

**ПРИМЕНЕНИЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
МЕТОДОВ И ЭВМ  
ПРИ ПОИСКЕ  
ПОЛЕЗНЫХ  
ИСКОПАЕМЫХ**



Академия наук СССР  
Сибирское отделение Вычислительный центр

550.8:519 + 553.1:519 (06)

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ  
ПРИ ПОИСКЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Сборник научных трудов

Под редакцией доктора ф.-м.наук  
Ю.А.Воронина



Новосибирск 1974



1158



## С о д е р ж а н и е

Н и к о л ь с к и й Э.В. Метод расщепления дифференциальных операторов второго порядка как способ решения задач геофизики на ЭВМ.....	5
А м е л ь к и н В.А. Об использовании полиадической системы счисления при хранении числовой информации в памяти ЭВМ.....	49
М а р а с у л о в А. Введение показатель с целью выбора оптимальной подгруппы при индивидуальном подходе к решению задачи распознавания.....	64
В о р о н и ч В.А. К вопросу об информационном базисе и математизации геологии.....	67
Ч е т в е р и к о в Л.И. Теоретические основы пробы...	73
В о р о н и н Ю.А. К теории поисков полезных ископаемых.....	92
В о р о н и н Ю.А, Е г а н о в а И.А., Е г а н о в Э.А. К проблеме упорядочения объектов в геологии.....	119
У с м а н о в Ф.А. Отношения между геологическими телами и их математические свойства.....	164
А л а б и н Б.К. К построению нумерических функций....	194

заться от частных методов решения геофизических задач, приуроченных к какому-либо определенному типу уравнений, и создать новый, в определенном смысле универсальный метод решения задач математической физики, который был бы одинаково "хорош" для уравнений любого типа.

К такому универсальному методу необходимо, как нам кажется, предъявить достаточно сильные требования, а именно:

1) он должен "решать" достаточно широкий круг геофизических задач, встречающихся в практической деятельности геофизика-исследователя. А это значит, что коэффициенты дифференциального оператора, равно как и начальные и граничные условия, должны принадлежать достаточно широкому классу функций, который почти полностью исчерпывал бы всю совокупность ситуаций, встречающихся в практике;

2) метод должен обладать достаточно высокой степенью точности с тем, чтобы можно было надежно выделять "тонкие" эффекты, присутствующие в геофизическом эксперименте;

3) метод должен быть, по-возможности, экономичным в смысле затрат машинного времени. Это требование становится особенно существенным при решении обратных задач геофизики, основанных на различных методах оптимизации, т.к. в этом случае приходится многократно решать прямую задачу;

4) метод должен помимо численного, допускать в известных пределах аналитическое решение, ибо только объединение численных и аналитических методов решения, по нашему глубокому убеждению, может дать существенный выигрыш в смысле "геофизической отдачи" решаемой проблемы.

Далее речь идет о попытке создать такой универсальный метод и описать его сначала на примере решения обыкновенного линейного дифференциального оператора второго порядка.

То обстоятельство, что в качестве "пробного камня" предлагаемого метода выбрано именно решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, объясняется следующими причинами.

1. По решению таких уравнений накоплен достаточно большой опыт, имеется огромное число публикаций, в которых рассмотрены различные как аналитические, так и численные методы решения. В связи с этим имеется возможность всесторонне исследовать

довать все "сильные" и "слабые" стороны предлагаемого метода.

2. Как известно, многие геофизические задачи сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Такие задачи обычно возникают вследствие предварительного интегрального преобразования (типа интегралов Фурье, Лапласа, Фурье-Бесселя и т.д.) искомого решения (метод неполного разделения переменных). В силу сказанного, результаты, связанные с решением обыкновенных дифференциальных уравнений, могут быть непосредственно использованы для решения практически важных задач геофизики.

3. Предлагаемый метод построения решения такой относительно простой задачи обладает известной общностью в том смысле, что его можно обобщить на более сложные задачи, связанные с более высоким порядком уравнений и, самое главное, с частными производными.

Предлагаемый метод решения задач математической физики основан, по сути дела, на двух основных моментах:

- а) расщеплении исходного уравнения,
- б) решении расщепленной системы уравнений методом последовательных приближений.

Под расщепленной системой уравнений, или под расщеплением исходного уравнения, мы понимаем некоторую систему уравнений более низкого (первого) порядка, определенная комбинация решений которой дает точное решение исходного уравнения.

Подчеркнем, что рассматриваемая ниже расщепленная система уравнений существенным образом отличается от общеизвестных систем уравнений, эквивалентных исходному уравнению. Иначе говоря, преимущество к существующим методам решения, использующим эквивалентные системы, в данном случае отсутствует, в силу чего отпадает необходимость ссылок на такие работы.

Перейдем теперь к последовательному описанию предлагаемого универсального метода решения геофизических задач на примере обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с произвольно заданными коэффициентами.

## I. Однородный оператор. Теорема эквивалентности

Пусть задан обыкновенный линейный однородный дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L_2(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1.1)$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  — произвольно заданные функции, принадлежащие классу кусочно-непрерывных ограниченных функций.

Требуется расщепить исходное уравнение (I.1), т.е. представить решение оператора (I.1) как решение некоторой системы уравнений первого порядка.

Решение уравнения (I.1) представим в виде суммы

$$y = y_1 + y_2, \quad (1.2)$$

а сами функции  $y_1$  и  $y_2$  будем определять как решение системы вида

$$y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2, \quad (1.3)$$

$$y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2.$$

В связи с таким представлением решения уравнения (I.1) возникает вопрос, при каких условиях эти решения будут эквивалентны?

На этот вопрос легко ответить и сформулировать следующую теорему эквивалентности.

**Теорема.** Пусть  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — любые две непрерывные на  $[0, x]$  функции с ограниченной первой производной такие, что

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \geq \varepsilon > 0 \quad (1.4)$$

при всех  $x$  из рассматриваемого интервала  $[0, x]$ , а  $\varepsilon$  — любое, сколь угодно малое положительное число.

Определим коэффициенты  $\{a_{ik}(x)\}$  системы (I.3) следующим образом:

$$a_{ii}(x) = \varphi_i(x) - \alpha_i(x), \quad (1.5)$$

$$a_{12}(x) = \alpha_2(x), \quad a_{21}(x) = \alpha_1(x),$$

$$\alpha_i(x) = (-1)^{i+1} \cdot \frac{\varphi_{i+1}^2 + \varphi_i^2 + p(x) \cdot \varphi_{i+1} + q(x)}{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}, \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Тогда решение уравнения (I.1) и решение вида (I.2) системы (I.3) при условиях (I.4), (I.5) эквивалентны.

Доказательство этой теоремы разобьем на две части.

I. Покажем, что любая функция вида (I.2), образованная из решения системы (I.3) при условиях (I.4), (I.5), является решением оператора (I.1).

Действительно, из (I.3) и (I.5) следует:

$$(y_1 + y_2)' = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2. \quad (1.6)$$

Дифференцируя последнее равенство и снова используя (I.3) и (I.5), получим

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' &= \varphi_1 y_1' + \varphi_2 y_2' + \varphi_1' y_1 + \varphi_2' y_2 = \\ &= [\varphi_1(\varphi_1 - \alpha_1) + \varphi_2 \alpha_1 + \varphi_1'] y_1 + \\ &+ [\varphi_1 \alpha_2 + \varphi_2(\varphi_2 - \alpha_2) + \varphi_2'] y_2 = \\ &= -p[\varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2] - q[y_1 + y_2] = \\ &= -p(y_1 + y_2)' - q(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

или

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = 0.$$

И утверждение доказано.

2. Покажем, что любое решение  $y(x)$  уравнения (I.1) можно разбить на две части так, что обе части будут являться решением системы (I.3) - (I.5) при соответствующем выборе функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ .

Для этого

а) зададим произвольным образом некоторую функцию  $y_1(x)$ ,

б) определим вторую функцию  $y_2(x)$  как разность

$$y_2(x) = y(x) - y_1(x),$$

в) потребуем, чтобы  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  являлись решением системы (I.3) при связях (I.4), (I.5). И из этого требования определим функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ .

Нетрудно видеть, что систему (I.3) с учетом (I.5) можно записать

$$\begin{aligned} (\varphi_2 - \varphi_1) y_1' &= [\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1' + p\varphi_1 + q] y_1 + \\ &+ [\varphi_2^2 + \varphi_2' + p\varphi_2 + q] y_2, \\ (\varphi_2 - \varphi_1) y_2' &= - [\varphi_1^2 + \varphi_1' + p\varphi_1 + q] y_1 - \\ &- [\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2' + p\varphi_2 + q] y_2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Систему (I.7) нужно рассматривать как систему, определяющую функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  по заданным функциям  $p, q, y_1$  и  $y_2$ . И она всегда разрешима. В самом деле, складывая оба равенства (I.7), получим линейную связь между  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  вида (I.6). Выражая линейно одну из функций  $\varphi$  через другую и подставляя ее в любое из равенств системы (I.7), получим относительно  $\varphi$  уравнение Рикатти, которое, согласно общей теореме существования, имеет бесчисленное множество частных решений. Выбирая два частных решения  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$  таких, чтобы условие (I.4) было выполнено, мы приходим к выводу: принципиально всегда возможно по любым заданным функциям  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , в сумме дающим решение уравнения (I.I), найти  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  такие, что система (I.3) при условиях (2.4), (2.5) будет иметь своими решениями именно заданные функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ . И тем самым второе утверждение доказано.

Заметим, что второе утверждение можно было бы и не доказывать, поскольку, как будет показано ниже, общее решение задачи (I.2) - (I.5) является одновременно и общим решением дифференциального оператора (I.I).

Итак, всякая функция вида (I.2), образованная из решения системы (I.3) при условиях (I.4), (I.5), является решением уравнения (I.I). И наоборот, всякое решение уравнения (I.I) можно разбить на сумму двух функций, которые будут являться решением системы (I.3) при связях (I.5) и условии (I.4), т.е. указанные решения эквивалентны.

## 2. Построение общего решения оператора (I.I)

В силу доказанной эквивалентности можно утверждать, что общие решения уравнения (I.I) и системы (I.2) - (I.5) будут

одними и теми же.

Найдем это общее решение, для чего в системе (I.3) перейдем к новым функциям согласно равенствам:

$$y_i = Y_i \cdot \exp a_i; \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

где

$$a_i = \int_0^x a_{i1}(x) dx = \int_0^x [\varphi_1 - \alpha_i] dx. \quad (2.2)$$

Тогда (I.3) перейдет в систему вида

$$Y_1' = \alpha_2 Y_2 \cdot \exp [-\sigma], \quad (2.3)$$

$$Y_2' = \alpha_1 Y_1 \cdot \exp \sigma,$$

где

$$\sigma \equiv a_1 - a_2 = \int_0^x [\varphi_1 - \alpha_1 - \varphi_2 + \alpha_2] dx. \quad (2.4)$$

Общее решение системы (2.3) легко найти с помощью метода последовательных приближений.

