, и их суммарная величина также будет равна четырем. Предположим, что после вычислений мы получим следующие доли:

$$\lambda_1 = 2,56$$

$$\lambda_2 = 0,65$$

$$\lambda_3 = 0,42$$

$$\lambda_4 = 0,37,$$

тогда первая главная компонента — наиболее существенна и она объясняет 64% общей дисперсии ( $2,56 \times 100/4$ ). Вторая главная компонента объясняет 16,25%, третья — 10,5%, а четвертая — 9,25% суммарной дисперсии. Сумма всех четырех долей дает общее число переменных, включенных в рассмотрение.

Для упрощения нахождения собственных значений и векторов можно показать, что поскольку

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то другой записью характеристического уравнения будет являться выражение

$$|A - \lambda I| = 0. \quad (4.48)$$

Дальнейшее развитие применения методов алгебры матриц, собственных значений, собственных векторов и им подобных для решения статистических задач выходит за рамки этой книги, но интересующийся студент или тот, кому это необходимо, может обратиться к работам, специально рассматривающим анализ главных компонент. В частности, работа М. Кендалла (M. G. Kendall, 1965: A course in multivariate analysis. Griffin Statistics Monograph. London: Griffin) представляет собой практически законченное исследование по этой теме, хотя К. Хоуп (K. Hope, 1968: Methods of multivariate analysis. London: University of London Press) затронул почти такие же вопросы. Что касается непосредственного применения изложенных методов к географии, то в этом случае может быть рекомендована книга S. Daultrey, 1976: Principal components analysis. Concepts and techniques in modern geography. Norwich: Geo Abstracts<sup>1</sup>.

#### Задачи 4.10

Найдите собственные значения и собственные векторы следующих матриц.

$$4.10.1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$4.10.2 \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$4.10.3 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> См. список работ на русском языке, приведенный в конце книги. — Прим. ред.

#### 4.11 Матрицы и сети

В физической географии матрицы в основном используются как вспомогательные средства при проведении вычислений и в анализе главных компонент. Пример приложения матриц к теории вероятностей можно найти в главе 7, для географии же широкий интерес представляет применение матриц при изучении географических сетей. В физической географии сети не обладают такой сложностью,

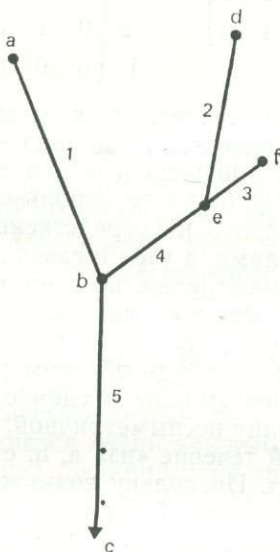


Рис. 4.2 Идеализированная речная сеть с притоками (ребра) и точками их слияния (узлы).

как, скажем, анализируемые в экономической географии, например, транспортные сети. Здесь же мы обратимся к рассмотрению речных сетей как к наиболее легкому, как нам кажется, примеру изложения интересующего нас вопроса.

В своих первых работах, посвященных речным системам, Р. Хортон (Horton, 1945) и А. Штралер (Strahler, 1957) классифицировали водотоки, исходя из числа и длины притоков. Мы можем представить участок речной сети в матричной форме согласно количеству притоков (ребра), сходящихся в каждой точке их слияния (узловые точки). Для изображения речной сети такая матрица может быть составлена как с использованием ребер, так и узлов. Идеализированная речная сеть простого вида изображена на рис. 4.2. Ребра представлены числами от 1 до 5, а узлы — буквами

от а до f. Ниже показаны матрицы, изображающие данную речную сеть через ребра и узлы.

	1	2	3	4	5		a	b	c	d	e	f
1	$\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$					a	$\left( \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$					
2						b						
3						c						
4						d						
5						e						
	f											

В матрице ребер ноль означает, что соответствующие притоки непосредственно не соединяются, а единица — что они соединяются. Так, видно, что приток 2 непосредственно сливается с притоками 3 и 4, а не с 1 и 5. В матрице узлов использованы аналогичные обозначения. Например, узел d непосредственно связан с узлом e, но не связан с другими узлами, а узел b связан с узлами a, c и e. Каждая из этих матриц симметрична, но ясно, что этой симметрии для речной сети не может быть в случае, если мы захотим отразить то простейшее свойство воды, что она не может течь вверх по склону. Тогда мы должны каким-нибудь образом указать, что связь в одном из направлений невозможна. Условие, отражающее этот момент и делающее матрицу несимметричной, состоит в том, что строки представляют собой течение «из» a, b, c и т. д., а столбцы — течение «в» a, b, c и т. д. Поскольку возможны связи только «из» 1 в 5 или из f в e, то в каждой матрице некоторые связи утрачиваются. В результате матрицы будут иметь вид:

	1	2	3	4	5		a	b	c	d	e	f
1	$\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$					a	$\left( \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$					
2						b						
3						c						
4						d						
5						e						
	f											

Сумма по каждому столбцу дает общее количество притоков, впадающих в каждую реку. В нашем случае: по два притока — в ребра 4 и 5 и по два — в узлы b и e. Изменения речной сети легко представить путем сложения и вычитания матриц. Изложенный метод можно распространить и на другие характеристики речной сети, такие, например, как расход воды, размер русла и т. п.

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ**

Если бы мы пожелали создать совершенный, с точки зрения географа, анализирующего результаты наблюдений, мир, то все связи в нем мы бы выбрали линейными. Это бы в значительной степени облегчило наш анализ. Мы рассмотрели такие связи в главе 3. В реальном мире многие зависимости, изучаемые географией, нелинейны, однако понимание очень простых линейных связей способствует пониманию также и нелинейных отношений. Особенно часто география имеет дело с выбором функции, которая бы наиболее соответствовала совокупности точек, и во многих случаях графики этих функций весьма далеки от прямых линий. Поэтому для географа представляется очень важным знать основные типы *стандартных* (нелинейных) функций и их графического отображения. Если географ достиг на этом пути определенного успеха и в состоянии выбрать математические функции, описывающие, хотя и приблизительно, тенденцию распределения множества точек в пространстве, то тем самым он обретает возможность с помощью полученных уравнений провести анализ таких же связей и для других совокупностей данных.

Окончательная цель заключается, таким образом, в отыскании функции, наилучшим образом отображающей тенденцию расположения точек на графике. Однако прежде чем мы рассмотрим этот процесс более детально (раздел 5.6), мы должны выяснить свойства основных типов стандартных функций, виды их графиков и записать общий вид их уравнений. Начнем с определения некоторых понятий, которые в дальнейшем помогут нам как в понимании конкретных уравнений, так и целых типов уравнений. Такой подход в свою очередь предусматривает знакомство с *дифференциальным исчислением*, то есть с тем разделом математики, ознакомление с которым является решающим для усвоения содержания остальных глав этой книги. Читателю следует изучить данную главу особенно тщательно, ибо, пожалуй, среди всех разделов книги она имеет самое непосредственное отношение к решению большинства проблем географии.

## 5.1 Сущность дифференциального исчисления

Криволинейные связи, описываемые нелинейными функциями, по сравнению с линейными имеют две характерные особенности. Во-первых, наклон графиков нелинейных функций постоянно изменяется, и, во-вторых, поскольку многие кривые меняют возрастание на убывание, или наоборот, по меньшей мере один раз, то некоторому значению  $x$  может быть поставлено в соответствие более одного значения  $y$ , и наоборот. Простая нелинейная функция  $y = x^2$  имеет два значения  $x$  для каждого  $y$ , так как  $y$  может принимать значения  $+\sqrt{x}$  или  $-\sqrt{x}$ .

Наклон кривой вида  $y = x^2$  (см. рис. 5.2) увеличивается с возрастанием  $x$ . Кривая является вогнутой. Для кривой  $y = 2x^2$  наклон зависит как от величины  $x$ , так и числа 2. Аналогично для кривой вида  $y = \sin x$  в промежутке от  $x = 0$  до  $x = \pi$  (см. рис. 2.3) наклон вновь будет функцией, но с той разницей, что с возрастанием  $x$  он станет *уменьшаться*. Кривая будет выпуклой. Возникает вопрос, как определить наклон кривой в данной точке. С прямой линией, наклон которой постоянен, это было просто. Но в данном случае из-за кривизны нелинейных функций возникает необходимость найти способ рассмотрения такого малого сегмента кривой, что его наклон можно считать постоянным. Математически кривую вообще можно представить состоящей из ряда бесконечно малых отрезков прямых, следующих друг за другом и имеющих каждый свой наклон. График любой кривой можно аппроксимировать отрезками прямых, проведенных между точками на кривой (*хордами*). Чем ближе эти точки друг к другу, тем короче хорды и тем выше точность, с которой аппроксимируется кривая. Для определения истинного наклона кривой в данной точке отрезки должны быть чрезвычайно малыми, поэтому мы станем рассматривать здесь не наклоны хорд, а наклоны *касательных* к кривой. Касательная к кривой — это прямая линия, имеющая с кривой только одну общую точку. На рис. 5.1 показан очень небольшой участок кривой, уравнение которой для наших рассуждений сейчас не имеет значения. Прямая  $CD$  — это хорда, соединяющая две точки на кривой, а прямая  $EF$  — касательная к кривой в точке  $P$ . Точки  $P$  и  $D$  имеют соответственно координаты  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Если мы вообразим себе всю последовательность следующих друг за другом очень коротких хорд, подобных  $CD$ , то увидим, что с помощью этих хорд можно аппроксимировать кривую. Принимая, что каждая кривая состоит из таких бесконечно малых участков прямой, можно подойти к вопросу определения наклона кривой в данной точке. При заданных координатах точек  $P$  и  $D$  наклон линии, соединяющей точки  $P$  и  $D$ , определяется отношением  $(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$  (из уравнения (3.1)). Предположив, что значения  $x$  и  $y$  вдоль прямой между двумя этими точками меняются очень мало,

обозначим эти малые изменения через:

$\delta y$  для очень малого приращения  $y$  (но не  $y$ , взятый  $\delta$  раз)

$\delta x$  для очень малого приращения  $x$  (но не  $x$ , взятый  $\delta$  раз).

Таким образом, наклон, или иначе градиент, кривой задается в виде:

$$\frac{\delta y}{\delta x}.$$

Конечно, это отношение в действительности определяет наклон хорды  $PD$ , однако по мере приближения точки  $D$  к точке  $P$  вели-

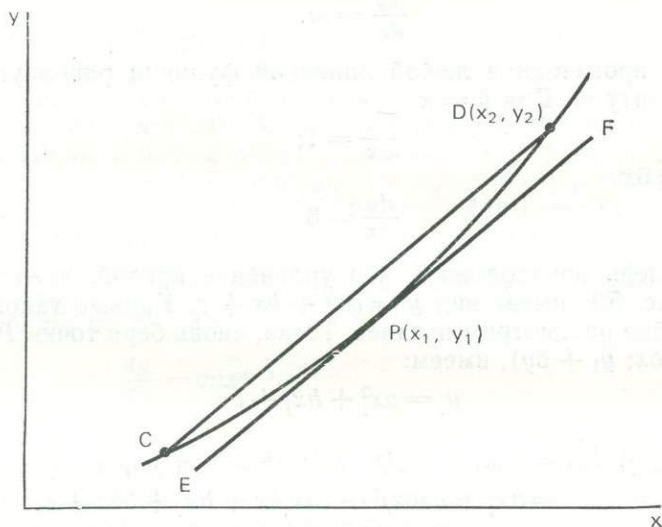


Рис. 5.1 Определение наклона кривой.

чина наклона хорды  $PD$  приближается к наклону касательной  $EF$ . Запишем это в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Предел  $\delta y/\delta x$ , когда  $\delta x$  стремится к нулю, представляет собой *производную* функции  $y(x)$ . С помощью производной функции мы определяем наклон касательной к кривой в данной точке. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*. Теперь можно выразить процедуру отыскания наклона прямой математически. Рассмотрим линейное уравнение на участке  $PD$  (рис. 5.1), заданное в виде  $y = mx + k$ . Пусть точка  $P$  имеет координаты  $(x_1, y_1)$ . Тогда, поскольку  $x_2 = x_1 + \delta x$  и  $y_2 = y_1 + \delta y$ , то точка  $D$

имеет координаты  $(x_1 + \delta x; y_1 + \delta y)$ . Подставляя эти координаты в уравнение прямой, получим:

$$y_1 = mx_1 + k \quad (5.1)$$

$$(y_1 + \delta y) = m(x_1 + \delta x) + k. \quad (5.2)$$

Вычтем (5.1) из (5.2) с целью исключить члены с  $x_1$  и  $y_1$ , тогда

$$\delta y = m\delta x$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = m$$

или при  $\delta x \rightarrow 0$

$$\frac{dy}{dx} = m. \quad (5.3)$$

Ясно, что производная любой линейной функции равна угловому коэффициенту  $m$ . Для  $y = x$

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

а для  $y = 6x$

$$\frac{dy}{dx} = 6$$

и т. д. Теперь предположим, что уравнение кривой, представленной на рис. 5.1, имеет вид  $y = ax^2 + bx + c$ . Кривые такого типа мы подробно рассмотрим позднее. Тогда, вновь беря точки  $P(x_1, y_1)$  и  $D(x_1 + \delta x; y_1 + \delta y)$ , имеем:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \quad (5.4)$$

и

$$\begin{aligned} (y_1 + \delta y) &= a(x_1 + \delta x)(x_1 + \delta x) + b(x_1 + \delta x) + c = \\ &= ax_1^2 + a(\delta x)^2 + 2ax_1\delta x + bx_1 + b\delta x + c. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Вычитаем (5.4) из (5.5):

$$\begin{aligned} y_1 + \delta y - y_1 &= ax_1^2 + a(\delta x)^2 + 2ax_1\delta x + bx_1 + b\delta x + c - ax_1^2 - bx_1 - c \\ \therefore \delta y &= a(\delta x)^2 + 2ax_1\delta x + b\delta x = \\ &= (2ax_1 + b)\delta x + a(\delta x)^2 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2ax_1 + b + a\delta x. \quad (5.6)$$

Поскольку  $\delta x \rightarrow 0$ , член  $a\delta x$  также стремится к нулю, и поэтому для произвольной точки  $(x, y)$  производная функции  $y = ax^2 + bx + c$  равна:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \quad (5.7)$$

или

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

Отсюда видно, что производная нелинейной функции сама зависит от  $x$  и некоторой константы. Так, например, для функции  $y = 6x^2 + 3x + 5$  производная имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = 12x + 3. \quad (5.8)$$

Производная многочлена, следовательно, равна сумме производных отдельных членов. Например, из соотношения (5.8) следует, что производная линейной функции  $y = 3x$  равна 3, а производная  $6x^2$  равна  $12x$  (то есть  $2 \times 6x$ ), отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(bx) + \frac{d}{dx}(c). \quad (5.9)$$

Для нахождения производных различных степеней  $x$  имеются некоторые правила. В рассмотренном примере производная функции  $y = ax^2$  равна  $dy/dx = 2ax$ . Если функция имеет вид  $y = ax^3$ , то производная ее будет  $3ax^2$ . Обратите внимание, что в каждом случае постоянная, стоящая перед переменной  $x$ , умножается на первоначальный показатель степени, а показатель степени уменьшается на единицу. То же самое имеет место для  $y = ax$  и  $y = a$ , поскольку производные этих функций будут соответственно равны  $a$  и 0, так как в первом случае степень  $x$  равна единице, а во втором она нуль ( $a = ax^0$ ). Общая формула для производной функции  $y = ax^n$  будет иметь вид:

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}. \quad (5.10)$$

Эта формула довольно часто используется и ее следует запомнить. Производные других функций, например логарифмических или тригонометрических, будут даны в этой главе несколько позже, при рассмотрении общего вида таких функций.

С помощью производной мы можем исследовать поведение тела, выведенного из состояния покоя. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то можно сказать, что тело будет стремиться к земле с ускорением в  $9,81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$  (ускорение, связанное с силой тяжести  $g$ ), означающим, что после первой секунды падения тело будет иметь скорость  $9,81 \text{ м/сек}$ , еще через секунду  $19,62 \text{ м/сек}$  ( $2 \times 9,81$ ) и т. д. Таким образом, в течение первой секунды его средняя скорость составит  $9,81/2 = 4,91 \text{ м/сек}$ , в течение второй секунды:  $(9,81 + 19,62)/2 = 14,72 \text{ м/сек}$  и в течение третьей —  $24,53 \text{ м/сек}$ . За первую секунду тело пройдет  $4,91 \text{ м}$ , за две секунды  $4,91 + 14,72 = 19,62$ , а за три секунды  $19,62 + 24,53 = 44,15 \text{ м}$ . Связь между пройденным расстоянием ( $s$ ) и временем ( $t$ ) можно задать с помощью нелинейной функции вида:

$$s = \frac{1}{2} gt^2. \quad (5.11)$$

Здесь  $s$  — степенная функция  $t$ . Используем правило из соотношения (5.10), тогда

$$\frac{ds}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{2} gt^{2-1}$$

или

$$\frac{ds}{dt} = gt. \quad (5.12)$$

Другими словами, *скорость* ( $ds/dt$ ) падения тела спустя  $t$  секунд будет равна  $gt$  (ускорение свободного падения, умноженное на время). Следовательно, если обозначить  $v$  через  $ds/dt$  и продифференцировать  $v$  по  $t$ , то получим:

$$\frac{dv}{dt} = 1 \cdot gt^{1-1}$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad (5.13)$$

где  $g$  — начальное ускорение свободного падения. Из соотношения (5.13) следует, что ускорение  $g$  постоянно и направлено к поверхности Земли. Этот вывод подтверждается при последовательном рассмотрении расстояния, скорости и ускорения. В любом уравнении, отражающем физическую связь, размерность величин, входящих в его левую и правую части, должна совпадать. В любой системе единиц измерения (Имперской, СИ и т. д.)<sup>1</sup> все механические единицы измерения можно выразить через три основные: массу ( $M$ ), длину ( $L$ ) и время ( $T$ ). Например, в уравнении  $s = \frac{1}{2} gt^2$  размерность левой части —  $L$ , а правой —  $LT^{-2}T^2 = L$ . Одновременно можно также заметить, что ускорение ( $dv/dt$ ) представляет собой *скорость изменения скорости* со временем. Таким образом, операция дифференцирования дает нам средство для определения скорости изменения зависимой переменной относительно независимой. Вертикальные градиенты, рассмотренные в главе 3, — это пример скорости изменения температуры с высотой ( $dT/dz$ ). Ускорение — *вторая производная* расстояния и *первая производная* скорости. Связь между этими производными можно записать в виде:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = g$$

$$v = \frac{ds}{dt} = gt$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

<sup>1</sup> См. Приложение 2. — Прим. ред.

Процесс, обратный дифференцированию, называется *интегрированием*. Он подробно рассматривается в главе 8. Уравнения движения, приведенные выше, были использованы Стэтхемом (Statham, 1976) при построении модели камнепада.

Во многих математических учебниках и в главе 9 этой книги используется другое обозначение производных. Пусть задана функция  $y = f(x)$ , тогда:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$$

и

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f^{(3)}(x) = y^{(3)}$$

и т. д. То есть, если  $f(x) = 3x^5 + 2x$ , то  $f'(x) = 15x^4 + 2$ ,  $f''(x) = 60x^3$ ,  $f^{(3)}(x) = 120x^2$  и т. д.

### Задачи 5.1

Найдите первые и вторые производные ( $dy/dx$ ) и ( $dy^2/dx^2$ ) следующих функций.

5.1.1  $y = 5x^3$ .

5.1.2  $y = 4 - 2x^2$ .

5.1.3  $3y = x^3 - 2x + 5x^2$ .

5.1.4  $y = 12x + 3$ .

5.1.5  $y = x(x+1)(x-1)$ .

5.1.6  $y = 1/x^2$ .

5.1.7  $y = 2x^{-4}$ .

5.1.8  $y = \frac{x(x^2 - x - 2)}{x + 1}$ .

5.1.9  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$ .

5.1.10  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 4$ .

## 5.2 Свойства стандартных функций

### 5.2.1 Степенные функции

Теперь мы можем детально обсудить основные типы стандартных функций. Выбор кривых, наиболее подходящих для описания рассматриваемых связей, может оказаться весьма трудной задачей, поскольку эти связи часто очень сложны. Общие положения метода подбора таких кривых содержатся в разделе 5.6. Существует

ряд машинных программ, специально предназначенных для этой цели. В программном обеспечении многих компьютеров имеются даже специальные «пакеты подпрограмм», позволяющие сделать выбор основных типов кривых. Например, для машин серии ICL1900 такая подпрограмма озаглавлена F4CFORPL. Основные типы кривых можно также опознать в соответствии с некоторыми математическими и морфологическими критериями. В этом случае становится возможным подобрать кривую, не обращаясь к программам и не производя длинных вычислений. На данной стадии целесообразно рассмотреть различные стандартные функции вместе с их графиками. Примеры из физической географии приведены в конце этой главы в разделе 5.7.

Степенные функции в общем виде записываются как  $y = x^n$ . В простейшем случае они представляют собой линейные соотношения: при  $n = 0$  (то есть функция  $y = 1$ ) или при  $n = 1$  (функция  $y = x$ ). Однако для значений  $n$ , отличных от нуля или единицы, функция нелинейна. В зависимости от показателя степени существуют три различных типа кривых: при  $n \geq 1$ ,  $-1 < n < +1$  или  $n \leq -1$ . Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Первый тип кривых, соответствующий  $n \geq 1$ , приведен на рис. 5.2 для целых показателей степени (2, 3 и т. д.). Поскольку большинство географических связей имеет дело только с положительными значениями  $x$ -ов и  $y$ -ов, будет целесообразным ограничиться рассмотрением кривых в первом квадранте, по крайней мере на данном этапе. Все кривые этого типа имеют две общие точки с координатами (0, 0) и (1, 1), поскольку нуль и единица, возведенные в любую степень, всегда дают соответственно нуль и единицу (не определено значение  $0^0$ ). По мере увеличения  $n$  кривизна участков линий, расположенных между началом координат и точкой (1, 1), также увеличивается. Однако если взять  $x < 1$ , то в случае очень больших значений показателя степени  $n$  величина  $x$  должна достичь довольно большого дробного значения прежде, чем величина  $y$  станет заметно отличаться от нуля. Таким образом, все кривые семейства, имеющие общие точки (0, 0) и (1, 1), по мере возрастания  $n$  меняют свою форму от очень крутой при больших  $n$  до очень пологих при  $n$ , мало отличающихся от 1, «вырождаясь» в конечном итоге в прямую линию  $y = x^1$  при  $n = 1$ .

Теперь рассмотрим на рис. 5.2 остальные три квадранта. Ясно видно, что при *четных* значениях  $n$  кривая, расположенная во втором квадранте, является *зеркальным отражением* кривой, расположенной в первом квадранте. Однако при *нечетных* значениях  $n$  (например,  $y = x^3$ ) кривая *перевернута* и *зеркально отражена*, так что она оказывается расположенной еще и в третьем квадранте. Эта особенность легко объясняется правилом знаков для степеней (глава 1). Отрицательные величины, возведенные в нечетные степени, сохраняют свои отрицательные значения, а при возведении в четные степени они становятся положительными. Кривая вида

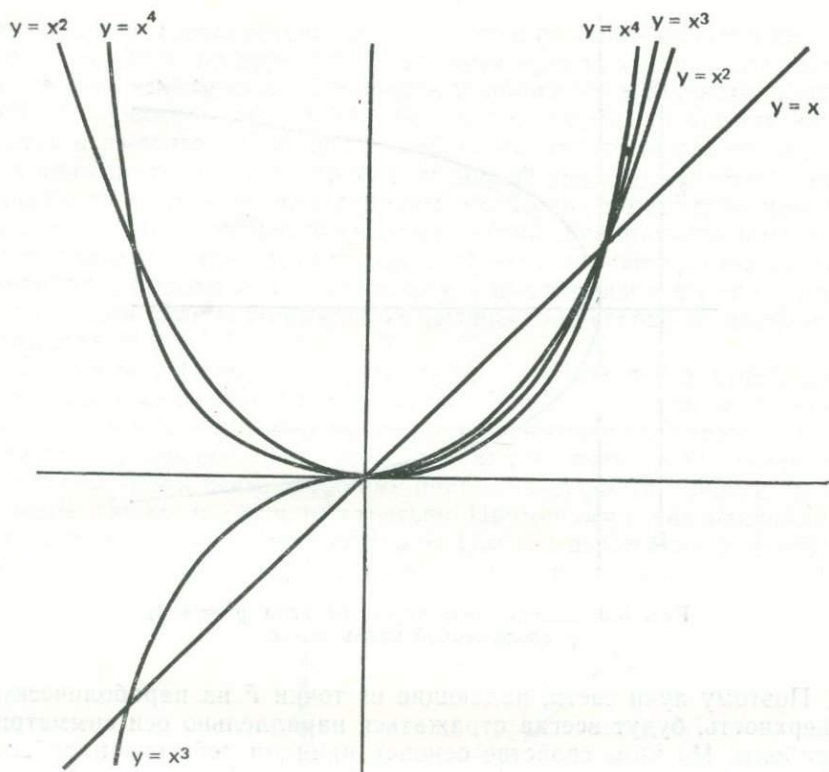


Рис. 5.2. Кривые вида  $y = x^n$  при  $n \geq 1$ .

$y = x^2$  называется *параболой*. Детальное рассмотрение параболы и других специальных кривых, таких, как окружность и эллипс, можно найти, например, в книге Flanders, Price, 1973. В учебниках математики имеются четкие математические определения таких кривых, причем в общем виде парабола считается расположенной вдоль оси  $x$ , а не оси  $y$ . Такие параболы относятся к следующему типу степенных функций, когда показатель степени  $n$  заключен между 0 и 1.

Например, функция  $y = x^{\frac{1}{2}}$  является обратной для функции  $y^2 = x$ , и, следовательно, соответствующие кривые, когда  $n$  находится в промежутке от  $-1$  до  $+1$ , симметричны относительно оси  $x$ , а не оси  $y$ . Общее уравнение параболы имеет вид  $y^2 = 4ax$ . Параболу можно определить как *геометрическое место точек*, обладающих тем свойством, что отношение расстояния от этих точек до фиксированной точки ( $F$  — *фокус* на рис. 5.3) к расстоянию до фиксированной прямой ( $DD'$  — *директриса*) остается постоянным. Иными словами, соотношение  $PM/PF$  на рис. 5.3. — постоянным.

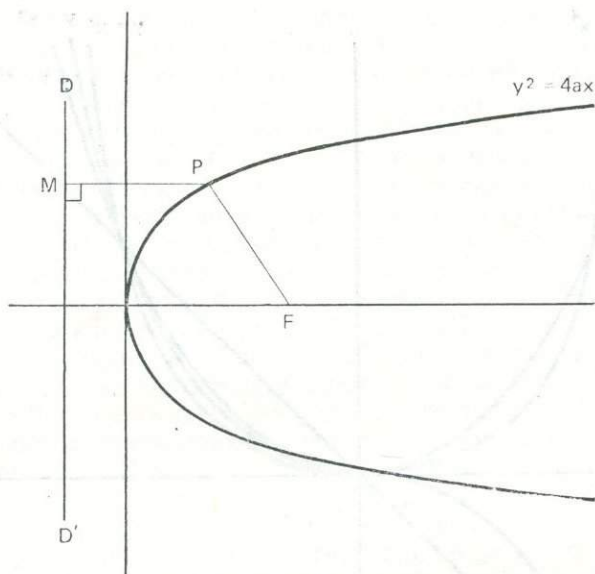


Рис. 5.3 Определение параболы вида  $y^2 = 4ax$ , расположенной вдоль оси  $x$ .

но. Поэтому лучи света, падающие из точки  $F$  на параболическую поверхность, будут всегда отражаться параллельно оси симметрии параболы. На этом свойстве основан принцип действия параболических рефлекторов, например автомобильных фар.

Графики функций вида  $y = x^{\frac{1}{2}}$  и  $y = x^{\frac{1}{4}}$  показаны на рис. 5.4. Чем меньше значение  $n$ , тем ближе кривая «прижимается» к оси  $x$ . И вновь наше внимание будет ограничено в основном первым квадрантом<sup>1</sup>. Здесь наблюдается *уменьшение* градиента по мере увеличения  $x$ , а не наоборот, как это было при  $n > 1$ . Предельными ситуациями для положительных значений  $n < 1$  являются «кривые» вида  $y = x$  и прямая  $y = 1$ , получающаяся при  $n = 0$ . Таким образом, здесь продолжается тенденция, отмеченная для функций при  $n > 1$ . В случае отрицательных  $n$  (но при  $n > -1$ ) происходит важная перемена в форме кривой, хотя симметрия относительно оси  $x$  сохраняется. График  $y = x^{-\frac{1}{2}}$  показан на рис. 5.4. Здесь в первом квадранте форма кривой такова, что с увеличением  $x$  кривая приближается к оси  $x$ , а с увеличением  $y$  она приближа-

<sup>1</sup> Кривые  $y = x^{1/2}$  и  $y = x^{1/4}$ , строго говоря, не являются графиками функций, поскольку одному значению  $x$  соответствуют два значения  $y$ . В связи с этим рассматривают лишь ту часть кривой, которая расположена в первом квадранте. — Прим. ред.

ется к оси  $y$ . Внимательное рассмотрение функции показывает, что кривая никогда не пересекает оси, хотя кривая и оси «сливаются» где-то в бесконечности. Если кривая приближается к некоторой прямой, но пересекает ее только в бесконечности, то эта прямая называется *асимптотой*. В наших примерах асимптотами являются оси  $x$  и  $y$ , но существует много других примеров, когда асимптоты не совпадают с осями и не параллельны им. Кривые, определяемые такими функциями, называются *гиперболами*. Все функции вида  $y = x^n$ , где  $n < 0$  (включая те, где  $n < -1$ ), задают *прямоугольные гиперболы*, поскольку их асимптоты, а именно оси  $x$  и  $y$ , находятся под прямым углом. Примеры из физической географии приведены в разделах 5.6 и 5.7.

Степенные функции второго типа, рассмотренные выше, симметричны только относительно оси  $x$ . Когда же  $n$  становится меньше или равным  $-1$ , имеет место другая симметрия. Кривые приобретают вид гипербол (рис. 5.5), так как их ветви асимптотически приближаются к осям, но, кроме первого квадранта, кривые расположены также во втором и третьем. Примерами таких функций могут служить:  $y = 1/x$ ,  $y = 1/x^2$ ,  $y = 1/x^3$  и т. д. Степенные функции при нечетных показателях степени для отрицательных значений  $x$

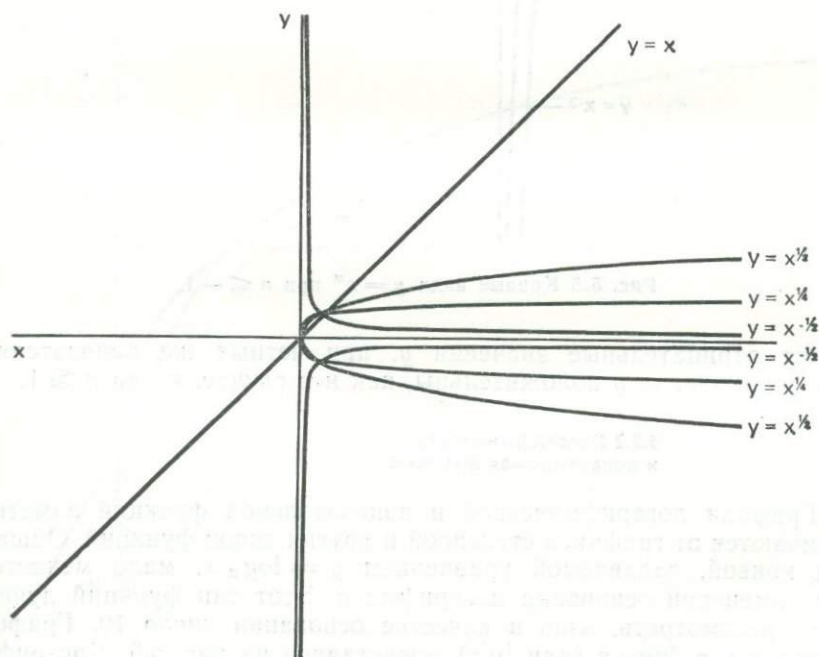


Рис. 5.4 Кривые вида  $y = x^n$  при  $-1 \leq n \leq 1$ .

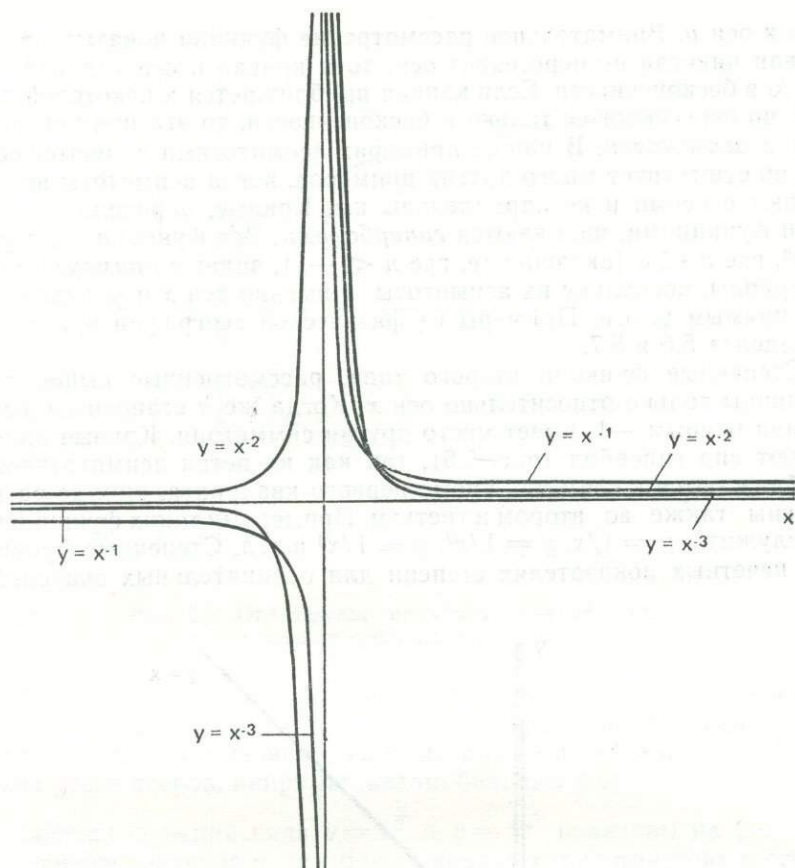


Рис. 5.5 Кривые вида  $y = x^n$  при  $n \leq -1$ .

имеют отрицательные значения  $y$ , при четных же показателях степени значения  $y$  положительны, как и в случае, когда  $n \geq 1$ .

### 5.2.2 Логарифмическая и показательная функции

Графики логарифмической и показательной функций заметно отличаются от графиков степенной и других типов функций. Общий вид кривой, задаваемой уравнением  $y = \log_a x$ , мало меняется при изменении основания логарифма  $a$ . Этот тип функций лучше всего рассмотреть, взяв в качестве основания число 10. График функции  $y = \log_{10} x$  (или  $\lg x$ ) представлен на рис. 5.6. Логарифм единицы по любому основанию равен нулю, и, следовательно, все кривые вида  $y = \log_a x$  пересекаются в точке с координатами  $(1, 0)$ .

При использовании в качестве основания числа 10 получим, что логарифм 10 будет равен 1, логарифм 100 — 2 и т. д. Следовательно, по мере возрастания  $x$  значения функции  $y = \log_{10} x$  возрастают, но довольно медленно. Эта функция принимает значение  $y = 1$  при  $x = 10$ , а когда  $x$  равен 100, функция достигает только значения  $y = 2$ . Для  $x < 1$  наблюдается другая картина, поскольку логарифм числа 0,1 равен  $-1$ ,  $\lg 0,01$  есть  $-2$ ,  $\lg 0,001$  есть  $-3$ . Таким образом, эта часть кривой приближается, но никогда не достигает оси  $y$ , и, следовательно, ось  $y$  является асимптотой при  $x \rightarrow -\infty$ . Напомним, что логарифмы отрицательных чисел не существуют. По мере приближения основания к единице кривизна линии уменьшается.

Обращаясь к функции  $y = \log_e x$  (или  $\ln x$ ) мы тем самым рассматриваем функцию  $x = e^y$ , и, следовательно, показательная функция вида  $y = e^x$  — это есть то же самое, что функция  $x = \ln y$ . График функции  $y = e^x$  аналогичен графику логарифмической функции за исключением двух моментов: он приближается к оси  $x$  при  $x \rightarrow -\infty$ , и  $y$  никогда не бывает меньше нуля. График функции  $y = e^{-x}$  есть зеркальное отражение графика функции  $y = e^x$  относительно оси  $y$  (рис. 5.7). Очевидно, что форма кривой становится пологой, когда показатель степени  $x$  умножается на

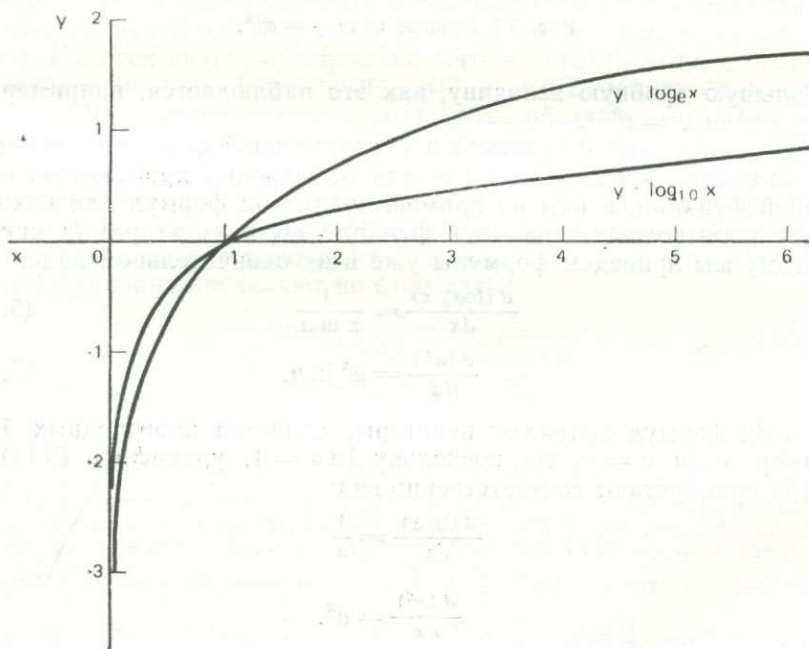


Рис. 5.6 Кривые вида  $y = \log_a x$ .

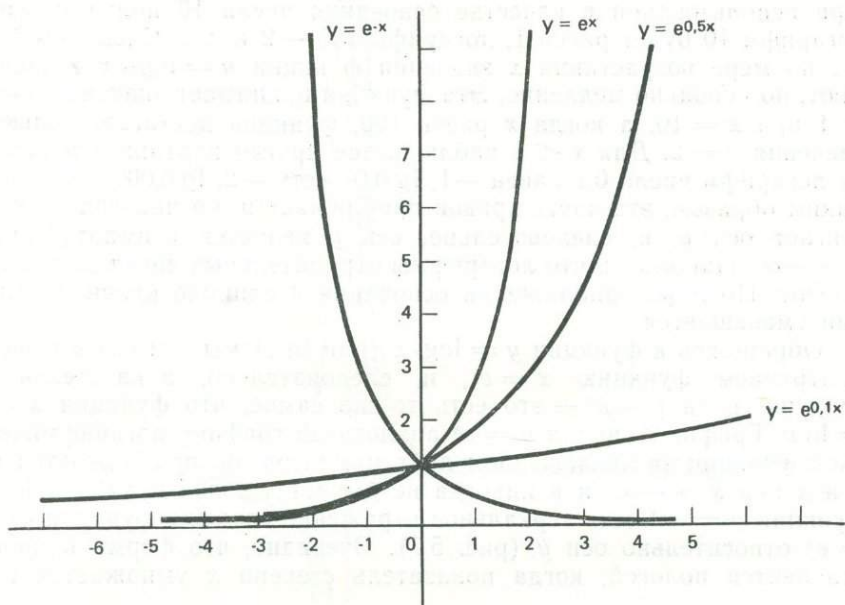


Рис. 5.7 Кривые вида  $y = e^{ax}$ .

небольшую дробную величину, как это наблюдается, например, в выражении  $y = e^{0,1x}$ .

Природа логарифмической и показательной функций означает, что правило, выведенное ранее для вычисления производной степенной функции, к ним не применимо. Вывод формул для нахождения производных этих двух функций выходит за рамки книги, поэтому мы приведем формулы уже в их окончательном виде:

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \quad (5.14)$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a. \quad (5.15)$$

Из этих формул вытекают некоторые свойства производных. Например, если  $a = e$ , то, поскольку  $\ln e = 1$ , уравнения (5.14) и (5.15) приобретают соответственно вид:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

и

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Иными словами, любая производная (вторая, третья и т. д.) экспоненциальной функции всегда равна ей самой.

### 5.2.3 Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

С основными тригонометрическими функциями мы познакомились в главе 2. Функции  $\sin x$ ,  $\cos x$  и обратные к ним непрерывны и имеют вид повторяющихся волн с длиной волны  $\lambda = 2\pi$  радиан. Графики тангенса и котангенса на первый взгляд не похожи на графики периодических функций, так как имеются точки, где они не определены. Такие же точки имелись и для некоторых степенных функций. Однако значения тангенса и котангенса также повторяются через каждые  $2\pi$  радиан. На рис. 2.3 и 2.4 приведены графики функций  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  и  $y = \operatorname{tg} x$ , которые вряд ли нуждаются в дальнейшем рассмотрении. Однако иногда бывают необходимы функции, обратные к ним. Вместо функции  $y = f(x)$  мы можем взять обратную к ней функцию  $x = g(y)$ . Тогда для случая тригонометрических функций выражение  $\sin y = x$  может быть переписано в более удобном виде, то есть:

$$y = \sin^{-1} x. \quad (5.16)$$

Это соотношение задает функцию, обратную к синусу (рис. 5.8). Надо заметить, что здесь мы не пользовались верхним индексом  $-1$  для обозначения функции  $y = 1/\sin x$ , так как она равна функции  $y = \operatorname{csc} x$ . В тригонометрических функциях индекс  $-1$  применяется исключительно для того, чтобы показать (как в вышеприведенном примере), что  $y$  — это угол в радианах, синус которого равен  $x$ . Имеется другое обозначение того же самого угла, но расположенного между значениями  $-\pi/2$  и  $+\pi/2$  радиан, а именно  $\operatorname{arcsin} x$ . Аналогично можно использовать обозначение  $\operatorname{arctg} x$ . Ни одна из этих функций не будет периодически повторяться, так как они заключены в определенном интервале. Кривые  $y = \sin^{-1} x$  и ей аналогичные повторяются и колеблются так же, как и графики прямых тригонометрических функций, но только вдоль оси  $y$ , а не оси  $x$ <sup>1</sup>. Производные каждой из основных обратных тригонометрических функций определяют по формулам:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsin} \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{-a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (5.18)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{a}{a^2 + x^2}. \quad (5.19)$$

<sup>1</sup> Такие кривые не являются, строго говоря, графиками функций, поскольку одному значению  $x$  соответствуют несколько значений  $y$  (см. рис. 5.8). Именно поэтому функция  $y = \operatorname{arcsin} x$  представляет собой угол, синус которого равен  $x$  и который заключен в промежутке от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ . Этот же интервал берется и для  $\operatorname{arctg}$  (только не включаются точки  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$ ). Для функций  $\operatorname{arccos} x$  и  $\operatorname{arctg} x$  берется промежуток от 0 до  $\pi$  (для функции  $\operatorname{arctg} x$  концевые значения также не учитываются). — Прим. ред.

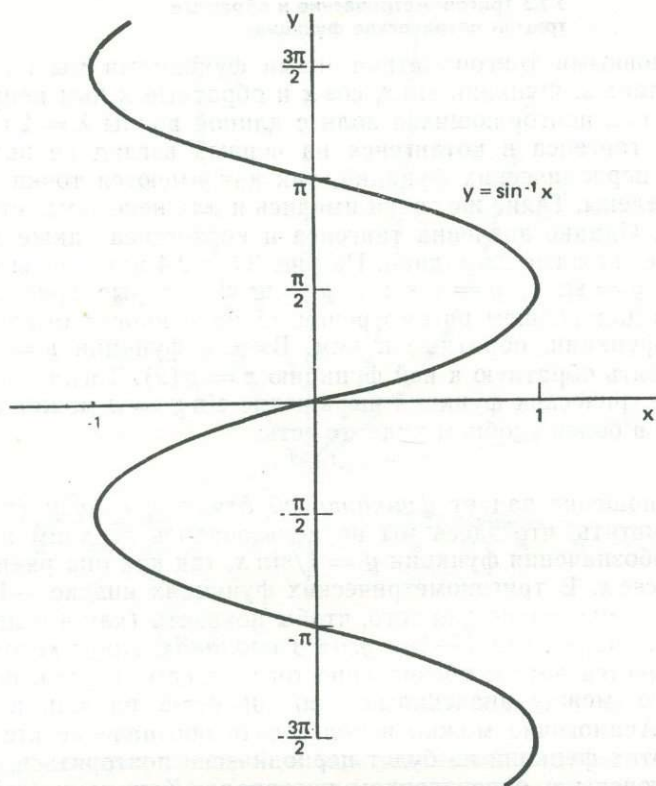


Рис. 5.8 Кривая  $y = \sin^{-1}x$  — обратная тригонометрическая функция.

Производные тригонометрических функций находятся по следующим формулам:

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \quad (5.20)$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \quad (5.21)$$

$$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \sec^2 x. \quad (5.22)$$

Существует другая группа функций, на первый взгляд похожих на тригонометрические. Это *гиперболические функции* вида  $y = \operatorname{sh} x$ ,  $y = \operatorname{ch} x$  и  $y = \operatorname{th} x$  (заметим, что они довольно редко используются в физической географии). Эти функции представляют

собой различные комбинации экспоненциальных функций:

$$\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2 \quad (5.23)$$

$$\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2 \quad (5.24)$$

$$\operatorname{th} x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}). \quad (5.25)$$

Так же как и для тригонометрических функций, существуют обратные гиперболические функции. Производные прямых и обратных гиперболических функций определяются по формулам:

$$\frac{d(\operatorname{ch} x)}{dx} = \operatorname{sh} x \quad (5.26)$$

$$\frac{d(\operatorname{sh} x)}{dx} = \operatorname{ch} x \quad (5.27)$$

$$\frac{d(\operatorname{th} x)}{dx} = \operatorname{sech}^2 x \quad (5.28)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Arsh} \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \quad (5.29)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Arch} \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Arth} \left( \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{a^2 - x^2}. \quad (5.31)$$

В формуле (5.30) предполагается, что  $x/a > 1$  и  $\operatorname{Arch}(x/a) > 0$ ; в случае  $\operatorname{Arch}(x/a) < 0$  производную следует умножить на  $-1$ . Формула (5.31) справедлива при  $x^2 < a^2$ .

### 5.3 Комбинации функций и их производные

Три основных типа нелинейных функций, а также линейные функции, рассмотренные в главе 3, представляют собой те главные инструменты, с помощью которых географ может пытаться конструировать математические модели наблюдаемых связей. К сожалению, с помощью стандартных функций, описанных в трех предыдущих разделах, не всегда бывает возможно получить удовлетворяющее нас соответствие. Разумеется, мы не в состоянии разобрать в этой главе все вероятные комбинации функций и примеры их графиков, но функций, помещенных в разделах 5.2.1—5.2.3, вполне достаточно, чтобы по крайней мере аппроксимировать вид криволинейной связи. Если связи имеют колеблющуюся форму, то можно попытаться соотнести их с тригонометрическими или обратными тригонометрическими функциями. Там, где ясно прослеживается тенденция увеличения градиента с ростом  $x$ , можно попытаться применить или степенные функции с  $n > 1$ , или экспоненциальные функции. Аналогично там, где наблюдается уменьшение наклона с увеличением  $x$ , следует подумать о логарифмических или степенных

функциях при  $0 < n < 1$ . Однако стоит повнимательнее рассмотреть некоторые кривые, получаемые при сочетании в одном уравнении функций различных типов. Имеется несколько правил, определяющих влияние входящих в комбинацию функций на форму кривой. Простого прибавления постоянной величины вполне достаточно для изменения положения функции относительно осей координат. Надо помнить, что эта постоянная не будет фигурировать в производной, и поэтому форма кривой не изменится. Кривая  $y = x^2 + 6$  будет, следовательно, иметь «вершину» в точке  $(0, 6)$ , а не в начале координат, как в случае  $y = x^2$ . Нахождение такой *стационарной точки*, в которой направление кривой меняется, очень важно при подборе наиболее подходящей кривой. Метод нахождения таких точек будет подробно рассмотрен в разделе 5.4. Вид кривой можно изменить, добавляя в уравнение другие члены, содержащие  $x$ . Во многих случаях степенные функции складываются, образуя последовательность степеней переменной  $x$ , например,  $y = 4x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 5$ . Такие функции относятся к *полиномам*. Часто рассматриваются полиномы, содержащие члены с показателем степени меньше трёх. Такие полиномы называются *квадратичными*. Полиномы, содержащие более высокие степени  $x$ , например  $x^3$  и  $x^4$ , называются соответственно *кубическими* и *четвертой степени*. Два простых примера полиномов (один квадратичный, а другой кубический) показаны на рис. 5.9. Следует заметить, что квадратичная функция ( $y = x^2 - x - 1$ ) имеет только одну стационарную точку, но в то же время она не проходит через начало координат и

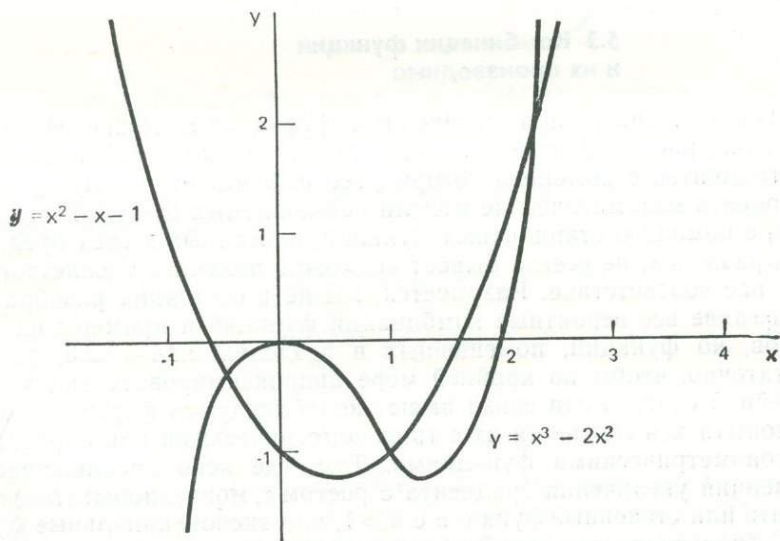


Рис. 5.9 Кривые  $y = x^2 - x - 1$  и  $y = x^3 - 2x^2$ .