Введем в рассмотрение следующие повторные интегральные операторы вида:

$$A_i f \equiv \int_0^x \alpha_i \cdot f \cdot \exp [(-1)^{i+1} \cdot \sigma] dx, \quad (2.5)$$

$$A_i^n \equiv A_i^n; \quad A_i^n = A_i(A_i^{n-1}), \quad i = 1, 2$$

и две функции:

$$Y_1(\varphi_1, \varphi_2) = 1 + A_2 A_1 + (A_2 A_1)^2 + (A_2 A_1)^3 + \dots \quad (2.6)$$

$$Y_2(\varphi_1, \varphi_2) = 1 + A_1 A_2 + (A_1 A_2)^2 + (A_1 A_2)^3 + \dots$$

Тогда общее решение системы (2.3) будет

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2) + C_2 A_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2), \\ Y_2 &= C_1 A_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2) + C_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой этого решения в (2.3) с учетом равенств (2.5).

Если ввести в рассмотрение еще две функции вида:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) &= \exp a_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2) + \exp a_2 A_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2), \\ \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) &= \exp a_1 A_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2) + \exp a_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2),\end{aligned}\quad (2.8)$$

то общее решение оператора (I.I) можно записать так:

$$y = C_1 \tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) + C_2 \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2). \quad (2.9)$$

В том, что (2.9) действительно является общим решением уравнения (I.I), легко убедиться, т.к.

1. Функции  $\tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2)$  и  $\tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2)$  из (2.8) удовлетворяют уравнению (I.I). В этом нетрудно убедиться с помощью непосредственной подстановки с учетом равенств (I.5), (2.5), (2.6);

2. Эти функции линейно-независимы, т.к. их вронскиан

$$W = \tilde{Y}_1 \tilde{Y}'_2 - \tilde{Y}'_1 \tilde{Y}_2 = (\varphi_2 - \varphi_1) [\tilde{Y}_1 \tilde{Y}'_2 - A_1 \tilde{Y}'_1 \cdot A_2 \tilde{Y}_2] \exp[a_1 + a_2] \quad (2.10)$$

в начальной точке  $x = 0$  не равен нулю в силу (I.4), следовательно, не равен нулю ни в одной точке интересующего нас интервала  $[0, x]$ ;

3. Любое частное решение уравнения (I.I) с начальными данными вида

$$y|_{x=0} = y_0; \quad y'|_{x=0} = y'_0 \quad (2.11)$$

может быть получено из общего решения (2.9), коль скоро константы  $C_1$  и  $C_2$  определить как решение системы

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 &= y_0, \\ \varphi_1(0)C_1 + \varphi_2(0)C_2 &= y'_0,\end{aligned}\quad (2.12)$$

которая всегда разрешима, т.к.  $\varphi_1(0) - \varphi_2(0) \neq 0$  в силу условия (I.4).

Таким образом, функция вида (2.9) является общим решением оператора (I.I), а функции  $\tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2)$  и  $\tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2)$  из (2.8) образуют фундаментальную систему уравнения (I.I).

Общее решение оператора (I.I) можно записать в другой, канонической, форме, если определить нормальную фундаментальную систему уравнения (I.I) как

$$\hat{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\varphi_1(0)}{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)} \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) - \frac{\varphi_2(0)}{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)} \tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad (2.13)$$

$$\hat{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)} [\tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) - \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2)].$$

Тогда общее решение (I.I) можно записать в нормальной форме

$$y = y_0 \hat{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) + y_0' \hat{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2). \quad (2.14)$$

### 3. Теоремы существования и единственности

Построенные фундаментальные системы (2.8) или (2.13) оператора (I.I) имеют большой произвол: две любые непрерывные функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  с ограниченными первыми производными, на которые накладывается лишь одно слабое ограничение (I.4). И в этом заключено известное и достаточно сильное преимущество предлагаемого метода.

Ниже покажем, что метод, основанный на предварительном расщеплении исходного уравнения, т.е. на замене исходного уравнения (I.I) некоторой эквивалентной системы вида (I.2) - (I.5), обладает рядом существенных достоинств, к числу которых прежде всего следует отнести:

I) простоту построения общего решения исходного уравнения (I.I);

2) получение достаточно сильного произвола (произвол двух функций), позволяющего получить все известные теоремы для

исходного уравнения (I.I), включая теоремы существования и единственности. Кроме этого, указанный произвол позволяет получить ряд новых результатов, связанных прежде всего, с численным решением задач Коши и краевых задач;

3) простоту получения на базе указанного произвола всякого рода оценок близости приближенных решений к точным как на уровне аналитического представления, так и на уровне численных реализаций;

4) возможность построения более гибких в смысле лучшего приближения и более экономичных разностных схем;

5) и, наконец, возможность обобщения предлагаемого метода на более сложные задачи, связанные либо с более высоким порядком уравнения, либо с частными производными.

Перейдем к рассмотрению теорем существования и единственности. Введем обозначения:

$$\alpha_i(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x \in [0, x]} \left| \frac{\varphi_{i+}^2 + \varphi_{i+}' + p\varphi_{i+} + q}{\varphi_1 - \varphi_2} \right|, \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Допустим, что определены две непрерывные функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  такие, что  $\alpha_i(\varphi_1, \varphi_2)$  ограничены. Тогда для операторов  $A_i$  из (3.5) справедливы оценки:

$$|A_i| \leq \alpha_i(\varphi_1, \varphi_2) \cdot M \cdot x, \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

где

$$M = \sup_{x \in [0, x]} \{ \exp \sigma, \exp (-\sigma) \}, \quad (3.3)$$

а функции  $u_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2)$  из (3.6), согласно (3.5), при этом имеют одну и ту же оценку вида

$$|u_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2)| = \operatorname{ch} \sqrt{\alpha_1(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \alpha_2(\varphi_1, \varphi_2) \cdot M \cdot x}. \quad (3.4)$$

Из того факта, что интегралы от кусочно-непрерывных и ограниченных функций существуют и непрерывны, а также из оценок (3.4), следует существование непрерывного для любого ко-

нечного  $x$  общего решения уравнения (I.I) вида (2.9) или (2.I4) с непрерывной первой производной. И тем самым теорема существования доказана.

Совершенно ясно, что если коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  уравнения (I.I) ограничены на интервале  $[0, x]$ , то для любых непрерывных функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  с ограниченными первыми производными, удовлетворяющих (I.4), условия ограниченности (3.2) выполнены, в силу чего решение существует для любых таких функций. При этом решение непрерывно вместе со своей первой производной.

По всей видимости, условие теоремы существования можно ослабить: требовать не ограниченности функций  $\alpha_1(\varphi_1, \varphi_2)$  из (3.I), а их интегрируемости по Лебегу с некоторой весовой функцией, но на этом останавливаться не будем, поскольку для решения практически интересных задач математической физики условий ограниченности коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$  вполне достаточно.

Итак, теорема существования для уравнения (I.I) с любыми ограниченными коэффициентами  $p(x)$  и  $q(x)$  и для любых непрерывных  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , удовлетворяющих (I.4), с ограниченными первыми производными доказана.

Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения (I.I) с начальными данными вида (2.II) основана на том очевидном факте, что решением системы (I.3) с нулевыми начальными данными может быть только тривиальное для любых  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ .

Чтобы доказать теорему единственности задачи Коши для (I.I), допустим, что имеется два решения оператора (I.I), удовлетворяющие одним и тем же начальным данным (2.II). Тогда, в силу линейности оператора (I.I), разность этих решений также будет удовлетворять уравнению (I.I) с нулевыми начальными данными. Поскольку уравнение (I.I) эквивалентно системе (I.2) - (I.5), то полученную разность можно разбить на сумму двух функций так, что каждое слагаемое будет удовлетворять системе (I.3) при условиях (I.4), (I.5). Начальные данные  $C_1$  и  $C_2$  для такой системы нужно определить из однородной системы (2.I2) которая, в силу (I.4), имеет только нулевое решение. Следовательно, каждое из слагаемых тождественно-

но равно нулю для любых  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , в силу чего тождественно равна нулю и сама сумма. А это значит, что разность двух рассматриваемых функций, удовлетворяющих уравнению (I.I) и одним и тем же начальным условиям (2.II), тождественно равно нулю. И тем самым теорема единственности доказана.

Из доказанной теоремы единственности следует очень интересный вывод о том, что если заданы коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  оператора (I.I) и фиксированы начальные данные (2.II), то функция вида (2.I4) определяет одну и ту же функцию, каковы бы ни были  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  из класса допустимых функций.

А это значит, что, беря различные пары функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , будем получать различные квадратурные представления для одной и той же функции. Более подробно рассмотрим этот вопрос в разделе 5.

#### 4. Условия разрешимости оператора (I.I) в квадратурах

Перейдем к получению и обсуждению некоторых хорошо известных и новых результатов для уравнения (I.I) с точки зрения его разрешимости в квадратурах.

Ясно, что бесконечные квадратурные ряды (2.6) оборвутся, коль скоро одна из функций  $\alpha_1(x)$  из (I.5) тождественно равна нулю на рассматриваемом интервале. Иначе говоря, если в качестве одной из функций, скажем,  $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ , взять какое-либо частное решение уравнения Рикатти:

$$\varphi^2 + \varphi' + p(x)\varphi + q(x) = 0, \quad (4.1)$$

то уравнение (I.I) разрешимо в квадратурах. При этом общее решение (I.I) имеет вид (2.9), где

$$\tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) = \exp \left[ \int_0^x \varphi \cdot dx \right], \quad (4.2)$$

$$\tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) = \exp \left[ \int_0^x \varphi dx \right] A + \exp \left[ \int_0^x (\varphi_2 - \alpha_2) dx \right].$$

Здесь  $\varphi_2(x)$  - произвольная функция, а

$$\alpha_2(x) = - \frac{\varphi_2^2 + \varphi_2' + p\varphi_2 + q}{\varphi_2 - \varphi_2},$$

$$A = \int_0^x \alpha(x) \exp \left[ \int_0^x (\varphi_2 - \varphi - \alpha) dx \right] dx. \quad (4.3)$$

2. Если известны два линейно-независимых решения уравнения Рикатти (4.1), то, беря их в качестве функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , получим наиболее простой (канонический) вид для функций

$$\tilde{Y}_i(\varphi_1, \varphi_2) = \exp \left[ \int_0^x \varphi_i dx \right], \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

3. Если известно какое-либо частное решение  $y_1$  уравнения (I.I), то, как известно, функция

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi(x) = (\ln y_1)' = \frac{y_1'}{y_1} \quad (4.5)$$

является решением уравнения Рикатти (4.1). Поэтому, взяв эту функцию в качестве одной из функций  $\varphi_1(x)$ , получим случай (I). При этом, если положить

$$\varphi_2 = \frac{y_1'}{y_1} + \frac{1}{y_1^2} \exp \left[ - \int_0^x p \cdot dx \right], \quad (4.6)$$

то получим хорошо известную формулу

$$\tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) = y_1 \int_0^x \frac{1}{y_1^2} \exp \left[ - \int_0^x p dx \right] dx + y_1 \quad (4.7)$$

нахождения второго частного решения оператора (I.I) по известному первому решению.