несимметрична относительно него. Кубичный полином ( $y = x^3 - 2x^2$ ), показанный на рисунке, лишь отдаленно напоминает функцию  $y = x^3$ .

Рассматриваемая функция имеет две стационарные точки, и только одна из них совпадает с началом координат. Первая из этих точек является точкой *максимума*, поскольку величина  $y$  в ней максимальна по сравнению с соседними значениями, а вторая точка — это точка *минимума*, где значения  $y$  меньше, чем в соседних точках. Заметим, однако, что в каждом случае локальный, или местный, максимум и минимум не обязательно дают абсолютное наибольшее или наименьшее значение величины  $y$ . Если точки максимума и минимума совмещаются, получается так называемая *точка перегиба*. Теперь можно сформулировать два правила: во-первых, график для любого полинома будет проходить через начало координат тогда и только тогда, когда в уравнении отсутствует постоянный член; во-вторых, и это особенно важно, максимальное количество стационарных точек функции *на единицу меньше* показателя степени наивысшего порядка. Так, для квадратичного полинома имеется только одна такая точка, для кубичного — не более двух стационарных точек, а для полинома четвертой степени — не более трех стационарных точек. Однако следует заметить, что иногда *все* стационарные точки совпадают, и тогда мы имеем точку перегиба.

Существуют и другие комбинации функций, но привести их все здесь не представляется возможным. Одно из самых полезных для читателя упражнений — это потратить некоторое время на построение графиков для комбинации различных функций. Такое упражнение будет в значительной мере способствовать более глубокому пониманию материала. Однако прежде попытаемся определить положение стационарных точек.

#### 5.4 Определение стационарных точек

Из краткого знакомства с полиномами в предыдущем разделе становится ясным, что стационарные точки всех трех типов связаны между собой и характеризуются тем свойством, что если в окрестности этих точек взять бесконечно малые отрезки на графике функции, то эти отрезки будут горизонтальными. Поскольку производная функция в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке, то для любой функции надо прежде всего найти  $x$ -координату стационарной точки или точек, приравняв к нулю первую производную функции. Соответствующую  $y$ -координату впоследствии можно получить, подставив значение (или значения)  $x$  в первоначальное уравнение. Например, если взять функцию  $y = x^2 - x - 1$ , изображенную на рис. 5.9, то ее первая производная равна  $(2x - 1)$ . Тогда  $x$ -координата ее стационарной точки определяется из уравнения  $2x = 1$  или  $x = \frac{1}{2}$ . Под-

ставляя  $x = \frac{1}{2}$  в первоначальную функцию, получим  $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -1\frac{1}{4}$ , и следовательно, координаты этой точки минимума есть  $(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{4})$ .

Для полиномов более высокой степени, особенно если они содержат степени, превосходящие  $x^3$ , нахождение стационарной точки из уравнения, полученного приравниванием к нулю первой производной, может оказаться делом затруднительным, поскольку потребуются найти корни уравнения, а сделать это в данном случае нелегко. Для квадратных уравнений (получающихся при приравнении к нулю первой производной кубических функций) существует общая формула, которая позволяет найти корни уравнения. Для любого квадратного уравнения можно найти не более двух действительных корней, для кубического — не более трех и т. д. Для наиболее простых квадратных уравнений корни удастся подобрать. Например, уравнение  $x^2 + 2x + 1 = 0$  можно разложить на множители  $(x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2 = 0$ , и тогда уравнение будет иметь только одно решение:  $x = -1$ , то есть корни совпадают. Уравнение  $x^2 + 4x - 12 = 0$  можно представить в виде  $(x + 6)(x - 2) = 0$ . Такой способ основывается на опыте и практике, да еще плюс немного проб и ошибок! Корнями уравнения  $(x + 6)(x - 2) = 0$  являются значения  $x = -6$  и  $x = 2$ .

Теперь возьмем уравнение  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ . Это уравнение нельзя разложить на множители так, чтобы корни были целыми числами. Здесь и в других подобных случаях при решении квадратных уравнений следует применить общую формулу для нахождения корней:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (5.32)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — коэффициенты квадратного уравнения общего вида:  $ax^2 + bx + c = 0$ . Таким образом, в нашем примере  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  решением будет:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4},$$

то есть  $x = 3\frac{1}{4}$  или  $x = 1\frac{3}{4}$ . Для уравнений более высоких степеней найти корни гораздо сложнее. Если данное уравнение не удастся разложить на множители, что случается довольно часто, то тогда наилучший путь решения заключается в *приближенном* нахождении корней с помощью графика. Для этого надо начертить кривую, являющуюся графиком полинома, и снять с нее значения  $x$ , соответствующие  $y = 0$ . Например, пусть требуется найти стационарные точки функции  $y = x^4 - 3x^2 - x + 2$ . Первая производная этой функции есть  $4x^3 - 6x - 1$ . Здесь мы сталкиваемся с проб-

лемой решения кубического уравнения  $4x^3 - 6x - 1 = 0$ . Начертив график функции  $y = 4x^3 - 6x - 1$  и сняв с него значения  $x$ , соответствующие  $y = 0$ , мы тем самым получим корни уравнения. Теперь необходимо найти стационарные точки этой новой функции. Они определяются из уравнения  $12x^2 - 6 = 0$  или  $x = \pm 1/\sqrt{2}$ , то есть  $x = \pm 0,71$ . Подставив эту величину в первоначальное кубическое уравнение, мы получим координаты стационарных точек:  $(0,71; -3,83)$  и  $(-0,71; 1,83)$ . Теперь можно начертить всю кривую, взяв ряд значений  $x$  из промежутка, в котором кривая пересекается с осью  $x$  ( $y = 0$ ), и вычислив соответствующие им значения  $y$ . На рис. 5.10 представлен график рассматриваемой функции, построенный по данным табл. 5.1 для  $-2 \leq x \leq +2$ . Мы можем снять значения  $x$ , соответствующие  $y = 0$ . Точки  $x = -1,1$ ;  $x = -0,2$  и  $x = 1,25$  дают приближенные значения корней уравнения  $4x^3 - 6x - 1 = 0$ . Найденные решения можно проверить подстановкой значений  $x$  в это уравнение. Очевидно, что мы нашли только приближенную величину действительных корней уравнения, но точность можно увеличить, если вычертить график функции  $y = 4x^3 - 6x - 1$  более тщательно.

Таблица 5.1

Точки кривой  $y = 4x^3 - 6x - 1$

$x$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y$	-2,1	-5,5	+1	+1,5	-1	-3,5	-3	+3,5	+1,9

На графике, изображенном на рис. 5.10, ясно видно, какая стационарная точка является точкой максимума, а какая — минимума. Однако строить графики функций только для того, чтобы определить точки максимума и минимума, довольно утомительно. Для этой цели можно воспользоваться второй производной. Вторая производная функции выражает *скорость изменения наклона* кривой. Поэтому ясно, что после того, как мы получим с помощью первой производной и первоначальной функции координаты стационарных точек и определим характер скорости изменения наклона в этих точках, то мы можем затем очень просто установить, где находятся максимум и минимум или точки перегиба. Если вторая производная в стационарной точке *положительна*, то градиент в ней *увеличивается*, и, следовательно, эта точка есть точка *минимума*. Если же вторая производная *отрицательна*, то градиент будет *уменьшаться*, и мы имеем точку *максимума*. Там, где вторая производная равна нулю, находится точка перегиба. Таким образом, в предыдущем примере функция  $y = 4x^3 - 6x - 1$  имеет максимум в точке  $(-0,71; 1,83)$ , поскольку в ней  $d^2y/dx^2 = 24x = -17,04$ , минимум в точке  $(0,71; -3,83)$ , так как в ней  $d^2y/dx^2 = 24x = +17,04$ .

Теперь мы можем вернуться к исходной задаче: определение стационарных точек функции  $y = x^4 - 3x^2 - x + 2$ . Абсциссами

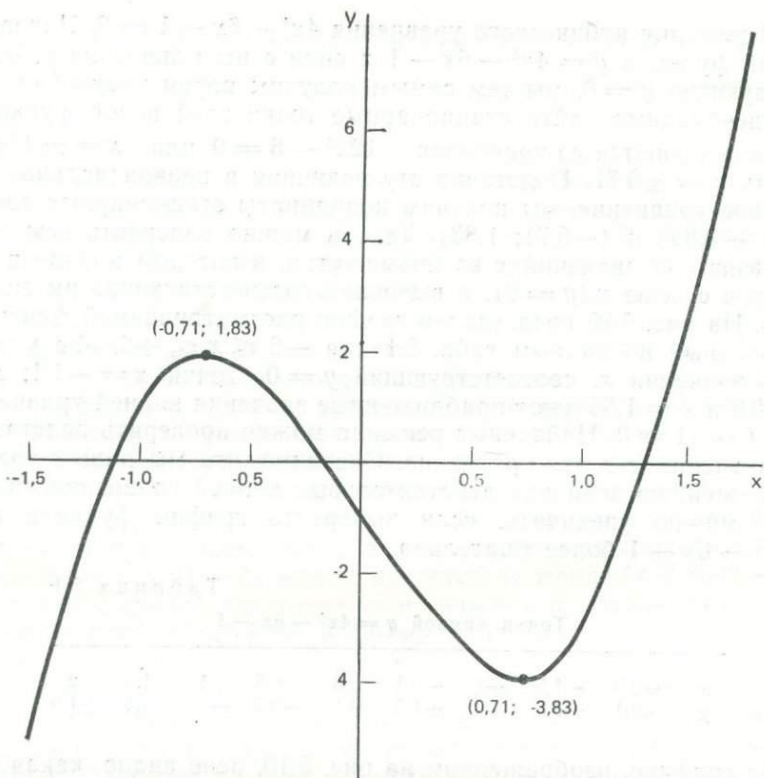


Рис. 5.10 Графический метод нахождения корней функции  $y = 4x^3 - 6x - 1$ .

стационарных точек являются корни кубической функции  $y = 4x^3 - 6x - 1$ . Подставляя найденные значения  $x$  в первоначальное уравнение четвертой степени, получаем координаты стационарных точек:  $(-1,1; 0,9)$ , в которой вторая производная положительна, и, следовательно, это точка минимума, и  $(-0,2; 2,1)$ , где вторая производная отрицательна, и значит, это точка максимума, а также  $(1,25; -1,5)$  — еще одна точка минимума.

#### Задачи 5.4

Прежде чем ознакомиться со следующими разделами данной главы, настоятельно советуем читателю проделать помещаемые ниже упражнения. Вычислите корни следующих квадратных уравнений:

а) подбором и разложением на множители:

5.4.1  $x^2 - 4 = 0$ .

5.4.2  $x^2 + 16x + 64 = 0$ .

$$5.4.3 \quad 2x^2 + 4x - 6 = 0.$$

$$5.4.4 \quad 3x^2 + 4x + 1 = 0.$$

$$5.4.5 \quad 1 - x^2 = 0.$$

б) используя формулу (5.32):

$$5.4.6 \quad 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$5.4.7 \quad x^2 - 4 = 0.$$

$$5.4.8 \quad 5x^2 - 7x - 2 = 0.$$

$$5.4.9 \quad -3x^2 + 4x - 1 = 0.$$

$$5.4.10 \quad 3x - 2x^2 = 4.$$

Найдите корни следующих уравнений графически:

$$5.4.11 \quad x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0.$$

$$5.4.12 \quad 10x^3 + 23x^2 + 5x - 2 = 0.$$

5.4.13—5.4.22

Определите стационарные точки каждой функции в задачах к разделу 5.1 и установите, где находятся точки максимума, минимума или перегиба.

### 5.5 Производная произведения и частного

При построении графиков для комбинации функций более сложных видов (например, вида  $y = x \ln x$ ) снова возникает необходимость определить стационарные точки, с тем чтобы построить график более или менее точно. Производные этих функций являются комбинациями отдельных функций и их производных. В предыдущих примерах мы видели, что производная суммы функций равна сумме производных отдельных слагаемых. Если слагаемых много, то процесс нахождения производной в этом случае оказывается несколько более продолжительным, но по сути он весьма прост. Многие функции содержат комбинацию стандартных функций в виде *произведения* (например,  $y = x \ln x$ ) или *частного* (например,  $x/\ln x$ ). В общем случае, если обозначить эти функции через  $u$  и  $v$ , так что  $y = u(x)v(x)$ , производная произведения определяется из соотношения:

$$\frac{dy}{dx} = u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx}, \quad (5.33)$$

и для частного,  $y = u(x)/v(x)$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x) \frac{du}{dx} - u(x) \frac{dv}{dx}}{v(x)v(x)}. \quad (5.34)$$

В итоге для функции  $y = x \ln x$  имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} x + \ln x = 1 + \ln x.$$

Аналогично, чтобы найти производную функции  $y = 3x^2 \sin x$ , подставляем значения  $u(x) = 3x^2$  и  $v(x) = \sin(x)$  в формулу (5.33):

$$\frac{d}{dx} (3x^2 \sin x) = 3x^2 \cos x + 6x \sin x,$$

а для функции  $y = \ln x \operatorname{tg} x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \ln x \sec^2 x + (\operatorname{tg} x)/x.$$

Для функции  $y = x/\ln x$  из формулы (5.34) имеем:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\ln x} \right) = \frac{\ln x - x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} \left( 1 - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Если взять функцию  $y = \sin x/\cos x$  ( $y = \operatorname{tg} x$ , чья производная, как мы знаем из формулы (5.24), равна  $\sec^2 x$ ), то из равенства (5.34) следует:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Правило нахождения производных сложных функций заключается в дифференцировании функции от функции или дифференцировании с помощью подстановки. Рассмотрим функцию:

$$y = (\cos x + \sin x)^3.$$

Положим  $z = \cos x + \sin x$ , так что

$$y = z^3.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dz} = 3z^2$$

и

$$\frac{dz}{dx} = -\sin x + \cos x.$$

Теперь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx},$$

и отсюда

$$\frac{d(\cos x + \sin x)^3}{dx} = 3(\cos x + \sin x)^2 (\cos x - \sin x).$$

Подобным образом мы можем найти производную функции  $y = \ln(\sin x)$ , полагая  $z = \sin x$ , так что  $dy/dz = 1/z$  и  $dz/dx = \cos x$ , а в итоге:

$$\frac{d}{dx} (\ln(\sin x)) = \frac{1}{z} \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Более сложные функции можно дифференцировать, применяя сразу несколько упомянутых правил. Таким способом можно получить производные большинства функций. Возьмем в качестве примера функцию  $y = \operatorname{tg} 3x^3 + 2x \cos x$ . Производную первого члена ( $\operatorname{tg} 3x^3$ ) можно найти, применяя правило дифференцирования функции от функции, а производную второго члена — с помощью формулы для дифференцирования произведения (уравнение (5.34)). Положим в первом члене  $z = 3x^3$ , так что  $y = \operatorname{tg} z$ , отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz} = 9x^2 \sec^2 3x^3;$$

второй член обозначим через  $y = 2x \cos x$ , и тогда

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos x + 2x(-\sin x) = 2(\cos x - x \sin x).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} 3x^3 + 2x \cos x) = 9x^2 \sec^2 3x^3 + 2(\cos x - x \sin x).$$

Сейчас очень важно, чтобы читатель самостоятельно ознакомился с различными способами дифференцирования и со стандартными производными, рассмотренными в этой главе. Задачи, помещаемые ниже, предоставляют читателю такую возможность. В дальнейшем можно попытаться решить примеры из любого задачника по дифференциальному исчислению (например, Knight, Adams, 1975, Stephenson, 1973)<sup>1</sup>.

### Задачи 5.5

Продифференцируйте:

**5.5.1**  $y = 5(2x^2 + \sin x).$

**5.5.2**  $y = 2 \arcsin 2x.$

**5.5.3**  $y = 3 \ln x^2.$

**5.5.4**  $y = x^{-2} \ln x.$

**5.5.5**  $y = 2 \sin x \cos x.$

**5.5.6**  $y = \sec^2 x$  (положите  $z = \sec x$  и  $u = \cos x$ ).

**5.5.7**  $y = \operatorname{tg} (\ln x).$

**5.5.8**  $y = e^{2x} \ln(x^2 + 1).$

**5.5.9**  $y = x \ln x / \sin x.$

**5.5.10**  $xy = 5 \cos x + x^2 \ln x.$

<sup>1</sup> См. также: Б. П. Демидович, 1972; Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., «Наука». — Прим. ред.

## 5.6 Выбор и построение кривых

Задача построения криволинейных регрессионных линий, наилучшим образом соответствующих наблюдаемым данным, лишь ненамного сложнее, чем процедура получения линейных уравнений регрессии. Отметим, что применяемые здесь статистические методы и их предпосылки остаются аналогичными тем, какие описаны в главе 3. Кривые также можно провести «на глаз», хотя получение их уравнений представляет собой более сложную задачу, чем в случае прямых линий. Построение сложных полиномов выходит за цели нашей книги. Однако достаточно подготовленный читатель может обратиться практически к любому учебнику по численному анализу, содержащему главу о построении кривых по точкам (например, F. B. Hildebrand, 1974; Introduction to numerical analysis. New York: McGraw-Hill; I. M. Khabaza, 1965: Numerical analysis. London: Pergamon<sup>1</sup>). Построение кривых наилучшего соответствия для периодических функций так называемого гармонического анализа, или анализа Фурье, будет рассмотрено в главе 8.

Таким образом, ограничивая свое внимание простыми типами кривых, заметим, что один из наиболее удобных способов определения уравнения кривой, которая наилучшим бы образом соответствовала данным точкам, состоит в «спрямлении» кривой, когда, например, одна или обе переменные откладываются в логарифмических осях. В конце главы 3 мы упоминали о возможностях «преобразования» нелинейных связей в линейные способом подстановки. Так, с помощью подстановки  $t = \lg x$  уравнение вида  $y = a \lg x + c$ , где  $a$  и  $c$  постоянные, преобразуется в линейное, и это дает возможность построить зависимость  $y$  от  $t$ .

В физической географии многие наблюдаемые связи аппроксимируются функциями вида  $y = a \lg x + c$ , графики которых имеют вид прямых на специальной полулогарифмической бумаге, на которой одна ось, обычно ось  $x$ , имеет логарифмическую разметку: то есть масштаб здесь искажен таким образом, что график функции  $y = \lg x$  выглядит как прямая линия (рис. 5.11, *a* и *б*). Не следует думать, что это какой-то математический «фокус». Такой прием вполне законен. Он применяется для удобства обращения с функцией. Если такой переход возможен, то прямую, наилучшим образом соответствующую распределению точек, надо проводить с помощью одного из регрессионных методов, описанных в главе 3. Наиболее широко известными зависимостями в физической географии являются, по-видимому, серии графиков, связывающих характеристики речной сети (длину, площадь водосбора и т. д.) с порядком притока. Они предложены Хортоном (Horton, 1945) и разра-

<sup>1</sup> См. также: Б. П. Демидович, 1967: Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М., «Наука». — Прим. ред.

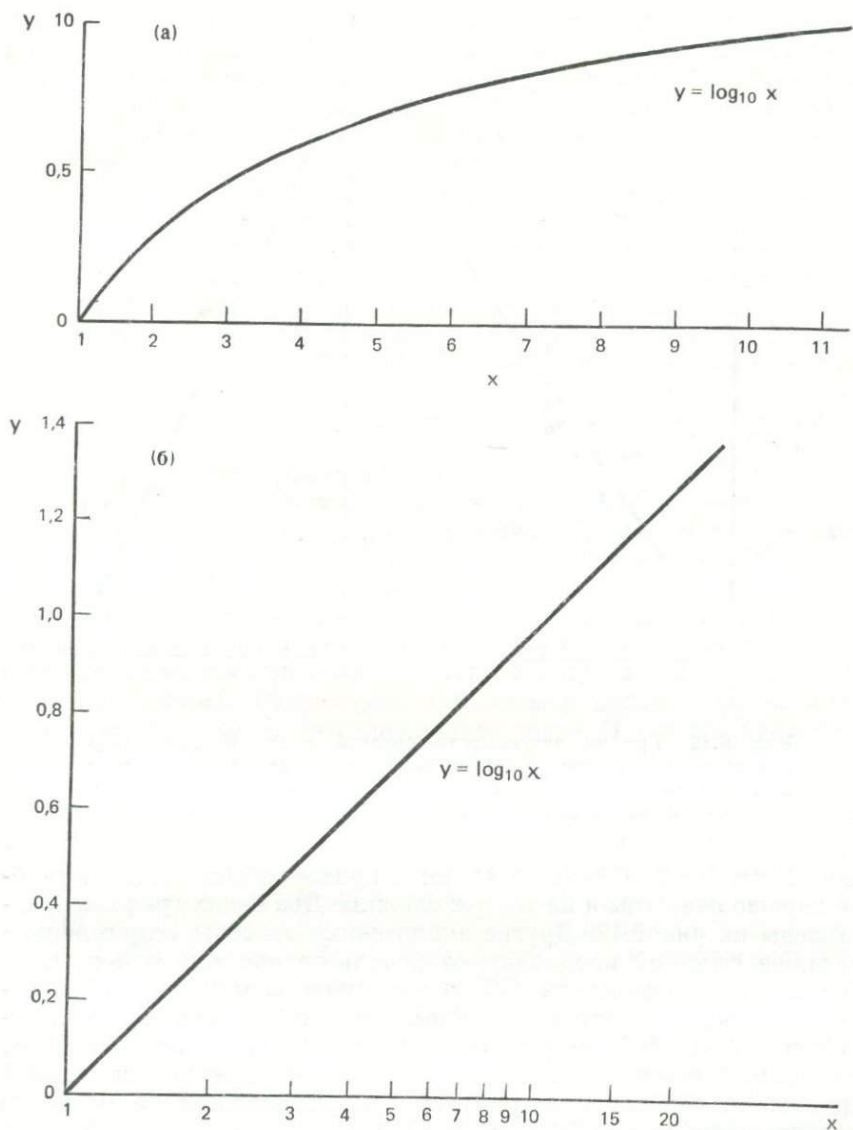


Рис. 5.11 График функции  $y = \log_{10} x$  в (а) обычных (линейных) и (б) полулогарифмических осях.

ботаны далее Штралером (Strahler, 1957) и другими. Необходимо все же заметить, что эти соотношения, наблюдаемые в любой разветвленной речной системе, нельзя ставить в прямую связь с геоморфологическими процессами, поэтому их использование ограни-

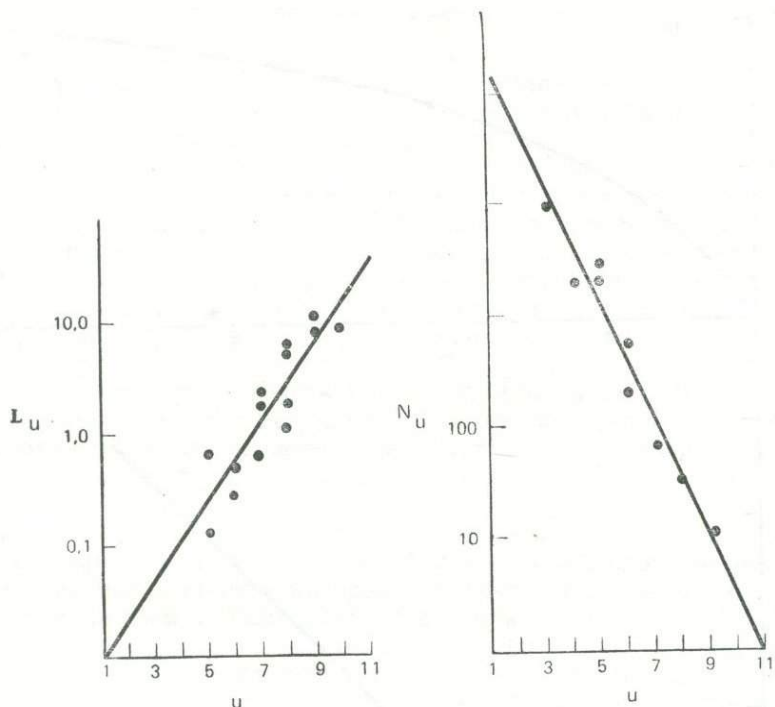


Рис. 5.12 График зависимости средней длины притоков ( $\bar{L}_u$ ) и количества притоков ( $N_u$ ) от порядка притока  $u$  для временных водотоков (арройо) в окрестностях Сантафе, штат Нью-Мексико (по Leopold, Wolman, Miller, 1964).

чено (King, 1966). Однако в качестве примеров они довольно удобны, хорошо известны и не так уж сложны. Два таких графика представлены на рис. 5.12. Другие аналогичные способы «спрямления» графиков функций предполагают использование еще одного вида специальной графической бумаги, так называемой двойной логарифмической, на которой по обеим осям откладываются логарифмы переменных. На такой бумаге уравнение  $\lg y = a \lg x + c$  имеет вид прямой линии<sup>1</sup>. Подобным же образом бумага нормальной вероятности позволяет «спрямить» кривую функции нормального распределения (глава 7).

Указанные способы приведения нелинейных функций к линейному виду тем не менее не следует путать с процедурой *преобразования* данных, поскольку их частотное распределение остается

<sup>1</sup> Основание логарифма в случае такого уравнения не имеет значения, поскольку  $\log_c x = \log_b x \log_c b$ , то есть постоянную  $\log_c b$  можно включить в константу  $a$ . — Прим. ред.

близким к нормальному. Для многих статистических методов, например регрессионного анализа, существенно предположение о том, что распределение данных близко к нормальному. Например, если кривая плотности распределения имеет положительную асимметрию (с относительно большим числом малых по величине значений), то распределение можно приблизить к нормальному, если каждое значение возвести в квадрат, а затем построить новую кривую. Аналогично для распределения с отрицательной асимметрией (и с относительным преобладанием больших значений) нормальное распределение можно получить, если извлечь квадратный корень или взять логарифм каждого значения. Краткое описание кривой нормального распределения, а также примеры асимметричных распределений и соответствующих преобразований даны в Приложении 5, раздел 4. Кривая нормального распределения подробно описана в главе 7. Во многих случаях необходимое по статистическим причинам преобразование одной или обеих переменных может перевести исходную нелинейную функцию в линейную.

Первый шаг в построении кривой, наилучшим образом соответствующей данным, состоит в нахождении хоть какого-нибудь сходства между кривой, проведенной на обычной графической бумаге, и графиком любой из стандартных функций, рассмотренных в этой главе ранее. Этот процесс окажется состоящим из большого количества проб и ошибок, если не воспользоваться одной из подходящих для каждого конкретного случая машинных программ по построению кривых. Рассмотрим для примера связь, наблюдаемую между максимальной интенсивностью ливня ( $I_t$ ) и его продолжительностью ( $t$ ) за период в несколько лет (McCallum, 1959). Типичная кривая для таких связей изображена на рис. 5.13. Видно довольно тесное согласование кривой с эмпирическими точками. Тем не менее кривую такого вида не всегда можно использовать в целях прогнозирования, и ею довольно трудно пользоваться при экстраполяции максимальной интенсивности на очень длинные (более 12 часов) или очень короткие (менее 5 минут) промежутки времени. Последнее особенно важно при оценке пропускной способности площади изучаемого водосбора. По расчетам, за трехлетний период максимальной интенсивности ливня, шедшего пять минут, была равна для данного водосбора в Западном Уэльсе 52,8 мм/час. Кривая на рис. 5.13 наводит на мысль, что для дождя меньшей продолжительности, скажем в одну минуту, максимальные интенсивности должны быть гораздо больше, однако инерция регистрирующего прибора не позволяет надежно оценить величину интенсивности за столь короткие промежутки времени. Кривая асимптотически приближается к оси  $y$  (интенсивность ливня) и к оси  $x$  (продолжительность в часах). Сравнение вида этой кривой с графиками стандартных функций на рис. 5.2—5.8 подсказывает нам, что искомая функция имеет свойства, общие со степенными функциями вида  $y = kx^{-n}$ . Такие функции удобно переписать в виде

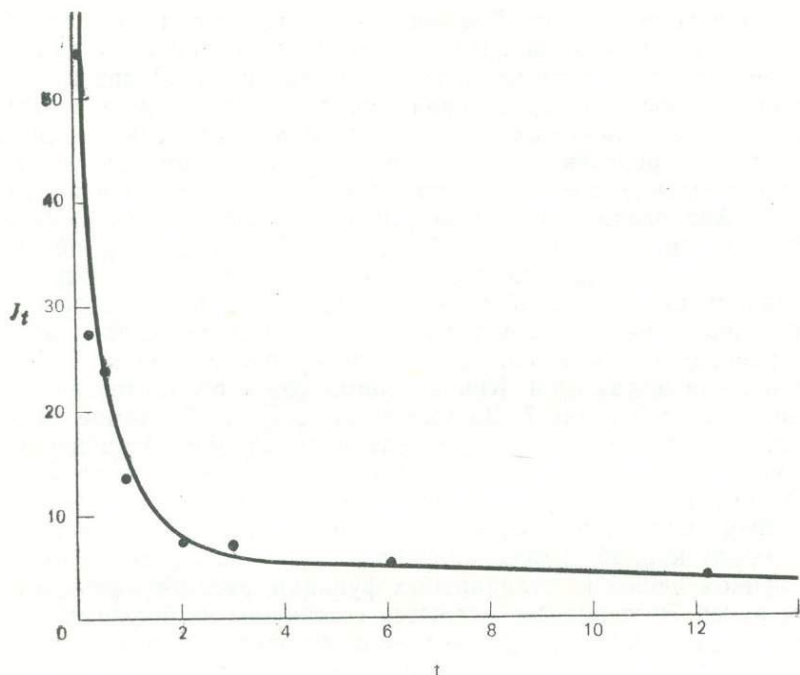


Рис. 5.13 График зависимости максимальной интенсивности осадков  $J_t$  (мм/час) от продолжительности их выпадения  $t$  (час), построенный в обычных (линейных) осях; Лампетер, Уэльс, 1973—1975 гг.

$\lg y = \lg k - n \lg x$ . По виду это уравнение сходно с общим уравнением линейной функции, и если начертить соответствующую ему линию на двойной логарифмической бумаге, то она будет близка к прямой (см. рис. 5.14).

Теперь мы в состоянии непосредственно получить уравнение линейной регрессии относительно *логарифма* каждой переменной,  $I_t$  и  $t$ . Здесь важно помнить свойства логарифма чисел меньших единицы. Если логарифм числа записан в «искусственной» форме, то величина, стоящая слева от десятичной запятой, отрицательна, а стоящая справа — положительна, то есть логарифмы таких чисел имеют положительную мантиссу и отрицательную характеристику. Например, логарифм числа, означающего 0,16667 часа (10 минут), в искусственной форме имеет вид:  $\bar{1},2219$ , а в естественной форме  $-0,7821 = -1 + 0,2219$ . Коэффициент корреляции между  $\lg I_t$  и  $\lg t$  равен  $-0,8837$ . Расчет уравнения регрессии по методу наименьших квадратов производится с помощью табл. 5.2. Исходные данные по интенсивности дождя ( $I_t$ ) и его продолжительности ( $t$ ) помещены в первые две колонки. Колонки, озаглав-

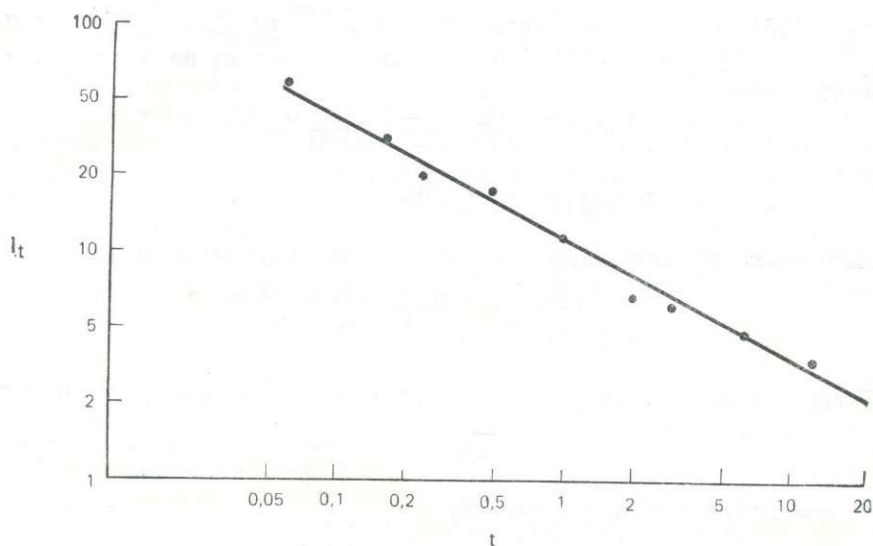


Рис. 5.14 График зависимости максимальной интенсивности осадков от продолжительности их выпадения в двойных логарифмических осях. Обозначения см. рис. 5.13.

ленные  $x$  и  $y$ , содержат логарифм переменных  $I_t$  и  $t$  соответственно, то есть  $y = \lg I_t$  и  $x = \lg t$ . Три последние колонки дают значения  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $xy$  и их суммы. Среднее значение  $x$  равно  $-0,0139$ ,

Таблица 5.2

Полулогарифмическая регрессия для функции  $I_t = kt^{-a}$

$I_t$	$t$	$y$ $\lg I_t$	$x$ $\lg t$	$y^2$ $(\lg I_t)^2$	$x^2$ $(\lg t)^2$	$xy$ $(\lg I_t \lg t)$
52,8	0,0833	1,7726	-1,0794	2,9674	1,1651	-1,8594
36,5	0,1667	1,5623	-0,7781	2,4408	0,6054	-1,2156
25,6	0,25	1,4082	-0,6021	1,9830	0,3625	-0,8479
22,8	0,5	1,3578	-0,3010	1,8436	0,0906	-0,4087
13,4	1	1,1271	0,0000	1,2704	0,0000	0,0000
7,4	2	0,8692	0,3010	0,7555	0,0906	0,2616
6,8	3	0,8325	0,4771	0,6931	0,2276	0,3972
4,9	6	0,6902	0,7782	0,4764	0,6056	0,5371
3,6	12	0,5563	1,0792	0,3095	1,1647	0,6004
		10,1262	-0,1251	12,7397	4,3122	-2,5353
		$\Sigma y$	$\Sigma x$	$\Sigma y^2$	$\Sigma x^2$	$\Sigma xy$

$y = 1,1251$ , так что, подставляя значения  $\sum xy$ ,  $\sum x$ ,  $\sum y$ ,  $\sum x^2$  и  $(\sum x)^2$  в формулу (3.30), мы получаем уравнение вида  $y = mx + k$ :

$$m = \frac{9 \times (-2,5353) - (-0,1251)(10,1262)}{9 \times 4,3122 - (-0,1251)^2} = \\ = \frac{-21,55}{38,79} = -0,56.$$

Подставляя значения  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и  $m$  в уравнение (3.31), находим:

$$k = 1,1251 - (-0,56)(-0,0139) = \\ = 1,1173.$$

Тогда уравнение регрессии по методу наименьших квадратов будет иметь вид:

$$y = -0,56x + 1,1173, \quad (5.35)$$

но  $y = \lg I_t$  и  $x = \lg t$ , и поэтому

$$\lg I_t = -0,56 \lg t + 1,1173.$$

Взяв антилогарифмы, получаем:

$$I_t = (\text{antilg } 1,1173) t^{-0,56},$$

и следовательно, уравнение кривой на рис. 5.13 и 5.14 выражается в следующем виде:

$$I_t = 13,1 t^{-0,56}. \quad (5.36)$$

До сих пор мы пользовались методом линейной регрессии, основанным на предположении о нормальном распределении данных, но не проверяли этого факта для конкретных случаев. В разобранный выше примере распределение непреобразованных данных о продолжительности выпадения осадков имеет ярко выраженную положительную асимметрию, однако после логарифмирования распределение становится близким к нормальному. Возможность построить кривую, наилучшим образом соответствующую эмпирическим данным, с помощью указанного метода представляется не так часто. Приведенный выше пример иллюстрирует случай, где взаимосвязь хорошо описывается одной из стандартных функций. Во многих других случаях реальные данные описываются простыми функциями лишь весьма приблизительно. Умение подбирать более сложные функции приходит только с опытом и накоплением знаний о виде кривых, соответствующих различным комбинациям функций. Это условие еще раз подчеркивает важность работы над решением всех без исключения задач, помещенных в этой главе.

### 5.7. Другие примеры нелинейных связей

Даже самый поверхностный взгляд на многочисленные публикации по физической географии обнаружит, что многие выявленные наукой нелинейные связи, и прежде всего во флювиальной геоморфологии и гидрологии, описываются функцией, аналогичной полученной в предыдущем примере. Большинство этих функций содержит степень с величиной показателя от  $-1$  до  $+1$ . Среди них имеются такие, в которых переменная  $y$  обратно пропорциональна *корню квадратному* из переменной  $x$ . Уравнение (5.36) приближенно можно записать в виде  $I_t = 13/\sqrt{t}$ .  
Функция вида:

$$i = a + bt^{-1/2} \quad (5.37)$$

связывает скорость инфильтрации воды в почву ( $i$ ) со временем ( $t$ ) в широком диапазоне условий (Philips, 1957—1958). Возможность применения этой функции к конкретной ситуации зависит от минимальной скорости, с какой вода просачивается в почву до состояния ее полного насыщения. Эта минимальная скорость, представленная в уравнении постоянной  $a$ , зависит в свою очередь от типа почвы. Второй член уравнений показывает, что изменение скорости инфильтрации можно выразить через прошедший с начала инфильтрации отрезок времени, умноженный на постоянную  $b$ , характеризующую степень влажности почвы. Если к моменту начала инфильтрации почва была почти насыщенной, то этот член будет очень маленьким, поскольку при  $b = 0$  мы имеем скорость инфильтрации в условиях насыщения почвы. График этого уравнения изображен на рис. 5.15. Верно, что функция асимптотически стремится к значению  $i = a$ . Подобные связи, только без первой константы, часто возникают при рассмотрении стока реки с единицы площади водосбора, отнесенного ко всей площади бассейна. Например, при анализе кривых среднегодового максимального паводочного стока, полученных для реки Линмузт (Dobbie, Wolf, 1953), мы сталкиваемся с функциями вида  $R = kA^{-1/2}$ . В этом случае Добби и Вульф показали, что

$$R = 3350A^{-0.5}, \quad (5.38)$$

где  $R$  — сток с 1000 акров в куб. футах/сек,  $A$  — площадь водосбора в тысячах акров.

Весьма похожие по виду уравнения можно найти в некоторых областях гидрометеорологии. Например, для большинства конвективных ливней общее пространственное распределение интенсивности дождя относительно центрального максимума характеризуется тем, что интенсивность падает в радиальном направлении от центра ливня. Во многих районах мира связь между средней

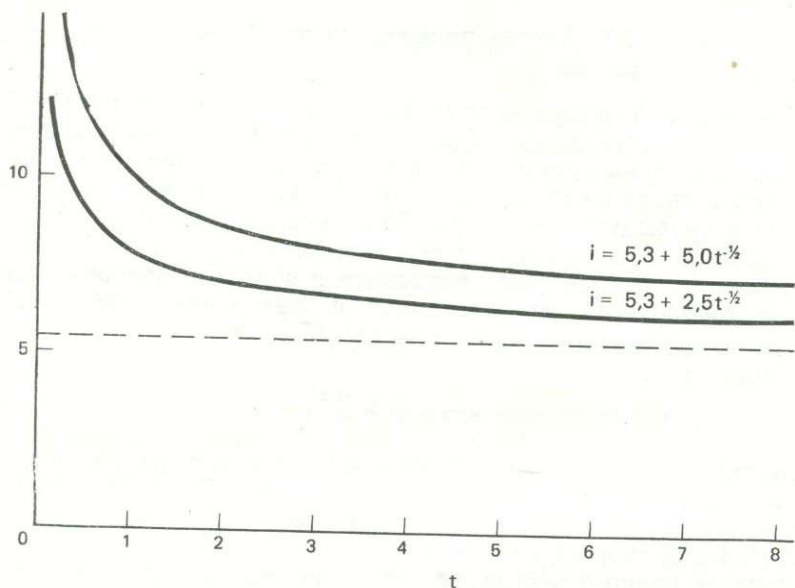


Рис. 5.15 График функции  $i = a + bt^{-1/2}$  при  $a = 5,3$ ; значения  $b$  демонстрируют влияние высокой ( $b = 2,5$ ) и низкой ( $b = 5,0$ ) первоначальной влажности почвы на скорость инфильтрации.

интенсивностью ливня при данной его продолжительности и площадью ливня имеет вид:

$$\bar{P} = a - bA^{1/2}, \quad (5.39)$$

где первый постоянный член ( $a$ ) означает центральный максимум выпадения осадков, а  $b$  — скорость уменьшения интенсивности дождя в радиальном направлении от центра ливня. Эта связь оказалась справедливой для многих районов Соединенных Штатов (Huff, Neil, 1957). Другие исследования, связанные с нахождением подобных связей в США (например, в заповеднике Майами, 1936), показали, что при относительно больших площадях функция включает дополнительный экспоненциальный член, что в общем виде записывается как

$$\bar{P} = P_0 e^{-kA^n}, \quad (5.40)$$

где  $P_0$  — аналог постоянного члена  $a$  в уравнении (5.39), а  $k$  и  $n$  — постоянные, относящиеся к данному ливню или последовательности ливней одной и той же продолжительности. Один из примеров уравнений указанного выше типа для северных районов США имеет вид:

$$\bar{P} = 16e^{-0,0883A^{0,24}}. \quad (5.41)$$

Этот пример типичен для более сложных функций, с которыми мы можем столкнуться.

На определенной стадии изучения вопроса о построении кривых может возникнуть вопрос о том, в каком случае усложнение функции, описывающей данную зависимость, приводит лишь к небольшому улучшению соответствия между кривой и эмпирическими точками. Можно показать, что для целей сравнения желательно брать относительно простые функции, в определенных случаях даже линейные. В географии имеется немало связей, которые явно приводят к обычным двумерным зависимостям, часто принимающим вид степенных функций. Однако следует иметь в виду, что в некоторых случаях такое упрощение является недопустимым по следующим соображениям. Во-первых, полученная функция описывает действительность лишь приблизительно. Во-вторых, некоторое явное противоречие между наблюдаемой связью и вычисленной функцией может быть результатом влияния других независимых факторов. Некоторые зависимости, полученные, например, во флювиальной геоморфологии, явно не включают целый ряд других не менее важных независимых переменных. В многомерном случае такая ситуация неизбежна. В-третьих, когда функции, описывающие связь, дают на двойной логарифмической координатной бумаге линейный график, то очевидное соответствие между прямой и данными наблюдений может ввести в заблуждение относительно якобы очень высокой степени корреляции между переменными. Рассмотрев величины, отложенные по осям таких графиков, можно заметить, что из-за сделанного преобразования (логарифмирования) отклонение многих точек от прямой регрессии становится незаметным. Иногда возникает даже необходимость в интерпретации полученных зависимостей. Рассмотрим два примера степенных функций, где имеется довольно хорошее соответствие. Это связь между длиной притока ( $L$ ) и площадью водосбора ( $A$ ), как, например, соотношение (Hack, 1957):

$$L = 1,4A^{0,6}, \quad (5.42)$$

а также связь между максимальной интенсивностью в масштабе всего земного шара ( $R$ ) и его продолжительностью ( $D$ ), часто описываемая в учебниках по климатологии (например, Smith, 1972; Linsley, Franzini, 1972):

$$R = 16,6D^{0,47}. \quad (5.43)$$

Наконец, имеется еще ряд функций, которые на полулогарифмической координатной бумаге можно изобразить в виде прямых. Это функции вида  $y = f(\lg x)$ , где  $f$  — линейная функция. Такие зависимости встречаются в некоторых задачах речной геоморфологии. Из специалистов, работающих в этой области, Дж. Грин (Green, 1935) одним из первых отважился заглянуть в мир математического моделирования, когда пытался подобрать общий вид кривой

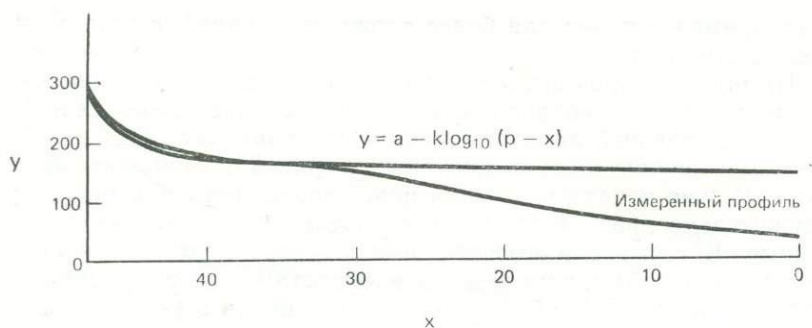


Рис. 5.16 График функции  $y = a - k \log_{10} (p - x)$  применяется для описания продольного профиля верховья реки Мол (Green, 1935).

для описания продольного профиля реки Мол в Англии. Он намеревался связать эту кривую общего вида с отметками базиса эрозии в прошлом, представленными остатками террас в нижней части долины, и с помощью этой связи восстановить прежний продольный профиль реки, а также сделать заключение о положении уровня моря до того, как профиль реки был «сглажен». Насколько это ему удалось, видно из рис. 5.16. Общее уравнение имеет вид:

$$y = a - k \log_a (p - x), \quad (5.44)$$

где  $y$  — высота в футах над уровнем моря,  $x$  — расстояние в милях от устья реки,  $p$  — общая протяженность реки, а  $a$  и  $k$  — константы, которые для реки Мол равны 241,5 и 65 соответственно. С одной стороны, кривая асимптотически стремится к прежнему положению уровня моря, с другой — к оси  $y$ . Разумеется, в действительности эти условия никогда не могут быть достигнуты. Подобные типы полулогарифмических связей имеются и у Р. Руха в его сравнительном описании лёссовых отложений в штате Айова, США (Ruhe, 1969) и у Р. Хортон в работе по морфометрии речных сетей (Horton, 1945). Если мы вновь обратимся к рис. 5.12, то можем видеть, что средняя длина притоков данного порядка и порядок самих притоков находятся между собой почти в полной полулогарифмической зависимости:

$$\bar{L}_u = f(\lg u), \quad (5.45)$$

где  $\bar{L}_u$  — средняя длина притоков порядка  $u$ .

Можно привести еще несколько примеров как линейных, так и нелинейных функций, которые могут встретиться географу, но мы надеемся, что читатель сам в состоянии обратиться к учебникам или статьям, где рассматриваются подобные функции.

В данной главе были изучены степенные функции, образующие полиномы. В следующей главе полиномы будут использованы для разложения функции в ряд.

## РЯДЫ И ПРОГРЕССИИ

6.1 Арифметическая  
и геометрическая прогрессии

В предыдущих двух главах мы рассматривали функции, которые связывают две или более переменных. Задание функции подразумевает *фиксированную* связь между зависимой и независимой переменными. Рассмотрим, например, ситуацию, при которой последовательное накопление осадков в некотором резервуаре измеряется с шагом в год. Процесс накопления можно представить в табличной форме в виде последовательности чисел, означающих годовое сокращение емкости резервуара. Предположим, что после момента завершения строительства резервуара (год 0) в нем уже имеется некоторое аккумулированное количество осадков  $a$  м<sup>3</sup> и что каждый последующий год в резервуаре откладывается еще  $d$  м<sup>3</sup>. После пяти лет *совокупное* количество осадков в резервуаре будет равно

$$a + d + d + d + d + d = a + 5d,$$

после десяти лет  $a + 10d$  и т. д. В итоге мы имеем *прогрессию* ежегодного накопления осадков в данном резервуаре следующего вида:  $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, \dots$ . Эта прогрессия называется *арифметической*: каждый последующий ее член получается из сложения предыдущего с числом  $d$  (число  $d$  называется *разностью арифметической прогрессии*)<sup>1</sup>. Обозначим год через  $x$ , а процесс осадконакопления — через  $y$ . Тогда линейная функция  $y = dx + a$  описывает ту же самую последовательность при целых значениях  $x$ . Если  $d = 2$ , а  $a = 1$ , то арифметическая прогрессия для нашего примера была бы 1, 3, 5, 7, 9, ... Тот же результат получится, если мы подставим значения  $x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  в функцию  $y = 2x + 1$ . Числа  $a$  и  $d$  могут быть отрицательными, так что прогрессия 10, 9, 8, 7, 6, 5, ... получается при

<sup>1</sup> Прогрессия названа арифметической потому, что любой ее член равен среднему арифметическому равноудаленных от него:

$$P_m = \frac{P_{m+k} + P_{m-k}}{2}. \quad \text{— Прим. ред.}$$

$a = 10$ , а  $d = -1$  (функция  $y = 10 - x$  при увеличении целых значений  $x$  начиная от  $x = 0$ ).

Прогрессии, входящие в другую группу, называются *геометрическими*. В приведенном выше очень простом примере с накоплением осадков мы приняли, что *скорость* осадконакопления была год от года постоянной, но при этом мы не рассматривали пропорциональное уменьшение емкости резервуара. Если мы вновь предположим, что совокупное осадконакопление описывается функцией  $y = 2x + 1$  в условных единицах, и примем общую вместимость резервуара в год 0 равной 100, то процентное уменьшение емкости резервуара за первый год составит 2,02 ( $2 \times 100/99$ ), за второй год 2,06 ( $2 \times 100/97$ ), за третий год — 2,10 и т. д. Эти цифры представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Емкость резервуара в условиях, когда годовая скорость накопления осадков постоянна, но возрастает процент годового уменьшения емкости

Год. $x$	0	1	2	3	4	5	6
Накопление осадков, $y$	1	3	5	7	9	11	13
Емкость резервуара ( $100 - y$ )	99	97	95	93	91	89	87
Абсолютное уменьшение емкости	1	2	2	2	2	2	2
Процентное уменьшение	—1,01	—2,02	—2,06	—2,10	—2,20	—2,27	—2,33

С каждым последующим годом процентное уменьшение емкости возрастает так, что за 49-й год оно составит  $2 \times 100 / (100 - 2 \times 49 - 1) = 200\%$ , а к середине 50-го года резервуар будет заполнен, иными словами к этому моменту его общая емкость уменьшится на 100%. Подобным же образом арифметическая прогрессия описывает простые проценты в экономике, когда эти проценты есть функция только первоначального капитала. Геометрическая прогрессия, напротив, описывает сложные проценты. Если для случая осадконакопления ежегодное процентное уменьшение вместимости резервуара по сравнению с предыдущим годом принять за *постоянную* (иначе, проценты зависят от величины *наличного* капитала, если продолжить аналогию с экономикой), то прогрессия ежегодного накопления осадков примет другой вид. Пусть каждый год эффективная емкость резервуара сокращается на 25% емкости предыдущего года. В табл. 6.2 отражено общее сокращение емкости за первые шесть лет, если считать первоначальную емкость за 100 единиц. Если обозначить через  $a$  первоначальную емкость в 100 единиц, а через  $r$  — процентное изменение емкости за каждый год, то последовательными членами геометрической прогрессии для остаточной емкости будут:

$$a, a(0,75), a(0,75)(0,75), a(0,75)(0,75)(0,75), \dots,$$

или

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, \dots$$

Емкость резервуара в условиях, когда процент ежегодного уменьшения емкости постоянен, но сокращается его абсолютное значение

Год, $x$	0	1	2	3	4	5	6
Остаточная емкость	100	75	56,25	42,19	31,64	23,73	17,80
Ежегодное сокращение	0	25	18,75	14,06	10,53	7,91	5,93

Любая последовательность, члены которой образуются в соответствии с тем же законом, какой справедлив для данной последовательности, представляет собой геометрическую прогрессию<sup>1</sup>. В нашем примере остаточную емкость ( $y$ ) по прошествии времени ( $x$ ) можно описать показательной функцией вида  $y = 100(0,75)^x$ . Ниже приведены несколько простых примеров с заданными значениями  $a$  и  $r$  и соответствующими показательными функциями:

$$a = 1, r = 2; 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; y = 2^x$$

$$a = 1, r = 10; 1, 10, 100, 1000, 10\,000; y = 10^x$$

$$a = 3, r = 3; 3, 9, 27, 81, 243, 729; y = 3(3)^x = 3^{x+1}$$

$$a = 1, r = \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Первый член каждой прогрессии ( $a$ ) называется *начальным членом*, а постоянная величина ( $r$ ) — *знаменателем прогрессии*. Заметим, что  $n$ -ый член прогрессии равен  $ar^{n-1}$ . Обратим также внимание читателя на большое сходство графиков этих показательных функций и экспоненциальной функции  $y = e^x$  (см. рис. 5.7).

Следующий пример из физической географии проиллюстрирует некоторые другие различия между двумя типами прогрессии, а также поможет установить связь прогрессий с соответствующими функциями. В почвоведении и петрографии для обозначения размеров частиц грунта используется шкала  $\phi$  (фи)<sup>2</sup>. Шкала, посредством которой обычно связывается словесное описание образцов, характерное для *номинальной* шкалы: грубозернистый и тонкозернистый песок, грубая глина и т. д., — с определенными градациями диаметра частиц, называется *ординальной* (порядковой) шкалой (табл. 6.3). Словесное описание имеет весьма ограниченное применение, особенно, если размер частиц очень мал, так как в этом случае при небольшом изменении крупности частиц главную роль

<sup>1</sup> В геометрической прогрессии любой член равен среднему геометрическому равноудаленных от него:  $S_m = \sqrt{S_{m+k} S_{m-k}}$ . — Прим. ред.

<sup>2</sup> Шкала  $\phi$  соответствует взятым со знаком минус логарифмам по основанию 2 диаметра частиц в миллиметрах. — Прим. ред.

могут играть уже совершенно другие физические законы. Следовательно, шкала  $\varphi$  основывается на арифметической прогрессии при  $a = 9$  и  $d = -1$ , так что члены ее убывают и последовательные интервалы между классами размеров начинаются с 9, 8, 7, 6 и т. д. Соответствующие градации диаметров частиц (мм) принимают вид геометрической прогрессии, члены которой увеличиваются. Для этой геометрической прогрессии  $a = 0,00195$  и  $r = 2$ , поэтому для нижней границы каждого класса мы имеем 0,00195; 0,0039; 0,0078; 0,0156 и т. д. Значение  $\varphi$ , равное 8, соответствует диаметру 0,0039 мм, значение 0 — диаметру 1,0 мм, а значение  $-8$  — диаметру 256 мм. При рассматривании табл. 6.3 в обратном порядке, в том же порядке изменяются разность и знаменатель прогрессии. Однако если мы разобьем «галку крупную» и «галку мелкую» на четыре и два класса соответственно, то обнаружим, что значения  $d$  и  $r$  в двух прогрессиях сохраняются: значения  $\varphi$  от  $-2$  до  $-3$  соответствуют диаметрам от 4 до 8 мм, значения  $\varphi$  от  $-3$  до  $-4$  отвечают диаметрам от 8 до 16 мм и т. д.

Таблица 6.3

## Ф-шкала размеров частиц

Описание	Диаметр, мм	Единица $\varphi$
Валун	Больше 256	Меньше $-8$
Галька крупная	256—64	от $-8$ до $-6$
Галька мелкая	64—4	от $-6$ до $-2$
Гравий	4—2	от $-2$ до $-1$
Грубый песок	2—1	от $-1$ до 0
Крупный песок	1—0,5	0—1
Средний песок	0,5—0,25	1—2
Мелкий песок	0,25—0,125	2—3
Тонкий песок	0,125—0,0625	3—4
Грубый ил	0,0625—0,0312	4—5
Средний ил	0,0312—0,0156	5—6
Тонкий ил	0,0156—0,0078	6—7
Очень тонкий ил	0,0078—0,0039	7—8
Грубая глина	0,0039—0,00195	8—9
Средняя глина	0,00195—0,00098	9—10

Последовательность соответствий между  $\varphi$  и диаметром можно задать в виде функции  $\varphi$  от диаметра. Учитывая приведенное выше замечание, получим для шкалы  $\varphi$ :

$$\varphi = dx + a,$$

где  $x$  означает изменение диаметра частицы при переходе из одного класса размеров в другой, так что

$$\varphi = 9 - x \quad (6.1)$$

и для диаметра частицы ( $D$ ):

$$D = ar^n = 0,00195 (2^x). \quad (6.2)$$

Из этого уравнения имеем:

$$\lg D = \lg 0,00195 + x \lg 2$$

и

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lg D - \lg 0,00195}{\lg 2} = \\ &= 3,32 \lg D - (-2,71/0,3010) \\ \therefore x &= 3,32 \lg D + 9,0. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $x$  в уравнение (6.1), получим:

$$\varphi = -3,32 \lg D.$$

Это уравнение задает непрерывную функцию, связывающую диаметр частицы и ее значения по шкале  $\varphi$ .

### Задачи 6.1

Определите, какие из этих прогрессий арифметические и какие геометрические, и найдите соответствующие значения  $a$ ,  $r$  или  $d$ .

6.1.1 2,50; 1,25; 0,00; -1,25; -2,50, ...

6.1.2  $2x$ ,  $3x$ ,  $4x$ ,  $5x$ ,  $6x$ , ...

6.1.3 6, 36, 216, 1296, 7776, ...

6.1.4 2,1; 8,4; 33,6; 134,4; 537,6; ...

6.1.5 -3,0; -1,5; -0,75; -0,375; -0,1875; ...

6.1.6—6.1.10

Вычислите восьмой и десятый члены каждой из приведенных выше прогрессий.

### 6.2 Ряды

В физической географии прогрессии в основном находят применение как составные части более сложных численных методов исследования. Они используются в интегральном исчислении (глава 8), через формулу бинома также в теории вероятностей (см. эту главу далее и следующую главу). Их основное приложение в математике состоит в суммировании членов прогрессии и получении при этом *рядов*. Например, сумма  $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots$  представляет собой арифметический ряд, а сумма  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$  — геометрический ряд. Ряд может быть как *конечным*, так и *бесконечным*. Например, если нам надо просуммировать *все* члены прогрессии вида  $P_m$ , где  $m$  — номер члена, то мы можем представить ряд в виде:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} P_m,$$

что эквивалентно представлению

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + \dots + P_m + \dots$$

Такие ряды называются *бесконечными*. Конечный ряд — это такой ряд, где суммирование ведется в конечных пределах, например:

$$\sum_{m=1}^{m=10} P_m = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_{10}$$

и

$$\sum_{m=12}^{m=20} P_m = P_{12} + P_{13} + P_{14} + \dots + P_{20}.$$

Как мы еще увидим в этой главе, представление чисел в виде суммы геометрического ряда особенно важно для определения математических констант, таких, например, как число  $e$ , и значений тригонометрических функций, например  $\sin x$ . Однако прежде всего мы получим формулы для суммы арифметического и геометрического рядов.

### 6.3 Сумма арифметического ряда

Следуя предыдущему определению, сумма арифметического ряда, члены которого обозначены через  $P_m$ , задается в виде:

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + (a + (n - 1)d). \quad (6.3)$$

В этом выражении  $n$  членов, и, следовательно, последний член должен включать выражение  $d(n - 1)$ . Это представление можно привести к виду:

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = na + d + 2d + 3d + 4d + 5d + \dots + (n - 1)d. \quad (6.4)$$

Число  $a$  содержат все  $n$  членов ряда, а членов, содержащих число  $d$ , будет только  $(n - 1)$ . Ту же самую сумму можно представить в другом виде:

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = na + (n - 1)d + (n - 2)d + (n - 3)d + \dots + 3d + 2d + d. \quad (6.5)$$

Складывая уравнения (6.4) и (6.5), получим

$$2 \sum_{m=1}^{m=n} P_m = 2na + d + (n - 1)d + 2d + (n - 2)d + \dots + (n - 1)d + d$$

и отсюда

$$2 \sum_{m=1}^{m=n} P_m = 2na + nd + nd + nd + nd + \dots + nd.$$

Здесь  $(n - 1)$  членов содержат величину  $nd$ , и поэтому:

$$2 \sum_{m=1}^{m=n} P_m = 2na + (n - 1)nd$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{m=n} P_m = n \left( a + \frac{(n-1)d}{2} \right). \quad (6.6)$$

Можно видеть, что, перегруппировав члены  $a$ ,  $n$  и  $d$  в больших скобках, получим

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = m \left( \frac{a + (a + (n-1)d)}{2} \right), \quad (6.7)$$

то есть сумма всех членов  $P_m$  конечного арифметического ряда равна произведению количества членов на среднее арифметическое первого и последнего членов. Таким образом, сумма с первого по десятый член прогрессии при  $a = 1$  и  $d = 1$  будет

$$10 \frac{1 + (1 + 9)1}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55.$$

Для бесконечного ряда сумма конечного числа членов называется *частичной суммой*. Иными словами, в приведенном выше примере представлена частичная сумма ряда до десятого члена. Подобным образом можно найти сумму любой последовательности членов арифметической прогрессии, так что для этой прогрессии частичная сумма с восьмого по пятнадцатый член включительно (то есть *восьми* членов: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) равна:

$$8 \frac{(1+7) + (1+14)}{2} = 8 \times 11,5 = 92$$

или в общем виде:

$$\sum_{m=b}^{m=c} P_m = (c - b + 1) \frac{(a + (b-1)d) + (a + (c-1)d)}{2}.$$

### Задачи 6.3

Найдите суммы следующих арифметических прогрессий в указанных пределах.

6.3.1  $a = 2, \quad d = 3,5, \quad m = \text{от } 1 \text{ до } 10.$

6.3.2  $a = -0,2, \quad d = -2, \quad m = \text{от } 1 \text{ до } 6.$

6.3.3  $a = 1, \quad d = 6, \quad m = \text{от } 5 \text{ до } 7.$

6.3.4  $a = -1, \quad d = 0,2, \quad m = \text{от } 3 \text{ до } 10.$

6.3.5.  $a = 4, \quad d = -0,2, \quad m = \text{от } 8 \text{ до } 14.$

#### 6.4 Сумма геометрического ряда

Сумма геометрического ряда имеет совсем другой результат по сравнению с арифметическим рядом. Из общего выражения для геометрического ряда имеем:

$$\sum_{m=1}^{m=n} S_m = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1}. \quad (6.8)$$

Если теперь умножить обе части равенства на  $r$ , то получим:

$$r \sum_{m=1}^{m=n} S_m = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n. \quad (6.9)$$

Затем, вычитая равенство (6.9) из равенства (6.8), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{m=n} S_m - r \sum_{m=1}^{m=n} S_m &= a - ar^n \\ \therefore \sum_{m=1}^{m=n} S_m (1 - r) &= a(1 - r^n) \\ \therefore \sum_{m=1}^{m=n} S_m &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Например, сумма первых пяти членов геометрической прогрессии при  $a = 0,1$  и  $r = 2$  равна:

$$\frac{0,1(1 - 2^5)}{(1 - 2)} = \frac{0,1 - 3,2}{-1} = 3,1.$$

Суммирование бесконечного числа членов геометрической прогрессии или бесконечного числа членов арифметической прогрессии, строго говоря, невозможно. В самом деле, мы вправе сказать, что если в прогрессии каждый член больше единицы, то, поскольку складывается бесконечное число членов, их *сумма* может неограниченно возрастать. Такая геометрическая прогрессия, сумма которой стремится к бесконечности, называется *расходящейся*.

Рассмотрим геометрическую прогрессию, где  $-1 < r < +1$ . В такой прогрессии члены будут последовательно *уменьшаться* по абсолютному значению по мере *возрастания* степени, в которую возводится величина  $r$ . Например, если  $r = 0,5$ , то  $r^2 = 0,25$ ,  $r^3 = 0,125$ ,  $r^4 = 0,0675$  и т. д. Можно сказать, что, при стремлении  $n$  к бесконечности, значение  $r^n$  и общий член прогрессии  $ar^n$  стремятся к нулю. Такая прогрессия называется *бесконечно убывающей*. Следовательно, поскольку  $r^n$  стремится к нулю и  $(1 - r^n)$  стремится к единице, формула (6.10) для суммы геометрической прогрессии примет вид:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} S_m = \frac{a}{1 - r} \quad \text{при} \quad -1 < r < +1. \quad (6.11)$$

Сумма такого бесконечного ряда, если  $r$  изменяется в указанных пределах, не зависит больше от величины  $n$  и, следовательно, будет иметь *конечное* значение. Например, если  $a = 64$  и  $r = 0,5$ , то сумма прогрессии будет равна  $64/0,5 = 128$ . Заметим, что частичная сумма первых пяти членов равна 124, а первых десяти — 127,875. Это же значение мы получим, подставив  $n = 10$ ,  $a = 64$  и  $r = 0,5$  в равенство (6.10). Первые десять членов прогрессии следующие:

64; 42; 16; 8; 4; 2; 1; 0,5; 0,25; 0,125

При увеличении числа членов мы приближаемся к сумме прогрессии. Отсюда ясно, что такие прогрессии в определенном смысле аналогичны асимптотическим кривым некоторых функций, о которых речь шла в предыдущей главе. Ряд *стремится* к точной сумме только тогда, когда  $n$  стремится к бесконечности. Такие ряды называются *сходящимися*, а в данном случае ряд сходится к числу 128.

Антецедентный индекс осадков ( $P_a$ ) является одним из самых ярких примеров сходящейся геометрической прогрессии в физической географии. Для подобных индексов выбор значения знаменателя прогрессии  $r$  часто является произвольным. Необходимо только, чтобы прогрессия отражала уменьшающееся воздействие сегодняшнего дождя с течением времени, так что  $0 < r < 1$ . Мы можем произвольно принять, что вклад предыдущего дождя равен половине последующего. Тогда в геометрической прогрессии знаменатель  $r = 0,5$ , так что если обозначить через  $P_t$  количество осадков, выпавших за  $t$ -й день, то общее количество осадков за 10 дней будет равно:

$$\sum_{t=1}^{t=10} P_t.$$

Тогда общий вклад каждого дня с осадками запишется в виде:

$$P_a = \sum_{t=1}^{t=10} P_t r^t \quad (0 < r < 1),$$

где  $t = 1$  означает предыдущий день, а  $t = 10$ , то есть 10 дней назад. При  $r = 0,5$ , имеем:

$$P_a = P_1 + 0,5 P_1 + 0,25 P_1 + 0,125 P_1 + \dots + 0,0009765 P_1.$$

Значения  $r$  могут варьировать в соответствии с местными условиями. Например, если мы используем данный индекс для построения модели изменения расхода воды в реке, то для речного бассейна, режим стока в котором «порывистый» и быстро реагирует на каждый дождь, может подойти низкое значение  $r$ . В других областях, где в расходе воды высока доля «основного стока» и реакция на поступление осадков относительно медленная, величине  $r$  можно придать большое значение.

На явное подобие некоторых прогрессий и функций было обращено внимание в этой главе еще раньше. Однако для геометриче-

ской прогрессии, если мы продолжаем считать  $-1 < r < +1$ , из соотношения (6.8) следует, что

$$\sum_{m=1}^{m=n} S_m = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1},$$

а из равенства (6.11):

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} S_m = \frac{a}{1-r}.$$

Тогда, если  $a = 1$ , мы получим разложение функции вида

$$y = \frac{1}{1-r} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}. \quad (6.12)$$

Более подробно этот вопрос рассматривается в следующем разделе, посвященном формуле бинома.

#### Задачи 6.4

Вычислите суммы следующих геометрических прогрессий до указанных членов.

6.4.1  $a = 2$ ,  $r = 0,2$  до бесконечности.

6.4.2  $a = 0,5$ ,  $r = -0,5$  до бесконечности.

6.4.3  $a = 7$ ,  $r = 2$  до 10-го члена.

6.4.4  $0,2 + 0,6 + 1,8 + 5,4 + 16,2 + \dots$  до десятого члена.

6.4.5  $0,8 - 0,256 + 0,082 - 0,0262 + \dots$  до бесконечности.

#### 6.5 Формула бинома

В предыдущей главе мы ввели понятие полиномов. Теперь нам должно стать очевидным близкое сходство между полиномами вида:  $a + bx + cx^2 + dx^3$  и т. д. и суммой геометрической прогрессии, представленной соотношением (6.8), за исключением того момента, что в геометрической прогрессии значения всех коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  полинома равны. В главе 5 было также замечено, что многие полиномы могут быть приведены при помощи распределительного закона умножения (см. главу 1) к виду  $(a + b)(c + d)$  и т. д. Такое представление особенно удобно, когда пары значений внутри каждой скобки одни и те же, то есть, например, когда мы имеем дело с разложением выражения  $(a + x)^n$ . Такое выражение называется *биномом* и его разложение (то есть произведение этого выражения самого на себя  $n$  раз) широко используется в теории вероятностей (глава 7). Если считать  $a$  и  $x$  вероятностями взаимоисключающих событий, то величина  $(a + x)$  всегда равна единице, например, когда  $a$  обозначает вероятность выпадения орла при подбрасывании монеты и  $x$  — вероятность выпадения решки. В этом частном примере с подбрасыванием монеты отмечается равная вероятность выпадения орла и решки, и поэтому мы можем принять  $a = 0,5$  и  $x = 0,5$ . Более подробно эта процедура будет разобрана в главе 7. Теперь же нам следует рассмотреть, каким образом мо-

жно разложить бином  $(a + x)^n$ . В качестве простого примера проведем разложение бинома при  $n = 2$ :

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Аналогично разложения  $(a + x)^3$  и  $(a + x)^4$  имеют вид:

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$(a + x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.$$

В каждом случае вместе с возрастанием значения  $n$  возрастает и количество членов разложения. Следует, однако, заметить, что в разложении присутствует только по одному члену  $a^n$  и  $x^n$  и что коэффициенты всех членов в каждом случае симметричны относительно середины разложения. Значения коэффициентов при  $n = 2$ : 1, 2, 1; при  $n = 3$ : 1, 3, 3, 1; при  $n = 4$ : 1, 4, 6, 4, 1. Эти коэффициенты называются *биномиальными*. Заметим также, что общее количество членов каждого разложения равно  $n + 1$ . Если обозначить  $r$ -й коэффициент бинома степени  $n$  через  $C_r^n$  (общее количество членов равно  $n + 1$ , поэтому  $r$  изменяется от нуля до  $n$ ), то при  $n = 2$ :  $C_0^2 = 1$ ,  $C_1^2 = 2$  и  $C_2^2 = 1$ . При  $n = 3$ :  $C_0^3 = 1$ ,  $C_1^3 = 3$ ,  $C_2^3 = 3$  и  $C_3^3 = 1$ .

Как уже указывалось, в каждом разложении для коэффициентов  $C_r^n$  имеется симметрия. Существует также некоторая закономерность в величинах этих коэффициентов для последовательных разложений при возрастающей степени  $n$ . Эта закономерность особенно ярко выражается так называемым *треугольником Паскаля*. Использование треугольника Паскаля облегчает нахождение величин  $C_r^n$  при больших значениях  $n$  по сравнению с операцией непосредственного перемножения сомножителей. Часть треугольника при значениях  $n =$  от 1 до 10 показана на стр. 153. Заметим, что величины коэффициентов разложения для степени  $(n + 1)$  всегда получаются сложением двух стоящих над ними ближайших элементов треугольника, так что при  $n = 6$  коэффициент  $C_2^5 = C_1^5 + C_2^5 = 5 + 10 = 15$ .

$n = 1$					1						
$n = 2$					1	2	1				
$n = 3$				1	3	3	1				
$n = 4$			1	4	6	4	1				
$n = 5$		1	5	10	10	5	1				
$n = 6$		1	6	15	20	15	6	1			
$n = 7$		1	7	21	35	35	21	7	1		
$n = 8$		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$n = 10$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Несомненно, что вычисление коэффициентов  $C_r^n$  по треугольнику Паскаля является процедурой более удобной по сравнению с трудоемким непосредственным перемножением членов при обычной записи, и все же это довольно громоздкий способ. Ясно, что значение каждого коэффициента связано с его положением в ряду (то есть с величиной  $r$ ) и показателем степени  $n$ . Действительно, коэффициент  $C_2^3$  дается как

$$\frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3,$$

а  $C_3^5$  как

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{60}{6} = 10,$$

а  $C_5^7$  как

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

и т. д. Здесь самое время ввести символ, часто используемый в математике и статистике, а именно:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \text{ („четыре факториал“).}$$

С помощью этого обозначения величину каждого коэффициента можно представить в виде:

$$\begin{aligned} C_r^n &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Если применить эту формулу для вычисления коэффициентов разложения  $(a+x)^4$ , то получим:

$$\begin{aligned} C_0^4 &= \frac{4!}{0!(4!)} & C_1^4 &= \frac{4!}{1!(3!)} & C_2^4 &= \frac{4!}{2!(2!)} \\ C_3^4 &= \frac{4!}{3!(1!)} & C_4^4 &= \frac{4!}{4!(0!)}. \end{aligned}$$

По определению  $0! = 1 = 1!$ , и тогда коэффициенты  $C_r^4$  будут следующие: 1, 4, 6, 4, 1.

Наконец, разложение биномиального ряда содержит последовательность степеней каждой из заключенных в скобках величин в виде:

$$a^n, a^{n-1}x, a^{n-2}x^2, a^{n-3}x^3, a^{n-4}x^4, \dots, a^{n-r}x^r, \dots, x^n.$$

Например, без учета биномиальных коэффициентов разложение  $(a+x)^5$  содержит члены  $a^5, a^4x, a^3x^2, a^2x^3, a^1x^4, x^5$ . Таким образом, полное разложение по формуле бинома можно записать как

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= a^n + \frac{n!}{(n-1)!} a^{n-1}x + \frac{n!}{2!(n-2)!} a^{n-2}x^2 + \dots \\ &+ \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r}x^r + \dots + x^n. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Это равенство выражает *формулу бинома*. Примеры ее использования в теории вероятностей можно найти в главе 7.

Формулу бинома можно применить для получения двух разложений, которые впоследствии будут использованы в главе 8 при рассмотрении некоторых аспектов интегрального исчисления. Если переписать разложение по формуле бинома (уравнение (6.14)) в другой, более удобной форме:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}x^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} a^{n-r}x^r + \dots + x^n, \quad (6.15)$$

то, вынося из обеих частей равенства  $a^n$ , получим:

$$a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = \\ = a^n \left[1 + n\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \left(\frac{x}{a}\right)^r + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

Если теперь в формуле для разложения мы положим  $n = -1$ , то для разложения

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-1} \quad \text{или} \quad 1/\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

будем иметь:

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-1} = 1 + -1\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{(-1)(-2)}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3 \cdot 2} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \\ = 1 - \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots + (-1)^r \left(\frac{x}{a}\right)^r. \quad (6.16)$$

Следовательно, это разложение содержит коэффициенты, равные по величине либо  $+1$ , либо  $-1$  и при том чередующиеся. Если величина  $x/a$  больше или равна единице, то ряд будет расходиться. Если же величина  $x/a$  заключена между нулем и единицей, то ряд сходится. Ряды такого типа называются *знакопеременными*, поскольку знаки их членов чередуются<sup>1</sup>.

Читатель уже встречался со знакопеременным рядом в задаче 6.4.5. Обратите внимание, что если величина  $x/a$  заключена между  $-1$  и нулем, то знаки членов разложения уже не чередуются и разложение принимает вид:

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1} = 1 + \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^r + \dots \quad (6.17)$$

<sup>1</sup> Если члены знакопеременного ряда монотонно убывают по абсолютной величине, то ряд сходится, причем остаток такого ряда всегда меньше первого отброшенного члена по абсолютной величине. — *Прим. ред.*

## Задачи 6.5

Получите разложения следующих выражений, используя формулу бинома.

6.5.1  $(1 + x)^5$ .

6.5.2  $(3 - y)^{-2}$  до 5-го члена.

6.5.3  $(5y + 2x)^4$ .

6.5.4  $(0,5 + x)^{-1}$  до 5-го члена.

6.5.5  $(x + 2)^4$ .

## 6.6. Дальнейшие примеры рядов

Мы можем использовать формулу бинома для определения математических функций, с которыми мы уже встречались в главах 3 и 5. Одно из применений уравнения (6.15) заключается в получении математической постоянной  $e$ . Эта постоянная является пределом выражения

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

при стремлении  $n$  к бесконечности. Поэтому можно только приближенно получить ее значение, вычисляя частичную сумму необходимого количества членов ряда, поскольку ряд сходится. Однако мы можем просто вычислить число  $e$  с точностью до четырех значащих цифр, эта точность обычно приводится в таблицах и достаточна для вычислений. Такое разложение можно получить, подставляя в разложение по формуле бинома (уравнение (6.15)) значения  $a = 1$  и  $x = 1/n$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n1^{n-1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} 1^{n-3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \frac{1}{2!} + \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{n} \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n^n}.\end{aligned}$$

Так как  $n$  стремится к бесконечности, то, скажем, дроби  $(n-1)/n$  и  $(n-2)/n$  стремятся к единице и разложение для числа  $e$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned}e &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \\ &= 1 + 1 + 0,5 + 0,16667 + 0,04167 + 0,00833 + 0,00139 + \\ &+ 0,00020 + 0,00003\end{aligned}\tag{6.18}$$

до 8-го члена, и тогда:

$$e = 2,71829 = 2,7183 \text{ с точностью до четырех знаков после запятой.}$$

Последующие члены очень мало меняют это значение постоянной. Число  $e$  — иррационально, и ряд стремится к истинному значению числа только при стремлении  $n$  к бесконечности.

Аналогичным образом можно разложить функцию  $e^x$  и получить экспоненциальный ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots \quad (6.19)$$

или функцию  $e^{-x}$ , чье разложение в знакпеременный ряд имеет вид:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots \quad (6.20)$$

Эти ряды представляют собой примеры рядов *Маклорена*. Маклорен показал, что если функция  $f(x)$  дифференцируема, то ее можно разложить в степенной ряд, причем:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \dots, \quad (6.21)$$

используя обозначения для производных, принятые в главе 5. Тогда при  $f(x) = e^x$ ,  $f'(x) = e^x$  и т. д. имеем:

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + x e^0 + x^2 \frac{e^0}{2!} + x^3 \frac{e^0}{3!} + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Подобным же образом разложение в ряд Маклорена можно использовать для того, чтобы показать, что синус любого угла, измеренного в радианах, дается выражением:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (6.22)$$

Например, при  $x = 30^\circ = 0,5236$  радиана:

$$\begin{aligned} \sin x &= 0,5236 - \frac{0,5236^3}{6} + \frac{0,5236^5}{120} - \dots = \\ &= 0,5236 - 0,0240 + 0,0003 \dots = \\ &= 0,49 \text{ (точное значение равно } 0,5). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Мы опять получили знакпеременный ряд. Здесь важно указать одно весьма полезное свойство этого разложения: при малом  $x$ , то есть при  $x \rightarrow 0$ , значения  $\sin x$  определяются величиной  $x$ , поскольку для таких углов вклад первого члена ряда значительно превосходит вклад остальных (уравнение (6.22)). Таким образом, синус любого угла, меньшего  $\approx 0,1$  радиана (приблизительно  $6^\circ$ ), с точностью до четырех десятичных знаков после запятой равен самой переменной, выраженной в радианах, поскольку при  $x = 0,1$  второй член разложения уменьшает значение синуса всего на  $0,0002$ .

Разложение в ряд для  $\cos x$  можно получить, дифференцируя по  $x$  ряд для синуса или непосредственно подставляя  $\cos x$  в соотношение (6.21), так что

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\end{aligned}\quad (6.24)$$

Здесь необходимо заметить, что производная ряда есть производная каждого его члена. Другие тригонометрические функции также можно разложить в ряд, но члены таких разложений будут сложнее. Так, мы можем получить разложение в ряд для  $\operatorname{tg} x$  только в пределах  $-\pi/2 < x < +\pi/2$ :

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots\quad (6.25)$$

Существует несколько других функций, для вычисления значений которых применяют формулу бинома, в частности, можно получить разложение в ряд логарифмической функции. Такое разложение позволяет отказаться от пользования таблицами при вычислении значений этой функции. Хотя доказательство этого факта и выходит за рамки книги, тем не менее полезно указать, что натуральный логарифм данного числа можно найти с помощью разложения в знакпеременный ряд следующей функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\quad (6.26)$$

Это разложение справедливо только при  $-1 < x < +1$ , и опять же его можно получить из ряда Маклорена. Пользуясь этим разложением, можно вычислить натуральный логарифм любого числа в промежутке от нуля до 1,9. Например, полагая  $x = -0,4$ , мы вправе написать:

$$\begin{aligned}\ln 0,6 &= \ln(1,0 - 0,4) = \\ &= -0,4 - \frac{0,16}{2} - \frac{0,064}{3} - \frac{0,00256}{4} - \dots = \\ &= -0,5056 = \bar{1},4944.\end{aligned}$$

Аналогично, полагая  $x = 0,2$ , получим:

$$\begin{aligned}\ln 1,2 &= \ln(1,0 + 0,2) = \\ &= 0,2 - \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{3} - \frac{0,0016}{4} + \dots = \\ &= 0,1823.\end{aligned}$$

Это и многие другие разложения в ряд сложных функций получаются из определения каждой отдельной функции, входящих в сложную. Например, можно разложить в ряд гиперболические си-

нус и косинус (уравнения (5.26) и (5.27)), используя их выражение через  $e^x$  и  $e^{-x}$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots \right) = \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\end{aligned}\quad (6.27)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\end{aligned}\quad (6.28)$$

Подобным образом можно получить разложение и более сложных функций. Например, разложение в ряд функции  $e^{\sin x}$  получается из комбинации двух разложений  $e^x$  и  $\sin x$ . Вычисления довольно утомительны, но в результате для  $e^{\sin x}$  мы имеем следующее разложение в ряд:

$$e^{\sin x} = 1 + x \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} + \frac{8x^5}{6!} - \dots\quad (6.29)$$

## Задачи 6.6

Используя приведенные в разделе 6.6 разложения в ряд, получите значения следующих функций и проверьте свой ответ по соответствующим таблицам:

6.6.1  $\sin 56^\circ 02'$ .

6.6.2  $\ln 1,7240$ .

6.6.3  $\operatorname{tg} 0,7854$  радиана.

6.6.4  $e^3$ .

6.6.5  $e^{\sin x}$  (результат представлен равенством (6.29)).

## ВЕРОЯТНОСТЬ

Рассматривая биномиальные ряды в предыдущей главе (раздел 6.5), мы соприкоснулись с математическим аппаратом, используемым в статистике. Одно из наиболее важных применений математики в географии связано с теорией вероятностей. Знание теории вероятностей необходимо для уяснения сущности многих параметрических статистических методов, и мы надеемся, что читатель уже в достаточной мере подготовлен для понимания ее основ. Существует много примеров, когда анализ данных в географии обнаруживает, что частота встречаемости отдельных явлений следует известным вероятностным законам, относящимся скорее к математике, нежели к статистике. В этой главе мы обсудим математические основания теории вероятностей, распределения вероятностей и их применение в физической географии. Это применение двоякого рода: во-первых, в статистическом смысле при оценке значимости вывода, получаемого с использованием статистических методов, и, во-вторых, в прямом смысле, при оценке вероятности наступления природных явлений, например засухи или наводнения. В главе 5 мы уже познакомились с использованием понятия вероятности в статистических методах. Сводку основных статистических критериев можно найти в Приложении 5.

Применение понятия вероятности в физической географии сталкивается с двумя различными типами вероятности. Во-первых, это эмпирическая вероятность, основанная на непосредственных измерениях с помощью инструментов, например эмпирические вероятности, получаемые при долгосрочных полевых наблюдениях за величиной расхода реки. Во-вторых, часто может постулироваться теоретическая, или *априорная*, вероятность — так, при каждом бросании монеты существует равная возможность появления «орла» или «решки». То есть мы можем сказать, что для монеты имеется 50%-ная возможность, или вероятность 0,5, выпадения «орла» и равная вероятность выпадения «решки». Подобный критерий можно употребить и в отношении стока донных (влекомых) наносов

в реке. Движение наносов в речном потоке начинается тогда, когда скорость течения превысит некоторое критическое значение, определяемое процентным содержанием частиц определенной крупности. Предположим некую совокупность рек в гипотетическом географическом районе. Обязательно случится так, что в одних реках донные отложения будут мобильны, а в других — статичны. Для удобства примем, что на всем протяжении любой реки донные наносы либо движутся, либо покоятся. Это два *взаимоисключающих условия*, поскольку реки либо имеют статичные донные осадки, либо нет. При определенных условиях можно представить, что в 50% рек имеется сток влекомых наносов, а в 50% рек такой сток отсутствует. Однако на практике столь равное разделение обычно не наблюдается. Такое смещение повлияет на вероятность отнесения выбранной наугад реки к тому или иному типу.

### 7.1 Вероятностное пространство

Понятие вероятности можно развить с помощью представления о множествах, содержащихся в «вероятностном пространстве». Эти множества изображаются в виде так называемых *диаграмм Венна*. В самом простом случае мы можем считать, что ситуации типа присутствие/отсутствие или черное/белое составляют множество  $S$ . В рассмотренном выше примере множество  $S$  составляли все реки данного района. Не следует путать множество  $S$  с конкретным географическим пространством. Множество — это абстрактное понятие. Внутри этого множества мы должны выделить два взаимно непересекающихся подмножества (одно для рек, обладающих стоком влекомых наносов, а второе для рек, в которых такой сток отсутствует), причем площади подмножеств пропорциональны частоте соответствующих ситуаций (рис. 7.1). Поскольку множество

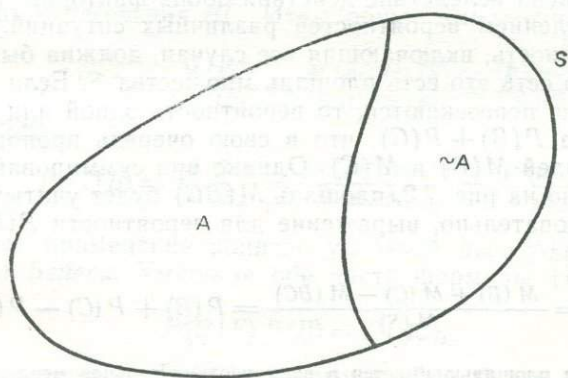


Рис. 7.1 Вероятностное пространство: взаимно непересекающиеся подмножества.

$S$  обозначает все реки, то ясно, что вся его площадь, соответствующая вероятности  $P(S)$ , равна 1,0, и тогда, если обозначить подмножества через  $A$  и  $\sim A$  («не  $A$ »):

$$P(A) + P(\sim A) = 1 \quad (7.1)$$

и

$$P(A) = M(A)/M(S), \quad (7.2)$$

где  $M(A)$  — площадь подмножества  $A$ , а  $M(S)$  — площадь множества  $S$ . Аналогично можно представить вероятность  $P(\sim A)$ . В данном случае мы определили вероятность с точки зрения относительных площадей двух подмножеств, представляющих две взаимно исключающие ситуации<sup>1</sup>.

Следует, однако, упомянуть о некоторых характеристиках рек, которые не обязательно должны взаимно исключать друг друга. Например, в зависимости от установленного критерия чистоты река может считаться либо загрязненной, либо нет, но загрязнение реки может быть вызвано либо постоянно действующим фактором, либо временным фактором, либо и тем и другим вместе. Во множестве  $S$  мы теперь можем выделить два подмножества:  $B$  (реки, загрязненные постоянно) и  $C$  (реки, загрязняемые временно). Часть множества  $S$ , не входящая ни в то, ни в другое подмножество, пропорциональна вероятности того, что река не будет вообще загрязнена (рис. 7.2). Эту вероятность можно записать в виде  $P(\sim B \cap \sim C)$ . Заметим, что символ  $\cap$  применяется в теории множеств для обозначения операции конъюнкции («и»), то есть «пересечения», а знак  $\cup$  означает операцию дизъюнкции («или»), то есть «объединения». Площадь пересечения, следовательно, отражает вероятность того, что река будет *одновременно* загрязнена постоянным и временным факторами, то есть что  $P(B \cap C)$  или  $P(BC)$ . Таким образом, общая заштрихованная площадь представляет вероятность того, что река будет загрязнена вследствие действия обоих факторов. Теперь займемся вычислением вероятностей различных ситуаций. Ясно, что общая вероятность, включающая все случаи, должна быть равна 1, или 100%, то есть это есть площадь множества  $S$ . Если подмножества  $B$  и  $C$  не пересекаются, то вероятность одной или другой ситуации равна  $P(B) + P(C)$ , что в свою очередь пропорционально сумме площадей  $M(B)$  и  $M(C)$ . Однако при суммировании площадей, как видно на рис. 7.2, площадь  $M(BC)$  будет учитываться дважды, и, следовательно, выражение для вероятности  $P(B \cap C)$  должно иметь вид:

$$P(B \cap C) = \frac{M(B) + M(C) - M(BC)}{M(S)} = P(B) + P(C) - P(BC). \quad (7.3)$$

<sup>1</sup> Здесь под площадью имеется в виду неотрицательная мера, введенная на множестве  $S$ , такая, что 1)  $M(S) = 1$  и 2) если  $A$  и  $B$  — подмножества множества  $S$ , причем  $A \cap B = \phi$  — пустое множество, то  $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$ . — Прим. ред.

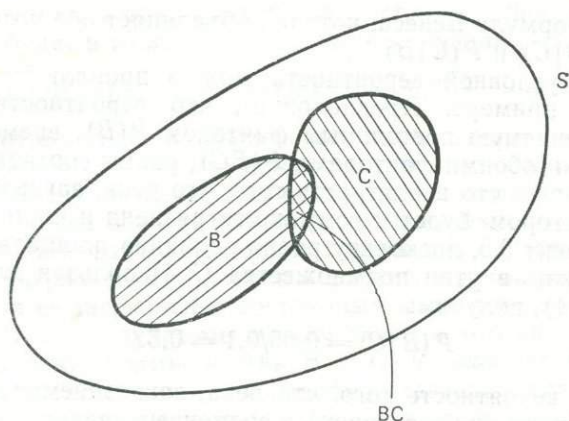


Рис. 7.2 Вероятностное пространство: пересекающиеся подмножества.

Рассматривая вероятности событий, не являющихся взаимно исключающими, мы знакомимся также с понятием *условной вероятности*. Площадь пересечения подмножеств  $B$  и  $C$  на рис. 7.2 обозначает, что имеется небольшое число рек, загрязняемых как постоянным, так и временным факторами. Вероятность того, что река, загрязняемая постоянным фактором ( $B$ ), будет также загрязнена и временным ( $C$ ), обозначается как  $P(C|B)$ , а вероятность того, что река, загрязняемая временным фактором ( $C$ ), загрязнена также и постоянным ( $B$ ), обозначается как  $P(B|C)$ . Обе вероятности условны: вероятность  $C$ , если  $B$ , и вероятность  $B$ , если  $C$ . Обратившись к рис. 7.2 мы видим, что нас в данном случае интересует не само множество  $S$ , а то, какую часть составляют площади подмножеств  $B$  и  $C$  по отношению к площади множества  $S$ , и особенно площадь их пересечения  $BC$ . Итак, общее выражение для  $P(B|C)$  имеет вид:

$$P(B|C) = \frac{M(BC)}{M(C)} = \frac{M(BC)/M(S)}{M(C)/M(S)} = \frac{P(BC)}{P(C)} \quad (7.4)$$

и для  $P(C|B)$ :

$$P(C|B) = \frac{M(BC)}{M(B)} = \frac{M(BC)/M(S)}{M(B)/M(S)} = \frac{P(BC)}{P(B)}. \quad (7.5)$$

Дальнейшее применение понятие условной вероятности получило в *формуле Бейеса*. Умножив обе части формулы (7.5) на  $P(B)$ , получим:

$$P(C|B) P(B) = P(BC),$$

а подставив значение  $P(BC)$  в формулу (7.4), будем иметь:

$$P(B|C) = \frac{P(C|B) P(B)}{P(C)}, \quad (7.6)$$

что и дает формулу Бейеса, которая объединяет обе условные вероятности  $P(B|C)$  и  $P(C|B)$ .

Понятие условной вероятности можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вероятности встретить реку, загрязняемую постоянным фактором  $P(B)$ , временным фактором  $P(C)$  и обоими факторами  $P(BC)$ , равны соответственно 0,4, 0,1 и 0,05. Ясно, что вероятность того, что река, загрязняемая временным фактором, будет к тому же загрязнена и постоянным фактором, составит 0,5, поскольку ровно половина площади подмножества  $BC$  лежит внутри подмножества  $C$ . Используя для проверки формулу (7.4), получим:

$$P(B|C) = 0,05/0,1 = 0,5.$$

Аналогично вероятность того, что река, загрязняемая постоянным фактором, будет еще загрязнена и временным, равна

$$P(C|B) = 0,05/0,4 = 0,125. \quad (\text{из (7.5)})$$

Возьмем еще один пример. Предположим, что в отношении отпускного месяца июля вас особенно интересует вероятность наступления в нем жаркой и влажной погоды, которую ваша любимая собака не выносит. Наши данные ограничены, поскольку мы знаем только общее число дней июля за последние десять лет, когда наблюдалась жаркая (скажем, более  $25^{\circ}\text{C}$ ) погода, и общее число дней, когда значение точки росы превышало  $18^{\circ}\text{C}$  — признак «неприятных» для собаки дней. Если  $A$  и  $B$  — число жарких и влажных дней соответственно и  $A = 73$ , а  $B = 50$  дням, то

$$P(A) = 73/310 = 0,236$$

$$P(B) = 50/310 = 0,161.$$

Вероятность того, что какой-либо день будет *одновременно* жарким и влажным,  $P(AB)$ , не равна простой арифметической сумме этих вероятностей, поскольку одни дни подмножества  $A$  будут влажными, а другие нет. Два подмножества  $A$  и  $B$  могут пересекаться. Предположим, что в результате наших исследований мы можем сказать, что только 14 влажных дней были жаркими, тогда

$$P(A|B) = 14/50 = 0,280.$$

Теперь воспользуемся формулой (7.4) для того, чтобы показать, что

$$P(A|B) = P(AB)/P(B)$$

и

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A|B)P(B) = \\ &= 0,280 \times 0,161 = 0,045. \end{aligned}$$

Следовательно, вероятность того, что какой-то день июля будет и теплым и влажным, равна всего 0,045 (4,5%). Используя формулу

Бейеса, мы можем также утверждать, что вероятность того, что теплый день будет в то же время и влажным, равна

$$P(B|A) = (0,280 \times 0,161)/0,236 = 0,352 \text{ или } 35,2\%.$$

Рассмотрим теперь совершенно иную совокупность вероятностей. Предположим, что вероятность того, что любая река, загрязняемая временным фактором, будет также загрязнена постоянным фактором, равна вероятности того, что река будет загрязнена только постоянным фактором. Иначе говоря, мы считаем, что для любой реки загрязнение временным фактором не оказывает никакого влияния на ее загрязнение постоянным фактором, то есть  $P(B|C) = P(B)$ . В этом случае мы можем сказать, что два события, которые составляют подмножества  $B$  и  $C$ , не зависят друг от друга. Этот термин употребляется в подобном смысле в главе 3. При этих обстоятельствах вероятность пребывания одновременно в обоих состояниях равна произведению каждой отдельной вероятности, поскольку

$$P(B|C) = P(BC)/P(C),$$

а

$$P(B) = P(B|C), \text{ если они независимы,}$$

и тогда

$$P(B) = P(BC)/P(C),$$

так что

$$P(BC) = P(B)P(C). \quad (7.7)$$

## 7.2 Цепные вероятности

До сих пор мы рассматривали вероятность событий, исход которых не зависел от предыдущих событий. Мы указали также на различия между зависимыми и независимыми событиями. Однако часто возникают ситуации, которые включают определенную зависимость между результатом предыдущего и последующего явлений. Например, если представить себе ящик с образцами мрамора различных цветов, то изъятие из ящика любого образца, несомненно, уменьшит общее число образцов этого цвета, соответственно уменьшится и вероятность вытащить мрамор данного цвета и в последующих испытаниях. Конечный результат, скажем после десяти испытаний, зависит от результатов предыдущих испытаний. До сих пор мы не касались так называемых «цепных» вероятностей. И чтобы быть точными, мы теперь постараемся провести границу между *вероятностным* и *стохастическим* подходами к изучаемому процессу. Вероятностные процессы совсем не зависят от времени, а стохастические процессы, напротив, предполагают большое влияние очередности, в которой происходят события, на конечный резуль-

тат. В физической географии существует класс процессов, для которых характерна определенная зависимость от времени. Наиболее известен из них процесс «случайного блуждания», используемый для моделирования развития речных сетей. При воспроизведении случайного блуждания направление каждого последующего шага (испытания) определяется последовательностью случайных чисел. В случае моделирования речной сети на развитие процесса накладывается ограничение, а именно: запрещается сток «вверх» по течению. Ясно, что здесь мы наблюдаем обычную систему цепных вероятностей, где пространственное распределение предыдущего шага лимитирует распределение последующего. За более детальным рассмотрением процесса случайного блуждания читателю следует обратиться, например, к работам Leopold, Wolman, Miller, 1964 или Gregory, Walling, 1973. Таким образом, случайное блуждание — это один из простейших цепных процессов. Если в дальнейшем ограничить процесс таким образом, чтобы на каждом этапе цепи возможны были только два исхода, и если задать значения вероятности для каждого исхода, то наметится переход к *цепям Маркова*. Торнес (Thognes, 1971) применил цепи Маркова для изучения движения каменистых осыпей на склоне горы, а Габриэль и Нойманн (Gabriel, Neumann, 1962) — для составления модели выпадения ежедневных осадков в независимости от их величины. Ниже на примере данных об ежедневных осадках в Уэльсе мы продемонстрируем некоторые свойства инерции и периодичности осадков, которые можно представить цепями Маркова.

Вначале цепь определяется двумя условными вероятностями  $p_1$  и  $p_0$ , где

$$p_1 = P(\text{день с дождем, предыдущий день также с дождем})$$

$$p_0 = P(\text{день с дождем, предыдущий день сухой})$$

Вероятность  $p_0$  называется *вероятностью перехода* — это вероятность того, что дождливый день сменится сухим. Указанные две вероятности легко определить по исходным данным. Для нашего случая предположим, что в выборке из 1280 последовательных дней дождливых дней было 728. Ясно, что мы можем эмпирически выразить априорную вероятность того, что в какой-то день будет дождь ( $P$ ), как

$$P = 728/1280 = 0,57. \quad (7.8)$$

Аналогичным образом можно получить условные вероятности  $p_1$  и  $p_0$ :

$$p_1 = \frac{\text{Общее количество дней с дождем, следующих за дождливым днем}}{\text{Общее количество дней с дождем}}$$

$$p_0 = \frac{\text{Общее количество дней с дождем, следующих за сухим днем}}{\text{Общее количество сухих дней}}$$

Итак, всего 552 дня с дождем следовало за дождливым днем, 176 дней с дождем наблюдались за сухим днем и 552 дня (это простое совпадение) были сухими. Эмпирически получены следующие вероятности:

$$p_1 = 552/728 = 0,76 \quad (7.9)$$

$$p_0 = 176/552 = 0,32. \quad (7.10)$$

Теперь уже должно быть ясно, что здесь уже следует применить более сложные приемы, поскольку обнаружилась некоторая инерция дождливых дней. Заметим также, что сумма этих двух вероятностей больше 1, так как они не независимы. По определению, вероятность того, что вслед за дождливым днем наступит сухой день, равна  $1 - p_1 = 0,24$ , и аналогично вероятность того, что за одним сухим днем последует другой сухой день, равна 0,68. Теперь мы в состоянии построить буквенную цепь вероятностей дождливых и сухих дней не только для следующего дня. Эта цепь показана на рис. 7.3. Вероятность того, что за днем с дождем последует дождливый день (или  $P(W|W)$ ), обозначена через  $p_1$ ; вероятность того, что дождливый день сменится сухим днем (или  $P(D|W)$ ), в этом случае равна  $1 - p_1$  и т. д. Итак, вероятность того, что через два дня после дня с дождем будет опять дождливый день, равна:

$$\begin{aligned} P_W &= P(W|W|W) + P(W|D|W) = \\ &= p_1 p_2 + p_0 (1 - p_1) = \\ &= 0,76 \times 0,76 + 0,24 \times 0,32 = 0,64. \end{aligned}$$

Подобным образом вероятность того, что через два дня после сухой погоды пойдет дождь, равна:

$$\begin{aligned} P_D &= P(W|W|D) + P(W|D|D) = \\ &= p_1 p_0 + p_0 (1 - p_0) = \\ &= 0,76 \times 0,32 + 0,32 \times 0,68 = 0,46 \end{aligned}$$

Как видно, расчет таким методом последовательных вероятностей цепи превращается в длительную и скучную процедуру. Но ее можно значительно упростить, если использовать две следующие формулы:

$$P_W = P + (1 - P) d^i \quad (7.11)$$

$$P_D = P - P d^i, \quad (7.12)$$

где  $P$  — априорная вероятность дня с дождем и  $d = p_1 - p_0$ . В обоих случаях график вероятности в зависимости от количества  $i$  дней, следующих за дождливым или сухим днем, асимптотически приближается к вероятности  $P$ . Это показано на рис. 7.4. И в каждом случае вероятность того, что за дождливым или сухим днем спустя четыре дня будет день с дождем, очень близка к априорной веро-

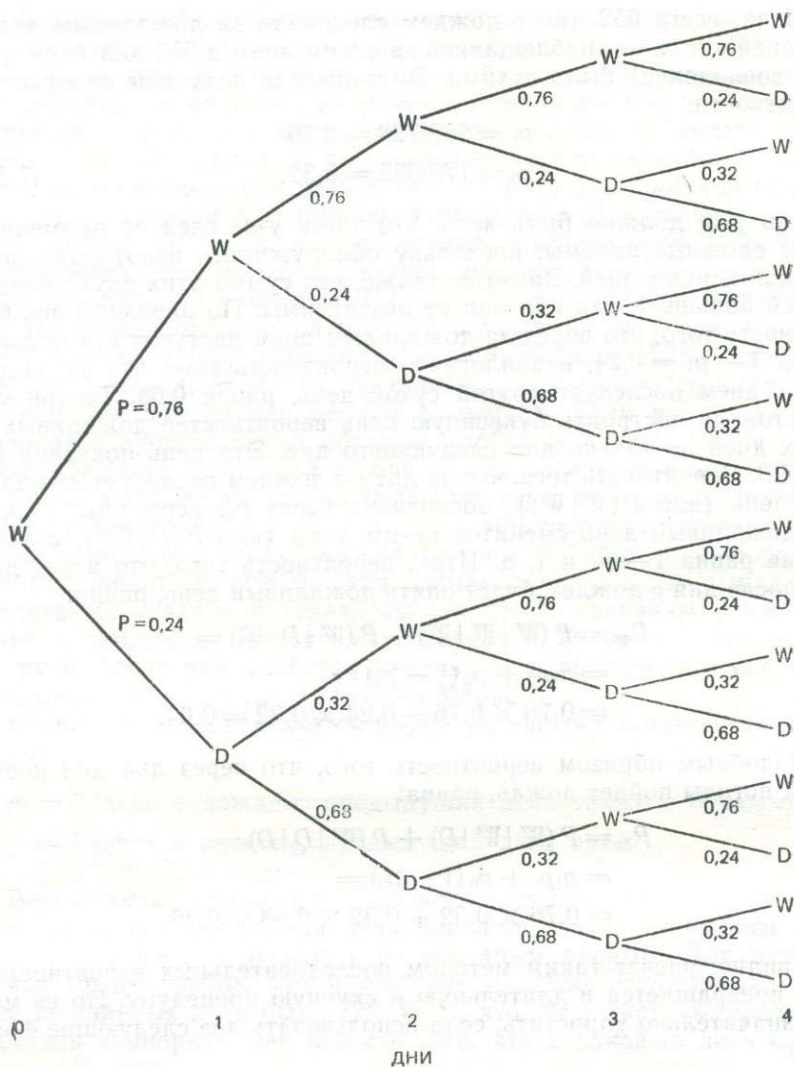


Рис. 7.3. Схематическое изображение вероятностей цепи Маркова для  $i = \text{от } 1 \text{ до } 4$  дней.