4. Далее имеет смысл перейти к новым произвольным функциям по формулам:

$$\varphi_i \equiv - \frac{p}{2} + \psi_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.8)$$



8511

При этом получим

$$\alpha_i(x) \equiv (-1)^{i+1} \frac{\Psi_i^2 + \Psi_i' + \tilde{q}}{\Psi_1 - \Psi_2},$$

$$a_i = - \int_0^x \frac{p}{2} dx + \tilde{a}_i, \quad (4.9)$$

$$\sigma = \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2,$$

где

$$\tilde{q} \equiv q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{a}_i = \int_0^x [\Psi_i - \alpha_i] dx.$$

Рассмотрим частный случай

$$\tilde{q} = \tilde{q}_0 = \text{const}, \quad (4.11)$$

который наверняка осуществляется для уравнения (I.I) с постоянными коэффициентами. Уравнение Рикатти (4.I) в этом случае будет иметь вид:

$$\Psi^2 + \Psi' + q_0 = 0, \quad (4.12)$$

и частные решения его будут зависеть от того, равно нулю  $q_0$  или нет. Рассмотрим эти возможности.

а) Пусть  $q_0 \neq 0$ . Тогда, полагая

$$\Psi_{1,2} = \pm \sqrt{-q_0}, \quad (4.13)$$

получим фундаментальную систему уравнения (I.I) в канонической форме

$$\tilde{Y}_{1,2} = \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx \pm \sqrt{-q_0} \cdot x \right]. \quad (4.14)$$

б) Пусть  $q_0 = 0$ . Тогда частными решениями уравнения Рикатти вида

$$\Psi^2 + \Psi' = 0 \quad (4.15)$$

являются функции

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = \frac{1}{x}, \quad (4.16)$$

и фундаментальная система оператора (I.I) в этом случае может быть записана

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1 &= \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx \right], \\ Y_2 &= x \cdot \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

5. Рассмотрим еще один частный случай, когда функция  $\tilde{q}$  из (4.10) имеет вид

$$q = \frac{q_0}{x^2}, \quad q_0 = \text{const} \neq 0, \quad (4.18)$$

что наверняка имеет место для уравнения Эйлера второго порядка.

Уравнение Рикатти (4.1) в этом случае имеет вид

$$\Psi^2 + \Psi' + \frac{a}{x^2} = 0. \quad (4.19)$$

Полагая  $\Psi = r/x$ , получим определяющее уравнение

$$r^2 - r + a = 0. \quad (4.20)$$

Если корни определяющего уравнения (4.20) различны, то, полагая

$$\Psi_1 = \frac{r_1}{x}, \quad \Psi_2 = \frac{r_2}{x}, \quad (4.21)$$

получим следующую фундаментальную систему оператора (I.I):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1 &= x^{r_1} \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx \right], \\ \tilde{Y}_2 &= x^{r_2} \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Если же корни характеристического уравнения равны, т.е.  $r_1 = r_2 = 1/2$ , то, полагая

$$\Psi_1 = \frac{1}{2x}, \quad \Psi_2 = \varphi(x), \quad (4.23)$$

получим

$$\tilde{Y}_1 = \sqrt{x} \cdot \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} \cdot dx \right], \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_2 = \sqrt{x} \cdot \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx \right] A + \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx + \right. \\ \left. + \int_0^x (\varphi - \alpha) dx \right], \end{aligned}$$

где

$$\alpha(x) \equiv \frac{\varphi^2 + \varphi' + q_0/x^2}{\varphi - 1/2x}, \quad (4.25)$$

$$A \equiv \int_0^x \alpha(x) \cdot \exp \left[ \int_0^x \left( \varphi - \frac{1}{2x} - \alpha \right) dx \right] dx,$$

а  $\varphi(x)$  — произвольная функция. В частном случае, полагая

$$\varphi = \frac{3}{2x}, \quad (4.26)$$

получим

$$Y_2 = [1 + \ln x] \cdot \sqrt{x} \cdot \exp \left[ - \int_0^x \frac{p}{2} dx \right]. \quad (4.27)$$

Все рассмотренные выше случаи хорошо известны и достаточно подробно изложены в любой учебной литературе. Нас эти случаи интересовали только лишь с точки зрения иллюстрации применимости предлагаемого метода.

Эти примеры достаточно наглядно убеждают в том, что применение предлагаемого метода расщепления оказывается весьма эффективным.

С помощью этого метода можно получить очень просто и даже изящно все известные результаты, относящиеся к решению дифференциального оператора (I.I), а также получить некоторые новые результаты, к описанию которых и перейдем.

6. Рассмотрим еще одно достаточное условие разрешимости уравнения (I.I) в квадратурах.

Допустим, что удалось найти две функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  такие, что интегральные операторы  $A_1$  и  $A_2$  из (2.5) оказались пропорциональными, т.е.

$$A_i = C_i A, \quad C_i = \text{const} \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.28)$$

Последние условия наверняка выполняются, если

$$C_2 \alpha_1 \cdot \exp[\sigma] = C_2 \alpha_2 \cdot \exp[-\sigma] \quad (4.29)$$

или

$$2\sigma' = \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}. \quad (4.30)$$

Тогда бесконечные квадратурные ряды (2.6) оказываются равными, их можно свернуть и представить в виде

$$\tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) = \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) = \text{ch} \sqrt{C_1 C_2} \cdot A, \quad (4.31)$$

и тем самым уравнение (I.I) разрешено в квадратурах.

Отметим, что условие (4.30) определяет вид оператора  $A$  в форме (4.31). Оно же является необходимым и достаточным условием коммутативности операторов  $A_1$  и  $A_2$ .

7. Выше рассматривались достаточные условия разрешимости оператора (I.I) в квадратурах. А каковы необходимые условия разрешимости? На этот вопрос можно ответить.

В самом деле, уравнение (I.I) разрешимо в квадратурах тогда и только тогда, когда бесконечные квадратурные ряды (2.6) либо обрываются, либо сворачиваются, подобно тому случаю,

который рассмотрен в п.6 этого параграфа. Другими словами, если оператор (I.I) разрешим в квадратурах, то должны существовать такие функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , при которых квадратурные ряды либо обрываются, либо сворачиваются.

Спрашивается, как их найти? Для этого определим те дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют квадратурные ряды (2.6). Легко проверить, что они имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1'' - \left( \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} - \sigma' \right) \tilde{Y}_1' - \alpha_1 \alpha_2 \tilde{Y}_1 &= 0, \\ \tilde{Y}_2'' - \left( \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} + \sigma' \right) \tilde{Y}_2' - \alpha_1 \alpha_2 \tilde{Y}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.32'}$$

Тогда можно утверждать, что если уравнение (I.I) разрешимо в квадратурах, то функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , которые обеспечивают конечный квадратурный вид функциям  $\tilde{Y}_{1,2}$  должны являться решением системы (4.32).

В этом и состоят необходимые условия. Они же являются и достаточными.

Действительно, если возможно определить две функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  такие, при которых, по крайней мере, одно из уравнений (4.32) разрешимо в квадратурах, то в квадратурах разрешимо и исходное уравнение (I.I).

Таким образом доказана общая теорема разрешимости оператора (I.I) в квадратурах, которую можно сформулировать так: дифференциальное уравнение второго порядка вида (I.I) разрешимо в квадратурах тогда и только тогда, когда можно определить две функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  такие, при которых, по крайней мере, одно из уравнений (4.32) разрешимо в квадратурах.

Все рассмотренные в этом параграфе примеры являются частными случаями этой общей теоремы разрешимости.

В самом деле, если  $\alpha_1 = 0$  или  $\alpha_2 = 0$ , то уравнения (4.32) наверняка разрешимы в квадратурах, следовательно, разрешимо в квадратурах и исходное уравнение (I.I). А условия  $\alpha_1 = 0$  или  $\alpha_2 = 0$  равносильны определению решения уравнения Рикатти (4.I).

Если выполнено условие (4.30), то оба уравнения (4.32) совпадают, и одним из частных решений их является функция вида (2.31), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Из этой общей теоремы разрешимости можно сформулировать бесчисленное множество различных достаточных условий разрешимости в квадратурах исходного уравнения (I.I).

Действительно, требуя, чтобы какая-либо одна из функций  $\tilde{Y}_1$  или  $\tilde{Y}_2$  была равна заданной функции, получим из равенств (4.32) условия на функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ . Эти условия в общем случае представляют собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, т.е. в этом случае линейная задача свелась к более сложной. Однако некоторым преимуществом такого представления может оказаться то, что на две произвольные функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  накладывается одно условие.

Вообще, нужно отметить, что доказанная теорема мало конструктивна, как и всякая иная теорема разрешимости, доказанная для общего случая. Однако она может оказаться весьма полезной, коль скоро вид коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$  будет задан.

## 5. Квадратурное представление функций

Перейдем от  $\varphi_{1,2}(x)$  к новым произвольным функциям  $y_{1,2}(x)$  согласно равенствам

$$\varphi_i(x) \equiv [\ln y(x)]' = \frac{y_i'(x)}{y_i(x)}, \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

Подчеркнем, что функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  никоим образом не связаны с решением уравнения (2.I), а есть любые две функции такие, что

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \equiv \left| \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2} \right| = \left| \frac{W}{y_1 y_2} \right| \geq \epsilon > 0, \quad (5.2)$$

где

$$W = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0,$$

$$W(0) = y_1(0) y_2'(0) - y_2(0) y_1'(0) \neq 0 - \quad (5.3)$$

вронскиан двух функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , т.е. произвольные функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  должны быть обязательно линейно-независимыми.

При таком переходе к новым произвольным функциям основные формулы (1.5), (2.2), (2.4), (2.5), (2.6), (2.13) переписываются:

$$\alpha_1(x) = -\frac{y_2 Ly_1}{W}, \quad \alpha_2(x) = \frac{y_1 Ly_2}{W},$$

$$Ly \equiv L_2 y \equiv y'' + p(x)y' + q(x) \cdot y,$$

$$\exp a_i = \frac{y_i(x)}{y_i(0)} \exp b_i; \quad b_i \equiv -\int_0^x \alpha_i(x) dx, \quad i = 1, 2;$$

$$\exp \sigma = \frac{y_1(x)}{y_1(0)} \cdot \frac{y_2(0)}{y_2(x)} \exp \rho; \quad \rho \equiv \int_0^x \frac{y_1 Ly_2 + y_2 Ly_1}{W} dx;$$

$$A_1 f = -\int_0^x \frac{y_1 Ly_2}{W} \exp[\rho] \cdot f dx;$$

$$A_2 f = \int_0^x \frac{y_2 Ly_1}{W} \exp[-\rho] \cdot f dx; \quad (5.4)$$

$$Y_1(y_1, y_2) = 1 + A_2 A_1 + (A_2 A_1)^2 + \dots$$

$$Y_2(y_1, y_2) = 1 + A_1 A_2 + (A_1 A_2)^2 + \dots$$

$$\hat{Y}_1(y_1, y_2) = \frac{1}{W(0)} \{ [y_2'(0)y_1 - y_1'(0)A_2 y_2] \exp b_1 \cdot y_1(x) + \\ + [y_2'(0)A_1 y_1 - y_1'(0)y_2] \exp b_2 \cdot y_2(x) \};$$

$$\hat{Y}_2(y_1, y_2) = \frac{1}{W(0)} \{ [y_1(0)A_2 y_2 - y_2(0)y_1] \cdot \exp b_1 \cdot y_1(x) + \\ + [y_2(0)y_2 - y_2(0)A_1 y_1] \cdot \exp b_2 \cdot y_2(x) \}.$$

Общее решение оператора (I.I), как и раньше (2.I4), можно записать в виде

$$y = y_0 Y_1(y_1, y_2) + y_0' Y_2(y_1, y_2), \quad (5.5)$$

где  $y_0$  и  $y_0'$  — любые начальные данные, заданные в (2.II).