ятности  $P$ , подтверждая тем самым, что погода редко бывает устойчива свыше четырех дней ( $i = 4$  дням).

Габриэлем и Нойманном были проведены дальнейшие разработки таких цепей. Вероятности дождливых или сухих периодов являются прямым продолжением последних дней двух цепей. Их можно получить с помощью биномиального ряда (раздел 6.5). Ве-

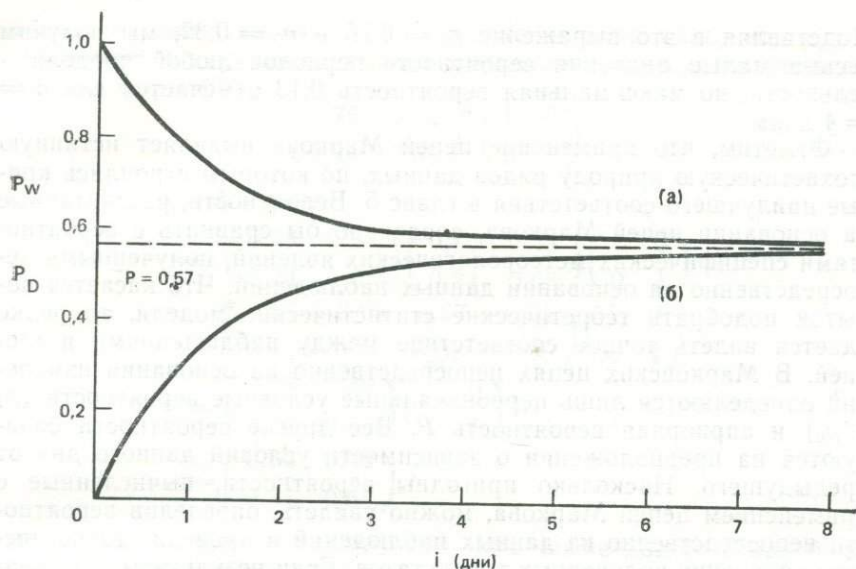


Рис. 7.4 Марковские вероятности: (а)  $i$  дождливых дней после дня с дождем и (б)  $i$  дождливых дней после дня без дождя.

роятность дождливого периода в  $k$  дней равна вероятности сухих дней, повторяющихся каждые  $(k + 1)$  дней, то есть

$$P_{SW} = (1 - p_1) p_1^{k-1} \quad (7.13)$$

$$P_{SD} = p_0 (1 - p_0)^{k-1}. \quad (7.14)$$

Следовательно, в нашем примере вероятность однодневного дождливого периода равна  $0,24 p_1^{1-1}$  вероятности одного изолированного дня с дождем, вероятность трехдневного дождливого периода равна  $0,14$ , пятидневного —  $0,08$  и т. д. Вероятности сухих периодов такой же продолжительности соответственно равны  $0,32$ ,  $0,15$  и  $0,07$ . Таким образом, цепь Маркова, построенная на основе данных наблюдений, показывает, что периоды без дождя длительностью менее трех дней или около того более вероятны, чем такие же периоды с дождем. Если же промежуток времени охватывает свыше трех дней, то более вероятны дождливые дни. Эти цепи можно продолжить дальше, с тем чтобы оценить вероятность чередующихся сухих и дождливых периодов (показатель периодичности). Габриэль и Нойманн рассчитали вероятности чередующихся дождливых и сухих периодов продолжительностью по  $n$  дней каждый (с периодичностью в  $2n$  дней):

$$P_p = \frac{(1 - p_0)^{n-1} - p_1^{n-1}}{(1 - p_0 - p_1)} p_0 (1 - p_1). \quad (7.15)$$

Подставляя в это выражение  $p_1 = 0,76$  и  $p_0 = 0,32$ , мы получим весьма малые значения вероятности периодов любой продолжительности, но максимальная вероятность 0,13 отмечается для  $n = 4$  дням.

Отметим, что применение цепей Маркова выявляет истинную стохастическую природу рядов данных, по которым строились кривые наилучшего соответствия в главе 5. Вероятности, рассчитанные на основании цепей Маркова, следовало бы сравнить с вероятностями специфических метеорологических явлений, полученными непосредственно на основании данных наблюдений. Что касается попыток подобрать теоретические статистические модели, то редко удается видеть точное соответствие между наблюдениями и теорией. В Марковских цепях непосредственно на основании измерений определяются лишь первоначальные условные вероятности ( $p_1$  и  $p_0$ ) и априорная вероятность  $P$ . Все другие вероятности базируются на предположении о зависимости условий данного дня от предыдущего. Насколько пригодны вероятности, вычисленные с применением цепей Маркова, можно увидеть, определив вероятности непосредственно из данных наблюдений и проведя статистическое сравнение полученных результатов. Если результаты, полученные на основании данных для различных районов, не будут противоречить друг другу, то можно предположить, что ход ежедневных осадков описывается цепью Маркова. Габриэль и Нойманн при исследовании хода ежедневных осадков в Тель-Авиве обнаружили близкое соответствие между измеренной частотой осадков и вычисленной Марковской вероятностью.

### 7.3 Получение Марковских вероятностей с помощью матриц

Исключительно важную роль при изучении теории вероятностей играет алгебра матриц. Покажем это на примере Марковских вероятностей. Если записать четыре вероятности перехода от дождливого или сухого предыдущего дня к последующему дождливому или сухому дню как  $P_{WW} = 0,76$ ;  $P_{DW} = 0,32$ ;  $P_{WD} = 0,24$  и  $P_{DD} = 0,68$  (индекс  $WW$  означает, что дождливый день следует за дождливым днем и т. д.), то в матричной форме будем иметь:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} W & D \end{matrix} & \text{(Сегодня)} \\ \begin{matrix} \text{(Завтра)} \\ W \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,76 & 0,32 \\ 0,24 & 0,68 \end{pmatrix} & \end{matrix} \quad (7.16)$$

Обозначая состояние (то есть  $D =$  сухо или  $W =$  дождь) предшествующего и последующего дней с помощью диагональной матрицы

$$\begin{matrix} & W & D \\ W & 1 & 0 \\ D & 0 & 1 \end{matrix},$$

можно выразить вероятность наступления дождливого или сухого дня спустя  $n$  дней после любого дождливого или сухого дня в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 0,76 & 0,32 \\ 0,24 & 0,68 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Поскольку  $n = 2$ , имеем:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 0,76 & 0,32 \\ 0,24 & 0,68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,76 & 0,32 \\ 0,24 & 0,68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,58 + 0,08 & 0,27 + 0,22 \\ 0,18 + 0,16 & 0,08 + 0,46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,66 & 0,49 \\ 0,34 & 0,54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,66 & 0,49 \\ 0,34 & 0,54 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вероятность того, что через два дня после дождя снова будет дождь, равна, таким образом, 0,66. Вероятность того, что дождь будет через два дня после сухого дня, равна 0,49 и т. д.

#### 7.4 Плотность распределения (распределение частот)

Марковские цепи описывают распределение вероятностей во времени. В разобранный выше примере четкое стремление к устойчивой дождливой погоде было обозначено через вероятность  $p_1 = 0,76$ . Цепь состояла из последовательности вероятностей двух направлений. Мы имели обычную *плотность распределения*, где 76% дней с дождем следовали за дождливым днем и только 24% таких дней отмечались после сухой погоды. Эта плотность распределения получена эмпирически, но мы можем рассмотреть также и плотность распределения *априорных* вероятностей. Вернемся к примерам, связанным с игрой в кости и бросанием монет. Здесь вероятность выпадения каждой грани кости равна  $1/6(0,16)$ , а вероятность появления каждой стороны монеты равна 0,5. Для иллюстрации плотности распределения начертим простой график, который обычно называют *гистограммой* (рис. 7.5, а). Здесь нет никакого смещения в сторону преобладания частоты выпадения какой-либо одной грани по сравнению с другими. Рассмотрим теперь ситуацию, когда увеличивается частота выпадения «шестерки» (рис. 7.5, б). Сумма всех вероятностей по-прежнему равна 1, но если, скажем,  $P(6)$ , найденная эмпирически, будет 0,25, то общая оставшаяся вероятность, поделенная между пятью гранями, соответственно уменьшится. В этом случае вероятность выпадения каждой грани из пяти оставшихся равна  $(1 - 0,25)/5$ , или 0,15.

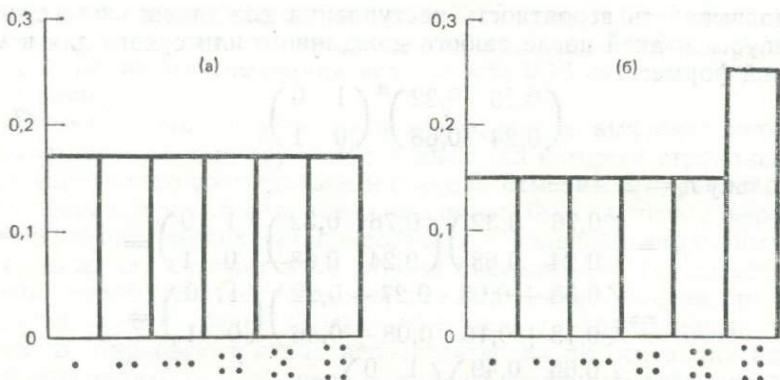


Рис. 7.5 Вероятности при (а) объективной и (б) необъективной игре в кости.

В природе частота встречаемости большинства естественных явлений несимметрична. Мы можем выявить несимметричность распределения ряда исходных данных, взяв из совокупности случайную выборку и построив гистограмму частоты явлений различной величины. Тем самым мы будем иметь статистическую оценку эмпирически полученных вероятностей. Асимметрия может быть вызвана неточностью показаний приборов или неадекватностью выборки, и поэтому требуется применение параметрических статистических методов для определения репрезентативности выборки, то есть для выяснения того, достаточно ли верно наблюдаемая плотность распределения отображает плотность распределения для всей совокупности исходных данных. Пример такой гистограммы приведен на рис. 7.6. В этом случае выборка представляет собой часовые максимумы интенсивности дождя при фронтальных ливнях в Великобритании (Лампетер). Отчетливо видно, что имеется явное смещение в сторону нижней границы шкалы интенсивности, но мы пока не знаем, каким образом этот качественный результат можно проверить статистически. Поскольку общая вероятность для всей выборки равна 1,0, то площадь каждого прямоугольника на гистограмме должна быть пропорциональна вероятности появления каждого численного значения интенсивности осадков (градации имеют величину от 0 до 1 мм/час, от 1 до 2 мм/час и т. д.). Следовательно:

$$P \sim fi/N, \quad (7.18)$$

где  $f$  — частота (количество явлений),  $i$  — величина градации и  $N$  — размер выборки. Для удобства в этом примере величина градации принята равной 1 мм/час. Однако во многих случаях бывает невозможно выбрать столь удобную величину градации, и тогда об-

шая вероятность ( $\Sigma P$ ) принимается равной  $i$ , поскольку

$$\sum P = \sum \frac{fi}{N} = \frac{i}{N} \sum f,$$

но  $N = \Sigma f$  и

$$\sum P = \frac{i}{N} N = i.$$

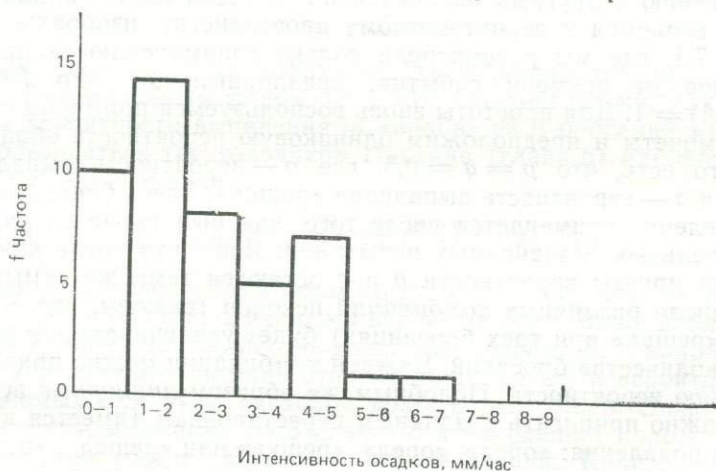
Поэтому часто оказывается предпочтительнее строить гистограмму *плотности вероятности*, так что

$$P \sim fi/Ni$$

и

$$\sum P = \frac{1}{N} \sum f = 1.$$

Статистические методы, которые можно применить при анализе исходных данных, в значительной степени зависят от вида математического описания наблюдаемой плотности распределения. Теоретически можно составить уравнение, которое каждый раз описывало бы любую наблюдаемую плотность распределения, но гораздо удобнее вывести некоторое число основных типов функции плотности распределения и изучить их свойства. Например, распределение, показанное на рис. 7.6, имеет положительную асимметрию: то есть значение моды не совпадает со средним значением выборки, а лежит левее его. Отрицательная асимметрия указывала бы на обратную ситуацию. Положительная асимметрия означает, что имеется относительно большое количество данных малой величины. Многие статистические методы, используемые в физической гео-



**Рис. 7.6** Частота распределения часовых максимумов интенсивности осадков при фронтальных ливнях в Лампетере, Великобритания, 1973—1975 гг.

графии, не допускают асимметрии. В их основе лежит предположение, что данные «распределены нормально». *Кривая плотности нормального распределения* симметрична и, как мы увидим позже, обладает рядом важных свойств. Она уже упоминалась нами ранее (глава 3). Нормальное распределение применяется наиболее часто по сравнению с другими теоретическими распределениями. Последние, однако, также часто встречаются в физической географии. Каждое из них имеет конкретные важные характеристики и может применяться для описания наблюдаемых плотностей распределения. Все основные параметрические статистики предполагают нормальный закон распределения. На практике, однако, распределение вероятностей, например встречаемое при изучении режима речного стока, нередко отклоняется от нормального. Но в любом случае теоретические распределения, как правило, хорошо соответствуют гистограммам, полученным эмпирическим путем. Математическое обоснование каждого теоретического распределения зависит от структуры вероятностного пространства, в пределах которого происходят события, и от принятых допущений. Например, важно знать, действительно ли происходящие события независимы. Кроме того, следует обращать особое внимание на размер выборки.

## 7.5 Теоретические распределения

### 7.5.1 Биномиальное распределение

Наряду с нормальным биномиальное распределение, по-видимому, является наиболее простым и наиболее часто используемым по сравнению с другими распределениями. Для иллюстрации сказанного вернемся к вероятностному пространству, изображенному на рис. 7.1, где мы рассмотрели только взаимоисключающие, не зависящие от времени события, предполагающие, что  $P(A) + P(\sim A) = 1$ . Для простоты вновь воспользуемся примером с бросанием монеты и предположим одинаковую вероятность обоих исходов, то есть, что  $p = q = 0,5$ , где  $p$  — вероятность выпадения «орла», а  $q$  — вероятность выпадения «решки». Здесь биномиальное распределение применяется после того, как был проведен ряд последовательных независимых испытаний. Ясно, что после каждого бросания монеты вероятности  $p$  и  $q$  остаются теми же самыми, а общее число различных комбинаций исходов (скажем, два «орла» и одна «решка» при трех бросаниях) будет увеличиваться с увеличением количества бросаний. Каждой комбинации можно приписать *априорную* вероятность. Подобным же образом *априорные* вероятности можно приписать различным перестановкам (имеется в виду порядок появления: «орел», «орел», «решка» или «решка», «решка», «решка»). Например, для последовательности из трех бросаний число перестановок будет  $2^3$ :

ooo oop oop oro roo rro ror rrr,

где  $o$  — «орел» и  $p$  — «решка». Отсюда вероятность каждой перестановки будет равна  $1/2^3$ , или 0,125, то есть вероятность перестановки равна  $1/2^n$  при условии, что для каждого испытания возможны два альтернативных исхода. Но гораздо чаще мы сталкиваемся с комбинациями событий, например, если мы хотим узнать возможность того, что из семи дней 2 дня будут «хорошими» при заданных значениях вероятности «хорошего» и «плохого» дня. В приведенной выше последовательности перестановок комбинация  $2o + p$  наблюдается 3 раза:  $oop$ ,  $oro$ ,  $roo$ , иными словами, вероятность такой комбинации в три раза больше вероятности любой другой. Тот же результат верен и для  $2p + o$ , в то время как возможность получить  $3o$  или  $3p$  только одна. Последовательность вероятностей этих четырех комбинаций будет, таким образом,  $p, 3p, 3p, p$ , где  $p$  — вероятность каждой отдельной перестановки.

Ясно, что если вероятность выпадения «орла» при одном бросании монеты равна 0,5, то вероятность выпадения при двух бросаниях двух «орлов» будет  $0,5^2$ , а при трех бросаниях трех «орлов» —  $0,5^3$  и т. д. Это уже должно быть очевидным из нашего объяснения цепей Маркова. Аналогично вероятность появления комбинации  $2o + p$  при  $p = 0,5$  должна быть  $0,5^2 \times 0,5$ , или  $p^2q$ . Поскольку нет никакого смещения в сторону вероятностей  $p$  или  $q$ , картина представляется очевидной. Но если  $p = 0,4$  и  $q = 0,6$ , то мы должны рассмотреть общее алгебраическое соотношение вида:

$$p^3 + prq + pqq + pqr + qrp + qqr + qrp + q^3 = 1$$

или

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 1,$$

то есть

$$(p + q)^3 = 1.$$

Иными словами, последовательность вероятностей представлена здесь биномиальным рядом  $(p + q)^n$ . Следовательно, для определения вероятности выпадения  $m$  «орлов» из  $n$  бросаний мы можем воспользоваться треугольником Паскаля (глава 6) или формулами (6.13) и (6.14) в виде:

$$P_m^n = \frac{n!}{m(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \quad (7.19)$$

В физико-географических исследованиях взаимно исключают события редко обладают равными вероятностями. Чаще наблюдается преобладание какого-либо явления над другим. Так, например, затопление поймы — явление относительно редкое, и вероятность наблюдаемых при этом расходов воды в реке значительно меньше вероятности меженных расходов, что и определяет положительную асимметрию соответствующего распределения. Кривая плотности биномиального распределения симметрична относительно среднего значения при  $p = q = 0,5$  (рис. 7.7), в противном случае имеется асимметрия. Второе распределение, представленное на рис. 7.7,

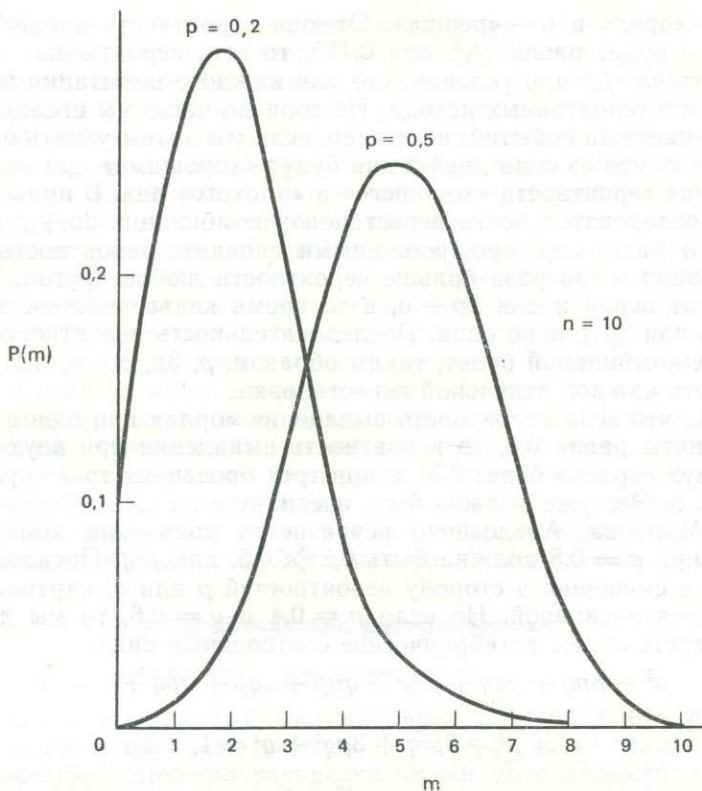


Рис. 1.7 Плотность биномиального распределения при  $n = 10$ ,  $p = 0,2$  и  $0,5$ .

иллюстрирует случай, когда  $p = 0,2$  и  $(1-p) = 0,8$ . Обе кривые приведены для последовательности из 10 испытаний ( $n = 10$ ). В рассмотренном примере Марковской цепи мы видим, что вероятность ( $P$ ) выпадения осадков в любой день была равна  $0,57$ , то есть в этой по сути биномиальной ситуации отмечается небольшое смещение. Вероятность того, что каждый день недели будет дождливым, равна  $0,57^7 = 0,020$ . Это удивительно низкая вероятность, если иметь в виду, что речь идет об одной из наиболее дождливых областей западного Уэльса. Вероятность того, что из семи дней два будут с дождем, можно вычислить по формуле (7.19):

$$\begin{aligned}
 P_2^7 &= \frac{7!}{2!(7-2)!} = 0,57^2(1-0,57)^{7-2} = \\
 &= \frac{5040}{240} 0,325 \times 0,015 = \\
 &= 0,10.
 \end{aligned}$$

Полученный результат, однако, *не означает*, что вероятность, например, дождливой погоды в субботу и воскресенье равна 10%, поскольку вероятность дождя и в субботу и в воскресенье определяется с помощью перестановок и равна 0,33 (0,57<sup>2</sup>). Нельзя подсчитать любую из этих вероятностей, не принимая во внимание погоду предыдущего дня, поскольку в погодных условиях изо дня в день повторяются некоторые устойчивые характеристики. Вероятность того, что в *какой-то* день недели пойдет дождь, равна  $P_1^7$ , или 0,49. Добавим, что вероятность того, что дождь будет лить *по меньшей мере* два дня из семи, представляет сумму вероятностей от  $P_2^7$  до  $P_7^7$ , или  $0,10 + 0,20 + 0,31 + 0,24 + 0,09 + 0,02 = 0,96$ .

### 7.5.2 Распределение Пуассона

Это распределение представляет собой предельный случай биномиального распределения, когда вероятность явления ( $P$ ) очень мала, в то время как общее число испытаний (размер выборки) велико. Таким образом, им можно пользоваться при описании частот распределения редких событий, таких, например, как случай обширных наводнений на протяжении долгого периода времени наблюдений. Поскольку вероятность  $P$  очень мала, это распределение близко к асимметричному биномиальному. Плотность распределения задается соотношением

$$P(m) = \frac{\mu^m e^{-\mu}}{m!}, \quad (7.20)$$

где  $P(m)$  — вероятность появления  $m$  событий в данной последовательности, а  $\mu$  — среднее число событий. Сумма вероятностей всех целых значений  $m$  равна 1. На рис. 7.8 представлены кривые двух распределений Пуассона: одна кривая при  $\mu=1$ , другая при  $\mu=2$ . Значения вероятностей помещены в табл. 7.1. Заметим, что,

Таблица 7.1

Вычисленные вероятности  
для распределения Пуассона  
при  $\mu = 1$  и  $\mu = 2$

$\mu=1$		$\mu=2$	
$m$	$P(m)$	$m$	$P(m)$
0	0,37	0	0,14
1	0,37	1	0,27
2	0,18	2	0,27
3	0,06	3	0,18
4	0,02	4	0,09
5	0,003	5	0,04
6	0,0005	6	0,01

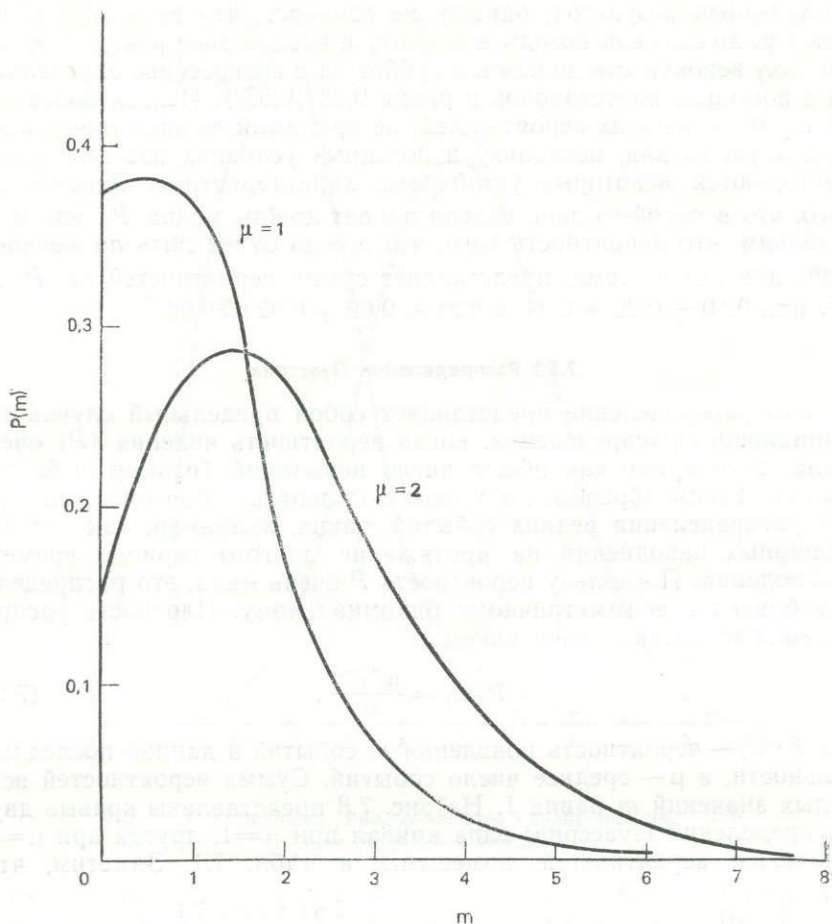


Рис. 7.8 Плотность распределения Пуассона при  $\mu = 1$  и 2.

поскольку величина среднего возрастает, точка, где отмечается максимальная вероятность, сдвигается в сторону более высоких значений  $m$ . При больших значениях  $\mu$  распределение приближается к биномиальному.

Распределение Пуассона применяется при анализе редких и независимых друг от друга явлений во времени или пространстве. Так, распределение Пуассона представляет собой грубую модель частоты встречаемости катастрофических наводнений при довольно длительном периоде наблюдений, хотя в этом случае нет полной уверенности в независимости событий. Например, в результате наблюдений за ежедневными максимальными расходами может обнаружиться, что наибольшие расходы отмечаются на второй или тре-

тый день после сильного ливня. Распределение микроэлементов в образце почвы может также приближаться к Пуассоновскому. Предположим, что для серии образцов мы сосчитали количество содержащихся в них микроэлементов и оказалось, что на один образец приходится в среднем 2,1 грамма определенного микроэлемента<sup>1</sup>. Используя соотношение (7.20), мы могли бы затем вычислить, что вероятность найти хотя бы 1 грамм микроэлемента в любом образце равна

$$P(1) = \frac{(2,1)^1 e^{-2,1}}{1!} = 0,26,$$

в то время как

$$P(4) = \frac{(2,1)^4 e^{-2,1}}{4!} = 0,10$$

и

$$P(10) = \frac{(2,1)^{10} e^{-2,1}}{10!} = 5,6 \times 10^{-5}.$$

### 7.5.3 Нормальное распределение

Как уже было отмечено, биномиальное распределение при малых  $p$  или  $q$  приближается к распределению Пуассона. Другой предельный случай биномиального распределения дает нормальное распределение. Выше мы указывали, что кривая биномиального распределения при  $p$  и  $q$ , значительно отличающихся друг от друга, имеет резко выраженную асимметрию. На рис. 7.7 было показано распределение с сильной асимметрией при  $p = 0,2$  и  $n = 10$ . Если же  $p = q = 0,5$ , то независимо от числа испытаний распределение имеет симметричный вид. Такое распределение представляет собой упомянутый предельный случай биномиального распределения. В сущности, когда  $p$  и  $q$  равны или почти равны, то даже несколько испытаний дают распределение очень близкое к симметричному. С возрастанием различий между  $p$  и  $q$  возникает несимметричность, но все же удается сохранить приблизительную симметричность, если увеличить количество испытаний. Следовательно, в то время как биномиальное распределение  $(0,2 + 0,8)^{10}$  имеет явно асимметричный вид, распределение  $(0,2 + 0,8)^{100}$  почти симметрично относительно среднего значения. Следует заметить, что при большом числе испытаний разложение становится очень громоздким.

Нормальное распределение описывается симметричной кривой такого же вида, какой имеет кривая биномиального распределения в предельном случае, когда  $n$  стремится к бесконечности. Нормальное распределение имеет ряд свойств, делающих его одним из наиболее употребительных в статистике распределений. Представим себе, что мы измерили температуру воды в сосуде несколькими термометрами одновременно. Из-за небольших погрешностей

<sup>1</sup> 1 грамм = 0,06479891 г. — Прим. ред.

в конструкции показания каждого термометра будут несколько различаться между собой, но среднее всех значений ( $\bar{T}$ ) будет приближаться к истинной температуре воды ( $T$ ). Отклонения показаний термометров от среднего образуют симметричную кривую распределения, близкую к кривой нормального распределения. Любая систематическая ошибка термометров проявится в асимметрии распределения. Кривая нормального распределения обладает характеристиками, которые не зависят от размера выборки. Для нормального распределения, так же как и для любого другого, площадь, заключенная под кривой плотности распределения, дает общую вероятность, равную 1, а площадь под кривой между двумя фиксированными точками пропорциональна вероятности появления точек, промежуточных между ними. Для кривой нормального распределения площадь под различными частями кривой не зависит от размера выборки. Для определения размера выборки имеются соответствующие статистические формулы (см. Приложение 5, раздел 4). Вероятность выражается через стандартное, или, как его еще называют, среднее квадратичное, отклонение ( $\sigma$ ):

$$P(m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (7.21)$$

На рис. 7.9 приведены примеры кривых нормального распределения при  $\mu = 10$  и  $\sigma = 0,5; 1; 2$  и  $5$ . Во всех примерах кривая асимптотически стремится к горизонтальной оси, хотя для малых стандартных отклонений большая часть исходов расположена вблизи среднего значения. Следовательно, поскольку вся площадь под кривой должна быть равна 1, то чем меньше стандартное отклонение, тем острее пик кривой и тем большее количество точек будет располагаться вблизи среднего значения. Основное свойство кривой, связанное со стандартным отклонением, заключается в том, что с вероятностью 0,682 любое взятое наугад значение из нормально распределенного ряда данных будет лежать между  $-\sigma < \mu < +\sigma$  с вероятностью 0,954 оно будет заключено между  $-2\sigma < \mu < +2\sigma$  и с вероятностью 0,998 — между  $-3\sigma < \mu < +3\sigma$ . Для большинства практических целей мы можем рассматривать вероятность значений, лежащих вне промежутка  $\pm 3\sigma$ , как несущественную.

Кривую нормального распределения можно использовать для описания большинства распределений, имеющих место в природе. Вследствие зависимости от величины стандартного отклонения, которое служит удобной мерой рассеяния данных относительно среднего значения, нормальное распределение находит применение в параметрических статистических методах, являясь фундаментом, на котором строятся корреляционный и регрессионный анализы.

Любое отклонение данных от нормального закона распределения делает статистические выводы недостоверными. Как указывалось выше, нормальное распределение играет важную роль при статистической оценке ошибок. В любом случае всякие отклонения

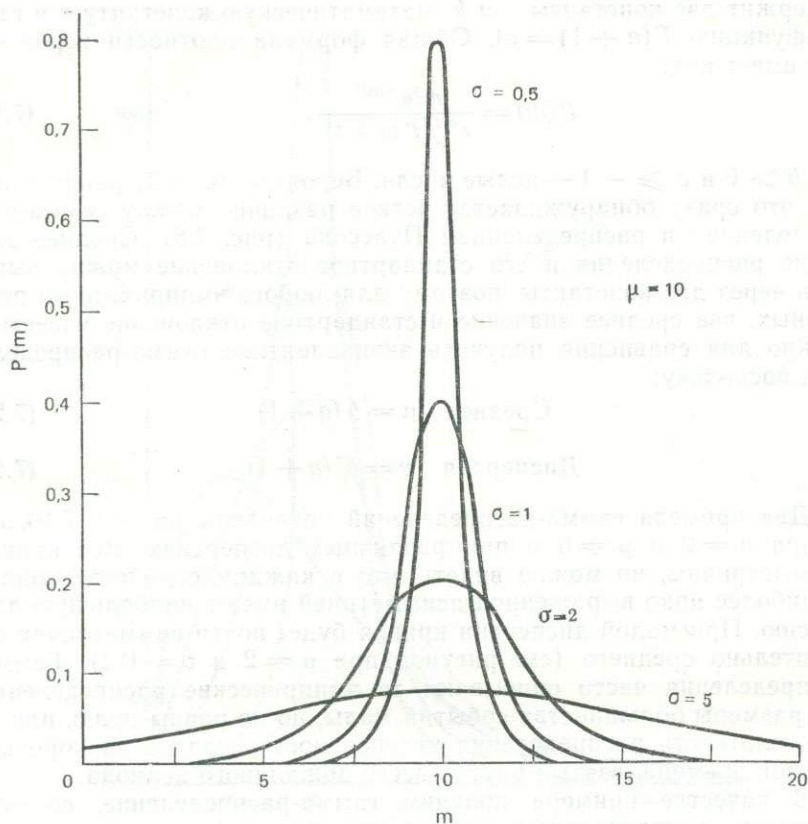


Рис. 7.9 Плотность нормального распределения при  $\mu = 10$  и  $\sigma = 0,5; 1; 2$  и  $5$ .

наблюдаемого распределения от нормального указывают на существование некоторого неслучайного внешнего влияния на рассматриваемые исходные данные. При оценке ошибок это отклонение может быть вызвано систематической ошибкой прибора. Если реальная кривая плотности вероятности заметно отличается от кривой нормального закона (а мы хотим воспользоваться статистическими критериями, предполагающими нормальное распределение!), то для «нормализации» кривой можно осуществить преобразование данных с помощью некоторой функции (например, взять логарифм или возвести в квадрат).

#### 7.5.4 Гамма-распределение

Еще одним довольно распространенным распределением является *гамма-распределение*, которое предполагает, что исходные данные всегда положительны. Выражение плотности вероятности

содержит две константы  $a$  и  $b$ , математическую константу  $e$  и гамма-функцию  $\Gamma(a+1) = a!$ . Общая формула плотности вероятности имеет вид:

$$P(m) = \frac{m^a e^{-m/b}}{b^{a+1} \Gamma(a+1)}, \quad (7.22)$$

где  $b > 0$  и  $a \geq -1$  — целые числа. Вероятность  $P(0)$  равна нулю, так что сразу обнаруживается четкое различие между гамма-распределением и распределением Пуассона (рис. 7.8). Среднее значение распределения и его стандартное отклонение можно выразить через две константы, поэтому для любого эмпирического ряда данных, чье среднее значение и стандартное отклонение известны, можно для сравнения получить эквивалентное гамма-распределение, поскольку:

$$\text{Среднее } \mu = b(a+1) \quad (7.23)$$

и

$$\text{Дисперсия } \sigma^2 = b^2(a+1). \quad (7.24)$$

Два примера гамма-распределений приведены на рис. 7.10,  $a$  и  $b$ , при  $\mu = 2$  и  $\mu = 6$  и при различных дисперсиях. Все кривые асимметричны, но можно видеть, что в каждом семействе кривые с наиболее ярко выраженной асимметрией имеют наибольшую дисперсию. При малой дисперсии кривая будет почти симметрична относительно среднего (см. рисунок при  $\mu = 2$  и  $\sigma = 0,2$ ). Гамма-распределения часто описывают те эмпирические распределения, где размеры большинства событий малы, но не равны нулю, например, плотность распределения интенсивности осадков за короткий отрезок времени, взятый внутри всего дождливого периода.

В качестве примера получим гамма-распределение, соответствующее распределению частиц наносов разного размера для большой выборки, в которой имеется значительный диапазон крупности частиц. Ясно, что здесь нет ни одной частицы с нулевым диаметром, и опыт подсказывает нам также, что частиц большого диаметра будет совсем немного. Предположим, мы определили средний размер частиц в выборке  $\mu = 1,2$  мм и стандартное отклонение 2,8 мм. Тогда из уравнения (7.23) имеем

$$b(a+1) = 1,2$$

и

$$b^2(a+1) = 7,84 \text{ (дисперсия есть квадрат стандартного отклонения).}$$

Таким образом, соответствующее гамма-распределение имеет  $a = -1$  и  $b = 2,8$ . Вычисленное значение  $a$  в действительности равно  $-0,82$ , но мы обязаны его округлить до ближайшего целого. Подставив эти величины в соотношение (7.22), получим:

$$P(m) = \frac{m^{-1} e^{-m/2,8}}{(2,8)^0} = m^{-1} e^{-0,36m},$$

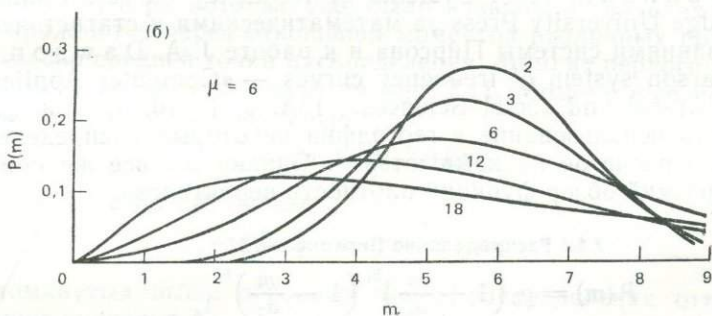
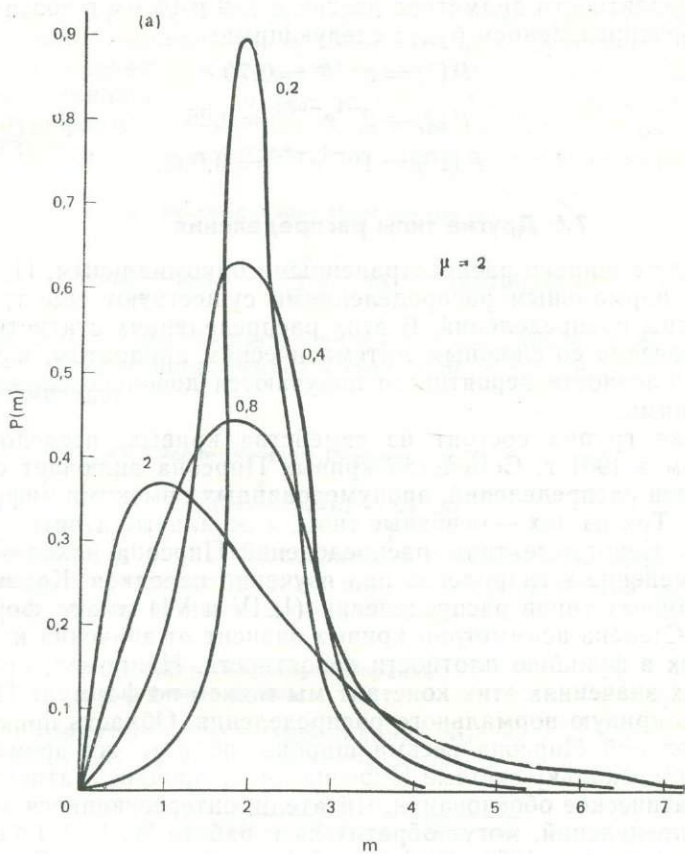


Рис. 7.10 Плотность гамма-распределения: (а) при  $\mu = 2$  и дисперсии 0,2; 0,4; 0,8 и 2; (б) при  $\mu = 6$  и дисперсии 2, 3, 6, 12, 18.

то есть вероятности диаметров частиц в 1, 2 и 10 мм в соответствии с гамма-распределением будут следующими:

$$P(1) = e^{-0,36} = 0,70$$

$$P(2) = 2^{-1} e^{-0,72} = 0,25$$

$$P(10) = 10^{-1} e^{-3,6} = 0,003.$$

## 7.6 Другие типы распределения

Наряду с широко распространенными биномиальным, Пуассона, гамма и нормальным распределениями существуют еще три важные группы распределений. В этих распределениях статистическая теория связана со сложным математическим аппаратом, и уравнения для плотности вероятности получаются довольно сложными и громоздкими.

Первая группа состоит из семейства кривых, исследованных Пирсоном в 1901 г. Семейство кривых Пирсона включает систему из 12 типов распределений, пронумерованных римскими цифрами от I до XII. Три из них — основные типы, а остальные девять — «переходные». Некоторые типы распределений Пирсона находят широкое применение в гидрологии при изучении паводков. Кривые всех трех основных типов распределений (I, IV и VI) имеют форму колокола. Степень асимметрии кривых зависит от значения констант, входящих в функцию плотности вероятности. Например, при определенных значениях этих констант мы можем по формуле Пирсона получить кривую нормального распределения. Область применения распределений Пирсона весьма широка, но в то же время четко очерчена, поскольку система Пирсона имеет прочное статистическое и математическое обоснование. Читатели, интересующиеся этим типом распределений, могут обратиться к работе W. P. Elder ton, N. L. Johnson, 1969: *Systems of frequency curves*. Cambridge: Cambridge University Press за математическими и статистическими обоснованиями системы Пирсона и к работе J. A. Dawson, 1972: *The Pearson system of frequency curves*. — «Computer Applications in the natural and social Sciences», 13A, p. 1—10, предлагающему облегчить использование в географии некоторых распределений с помощью расчетов на компьютере<sup>1</sup>. Однако мы все же приведем здесь краткий обзор функций плотности вероятности.

### 7.6.1 Распределение Пирсона тип I

$$P(m) = y_0 \left(1 + \frac{m}{a_1}\right)^{b_1} \left(1 - \frac{m}{a_2}\right)^{b_2}, \quad (7.25)$$

где  $-a_1 < m < +a_2$ ,  $a_1 b_2 = a_2 b_1$  и  $y_0$  — постоянная.

<sup>1</sup> См. также: А. Н. Колмогоров, 1974: *Основные понятия теории вероятностей*, 2 изд. М.: Б. В. Гнеденко, 1969: *Курс теории вероятностей*, 5 изд., М. — Прим. ред.

Если  $b_1 \neq b_2$ , то кривая распределения имеет колоколообразную форму с четко выраженной положительной асимметрией. Если же  $b_1 = b_2$ , то кривая симметрична относительно среднего значения. Когда  $b_1$  отрицательно, а  $b_2$  — положительно, кривая принимает J-образную форму. Эта кривая была использована Доусоном (Dawson, 1973) для описания плотности распределения размера частиц.

#### 7.6.2 Распределение Пирсона тип IV

$$P(m) = y_0 \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right)^{-b} \exp[-\gamma \operatorname{arctg}(m/a)], \quad (7.26)$$

где  $y_0$ ,  $a$ ,  $b$  и  $\gamma$  — выражаются через два «корня»  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (см. раздел 7.6.4). Кривая вновь имеет колоколообразную форму и некоторую асимметрию.

#### 7.6.3 Распределение Пирсона тип VI

$$P(m) = y_0 (m - a)^{q_1} m^{-q_2}, \quad (7.27)$$

где  $y_0$ ,  $a$ ,  $q_1$  и  $q_2$  вновь определяются через  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . При  $q_1 > q_2$  кривая имеет колоколообразный вид, но, если величина  $q_2$  отрицательна, она может принять J-образную форму.

#### 7.6.4 Другие критерии Пирсона и переходные типы

Все упомянутые типы распределения вместе с переходными вариантами можно легко представить с помощью величины  $K$ , где

$$K = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4 (4\beta_2 - 3\beta_1) (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}. \quad (7.28)$$

Постоянные  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , которые уже были названы в разделах 7.6.2 и 7.6.3, выражаются через отношения моментов различных порядков относительно средней точки распределения. Момент первого порядка относительно моды показан на рис. 7.11. Момент  $n$ -го порядка точки  $m$  относительно моды равен:

$$\mu_n = (m_1 - M)^n P(m_1), \quad (7.29)$$

где  $M$  — мода, а  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равны:

$$\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3 \quad \text{и} \quad \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2. \quad (7.30)$$

Для упомянутых выше основных типов распределения отмечены следующие значения  $K$ :

Тип I:  $K$  отрицательно

Тип IV:  $0 < K < 1$

Тип VI:  $K > 1$ .

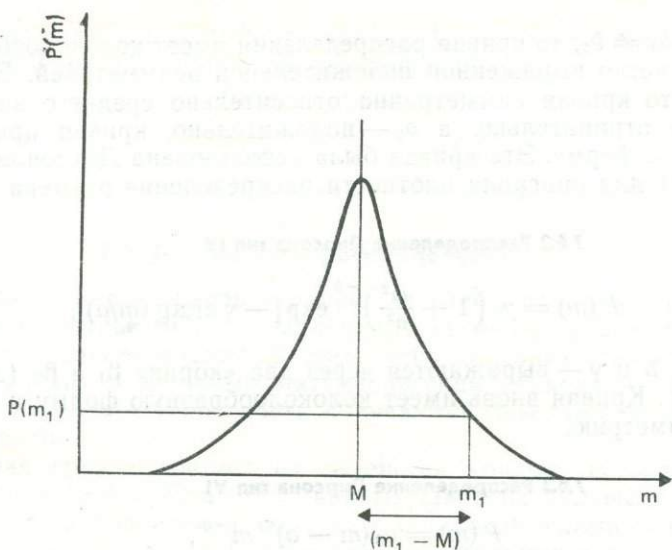


Рис. 7.11 Определение момента точки  $m_1$  относительно моды  $M$ .

С помощью  $K$  можно также определить переходные типы кривых. Зависимость типа распределения от величины  $K$  показана в табл. 7.2. В случае, если  $K = 0$ , то при  $\beta_2 = 3$  получается нормальное распределение, являющееся промежуточным между I и IV типами. При том же значении  $K$ , но при  $\beta_2 < 3$  имеем кривую II типа,

Таблица 7.2

Распределение Пирсона в зависимости от величины  $K$   
(Elderton, Johnson, 1969)

$K = -\infty$	$K = 0$	$K = 1$	$K = \infty$
Тип I	Тип IV	Тип VI	
Тип III	Тип II Тип VII	Тип V	Тип III

а при  $\beta_2 > 3$  кривую VII типа. Из всех переходных типов распределения Пирсона тип III находит наибольшее применение в физической географии. Распределение Пирсона тип III представляет собой серию кривых, включающих в качестве частного случая гамма-распределение. Функция плотности вероятности для распределения Пирсона тип III имеет вид:

$$P(m) = p_0 \left(1 + \frac{m}{a}\right)^c e^{cm/a}, \quad (7.31)$$

где

$$\begin{aligned}c &= 4/\beta_1 - 1 \\ a &= c\mu_3/2\mu_2 \\ P_0 &= \frac{N}{a} \frac{c^{c+1}}{e^c \Gamma(c+1)}.\end{aligned}$$

Сходство между распределением Пирсона тип III и гамма-распределением можно увидеть, сравнив последнее выражение для плотности вероятности с выражением (7.22).

### 7.6.5 Логарифмически нормальное распределение

Вторую важную группу распределений образуют *логарифмически нормальные*, или *логнормальные*, *распределения*. Многие из уже рассмотренных распределений имеют четко выраженную положительную асимметрию. В физической географии многие данные наблюдений подчиняются этому виду распределения. Как мы видели в главах 3 и 5, с помощью операции логарифмирования можно привести распределение с положительной асимметрией к виду, мало отличающемуся от нормального. При нанесении данных на логарифмическую бумагу такое преобразование осуществляется автоматически. Функция плотности вероятности этого распределения есть подобие функции плотности вероятности для нормального распределения (формула (7.21)) и имеет вид:

$$P(m) = \frac{1}{\sigma m \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln m - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (7.32)$$

Это распределение впервые было использовано Гэлтоном в конце XIX в. и с той поры называется *законом Гэлтона*.

### 7.6.6 Экстремальные распределения

Логарифмически нормальное распределение представляет собой частный случай одного из трех типов *экстремальных распределений*, или *распределений экстремальных значений*. Некоторые области гидрологии, флювиальной геоморфологии и климатологии изучают события, крайне редко повторяющиеся в природе (например, катастрофические наводнения, засухи). Гидрологи часто используют знание частоты наступления подобных событий в прошлом для предсказания аналогичных или еще более экстремальных явлений в будущем. В прогнозах такого рода нам пришлось бы использовать так называемые *накопленные (кумулятивные) вероятности*. Подробнее мы разберем этот вопрос в разделе 7.7.

Существуют три основных типа распределения накопленных вероятностей экстремальных значений, уравнения которых приводятся ниже. Во-первых, это экстремальное распределение *тип I*,

или *распределение Гумбеля*, названное так в честь крупного ученого-статистика. Подробно данное распределение рассмотрено в работе Е. J. Gumbel, 1958: The statistics of extremes. New York: Columbia University Press<sup>1</sup>. Для этого распределения накопленная вероятность, или функция распределения накопленной вероятности, имеет вид:

$$P(X \leq x) = \exp(-e^{-(a+x)/c}), \quad (7.33)$$

где  $P(X \leq x)$  — вероятность появления события, чья величина меньше или равна  $x$ , а члены  $a$  и  $c$  — константы. Логарифмически нормальное распределение накопленной вероятности представляет собой частный случай этого распределения.

Распределение *тип II* имеет вид:

$$P(X \leq x) = \exp[-(\theta/x)^k], \quad (7.34)$$

где  $\theta$  — ожидаемая максимальная величина изучаемого события из выборки размером  $n$ , а  $k$  — константа. Наконец, существует третье экстремальное распределение *тип III*, или распределение накопленной вероятности *Вейбулла*, названное так в честь исследователя, впервые использовавшего его. Гумбель (1958) обобщил это распределение. Функция распределения накопленной вероятности в этом случае задается формулой:

$$P(X \leq x) = \exp(-t^k). \quad (7.35)$$

Здесь

$$t = (x - \varepsilon)/(\theta - \varepsilon), \quad (7.36)$$

а  $k$  и  $\theta$  — константы, такие же как и в формуле (7.34), причем  $-\infty < x < \varepsilon$ .

### 7.7 Применение функции распределения накопленной вероятности

Вид распределений, задаваемых уравнениями (7.33) — (7.36), может напугать читателя своей кажущейся сложностью, однако применение этих распределений существенно облегчается, если для построения координатной сетки использовать подходящую вероятностную бумагу. В главе 5 мы заметили, что с графиками стандартных функций легче работать, если с помощью некоторого преобразования изменить масштаб по осям координат таким образом, что график в этих осях становится прямой линией. Ту же самую операцию можно проделать для функций распределения накопленной вероятности. Наиболее часто географы используют распределения Пирсона тип III, логарифмически нормальное, Гумбеля и Вейбулла.

<sup>1</sup> См. также: А. В. Рождественский, А. И. Чеботарев, 1974: Статистические методы в гидрологии, Л. — Прим. ред.

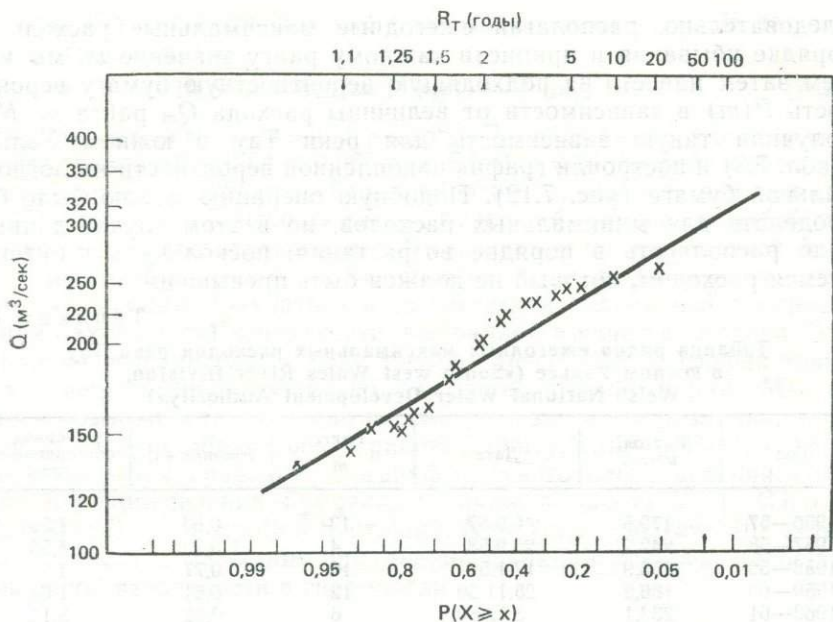


Рис. 7.12 Логнормальное распределение накопленной вероятности, построенное по данным табл. 7.3

При нанесении на специальную графическую бумагу эти распределения примут вид прямых линий. Читателю остается лишь нанести данные наблюдений на бумагу соответствующего типа. В качестве примера на рис. 7.12 изображено логнормальное распределение накопленной вероятности.

В гидрологии широко используются *ряды ежегодных максимальных расходов* (в других областях физической географии может быть использован их эквивалент). Такой ряд состоит из ранжированных значений ежегодных максимальных расходов воды для изучаемой нами реки. Обычно эти значения выбираются на основе гидрологического года (для Великобритании с октября по сентябрь). В данном случае нас интересует оценка вероятности появления отмеченных или еще больших по величине расходов в будущие годы. Допустим, что для нашей реки имеются наблюдения за  $n$  лет и что за это время расходы величиной  $Q$  отмечались  $m$  раз. Тогда мы можем утверждать, что в будущем расход величиной  $Q$  или более может случиться в среднем один раз в  $(n + 1)/m$  лет. Этот временной интервал называется *периодом повторяемости*, или просто *периодом*. Вероятность появления равного или превосходящего по величине расхода в любой следующий год равна:

$$P(m) = m/(n + 1). \quad (7.37)$$

Следовательно, располагая ежегодные максимальные расходы в порядке убывания и приписав каждому рангу значение  $m$ , мы можем затем нанести на подходящую вероятностную бумагу вероятность  $P(m)$  в зависимости от величины расхода  $Q_m$  ранга  $m$ . Мы получили такую зависимость для реки Тау в южном Уэльсе (табл. 7.3) и построили график накопленной вероятности на логнормальной бумаге (рис. 7.12). Подобную операцию можно было бы проделать для минимальных расходов, но в этом случае данные надо располагать в порядке возрастания, поскольку мы интересуемся расходом, который не должен быть превышен.

Таблица 7.3

Таблица рядов ежегодных максимальных расходов реки Тау в южном Уэльсе («South west Wales River Division, Welsh National Water Development Authority»)

Год	Расход, м <sup>3</sup> /сек	Дата	Ранг, $m$	$P = m/(n+1)$	Период повторяемости, годы
1956—57	179,5	6.9.57	13	0,63	1,59
1957—58	242,2	23.9.58	4	0,22	4,55
1958—59	156,9	17.1.59	16	0,77	1,30
1959—60	186,2	25.11.59	12	0,61	1,64
1960—61	233,1	3.12.60	6	0,32	3,13
1961—62	217,5	11.9.62	9	0,44	2,27
1962—63	134,9	9.3.63	20	0,97	1,03
1963—64	159,4	19.11.63	15	0,76	1,32
1964—65	219,7	13.12.64	8	0,42	2,38
1965—66	233,1	18.12.65	7	0,35	2,86
1966—67	251,5	27.2.67	2	0,11	9,09
1967—68	255,3	19.10.67	1	0,05	20,00
1968—69	153,9	28.10.68	18	0,86	1,16
1969—70	163,5	21.1.70	14	0,71	1,41
1970—71	236,8	1.11.70	5	0,27	3,70
1971—72	142,4	15.2.72	19	0,92	1,09
1972—73	202,4	5.8.73	10	0,52	1,92
1973—74	153,9	30.1.74	17	0,83	1,21
1974—75	243,9	22.1.75	3	0,18	5,56
1975—76	198,3	1.12.75	11	0,53	1,89

Как для максимального, так и для минимального расходов вероятность 0,05, или 1%, означает, что период повторяемости событий равен 20 годам, иными словами, максимальные расходы величиной  $Q$  или более могут наблюдаться один раз в 20 лет. Конечно, вполне возможно, что подобное событие будет повторяться пять лет подряд, а затем не происходить 100 лет. Вероятность того, что событие величиной  $Q$  класса  $m$  произойдет один раз в  $N$  лет, можно получить, используя общее биномиальное разложение для  $P(m)$  и  $(1 - P(m))$  равенство (7.19)):

$$\begin{aligned} \text{Вероятность} &= \frac{N!}{(N-1)!} P(m)^1 (1 - P(m))^{N-1} = \\ &= NP(m) (1 - P(m))^{N-1}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Вероятность того, что явление произойдет точно через  $N$  лет, задается выражением:

$$\text{Вероятность} = P(m) (1 - P(m))^{N-1}. \quad (7.39)$$

Итак, вероятность появления расхода  $Q$ , наблюдаемого один раз в 10 лет, равна  $10 \times 0,04 \times 0,96^9$  при  $P(m) = 0,04$  (период повторяемости составляет 25 лет). Таким образом, существует вероятность (0,28) того, что «25-летний» расход будет наблюдаться в любой год из десяти последовательных лет. Вычисленные по приведенной формуле результаты несколько отличаются от значений вероятностей, которые должны получаться в соответствии с функцией распределения накопленной вероятности, выбранной в качестве модели. Эти различия незначительны, если только нанесенные на график точки будут лежать приблизительно на одной прямой линии. Мы не имеем возможности подробно рассмотреть здесь эти различия, и читателю следует обратиться к работе Linsley, Kohler, Paulus, 1975, где проводится сравнение логарифмического распределения Пирсона и распределения Гумбеля, а также к работе V. T. Chow, 1964: Handbook of applied hydrology. New York: McGraw-Hill за более подробным разбором применения функции распределения накопленной вероятности в гидрологии<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> См. также: В. А. Червяков. 1966: Основы математической статистики в географии. Изд-во Дальневосточного ун-та, Владивосток; М. К. Бочаров, 1971: Методы математической статистики в географии. М., «Мысль»; А. И. Чиботарев, 1962: Вопросы максимального стока. — «Тр. Государственного гидрологического института», вып. 99, Л. — Прим. ред.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Содержание данной главы составляют естественное развитие операции дифференцирования (глава 5) и варианты применения процедуры разложения функций в ряд (глава 6).

## 8.1 Пределы и непрерывные функции

Мы уже видели, что сумма геометрической прогрессии  $a, ar, ar^2, ar^3 \dots$  при  $-1 < r < +1$  стремится к некоторому пределу. Сумма такого ряда при бесконечном числе членов конечна, поэтому мы можем написать:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{a}{1-r}.$$

Сумма ряда является пределом последовательности частичных сумм  $S_m$  по мере того, как число членов стремится к бесконечности. В главе 5 мы привели некоторые примеры математических функций, когда  $f(x)$  стремится к конечному значению, тогда как величина  $x$  стремится к бесконечности. Рассмотрим функцию  $y = 1/x^2$ . По мере возрастания  $x$  на единицу  $y$  все уменьшается и уменьшается, приближаясь к нулю, но никогда не достигая его:

$$\begin{array}{cccccccc} x = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ y = & 1 & 1/4 & 1/9 & 1/16 & 1/25 & 1/36 & 1/49 & \dots \end{array}$$

Сказанное можно записать в другом виде аналогичном сумме ряда:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0.$$

Иначе предел  $y$  при  $x$ , стремящемся к бесконечности, равен нулю. Таким образом для всех значений  $0 < x < \infty$  можно вычислить величину  $y = 1/x^2$ . В этом случае говорят, что функция  $y = 1/x^2$  непрерывна на указанном промежутке.

Теперь обратимся к функции вида:

$$y = (x^2 - 1)/(x - 1).$$

Мы можем вычислить соответствующие значения  $y$  при целых значениях  $x$ , как мы это делали в предыдущем примере  $y = 1/x^2$ . Вновь, взяв последовательно значения переменной от  $x = 0$  до  $x = 7$ , получим следующие значения  $y$ :

$$x = 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7$$

$$y = 1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$$

Мы видим, что значению  $x = 1$  поставлено в соответствие значение  $y$ , равное нулю, что, как следует из дальнейшего, неверно. За исключением этой «неувязки» вся последовательность создает впечатление линейного отношения. Однако при более детальном рассмотрении становится очевидно, что такая линейная функция не совсем обычна. Ниже приведены значения  $y$  при  $x$  близком к 1:

$$x = 0,5 \ 0,8 \ 0,9 \ 0,95 \ 0,99 \ 0,999 \ 1 \ 1,001 \ 1,01 \ 1,05 \ 1,1 \ 1,2 \ 1,5$$

$$y = 1,5 \ 1,8 \ 1,9 \ 1,95 \ 1,99 \ 1,999 \ 2 \ 2,001 \ 2,01 \ 2,05 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,5$$

Ясно видно, что при стремлении  $x$  с обеих сторон к 1, значение  $y$  стремится к 2, но никогда не достигает его, поэтому мы говорим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = 2$$

или

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Функция опять имеет предел, но на этот раз она *разрывна*<sup>1</sup>. Если мы подставим в уравнение  $x = 1$ , то получим выражение  $y = 0/0$ , то есть неопределенность, и поэтому было бы неправильным задавать  $y$  равным нулю или любому другому числу. Когда мы переходим к дифференцированию и интегрированию — теме этой главы, очень важно иметь в виду, что функции должны быть определены при всех допустимых значениях  $x$ <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Функция называется непрерывной в точке  $x_0$ , если ее предел в этой точке совпадает с ее значением, то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , в противном случае функция

разрывна в точке  $x_0$ . Например, следующая функция  $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$  разрывна в точке  $x = 0$ . В случае, рассматриваемом автором, точка  $x = 1$  не входит в область определения. — Прим. ред.

<sup>2</sup> Если функция непрерывна во всех точках области определения, то она необязательно дифференцируема. — Прим. ред.

## 8.2 Первообразная функция, или неопределенный интеграл

Мы намеренно включили в название этого раздела термин «неопределенный интеграл», поскольку существуют и такие интегралы. В главе 5 довольно подробно были рассмотрены дифференцирование и производные. Теперь следует определить первообразную функцию, или неопределенный интеграл функции, как другую функцию, чья производная равна исходной функции. Это *основное правило интегрального исчисления*. Оно связывает дифференциальное исчисление с интегральным.

Мы уже дали определение тому, что представляет собой процесс интегрирования, то есть для чего его можно использовать и что он означает. На данном этапе мы ограничимся лишь упоминанием об интегралах, известных, как *определенные*, то есть интегралы функций, взятые в некоторых пределах. Весьма существенно, что интеграл функции дает нам выражение *площади фигуры*, расположенной под графиком функции и ограниченной с боков пределами изменения  $x$  и снизу осью  $x$  ( $y = 0$ ).

Вернемся к примеру из главы 5 — к функции, связывающей скорость инфильтрации в почве со временем (Philips, 1957—58). Чтобы избежать возможной путаницы, мы будем здесь использовать буквы  $x$  и  $y$ , а не  $t$  и  $i$ , как делалось в главе 5. Предположим, что в данном месте отмечается обычная связь вида:

$$y = 15 + 5x^{-1/2}. \quad (8.1)$$

Это уравнение позволяет нам вычислить скорость инфильтрации в любой момент времени (то есть при каждом  $x > 0$ ), так что в результате мы имеем:

$$\begin{array}{l} x = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,5 \quad 1,0 \quad 2,0 \quad 5,0 \text{ час} \\ y = 30,8 \quad 26,2 \quad 22,1 \quad 20,0 \quad 18,5 \quad 17,3 \text{ мм/час.} \end{array}$$

*Общее* количество воды ( $Q$ ), просочившейся в почву за некоторый промежуток времени, графически представляется площадью, расположенной под кривой между границами временного интервала на оси  $x$ . Размерность величины  $Q$  получится верной, поскольку количество воды (в мм осадков) будет равно мм/час·час = мм. Предположим теперь, что нам надо получить график общего количества воды, проникшей в грунт за период времени 0,1—0,5 часа. Конечно, мы могли бы, затратив много усилий, измерить площадь под графиком между этими двумя временными точками (рис. 8.1, заштриховано). Однако операция интегрирования для того и существует, чтобы облегчить выполнение этой задачи, однако на данном этапе, по-видимому, лучше будет проиллюстрировать эту операцию, обращаясь непосредственно к чертежу.

Площадь прямоугольника, ограниченного  $x = 0,1$ ;  $x = 0,5$ ;  $y = 0$  и  $y = 22,1$  (значение  $y$  при  $x = 0,5$ ), вычислить, конечно, лег-

ко, но здесь мы столкнулись с задачей определения площади криволинейной фигуры, называемой криволинейной трапецией. Приступая к решению этой задачи, мы можем рассматривать площадь прямоугольника как самое грубое приближение к площади под кривой между указанными пределами. Можно улучшить наше приближение, взяв сумму более мелких прямоугольников, чьи верхние

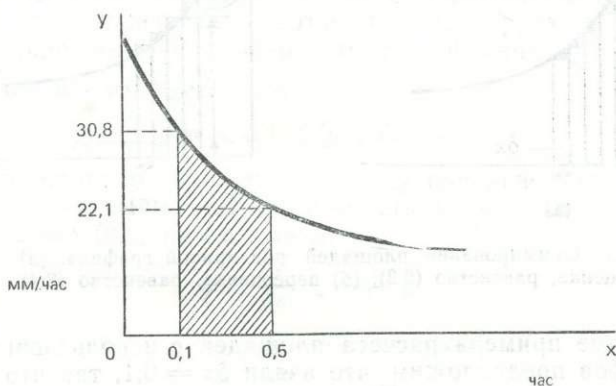


Рис. 8.1. Площадь под кривой  $y = 15 + 5x^{-\frac{1}{2}}$  между  $x = 0,1$  и  $x = 0,5$ .

границы обусловлены точками, в которых они соприкасаются с кривой. Между пределами допустимо начертить любое число таких прямоугольников (рис. 8.2, а), и чем их будет больше, тем ближе окажется наше приближение к истинному значению площади под кривой между указанными пределами. Но наше приближение будет все же недооценивать истинную площадь, за исключением предельного случая, когда количество прямоугольников стало бы бесконечно большим и они были бы бесконечно узкими. Другой путь вычисления площади заключается в вычерчивании прямоугольников таким образом, чтобы они давали переоценку площади, как это отражено на рис. 8.2, б. И опять, чем уже наши прямоугольники, тем ближе мы к точному значению площади. Оба этих приближения сходятся к пределу, который и является истинным значением площади, поскольку  $\delta x$  стремится к 0. Отсюда имеем:

для случая а

$$\sum_{0,1}^{0,5} Q = \sum_{0,1}^{0,5} y \delta x, \quad (8.3)$$

для случая б

$$\sum_{0,1}^{0,5} Q = \sum_{0,1}^{0,5} (y + \delta y) \delta x. \quad (8.4)$$

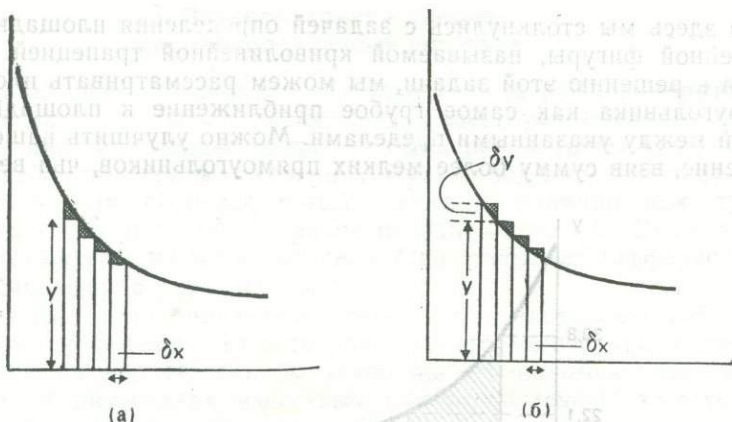


Рис. 8.2 Суммирование площадей под кривой графика: (а) недооценка, равенство (8.3); (б) переоценка, равенство (8.4).

В качестве примера расчета площадей с использованием этих двух способов предположим, что взяли  $\delta x = 0,1$ , так что в интервале между  $x = 0,1$  и  $x = 0,5$  помещается четыре прямоугольника. Тогда в случае а мы имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{0,1}^{0,5} y \delta x &= 0,1 [15 + 5(0,2^{-1/2})] + 0,1 [15 + 5(0,3^{-1/2})] + \\ &+ 0,1 [15 + 5(0,4^{-1/2})] + \\ &+ 0,1 [15 + 5(0,5^{-1/2})] = \\ &= 2,62 + 2,41 + 2,29 + 2,21 = 9,53 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Аналогично для случая б имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{0,1}^{0,5} (y + \delta y) \delta x &= 0,1 [15 + 5(0,1^{-1/2})] + 0,1 [15 + 5(0,2^{-1/2})] + \\ &+ 0,1 [15 + 5(0,3^{-1/2})] + 0,1 [15 + 5(0,4^{-1/2})] = \\ &= 3,08 + 2,62 + 2,41 + 2,29 = 10,40 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Мы совершенно произвольно выбрали очень большие значения  $\delta x$ , и поэтому наши оценки площади будут довольно грубыми, а расхождение между двумя оценками составит около одного миллиметра. Все, что мы знаем на данном этапе, — это то, что истинное значение площади лежит между этими двумя оценками.

Так как  $\delta x \rightarrow 0$ , то две наши оценки будут сходиться к истинному значению, и этим значением является *определенный интеграл*

функции  $y$  от  $x$  между  $x = 0,1$  и  $x = 0,5$ , то есть его можно записать в виде:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{0,1}^{0,5} y \delta x = \int_{0,1}^{0,5} y dx. \quad (8.4)$$

Этот определенный интеграл связан с первообразной функцией  $y = 15 + 5x^{-1/2}$ , производная которой равна функции исходной. В общем виде мы записываем интеграл функции  $y = f(x)$ , как  $\int f(x) dx$ , причем мы знаем, что:

$$y \delta x < \delta A < (y + \delta y) \delta x, \quad (8.5)$$

где  $A$  — это площадь под кривой между начальной точкой и точкой  $x$ , и  $A$  возрастает на  $\delta A$  при возрастании  $x$  на  $\delta x$ . Тогда, поделив неравенство (8.5) на  $\delta x$ , имеем:

$$y < \frac{\delta A}{\delta x} < y + \delta y$$

и, находя предел при  $\delta x \rightarrow 0$  и  $\delta y \rightarrow 0$ , получим:

$$\frac{dA}{dx} = y. \quad (8.6)$$

Таким образом, для получения точного значения определенного интеграла  $\int_{0,1}^{0,5} (15 + 5x^{-1/2})$  нам потребовались некоторые способы интегрирования функции  $y = 15 + 5x^{-1/2}$ . Этой задаче посвящены разделы 8.4—8.11.

### 8.3 Связь неопределенного и определенного интегралов

До сих пор мы рассматривали интегралы исключительно как некоторую меру, а именно площадь, заключенную под кривой в пределах изменения независимой переменной, и находили способы ее вычисления. Неопределенные интегралы не имеют таких заданных пределов. Например, если  $y = 5x^2 + 3x + 2$ , то  $dy/dx = 10x + 3$ , и тогда мы вправе записать:

$$\int (10x + 3) dx = 5x^2 + 3x + 2.$$

При более детальном рассмотрении видно, что записанный нами интеграл — это один из бесчисленного множества неопределенных интегралов этой функции и что при интегрировании с одинаковым успехом мог бы получиться результат и  $5x^2 + 3x + 1$ , и  $5x^2 + 3x + 2000$ . Постоянная величина (константа) неопределенного интеграла не может быть указана точно. Когда мы интегрируем

в заданных пределах, то совершенно ясно, что нет никакой необходимости прибавлять константу каждый раз, поскольку для общего результата интегрирования она не имеет значения, так как при вычислении постоянные сокращаются. Например, чтобы определить площадь под кривой, заданной уравнением  $y = 10x + 3$  в пределах от  $x = 5$  до  $x = 10$ , мы могли бы просто написать:

$$\begin{aligned} \int_5^{10} (10x + 3) dx &= [5x^2 + 3x + C]_5^{10} = \\ &= (500 + 30 + C) - (125 + 15 + C) = \\ &= 390. \end{aligned}$$

Обратите внимание на то, что сначала берется интеграл, который заключен в квадратные скобки, а затем подставляются пределы интегрирования. Зная интеграл, мы можем просто подставить значения верхнего и нижнего пределов изменения  $x$  и вычесть один результат из другого. В общем виде для неопределенных интегралов мы должны написать:

$$\int f(x) dx = g(x) + C. \quad (8.7)$$

#### 8.4 Стандартные интегралы

Теперь заметим, что поскольку мы в состоянии определить ряд производных стандартных функций (глава 5), то, следовательно, для каждой производной существует аналогичная первообразная функция, или иначе *стандартный неопределенный интеграл*. Итак, в силу того, что

$$\frac{d}{dx} (ax^n) = nax^{n-1},$$

можно написать:

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, \quad (8.8)$$

поскольку

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{ax^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{ax^{(n+1)-1}}{n+1} (n+1) = ax^n.$$

Опять же, так как

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x,$$

то

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

и т. д. Список некоторых стандартных интегралов приводится ниже. За другими стандартными интегралами читателю следует обратиться к справочнику Н. Dwight, 1957: *Tables of integrals and*

other mathematical data. London: Mcmillan<sup>1</sup>. Упомянутых здесь интегралов вполне достаточно для понимания дальнейшего текста этой главы:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (x \neq -1) \quad (8.9)$$

$$\int (1/x) dx = \ln x + C \quad (8.10)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (8.11)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (8.12)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (8.13)$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C \quad (8.14)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (8.15)$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad (8.16)$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad (8.17)$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \operatorname{th} x + C \quad (8.18)$$

$$\int 1/\sqrt{a^2 - x^2} dx = \arcsin(x/a) + C \quad (8.19)$$

$$\int 1/\sqrt{a^2 - x^2} dx = -\arccos(x/a) + C \quad (8.20)^2$$

$$\int 1/\sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(x/a) + C \quad (8.21)$$

$$\int 1/\sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arsh}(x/a) + C = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C \quad (8.22)$$

$$\int 1/\sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arch}|x/a| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \quad (8.23)$$

$$\int 1/(a^2 - x^2) dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arth}(x/a) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (8.24)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C^3 \quad (8.25)$$

<sup>1</sup> Есть русский перевод: Г. Б. Двайт, 1973: Таблицы интегралов и другие математические формулы, М., «Наука». — Прим. ред.

<sup>2</sup> См. примечание на стр. 201. — Прим. ред.

<sup>3</sup> В формулах (8.22)–(8.24) содержатся функции, обратные гиперболическим. — Прим. ред.

## Задачи 8.4

Найдите следующие интегралы:

$$8.4.1 \quad \int (5x^2 + 3x - 2) dx.$$

$$8.4.2 \quad 5 \int (3x^2 - 5 + 2x) dx.$$

$$8.4.3 \quad \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - \cos x) dx.$$

$$8.4.4 \quad \int_1^3 (3/x + 2x^2) dx.$$

$$8.4.5 \quad \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$8.4.6 \quad \int_{-5}^2 (3x^3 - 2x) dx.$$

$$8.4.7 \quad \int_1^5 \frac{dx}{x}.$$

$$8.4.8 \quad \int (\sec^2 x - 2 \cos x) dx.$$

## 8.5 Интегрирование более сложных функций

Во многих случаях, когда надо найти интегралы, вид подинтегральной функции таков, что проинтегрировать ее путем непосредственного применения стандартных интегралов не представляется возможным. Поэтому для получения более сложных интегралов привлекаются другие методы. Нередко интегралы можно получить способом, близким к методу проб и ошибок. Интуитивно можно предположить вид интеграла, а затем продифференцировать этот результат (то есть проделать более легкую операцию), с тем чтобы сравнить его с подинтегральной функцией. Однако для получения интегралов более сложных функций существуют три основных метода:

- 1) интегрирование по частям;
- 2) интегрирование с помощью подстановки;
- 3) интегрирование путем разложения на простые дроби.

Все эти методы применяются для нахождения неопределенных интегралов, равно как и в конечном счете определенных интегралов (тема, которая будет рассмотрена ниже). Все методы описаны в

четырёх нижеследующих разделах и сведены в виде таблицы в разделе 8.10.

Однако прежде следует рассмотреть частный случай нахождения интеграла функций вида:

$$\int f(Ax + B) dx.$$

К этим функциям применимо общее правило, так что

$$\int f(Ax + B) dx = \frac{1}{A} F(Ax + B) + C. \quad (8.26)$$

Это правило может очень пригодиться, когда требуется проинтегрировать такую функцию, как  $\sec^2(5x + 2)$ , поскольку мы просто можем написать:

$$\int \sec^2(5x + 2) dx = \frac{1}{5} \operatorname{tg}(5x + 2) + C. \quad (\text{из (8.14)})$$

Если проинтегрировать требуемую функцию этим методом не представляется возможным, то надо применить один из более сложных способов, речь о которых пойдет ниже. Выбор способа очень часто зависит от вида подинтегральной функции. По этой причине «свод» правил интегрирования, приведенный в разделе 8.10, следует запомнить, а разделы 8.5—8.9 изучить подробно, обязательно пробуя решать задачи. Если надо проинтегрировать функцию вида

$\int x \log_a x dx$ , представляющую произведение двух функций, то следует обратиться к методу, описываемому в разделе 8.6, а если подинтегральная функция имеет вид полинома, то лучше воспользоваться способом из раздела 8.9. В некоторых случаях при интегрировании приходится использовать несколько способов, причем результат будет одним и тем же, невзирая на способ!<sup>1</sup> По всей видимости, один из наиболее употребительных способов — это интегрирование по частям.

## 8.6 Интегрирование по частям

В главе 5 мы видели, что функции вида  $y = u(x)v(x)$  можно дифференцировать с помощью формулы (5.33):

$$\frac{dy}{dx} = u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx}.$$

Для наглядности запишем это соотношение в виде:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}. \quad (8.27)$$

<sup>1</sup> В действительности результат может получиться с точностью до постоянной, что не всегда бывает очевидным. Например, функции  $\operatorname{arcsin} x + c$  и  $-\operatorname{arccos} x + c$  представляют собой первообразную от одной и той же функции, поскольку  $\operatorname{arcsin} x - (-\operatorname{arccos} x) = \pi/2$ , то есть они отличаются на постоянную.—  
Прим. ред.

Интегрируя обе части выражения по  $x$ , получим:

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx + C,$$

так что отсюда

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx + C \quad (8.28)$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du + C. \quad (8.29)$$

Предположим, что нам надо найти следующий интеграл:

$$\int x \sin x dx.$$

Положим  $u = x$  и  $dv = \sin x dx$ , так что  $v = -\cos x$ . Тогда

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx \quad \text{и} \quad (\text{из (8.29)})$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C.$$

В этом случае операции достаточно просты. Предположим теперь, что нам надо проинтегрировать функцию

$$\int x^2 \sin x dx.$$

Если мы примем  $u = x^2$  и  $dv = \sin x$ , так что  $du = 2x dx$  и  $v = -\cos x$ , то

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int (-2x \cos x) dx,$$

и здесь мы встречаемся с другим интегралом, найти который сразу мы не можем. Поэтому нам опять придется проинтегрировать это выражение по  $x$  и вновь использовать способ интегрирование по частям. Подставляя  $s = 2x$  и  $dt = -\cos x dx$ , так что  $dx = 2dx$  и  $t = -\sin x$ , получим

$$\begin{aligned} \int -2x \cos x dx &= -2x \sin x - \int -2 \sin x dx = \\ &= -2(\cos x + x \sin x) + C. \end{aligned}$$

Тогда исходный интеграл будет следующим:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \\ &= \underline{\underline{2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C.}} \end{aligned}$$

Заметим, что если бы мы приняли  $s = -\cos x$  и  $dt = 2x dx$ , так что  $dx = \sin x dx$  и  $t = x^2$ , то тогда бы мы имели:

$$\int -2x \cos x dx = -x^2 \cos x - \int x^2 \sin x dx$$

и для исходного интеграла

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \sin x dx$$

или

$$\int x^2 \sin x dx = \int x^2 \sin x dx!!$$

Теперь ясно, что, прежде чем применять интегрирование по частям, мы должны подумать, какую часть функции представить как  $u$  и какую как  $dv$ . Наилучший путь усовершенствовать технику владения этим способом — это самостоятельно найти несколько интегралов, используя указанный способ. Но для начала убедитесь в справедливости следующих равенств:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(\sin x - x \cos x) + C$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \left( \ln x - \frac{1}{3} \right) + C$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + (1 - x^2)^{1/2} + C.$$

Теперь попробуйте свои силы при решении задач.

### Задачи 8.6

Проинтегрируйте:

8.6.1  $\int 5x \ln x dx.$

8.6.2  $\int x^3 \sin x dx.$

8.6.3  $\int \ln x dx.$

8.6.4  $\int (\ln x)^2 dx.$

8.6.5  $\int 3x^2(1 - \ln x) dx.$

### 8.7 Интегрирование с помощью подстановки

Другой важный способ интегрирования для случая, когда мы не можем непосредственно использовать стандартные интегралы, — это интегрирование подстановкой. Здесь мы, как и при интегриро-

вании по частям, пользуемся тем свойством, что:

$$dx = \frac{dx}{du} du. \quad (8.30)$$

Поэтому, если заменить на  $u$  часть подинтегрального выражения, то мы найдем  $du/dx$ , а затем и  $dx/du$ . Чтобы проиллюстрировать описываемый способ в действии, получим с его помощью несколько интегралов. Прежде всего попробуем найти интеграл

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Пусть  $u = \sqrt{1-x}$ . Производную  $u$  можно найти, как было указано в разделе 6.7, с помощью подстановки. Положив  $t = 1-x$ , имеем

$$\frac{dt}{dx} = -1.$$

Мы также имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} t^{-1/2},$$

так что

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2} (1-x)^{-1/2}$$

$$\therefore \frac{dx}{du} = -2(1-x)^{1/2},$$

и тогда

$$dx = -2(1-x)^{1/2} du.$$

Подставляя это выражение для  $dx$ , получим:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{x}{(1-x)^{1/2}} [-2(1-x)^{1/2}] du$$

и

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} = \int -2x du.$$

Теперь, если  $u = (1-x)^{1/2}$ ,  $u^2 = (1-x)$ , то, следовательно,  $x = 1 - u^2$ . Подставив это значение в интеграл, имеем:

$$\int -2(1-u^2) du = -2u + \frac{1}{3} u^3 + C.$$

Обратно подставляя  $x$  вместо  $u$ , получим:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = -2(1-x)^{1/2} + \frac{1}{3} (1-x)^{3/2} + C =$$

$$= -\frac{2}{3} (1-x)^{1/2} (x+2) + C.$$

В качестве другого примера возьмем интеграл

$$\int xe^{x^2} dx.$$

Пусть  $u = e^{x^2}$  и  $t = x^2$ , так что  $u = e^t$ :

$$\frac{du}{dt} = e^t \quad \text{и} \quad \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = 2xe^{x^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{dx}{du} = 1/2xe^{x^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int xe^{x^2} dx &= \int xe^{x^2} (1/2xe^{x^2}) du = \\ &= \int \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} u + C \end{aligned}$$

и

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

И наконец, найдем интеграл:

$$\int \frac{\log_a x}{x} dx.$$

Пусть  $u = \log_a x$ , так что

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\log_a x}{x} dx &= \int \frac{\log_a x}{x} x \ln a du = \\ &= \ln a \int \log_a x du. \end{aligned}$$

Теперь, поскольку  $u = \log_a x$ , то  $x = a^u$ , а так как  $\log_a a^u = u$ , то мы можем написать

$$\ln a \int u du = \ln a \int \log_a x du = \frac{1}{2} \ln a u^2 + C$$

и

$$\int \frac{\log_a x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln a (\log_a x)^2 + C.$$

Метод подстановки обычно используется там, где одну часть подинтегрального выражения можно выразить через производную другой, как это и было сделано в последнем примере. Так что, если

требуется найти  $\int f_1(x) f_2(x) dx$ , где  $f_2(x) = f_1'(x)$ , то надо положить  $u = f_1(x)$ , а затем найти интеграл

$$\begin{aligned} \int f_1(x) f_2(x) dx &= \int f_1(x) f_2(x) \frac{dx}{du} du = \\ &= \int f_1(x) f_2(x) \frac{1}{f_1'(x)} du = \\ &= \int f_1(x) du, \end{aligned}$$

подставляя  $u$  вместо  $f_1(x)$ .

И вновь, как и в предыдущем разделе, для того чтобы лучше овладеть указанным методом, следует разобрать некоторые примеры. Читателю предлагается, используя метод подстановки, убедиться в том, что помещенные ниже четыре интеграла найдены верно.

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^4} = \frac{-x^2 + x - \frac{1}{3}}{(x-1)^3} + C$$

$$\int \frac{1}{x \log_a x} dx = \ln^2 a \log_a (\log_a x) + C$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + C.$$

#### Задачи 8.7

Проинтегрируйте, используя метод подстановки.

$$8.7.1 \quad \int 5 \sin x \cos x dx.$$

$$8.7.2 \quad \int (1+x^2)^{-1} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$8.7.3 \quad \int (1-x)^{1/2} x dx.$$

$$8.7.4 \quad \int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx.$$

$$8.7.5 \quad \int x^2 e^{-2x^3} dx.$$

### 8.8 Интегрирование тригонометрических функций

Если в подинтегральном выражении содержатся тригонометрические функции, то при интегрировании следует воспользоваться другими по сравнению с описанными выше подстановками. В предыдущем разделе уже было разобрано несколько подобных примеров,

хотя был использован иной способ. В главе 2 мы привели ряд формул ((2.8) — (2.20)), выражающих тригонометрические функции двойных углов ( $\sin 2x$ ,  $\cos 2x$  и т. д.) через функции и их квадраты. Эти формулы в соответствующих случаях можно использовать при интегрировании. Затем можно интегрировать по частям, или с помощью подстановки, или каким-то другим способом. Например, рассмотрим интеграл

$$\int \sin^2 x \, dx.$$

Мы знаем, что из формулы (2.20)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

а из (2.8)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

и следовательно:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Подставляя это равенство в исходное подинтегральное выражение, получим:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, читатель уже знает, что

$$\int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x \quad (\text{из упражнения в разделе 8.7}).$$

Мы можем пользоваться общими выражениями для интегрирования любых степеней тригонометрических функций. Для любого целого положительного  $n$  справедливы следующие соотношения:

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \quad (8.31)$$

и

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx. \quad (8.32)$$

Эти формулы называются *формулами понижения степени*, и их следует использовать столько раз, сколько это необходимо для получения подинтегрального выражения, интегрируемого уже непосредственно, то есть имеющего вид  $\sin x$  или  $\cos x$ . В качестве упражне-

ния на запоминание этих формул предлагаем читателю решить следующие задачи:

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{5}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + C$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + C$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x - \frac{2}{3} \sin x + C.$$

### 8.9 Интегрирование дробно-рациональных функций

Под дробно-рациональной функцией понимается отношение двух полиномов от  $x$ . Конечно, в некоторых случаях можно провести интегрирование другими способами, но очень часто для кратчайшего решения следует воспользоваться методом интегрирования, связанным с разложением на простые дроби. Этот метод особенно удобен тогда, когда полиномы можно представить в подходящем для нас виде. При этом мы сводим дробно-рациональную функцию к комбинации функций, интегрируемых более легко, часто непосредственно или с использованием правила, данного в соотношении (8.26). С помощью этого соотношения дробно-рациональная функция вида  $k/(Ax + B)$  также легко интегрируется.

Необходимое условие применения данного способа заключается в том, что степень (то есть максимальный показатель степени  $x$ ) числителя всегда должна быть меньше степени знаменателя, поэтому, например, выражение

$$\frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 1}$$

следует привести к более удобному виду, выделяя член  $(x^2 - 1)$  в числителе так, чтобы

$$\frac{x(x^2 - 1) + 3x - 1}{x^2 - 1} = x + \frac{3x - 1}{x^2 - 1}.$$

Теперь можно найти интегралы рациональных функций

$$\int x \, dx + \frac{3x - 1}{x^2 - 1} \, dx.$$

Первый из этих интегралов находится очень просто, а подинтегральное выражение второго есть дробно-рациональная функция. Разложив на множители знаменатель  $(x^2 - 1)$ , получим  $(x + 1)(x - 1)$ , так что

$$\frac{3x - 1}{(x^2 - 1)} = \frac{3x - 1}{(x + 1)(x - 1)}. \quad (8.33)$$

Это выражение можно представить в виде:

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

Умножая полученное равенство на  $(x+1)(x-1)$ , получим:

$$A(x-1) + B(x+1) = 3x-1, \quad (8.34)$$

и, поскольку корнями знаменателя в уравнении (8.33) будут  $+1$  и  $-1$ , мы можем, подставив эти значения в уравнение (8.34), иметь, что  $A = 2$  и  $B = 1$ , поэтому

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx,$$

а используя уравнение (8.26), получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2-1} dx &= 2 \ln(x-1) + \ln(x+1) = \\ &= \underline{\ln[(x-1)^2(x+1)]} + C. \end{aligned}$$

В результате весь интеграл будет иметь вид:

$$\int \frac{x^3+2x-1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln[(x-1)^2(x+1)] + C.$$

Если знаменатель нельзя разложить на множители, с тем чтобы сразу найти корни, то мы должны применить метод разложения на простые дроби, причем в разложение будет входить еще один член  $C$  (не путать с константой  $C$ , получающейся в результате интегрирования). Допустим, нам надо проинтегрировать дробно-рациональную функцию вида

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx,$$

где  $(x^2+1)$  не имеет действительных корней (решение при помощи формулы (5.32) убедит нас в этом, когда мы не сможем извлечь квадратный корень из отрицательной величины  $b^2 - 4ac$ ). Тогда мы представим

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1} dx.$$

Мы, следовательно, утверждаем, что  $(Bx+C)x + A(x^2+1) = 1$ . Одним из корней будет выражение  $x=0$ , и, подставляя его в равенство, имеем  $A=1$ . Коэффициенты при  $x^2$  и  $x$  в каждой части уравнения должны быть равны, так что, поскольку

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 1,$$

то  $A+B=0$ , и, следовательно,  $B=-1$  и  $C=0$ . Таким образом, нам предстоит найти интегралы

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx.$$

Делая во втором интеграле подстановку  $u = x^2 + 1$ , имеем:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2x}.$$

Итак, нам надо проинтегрировать выражение

$$\int x \frac{1}{x^2 + 1} \frac{1}{2x} du.$$

Поскольку  $x = (u - 1)^{1/2}$ , то

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{2x(x^2 + 1)} &= \int (u - 1)^{1/2} \frac{1}{u} \frac{1}{2(u - 1)^{1/2}} du = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \\ &= \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, весь интеграл будет:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Ниже мы вновь приводим несколько примеров, которые советуем читателю проверить, прежде чем перейти к решению задач.

$$\int \frac{x dx}{(x + 1)(x + 2)^2} = \ln(x + 2) - \ln(x + 1) - 2(x + 2)^{-1}$$

$$\int \frac{x dx}{(1 + x)^2} = \ln(x + 1) + (x + 1)^{-1}$$

$$\int \frac{(2x - 3) dx}{(x - 1)(x - 7)} = \frac{11}{6} \ln(x - 7) + \frac{1}{6} \ln(x - 1).$$

### Задачи 8.9

8.9.1  $\int \frac{(x + 2) dx}{(x + 1)(x - 3)}.$

8.9.2  $\int \frac{dx}{(x - 3)(x - 2)}.$

8.9.3  $\int \frac{x dx}{x^4 - 1}.$

8.9.4  $\int \frac{x^2 + 5x + 1}{x(x + 1)^2} dx.$

8.9.5  $\int \frac{x + 1}{(1 - x^2)^{1/2}} dx.$

### 8.10 Способы интегрирования: резюме

Очень часто, как подчеркивалось в конце раздела 8.5, интегрирование какого-либо выражения можно выполнить с помощью любого из описанных здесь методов. При этом для автора весьма

## Сводка методов интегрирования

Вид интеграла	Характерная черта	Метод	Раздел	Примечания
Стандартный	См. раздел 8.4	Обратиться к соотношениям (8.9) — (8.25)	8.4	Полный список см. Dwight, 1957
Тригонометрический 1	$\int \cos 2x dx$ $\int \sin 2x dx$ и т. д. $\int \sin^n x dx$ и аналогичные, $n$ — целое	Применить соотношения (2.8 — 2.20)	2.9	При необходимости следует повторить процедуру
Тригонометрический 2		Применить формулу понижения степени	8.8	
$\int f(Ax + B) dx$		$\int f(Ax + B) dx = \frac{1}{A} F(Ax + B)$	8.5	
Полиномы 1	Содержат комбинации членов вида $x^n$ , $x^{n-1}$ , $ax^n$ и т. д.	Применить стандартное соотношение (8.9)	8.4	
2	Например, $\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx$	Разложить на простые дроби	8.9	
Произведение двух или более членов, содержащих $x$	$\int f_1(x) f_2(x) dx$ и $f_1(x) = f_2'(x)$	Подстановка: положите $u = f_2(x)$ , затем найдите $dx/du$	8.7	При необходимости следует повторить процедуру
Произведение двух или более членов, содержащих $x$	$\int f_1(x) f_2(x) dx$	По частям: подстановка $u = f_1(x)$ , $dv = f_2(x)$ $\int u dv = uv - \int v du + C$	8.6	При необходимости следует повторить процедуру

важно привести побольше примеров, а для читателя не менее важно — рассмотреть как можно большее их число. Поэтому необходимость решения задач, помещаемых в конце разделов, невозможно переоценить. Основное, что читатель приобретает при решении задач по интегрированию, — это опыт. Спустя некоторое время интуиция выбирает *самый быстрый* способ интегрирования становится почти второй натурой. В равной мере часто встречающиеся, но нестандартные интегралы скоро наведут читателя на счастливую мысль попытаться прежде «угадать» вид интеграла, а затем проверить его дифференцированием, что можно сделать относительно быстро. На практике подавляющему большинству географов чрезвычайно редко придется интегрировать слишком сложные выражения. Поэтому знание географами большинства наиболее известных методов интегрирования функций следует рассматривать как некий идеал. Мы излагаем здесь лишь основные способы интегрирования. Читателю следует регулярно заглядывать в табл. 8.1, для того чтобы выбрать способ, который можно было бы применить непосредственно. Но заметим, что таблица эта далеко не исчерпывает всех возможностей, и в некоторых случаях читателю придется идти методом проб и ошибок.

### 8.11 Численное интегрирование

Теперь мы можем дать «истинный» ответ на простую задачу, которую мы рассматривали в начале главы. Мы попытались вычислить общую глубину проникновения воды в почву при условии, что скорость инфильтрации задана функцией  $y = 15 + 5x^{-1/2}$ , где  $y$  — скорость инфильтрации в мм/час, а  $x$  — время в часах. В разделе 8.2 мы получили приближенные значения, равные 9,53 и 10,40 мм, за период времени от  $x = 0,1$  до  $x = 0,5$ . Используя опыт, полученный в предыдущих разделах, мы можем уверенно вычислить определенный интеграл:

$$\int_{0,1}^{0,5} (15 + 5x^{-1/2}) dx = [15x + 10x^{-1/2}]_{0,1}^{0,5} = \\ = (7,50 + 7,07) - (1,50 + 3,16) = 9,91 \text{ мм.}$$

Однако для численного интегрирования такого сорта существуют два «коротких пути», используемых при вычислении определенных интегралов сложных функций. Оба они, и это необходимо подчеркнуть, являются приближенными и, как мы увидим, лишь немного точнее исходных геометрических способов. Первый из этих «путей» — *метод трапеций*.

### 8.12 Метод трапеций

Главная причина ошибки наших предыдущих геометрических приближений к площади под графиком функции состоит во *включении* малых площадей, находящихся *над* кривой (см. рис. 8.2, б),

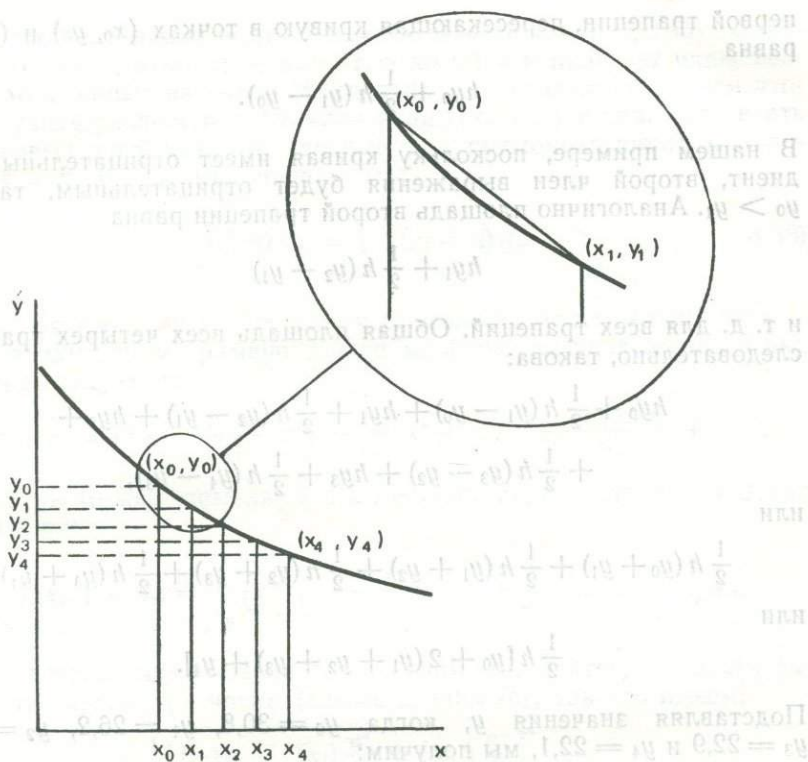


Рис. 8.3. Интегрирование по методам трапеций и Симпсона.