Согласно теореме единственности задачи Коши для уравнения (I.I), можно утверждать, что функция  $\hat{Y}_1(y_1, y_2)$  или  $\hat{Y}_2(y_1, y_2)$  из (5.4), равно как функция  $\hat{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2)$  или  $\hat{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2)$  из (2.I3), определяют одну и ту же функцию, каковы бы ни были взяты произвольные функции  $y_{1,2}(x)$  или  $\varphi_{1,2}(x)$ .

В силу этого, любую функцию, являющуюся решением некоторого линейного однородного оператора второго порядка вида (I.I) с непрерывными или кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами можно представить в виде бесконечного абсолютно сходящегося ряда, члены которого суть повторные квадратуры с определенными ядрами. Причем такое представление далеко не единственное: с помощью любой пары линейно-независимых функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  можно получить одно единственное представление.

Другими словами, мощностью такого представления является множество всех пар линейно-независимых непрерывных функций с ограниченными первыми производными. Такое представление функций назовем **к в а д р а т у р н ы м п р е д с т а в л е н и е м**, а бесконечные ряды, отвечающие такому представлению функций, назовем **к в а д р а т у р н ы м и р я д а м и**.

Мы не будем сейчас заниматься общей теорией квадратурного представления функций, а рассмотрим для иллюстрации лишь два примера, связанных с функциями  $\sin \omega x$ ,  $\cos \omega x$  и функциями Бесселя.

I. Рассмотрим оператор вида

$$Ly = y'' + \omega^2 y = 0, \quad (5.6)$$

где  $\omega$  — некоторое комплексное число, не равное нулю. Определим  $\sin \omega x$  и  $\cos \omega x$  следующим образом:

$$\cos \omega x \equiv \hat{Y}_1(y_1, y_2); \quad \sin \omega x \equiv \omega \hat{Y}_2(y_1, y_2), \quad (5.7)$$

где  $\hat{Y}_1(y_1, y_2)$  и  $\hat{Y}_2(y_1, y_2)$  определены в (5.4), оператор  $L$  имеет вид (5.6).

В том, что такое представление (5.7) действительно имеет место, легко убедиться, непосредственно взяв

$$y_1 = \cos \omega x, \quad y_2 = \sin \omega x. \quad (5.8)$$

В этом случае

$$\alpha_i(x) = b_i = \rho = A_i \equiv 0; \quad W = \omega \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.9)$$

$$Y_i = 1; \quad \hat{Y}_1 = \cos \omega x; \quad \hat{Y}_2 = \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega x.$$

Положим

$$y_1 = e^{i\omega x}; \quad y_2 = e^{-i\omega x}, \quad (5.10)$$

тогда

$$\alpha_i(x) = b_i = \rho = A_i \equiv 0; \quad W = -2i\omega \neq 0; \quad Y_i = 1$$

и получим хорошо известные формулы Эйлера

$$\cos \omega x = \frac{1}{2}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}), \quad \sin \omega x = \frac{1}{2i}(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}). \quad (5.11)$$

Положим далее

$$y_1 = e^{\omega x}, \quad y_2 = e^{-\omega x}. \quad (5.12)$$

Тогда

$$\alpha_1(x) = \omega, \quad \alpha_2(x) = -\omega, \quad \exp a_i = 1, \quad W = -2\omega,$$

$$Y_1 = Y_2 = 1 - \frac{\omega^2 x^2}{2!} + \frac{\omega^4 x^4}{4!} - \frac{\omega^6 x^6}{6!} + \dots \quad (5.13)$$

$$\cos \omega x = \hat{Y}_1 = Y_1 = 1 - \frac{\omega^2 x^2}{2!} + \frac{\omega^4 x^4}{4!} - \dots, \quad (5.13)$$

$$\sin \omega x = \omega \hat{Y}_2 = \omega x - \frac{\omega^3 x^3}{3!} + \frac{\omega^5 x^5}{5!} - \dots,$$

т.е. получили разложение  $\sin \omega x$  и  $\cos \omega x$  в ряд Маклорена. Как видно из приведенных примеров, квадратурное представление функций является достаточно общим представлением функций, из которого как частные случаи следуют все наиболее употребительные представления функций.

При квадратурных представлениях функций основным вопросом является, удачно или неудачно выбрана система линейно-независимых функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , дающих данное квадратурное представление.

2. Рассмотрим уравнение Бесселя вида:

$$Ly = y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (5.14)$$

где  $n$  — любое, вообще говоря, комплексное число.

Из вида оператора (5.14) следует, что функция Бесселя должна иметь особенность в нуле. Причем, особенность точно такая же, как для уравнения Эйлера вида

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{n^2}{x^2} y = 0, \quad (5.15)$$

для которого соответствующее уравнение Рикатти имеет вид

$$\varphi^2 + \varphi' + \frac{\varphi}{x} - \frac{n^2}{x^2} = 0. \quad (5.16)$$

Полагая  $\varphi = r/x$ , как это сделано в п.5, раздела 4, получим определяющее уравнение

$$r^2 - r + r - n^2 = 0, \quad (5.17)$$

корнями которого являются числа

$$r_{1,2} = \pm n. \quad (5.18)$$

В силу этого общее решение уравнения Бесселя (5.14) должно иметь вид

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 \cdot J_{-n}(x) = C_1 x^n \cdot I_n(x) + x^{-n} C_2 \cdot I_{-n}(x), \quad (5.19)$$

где функции  $I_{\pm n}(x)$  не должны иметь особенностей в нуле.

Как известно, функции  $I_{+n}(x)$  и  $I_{-n}(x)$  удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} I_n'' + \frac{2n+1}{x} I_n' + I_n &= 0, \\ I_{-n}'' - \frac{2n-1}{x} I_{-n}' + I_{-n} &= 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

и требуется найти не общее решение уравнений (5.20), а любые частные решения, не имеющие особенностей в нуле. Это очень просто сделать, применив следующий прием. Пусть требуется найти частное решение уравнения (I.I). Будем искать его в виде следующего квадратного представления:

$$Y = 1 + \alpha Y, \quad (5.21)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — интегральные повторные операторы вида:

$$\begin{aligned} \alpha f &\equiv \int_0^x \alpha(x) \cdot f(x) dx, \\ \beta f &\equiv \int_0^x \beta(x) \cdot f(x) dx. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Нетрудно убедиться, что функция (5.21) удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$Y'' - \frac{\alpha'}{\alpha} Y' - \alpha \cdot \beta Y = 0. \quad (5.23)$$

Чтобы  $Y$  являлось частным решением (I.I) нужно, чтобы уравнения (I.I) и (5.23) совпали. Отсюда следует, что

$$\alpha = \exp\left(-\int_0^x p(x) dx\right); \quad \beta = -q(x) \exp\left(\int_0^x p(x) dx\right). \quad (5.24)$$

И тем самым частное решение (I.I) найдено. Применяв этот прием к уравнениям (5.20), получим

$$I_n = 1 - \int_0^x \frac{dx}{x^{2n+1}} \int_0^x x^{2n+1} \cdot I_n(x) dx, \quad (5.25)$$

$$I_{-n} = 1 - \int_0^x x^{2n-1} dx \int_0^x \frac{dx}{x^{2n-1}} \cdot I_{-n}(x) dx.$$

Решая интегральные уравнения (5.25) методом последовательных приближений, получим хорошо известное разложение функций Бесселя в ряд:

$$I_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} -$$

$$- \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \quad (5.26)$$

$$I_{-n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2(-2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2n+2)(-2n+4)} -$$

$$- \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2n+2)(-2n+4)(-2n+6)} + \dots$$

Ясно, что первая функция  $I_n(x)$  существует и конечна в нуле для любого комплексного  $n$  или вещественного  $n \geq 0$ .

Вторая функция  $I_{-n}(x)$  существует, конечна в нуле и линейно-независима от первой для любых  $n$ , кроме целых положительных и  $n = 0$ , ибо в последнем случае оба уравнения (5.20) совпадают. Чтобы найти в этом случае второе линейно-независимое решение, нужно применить любой из приемов, описанных в п.3, раздела 4.

Рассмотрим еще одно квадратурное представление функции  $J_n(x)$  из (5.14) с помощью формул, приведенных в (5.4). В качестве произвольных функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  возьмем следующие:

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x. \quad (5.27)$$

Тогда

$$W = 1, \quad \rho = (2n + 1) \int_0^x \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

$$A_1 f = (n + 1/2) \int_0^x \frac{\sin 2x}{x} \exp(\rho) \cdot f dx, \quad (5.28)$$

$$A_2 f = (n + 1/2) \int_0^x \frac{\sin 2x}{x} \exp(-\rho) \cdot f dx,$$

$$b_1 = -(2n + 1) \int_0^x \frac{\sin^2 x}{x} dx; \quad b_2 = -(2n+1) \int_0^x \frac{\cos^2 x}{x} dx,$$

и 
$$J_n(x) = \hat{Y}_1 = \exp b_1 \cdot Y_1 \cos x + \exp b_2 \cdot A_1 Y_1 \cdot \sin x, \quad (5.29)$$

где 
$$Y_1 = 1 + A_2 A_1 + (A_2 A_1)^2 + \dots = 1 + A_2 A_1 Y_1. \quad (5.30)$$

В частном случае при  $n = -1/2$  квадратурный ряд (5.30) обрывается и

$$J_{-1/2}(x) = \cos x, \quad (5.31)$$

т.е. получили хорошо известный результат.

Такое представление функций Бесселя заслуживает определенного внимания и обсуждения, но на этом мы останавливаться сейчас не будем, а рассмотрим асимптотическое разложение функций Бесселя.

Допустим, что нас интересует поведение общего решения уравнения Бесселя (5.3) для  $x \geq x_0 > 0$ , где  $x_0$  - некоторое фиксированное число.