и исключении подобных площадей под кривой (рис. 8.2, а). В обоих случаях форма фигур, ограничивающих эти площади, очень близка к треугольнику. Чем меньше величина  $\delta x$ , тем ближе искривленный участок каждой фигуры приближается к хорде между двумя точками на кривой. Метод трапеций учитывает все малые площади и упрощает их вычисление, предполагая, что они — треугольники. В результате прямоугольники будут иметь форму трапеций. Для того чтобы иметь возможность сравнить результаты, мы рассмотрим площадь под той же самой кривой и в тех же пределах. Вычислим площадь, используя правило трапеций. На рис. 8.3 показана только небольшая часть кривой  $y = 15 + 5x^{-1/2}$ , изображенной на рис. 8.2. Теперь точка, в которой каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекает кривую, имеет координаты  $(x_0, y_0)$   $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$  и т. д. В нашем примере имеется пять таких координат, определяющих четыре трапеции. Расстояние между соседними координатами вдоль оси  $x$  одинаково, и мы назовем его  $h$ . Площадь

первой трапеции, пересекающая кривую в точках  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ , равна

$$hy_0 + \frac{1}{2} h (y_1 - y_0).$$

В нашем примере, поскольку кривая имеет отрицательный градиент, второй член выражения будет отрицательным, так как  $y_0 > y_1$ . Аналогично площадь второй трапеции равна

$$hy_1 + \frac{1}{2} h (y_2 - y_1)$$

и т. д. для всех трапеций. Общая площадь всех четырех трапеций, следовательно, такова:

$$hy_0 + \frac{1}{2} h (y_1 - y_0) + hy_1 + \frac{1}{2} h (y_2 - y_1) + hy_2 + \frac{1}{2} h (y_3 - y_2) + hy_3 + \frac{1}{2} h (y_4 - y_3),$$

или

$$\frac{1}{2} h (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} h (y_1 + y_2) + \frac{1}{2} h (y_2 + y_3) + \frac{1}{2} h (y_3 + y_4),$$

или

$$\frac{1}{2} h [y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4].$$

Подставляя значения  $y$ , когда  $y_0 = 30,8$ ,  $y_1 = 26,2$ ,  $y_2 = 24,1$ ,  $y_3 = 22,9$  и  $y_4 = 22,1$ , мы получим:

$$\frac{1}{2} \times 0,1 [30,8 + 2(26,2 + 24,1 + 22,9) + 22,1],$$

и, следовательно, площадь под кривой между нашими заданными пределами, полученная методом трапеций, будет равна 9,97 мм. Общая формула для метода трапеций имеет вид:

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2} h [y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n]. \quad (8.35)$$

### 8.13 Метод Симпсона

Более точное численное значение интеграла, не прибегая при этом к аналитическим способам интегрирования, дает метод Симпсона. Метод легко программируется для компьютера и в настоящее время используется во многих «пакетах» программ для численного анализа. Метод Симпсона представляет собой более сложную и более точную разновидность метода трапеций. В то время как метод трапеций для вычисления площади оперирует с отдельными прямоугольниками, метод Симпсона использует пары прямо-

угольников. Он применяется в случае *четного* числа прямоугольников (например, от  $x_0$  до  $x_5$  или от  $x_1$  до  $x_6$ ) и использует ряды Тейлора, выведенные из рядов Маклорена (см. раздел 6.6), с тем чтобы получить разложение функции вида  $f(x_n + a)$  в ряд. Если взять три первых  $x$ -координаты (первые два прямоугольника) и положить  $x = x_1 + a$ , то можно записать:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{-h}^h f(x_1 + a) da \quad (8.36)$$

между точками  $x_0$  и  $x_2$ , поскольку расстояние между ними равно  $h$ , как в предыдущем примере. Далее, из формулы разложения в ряд Тейлора следует, что:

$$f(a + x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(r)}(a)}{r!} x^r + \dots,$$

и тогда мы можем, поменяв  $x$  и  $a$  местами, переписать соотношение (8.36) в виде:

$$\int_{-h}^h f(x_1 + a) da = \int_{-h}^h \left( f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!} a + \frac{f''(x_1)}{2!} a^2 + \dots \right) da.$$

Для получения приближенного значения этого интеграла достаточно взять первые три члена (самые значимые), так что имеем:

$$\begin{aligned} & \left[ f(x_1) a + f(x_1) \frac{a^2}{2} + f(x_1) \frac{a^3}{6} \right]_{-h}^h = \\ & = 2hf(x_1) + \frac{1}{3} h^3 f''(x_1) \\ & = 2hy_1 + \frac{1}{3} h^3 f''(x_1). \end{aligned}$$

Вторая производная в последнем члене представляет собой *скорость изменения наклона касательной к кривой в точке  $x_1$* , которую мы приближенно можем считать равной скорости изменения наклона *хорды*, проведенной между двумя смежными точками (когда  $dx$  стремится к  $dx$ ), поэтому имеем:

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} (y_2 - 2y_1 + y_0),$$

и, таким образом, интеграл принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h f(x_1 + a) da &= 2hy_1 + \frac{1}{3} h (y_2 - 2y_1 + y_0) = \\ &= \frac{1}{3} h (y_2 + 4y_1 + y_0). \end{aligned}$$

Мы можем провести такую операцию для каждой пары прямоугольников, беря их по порядку, и в итоге получим общую формулу площади для случая метода Симпсона:

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{3} h [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots) + y_n]. \quad (8.37)$$

Иначе говоря, мы должны взять сумму *первой* и *последней* ординат плюс *учетверенную* сумму *нечетных* ординат плюс *удвоенную* сумму *четных* ординат, причем обязательно должно соблюдаться условие о четном числе прямоугольников. В нашей частной задаче имеется как раз четное число прямоугольников, нечетное число ординат, поэтому, решая ее методом Симпсона, получим:

$$\int_{0,1}^{0,5} (15 + 5x^{-1/2}) dx = \frac{1}{3} \times 0,1 [30,8 + 4(26,2 + 22,9) + 2(24,1) + 22,1] = 9,92 \text{ мм.}$$

Этот результат только на 0,01 мм больше результата, полученного аналитическим путем, но вполне очевидно, что применение этого приближенного метода для столь простого интеграла явно нерационально.

### 8.14 Применение интегрирования

Интегральное исчисление находит широкое применение при решении различных научно-технических задач, связанных с предметом географии. Использование интегралов в физической географии более ограничено, но в ряде случаев их можно встретить в литературе. Эти интегралы слишком разнообразны, чтобы можно было сказать о них здесь более определенно. Читатель уже в достаточной мере осведомлен о значении интегралов, и поэтому мы надеемся, что он будет в состоянии истолковать их сам. Однако существуют две очень обширные области, где интегрирование является весьма важным инструментом исследования. В первой из них применение интегралов расширяется от процедуры вычисления площадей до нахождения объемов, центров тяжести и моментов инерции, а вторая обеспечивает математическую основу *гармонического анализа*.

### 8.15 Объемы тел вращения

Данную нам простую функцию, связывающую переменные  $x$  и  $y$  в двумерном пространстве, мы можем вращать относительно любой оси и определить затем *объем* получившегося *тела вращения*. Возьмем для начала очень простой пример. Предположим, нам надо получить конус, вершина которого находится в начале

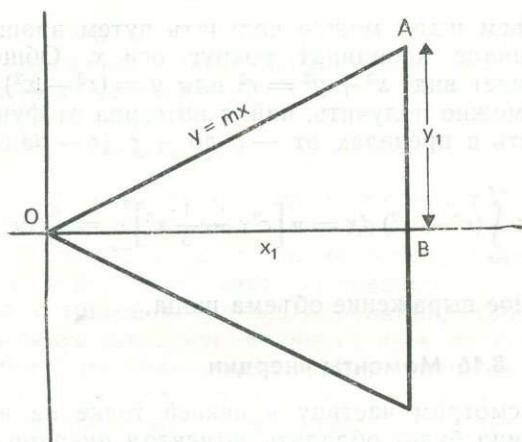


Рис. 8.4 Определение объема конуса.

координат нашей системы. Мы можем взять уравнение прямой в общем виде  $y = mx + k$  и вращать его относительно оси  $x$ . В результате для положительных значений  $x$  при  $k = 0$  мы получим конус. Площадь треугольника  $OAB$  на рис. 8.4 будет определяться интегралом

$$\int_0^{x_1} mx \, dx,$$

который дает известную формулу площади треугольника, поскольку его величина равна

$$\left[ \frac{1}{2} mx^2 \right]_0^{x_1} = \frac{1}{2} \frac{y_1}{x_1} x_1^2 = \frac{1}{2} y_1 x_1.$$

Любой малый элемент конуса, по мере вращения треугольника, будет иметь радиус  $mx_n$ , и поэтому площадь основания любого малого элемента вращения должна равняться  $\pi(mx_n)^2$ , и, следовательно, объем всего конуса будет равен

$$\pi \int_0^{x_1} (mx)^2 \, dx = \frac{1}{3} \pi \frac{y_1^2}{x_1^2} x_1^3 = \frac{1}{3} \pi y_1^2 x_1,$$

то есть произведению площади основания конуса на треть его высоты.

Таким способом можно вычислить объем тела вращения, если только известна функция, определяющая форму плоскостной фигуры. Общее выражение имеет вид:

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx. \quad (8.38)$$

Например, объем шара можно получить путем вращения круга с центром в начале координат вокруг оси  $x$ . Общее уравнение окружности имеет вид:  $x^2 + y^2 = r^2$  или  $y = (r^2 - x^2)^{1/2}$ . Объем половины шара можно получить, найдя интеграл от функции, задающей окружность в пределах от  $-r$  до  $+r$  ( $r$  — радиус), так что имеем:

$$\pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{+r} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

то есть известное выражение объема шара.

### 8.16 Моменты инерции

Теперь рассмотрим частицу в некоей точке на вращающемся теле. Эта частица будет обладать *моментом инерции* относительно ее центра вращения. Момент инерции выражается через единицы массы частицы ( $m$ ) и квадрат расстояния от центра вращения (Davidson, 1978). Если  $I$  — момент инерции, а  $r$  — расстояние от центра вращения, то

$$I = mr^2.$$

Предположим теперь, что нам надо рассчитать *общий* момент инерции однородного стержня, который вращается относительно оси  $y$ , проходящей через его центр. Ясно, что общий момент инерции стержня получается при интегрировании по его длине всех бесконечно малых элементов. Если плотность стержня равна  $D$  (масса на единицу длины), тогда каждый элемент стержня имеет массу  $Ddx$ , и если длина стержня равна  $2l$  ( $x$  меняется от  $-l$  до  $+l$ ), то общий момент инерции ( $I_t$ ) будет

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{-l}^{+l} Dx^2 dx = \left[ \frac{1}{3} Dx^3 \right]_{-l}^{+l} = \\ &= \frac{1}{3} Dl^3 + \frac{1}{3} Dl^3 = \\ &= \frac{2}{3} Dl^3. \end{aligned}$$

Теперь общая масса стержня будет  $2Dl$ , и тогда общий момент инерции для стержня, вращающегося относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, равен

$$I_t = \frac{1}{3} ml^3.$$

Этот расчет приведен только для того, чтобы продемонстрировать очень простой случай применения интегрирования для нахождения момента инерции тела. Аналогичным образом мы могли бы найти

моменты для целого ряда других тел, но их определение уже выходит за рамки книги. Если даже подобные задачи и возникнут, мы предоставляем их решение читателю.

### 8.17 Ряды Фурье

Разложение в ряд Фурье представляет собой одно из наиболее важных применений интегрального исчисления, особенно для случая, когда мы рассматриваем периодические функции (например, временные ряды и некоторые типы поверхностей тренда). Как мы видели в главе 4, тригонометрические функции, особенно те, которые включают синус и косинус, являются периодическими, так как их значения при изменении  $x$  на  $2\pi$  радиан повторяются каждый раз. Конечно, эти функции также и непрерывны в соответствии с определением, данным в начале этой главы. В то же время, в главе 6 мы видели, что тригонометрические функции можно представить в виде степенного ряда как ряд Маклорена. Ряды Фурье соединяют методы интегрального исчисления с разложением в ряды применительно к *разрывным функциям*.

Поскольку мы имеем дело с тригонометрическими функциями, чьи ординаты повторяются каждые  $2\pi$  радиан, мы вправе ограничиться рассмотрением любого промежутка, содержащего  $2\pi$  радиан. Поэтому для удобства будем считать, что  $x$  меняется от  $-\pi$  до  $\pi$  радиан, то есть  $-\pi < x < +\pi$ . Ряд Фурье содержит тригонометрические функции  $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin nx, \dots$  и  $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos nx, \dots$ , а также постоянный член. Все эти функции, независимо от кратности угла, будут иметь *период* (длину волны)  $2\pi$ . Например,  $\sin(2\pi + 3x) = \sin(4\pi + 3x)$ . Это должно быть ясным из главы 2. Общая формула ряда Фурье имеет вид:

$$f(x) = a_0/2 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_r \cos rx + \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots + b_r \sin rx. \quad (8.39)$$

Ее можно записать короче:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx), \quad (8.40)$$

где коэффициенты Фурье ( $a_0, a_r$  и  $b_r$ ) определяются из формул:

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (8.41)$$

$$a_r = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos rx dx \quad (r - \text{целое}) \quad (8.42)$$

$$b_r = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin rx dx \quad (r - \text{целое}). \quad (8.43)$$

В большинстве случаев ряды Фурье применяются для разложения довольно простых функций. Например, мы можем представить с помощью ряда Фурье периодическое повторение функции  $y = x$ . Последовательно складывая члены все более высокого порядка по  $r$ , мы в конце концов придем к разрывной функции, аппроксимирующей прямую  $y = x$  между  $x = -\pi$  и  $x = +\pi$  при  $r$ , стремящемся к бесконечности. Рассмотрим этот частный пример для того, чтобы пояснить суть дела. Чтобы найти значения  $a_0$ ,  $a_r$  и  $b_r$ , нам следует проинтегрировать соответствующую функцию, подставив ее в формулы (8.41), (8.42) и (8.43). Это довольно длительный процесс, и ввиду недостатка места мы не станем описывать его подробно. Интегрируя по частям, мы получим

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_r = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos rx dx = 0$$

$$b_r = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin rx dx = -\frac{2}{r} \cos \pi r.$$

Поскольку  $-\cos \pi r = (-1)^{r+1}$ , то  $b_r = \frac{2(-1)^{r+1}}{r}$ , и тогда (согласно уравнению (8.40)) наше разложение в ряд Фурье примет вид:

$$f(x) = 2 \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x + \sin 5x - \frac{1}{3} \sin 6x + \dots \quad (8.44)$$

Чем большее количество членов мы будем брать, тем больше мы будем приближаться к  $y = x$ . Заметим, что при  $r = \infty$  функция разрывна. На рис. 8.5 изображены графики кривых в случае 2, 10 и 15 членов разложения функции  $y = x$ .

В теории физической географии так называемый анализ Фурье составляет важную часть анализа временных рядов и является также краеугольным камнем некоторых аспектов анализа поверхностей тренда. Первое из применений анализа Фурье мы проследим ниже, тем же, кто желает найти анализ поверхностей тренда в географической литературе, сообщим, что Дж. Райнер (Rayner, 1972) применял ряды Фурье при изучении трендов земной поверхности.

Разложение в ряд Фурье, в общем виде данное уравнением (8.40), можно представить в других, отличных от  $-\pi$  и  $\pi$  преде-

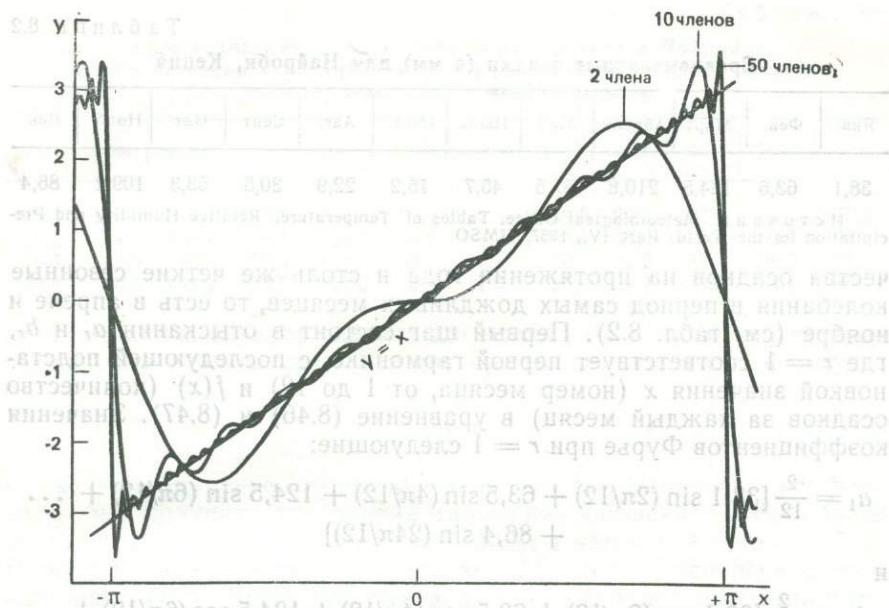


Рис. 8.5. Аппроксимация функции  $y = x$  с помощью гармонических функций в соответствии с уравнением (8.40).

лах, сохранив в то же время периодичность ряда. Общий вид рядов Фурье, используемый в гармоническом анализе, следующий:

$$f(x) = \bar{x} + \sum_{r=1}^{r=N/2} [a_r \sin(2\pi r x/P) + b_r \cos(2\pi r x/P)], \quad (8.45)$$

где  $P$  — основной период данных (см., в частности, Рапофски, Вриег, 1958). Если, например, мы будем рассматривать годовой цикл месячных осадков, то в этом случае основной период будет равен 12. Так как  $N$  обозначает количество данных в совокупности, то в нашем случае  $N$  также равно 12. Заметим, однако, что когда мы рассматриваем среднемесячные осадки, то  $N$  остается равным 12, но в этом случае  $P = 365$  дней. Выбор периода для разложения, очевидно, обуславливает окончательный вид результатов анализа. Соответствующими выражениями для  $a_r$  и  $b_r$  будут:

$$a_r = \frac{2}{N} [f(x) \sin(2\pi r x/P)]_{x=1}^{x=N} \quad (8.46)$$

$$b_r = \frac{2}{N} [f(x) \cos(2\pi r x/P)]_{x=1}^{x=N} \quad (8.47)$$

Предпримем попытку применить представление функции в виде ряда Фурье к анализу годовых изменений ежемесячных осадков в Найроби, Кения. Существуют резко выраженные колебания коли-

Среднемесячные осадки (в мм) для Найроби, Кения

Янв.	Фев.	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек
38,1	63,5	124,5	210,8	157,5	45,7	15,2	22,9	30,5	53,3	109,2	86,4

Источник: Meteorological Office, Tables of Temperature, Relative Humidity and Precipitation for the World: Part IV., 1967. HMSO.

чества осадков на протяжении года и столь же четкие сезонные колебания в период самых дождливых месяцев, то есть в апреле и ноябре (см. табл. 8.2). Первый шаг состоит в отыскании  $a_r$  и  $b_r$ , где  $r = 1$  соответствует первой гармонике, с последующей подстановкой значения  $x$  (номер месяца, от 1 до 12) и  $f(x)$  (количество осадков за каждый месяц) в уравнение (8.46) и (8.47). Значения коэффициентов Фурье при  $r = 1$  следующие:

$$a_1 = \frac{2}{12} [38,1 \sin(2\pi/12) + 63,5 \sin(4\pi/12) + 124,5 \sin(6\pi/12) + \dots + 86,4 \sin(24\pi/12)]$$

и

$$b_1 = \frac{2}{12} [38,1 \cos(2\pi/12) + 63,5 \cos(4\pi/12) + 124,5 \cos(6\pi/12) + \dots + 86,4 \cos(24\pi/12)].$$

Закончив эти вычисления, мы получим:

$$a_1 = 50,2 \quad b_1 = -6,6.$$

Годовое среднемесячное количество осадков равно 79,8 мм, и, таким образом, первое приближение к годовому ряду, даваемое первой гармоникой в соответствии с уравнением (8.45), будет:

$$f(x) = 79,8 + 50,2 \sin(\pi x/6) - 6,6 \cos(\pi x/6). \quad (8.48)$$

Подставляя значения  $x$  в это уравнение, мы получим первую строку табл. 8.3. Подобным образом можно вычислить и другие пары коэффициентов Фурье, скажем, до шестой, если это необходимо. Вторая, третья и четвертая строки в табл. 8.3 получаются в результате суммирования первых двух, трех и четырех гармоник соответственно. В итоге разложение в ряд Фурье вплоть до четвертой гармоники будет иметь вид:

$$f(x) = 79,8 + 50,2 \sin(\pi x/6) - 6,6 \cos(\pi x/6) - 56,4 \sin(\pi x/3) - 6,4 \cos(\pi x/3) - 3,8 \sin(\pi x/2) + 26,3 \cos(\pi x/2) - 5,2 \sin(2\pi x/3) - 8,0 \cos(2\pi x/3). \quad (8.49)$$

Числа четвертой строки табл. 8.3 мало отличаются от чисел табл. 8.2.

Следовательно, у нас уже есть хорошее приближение к исходным данным и перед тем, как перейти к вычислению пятой и ше-

Гармонический анализ выпадения осадков в Найроби.  
В соответствии с уравнением (8.45) рассчитаны значения вплоть  
до 1-ой, 2-ой, 3-ей и 4-ой гармоник

Янв.	Февр.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
99,2	120,0	130,0	126,6	110,6	86,4	60,4	39,6	29,6	33,0	49,0	73,2
47,2	74,3	136,4	178,7	156,3	80,0	8,3	-6,1	36,0	85,1	94,7	66,8
43,3	48,0	140,2	205,0	152,5	53,7	12,1	20,2	32,2	58,8	98,5	93,1
42,8	56,5	132,2	204,5	161,0	45,7	11,6	28,7	24,2	58,3	107,0	85,1

стой гармоник, следует оценить дисперсию, объясняемую уже подсчитанными гармониками. Эта дисперсия вычисляется по формуле:

$$\frac{a_i^2 + b_i^2}{2s_x^2}, \quad (8.50)$$

где  $s_x$  — стандартное отклонение ряда данных. Используя эту формулу, мы получим, что первая гармоника объясняет 35% общей дисперсии, вторая — 45%, третья — 10%, а четвертая — только 1%. Первые четыре гармоники объясняют 91% общей дисперсии, а первые две — 80%. Ясно, что они являются наиболее важными гармониками годового хода ежемесячных осадков. Для того чтобы лучше уяснить, почему получилось именно так, вычислим периоды этих гармоник. Период первой гармоники равен  $P/r$ , или 12 месяцам, а период второй гармоники равен шести месяцам (12/2). Как было указано вначале, существуют четкие годовые и сезонные колебания в выпадении осадков, причем последние тесно коррелируют с сезонным ходом солнца в зените.

Читатель еще сумеет убедиться в том, что в географии интегрирование находит применение при решении широкого диапазона проблем. Помимо непосредственного и очевидного приложения интегрального исчисления, примеры, приведенные в последнем разделе, показывают тот математический фундамент, на котором покоятся более совершенные статистические методы. Общее трактование интегрального исчисления, как оно изложено в предыдущих разделах, поможет, как мы надеемся, читателю в чтении и понимании достаточно сложной математики, содержащейся в некоторых работах по геоморфологии, метеорологии и т. д. Если читатель пожелает расширить свои математические познания по интегрированию, то можно порекомендовать ему ряд удачных учебников по математике, например: Lang, 1973: *A first course in calculus*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley; B. Knight, R. Adams, 1975: *Calculus I and Calculus II*. London: Unwin<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> См. также: Г. М. Фихтенгольц, 1963: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2, М., Физматгиз. — *Прим. ред.*

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изложенные в главах 5 и 8 методы применимы теперь к решению *дифференциальных уравнений*. Наряду с интегрированием (тема предыдущей главы) дифференциальные уравнения представляют собой столь обширную область математики, что разбору их посвящены целые учебники. Как и предшествующая, данная глава преследует цель помочь читателю в овладении различными методами решения дифференциальных уравнений и в определении того, какие типы уравнений можно решать с их помощью. По этой причине мы включили в текст большое число задач, с тем чтобы читатель имел возможность потренироваться в применении этих методов на практике.

В объеме одной главы мы в состоянии познакомить читателя лишь с элементарными дифференциальными уравнениями. Однако основы, полученные здесь, могут служить прочным фундаментом для усвоения более сложных понятий и методов. Прежде всего мы хотим обратить внимание читателя на способы решения дифференциальных уравнений, а затем приведем несколько примеров их использования в географии.

### 9.1 Простейшие уравнения

На протяжении всей книги мы уже не раз знакомились с математическим уравнением, связывающим две и более функций или переменных в статистическом смысле. В главах 5 и 8 было разъяснено, что следует понимать под дифференцированием и интегрированием и как надо пользоваться ими при решении простейших уравнений. Если мы в качестве примера рассмотрим очень простую зависимость, скажем, соотношение для сухоадиабатического вертикального градиента температуры, которое было использовано нами для иллюстрации понятия линейной функции в главе 3, то увидим, что связь изменения температуры с высотой при сухоадиабатическом процессе, то есть температурный градиент, можно записать как

$$\frac{dT}{dz} = -9,8 \text{ (}^\circ\text{C/км)}. \quad (9.1)$$

Соотношение такого вида, в сущности, является отправной точкой при рассмотрении дифференциальных уравнений. Мы можем проинтегрировать это весьма простое дифференциальное уравнение по переменной  $z$  и тогда получим:

$$T = -9,8z + C, \quad (9.2)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, указывающая на необходимость задания начальной температуры при вычислениях температуры по вертикальному градиенту. Обычно задается температура земной поверхности. Дифференциальные уравнения самого простого вида подобны уравнению (9.1). Вообще, дифференциальным уравнением называется соотношение, в которое входят не только переменные  $x$  и  $y$ , но и производные  $dy/dx$ ,  $d^2y/dx^2$  и т. д. Почти на всем протяжении этой главы мы будем рассматривать исключительно дифференциальные уравнения, содержащие только две переменные  $x$  и  $y$  и производную одной из них (по другой).

В предыдущей главе мы разобрали некоторые методы интегрирования и вычислили интеграл от функции, выражающей зависимость между скоростью инфильтрации воды в почву и временем. Для удобства мы обозначили *скорость инфильтрации* через  $y$ , умолчав о том, что на самом деле эта величина есть производная количества воды по времени. Если мы представим эту производную как  $dy/dx$ , то мы вправе написать:

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-1/2}, \quad (9.3)$$

отсюда интеграл будет:

$$y = 15x + 10x^{1/2} + C, \quad (9.4)$$

то есть мы решили дифференциальное уравнение (9.3). Заметим, что наше решение должно рассматриваться как общее решение, поскольку мы включили в него произвольную постоянную  $C$ . Уравнение (9.4) является, таким образом, *общим решением* дифференциального уравнения (9.3). Задавая определенные значения  $y$  при данном значении  $x$ , мы можем получать *частные решения*. Например, мы можем написать, что

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-1/2}, \quad y = 10 \text{ при } x = 0,5$$

или

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-1/2}, \quad y(0,5) = 10. \quad (9.5)$$

Подставив (0,5; 10) в общее решение (9.4), найдем значение  $C$ :

$$\begin{aligned}10 &= 15 \times 0,5 + 10 \times 0,5^{-1/2} + C \\ C &= 18,1.\end{aligned}$$

Частное решение будет иметь вид:

$$y = 15x + 10x^{1/2} + 18,1. \quad (9.6)$$

Значения  $x$  и  $y$ , благодаря которым мы получили частное решение, составляют *граничное условие*. Если же мы зададим значение функции  $y$  при  $x = 0$  ( $y(0)$ ), то такое условие называется *начальным*<sup>1</sup>.

Аналогичную последовательность действий применяют также при составлении уравнений движения (глава 5). Обозначив расстояние через  $s$ , скорость через  $v$ , ускорение через  $a$  и время через  $t$ , мы можем получить уравнение движения в процессе последовательного решения дифференциальных уравнений. То есть мы вправе записать:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a. \quad (9.7)$$

Решая это уравнение (интегрируя по  $t$ ), находим:

$$\frac{ds}{dt} = at + u, \quad (9.8)$$

где  $u$  — постоянная интегрирования, выражающая начальное условие при  $t = 0$ . Снова интегрируя полученное уравнение по  $t$ , будем иметь:

$$s = \frac{1}{2} at^2 + ut + k, \quad (9.9)$$

где  $k$  — это другая постоянная интегрирования, обозначающая на этот раз расстояние от начала координат, на котором находилось тело до момента движения. Эта постоянная равна нулю, поскольку мы считаем, что тело всегда начинает двигаться из начала координат ( $s = 0$ ,  $t = 0$ ).

## 9.2 Порядок и степень

Мы уже знакомы с первой и второй производными функциями. Уравнение (9.7) содержит вторую производную  $s$  по  $t$ . Следовательно, можно сказать, что уравнение (9.7) — это есть дифференциальное уравнение *второго порядка*. Уравнение (9.8) — это дифференциальное уравнение *первого порядка*. Ниже мы приводим более сложные примеры дифференциальных уравнений, указывая в скобках их порядок.

<sup>1</sup> Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка нет разницы между граничным и начальным условиями. Для уравнений же в частных производных граничные и начальные условия различаются. Обычно, если независимой переменной является время  $t$ , то условие называется начальным, если же независимая переменная — координата, то условие называется граничным. — *Прим. ред.*

$$2 \frac{dy}{dx} - y + 3xy = 0 \quad (1\text{-ый})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 3x = y \quad (3\text{-ий})$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 4y + x \quad (4\text{-ый})$$

$$y'' - 2y' + 5x = 0 \quad (2\text{-ой})$$

$$5 - 2y^{(4)} - 3y = 1. \quad (4\text{-ый})$$

В каждом случае порядок уравнения определяется порядком его максимальной производной независимо от того, присутствуют в нем или нет какие-либо производные более низких порядков. Основное внимание в этой главе будет уделено решению уравнений первого порядка. В принципе, методы решения дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков аналогичны методам решения уравнений первого порядка. Такие уравнения решаются с помощью довольно сложных приемов, но надо заметить, что в их основе лежат методы, рассматриваемые в данной главе. Пытливый читатель, прочтя эту книгу и полностью усвоив ее содержание, может затем расширить свои знания о способах решения уравнений высоких порядков, обратившись к более сложным учебникам по математике.

Часто путают два понятия: порядок дифференциального уравнения и его степень. Степень дифференциального уравнения определяется не по производной, а по наивысшей степени, в которой находится любой член, содержащий величину  $y$ . Таким образом, наличие в уравнении члена  $y^4$  или  $(y'')^4$  говорит о том, что перед нами уравнение четвертой степени. Здесь важно заметить, что

$$(y'')^3 \neq y^{(6)}. \quad (9.10)$$

В левой части этого неравенства записано, что вторая производная функции  $y$  возводится в третью степень, в то время как в правой части уравнения стоит шестая производная функции  $y$  по  $x$ . Уравнения, имеющие члены с переменной  $y$  только в первой степени, называются *линейными* дифференциальными уравнениями, а уравнения, включающие более высокие степени переменной, — *нелинейными*. В основном мы будем иметь далее дело с уравнениями первой степени.

### 9.3 Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных

Все уравнения, рассматривавшиеся до сих пор в этой главе, принадлежат к классу *обыкновенных* дифференциальных уравнений. В них входят только *одна* независимая и *одна* зависимая

переменная. Напротив, уравнения в частных производных содержат более одной независимой переменной. В предыдущей главе мы уже разбирали алгебраические уравнения, содержащие более двух переменных. Рассмотрим простое уравнение вида

$$x = 5y - 2z. \quad (9.11)$$

Чтобы получить частную производную функции  $x$  по переменной  $y$ , следует продифференцировать функцию по  $y$ , считая все члены с  $z$  постоянными. Аналогично, дифференцируя  $x$  по  $z$ , постоянными будут считаться все члены с  $y$ . Далее мы будем время от времени пользоваться частными производными, однако подробно останавливаться на этой теме не станем. Не станем мы и решать подобные уравнения, хотя в большинстве своем методы их решения являются прямым развитием методов, излагаемых здесь. Читатель, интересующийся этим вопросом, может обратиться к соответствующей литературе<sup>1</sup>.

Символы, используемые для обозначения частных производных, существенно отличаются от символов, используемых для обыкновенных производных. В то время как для обозначения обыкновенных производных мы применяем символ  $d$ , для частных производных используется символ  $\partial$ , так что частная производная  $x$  по  $y$  из уравнения (9.11) будет:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 5, \quad (9.12)$$

а частная производная  $x$  по  $z$ :

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -2. \quad (9.13)$$

Этот символ называют «дэ частное»

В качестве примера нахождения частных производных рассмотрим следующее уравнение:

$$x = 12y^3 - 3yz + 4z^2y^3. \quad (9.14)$$

Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 36y^2 - 3z + 12z^2y^2 \quad (9.15)$$

и

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 72y \quad + 24z^2y, \quad (9.16)$$

с другой стороны,

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -3y \quad + 8zy^3 \quad (9.17)$$

и

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \quad \quad \quad 8y^3 \quad (9.18)$$

<sup>1</sup> См., например: И. Г. Петровский, 1961: Лекции об уравнениях с частными производными М., Физматгиз. — Прим. ред.

и т. д. Заметим, что

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial z} = -3 + 24zy^2 \quad (9.19)$$

и

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial y} = -3 + 24zy^2. \quad (9.20)$$

В другом примере, если

$$x = y \operatorname{tg} z + e^{2y} - z^3 \ln y, \quad (9.21)$$

то

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \operatorname{tg} z + 2ye^{2y} - z^3/y \quad (9.22)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = y \sec^2 z - 3z^2 \ln y \quad (9.23)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \sec^2 z - 3z^2/y. \quad (9.24)$$

### Задачи 9.3

Найдите  $\partial x/\partial z$ ,  $\partial^2 x/\partial z^2$  и  $\partial x/\partial y$ ,  $\partial^2 x/\partial y^2$  в следующих примерах.

9.3.1  $x = 5y(z - 2) + 10yz.$

9.3.2  $x = z \operatorname{tg} y (1 + z \operatorname{tg} y).$

9.3.3  $x = y \ln z + 2zy + z \ln y.$

9.3.4  $x = 2 \sin z \cos y - 3 \operatorname{tg} zy.$

9.3.5  $x = 3(z^2 - y^2) + 2z \operatorname{arctg} y.$

### 9.4 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Поскольку решение дифференциальных уравнений заключается в их интегрировании, то следует сразу остановиться на некоторых вопросах, связанных с этой операцией. Эти вопросы возникают, когда мы переходим от простейших дифференциальных уравнений к более сложным. Соответствующие «правила» решения сведены в разделе 9.7.

Простейшим типом дифференциального уравнения является уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (9.25)$$

Принтегрируем обе части уравнения по  $x$ , так что если

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

то

$$y = \ln x + C.$$

Мы воспользовались здесь приемом интегрирования, который узнали из главы 8, поэтому нет необходимости подробно останавливаться на приведенном примере или предлагать задачи на решение уравнений данного типа.

### 9.5 Уравнения, содержащие функцию только переменной $y$

Более сложны уравнения, в которые входят только производная  $dy/dx$  и зависимая переменная  $y$ , то есть уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \quad (9.26)$$

Решение этого уравнения лишь немногим труднее решения предыдущего, содержащего производную и  $f(x)$ . Пусть имеется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y. \quad (9.27)$$

Мы можем рассматривать величину  $dy$  и  $dx$  по отдельности и умножить обе части равенства на  $dx$ , так что

$$dy = y dx.$$

Ясно, что это соотношение не позволяет проинтегрировать функцию  $y$  по переменной  $x$ , однако, разделив уравнение на  $y$ , мы получим выражение

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx,$$

которое, если проинтегрировать его левую часть по  $y$ , а правую по  $x$ , примет вид:

$$\ln y = x + C. \quad (9.28)$$

Обратите особое внимание на появление в решении постоянной величины  $C$ . Поскольку значение этой постоянной произвольно, общее решение уравнения мы можем записать как:

$$\ln y - x + C = 0.$$

Хотя алгебраически это выражение не эквивалентно уравнению (9.28), поскольку присутствующая в нем постоянная имеет противоположный знак, в смысле решения дифференциального уравнения эти выражения вполне эквивалентны. Ниже мы предлагаем читателю решить несколько задач.

## Задачи 9.5

$$9.5.1. \quad \frac{dy}{dx} = 5y^2.$$

$$9.5.2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}.$$

$$9.5.3. \quad 3 \frac{dy}{dx} = -2 \sin^2 y.$$

$$9.5.4. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} e^{2y}.$$

$$9.5.5. \quad 2(4 + y^2) \frac{dy}{dx} = 3.$$

## 9.6 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим теперь уравнения, содержащие переменные  $x$  и  $y$  и производную  $dy/dx$ . При решении таких уравнений применяется целый ряд различных методов, и выбор подходящего способа зависит от общего вида уравнения. Рассмотрим на примере самый простой способ решения дифференциальных уравнений такого типа. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = xy. \quad (9.29)$$

Умножая на  $dx$  и деля на  $y$ , получаем:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx.$$

Затем, интегрируя обе части равенства по  $y$  и  $x$  соответственно, будем иметь:

$$\ln y - \frac{1}{2} x^2 = C. \quad (9.30)$$

В уравнениях такого типа переменные *разделяются*, и их можно решить только что описанным методом. Продemonстрируем этот метод на другом примере и решим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y-1)}{x+1}.$$

Умножив обе его части на  $dx$ , получим:

$$dy = \frac{2(y-1)}{x+1} dx$$

$$(x+1) dy = 2(y-1) dx,$$

так что

$$\int \frac{dy}{2(y-1)} = \int \frac{dx}{x+1},$$

и тогда

$$\frac{1}{2} \ln(y-1) = \ln(x+1) + C,$$

или, в другом виде:

$$\frac{\ln(y-1)}{2 \ln(x+1)} = C.$$

Читателю мы советуем решить следующие задачи.

### Задачи 9.6

9.6.1.  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 5x^3 y^2.$

9.6.2.  $\sin^2 x \frac{dy}{dx} - 2y^2 = 0.$

9.6.3.  $\csc x \frac{dy}{dx} = \sec y.$

9.6.4.  $x \frac{dy}{dx} = 2 \csc y \cos^3 y.$

9.6.5.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln x.$

### 9.7 Однородные уравнения

Если в результате подстановки  $y = vx$  в данное дифференциальное уравнение получится уравнение, содержащее члены только с  $x$  и  $v$ , то такое уравнение называется *однородным*. Если  $y = vx$ , то, следуя правилу дифференцирования произведения (уравнение (5.33)), находим:

$$y = vx$$
$$\frac{dy}{dx} = v \frac{dx}{dx} + x \frac{dv}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}. \quad (9.31)$$

В качестве примера возьмем уравнение:

$$xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad (9.32)$$

то есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}. \quad (9.33)$$

Ясно, что в этом уравнении переменные не разделяются. Теперь надо проверить, является ли оно однородным. Если в результате подстановки  $y = vx$  в правую часть уравнения полученное выражение будет содержать члены только с  $v$ , то это уравнение однородное. Для уравнения (9.33) имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + v^2 x^2}{vx^2} = \frac{1 + v^2}{v}.$$

Все члены с  $x$  сократились, и, следовательно, уравнение однородное, так что:

$$\frac{dy}{dx} = f(v).$$

Теперь, заменив выражение для  $\frac{dy}{dx}$  с помощью соотношения (9.31), будем иметь:

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v}.$$

Это уже уравнение с разделяющимися переменными, которое мы можем решить:

$$\begin{aligned} x \frac{dv}{dx} &= \frac{1+v^2}{v} - v = \frac{1}{v} \\ \therefore \int v dv &= \int \frac{1}{x} dx \\ \therefore \frac{1}{2} v^2 - \ln x &= C. \end{aligned}$$

Так как  $v = y/x$ , то

$$\underline{y^2 - 2x^2 \ln x = 2Cx^2.} \quad (9.34)$$

Теперь рассмотрим решение этого же уравнения при другой форме записи произвольной постоянной  $C$ . Проинтегрировав выражение  $dx/x$ , получим  $\ln x + C$ . Однако если постоянную считать логарифмом некоторой другой постоянной, то решение примет вид:

$$\begin{aligned} \int v dv &= \int \frac{1}{x} dx \\ \therefore \frac{1}{2} v^2 &= \ln x + \ln C = \ln Cx, \end{aligned}$$

и, следовательно, решение можно было бы записать как

$$\underline{y^2 = 2x^2 \ln Cx.}$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть дано уравнение:

$$x(y + 2x) \frac{dy}{dx} = y(2y + 3x).$$

Раскрыв скобки, получим:

$$(xy + 2x^2) \frac{dy}{dx} = 2y^2 + 3xy$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 + 3xy}{xy + 2x^2}.$$

Подставляя  $y = vx$ , имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2v^2x^2 + 3vx^2}{vx^2 + 2x^2}.$$

Сократив на  $x^2$ , получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2v^2 + 3v}{v + 2}$$

или  $dy/dx = f(v)$ , то есть уравнение является однородным. Теперь мы можем написать:

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{2v^2 + 3v}{v + 2},$$

и отсюда

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{2v^2 + 3v - v(v + 2)}{v + 2} =$$

$$= \frac{v^2 + v}{v + 2}$$

$$\therefore \int \frac{v + 2}{v^2 + v} dv = \int \frac{1}{x} dx.$$

Интеграл по  $v$  можно найти, разложив подинтегральное выражение

$$\frac{v + 2}{v^2 + v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v + 1},$$

откуда

$$A(v + 1) + Bv = v + 2,$$

так что  $A = 2$  и  $B = -1$ . Отсюда

$$\int \frac{2}{v} dv - \int \frac{1}{v + 1} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$2 \ln v - \ln(v + 1) = \ln Cx.$$

Поскольку  $v = y/x$ , то

$$2 \ln(y/x) - \ln(y/x + 1) = \ln Cx$$

$$(y/x)^2 / (y/x + 1) = Cx$$

$$(y/x)^2 = Cx(y/x + 1) = C(y + x)$$

$$y^2 = Cx^2(y + x).$$

Описанный метод обеспечивает нас удобным средством решения. Если в дифференциальном уравнении переменные не разделяются, то прежде всего мы должны проверить его на однородность с помощью подстановки  $y = vx$ . Однородные уравнения встречаются довольно редко. Возьмем в качестве примера уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{xy}, \quad (9.35)$$

которое очень похоже на уравнение (9.32). Однако, подставив  $y = vx$ , получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + vx}{vx^2} = \frac{1 + v}{vx}.$$

Видно, что остались члены, содержащие  $x$ , то есть это уравнение неоднородное и потому

$$\frac{dy}{dx} \neq f(v).$$

В этом случае нам следует прибегнуть к более сложным способам решения, которые рассматриваются в разделах 9.8—9.10.

### Задачи 9.7

Проверьте, однородные или нет следующие уравнения, и, если они однородные, решите их.

$$9.7.1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}.$$

$$9.7.2. \quad xy^3 \frac{dy}{dx} = x^4 + y^4.$$

$$9.7.3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{2x - y}.$$

## 9.8 Уравнения в полных дифференциалах

В предыдущих разделах мы рассмотрели решения дифференциальных уравнений не только линейных и первого порядка, но и простейших уравнений других типов. Если имеется уравнение, которое нельзя решить с помощью методов, разобранных в разделах 9.4—9.7, то надо искать иные способы. Некоторые уравнения первого порядка частного вида можно решить, применяя описываемый ниже метод. Другие, для которых этот метод непосредственно использовать нельзя, нередко удается привести к более удобному виду, а затем применить тот же метод. Здесь мы рассмотрим *уравнения в полных дифференциалах*.

Дифференциальное уравнение будет уравнением в полных дифференциалах, если оно имеет вид

$$Q \frac{dy}{dx} + P = 0, \quad (9.36)$$

где  $P$  и  $Q$  зависят от  $x$  и  $y$ , причем *частная производная  $Q$  по  $x$  равна частной производной  $P$  по  $y$* , то есть

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (9.37)$$

Возьмем в качестве примера два очень похожих дифференциальных уравнения:

$$(5x^2 - 2xy) \frac{dy}{dx} + 10xy - y^2 = 0 \quad (9.38)$$

$$(5x^3 - 2xy) \frac{dy}{dx} + 10xy - y^2 = 0. \quad (9.39)$$

На первый взгляд между этими уравнениями имеется лишь одна незначительная разница: первый член в уравнении (9.38) равен  $5x^2$ , а в уравнении (9.39) —  $5x^3$ . Однако если проверить, являются ли они уравнениями в полных дифференциалах в соответствии с соотношениями (9.36) и (9.37), то станет очевидно, что, хотя оба уравнения имеют форму уравнения (9.36), частные производные  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  и  $\frac{\partial P}{\partial y}$  для второго уравнения не удовлетворяют условию (9.37), а для первого уравнения это условие выполнено. Для уравнения (9.38) имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 10x - 2y \quad (9.40)$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 10x - 2y, \quad (9.41)$$

а для уравнения (9.39):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 15x^2 - 2y \quad (9.42)$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 10x - 2y. \quad (9.43)$$

Ясно, что уравнение (9.38) удовлетворяет условию (9.37), а уравнение (9.39) нет.

Принадлежность дифференциального уравнения к типу уравнений в полных дифференциалах значительно облегчает его решение. В этом случае мы можем решить его следующим образом. Прежде всего введем новую функцию  $u$ , зависящую от  $y$  и  $x$ , так что

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (9.44)$$

Мы тотчас замечаем сходство между этим выражением и общей формой дифференциального уравнения (9.36), поэтому, если положить

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{и} \quad P = \frac{\partial u}{\partial x},$$

то уравнение (9.44) примет вид:

$$\frac{du}{dx} = Q \frac{dy}{dx} + P = 0 \quad (\text{из уравнения (9.36)}),$$

и, следовательно, мы можем переписать уравнение (9.36) в виде:

$$\frac{du}{dx} = 0$$

или

$$u = \text{const.}$$

С помощью такой замены мы можем решать уравнения в полных

дифференциалах. Теперь таким же способом решим уравнение (9.38):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = 10xy - y^2 \quad (9.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = 5x^2 - 2xy. \quad (9.46)$$

Интегрируя (9.45) по  $x$ , получаем:

$$u = 5x^2y - y^2x + f(y), \quad (9.47)$$

где  $f(y)$  — некоторая произвольная функция переменной  $y$ , которую надо определить, чтобы получить окончательное решение. Заметив, что уже имеется значение  $\partial u / \partial y$  из соотношения (9.46), мы можем продифференцировать (9.47) по  $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 - 2xy + \frac{df}{dy}. \quad (9.48)$$

Приравняв (9.48) и (9.47), находим, что

$$5x^2 - 2xy = 5x^2 - 2xy + \frac{df}{dy},$$

поэтому

$$\frac{df}{dy} = 0$$

или

$$f(y) = C.$$

Таким образом, общее решение будет иметь вид:

$$\underline{5yx^2 - y^2x = C}. \quad (9.49)$$

Укажем, что соотношение (9.49) отражает тот факт, что  $u$  есть постоянная функции.

В приведенном выше примере функция  $f(y)$  оказалась постоянной. Как правило, такое решение получается очень редко. Например, возьмем уравнение

$$(y^2 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0, \quad (9.50)$$

значит

$$Q = x^2 + y^2 \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad (9.51)$$

а

$$P = 2xy \text{ и } \frac{\partial P}{\partial y} = 2x. \quad (9.52)$$

Теперь найдем функцию  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y^2,$$

так что

$$u = x^2y + f(y).$$

Продифференцировав это выражение по  $y$ , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{df}{dy}.$$

Из (9.51) имеем:

$$x^2 + \frac{df}{dy} = x^2 + y^2$$

$$\therefore \frac{df}{dy} = y^2$$

$$\therefore \underline{f(y) = \frac{1}{3}y^3 + C},$$

и, следовательно, решение уравнения (9.50) будет иметь вид:

$$\underline{x^2y + \frac{1}{3}y^3 = C}.$$

Таким образом, можно сказать, что процесс решения уравнения в полных дифференциалах представляет собой сумму алгебраических действий. Однако на практике мы редко сталкиваемся с дифференциальными уравнениями подобного типа. Гораздо чаще нам приходится сначала приводить дифференциальные уравнения к указанному виду, используя так называемый *интегрирующий множитель*, понятие о котором вводится в разделе 9.9. Но прежде мы вновь настоятельно советуем читателю попытаться решить помещаемые ниже задачи, с тем чтобы ближе ознакомиться с техникой решения уравнений в полных дифференциалах.

### Задачи 9.8

9.8.1.  $2(y \sin x + 2xy) \frac{dy}{dx} + y^2(\cos x + 1) = 0.$

9.8.2.  $(\ln x + 2yx^2 + 2yx) \frac{dy}{dx} + y \left( \frac{1}{x} + 2yx + y \right) - \ln x = 0.$

9.8.3.  $x^2 + 3y + (3x - y^2) \frac{dy}{dx} = 0.$

9.8.4.  $(\sin y - \operatorname{tg} x) \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x.$

9.8.5.  $(x - 1) \frac{dy}{dx} + y - x = 1.$

### 9.9 Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение

$$2y \cos y + y \left( \frac{1}{x} - x \sin y \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (9.53)$$

Это уравнение имеет вид, указанный в соотношении (9.36), однако, найдя частные производные коэффициентов, мы получим:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \ln x - y \sin y = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (9.54)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \sin y + 2 \cos y. \quad (9.55)$$

Таким образом, это дифференциальное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах и его нельзя непосредственно решить методом, изложенным в разделе 9.8. Но если умножить уравнение (9.53) на выражение  $x/y$ , то будем иметь:

$$2x \cos y + (1 - x^2 \sin y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (9.56)$$

Здесь уже

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2x \sin y,$$

а множитель  $x/y$  известен как *интегрирующий множитель*. Теперь мы можем действовать как в случае уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos y$$

$$\therefore u = x^2 \cos y + f(y) + C$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 \sin y + \frac{df}{dy}.$$

Из уравнения (9.53) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = 1 - x^2 \sin y,$$

и, поскольку

$$\frac{df}{dy} = 1 \text{ и } f(y) = y + C,$$

то решением уравнения будет соотношение

$$x^2 \cos y + y = C. \quad (9.57)$$

В этом очень простом примере интегрирующий множитель был почти очевиден. Для многих дифференциальных уравнений нахождение подходящего множителя может оказаться трудной или по крайней мере долгой задачей, и успех в конечном счете будет зависеть от конкретного вида уравнения. В этом случае мы вновь вынуждены будем прибегнуть к методу проб и ошибок или к так называемому «решению подбором». Заметим, однако, что все задачи к этому разделу можно решить с помощью интегрирующего множителя.

### Задачи 9.9

9.9.1. Решить  $(2 \operatorname{tg} x + 2x \sec x) \frac{dy}{dx} + y(1 + \sec x) = 0$ , применяя интегрирующий множитель.

9.9.2. Решить  $(3x^3y^{-1} + 2x^2 - x) \frac{dy}{dx} + 6x^2 + yx = 0$ .

9.9.3. Решить  $x \ln x \frac{dy}{dx} + (x + y) = 0$ .

9.9.4. Решить  $(x^2 \sec y - 3xy^2 \operatorname{ctg} x) \frac{dy}{dx} + x(2 \csc y - y^3 \operatorname{ctg} y) = 0$ .

9.9.5. Решить  $(6x^2y^3 - 18y^2x + 12y) \frac{dy}{dx} + 4y^4x - 9y^2 = 0$ .