Сначала сделаем обычное функциональное преобразование решения уравнения Бесселя (5.3) вида

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \tilde{y}. \quad (5.32)$$

Тогда функция  $\tilde{y}$  должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\tilde{y}'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) \tilde{y} = 0. \quad (5.33)$$

Возьмем в качестве  $y_1$  и  $y_2$  из (5.4) функции вида

$$y_1 = \cos(x - x_0), \quad y_2 = \sin(x - x_0), \quad W = 1. \quad (5.34)$$

Тогда

$$b_1 \equiv - \frac{n^2 - 1/4}{2} \int_{x_0}^x \frac{\sin 2(x - x_0)}{x^2} dx,$$

$$b_2 \equiv \frac{n^2 - 1/4}{2} \int_{x_0}^x \frac{\sin 2(x - x_0)}{x^2} dx,$$

$$\rho \equiv (n^2 - 1/4) \int_{x_0}^x \frac{\sin 2(x - x_0)}{x^2} dx,$$

$$A_1 f = (n^2 - 1/4) \int_{x_0}^x \frac{\cos^2(x - x_0)}{x^2} \exp(\rho) dx,$$

$$A_2 f = -(n^2 - 1/4) \int_{x_0}^x \frac{\sin^2(x - x_0)}{x^2} \exp(-\rho) dx; \quad (5.35)$$

$$Y_1 = 1 + A_2 A_1 Y_1 = 1 + A_2 A_1 + (A_2 A_1)^2 + (A_2 A_1)^3 + \dots$$

$$Y_2 = 1 + A_1 A_2 Y_2 = 1 + A_1 A_2 + (A_1 A_2)^2 + (A_1 A_2)^3 + \dots$$

$$\hat{Y}_1 = \exp b_1 \cdot Y_1 \cos(x - x_0) + \exp b_2 A_1 Y_1 \sin(x - x_0),$$

$$\hat{Y}_2 = \exp b_1 A_2 Y_2 \cos (x-x_0) + \exp b_2 Y_2 \cdot \sin (x-x_0).$$

И общее решение уравнения Бесселя (5.14) с учетом (5.32), можно записать в виде

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} [ y_0 \hat{Y}_1 + y_0' \hat{Y}_2 ],$$

где  $y_0$  и  $y_0'$  - любые начальные данные вида (2.11).

Из последних формул следует асимптотика функций Бесселя для  $x_0 \gg 1$ .

Действительно, пренебрегая степенью числа  $1/x_0$ , получим хорошо известную формулу

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} [ y_0 \cos(x-x_0) + y_0' \sin(x-x_0) ] + O\left(\frac{1}{x_0}\right). \quad (5.36)$$

Удерживая первую степень  $\frac{1}{x_0}$ , получим:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1 = & \left[ 1 - \frac{n^2 - 1/4}{2} \int_{x_0}^x \frac{\sin 2(x-x_0)}{x^2} dx \right] \cos(x-x_0) + \\ & + \left[ (n^2 - 1/4) \int_{x_0}^x \frac{\cos^2(x-x_0)}{x^2} dx \right] \cdot \sin(x-x_0) + O\left(\frac{1}{x_0^2}\right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_2 = & - \left[ (n^2 - 1/4) \int_{x_0}^x \frac{\sin^2(x-x_0)}{x^2} dx \right] \cos(x-x_0) + \\ & + \left[ 1 + \frac{n^2 - 1/4}{2} \int_{x_0}^x \frac{\sin 2(x-x_0)}{x^2} dx \right] \cdot \sin(x-x_0) + O\left(\frac{1}{x_0^2}\right) \end{aligned}$$

и т.д.

В заключение этого параграфа остановимся на геометрической аналогии квадратурного представления функций с разложением по базисным функциям, иначе — по базисным векторам.

Под базисными функциями на интервале  $[0, x]$  будем понимать любые две, вообще говоря, комплексные функции вещественного аргумента  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , непрерывные вместе с первой производной и ограниченной второй производной такие, что их вронскиан отличен от нуля на рассматриваемом интервале. Другими словами, базисные функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  должны быть линейно-независимыми. Тогда любую комплексную функцию вещественного аргумента, непрерывную вместе с первой производной и ограниченной второй производной, можно разложить единственным образом по базисным функциям и представить такое разложение в виде квадратурного представления (5.4). В этих формулах под оператором  $Ly$  понимается тот оператор второго порядка, которому удовлетворяет функция  $f(x)$ . При этом, такое квадратурное разложение справедливо в равномерной метрике, поскольку квадратурные ряды — абсолютно сходящиеся.

Беря различные функции в качестве базисных, будем получать различные квадратурные представления для одной и той же функции.

В связи с таким квадратурным представлением основным вопросом является вопрос, как выбрать базисные функции, чтобы квадратурное представление было наилучшим в каком-то смысле?

Этот вопрос с точки зрения вычислительных схем рассмотрим в следующем параграфе.

## 6. Оптимальные разностные схемы оператора (I.I)

Как известно, при любой реализации какого-либо алгоритма численного решения некоторого уравнения основными проблемами являются:

- а) наилучшая точность получаемых результатов при заданном исходном материале,
- б) наибольшая экономичность в смысле затрат машинного времени при заданном уровне точности получаемых результатов.

Как правило, эти две проблемы противопоставлены в том

смысле, что требование высокой точности получаемых результатов ведет к большим затратам машинного времени, и наоборот, требование экономичности ведет к известной потере в точности окончательных результатов.

В связи с этим возникает определенная ЗАДАЧА НА ОПТИМУМ: отыскание таких численных алгоритмов, которые давали бы одновременно достаточный в практическом отношении выигрыш и в смысле точности, и в смысле экономичности.

Совершенно ясно, что в общем случае для произвольно заданных коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$  невозможно построить единых функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , определенных на всем интересующем нас интервале изменения  $x \in [0, b]$  и обеспечивающих на этом интервале достаточно высокую степень точности окончательных результатов. Поэтому весь интервал  $[0, b]$  необходимо разбить на отдельные участки, внутри которых функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  будут выбираться из требования разумной точности.

Разбиение на шаги заданного интервала изменения  $x \in [0, b]$  произведем согласно формулам:

$$x_0 = 0, \quad x_n = x_{n-1} + h_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Подчеркнем два обстоятельства:

(1) величина шага разбиения  $h_n$  меняется от шага к шагу, т.е. шаг разбиения не постоянный, а переменный, определяемый из требования заданной точности окончательных результатов;

(2) точки разрыва первого рода коэффициентов  $p(x)$  или  $q(x)$  обязательно должны быть точками деления интервала  $[0, b]$  на шаги (6.1), т.е. коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  уравнения (2.1) должны иметь лишь конечное число точек разрыва I-го рода, что почти всегда имеет место для задач геофизики.

В связи с таким разбиением сразу возникают две задачи:

- а) сшивания решений в точках разбиения,
- б) выбора функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  внутри каждого шага разбиения, обеспечивающих достаточно высокую степень точности.

Сшивание решений произведем из требования непрерывности самого решения уравнения (1.1) и его первой производной в точках разбиения (6.1). т.е. потребуем выполнения условий:

$$y_1^- + y_2^- = y_1^+ + y_2^+, \quad (6.2)$$

$$\varphi_1^- y_1^- + \varphi_2^- y_2^- = \varphi_1^+ y_1^+ + \varphi_2^+ y_2^+,$$

где знак (-) отвечает функциям, вычисленным слева от точки  $x = x_n$ ; а (+) - справа от той же точки.

Из (6.2) следует, что

$$y_1^+ = \left[ 1 - \frac{\varphi_1^+ - \varphi_1^-}{\varphi_1^+ - \varphi_2^+} \right] y_1^- - \frac{\varphi_2^+ - \varphi_2^-}{\varphi_1^+ - \varphi_2^+} y_2^- \equiv C_1, \quad (6.3)$$

$$y_2^+ = \frac{\varphi_1^+ - \varphi_1^-}{\varphi_1^+ - \varphi_2^+} y_1^- + \left[ 1 + \frac{\varphi_2^+ - \varphi_2^-}{\varphi_1^+ - \varphi_2^+} \right] y_2^- \equiv C_2.$$

Условие сшивания в начальной точке или, что то же, учет начальных данных вида (2.II) сводится к решению системы (2.I2):

$$y_1(0) \equiv C_1 = \frac{-\varphi_2(0)}{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)} y_0 + \frac{1}{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)} y_0', \quad (6.4)$$

$$y_2(0) \equiv C_2 = \frac{\varphi_1(0)}{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)} y_0 - \frac{1}{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)} y_0'.$$

Формулы (6.3) и (6.4) дают решение первой задачи - задачи сопряжения решений.

Перейдем к решению второй задачи - выбору функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  внутри  $n$ -го шага, обеспечивающих некоторую разумную степень точности.

Допустим, что внутри  $n$ -го шага разбиения выполнены следующие условия:

$$p(x) = p(x_{n-1}) + \Delta p(x), \quad q(x) = q(x_{n-1}) + \Delta q(x),$$

$$|\Delta p(x)| \leq \Delta p_0, \quad |\Delta q(x)| \leq \Delta q_0, \quad (6.5)$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n].$$

Здесь функции  $p(x_{n-1})$  и  $q(x_{n-1})$  вычисляются справа от точки  $x = x_{n-1}$ , а  $\Delta p_0$  и  $\Delta q_0$  — константы, отвечающие наибольшим приращениям или "перепадам" соответственно коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$  внутри  $n$ -го шага разбиения.

Будем считать, что функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  внутри  $n$ -го шага разбиения принадлежат классу постоянных функций, коль скоро характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + p(x_{n-1})\lambda + q(x_{n-1}) = 0 \quad (6.6)$$

имеет различные корни, т.е.

$$|D| = \left| \frac{p^2(x_{n-1})}{4} - q(x_{n-1}) \right| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad (6.7)$$

и определяются согласно равенствам:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda_1(x_{n-1}) \equiv \lambda_1(n) = \frac{-p(x_{n-1})}{2} + \sqrt{D}, \\ \varphi_2 &= \lambda_2(x_{n-1}) \equiv \lambda_2(n) = -\frac{p(x_{n-1})}{2} - \sqrt{D}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Тогда разностная схема уравнения (I.I) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \frac{1}{\lambda_1(n) - \lambda_2(n)} \{ -\lambda_2(n)y(n-1) + \\ &+ y'(n-1) \} \cdot \exp [ \lambda_1(n) \cdot h_n ], \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} y_2(n) &= \frac{1}{\lambda_1(n) - \lambda_2(n)} \{ \lambda_1(n)y(n-1) - \\ &- y'(n-1) \} \cdot \exp [ \lambda_2(n) \cdot h_n ]. \end{aligned}$$

Здесь

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) ,$$

$$y'(n) = \lambda_1(n)y_1(n) + \lambda_2(n)y_2(n) , \quad (6.10)$$

$$n = 1, 2, \dots ; \quad y(0) = y_0 ; \quad y'(0) = y'_0 .$$

Если характеристическое уравнение (6.6) на  $n$ -м шаге разбиения имеет "близкие" друг другу корни, т.е. если выполнено неравенство

$$|\alpha_1(x)| \leq \frac{|\lambda_1| \cdot \Delta p_0 + \Delta q_0}{2 \sqrt{D}} , \quad (6.11)$$

то нужно брать

$$\varphi_1 = -\frac{p(x_{n-1})}{2} + \frac{1}{x} ; \quad \varphi_2 = -\frac{p(x_{n-1})}{2} , \quad (6.12)$$

и тогда разностная схема оператора (I.I) будет иметь вид:

$$y_1(n) = \left[ \frac{p(x_{n-1})}{2} y(n-1) + y'(n-1) \right] h_n \times \\ \times \exp \left[ -\frac{p(x_{n-1})}{2} h_n \right] , \quad (6.13)$$

$$y_2(n) = y(n-1) \exp \left[ -\frac{p(x_{n-1})}{2} \cdot h_n \right] .$$

Не составляет труда показать, что указанные разностные схемы на каждом шаге разбиения имеют порядок аппроксимации

$$\Delta \varepsilon_0 \cdot h_n , \quad (6.14)$$

где

$$\Delta \varepsilon_0 = \max \{ \Delta p_0 , \Delta q_0 \} , \quad (6.15)$$

$\Delta p_0$  и  $\Delta q_0$  определены в (6.5).