### 9.10 Интегрирующий множитель $e^{\int A dx}$

Некоторые уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} + Ay = B, \quad (9.58)$$

где  $A$  и  $B$  — функции, зависящие от  $x$ , удается решить с помощью интегрирующего множителя вида  $e^{\int A dx}$ , так что исходное уравнение запишется в виде:

$$\frac{d}{dx} (e^{\int A dx} y) = e^{\int A dx} B. \quad (9.59)$$

Например, рассмотрим уравнение

$$x \frac{dy}{dx} = x^3 - y. \quad (9.60)$$

Его можно привести к виду уравнения (9.58), поделив на  $x$  и перегруппировав члены:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

или

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^2,$$

так что  $A = 1/x$  и  $B = x^2$

и

$$e^{\int A dx} = e^{\int (1/x) dx} = e^{\ln x} = x.$$

Подставив в уравнение (9.59), имеем:

$$\frac{d}{dx} (xy) = x^3$$

$$\therefore xy = \frac{1}{4} x^4 + C \text{ или } \underline{x(4y - x^3) = C}.$$

#### Задачи 9.10

Определение типа дифференциальных уравнений является важной составной частью их решения. Решите помещенные ниже дифференциальные уравнения, применяя методы, описанные в разделах 9.8; 9.9 и 9.10. Не забудьте сначала определить тип уравнения, а уже затем используйте один из трех методов для получения решения.

9.10.1.  $3x \frac{dy}{dx} + 3y = 2$ .

9.10.2.  $(x - 1) \frac{dy}{dx} - xy \ln x = 2$ .

$$9.10.3. \quad 2y \operatorname{ctg} x + 2 \sin x \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$9.10.4. \quad y^2 \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x - \sin y) \frac{dy}{dx} + y^3 \sec x \csc x = 0.$$

$$9.10.5. \quad x^2 + 3y + (3x - y^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

### 9.11 Обобщение методов решения

Основной вопрос при решении дифференциальных уравнений первого порядка заключается в определении типа уравнения, так как тип уравнения в свою очередь определяет способ решения.

Таблица 9.1

Краткая сводка методов решения дифференциальных уравнений

Вид уравнения	Метод решения	Раздел
Простейшие $\frac{dy}{dx} = f(x)$	Проинтегрировать	9.4
Простейшие $\frac{dy}{dx} = f(y)$	Разделить на $f(y)$ и проинтегрировать	9.5
С разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(y)}{f_2(x)}$	Разделить соответствующие функции и проинтегрировать	9.6
Однородные $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$	Проверить на однородность с помощью подстановки $y = vx$ . В случае положительного результата привести к виду $v + x \frac{dv}{dy} = f(v)$	9.7
В полных дифференциалах $Q \frac{dy}{dx} + P = 0$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$	Решить и подставить выражение для $v$ Из выражения $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ найти $u$ , затем из $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ найти $f(y)$ . Решение выражается через $u$	9.8
Не является уравнением в полных дифференциалах $Q \frac{dy}{dx} + P = 0$ $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$	Постараться найти интегрирующий множитель, так чтобы $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ Затем действовать, как указано выше	9.9
Не является однородным и в полных дифференциалах $\frac{dy}{dx} + Ay = B$	Записать в виде $\frac{d}{dx} e^{\int A dx} y = e^{\int A dx} B$	9.10

Если этот вопрос разрешен, то можно перейти ко второй части задачи, то есть к отысканию интегралов соответствующих функций, содержащихся в уравнении. На этой стадии решения читатель может обратиться к сводной таблице методов интегрирования, которая помещена в разделе 8.10. С целью облегчить выбор методов решения дифференциальных уравнений, описанных в разделах 9.4—9.10, в табл. 9.1 кратко перечислены типы уравнений в порядке возрастания их сложности. Однако с опытом можно научиться сравнительно легко распознавать «стандартные» типы уравнений, и в этом случае отпадет необходимость систематически пользоваться этой таблицей.

### 9.12 Решение дифференциальных уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами

При рассмотрении способов решения дифференциальных уравнений высокого порядка мы ограничимся линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами, хотя используемые здесь методы решения можно применить также к уравнениям с постоянными коэффициентами и более высокого порядка. Для решения дифференциальных уравнений высокого порядка имеются три метода. Первый из них — это решение уравнения вида

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \quad (9.61)$$

Запишем общий вид линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0. \quad (9.62)$$

Это однородное уравнение можно решить подстановкой  $y = e^{mx}$ , где  $m$  — некоторая произвольная постоянная. Поскольку первая производная от  $e^{mx}$  равна  $me^{mx}$ , а вторая производная равна  $m^2 e^{mx}$  (и т. д.), то, подставляя значения производных и самой функции в уравнение (9.62) и сокращая на множитель  $e^{mx}$ , получим:

$$am^2 + bm + c = 0.$$

Такое уравнение называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (9.62). Мы можем найти корни характеристического уравнения,  $m_1$  и  $m_2$ , раскладывая его на множители или подставляя в формулу (5.32). В результате получим:

$$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}, \quad (9.63)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Число произвольных постоянных в общем случае равно порядку обыкновенного дифференци-

ального уравнения, поскольку порядок определяет количество корней характеристического уравнения. Так, для уравнения третьего порядка общее решение имеет вид:

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} + Ce^{m_3x}. \quad (9.64)$$

Для иллюстрации этого метода возьмем уравнение

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} + 11 \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Подставляя  $y = e^{mx}$ , получим:

$$2m^2 + 11m - 6 = 0.$$

Разложив на множители, имеем:

$$(m + 6)(2m - 1) = 0$$

или  $m_1 = -6$  и  $m_2 = \frac{1}{2}$ , поэтому общим решением будет:

$$y = Ae^{-6x} + Be^{\frac{1}{2}x}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $m_1 = m_2$ . Возьмем уравнение, корнями характеристического уравнения которого является число  $-1$ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (9.65)$$

Следовательно, решение здесь:

$$y = (A + B)e^{-x} = Ce^{-x} \text{ (где } A + B = C),$$

и, значит, мы имеем только одну произвольную постоянную. Очевидно, что это решение не является общим решением дифференциального уравнения второго порядка. Поэтому нам необходимо найти другое решение вида  $y = ue^{m_1x}$ , где  $u = f(x)$ . Подставляя выражение для  $y$  в уравнение (9.65), получаем:

$$\frac{d^2}{dx^2}(ue^{-x}) + \frac{d}{dx}(ue^{-x}) + ue^{-x} = 0. \quad (9.66)$$

Используя формулу дифференцирования произведения (5.33), имеем:

$$\frac{d}{dx}(ue^{-x}) = -ue^{-x} + e^{-x} \frac{du}{dx} \quad (9.67)$$

и

$$\frac{d^2}{dx^2}(ue^{-x}) = ue^{-x} + -e^{-x} \frac{du}{dx} + e^{-x} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx}(-e^{-x}), \quad (9.68)$$

а подставляя выражения (9.67) и (9.68) в уравнение (9.66), получаем:

$$ue^{-x} - 2e^{-x} \frac{du}{dx} + e^{-x} \frac{d^2u}{dx^2} + 2 \left( e^{-x} \frac{du}{dx} - ue^{-x} \right) + ue^{-x} = 0$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2} &= 0 \\ \therefore \frac{du}{dx} &= A \\ \underline{u} &= \underline{Ax + B}.\end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения (9.65) должно иметь вид:

$$\underline{y = (Ax + B)e^{-x}}. \quad (9.69)$$

Характеристическое уравнение может иметь мнимые корни. Это означает, что уравнение не раскладывается на множители и вычисление по формуле (5.32) включает извлечение корня квадратного из отрицательного числа. Такие решения существуют в области *комплексных чисел* (то есть чисел, содержащих величину  $i = = (-1)^{1/2}$ ), но мы в этой книге их не касались. Если тем не менее читатель пожелает ознакомиться с ними, то ему следует обратиться к более полным учебникам по математике (например, Flanders, Price, 1973) <sup>1</sup>.

### Задачи 9.12

- 9.12.1.  $2 \frac{d^2y}{dx^2} = 8y.$
- 9.12.2.  $\frac{d^2y}{dx^2} + 12 \frac{dy}{dx} + 36y = 0.$
- 9.12.3.  $2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 2y.$
- 9.12.4.  $5 \frac{d^2y}{dx^2} + 14 \frac{dy}{dx} - 9y = 0.$
- 9.12.5.  $25 \frac{d^2y}{dx^2} + 36y = 60 \frac{dy}{dx}.$

### 9.13 Частные решения

Уравнение (9.12) принадлежит к простому типу дифференциальных уравнений. Рассмотрим случай неоднородного уравнения вида:

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x). \quad (9.70)$$

Для решения этого уравнения мы не вправе использовать метод из раздела 9.12. Однако мы можем поставить в соответствие уравне-

<sup>1</sup> Советскому читателю мы рекомендуем также: А. С. Понтрягин, 1970: Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука». — Прим. ред.

нию (9.70) однородное дифференциальное уравнение *относительно функции  $u$* , зависящей от  $x$ :

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu = 0. \quad (9.71)$$

Это уравнение называется *приведенным*, и последующая подстановка  $u = e^{mx}$  позволит нам найти его общее решение способом, рассмотренным в разделе 9.12. Какая-либо функция  $v$ , удовлетворяющая исходному уравнению, называется *частным решением*, или *частным интегралом*, неоднородного уравнения. Таким образом, для неоднородного дифференциального уравнения вида (9.70) имеем:

Общее решение неоднородного уравнения ( $y$ ) = общее решение однородного ( $u$ ) + частное решение неоднородного ( $v$ ),

где

$$a \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{dv}{dx} + cv = f(x). \quad (9.72)$$

Докажем справедливость этого утверждения. Подстановка функции  $u + v$  в правую часть уравнения (9.70) приводит его к виду:

$$a \frac{d^2}{dx^2} (u + v) + b \frac{d}{dx} (u + v) + c (u + v).$$

Преобразовав это выражение согласно уравнению (9.70) и (9.71), будем иметь:

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu + a \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{dv}{dx} + cv = 0 + f(x), \quad (9.73)$$

что и доказывает справедливость нашего утверждения.

Таким образом, задача сводится к отысканию частного решения неоднородного уравнения. И вновь поиск этого решения связан с методом проб и ошибок. Во многих случаях найти частный интеграл довольно трудно<sup>1</sup>. Мы рассмотрим этот вопрос в разделе 9.14, но прежде приведем пример, когда частное решение неоднородного уравнения находится довольно просто<sup>2</sup>. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = (x + 1)^2. \quad (9.74)$$

<sup>1</sup> Имеется общий способ отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения: это метод вариации постоянной (см.: И. Г. Петровский, 1970: Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука». — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> Отыскание частного решения для специального вида правой части подробно изложено в книге: А. С. Понтрягин, 1970: Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука». — *Прим. ред.*

Характеристическое уравнение для однородного уравнения имеет вид:

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

или  $m = 1$ , так что

$$u = (Ax + B)e^x.$$

Заметим, что поскольку правая часть уравнения (9.74) представляет собой полином, то частное решение следует искать также в виде полинома, то есть

$$v = ax^2 + bx + c.$$

Тогда имеем:

$$\frac{d^2v}{dx^2} - 2\frac{dv}{dx} + v = 2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = (x + 1)^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем:

$$a = 1, \quad b - 4a = 2 \quad \text{и} \quad 2a - 2b + c = 1.$$

то есть  $a = 1, b = 6, c = 11$ . В итоге частное решение будет следующим:

$$v = x^2 + 6x + 1, \quad (9.75)$$

и общее решение будет иметь вид:

$$y = \underline{(Ax + B)e^x + x^2 + 6x + 11}. \quad (9.76)$$

Таким же образом можно действовать и для того, чтобы найти частное решение при специальном виде правой части. Например, если  $f(x)$  имеет вид  $ae^{bx}$ , то мы можем предположить, что частное решение следует искать в виде  $a_1e^{b_1x}$  и т. д. Теперь возьмем более сложный пример. Попытаемся найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 6x + \sin x.$$

Здесь можно разложить на множители левую часть характеристического уравнения, поэтому

$$m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0$$

и, следовательно,

$$u = (Ax + B)e^x.$$

Частное решение этого уравнения снова следует искать в виде, обусловленном правой частью уравнения, то есть

$$v = (ax + b) + (c \sin x + d \cos x),$$

где первое слагаемое, заключенное в скобки, относится к первому члену правой части рассматриваемого неоднородного уравнения, а слагаемое  $(c \sin x + d \cos x)$  — ко второму члену. Действуя так

же, как и в предыдущем примере, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} - 2 \frac{dv}{dx} - v &= \frac{d^2}{dx^2} (ax + b + c \sin x + d \cos x) - \\ &- 2 \frac{d}{dx} (ax + b + c \sin x + d \cos x) - \\ &- (ax + b + c \sin x + d \cos x) = 6x + \sin x \\ \therefore (-c \sin x - d \cos x) - 2(a + c \cos x - d \sin x) - \\ &- (ax + b + c \sin x + d \cos x) = 6x + \sin x. \end{aligned}$$

Перегруппировав члены, имеем:

$$\begin{aligned} \sin x (-c + 2d - c) + \cos x (-d - 2c - d) + x(-a) + (-2a - b) &= \\ &= 6x + \sin x. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих функциях, находим:

$$-2c + 2d = 1, \quad -2d - 2c = 0, \quad -a = 6 \text{ и } -2a - b = 0$$

$$\therefore a = -6, \quad b = 12, \quad c = -\frac{1}{4} \text{ и } d = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, нашим решением будет:

$$y = (Ax + B)e^x - 6x + 12 - \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x.$$

Некоторые задачи, приведенные ниже, можно решить, используя метод нахождения частных решений.

### Задачи 9.13

Найдите частные решения и решите уравнения:

9.13.1.  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 6y + (x + 1)(x - 1).$

9.13.2.  $2 \frac{d^2y}{dx^2} - 11 \frac{dy}{dx} + 12y = (2x + 3)^2.$

9.13.3.  $4 \frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + y = e^{2x}.$

9.13.4.  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 2 \sin x.$

9.13.5.  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = -10 \sin 3x.$

### 9.14 D-операторы

В случае, когда при решении линейных дифференциальных уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами, общий вид которых дан в разделах 9.12 и 9.13, частное решение не

удается найти сразу, используется так называемый «оператор  $D$ ». Оператор  $D$  обозначает производную по переменной  $x$ , так что

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad D^3 = \frac{d^3}{dx^3} \text{ и т. д.}$$

Тогда уравнение (9.74) можно переписать в виде:

$$(D^2 - 2D + 1)y = (x + 1)^2. \quad (9.77)$$

Заметим, что  $D$ -операторы играют здесь совсем другую роль, чем переменная  $m$  в характеристическом уравнении. Помня об этом, мы можем сказать, что общее решение однородного дифференциального уравнения определяется из соотношения  $(D^2 - 2D + 1)y = 0$ , характеристическое уравнение того же вида имеет корни  $m = 1$ , с помощью которых находится функция  $u$ . Теперь, чтобы найти частное решение приведенного выше уравнения, мы просто разделим обе его части на  $D^2 - 2D + 1$ , то есть

$$y = \frac{(x + 1)^2}{D^2 - 2D + 1} = \\ = (x + 1)^2 (D^2 - 2D + 1)^{-1}.$$

Мы можем разложить последний член этого выражения  $[1 + (D^2 - 2D)]^{-1}$  в ряд (формула (6.14)):

$$y = [1 - (D^2 - 2D) + (D^2 - 2D)^2 - (D^2 - 2D)^3 + \dots](x + 1)^2.$$

Теперь, применяя оператор  $D$  к каждому члену  $(x + 1)^2$  и учитывая, что каждый член более высокой степени, чем  $D^2$ , есть нуль, получаем:

$$y = (x + 1)^2 - 2 + 4(x + 1) + 8$$

и

$$y = x^2 + 6x + 11.$$

Это выражение совпадает с соотношением (9.76), и общим решением, очевидно, снова будет:

$$y = (Ax + B)e^x + x^2 + 6x + 11.$$

Оператор  $D$  представляет собой удобный способ решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Система двух дифференциальных уравнений первого порядка решается относительно легко, но решение системы дифференциальных уравнений более высокого порядка представляет собой уже достаточно сложную задачу. Мы приведем два простых примера, чтобы на них продемонстрировать применяемые в этом случае методы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$2y_1 + \frac{dy_1}{dx} + 5y_2 = 0 \quad (9.78)$$

$$3y_1 + 5\frac{dy_2}{dx} + y_2 = 0. \quad (9.79)$$

Пусть  $D = d/dx$ , так что

$$(D + 2)y_1 + 5y_2 = 0 \quad (9.80)$$

и

$$(5D + 1)y_2 + 3y_1 = 0. \quad (9.81)$$

Умножая (9.78) на 3 и (9.79) на  $(D + 2)$ , имеем:

$$3(D + 2)y_1 + 15y_2 = 0 \quad (9.82)$$

$$3(D + 2)y_1 + (5D + 1)(D + 2)y_2 = 0. \quad (9.83)$$

Вычитая, получим:

$$\begin{aligned} 15y_2 - (5D + 1)(D + 2)y_2 &= 0 \\ \therefore y_2(-5D^2 - 9D + 17) &= 0. \end{aligned} \quad (9.84)$$

Станем рассматривать это уравнение как характеристическое, тогда  $m_1 = -2,95$  и  $m_2 = 1,15$ , поэтому

$$y_2 = \underline{Ae^{-2,95x} + Be^{1,15x}}.$$

Теперь, подставляя значение  $y_2$  в уравнение (9.78), имеем:

$$3y_1 + 5(-2,25Ae^{-2,95x} + 1,15Be^{1,15x}) + Ae^{-2,95x} + Be^{1,15x} = 0$$

$$\therefore 3y_1 = 10,25Ae^{-2,95x} - 6,75Be^{1,15x}$$

$$\therefore y_1 = \underline{3,42Ae^{-2,95x} - 2,25Be^{1,15x}}.$$

В качестве другого примера решим следующую систему уравнений:

$$3\frac{dy_1}{dx} - 6y_2 = 0 \quad (9.85)$$

$$4y_1 - \frac{dy_2}{dx} = 0. \quad (9.86)$$

И вновь, полагая  $D = d/dx$ , имеем:

$$3Dy_1 - 6y_2 = 0 \quad (9.87)$$

$$4y_1 - Dy_2 = 0. \quad (9.88)$$

Умножая (9.87) на 4 и (9.88) на  $3D$ , получаем:

$$12Dy_1 - 24y_2 = 0 \quad (9.89)$$

и

$$12Dy_1 - 3D^2y_2 = 0. \quad (9.90)$$

Вычитая (9.90) из (9.89), получаем:

$$3D^2y_2 - 24y_2 = 0,$$

и, следовательно,  $m_1 = 2,83$  и  $m_2 = -2,83$ , то есть:

$$y_2 = \underline{Ae^{2,83x} + Be^{-2,83x}}.$$

Аналогично подставляем значение  $y_2$  в уравнение (9.88):

$$4y_1 - 2,83Ae^{2,83x} + 2,83Be^{-2,83x} = 0$$

$$\therefore y_1 = \underline{0,71(Ae^{2,83x} - Be^{-2,83x})}.$$

### Задачи 9.14

Используйте метод  $D$ -оператора для решения следующих дифференциальных уравнений.

$$9.14.1 \quad 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)(x-1).$$

$$9.14.2 \quad D^2 + 2D + 1 = x.$$

$$9.14.3 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - y = x^3 + x.$$

### 9.15 Применение дифференциальных уравнений

Итак, основные сведения по дифференциальным уравнениям уже изложены. К сожалению, знакомство с дифференциальными уравнениями было довольно кратким. Как отмечалось в начале данной главы, дифференциальным уравнениям посвящены полностью многие учебники, и, конечно, здесь о них можно было бы сказать гораздо больше, поскольку на теории дифференциальных уравнений базируется математический аппарат, рассмотренный не только в этой, но и в предыдущей главах. Мы надеемся, однако, что читатель уже находится на той стадии, когда он в состоянии сам начать тщательно отбирать дальнейшую, более сложную математическую информацию из работ, предназначенных, скорее, для математиков, нежели для географов. В этой главе мы, насколько это было возможно, рассмотрели некоторые приемы решения дифференциальных уравнений, так что читатель теперь самостоятельно сможет решить простейшие из них. В физической географии редко встречаются дифференциальные уравнения, которые нельзя было бы решить с помощью одного из перечисленных здесь методов. Дифференциальные уравнения используются в основном для теоретического описания изучаемых процессов, и вследствие этого уравнения выше второго порядка встречаются редко. Очень многие исследования в физической географии в прошлом десятилетии были посвящены изучению склоновых процессов и связанным с ними процессам образования почв. В течение долгого периода времени в качестве объяснения выдвигалось множество теорий, которые, однако, не содержали тщательного количественного разбора изучаемых явлений. Применение законов механики для изучения движения частицы на склоне было описано в главе 3, где рассматривалось разложение сил по двум перпендикулярным направлениям. Такой простой подход был развит, в частности, Kirkby и Young, 1972. В еще более общем виде эти вопросы в геоморфологии нашли отражение в трудах Scheidegger, 1970. Ряд моделей склоновых процессов в зависимости от типа склона и географического района описан, например, в работах Shaw, Healy, 1977. Во всех этих публикациях дифференциальные уравнения использовались в целях описания теории исследуемого явления.

Уравнения большей сложности встречаются в динамической метеорологии и гидравлике (например, Youngs, Aggelides, 1976). Однако следует заметить, что географ, интересующийся теоретическими работами, содержащими сложные выкладки, должен быть достаточно подготовлен, чтобы иметь возможность работать с учебниками по высшей математике. При этом он может опираться на знания, полученные из данной книги. Разумеется, решение задач, содержащих дифференциальные уравнения в частных производных, требует гораздо больших знаний о свойствах частных производных, чем их в состоянии дать эта глава (см., например, Stephenson, 1973). Заметим, что решение дифференциальных уравнений сложного вида можно получить с помощью *преобразований Лапласа*. Те, кто интересуется этими вопросами, могут обратиться к работам G. Stephenson, 1973: *Mathematical methods for science students*. London: Longmans или M. N. Manougan, R. A. Northcutt, 1973: *Ordinary differential equations*. London: Charles E. Merrill, 1973, причем последняя книга написана в наиболее доступной форме и предназначена в основном для ученых-естественников, а не для математиков<sup>1</sup>.

В заключение этой главы рассмотрим два простых примера использования дифференциальных уравнений в географии. Оба они относятся к теории метеорологии.

### 9.16 Поля ветра в пограничном слое атмосферы

Турбулентное трение между земной поверхностью и атмосферой приводит к уменьшению скорости ветра и изменению направления ветра близ подстилающей поверхности. Максимальное уменьшение скорости ветра и наибольшее отклонение его направления отмечаются в так называемом «пограничном слое атмосферы». Таким слоем считаются нижние 500—1000 м тропосферы. Детальное наблюдение за возрастанием скорости ветра с высотой показало, что здесь нет прямопропорциональной (линейной) зависимости и что *вертикальный сдвиг ветра*, то есть скорость изменения скорости ветра на единицу расстояния по вертикали, максимален около земной поверхности при начальном условии, что на высоте ( $z$ ), равной нулю, скорость ветра ( $v$ ) также равна нулю. Следовательно, вертикальный сдвиг ветра уменьшается с ростом высоты, то есть можно написать:

$$\frac{dv}{dz} \sim \frac{1}{z}. \quad (9.91)$$

Это соотношение позволяет нам составить дифференциальное уравнение зависимости скорости ветра от высоты для данной подсти-

<sup>1</sup> См. также: И. П. Еругин, 1970: Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. М. — Прим. ред.

лающей поверхности. Вводя коэффициент  $b = u_*/k$ , где  $u_*$  — динамическая скорость ветра и  $k$  — постоянная Кармана (примерно 0,4), получаем следующее уравнение:

$$\frac{dv}{dz} = b \frac{1}{z}. \quad (9.92)$$

После интегрирования будем иметь:

$$v = b \ln z + C, \quad (9.93)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Таким образом, мы видим, что нелинейное увеличение скорости ветра с высотой в пограничном слое атмосферы имеет вид полулогарифмической зависимости. Такие уравнения служат фундаментом, на котором строятся математические модели поля ветра в пограничном слое.

### 9.17 Уравнения движения атмосферного воздуха

Вывод уравнений скорости геострофического и градиентного ветра плохо понимается большей частью студентов. По этой причине второй пример использования дифференциальных уравнений в географии мы также заимствуем из области наук об атмосфере. Для того чтобы в атмосфере могло произойти любое движение, нужно приложить силу, сообщающую ускорение частице воздуха. Частица воздуха, даже на молекулярном уровне, имеет массу, и поэтому прикладываемая сила определяется произведением массы частицы на ускорение, то есть:

$$F = ma. \quad (9.94)$$

В атмосфере такой силой является сила градиента давления (барический градиент), который вызывает ускорение воздушной частицы в горизонтальной плоскости. В пределах земной атмосферы мы можем разложить градиент давления по двум горизонтальным и вертикальному направлениям. Если обозначить через  $u$ ,  $v$  и  $w$  составляющие скорости в каждом направлении  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то будем иметь:

$$F_x = m \frac{du}{dt} \quad (9.95)$$

$$F_y = m \frac{dv}{dt} \quad (9.96)$$

$$F_z = m \frac{dw}{dt}. \quad (9.97)$$

Поскольку давление является единственной силой, действующей на частицу воздуха в горизонтальной плоскости, можно считать, что вдоль оси  $x$  давление  $p$  вызывает силу  $pdydz$ , действующую на прямоугольную площадку  $ABCD$  (рис. 9.1). Так как имеется гра-

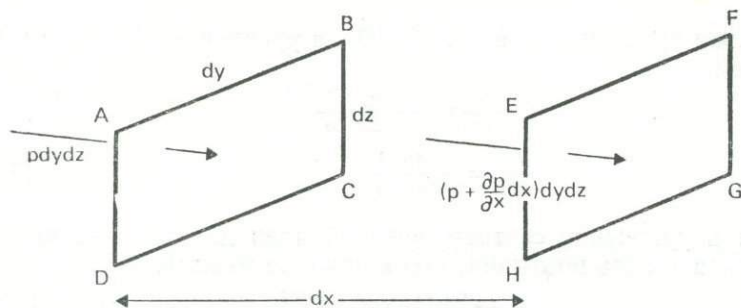


Рис. 9.1. Градиент давления.

диент давления  $(\partial p/\partial x)$  в направлении  $x$ , то сила барического градиента

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz$$

будет оказывать воздействие на другую прямоугольную площадку  $EFGH$ , находящуюся на расстоянии  $dx$ . Заметим, что для обозначения градиента давления мы использовали частные производные, поскольку градиент давления может быть разложен по трем направлениям в соответствии с наличием трех независимых переменных  $x, y, z$ . Разность между этими двумя силами дает градиент давления в направлении  $x$ , то есть:

$$F_x = m \left[ p dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz \right] = \quad (9.98)$$

$$= -m \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \right). \quad (9.99)$$

Считая, что масса частицы воздуха равна единице, и учитывая, что плотность  $(\rho)$  есть отношение массы тела к его объему, имеем:

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} \quad (9.100)$$

и аналогично

$$F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{\rho}. \quad (9.101)$$

Мы можем получить такое же выражение и для вертикального направления  $z$ , но в этом случае мы должны принять во внимание ускорение силы тяжести  $g$ , которое вызывает падение атмосферного давления с высотой (вертикальный барический градиент), и отсюда:

$$F_z = g = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho}. \quad (9.102)$$

Сравнивая уравнение (9.95) с (9.100), а уравнение (9.96) с (9.101), получаем:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} \quad (9.103)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial u} \frac{1}{\rho}. \quad (9.104)$$

Введем в уравнение соответствующий член для выражения силы Кориолиса (опять по отношению к единице массы):

$$C = 2V\Omega \sin \phi = Vf, \quad (9.105)$$

где  $V$  — скорость ветра, направленная по градиенту давления (полному),  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\phi$  — географическая широта, а  $f$  — так называемый параметр Кориолиса. Если мы разложим силу Кориолиса по двум взаимно перпендикулярным направлениям  $y$  и  $x$ , скорости вдоль которых обозначены соответственно через  $v$  и  $u$ , и вспомним, что сила Кориолиса пропорциональна по величине и перпендикулярна по направлению скорости ветра, то увидим, что компонента силы Кориолиса  $vf$  не связана с компонентой ускорения  $dv/dt$  в направлении  $y$ , а связана с компонентой  $du/dt$  в направлении  $x$ . Сказанное схематически изображено на рис. 9.2, а для компонент, действующих в направлении  $x$ , и на рис. 9.2, б — для направления  $y$ .

Таким образом, уравнения движения в направлениях  $x$  и  $y$  примут вид:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} + vf \quad (9.106)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{\rho} - uf \quad (9.107)$$

Можно преобразовать уравнения (9.106) и (9.107), заметив, что если  $du/dt$  и  $dv/dt$  равны нулю, то составляющие скорости ветра,

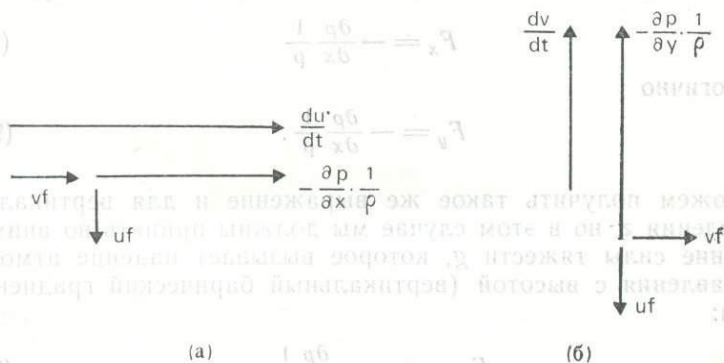


Рис. 9.2. Компоненты силы Кориолиса.

отвечающие этим условиям, будут пропорциональны градиенту давления, так что для  $u$  мы имеем:

$$u = -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{\rho}, \quad (9.108)$$

а для  $v$ :

$$v = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho}. \quad (9.109)$$

Условия, при которых составляющие ускорения по каждому направлению равны нулю, определяют условия *установившегося течения*, и возникающий ветер, образующий прямой угол с градиентом давления (то есть он направлен по параллельным изобарам), называется *геострофическим*. Такой ветер должен дуть перпендикулярно направлению градиента давления, поскольку в выражении для  $u$  (компоненты вдоль оси  $x$ ) содержится градиент давления только вдоль оси  $y$ . Мы можем записать уравнение для геострофического ветра, найдя компоненты  $u$  и  $v$  для любого момента времени, так как такой ветер дует параллельно построенным изобарам. Обозначая скорость геострофического ветра через  $V_g$ , будем иметь:

$$V_g = \frac{dp}{dn} \frac{1}{\rho}, \quad (9.110)$$

где  $n$  — направление по нормали к изобарам. Обратите внимание, что в этом случае мы использовали обыкновенную производную. Для *искривленного* изобарического течения следует преобразовать уравнение (9.110), добавив член, отражающий *центростремительное ускорение*. Это ускорение искривляет траекторию движения частиц воздуха относительно изобары. Центростремительное ускорение возрастает с уменьшением радиуса кривизны траектории и с увеличением скорости ветра. Отсюда, если обозначить через  $r$  радиус кривизны, то для *антициклона*, где центростремительное ускорение направлено *против* градиента давления, получим:

$$fV = \frac{V^2}{r} - \frac{dp}{dr} \frac{1}{\rho}, \quad (9.111)$$

а для *циклона*, где барический градиент и центростремительное ускорение действуют в одном направлении, будем иметь:

$$-\frac{V^2}{r} - \frac{dp}{dr} \frac{1}{\rho} = fV. \quad (9.112)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Читатель, который, по-видимому, уже слегка утомился, штудировав две последние главы, должно быть, с радостью почувствует, что «заклучение» предвещает конец книги! Правда, некоторым читателям книга лишь помогла освежить их знания по математике. В эту категорию, в частности, попадут те, кто уже прослушал (и изучил!) курс математики повышенного уровня, поэтому понимание текста не представляло для них никаких проблем. Но мы надеемся, что большинство читателей, не принадлежащих к этой категории, также не испытывали при чтении слишком уж больших трудностей, даже если принять, что их первоначальное знание математики было едва ли не равно нулю.

Однако и тем и другим необходимо напомнить, что для физико-географа изучение математики не должно быть самоцелью. Действительно, довольно часто удается создать математическую модель многих физико-географических процессов, но при этом нельзя забывать, что полученные модели обязательно следует увязывать с «реальным миром», сопоставляя их при помощи статистических методов с данными натурных наблюдений. Мы также надеемся, что читатель после прочтения книги достиг такого уровня знаний, что теперь при встрече со статистическими формулами, столь часто превращавшимися для него в камень преткновения, он станет воспринимать их гораздо легче. Заметим также, что для того, чтобы исследователю осуществить, а студенту понять математическое моделирование, и тот и другой должны иметь солидный запас знаний о существовании физических и химических процессов, протекающих в моделируемом объекте. Очень часто понимание этих процессов в значительной мере облегчается посредством применения математических формул. Газовые законы, например, запоминаются намного быстрее, если они выражены в виде уравнения, а не в словесной форме.

Сведений по математике, содержащихся в этой книге, вполне достаточно, чтобы уметь решать многие географические задачи. Основы физики и химии, необходимые физико-географу, можно найти в соответствующих учебниках. Но в качестве последнего наказа еще раз важно подчеркнуть, что мы, географы, никогда не должны позволять математике занять место хозяина в нашей работе, а всякий раз рассматривать ее всего лишь как необходимую помощницу подобно тому, как она является помощницей любой другой естественнонаучной дисциплины.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

### Глава 1

- 1.6.1  $\bar{2},1761$ ;  $-1,8239$ .  
1.6.2  $1,0878$ .  
1.6.3  $1,7547$ .  
1.6.4  $\bar{3},3979$ ;  $-2,6021$ .  
1.6.5  $\bar{2},7324$ ;  $-1,2676$ .  
1.6.6  $\bar{2},7324$ ;  $-1,2676$ .  
1.6.7  $0,7140$ .  
1.6.8  $0,0436$ .  
1.6.9  $1,414$ ;  $76\ 010$ ;  $759,7$ ;  $1,442$ .

### Глава 2

- 2.5.1 Северная —  $4,03$  м/сек; западная —  $4,03$  м/сек.  
2.5.2  $2,3$ ;  $86^\circ$ .  
2.5.3  $0,1414$  мг.  
2.5.4 На берег под углом  $54^\circ$  к береговой линии со скоростью  $7,7$  м/сек.  
2.5.5 Вверх по склону, под углом  $63^\circ 26' 66''$  к горизонту, со скоростью  $5,59$  м/сек.  
2.9.1  $a \cdot b = 27$ ;  $\theta = 34^\circ 45'$ ;  $a \wedge b = -i - 7j + 19k$ .  
2.9.2  $a \cdot b = 0$ ;  $\theta = 90^\circ 00'$ ;  $a \wedge b = -20i - 12j - 4k$ .  
2.9.3  $a \cdot b = -60,58$ ;  $\theta = 131^\circ 39'$ ;  $a \wedge b = -37,03i - 52,07j - 18,8k$ .

### Глава 3

- 3.2.1  $x = -\frac{5}{9}$ ,  $y = -5$ .  
3.2.2  $x = \frac{1}{4}$ ,  $y = \frac{3}{4}$ .  
3.2.3  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 1\frac{1}{4}$ .  
3.2.4  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ .  
3.2.5  $x = 2$ .  
3.2.6  $x = 0$ ,  $y = 2$ .  
3.2.7 Нет решений, прямые параллельны.  
3.2.8  $x = 1$ ,  $y = -2$ .

- 3.5.1 По методу приведенной главной оси:  $y = 0,67x + 0,91$ ;  
 регрессия  $x$  по  $y$ :  $y = 0,68x + 0,85$ ;  
 регрессия  $y$  по  $x$ :  $y = 0,66x + 0,96$ .
- 3.5.2 По методу приведенной главной оси:  $y = 57,7 - 0,57x$ ;  
 регрессия  $x$  по  $y$ :  $y = 70,4 - 0,91x$ ;  
 регрессия  $y$  по  $x$ :  $y = 49,3 - 0,35x$ .

#### Глава 4

4.3.1  $\begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$ .

4.3.2  $\begin{pmatrix} -42 \\ 51 \\ 24 \end{pmatrix}$ .

4.3.3  $A = B$  при  $x = 10$ ,  $y = 5$ .

4.8.1  $|A| = 29$ ,  $\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 13 & 11 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 18 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ .

4.8.2  $|A| = 1$ ,  $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

4.8.3  $|A| = 3$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

4.10.1  $\lambda = 10,75$  или  $-0,75$ ;  $y = 2,2x$ ;  $y = -0,7x$ .

4.10.2  $\lambda = 5$  или  $2$ ;  $y = -4,5x$ ;  $y = -3x$ .

4.10.3  $\lambda = 3,56$  или  $-0,56$ ;  $y = 0,28x$ ;  $y = -1,78x$ .

#### Глава 5

5.1.1  $dy/dx = 1,5x^2$ ;  $d^2y/dx^2 = 30x$ .

5.1.2  $dy/dx = -4x$ ;  $d^2y/dx^2 = -4$ .

5.1.3  $dy/dx = x^2 - \frac{2}{3} + \frac{10}{3}x$ ;  $d^2y/dx^2 = 2x + \frac{10}{3}$ .

5.1.4  $dy/dx = 12$ ;  $d^2y/dx^2 = 0$ .

5.1.5  $dy/dx = 3x^2 - 1$ ;  $d^2y/dx^2 = 6x$ .

5.1.6  $dy/dx = -2x^{-3}$ ;  $d^2y/dx^2 = 6x^{-4}$ .

5.1.7  $dy/dx = -8x^{-5}$ ;  $d^2y/dx^2 = 40x^{-6}$ .

- 5.1.8  $dy/dx = 2x - 2$ ;  $d^2y/dx^2 = 2$ .
- 5.1.9  $dy/dx = x^2 - 2x$ ;  $d^2y/dx^2 = 2x - 2$ .
- 5.1.10  $dy/dx = x^2 - 6x + 9$ ;  $d^2y/dx^2 = 2x - 6$ .
- 5.4.1  $(x + 2)(x - 2)$ ;  $x = \pm 2$ .
- 5.4.2  $(x + 8)^2$ ;  $x = -8$ .
- 5.4.3  $2(x - 1)(x + 3)$ ;  $x = 1$  или  $-3$ .
- 5.4.4  $(3x + 1)(x + 1)$ ;  $x = -\frac{1}{3}$  или  $-1$ .
- 5.4.5  $(1 - x)(1 + x)$ ;  $x = \pm 1$ .
- 5.4.6  $x = -1$  или  $\frac{1}{3}$ .
- 5.4.7  $x = \pm 2$ .
- 5.4.8  $x = 1,64$  или  $-0,24$ .
- 5.4.9  $x = \frac{5}{6}$  или  $\frac{1}{2}$ .
- 5.4.10 Нет действительных корней, поскольку  $(b^2 - 4ac)$  отрицательно.
- 5.4.11  $x = +3$ ,  $+1$  или  $-3$ .
- 5.4.12  $x = \frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{2}$  или  $-2$ .
- 5.4.13  $(0; 0)$  минимум.
- 5.4.14  $(0; 4)$  максимум.
- 5.4.15  $(0,19; 0,06)$  минимум;  $(-3,52; 49,76)$  максимум.
- 5.4.16 Линейная функция.
- 5.4.17  $(0,58; -0,39)$  минимум;  $(-0,58; 0,39)$  максимум.
- 5.4.18 Нет стационарных точек: почему?
- 5.4.19 Нет стационарных точек: почему?
- 5.4.20  $(1; -1)$  минимум.
- 5.4.21  $(2; 2\frac{2}{3})$  минимум;  $(0; 4)$  максимум.
- 5.4.22  $(3; 13)$  точка перегиба.
- 5.5.1  $5(4x + \cos x)$ .
- 5.5.2  $4(1 - 4x^2)^{-1/2}$ .
- 5.5.3  $6x^{-1}$ .
- 5.5.4  $(1 - 2 \ln x)x^{-3}$ .
- 5.5.5  $2(1 - 2 \sin^2 x)$ .
- 5.5.6  $2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$ .
- 5.5.7  $\frac{1}{x} \sec^2(\ln x)$ .
- 5.5.8  $2e^{2x}[\ln(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)^{-1}]$ .
- 5.5.9  $\operatorname{csc} x(1 + \ln x - x \ln x \operatorname{ctg} x)$ .
- 5.5.10  $1 + \ln x - 5\left(\frac{1}{x} \sin x + \frac{1}{x^2} \cos x\right)$ .

## Глава 6

- 6.1.1 Арифметическая:  $a = 2,50$ ;  $d = -1,25$ .
- 6.1.2 Арифметическая:  $a = 2x$ ;  $d = x$ .

- 6.1.3 Геометрическая:  $a = 6$ ;  $r = 6$ .  
 6.1.4 Геометрическая:  $a = 2,1$ ;  $r = 4$ .  
 6.1.5 Геометрическая:  $a = -3$ ;  $r = 0,5$ .  
 6.1.6  $-6,25$ ;  $-8,75$ .  
 6.1.7  $9x$ ;  $11x$ .  
 6.1.8  $1\ 679\ 616$ ;  $60\ 466\ 176$ .  
 6.1.9  $34406,4$ ;  $550502,4$ .  
 6.1.10  $-0,024$ ;  $-0,0058$ .  
 6.3.1  $177,5$ .  
 6.3.2  $-31,2$ .  
 6.3.3  $93$ .  
 6.3.4  $0,8$ .  
 6.3.5  $14$ .  
 6.4.1  $2,5$ .  
 6.4.2  $0,3$ .  
 6.4.3  $7161$ .  
 6.4.4  $5904,8$ .  
 6.4.5  $0,60$ .  
 6.5.1  $1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$ .  
 6.5.2  $\frac{1}{9} + \frac{2}{27}y + \frac{1}{27}y^2 + \frac{4}{243}y^3 + \frac{5}{729}y^4$ .  
 6.5.3  $625y^4 + 1000y^3x + 600y^2x^2 + 160yx^3 + 16x^4$ .  
 6.5.4  $2 - 4x + 8x^2 - 16x^3 + 32x^4$ .  
 6.5.5  $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ .

### Глава 8

- 8.4.1  $\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$ .  
 8.4.2  $5(x^3 - 5x + x^2) + C$ .  
 8.4.3  $-2$ .  
 8.4.4  $19,30$ .  
 8.4.5  $\pi/6 = 0,5236$  радиана  $= 30^\circ$ .  
 8.4.6  $-435,75$ .  
 8.4.7  $1,6094$ .  
 8.4.8  $\operatorname{tg} x - 2 \sin x + C$ .  
 8.6.1  $\frac{5}{4}x^2(2 \ln x - 1) + C$ .  
 8.6.2  $3(x^2 + 2) \sin x - (x^2 + 6)x \cos x + C$ .  
 8.6.3  $x(\ln x - 1) + C$ .  
 8.6.4  $x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + C$ .  
 8.6.5  $x^3\left(\ln x + \frac{2}{3}\right) + C$ .  
 8.7.1  $\frac{5}{2} \sin^2 x + C$ .

- 8.7.2  $-\frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C.$   
 8.7.3  $\frac{2}{5} (1-x)^{5/2} - \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} + C.$   
 8.7.4  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C.$   
 8.7.5  $-\frac{1}{6} e^{-2x} + C.$   
 8.9.1  $\frac{5}{4} \ln(x-3) - \frac{1}{4} \ln(x+1) + C.$   
 8.9.2  $\ln(x-3) - \ln(x-2) + C.$   
 8.9.3  $\frac{1}{4} [\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)] + C.$   
 8.9.4  $\ln x - 3/(x+1) + C.$   
 8.9.5  $\arcsin x - (1-x^2)^{1/2} + C.$

### Глава 9

- 9.3.1  $\partial x/\partial z = 15y; \partial^2 x/\partial z^2 = 0; \partial x/\partial y = 5(3z-2);$   
 $\partial^2 x/\partial y^2 = 0.$   
 9.3.2  $\partial x/\partial z = \operatorname{tg} y (1+2z \operatorname{tg} y); \partial^2 x/\partial z^2 = 2 \operatorname{tg}^2 y.$   
 $\partial x/\partial y = z \sec^2 y (1+2z \operatorname{tg} y).$   
 $\partial^2 x/\partial y^2 = 2z \sec^2 y (z + \operatorname{tg} y + 3z \operatorname{tg}^2 y).$   
 9.3.3  $\partial x/\partial z = y/z + 2y + \ln y; \partial^2 x/\partial z^2 = -y/z^2.$   
 $\partial x/\partial y = \ln z + 2z + z/y; \partial^2 x/\partial y^2 = -z/y^2.$   
 9.3.4  $\partial x/\partial z = 2 \cos z \cos y - 3y \sec^2 zy.$   
 $\partial^2 x/\partial z^2 = -2 \sin z \cos y - 6y^2 \operatorname{tg}^2 zy \sec^2 zy.$   
 $\partial x/\partial y = -2 \sin z \sin y - 3z \sec^2 zy.$   
 $\partial^2 x/\partial y^2 = -2 \sin z \cos y - 6z^2 \operatorname{tg} zy \sec^2 zy.$   
 9.3.5  $\partial x/\partial z = 6z + 2 \operatorname{arctg} y; \partial^2 x/\partial z^2 = 6.$   
 $\partial x/\partial y = -6y + 2z/(1+y^2); \partial^2 x/\partial y^2 = -6 - 4yz/(1+y^2)^2.$   
 9.5.1  $5y(x+C) + 1 = 0.$   
 9.5.2  $y^2 - 8x = C.$   
 9.5.3  $3 \operatorname{ctg} y - 2x = C.$   
 9.5.4  $x + e^{-2y} = C.$   
 9.5.5  $2y \left(4 + \frac{1}{3} y^2\right) - 3x = C.$   
 9.6.1  $2y^2(5x^4 + 4C) + 4 = 0.$   
 9.6.2  $2y(\operatorname{ctg} x - C) - 1 = 0.$   
 9.6.3  $\sin y + \cos x = C.$   
 9.6.4  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 y - 2 \ln x = C.$   
 9.6.5  $\ln y = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$   
 9.7.1  $x/y - \ln x = C.$

- 9.7.2  $y^4 = 4x^2 \ln Cx.$   
 9.7.3  $(y - x) = C(y + x)^3.$   
 9.8.1  $y^2(\sin x + x) + Cy = 0.$   
 9.8.2  $(y - x) \ln x + (x + 1)xy^2 - x^2 = C.$   
 9.8.3  $x^3 + 9yx - y^3 = C.$   
 9.8.4  $-y \operatorname{tg} x - \cos y = C.$   
 9.8.5  $y(x - 1) - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = C.$   
 9.9.1 Аналогично 9.8.1.  
 9.9.2  $yx(3x + 2y) - \frac{1}{2}y(y + 4x) = C$  (множитель  $y/x$ ).  
 9.9.3  $x + y \ln x = C$  (множитель  $1/x$ ).  
 9.9.4  $2x^2 \sec y - xy(xy^2 - 3xy + 6y) = C$  (множитель  $\operatorname{tg} x$ ).  
 9.9.5  $2y^3x^2 - 9y^2x + 12y = C$  (множитель  $1/6y$ ).  
 9.10.1  $x(3y - 2) = C.$   
 9.10.2  $y + 2x^2 - yx = C.$   
 9.10.3  $2y \sin x = C.$   
 9.10.4  $y \operatorname{tg} x + \cos y = C.$   
 9.10.5  $3xy + \frac{1}{3}(x^3 - y^3) = C.$   
 9.12.1  $y = (Ae^{2x} + Be^{-2x}).$   
 9.12.2  $y = (Ax + B)e^{-6x}.$   
 9.12.3  $y = Ae^{-0,5x} + Be^{2x}.$   
 9.12.4  $y = Ae^{0,54x} + Be^{-3,34x}.$   
 9.12.5  $y = (Ax + B)e^{1,2x}.$   
 9.13.1  $6y = Ae^{-2x} + Be^{3x} - x^2 + x/3 + 11/18.$   
 9.13.2  $y = Ae^{4x} + Be^{1,5x} + 0,33x^2 + 1,11x + 1,66.$   
 9.13.3  $y = (Ax + B)e^{-1/2x} + e^{2x}/9.$   
 9.13.4  $y = (Ax + B)e^x + \cos x.$   
 9.13.5  $13y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + 10 \sin 3x.$   
 9.14.1  $2y = Ae^{-2x} + Be^{1/2x} - x^2 - 3x - 11/2.$   
 9.14.2  $y = (Ax + B)e^{-x} + x - 2.$   
 9.14.3 См. 9.13.2.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Греческий алфавит и его употребление<sup>1</sup>

Буква	Название	Возможное использование в географии
Α α	альфа	В качестве констант
Β β	бэ́та	В качестве констант
Γ γ	гамма	В качестве констант
Δ δ	дельта	При вычислениях обозначает «изменения в»
Ε ε	эпсилон	Для обозначения фазового угла (длин волн)
Ζ ζ	дзета	Для обозначения завихренности (например, циклонической)
Η η	эта	
Θ θ	тэ́та	Для обозначения углов
Ι ι	йота	
Κ κ	каппа	В распределении Пирсона
Λ λ	ламбда	Для обозначения длины волны
Μ μ	мю (ми)	Для обозначения микро́на ( $10^{-6}$ м) <sup>2</sup>
Ν ν	ню (ни)	Для обозначения частоты (волновых явлений)
Ξ ξ	кси	
Ο ο	омикрон	
Π π	пи	При вычислениях, относящихся к округности ( $\pi = 3,1412$ )
Ρ ρ	ро	Для обозначения плотности
Σ σ	сигма	В статистике для обозначения суммирования
Τ τ	тау	В статистике (Т-Кендалла)
Υ υ	юпсилон (ипсилон)	
Φ φ	фи	Для обозначения углов
Χ χ	хи	В статистике (критерий хи-квадрат)
Ψ ψ	пси	
Ω ω	омега	Для обозначения угловой скорости

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что рекомендованное здесь использование греческих букв ни в коей мере не является нормативным. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> В литературе на русском языке микро́н часто обозначают как мк. — *Прим. ред.*

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Международная система единиц измерения (СИ) <sup>1</sup>

#### А.2.1 Стандартные единицы

Эти единицы измерения введения в соответствии с не так давно принятой Международной системой единиц, полное описание которой можно найти в книге: The International System of Units, National Physical Laboratory, HMSO, 1970. В системе СИ в качестве основных единиц использованы метр (м) как единица длины, килограмм (кг) как единица массы и секунда (сек) как единица времени. Напомним, что в предшествующей системе CGS использовались соответственно сантиметр (см), грамм (г) и секунда (сек). Британская (имперская) система, использующая фут, фунт и секунду (FPS), в настоящее время большей частью вышла из употребления, за исключением США. В этой книге в основном мы придерживаемся системы СИ, кроме тех случаев, когда приводятся ссылки на исследования, выполненные в иных системах, и когда перевод из одних единиц в другие может привести к путанице.