Ранее нигде не использовалось понятие типа уравнения (I.I) -гиперболического, эллиптического, параболического. Сейчас

мы рассмотрим этот вопрос с точки зрения вычислительных процедур.

Нетрудно видеть, что в случае типа уравнения:

а) гиперболического ( $\lambda_1(n)$  и  $\lambda_2(n)$  - различные и вещественные) разностная схема (6.9) дает решение  $y(n)$  из (6.10), вещественное на каждом шаге разбиения;

б) эллиптического ( $\lambda_1(n)$  и  $\lambda_2(n)$  - различные комплексно-сопряженные корни) разностную схему (6.9) необходимо рассматривать на комплексной плоскости, однако решение  $y(n)$  из (6.10), которое она дает, опять-таки вещественно на каждом шаге разбиения;

в) параболического ( $\lambda_1(n)$  и  $\lambda_2(n)$  - "близки" друг другу) разностная схема (6.13) опять-таки дает вещественное решение.

Таким образом, разностные схемы (6.9), (6.10), (6.13) для любого типа уравнений аппроксимируют с одним и тем же порядком  $\Delta g_0 \cdot h_n$  дифференциальный оператор (I.I) на каждом шаге разбиения, и решение вида (6.10) всегда вещественно. В силу этого, различие типов дифференциальных уравнений заключается лишь в технологии организации разностных схем, что несущественно с точки зрения вычислительной математики.

Необходимо отметить, что разностные схемы (6.9), (6.10), (6.13) достаточно экономичны, требуют задания значений параметров  $p(x)$  и  $q(x)$  только лишь в узлах неравномерной сетки и относительно малого числа подготовительных вычислительных операций.

Кроме того, приведенные разностные схемы обладают вполне достаточной точностью для решения подавляющего числа практически важных задач геофизики. Такое утверждение можно сделать по следующим причинам:

а) если геофизическая модель среды состоит из набора слоев с кусочно-постоянными параметрами, т.е.  $p(x)$  и  $q(x)$  принадлежат классу кусочно-постоянных функций, то решение (6.10) для разностных схем (6.9), (6.13) дает точное решение оператора (I.I) в том смысле, что имеет место бесконечный порядок аппроксимации ( $\Delta g_0 = 0$ );

б) если же геофизическая модель среды образована на совокупности слоев с плавно меняющимися параметрами, т.е.  $p(x)$

и  $q(x)$  принадлежат классу кусочно-гладких и плавно меняющихся функций, то точность порядка  $\Delta g_0$ , где  $\Delta g_0$  - максимальное приращение функций  $p(x)$  или  $q(x)$  на шаге разбиения (6.1), вполне достаточна для решения такого рода геофизических задач;

в) если же, наконец, геофизическая модель среды содержит слои с резко меняющимися непрерывными параметрами, то необходимо для таких задач либо сильно мельчить шаг разбиения, либо создавать аналогичные разностные схемы с повышенной точностью. Последнее вполне можно сделать, если

1) произвольные функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  на каждом шаге разбиения (6.1) искать не в классе постоянных функций, как это было сделано выше, а в классе полиномиальных функций вида

$$\varphi_i(x) = a_0^i + a_1^i x + \dots + a_k^i x^k, \quad i=1,2, \quad (6.16)$$

определяя коэффициенты  $a_j^i$ ,  $j=0,1,\dots,k$  из требования равенства нулю первых членов разложения в ряд Тейлора уравнения Рикатти (4.1);

2) не отбрасывать некоторые интегральные операторы, как это было сделано выше, а производить интегрирование по известным квадратурным формулам, дающим наилучшую точность.

Однако на этом вопросе в данной работе мы останавливаться не будем, поскольку это - тема другой статьи.

В заключение этого параграфа отметим одно, на наш взгляд, важное обстоятельство.

Оценки порядка аппроксимации разностных схем (6.9), (6.10), (6.13) зависят, с одной стороны, от шага разбиения  $h_n$ , с другой - от наибольшего приращения или наибольшего "перепада" коэффициентов  $\Delta g_0$  (7.23), (7.35) на  $n$ -м шаге. Причем, зависимость от  $\Delta g_0$  является основной в том смысле, что при  $\Delta g_0 = 0$  мы имеем точное решение при любом шаге разбиения.

Такая зависимость нам представляется вполне естественной и определяющей, ибо мало взять малый шаг разбиения, нужно еще быть уверенным, что на величине этого шага функции  $p(x)$  и  $q(x)$  мало меняются. Именно поэтому в полученных оценках аппроксимации присутствуют величины, обеспечивающие известную

малость по шагу разбиения  $h_n$  и по наибольшему "перепаду"  $\Delta \varepsilon_0$  на каждом шаге разбиения.

И, наконец, последнее. Если коэффициенты  $p(x)$ ,  $q(x)$  равно, как и начальные данные  $y_0$ ,  $y'_0$ , являются комплексными функциями вещественного аргумента, то все формулы, приведенные выше, сохраняют свой смысл, с одной оговоркой, что вычисления необходимо проводить в комплексной области.

## 7. Понятие характеристик оператора (I.I).

Обычно понятие характеристик вводят и существенно используют для линейных дифференциальных операторов 2-го порядка в частных производных. Как правило, для обыкновенных дифференциальных линейных уравнений вида (I.I) их не вводят и, следовательно, не используют для построения решения оператора (I.I).

Однако понятия характеристик для оператора (I.I) можно ввести и существенно их использовать для построения численного решения уравнения (I.I).

Как было показано выше, в разделе 4, расщепленной системой оператора (I.I) с вещественными коэффициентами  $p(x)$  и  $q(x)$  является система вида:

$$y'_1 = \left[ \varphi_1 - \frac{\varphi_1^2 + \varphi_1' + p\varphi_1 + q}{\varphi_1 - \varphi_2} \right] y_1 - \frac{\varphi_2^2 + \varphi_2' + p\varphi_2 + q}{\varphi_1 - \varphi_2} y_2,$$

$$y'_2 = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_1' + p\varphi_1 + q}{\varphi_1 - \varphi_2} y_1 + \left[ \varphi_2 + \frac{\varphi_2^2 + \varphi_2' + p\varphi_2 + q}{\varphi_1 - \varphi_2} \right] y_2,$$
(7.1)

где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  - произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие обязательному условию (I.4).

Совершенно ясно, что вид системы (7.1) меняется в зависимости от выбора пары функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ . Тогда возникает вопрос о канонической форме расщепленной системы (7.1).

Допустим, что уравнение Рикатти

$$\varphi^2 + \varphi' + p\varphi + q = 0 \tag{7.2}$$

имеет два неравных между собой ни в одной точке частных решения  $\lambda_1(x)$  и  $\lambda_2(x)$ . Тогда, полагая

$$\varphi_{1,2}(x) = \lambda_{1,2}(x), \quad (7.3)$$

получим канонический вид расщепленной системы:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1(x)y_1, \\ y_2' &= \lambda_2(x)y_2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Допустим, далее, что нам известно только одно частное решение  $\lambda(x)$  уравнения Рикатти (7.2). Тогда, полагая

$$\varphi_2(x) = \lambda(x), \quad \varphi_1(x) \neq \lambda(x), \quad (7.5)$$

получим другую каноническую форму расщепленной системы:

$$\begin{aligned} y_1' &= \left[ \varphi_1 - \frac{\varphi_1^2 + \varphi_1' + p\varphi_1 + q}{\varphi_1 - \lambda(x)} \right] y_1, \\ y_2' &= \frac{\varphi_1^2 + \varphi_1' + p\varphi_1 + q}{\varphi_1 - \lambda(x)} y_1 + \lambda(x)y_2, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где  $\varphi_1(x)$  — произвольная функция.

Нетрудно видеть, что обе канонические формы (7.4) и (7.6) расщепленных систем оператора (I.I) легко разрешить в квадратурах.

В связи с таким каноническим видом расщепленных систем можно дать следующее определение характеристик оператора (I.I): под характеристиками оператора (I.I) с вещественными коэффициентами  $p(x)$  и  $q(x)$  будем понимать такие две функции  $\lambda_1(x)$  и  $\lambda_2(x)$  или одну такую функцию  $\lambda(x)$ , при которых расщепленная система (7.I) имеет канонический вид (7.4) или (7.6).

Не составляет труда показать следующее:

1. Если на интервале  $[0, b]$  оператор  $(I.I)$  принадлежит гиперболическому типу, то каноническая расщепленная система имеет вид (7.4) с вещественными  $\lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$ , т.е. уравнение  $(I.I)$  в этом случае имеет две вещественные и различные характеристики.

2. Если на  $[0, b]$  уравнение  $(I.I)$  принадлежит эллиптическому типу, то каноническая расщепленная система имеет вид (7.4) с комплексно-сопряженными  $\lambda_1(x)$  и  $\lambda_2(x)$ , т.е. оператор  $(I.I)$  в этом случае имеет две комплексно-сопряженные характеристики.

3. Если же на  $[0, b]$  оператор  $(I.I)$  принадлежит параболическому типу, то каноническая расщепленная система имеет вид (7.6) с вещественными  $\lambda(x)$  и произвольной  $\varphi_1(x)$ , т.е. в этом случае уравнение  $(I.I)$  имеет одну вещественную характеристику. В качестве второй характеристики можно взять любую вещественную функцию  $\varphi_1(x) \neq \lambda(x)$ .

При таком введении характеристик ЗАДАЧА ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ  $(I.I)$  СВОДИТСЯ К ОТЫСКАНИЮ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИК, поскольку, если они найдены, задача интегрирования оператора  $(I.I)$  становится тривиальной и сводится к простому интегрированию канонических систем вида (7.4) или (7.6).

Из этого следует, что введенные таким образом характеристики оператора  $(I.I)$  играют исключительно важную роль и позволяют задачу интегрирования дифференциального оператора второго порядка расщепить на две независимые задачи интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка.

В связи с этим можно дать понятию характеристик дифференциального оператора  $(I.I)$  другое определение. Под характеристиками линейного дифференциального уравнения второго порядка  $(I.I)$  понимаются две такие функции  $\lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$ , для которых задача интегрирования оператора  $(I.I)$  распадается на две независимые задачи интегрирования линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Иными словами, характеристики оператора  $(I.I)$  — такие линии, которые позволяют понизить порядок исходного оператора.

Ясно, что задача отыскания характеристик оператора  $(I.I)$  в аналитической форме не менее трудна, чем задача непосредственного интегрирования уравнения  $(I.I)$ . Однако с точки зре-

ния вычислительной математики характеристики уравнения (I.I) найти нетрудно и провести по ним интегрирование не составляет труда.

Действительно, легко видеть, что (6.9), (6.10) и (6.13) являются разностными схемами, с помощью которых проводится интегрирование по характеристикам. А как известно, счет по характеристикам является наиболее экономичным и точным, по сравнению с любыми другими вычислительными схемами при прочих равных условиях.

В заключение этого параграфа отметим, что характеристики оператора (I.I) являются его внутренней структурой, если можно так выразиться, являются его каркасом. Поэтому учет этой внутренней структуры оператора (I.I) приводит достаточно просто и быстро к желаемому результату, а неучет указанной внутренней структуры ведет к тому, что для достижения тех же самых результатов необходимо "платить" значительно дороже в смысле логической сложности алгоритмов и затрат машинного времени.

## 8. Неоднородный линейный оператор

Пусть задан линейный неоднородный дифференциальный оператор 2-го порядка вида:

$$L_2 y \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (8.1)$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  - вообще говоря, комплексные функции вещественного аргумента  $x$ .

Будем искать решение уравнения (8.1), как и выше (в разделе I), в виде:

$$y = y_1 + y_2, \quad (8.2)$$

а  $y_1$  и  $y_2$  будем определять из расщепленной системы вида

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \frac{f(x)}{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}, \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 - \frac{f(x)}{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

в которой элементы матрицы  $\{ a_{ik}(x) \}$  определены в (I.5) при условии (I.4).

Тогда справедлива следующая теорема:

Всякая функция вида (8.2), у которой  $y_1$  и  $y_2$  определяются как решение системы (8.3) при условиях (I.4), (I.5) для произвольных функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , является решением уравнения (8.1).

**Доказательство.** Используя связи (I.5), получим

$$(y_1 + y_2)' = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2. \quad (8.4)$$

Дифференцируя (8.4) и снова используя (I.5), получим:

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' &= \varphi_1' y_1 + \varphi_2' y_2 + \varphi_1 [(\varphi_1 - \alpha_1) y_1 + \alpha_2 y_2 + \\ &+ \frac{f}{\varphi_1 - \varphi_2}] + \varphi_2 [\alpha_1 y_1 + (\varphi_2 - \alpha_2) y_2 - \frac{f}{\varphi_1 - \varphi_2}] = \\ &= [\varphi_1' + \varphi_1^2 - \alpha_1(\varphi_1 - \varphi_2)] y_1 + [\varphi_2' + \varphi_2^2 + \alpha_2(\varphi_1 - \varphi_2)] y_2 + f = \\ &= -[p\varphi_1 + q] y_1 - [p\varphi_2 + q] y_2 + f = -p[\varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2] - \\ &\quad - q(y_1 + y_2) + f \end{aligned}$$

или

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = f$$

и теорема доказана.

Найдем общее решение системы (8.3) при связях (I.5) и начальных данных вида:

$$y_1 \Big|_{x=0} = C_1; \quad y_2 \Big|_{x=0} = C_2, \quad (8.5)$$

для чего перейдем к новым функциям  $Y_1(x)$  и  $Y_2(x)$  согласно равенствам:

$$y_i = Y_i \cdot \exp a_i, \quad i = 1, 2, \quad (8.6)$$

где

$$a_i \equiv \int_0^x a_{ii}(x) dx = \int_0^x [\varphi_i - \alpha_i] dx. \quad (8.7)$$

Тогда (8.3) перейдет в систему вида:

$$Y_1' = \alpha_2 Y_2 \cdot \exp(-\sigma) + \frac{f}{\varphi_1 - \varphi_2} \exp(-a_1), \quad (8.8)$$

$$Y_2' = \alpha_1 Y_1 \exp(\sigma) - \frac{f}{\varphi_1 - \varphi_2} \exp(-a_2),$$

где

$$\sigma \equiv a_1 - a_2 = \int_0^x [\varphi_1 - \alpha_1 - \varphi_2 + \alpha_2] dx. \quad (8.9)$$

Общее решение системы (8.8) легко найти с помощью метода последовательных приближений, для чего запишем (8.8) в операторной форме:

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_2 Y_2 + F_1, \\ Y_2 &= A_1 Y_1 - F_2, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где интегральные операторы  $A_1$  и  $A_2$  определяются согласно равенствам:

$$A_i f \equiv \int_0^x \alpha_i f \cdot \exp [(-1)^{i+1} \cdot \sigma] dx, \quad (8.11)$$

$$A_i I \equiv A_i; \quad A_i^n = A_i (A_i^{n-1}), \quad i = 1, 2,$$

а

$$F_i = \int_0^x \frac{f}{\varphi_1 - \varphi_2} \exp(-a_i) dx. \quad (8.12)$$

Введем в рассмотрение следующие интегральные операторы:

$$Y_1(\varphi_1, \varphi_2) \cdot f \equiv [1 + A_2 A_1 + (A_2 A_1)^2 + \dots] f,$$

$$Y_2(\varphi_1, \varphi_2) \cdot f \equiv [1 + A_1 A_2 + (A_1 A_2)^2 + \dots] f, \quad (8.13)$$

$$Y_i(\varphi_1, \varphi_2) I \equiv Y_i(\varphi_1, \varphi_2).$$

Тогда общим решением операторной системы (8.10) или, что то же, общим решением системы (8.8) являются функции вида:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1(\varphi_1, \varphi_2)(C_1 + F_1) + A_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2)(C_2 - F_2), \\ Y_2 &= A_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2)(C_1 + F_1) + Y_2(\varphi_1, \varphi_2)(C_2 - F_2), \end{aligned} \quad (8.14)$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Тогда общим решением системы (8.3) являются функции

$$\begin{aligned} y_1 &= \exp a_1 [Y_1(\varphi_1, \varphi_2)(C_1 + F_1) + A_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2)(C_2 - F_2)], \\ y_2 &= \exp a_2 [A_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2)(C_1 + F_1) + Y_2(\varphi_1, \varphi_2)(C_2 - F_2)], \end{aligned} \quad (8.15)$$

а общим решением уравнения (8.1) является функция вида

$$u = \tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2)(C_1 + F_1) + \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2)(C_2 - F_2), \quad (8.16)$$

где  $\tilde{Y}_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2)$  есть следующие интегральные операторы:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) \cdot f &= [\exp a_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2) + \exp a_2 A_1 Y_1(\varphi_1, \varphi_2)] f, \\ \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) f &= [\exp a_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2) + A_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2)] f. \end{aligned} \quad (8.17)$$

В том что функция из (8.16) действительно является общим решением неоднородного уравнения (8.1) нетрудно убедиться, поскольку она является суммой двух решений:

а) общего решения однородного уравнения (I.1)

$$\bar{y} \equiv C_1 \tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) + C_2 Y_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad (8.18)$$

б) частного решения неоднородного уравнения (8.1)

$$\bar{y} = \tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) F_1 - \tilde{Y}_2(\varphi_1, \varphi_2) F_2. \quad (8.19)$$

Покажем, далее, что хорошо известный метод вариации произвольных постоянных Лагранжа является частным случаем предлагаемого метода решения уравнения (8.1).

Действительно, пусть нам известны  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — два линейно-независимых частных решения однородного оператора (I.1). Следовательно, их вронскиан

$$W = y_2' y_1 - y_2 y_1' \neq 0 \quad (8.20)$$

не равен нулю ни в одной точке интересующего нас интервала изменения  $x \in [0, x]$ .

Поэтому в качестве произвольных функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  возьмем

$$\varphi_i = \frac{y_i'(x)}{y_i(x)}, \quad i = 1, 2. \quad (8.21)$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\alpha_1(x) = \alpha_2(x) \equiv 0,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \frac{W}{y_1 \cdot y_2},$$

$$\exp[-a_i] = \frac{y_i(0)}{y_i(x)}, \quad i = 1, 2, \quad (8.22)$$

$$Y_1(\varphi_1, \varphi_2) = 1,$$

$$\tilde{Y}_1(\varphi_1, \varphi_2) = \exp a_i = \frac{y_i(x)}{y_i(0)}.$$

Следовательно,

$$\bar{y} = -y_1(x) \int_0^x \frac{y_2 f}{W} dx + y_2(x) \int_0^x \frac{y_1 f}{W} dx. \quad (8.23)$$

Тем самым получена известная формула определения частного решения неоднородного уравнения (8.1) по известным линейно-независимым частным решениям однородного уравнения (1.1).

Важной особенностью построенного общего решения (8.16) неоднородного линейного оператора второго порядка (8.1) является то, что правая часть  $f(x)$  уравнения (8.1), точнее, ее интегральное преобразование вида (8.12), играет аналогичную роль, что и начальные данные (8.5). Иначе говоря, правая часть уравнения (8.1) является дополнительным "источником" начальных данных.

Аналогичный вывод о том, что правая часть уравнений математической физики в частных производных обуславливает дополнительные источники возмущения колебаний в средах, хорошо известен. Однако для обыкновенных неоднородных операторов второго порядка этот вывод так четко, насколько нам известно, нигде не сформулирован.

Здесь же, в рассматриваемом методе решения уравнения (8.1), этот вывод, что называется, лежит на поверхности, и его нельзя не использовать.

Коль скоро функции вида (8.12) играют роль дополнительных "источников" начальных данных, то, с точки зрения процедур численного интегрирования уравнения (8.1), их учет не вызывает каких-либо серьезных затруднений. Более того, все разностные схемы численного интегрирования однородного уравнения (1.1), описанные в разделе 6, непосредственно применимы для численного интегрирования неоднородного уравнения (8.1) с незначительной в процедурном отношении корректировкой начальных данных на каждом шаге разбиения (6.1), обусловленной наличием функции  $f(x)$  в правой части уравнения (8.1).

В. А. Амелькин

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ ПРИ ХРАНЕНИИ ЧИСЛОВОЙ ИНФОРМАЦИИ В ПАМЯТИ ЭВМ

Невозможность на современном уровне развития техники обеспечить хранение больших объемов информации во внутренней памяти ЭВМ, привели к необходимости применения в ЭВМ накопителей — магнитных лент, барабанов, дисков и т.д., что связано с большими затратами. Выходом из этого положения может явиться перенос центра тяжести с хранения информации на ее обработку с тем, чтобы хранению подлежала информация возможно меньшего объема, которая умещалась бы во внутренней памяти ЭВМ или в сравнительно небольших накопителях [1].

В работе [3] предложен метод хранения числовой информации, которая представлена в виде прямоугольной таблицы чисел. В настоящей статье будет установлена связь этого метода с представлением чисел в полиадической системе счисления (обобщенная позиционная система), а также будет проведено сравнение предложенного метода с применяемыми в настоящее время способами хранения информации в машинной памяти.