Имеется три типа единиц измерения: *основные, производные и дополнительные.*

##### А.2.1.1 Основные единицы

**Длина:** метр (м)

За один метр принята длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона-86.

**Масса:** килограмм (кг)

За один килограмм принята масса прототипа эталона, сделанного из иридиевой платины и хранящегося в Междуна-

---

<sup>1</sup> Система единиц СИ (SI — System International) введена с 1 января 1963 г. государственным стандартом СССР (ГОСТ 9867—61). Читатели, желающие более подробно ознакомиться с системой СИ, могут обратиться, например, к книге: А. Чертова, 1963: Международная система единиц измерения. Росвузиздат. — Прим. ред.

родной палате мер и весов (International Bureau of Weights and Measures).

**Время:** секунда (сек)

За одну секунду принята  $1/86400$  доля средних солнечных суток. В настоящее время секунда определяется через период полураспада атома цезия-133.

**Температура:** Кельвин (К)

За один Кельвин принята единица измерения температуры по термодинамической температурной шкале, равная  $1/273,16$  температуры тройной точки воды<sup>1</sup> ( $0^\circ\text{C} = 273,16^\circ\text{K}$ ).

**Сила света:** кандела (кд)<sup>2</sup>

За одну канделу принято количество световой энергии, излучаемое в перпендикулярном направлении с  $1/600\,000$  части квадратного метра абсолютно черного тела при температуре затвердевания платины под давлением в 101 325 ньютонов на 1 квадратный метр.

**Количество вещества:** моль

За один моль принимается количество вещества, содержащее такое же число структурных единиц (атомов, молекул, ионов или электронов), сколько атомов содержится в  $0,012$  кг углерода-12<sup>3</sup>.

#### А.2.1.2. Производные и дополнительные единицы

Площадь	квадратный метр	$\text{м}^2$
Объем	кубический метр	$\text{м}^3$
Скорость	метр в секунду	$\text{м}/\text{сек}$
Ускорение	метр на секунду в секунду	$\text{м}/\text{сек}^2$
Волновое число	1 на метр	$1/\text{м}$
Плотность	килограмм на кубический метр	$\text{кг}/\text{м}^3$
Освещенность	кандела на квадратный метр	$\text{кд}/\text{м}^2$
Частота	герц (Гц)	$\text{сек}^{-1}$
Сила	ньютон (Н)	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{сек}^{-2}$
Давление	паскаль (Па)	$\text{Н}/\text{м}^2$
Энергия	джоуль (Дж)	$\text{Н} \cdot \text{м}$
Мощность	ватт (Вт)	$\text{Дж}/\text{сек}$

<sup>1</sup> Тройная точка характеризуется тем, что при соответствующей температуре и давлении одно и то же вещество находится в трех агрегатных состояниях, то есть насыщенный пар находится в равновесии как с жидкостью, так и с твердым телом. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> Прежнее название «свеча». — *Прим. ред.*

<sup>3</sup> Это число атомов равно  $6,022 \cdot 10^{23}$  (число Авогадро). Еще одной основной единицей системы СИ служит единица силы тока — ампер (А). За один ампер принята сила неизменяющегося тока, который, протекая по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу в  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютонов на каждый метр длины проводника. — *Прим. ред.*

Градус (угловой)	( $\pi/180$ ) радиан	( $\pi = 3,1412$ )
Минута (угловая)	1/60 градуса	
Секунда (угловая)	1/60 минуты	
Литр (л)	один кубический дециметр	( $10^{-3} \text{ м}^3$ )
Тонна (т)	$10^3 \text{ кг}$	
Момент силы	ньютон метр	н · м
Поверхностное натяжение	ньютон на метр	н/м
Плотность теплового потока	ватт на квадратный метр	вт/м <sup>2</sup>
Теплоемкость	джоуль на Кельвин	дж/К
Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм на Кельвин	дж/(кг · К)
Теплопроводность	ватт на метр на Кельвин	вт/(м · К)
Плоский угол	радиан (рад)	
Телесный угол	стерадиан (ср)	
(Радиан — плоский угол между двумя радиусами круга, выражающий на окружности дугу, длина которой равна радиусу)		
Угловая скорость	радиан в секунду	рад/сек
Угловое ускорение	радиан на секунду в секунду	рад/сек <sup>2</sup>

### А.2.2 Множители к единицам измерения

Для обозначения множителей к единицам системы СИ от  $10^{12}$  до  $10^{-18}$  имеются соответствующие приставки

$10^{12}$ тера	Т	$10^{-1}$	деци	д
$10^9$ гига	Г	$10^{-2}$	санти	с
$10^6$ мега	М	$10^{-3}$	милли	м
$10^3$ кило	к	$10^{-6}$	микро	мк
$10^2$ гекто	г	$10^{-9}$	нано	н
$10^1$ дека	да	$10^{-12}$	пико	п
		$10^{-15}$	фемто	ф
		$10^{-18}$	атто	а

### А.2.3 Нестандартные единицы

Ангстрем	( $\text{Å}$ )	$= 0,1 \text{ нм} = 10^{-10} \text{ м}$
Бар	(бар)	$= 0,1 \text{ Мпа} = 10^5 \text{ па}$ (1 миллибар = 1/1000 бара)
Эрг	(эрг)	$= 10^{-7} \text{ дж}$
Дина	(дин)	$= 10^{-5} \text{ н}$
Пуаз	(пз)	$= 0,1 \text{ па} \cdot \text{сек}$
Калория	(кал)	$= 4,1868 \text{ дж}$
Микрон	(мк)	$= 10^{-6} \text{ м}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Четырехзначные таблицы  
десятичных логарифмов

## МАНТИССЫ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11

35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6

# МАНТИССЫ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблицы синусов, косинусов  
и тангенсов

## СИНУСЫ

°	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
0	,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	,1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	,1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	,1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	,1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	11	14
10	,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	,1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	,2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	,2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	,2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	,2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	,2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	,3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	,3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	,3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	,3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	13
23	,3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	13
24	,4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13

СИНОУСЫ

°	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
25	,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	,4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	,4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	,4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	,4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	,5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	,5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	,5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	,5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	10	12
36	,5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	,6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	,6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	,6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	,6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	,6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	,6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	,6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10
45	,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	,7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	,7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	,7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	,7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	,7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	,7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	,7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	,8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8

55	,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	,8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	,8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	,8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	,8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	,8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	,8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	,8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	,8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	,9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	,9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	4	4
73	,9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	,9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	,9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	,9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	,9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	,9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	,9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	,9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	,9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	,9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	,9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	1
85	,9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	,9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	,9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	0	0
88	,9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	,9998	9999	9999	9999	9999	1,0000	1,0000	1,000	1,000	1,000	0	0	0	0	0

## КОСИНУСЫ

ПОПРАВКА

°	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	,9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	,9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	,9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	0	0
3	,9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	,9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	,9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	1
6	,9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	,9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	,9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	,9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	,9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	,9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	,9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	,9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	,9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	,9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	,9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	,9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	4	4
18	,9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	,9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	,9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	,9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	,9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	,9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	,9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	,9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	,8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	,8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	,8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	,8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7

30	,8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	,8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	,8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	,8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	,8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	,8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	,8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	,7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	,7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	,7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	,7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	,7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	,7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	,7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	,7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10
45	,7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	,6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	,6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	,6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	,6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	,6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	,6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	,6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	,6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	,5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	,5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	,5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	,5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	,5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	,5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60	,5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	,4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	,4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	,4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	,4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13

## КОСИНУСЫ

ПОПРАВКА

°	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
65	,4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	,4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	13
67	,3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	13
68	,3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	,3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70	,3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	,3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	,3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	,2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	,2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	,2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	,2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	,2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	,2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	,1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80	,1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	11	14
81	,1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	,1392	1374	1357	1340	1323	1305	1278	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	,1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	,1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	,0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	14
86	,0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	,0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	,0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	,0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15

ПОПРАВКА

Цифры, выделенные жирным шрифтом, показывают, что произошло изменение целой части.

## ТАНГЕНСЫ

0	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
0	,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19

## ТАНГЕНСЫ

0	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
30	,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	,9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29
45	1,0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1,0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1,0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1,1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	26	33
49	1,1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1,1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1,2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1,2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1,3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1,3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1,4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1,4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1,5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1,6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1,6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56

60	1,7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12 24 36 48 60
61	1,8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13 26 38 51 64
62	1,8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14 27 41 55 68
63	1,9626	9711	9797	9883	9970	<b>0057</b>	<b>0145</b>	<b>0233</b>	<b>0323</b>	<b>0413</b>	15 29 44 58 73
64	2,0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16 31 47 63 78
65	2,1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17 34 51 68 85
66	2,2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18 37 55 73 92
67	2,3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20 40 60 79 99
68	2,4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22 43 65 87 108
69	2,6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24 47 71 95 118
70	2,7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26 52 78 104 130
71	2,9042	9208	9375	9544	9714	9887	<b>0061</b>	<b>0237</b>	<b>0415</b>	<b>0595</b>	29 58 87 116 145
72	3,0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32 64 96 129 161
73	3,2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36 72 108 144 180
74	3,4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41 81 122 163 203
75	3,7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	Следует интер- полировать
76	4,0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	
77	4,3315	3662	4015	4373	4737	5107	5483	5864	6252	6646	
78	4,7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	<b>0045</b>	<b>0504</b>	<b>0970</b>	
79	5,1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140	
80	5,6713	7297	7894	8502	9124	9758	<b>0405</b>	<b>1066</b>	<b>1742</b>	<b>2432</b>	
81	6,3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	<b>0264</b>	
82	7,1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	<b>0285</b>	
83	8,1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	<b>0579</b>	<b>2052</b>	<b>3572</b>	
84	9,5144	6768	8448	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20	
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	

Цифры, выделенные жирным шрифтом, показывают, что произошло изменение целой части.

Статистическое приложение

**П.5.1 Стандартное отклонение, среднее, мода и медиана**

*Среднее арифметическое* для выборочной совокупности данных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i.$$

Следует заметить, что крайне редко нам удается получить *истинное* среднее значение ( $\mu$ ) генеральной совокупности, и мы должны предвидеть, что среднее арифметическое в выборке будет отличаться от истинного среднего. *Модой* выборки называется числовое значение переменной или класс значений (например, 1—1,9), которые наиболее часто встречаются в выборке (наиболее вероятное значение). Мода соответствует максимуму кривой частоты распределения (см. раздел 7.4). Некоторые распределения могут иметь два или более «пиков», соответственно они называются *бимодальными* и *полимодальными* распределениями. *Медиана* — это термин для обозначения среднего члена упорядоченной последовательности значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ <sup>1</sup>. Для иллюстрации возьмем выборку, состоящую из 21 значения:

7, 5, 3, 6, 9, 4, 2, 4, 11, 13, 5, 4, 3, 3, 4, 6, 4, 8, 10, 12, 1.

Среднее арифметическое в выборке равно 5,91. Переписав все числа в порядке возрастания, будем иметь:

1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Очевидно, что наиболее часто встречающееся в ряду значение, то есть мода, равно 4. Кривая частоты распределения приведена на рисунке, откуда видно, что мода находится слева от среднего значения, и тогда мы говорим, что распределение имеет *положительную асимметрию* с относительно большим количеством значений

<sup>1</sup> Более точно: если все  $x_i$  ранжированы, то медианой ( $m$ ) будет  $m = x_{(n+1)/2}$  при  $n$  нечетном и  $m = \frac{1}{2} (x_{n/2} + x_{(n+2)/2})$  при  $n$  четном. — Прим. ред.

меньше среднего. Если значение моды лежит справа от среднего арифметического, то, следовательно, распределение имеет отрицательную асимметрию.

Одно важное свойство среднего арифметического заключается в том, что сумма отклонений от среднего  $(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \dots + (\bar{x} - x_n)$  равна нулю. Если каждое отклонение от среднего возвести в квадрат, а затем просуммировать, то эта сумма будет меньше суммы квадратов отклонений, если вместо среднего взять

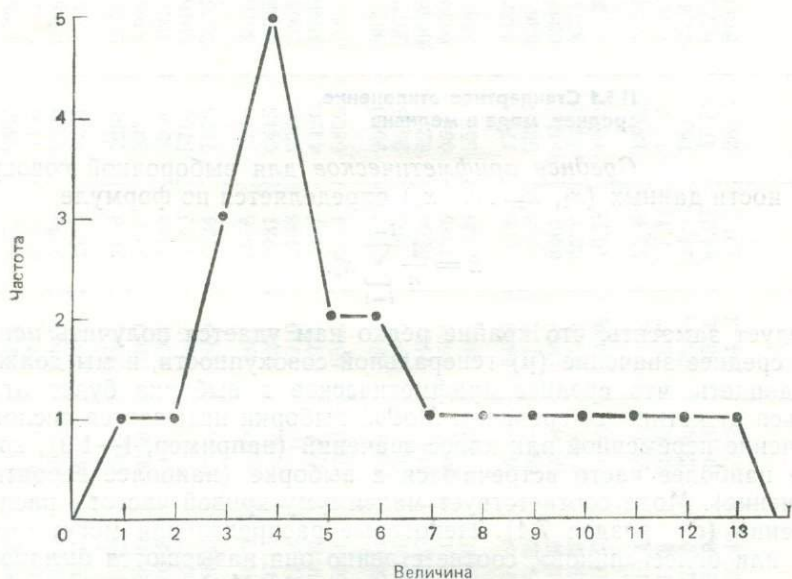


Рис. 1.

любую другую переменную. Это еще одно очень важное свойство, и сумма квадратов отклонений от среднего, деленная на размер выборки ( $n$ ), называется дисперсией ( $\sigma^2$ ). Дисперсия служит мерой рассеяния данных относительно среднего арифметического. В рассмотренном выше примере дисперсия равна 13,7, что свидетельствует о большом рассеянии значений относительно среднего (см. рисунок). Если взять в качестве выборки последовательность чисел 3, 4, 4, 4, 3, то среднее значение для данного ряда будет равно 3,6, а дисперсия составит только 0,24. Для выборки 3, 3, 3, 3, 3 среднее равно 3, а дисперсия равна нулю.

Стандартное отклонение ( $\sigma$ ) есть корень квадратный из дисперсии, то есть

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (\bar{x} - x_i)^2}$$

## П.5.2 Коэффициенты корреляции

Коэффициент корреляции дает возможность оценить степень зависимости между двумя переменными. Таким образом, коэффициент корреляции служит мерой сопряженной изменчивости (*ковариации*) двух совокупностей данных. При полной положительной корреляции, когда переменная  $y$  возрастает в точном соответствии с возрастанием переменной  $x$ , коэффициент корреляции равен  $+1$ . При полной отрицательной корреляции, при которой возрастание  $y$  сопровождается убыванием  $x$ , коэффициент корреляции равен  $-1$ . Если в этих случаях нанести значения  $x$  и  $y$  на график, то все точки будут лежать на прямой линии (см. раздел П.5.3), наклон которой соответственно положителен или отрицателен (см. раздел 3.1). Когда корреляция между  $x$  и  $y$  уменьшается, то разброс точек на графике возрастает и, если переменные полностью некоррелированы, коэффициент корреляции становится равным нулю.

В статистическом анализе при оценке взаимосвязи между парой рядов данных используются два коэффициента корреляции. Первый из них применяется в случае ранжированных данных и определяется по формуле

$$r = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{i=n} d_i^2}{n^3 - n},$$

где  $d_i = (\bar{x} - x_i) - (\bar{y} - y_i) = y_i - x_i$ , поскольку ранги  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  равны. Величина  $r$  называется *коэффициентом ранговой корреляции Спирмана*.

Эта мера сопряженной изменчивости двух совокупностей данных не является таким мощным и полезным статистическим средством, как приведенный ниже коэффициент корреляции, вычисляемый по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\bar{x} - x_i) (\bar{y} - y_i)}{n \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \quad (\text{парная корреляция } x \text{ и } y).$$

Мы можем оценить значимость коэффициента корреляции  $r$  с помощью критерия  $t$  Стьюдента (см. раздел П.5.6). Этот критерий предполагает, что оба ряда данных распределены нормально (см. разделы П.5.4 и 7.5.3). Следует убедиться в этом факте, чтобы иметь возможность проверить значимость любого из двух описанных выше коэффициентов корреляции. В общем случае, чем больше размер  $n$  выборки, тем с большей уверенностью мы можем принять, что полученный на основании данной выборки коэффициент корреляции отражает взаимосвязь между двумя совокупностями данных. Обязательно следует иметь в виду, что высокий коэффициент корреляции ни в коей мере не свидетельствует о наличии *причинной* взаимосвязи между коррелируемыми переменными.

### П.5.3 Уравнения регрессии

Основанное на коэффициенте корреляции уравнение регрессии дает возможность установить, каким образом изменения данных одной выборки соответствуют изменениям данных другой. Уравнение регрессии представляет собой математическую функцию (см. раздел 3.1), описывающую взаимозависимость между переменными  $y$  и  $x$ . В разделах 3.4, 3.5 и 3.6 подробно рассмотрены свойства двух основных регрессионных методов. Линия регрессии (то есть график некоторой математической функции) наилучшим образом отражает связь между координатами всех точек, нанесенных на график. В подавляющем большинстве случаев корреляция не является полной, поэтому мы находим уравнение регрессии из условия минимума суммы квадратов отклонений точек от прямой. Если минимизируется сумма отклонений, взятых параллельно оси  $y$  (см. рис. 7.3), то получается регрессия  $y$  по  $x$  (обычно  $x$  считается независимой переменной) и соответствующее уравнение приобретает вид:

$$y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}).$$

Регрессию  $x$  по  $y$  имеем из уравнения

$$x - \bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}).$$

Косинус угла  $\theta$  между двумя прямыми, задаваемыми этими двумя уравнениями, равен коэффициенту корреляции  $r$ , то есть  $r = \cos \theta$ . В случае полной корреляции обе прямые совпадают, а когда коэффициент корреляции равен нулю, прямые взаимоперпендикулярны. Уравнения регрессии, полученные в соответствии с указанным критерием, называются *регрессией по методу наименьших квадратов*. Еще раз напомним, что если мы хотим использовать полученные уравнения с целью предсказания значений одной из переменных, то необходимо прежде убедиться, что исходные данные распределены нормально.

Второй метод, применяемый гораздо реже, не учитывает коэффициента корреляции и минимизирует отклонения обеих координат точек  $(x, y)$  от прямой. Это так называемая *регрессия по методу приведенной главной оси*, и ее уравнение имеет вид

$$y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x + k.$$

Поскольку эта прямая, как и обе прямые регрессии по методу наименьших квадратов, проходит через точку, координаты которой равны среднему арифметическому для каждой из выборочной совокупностей данных, то величину  $k$  можно определить, подставив в уравнение значения  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .

#### П.5.4 Кривая нормального распределения

В разделе 7.5.3 мы уже встречались с кривой нормального распределения. Здесь рассматривается значение этой кривой для статистики и способы ее использования.

В зависимости от *способа сбора* исходные данные делятся на три следующие основные категории:

1) *номинальные*: данные подразделяются только на классы, например указывается тип почвы — подзолистая почва или бурая лесная (бурозем). В силу характера исходных данных выбор соответствующих статистических методов весьма ограничен, а получающиеся результаты имеют небольшую ценность;

2) *ординальные*: данные *ранжированы*, и поэтому имеется возможность применить статистические критерии. Использование статистических методов оказывается более полезным, и результаты их применения имеют большее значение, чем в случае номинальных данных;

3) *интервальные*: в статистике используются фактические, численные, значения данных. Характер интервальных данных позволяет обратиться к помощи наиболее мощных статистических критериев.

Статистические методы, используемые в основном для объяснения двух первых категорий данных — номинальных и ординальных, — носят название *непараметрических*. Для анализа интервальных данных применяются *параметрические* методы. Параметрические методы, как правило, предполагают, что анализируемые совокупности данных имеют распределение, близкое к нормальному.

Кривая нормального распределения обладает рядом специфических свойств (они выражаются, в частности, через стандартное отклонение), позволяющих оценить вероятность данного события и значимость полученных результатов. Отметим, что 68,26% площади под кривой нормального распределения попадает в интервал между значениями  $\bar{x} + \sigma$  и  $\bar{x} - \sigma$ , 95,44% площади заключено между  $\bar{x} + 2\sigma$  и  $\bar{x} - 2\sigma$  и 99,73% — между  $\bar{x} + 3\sigma$  и  $\bar{x} - 3\sigma$ . Кривая нормального распределения асимптотически приближается к оси  $x$  в каждом из направлений, поэтому, вообще говоря, требуется бесконечно большое значение стандартного отклонения, чтобы заполнить наблюдениями всю площадь под кривой. Вне же интервала  $\bar{x} + 4\sigma$  и  $\bar{x} - 4\sigma$  остается лежать столь малая часть площади, что эти «хвосты» кривой практически можно пренебречь.

Очень часто реальное распределение данных оказывается далеко от нормального, и тогда мы не можем непосредственно применить многие статистические методы. В этом случае исходные данные следует преобразовать с помощью соответствующей математической функции, выбор которой зависит от того, имеет ли распределение положительную или отрицательную асимметрию.

Как правило, в случае положительной асимметрии применяется логарифмирование, а в случае отрицательной — возведение в квадрат.

### П.5.5 Стандартная ошибка оценки значения $y$

Необходимость статистических оценок связана с тем, что почти всегда мы пытаемся сделать заключение о каком-либо явлении или взаимосвязи, основываясь только на относительно небольшой выборке из генеральной совокупности данных. Таким образом, нам необходимо иметь некоторые средства, которые позволили бы нам судить, насколько результат, полученный для выборки, отличается от истинного результата для всей совокупности.

Для любой генеральной совокупности мы можем истинное среднее значение ( $\mu$ ) оценить через среднее в выборке ( $\bar{x}$ ), а истинное стандартное отклонение ( $\sigma_x$ ) — через выборочное стандартное отклонение ( $s$ ). Мы можем проделать операцию оценки несколько раз, беря из генеральной совокупности каждый раз новый вариант выборки и получая каждый раз новый результат. В каждой новой небольшой выборке могут оказаться одно или два редких значения (очень больших или очень малых), присутствие которых сильно изменяет величину выборочного среднего и стандартного отклонения. Любая оценка возможных различий между средним в выборке и средним в генеральной совокупности должна содержать размер выборки  $n$ . Вероятность получить выборочное среднее, которое бы в значительной степени отличалось от совокупного, возрастает с увеличением рассеяния (характеризующегося стандартным отклонением) данных относительно среднего арифметического. В качестве показателя степени различия между выборочным и совокупным средними служит *стандартная ошибка выборочного среднего*:

$$s_x = s/\sqrt{n}.$$

Фактически стандартная ошибка среднего является стандартным отклонением среднего в выборке относительно среднего в генеральной совокупности. Подобным образом можно оценить точность значения, предсказанного по уравнению регрессии  $y$  по  $x$ . *Стандартная ошибка оценки значения  $y$*  при регрессии  $y$  по  $x$  определяется по формуле

$$s_{yx} = \sigma_y \sqrt{(1 - r^2)}.$$

Мы предполагали, что исходные данные распределены нормально, и если у нас есть два ряда достаточной длины, распределенных нормально, то можно сказать, что 95,44% оцениваемых по уравнению регрессии значений  $y$  заключено между  $\pm 2s_{yx}$ , а 99,73% — между  $\pm 3s_{yx}$ . Эти величины ошибок оценки значений  $y$  составляют так называемые *доверительные пределы*, проходящие на графике

параллельно прямой регрессии по обе стороны от нее, как правило, берут доверительный предел, соответствующий  $\pm 2s_{yx}$ , в который попадают 95% значений  $y$  (то есть 95%-ные доверительные пределы).

### П.5.6 Критерий $t$ Стьюдента

Критерий  $t$  Стьюдента используется для проверки гипотезы о том, что среднее в выборке ( $\bar{x}$ ) может служить оценкой среднего во всей генеральной совокупности ( $\mu$ ). Критерий определяется по формуле

$$t = \frac{\text{Разность между средними в выборке и в совокупности}}{\text{Стандартная ошибка среднего в выборке}} = \frac{|\mu - \bar{x}|}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Вычисленные значения  $t$  следует сравнить с помещаемыми в специальные статистические таблицы теоретическими значениями  $t$  при различных уровнях значимости. Значимость результата возрастает с увеличением объема выборки. При данном  $n$  высокие значения  $t$  показывают, что мала вероятность того, что выборка сделана не из рассматриваемой совокупности.

### П.5.7 Коэффициент множественной корреляции

Коэффициент множественной корреляции выражает степень линейной взаимосвязи нескольких переменных (скажем,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Например, в случае трех переменных этот коэффициент обозначается через  $R_{1,23}$ , где первый индекс относится к независимой, а два остальных — к зависимым переменным. Коэффициент множественной корреляции используется наряду с обычными коэффициентами парной корреляции. Если обозначить через  $r_{12}$  обычный коэффициент корреляции между рядами 1 и 2, через  $r_{13}$  — коэффициент корреляции между рядами 1 и 3, а через  $r_{23}$  — коэффициент корреляции между рядами 2 и 3, то для случая трех переменных берется формула

$$R_{1,23} = \sqrt{\frac{r_{13}^2 + r_{12}^2 - 2r_{13}r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

Коэффициент множественной корреляции всегда заключен между 0 и 1, то есть  $0 \leq R \leq 1$ , а величина  $R^2$  характеризует дисперсию переменной  $x_1$  относительно переменных  $x_2$  и  $x_3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- Davidson D. A. 1973: Particle size and phosphate analysis — evidence for the evolution of a tell. — «*Archaeometry*», 15(1), p. 143—152.
- Davidson D. A. 1977: The subdivision of a slope profile on the basis of soil properties: a case study from mid-Wales. — «*Earth Surface Processes*», 2, p. 55—61.
- Davidson D. A. 1978: *Science for physical geographers*. London: Edward Arnold.
- Dobbie C. H., Wolf P. O. 1953: The Lynmouth flood of August 1952. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*.
- Dury G. H. 1959: Analysis of regional flood frequency in the Nene and Great Ouse. — «*Geographic Journal*», 125, p. 223—229.
- East African Meteorological Department, 1964: *Climatological statistics for East Africa and the Seychelles, part III — Tanganyika and Zanzibar*. Nairobi, Kenya: EAMD.
- Flanders H., Price J. J. 1973: *Introductory college mathematics with linear algebra and finite mathematics*. New York: Academic Press.
- Gabriel K. R., Neumann J. 1962: A Markov Chain model for daily rainfall at Tel Aviv. — «*Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*», 88, p. 90—95.
- Gardiner V. 1975: *Drainage basin morphometry*. British Geomorphological Research Group Technical Bulletin 14.
- Gray J. M. 1974: The main rock platform of the Firth of Lom, western Scotland. — «*Institute of British Geographers, Transactions*», 61, p. 81—100.
- Green J. F. N. 1935: The terraces of southernmost England. — «*Quarterly Journal of the Geological Society*», 92, p. 58—72.
- Gregory K., Walling D. 1973: *Drainage basin form and process*. London: Edward Arnold.
- Hack J. T. 1957: Studies of the longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. — *US Geological Survey Professional Paper 294 — B* 45—97.
- Hindi W. N. A., Kelway P. S. 1977: Determination of storm velocities as an aid to the quality control of recording rain gauge data. — «*Journal of Hydrology*», 32, p. 115—137.
- Horton R. E. 1945: Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative morphology. — «*Geological Society of America Bulletin*», 56, p. 275—370.
- Hudson N. W. 1971: *Soil Conservation*. London: Batsford.
- Huff F. A., Neill J. C. 1957: Areal representativeness of point rainfall. — «*Transactions of the American Geophysical Union*», 38, p. 341—345.
- King C. A. 1966: *Techniques in geomorphology*. London: Edward Arnold.
- Kirkby M. J. 1977: Soil development models as a component of slope models. — «*Earth Surface Processes*», 2, p. 203—230.

- Knight B., Adams R. 1975: *Calculus I and Calculus II*. London: Unwin.
- Leopold L. B., Wolman M. G., Miller J. P. 1964: *Fluvial processes in geomorphology*. San Francisco: Freeman.
- Linsley R. K., Franzini J. B. 1972: *Water resources engineering*, second edition. New York: McGraw-Hill.
- Linsley R. K., Kohler M. A., Paulus J. L. H. 1975: *Hydrology for engineers*. New York: McGraw-Hill.
- McCallum D. 1959: The relationship between maximum rainfall intensity and time. — «*East African Meteorological Department*», Memoir III, № 7, Nairobi.
- McIntosh D. H., Thom A. S. 1969: *Essentials of meteorology*. Wykeham Science Series. London: Wykeham.
- Miami Conservation District, 1936: Storm rainfall of the eastern United States. — «*Technical Report part V*», p. 258—259.
- Miller R. L., Kahn J. S. 1962: *Statistical analysis in the geological sciences*. New York: Wiley.
- Panofsky H. A., Brier G. W. 1958: Some applications of statistics and meteorology. Pennsylvania: Pennsylvania State University.
- Pearson K. 1901: On the lines and planes of closest fit to systems of points in space. — «*Philosophical Magazine*», 6, p. 320—331.
- Philips J. 1957—58: The theory infiltration. — «*Soil Science*», 83—85, various pages.
- Quinn F. H. 1977: Annual and seasonal flow variations through the Straits of Mackinas. — «*Water Resources Research*», 13, p. 137—144.
- Rayner J. N. 1972: The application of harmonic and spectral analysis to the study of terrain. — In: «*Spatial analysis in geomorphology*», p. 283—300, London: Macmillan.
- Ruhe R. K. 1969: *Quaternary landscape in Iowa*. Ames, Iowa: Iowa State University Press.
- Scheidegger A. E. 1970: *Theoretical geomorphology*. Berlin: Springer-Verlag.
- Shaw J., Healy T. R. 1977: Rectilinear slope formation in Antarctica. — «*Annals of the Association of American Geographers*», 67, p. 46—54.
- Smith K. 1972: *Water in Britain*. London: Macmillan.
- Statham I. 1976: A scree slope rockfall model. — «*Earth Surface Processes*», 1, p. 43—62.
- Strahler A. N. 1957: Quantitative analysis of watershed geomorphology. — «*Transactions of the American Geophysical Union*», 38, p. 913—920.
- Sumner G. N. 1977a: Sea breezes in hilly terrain. — «*Weather*», 32, p. 200—208.
- Sumner G. N. 1977b: Sea breeze temperature and humidity contrasts at Lampter, Dyfed. «*Cambria*», 4, p. 187—198.
- Thornes J. E. 1971: State, environment and attribute in scree-slope studies. — In: Brunnsden D., editor, *Slopes, form and process*. Institute of British Geographers Special Publication 3.
- Weyman D. R. 1974: Runoff processes, contributing area and streamflow in a small upland catchment. — «*Institute of British Geographers Special Publication*», 6, p. 33—43.
- Young A. 1972: *Slopes*. London: Longman.
- Youngs E. G., Aggelides S. 1976: Drainage to a water table analysed by the Green-Ampt approach. — «*Journal of Hydrology*», 31, p. 67—79.

## Литература на русском языке

- Андерсон Т. 1963: Введение в многомерный статистический анализ. М., «Физматгиз».
- Арманд Д. Л. 1975: Наука о ландшафтах. М., «Мысль».
- Архипов Ю. Р., Блажко Н. И., Григорьев С. В., Заботин Я. И., Трофимов А. М., Хузеев Р. Г. 1976: Математические методы в географии. Уч. пособие, Казань.
- Божинский А. Н., Зейдис И. М. 1978: О развитии возмущений на поверхности склонов и ледников. — «Вестник Московского университета», № 4.
- Бунге В. 1967: Теоретическая география. М., «Прогресс».
- Великанов М. А. 1958: Русловой процесс (основы теории). М., «Физматгиз».
- Девдариани А. С. 1967: Математический анализ в геоморфологии. М., «Недра».
- Камке Э. 1971: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука».
- Матэр П. 1981: Компьютеры в географии. М., «Прогресс».
- Преображенский В. С. 1966: Ландшафтные исследования. М., «Наука».
- Рао С. Р. 1967: Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука».
- Симонов Ю. Г. 1972: Региональный геоморфологический анализ. М., Изд-во МГУ.
- Сирл С., Госман У. 1974: Матричная алгебра в экономике. М., «Статистика».
- Степанов В. В. 1959: Курс дифференциальных уравнений. М., «Физматгиз».
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972: Уравнения математической физики. М., «Наука».
- Тойн П., Ньюби П. 1977: Методы географических исследований. 1 выпуск. Экономическая география. М., «Прогресс».
- Трофимов А. М. 1977: Математические методы в физической географии. Казань, Изд-во КГУ.
- Хаггет П. 1968: Пространственный анализ в экономической географии. М., «Прогресс».
- Ханвелл Дж., Ньюсон М. 1977: Методы географических исследований, 2 выпуск. Физическая география. М., «Прогресс».
- Харвей Д. 1979: Научное объяснение в географии. М., «Прогресс».
- Шайдеггер А. 1964: Теоретическая геоморфология. М., «Прогресс».

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсцисса 32, 33  
Алгебра векторов 42, 43  
Алгебра матриц, законы 80, 82, 89, 90  
ассоциативный 89  
дистрибутивный 90  
коммутативный 90  
Анализ  
временных рядов 219, 220  
гармонический 132, 216, 221  
главных компонент 35, 65, 82, 99—101, 103—105  
поверхностей тренда 79, 220  
Фурье 132, 220  
Антилогарифм 27  
Асимметрия 135, 138, 172, 174, 175, 179, 180—185, 187  
отрицательная 281, 284, 285  
положительная 280, 284, 285  
Ассимптота 117, 119  
Бейеса формула 163, 164  
Вектор 18, 35, 36, 42—53, 83, 86, 101  
единичный 47, 49—51, 53  
компоненты 46  
положения 47  
результурующий 44—46, 48  
Векторная площадь 45  
Венна диаграмма 161  
Вероятностное пространство 161—165  
Вероятность 160—191  
априорная 160, 166, 167, 170, 171  
кумулятивная (накопленная) 187  
перехода 166  
плотность 171—173, 184, 186, 187  
условная 163, 164  
цепная 165, 166  
эмпирическая 160  
Выбор и построение кривых зависимостей 132—138  
Геометрическое место точек 115  
Гипербола 117  
Гистограмма 171—173  
Градиент 34, 56, 60, 109, 116, 123, 127  
вертикальный 61—63, 112, 253  
влажноадиабатический 62, 63  
сухоадиабатический 61—63, 224  
силы давления 252—255  
Градусы 36  
График 31, 32  
Графическая бумага 134, 135, 189  
двойная логарифмическая 136, 141  
логарифмическая 187  
полулогарифмическая координатная 132, 141  
Гэлтона закон 187  
Дисперсия 281  
Дифференциальное исчисление, сущность 107—113  
Дифференциальные уравнения 224—255  
второго порядка 226, 227  
в частных производных 227, 228  
высокого порядка 227, 248  
линейные 227, 235, 242, 247, 248  
нелинейные 227  
обобщение методов решения 241  
общее решение 225, 226, 245, 246  
объективные 227, 242  
в полных дифференциалах 235—239, 241  
однородные 232—234, 241, 242  
первого порядка 226, 227, 235  
решение методом  $D$ -оператора 247—250  
решение с помощью интегрирующего множителя 238—240  
содержащие функцию от  $y$  230  
с постоянными коэффициентами 242

- с разделяющимися переменными 231, 233, 241
- порядок 226, 227
- степень 226, 227
- Дифференцирование 109, 112, 192, 194 с помощью подстановки 130, 132, 234
- функции от функции 130, 131
- частное 228
- Доверительные интервалы, пределы 75—78
- Единицы измерения 265—267
  - нестандартные 267
  - системы СИ 267
  - стандартные 265
  - дополнительные 265, 266
  - основные 265, 266
  - производные 265, 266
- Значение среднее 280, 281
- Значимость результатов 75, 78, 286
- Импликация 29, 30
- Интеграл 192—223
  - неопределенный 194, 196—198, 200
  - определенный 194, 196, 197, 200, 212
  - стандартный 198, 200, 203
  - частный 245
- Интегральное исчисление, основное правило 194, 216
- Интегрирование 192—223
  - дробно-рациональных функций 208
  - по частям 200—203, 207, 220
  - путем разложения на простые дроби 200, 208, 209
  - с помощью подстановки 200, 203—207
  - способы интегрирования, резюме 210
  - тригонометрических функций 206, 207
  - численное 212
    - методом Симпсона 214—216
    - методом трапеции 212—214
- Кармана постоянная 252
- Касательная (к кривой) 108
- Координаты 31—34
  - полярные 33, 34, 37
  - прямоугольные, или декартовы 32, 33, 37
- Корреляции коэффициенты 282
  - множественной 286
  - парной 282
  - ранговой Спирмана 282
- Кривая нормального распределения 99, 134, 135, 180
- Кривая плотности нормального распределения 174, 175
- Линейное соответствие 68
- Логарифм 23—28, 268—270
  - десятичный 25
  - Неперов (натуральный) 25
- Марковская вероятность 165—170
  - получение с помощью матриц 170, 171
- Марковские цепи 165—171, 175, 176
- Матрица
  - асимметричная 85, 106
  - вырожденная 92
  - главная диагональ 84, 85
  - единичная, или тождественная 85, 91
  - квадратная 92, 93
  - невыврожденная 92
  - нулевая 85
  - обратная 91, 92, 95—98
  - определитель (детерминант) 92
  - присоединенная 95
  - симметричная 84, 85, 106
  - собственный вектор 99—104
  - собственное значение 95—104
  - столбец 83—85, 87—90, 93—96, 106
  - строка 83, 87—90, 93, 94
  - транспонированная 90, 95
- Матрицы и сети 105, 106
- Медиана 280—282
- Множество 29
- Мсда 280—282
- Момент инерции 218
- Модуль 18, 47
- Наклон
  - кривой 108, 109, 127
  - прямой 56, 76
- Объем шара 218
- Объемы тел вращения 216, 217
- Округление десятичных дробей 23
- Окружность, измерение 36
- Операции с матрицами 86
  - вычитание 106
  - равенство 85, 86
  - сложение 86, 87, 106
  - умножение 86—88, 97, 106
- Ордината 32—34
- Оси координат 31, 32
  - поворот 65, 66
- Ошибки стандартная 77, 78
- Паскаля треугольник 153, 154, 175
- Парабола 115, 116
- Параллелограмм сил 45
- Переменные величины 28, 29
  - зависимые 30, 67, 72, 73, 76—79
  - независимые 30, 67, 72—76, 78—80
- Перестановки 174—177

- Период 219  
 основной 221
- Периодичность 22, 221
- Плотность распределения 171—174
- Полином 124—126  
 квадратичный 124, 125  
 кубичный 124, 125  
 четвертой степени 124, 125
- Порядок вычислений 17
- Правило треугольника (для векторов) 44, 45
- Предел 192, 193
- Преобразование Лапласа 251
- Приближение и точность 23
- Прогрессия 143—147  
 арифметическая 143—150  
 геометрическая 143—147, 150—152  
 знаменатель 145, 146, 151  
 разность 146
- Произведение  
 векторное 50—53  
 скалярное 49—51, 53
- Производная  
 произведения 129  
 частного 129
- Проворциональность 29—31
- Процессы  
 вероятностные 165  
 стохастические 165
- Прямая линия 48, 49
- Радян** 36
- Размер выборки 76, 77, 172—174
- Распределение  
 бимодальное 280  
 биномиальное 174—179, 184  
 гамма 181—184, 186, 187  
 логарифмически нормальное 187, 188, 191  
 нормальное 76, 77, 135, 174, 179—181, 282, 283, 285  
 Пирсона 184—187  
 полимодальное 280  
 Пуассона 177—179, 182, 189  
 частотное 134  
 экстремальных значений 187, 188
- Регрессия, уравнения 72—76, 78  
 по методу наименьших квадратов 70—75, 77, 79, 136, 138, 283  
 по методу приведенной главной оси 70—72, 74, 75, 78, 99, 259, 283
- Ряды 147  
 арифметические 147—150  
 бесконечные 147—149, 151  
 геометрические 147, 148, 150  
 знакпеременные 155, 157, 158  
 конечные 147, 148  
 Маклорена 157, 158, 215—219
- расходящиеся 151  
 сумма арифметического ряда 147—150  
 сумма геометрического ряда 147—150  
 сумма частичная 149, 151, 156  
 сходящиеся 151  
 Тейлора 215  
 Фурье 219—223  
 экспоненциальные 157
- Связи статистические** 66, 67  
 линейные 82  
 многомерные 78, 79, 82  
 нелинейные 82
- Сетка координат 32
- Символ операции 16—20
- Система координат 33  
 полярная 33, 34  
 прямоугольная (декартова) 32, 33, 37
- Система счисления 19—21, 25
- Системы уравнений 58, 59, 64, 91, 96—98
- Скаляр 42, 87
- Сложение векторов см. Правило треугольника
- Стандартное отклонение 70, 76, 77, 180, 182, 280, 281
- Стьюдента критерий 76, 77, 282, 286
- Тригонометрические соотношения** 36—39, 45
- Точка стационарная 125—129  
 максимума 125, 127—129  
 минимума 125—129  
 перегиба 125, 127, 129, 260
- Углы**  
 измерение 36  
 полярный 33, 36  
 сумма 38
- Умножение 16, 17  
 распределительный закон 17
- Уравнения  
 движения атмосферы 252  
 дифференциальные 16, 73, 81  
 линейные 57, 73, 96, 109, 132  
 квадратные 126, 128  
 кубические 127  
 неразрывности 80—82  
 характеристические 102, 242—244, 248, 249
- Условие  
 граничное 226  
 начальное 226
- Ускорение 112  
 силы тяжести 42, 111, 253  
 центростремительное 255

Фаза периодической функции 39  
Факториал 154  
Формула бинома 147, 152—156, 158  
Формулы понижения степени 207  
Функции  
гиперболические 122, 123  
дробно-рациональные 208, 209  
линейные 30—34, 54—68  
логарифмические 82, 118—120, 123, 158  
нелинейные 31, 32, 113—142  
непрерывные 147, 192, 193  
обратные тригонометрические 121—123  
первообразные 194, 197, 198  
периодические 39, 121, 219  
показательные 118—120, 145  
разрывные 219, 220  
распределения накопленной вероятности 188—191

стандартные 113, 114, 123, 129, 135  
степенные 31, 80, 112—115, 117, 118, 124, 135, 141, 142  
тригонометрические 39, 41, 45, 111, 158, 207, 219

Хорда 108, 109, 213, 215

Частные производные см. Дифференциальные уравнения

Числа

действительные 21  
иррациональные 22, 23  
натуральные 21, 22  
рациональные 22  
целые 21—22

Шкала

номинальная 145  
ординальная 145

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	11
<b>Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1 Операции . . . . .	16
1.2 Порядок вычисления . . . . .	17
1.3 Величина и число . . . . .	19
1.4 Рациональные и иррациональные числа . . . . .	22
1.5 Приближение и точность . . . . .	23
1.6 Корни и логарифмы . . . . .	23
1.7 Понятие функции . . . . .	28
1.8 Координаты и графики . . . . .	31
<b>Глава 2. ТРИГОНОМЕТРИЯ И ВЕКТОРЫ . . . . .</b>	<b>35</b>
2.1 Измерение углов: градусы и радианы . . . . .	36
2.2 Тригонометрические соотношения . . . . .	36
2.3 Векторы и скаляры . . . . .	42
2.4 Алгебра векторов . . . . .	43
2.5 Компоненты . . . . .	45
2.6 Прямая линия . . . . .	48
2.7 Скалярное произведение . . . . .	49
2.8 Векторное произведение . . . . .	50
2.9 Применение скалярного и векторного произведений . . . . .	51
<b>Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ . . . . .</b>	<b>54</b>
3.1 Основные свойства линейных функций . . . . .	54
3.2 Системы уравнений . . . . .	58
3.3 Поворот осей . . . . .	65
3.4 Математические функции и статистические связи . . . . .	66
3.5 Линейное соответствие . . . . .	68
3.6 Значимость результатов . . . . .	75
3.7 Многомерные связи . . . . .	78
3.8 Уравнение неразрывности . . . . .	80
<b>Глава 4. МАТРИЦЫ . . . . .</b>	<b>83</b>
4.1 Основные понятия . . . . .	83
4.2 Равенство матриц . . . . .	85
4.3 Операции с матрицами . . . . .	86

4.4	Законы алгебры матриц . . . . .	89
4.4.1	Ассоциативный закон для сложения и умножения . . . . .	89
4.4.2	Коммутативный закон (только для сложения) . . . . .	90
4.4.3	Дистрибутивный закон для сложения и умножения . . . . .	90
4.5	Транспонированная матрица . . . . .	91
4.6	Обратная матрица . . . . .	93
4.7	Определители . . . . .	95
4.8	Присоединенная матрица . . . . .	96
4.9	Связь между координатами точек и решением систем уравнений . . . . .	99
4.10	Собственные векторы и собственные значения . . . . .	105
4.11	Матрицы и сети . . . . .	105
<b>Глава 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ . . . . .</b>		<b>107</b>
5.1	Сущность дифференциального исчисления . . . . .	108
5.2	Свойства стандартных функций . . . . .	113
5.2.1	Степенные функции . . . . .	113
5.2.2	Логарифмическая и показательная функции . . . . .	118
5.2.3	Тригонометрические и обратные тригонометрические функции . . . . .	121
5.3	Комбинации функций и их производные . . . . .	123
5.4	Определение стационарных точек . . . . .	125
5.5	Производная произведения и частного . . . . .	129
5.6	Выбор и построение кривых . . . . .	132
5.7	Другие примеры нелинейных связей . . . . .	139
<b>Глава 6. РЯДЫ И ПРОГРЕССИИ . . . . .</b>		<b>143</b>
6.1	Арифметическая и геометрическая прогрессии . . . . .	143
6.2	Ряды . . . . .	147
6.3	Сумма арифметического ряда . . . . .	148
6.4	Сумма геометрического ряда . . . . .	150
6.5	Формула бинома . . . . .	152
6.6	Дальнейшие примеры рядов . . . . .	156
<b>Глава 7. ВЕРОЯТНОСТЬ . . . . .</b>		<b>160</b>
7.1	Вероятностное пространство . . . . .	161
7.2	Цепные вероятности . . . . .	165
7.3	Получение Марковских вероятностей с помощью матриц . . . . .	170
7.4	Плотность распределения (распределение частот) . . . . .	171
7.5	Теоретические распределения . . . . .	174
7.5.1	Биномиальное распределение . . . . .	174
7.5.2	Распределение Пуассона . . . . .	177
7.5.3	Нормальное распределение . . . . .	179
7.5.4	Гамма-распределение . . . . .	181
7.6	Другие типы распределения . . . . .	184
7.6.1	Распределение Пирсона тип I . . . . .	184
7.6.2	Распределение Пирсона тип IV . . . . .	185
7.6.3	Распределение Пирсона тип VI . . . . .	185
7.6.4	Другие критерии Пирсона и переходные типы . . . . .	185
7.6.5	Логарифмически нормальное распределение . . . . .	187
7.6.6	Экстремальные распределения . . . . .	187
7.7	Применение функции распределения накопленной вероятности . . . . .	188
<b>Глава 8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ . . . . .</b>		<b>192</b>
8.1	Пределы и непрерывные функции . . . . .	192
8.2	Первообразная функция, или неопределенный интеграл . . . . .	194
8.3	Связь неопределенного и определенного интегралов . . . . .	197

8.4	Стандартные интегралы	198
8.5	Интегрирование более сложных функций	200
8.6	Интегрирование по частям	201
8.7	Интегрирование с помощью подстановки	203
8.8	Интегрирование тригонометрических функций	206
8.9	Интегрирование дробно-рациональных функций	208
8.10	Способы интегрирования: резюме	210
8.11	Численное интегрирование	212
8.12	Метод трапеций	212
8.13	Метод Симпсона	214
8.14	Применение интегрирования	216
8.15	Объемы тел вращения	216
8.16	Моменты инерции	218
8.17	Ряды Фурье	219
<b>Глава 9. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b>		<b>224</b>
9.1	Простейшие уравнения	224
9.2	Порядок и степень	226
9.3	Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных	227
9.4	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	229
9.5	Уравнения, содержащие функцию только переменной $y$	230
9.6	Уравнения с разделяющимися переменными	231
9.7	Однородные уравнения	232
9.8	Уравнения в полных дифференциалах	235
9.9	Интегрирующий множитель	238
9.10	Интегрирующий множитель $e^{\int A dx}$	240
9.11	Обобщение методов решения	241
9.12	Решение дифференциальных уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами	242
9.13	Частные решения	244
9.14	$D$ -операторы	247
9.15	Применение дифференциальных уравнений	250
9.16	Поля ветра в пограничном слое атмосферы	251
9.17	Уравнения движения атмосферного воздуха	252
<b>Заключение</b>		<b>256</b>
<b>Ответы к задачам</b>		<b>257</b>
Глава 1		257
Глава 2		257
Глава 3		257
Глава 4		258
Глава 5		258
Глава 6		259
Глава 8		260
Глава 9		261
Приложение 1		263
Греческий алфавит и его употребление		263
Приложение 2		264
Международная система единиц измерения (СИ)		264
A.2.1 Стандартные единицы		264
A.2.2 Множители к единицам измерения		266
A.2.3 Нестандартные единицы		266
Приложение 3		267
Четырехзначные таблицы десятичных логарифмов		267

Приложение 5 . . . . .	270
Таблицы синусов, косинусов и тангенсов . . . . .	270
Приложение 4 . . . . .	279
Статистическое приложение . . . . .	279
П.5.1 Стандартное отклонение, среднее, мода и медиана . . . . .	281
П.5.2 Коэффициенты корреляции . . . . .	282
П.5.3 Уравнения регрессии . . . . .	283
П.5.4 Кривая нормального распределения . . . . .	284
П.5.5 Стандартная ошибка оценки значения $y$ . . . . .	285
П.5.6 Критерий $t$ Стьюдента . . . . .	285
П.5.7 Коэффициент множественной корреляции . . . . .	286
Литература . . . . .	288
Литература на русском языке . . . . .	289
Предметный указатель . . . . .	289

ИБ № 7871

Редактор *Л. Б. Бабинцева*  
Младший редактор *Т. А. Мирошина*  
Художник *А. А. Алексеев*  
Художественный редактор *А. Д. Суима*  
Технический редактор *М. Г. Акколаева*  
Корректор *Н. И. Петраченко*

Сдано в набор 26.06.80. Подписано в печать 17.03.81. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Условн. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 17,85. Тираж 14 000 экз. Заказ № 771. Цена 1 р. 30 к. Изд. № 29806

Издательство „Прогресс“ Государственного комитета СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. Москва 119021, Зубовский бульвар, 17. Ленинградская типография № 2 годовное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения „Техническая книга“ им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

3401