Поскольку всякой числовой матрице  $B = \{b_{ij}\}$ , элементами которой являются рациональные числа, можно сопоставить матрицу  $A = \{a_{ij}\}$ , элементами которой являются целые положительные числа, то в дальнейшем будем рассматривать только

матрицы вида  $A$ . Для таких матриц в [3] показана возможность замены их двумя векторами  $\Lambda = \{\lambda_i\}$  и  $N = \{N_j\}$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ), зная которые можно однозначно восстановить любой элемент  $a_{ij} \in A$ . Компоненты векторов  $\Lambda$  и  $N$  определены следующим образом:

$$\lambda_i = 1 + \max_j (a_{ij}), \quad (1)$$

$$N_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \rho_i, \quad (2)$$

где

$$\rho_i = \frac{\prod_{k=i}^m \lambda_k}{\lambda_i}. \quad (3)$$

Тогда любой элемент  $a_{ij}$  матрицы  $A$  определяется однозначно из выражения

$$a_{ij} = t_{ij} - \lambda_i \left[ \frac{t_{ij}}{\lambda_i} \right], \quad (4)$$

где

$$t_{ij} = \left[ \frac{N_j}{\rho_i} \right].$$

Если элементами матрицы являются рациональные числа, то эта матрица приводится к целочисленной, как указано в [3], а затем заменяется векторами  $N$  и  $\Lambda$ .

Известно, что в позиционной системе счисления с постоянным основанием  $p$  число  $L = (b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m)$  представляется в виде

$$L = b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} p + b_m \quad (5)$$

---

I)  $[L]$  - целая часть числа  $L$ .

причем, каждая цифра  $b_i < p$ , а каждый  $i$ -й разряд имеет весовой коэффициент, равный  $p^{i-1}$ . Если за основание системы счисления принять не постоянное  $p$ , а набор некоторых положительных целых чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  на разность которых не накладывается никаких ограничений, (т.е.  $\lambda_i - \lambda_j$  может быть больше нуля, равна нулю или меньше нуля при  $i \neq j$ ), то число  $L = (a_1 a_2 \dots a_m)$  может быть представлено в виде

$$L = a_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m + a_2 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_m + \dots + a_{m-1} \lambda_m + a_m. \quad (6)$$

Причем, каждая цифра  $a_i < \lambda_i$ , а каждый  $i$ -й разряд имеет весовой коэффициент  $\rho_i$ , определенный по (3). Представление чисел в форме (6) будем называть представлением в полиадической (обобщенной позиционной) системе счисления. При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = p$  запись числа  $L$  в форме (6) переходит в запись  $L$  в форме (5), т.е. получим позиционную систему счисления с постоянным основанием.

Любой  $j$ -й столбец матрицы  $A$ , состоящий из элементов  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ , можно считать заданным в полиадической системе счисления, если выбрана такая система оснований, что каждый элемент  $a_{ij}$  этого столбца меньше основания  $\lambda_i$ . Выбрав основание по (I) можно говорить, что выражение (2) — есть десятичная запись  $j$ -го столбца, заданного в полиадической системе с основаниями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

В [2] указывается, что в любой полиадической системе счисления при заданной системе оснований  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и заданном значении числа  $L$ , получение цифр  $a_i$  может быть осуществлено в строго определенном порядке (начиная с меньшего разряда). Результат предшествующего этапа (полученное на этом этапе число) участвует в качестве делимого на следующем этапе. Этот процесс может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} L \text{ делится на } \lambda_m \text{ при этом } \left[ \frac{L}{\lambda_m} \right] &= L_m \text{ и } L - L_m \lambda_m = a_m; \\ L_m \text{ делится на } \lambda_{m-1} \text{ при этом } \left[ \frac{L_m}{\lambda_{m-1}} \right] &= L_{m-1} \text{ и } L_m - L_{m-1} \lambda_{m-1} = a_{m-1}; \\ L_2 \text{ делится на } \lambda_1 \text{ при этом } \left[ \frac{L_2}{\lambda_1} \right] &= L_1 \text{ и } L_2 - L_1 \lambda_1 = a_1. \end{aligned}$$

В ряде задач такое последовательное определение цифр  $a_i$  усложняет их решение и ограничивает возможности быстрого определения значения некоторого  $i$ -го разряда. Выражение (4) дает возможность аналитически вычислить значение любого  $i$ -го разряда, не зная значений предыдущих или последующих разрядов, только  $a_{i-1}$  следует заменить на  $a_1$  и вместо  $N_j$  писать число  $L$ . Можно предложить также рекуррентную формулу вычисления цифр  $a_i$  числа  $L$ , но в отличие от описанного процесса, начиная не с младшего разряда, а со старшего. Формула последовательного нахождения элементов  $a_i$ , начиная со старшего, имеет следующий вид:

$$a_i = \left[ \frac{L - u_i}{\rho_i} \right], \quad (7)$$

где  $u_1 = 0$ ;  $u_i = u_{i-1} + a_{i-1} \rho_{i-1}$ . Проведя сопоставление метода, изложенного в [3], с представлением чисел в полиадической системе счисления, в дальнейшем этот метод будем называть методом полиадических чисел или сокращенно МПЧ.

Рассмотрим вопрос возможных преимуществ МПЧ в сравнении с существующими способами хранения числовой информации в машинной памяти. Затраты машинной памяти будем исчислять в количестве бит информации, необходимой для хранения числовой матрицы, либо (учитывая структуру памяти современных ЭВМ) в количестве ячеек памяти машины, необходимых для хранения заданной таблицы. Если матрица  $A$  не является некоторой специальной матрицей, т.е. нам неизвестен закон образования ее элементов (именно такой случай мы и будем рассматривать), то наиболее часто употребляемы следующие способы представления числовых таблиц в памяти ЭВМ.

I. Каждый элемент  $a_{ij} \in A$  направляется для хранения в отведенную ему ячейку машинной памяти (число в ячейку) и обращение за этим элементом осуществляется по адресу - геометрическим координатам ячейки. Если матрица  $A$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов, то для хранения всех элементов матрицы по этому методу требуется  $(m \times n)$  ячеек памяти. Такой метод хранения будем называть "прямым методом хранения".

При хранении информации в таком виде возникает значитель-

ная избыточность. Ячейки машины рассчитаны обычно на хранение 7-12 разрядных чисел, что для большого круга задач совершенно не нужно, да и исходные данные обычно представляются числами значительно меньшей разрядности. В связи с этим возникает задача [5]: для данного массива  $A$  найти такое преобразование  $\varphi$ , которое переводило бы массив  $A$  в массив меньшей длины (в ячейках)  $B$  и допускало бы обратное преобразование  $\varphi^{-1}$

$$B = \varphi(A); \quad l_B < l_A; \quad \exists \varphi^{-1}: A = \varphi^{-1}(B).$$

Для различных классов исходных массивов такие преобразования могут быть различными. Но для числовых таблиц общего вида оказываются пригодны лишь методы упаковки.

2. В исходной матрице  $A$  отыскивается элемент для записи которого требуется максимальное число разрядов  $f$ . Это число записывается в начале таблицы  $B$ , а затем под все элементы матрицы  $A$  отводится ровно  $f$  разрядов в  $B$ . Существует разновидность этого метода упаковки, когда в каждую ячейку  $B$  записывается целое число элементов. Сжатие происходит соответственно в  $\beta/f$  или  $\lfloor \beta/f \rfloor$  раз (здесь  $\beta$  - число двоичных разрядов ячейки конкретной ЭВМ). Этот метод наиболее простой и универсальный. Такую упаковку в дальнейшем будем называть "упаковкой по максимальному элементу таблицы".

3. В ячейку упаковывается по несколько элементов таблицы  $A$ , причем в каждой  $i$ -й строке отыскиваются максимальные элементы  $c_i$ , которые хранятся в памяти машины в виде вектора  $C = \{ c_i \}$ , и по ним происходит отделение элементов соответствующих строк. Такой вид упаковки будем называть "упаковкой по максимальным элементам строк таблицы". Этот метод более экономичен, когда мы имеем дело с матрицей, задающей соответствие объектов и свойств, т.е. элементом  $a_{ij}$ , которой является значение  $i$ -го свойства на  $j$ -м объекте. Действительно, пределы изменения различных свойств могут сильно различаться. Например, одно свойство (элементы строки) может принимать значение только 0 или 1, а другое свойство может принимать большие числовые значения. В этом случае бо-

лее выгодно хранить вектор максимальных значений строк и по нему проводить отделение элементов матрицы.

4. Существует несколько методов, основанных на комбинаторном подходе, предназначенных для решения задачи сжатия объема числовых данных в памяти ЭВМ, но они рассчитаны на таблицы специального вида и здесь мы не будем рассматривать их и приводить сравнение с МПЧ.

Переходя к оценке затрат машинной памяти при использовании различных методов хранения информации следует отметить, что мы будем рассматривать только числовые матрицы элементами которых являются целые положительные числа. Известно ходячее изречение Кронекера: "Целые числа создал господь бог, все остальное - дело рук человеческих". Однако не это изречение заставляет нас рассматривать только целочисленные матрицы. Не сложно показать, что более экономично (в смысле затрат памяти) преобразовывать матрицы с рациональными элементами в целочисленные и хранить в памяти ЭВМ последние.

Известно, что количество бит информации (двоичных разрядов) необходимое для записи  $L$  в машине, основанной на двоичной системе счисления, вычисляется по формуле

$$S_0 = [ \log_2 L ] + 1. \quad (8)$$

Тогда количество бит, необходимое для записи некоторого вектора  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ , будет равно

$$S_1 = \sum_{i=1}^m (1 + [ \log_2 c_i ]). \quad (9)$$

Из (2) следует, что каждый  $j$ -й столбец матрицы  $A$  заменяется в МПЧ некоторым числом  $N_j$ , поэтому затраты памяти на запись элементов этого столбца при использовании МПЧ равны затратам памяти необходимым на представление числа  $N_j$  и будут вычисляться по формуле (8). В дальнейшем будем оценивать затраты машинной памяти при использовании различных методов хранения информации из расчета затрат  $S$  необходимых для хранения элементов одного столбца. А затраты на хранение

элементов всей матрицы  $A$  определяются произведением  $n \cdot S$ .

Обозначим через  $c_i$  значение максимального элемента  $i$ -й строки матрицы  $A$  и тогда по (I) имеем

$$\lambda_i = c_i + 1. \quad (10)$$

Матрицу  $A$ , для которой известен вектор  $C = \{c_i\}$  (или все равно, что  $\Lambda = \{\lambda_i\}$ ) будем называть квазиопределенной матрицей.

Из (2) нетрудно показать, что наибольшее полиадическое число, соответствующее некоторому столбцу квазиопределенной матрицы  $A$  будет равно:

$$V = \prod_{i=1}^m \lambda_i - 1. \quad (11)$$

Матрица  $A$ , содержащая столбец, которому поставлено в соответствие наибольшее полиадическое число, определенное по (II), имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_m & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot$$

Элементами этого столбца являются максимальные значения элементов соответствующих строк матрицы. В дальнейшем такие столбцы будем называть допустимыми для квазиопределенной матрицы  $A$ , а число  $V$ , определенное по (II), будем называть допустимым значением столбцов этой матрицы.

В общем случае квазиопределенная матрица  $A$  может вообще не содержать допустимых столбцов или содержать их несколько. В последнем случае мы имеем матрицу с равными столбцами.

Для произвольной квазиопределенной матрицы  $A'$ , с фиксированным порядком расположения строк, максимальное значение среди чисел  $N'_j$  ограничено снизу

$$\max_j (N_j^t) \geq (\lambda_1 - 1) \prod_{i=2}^m \lambda_i.$$

Эта граница соответствует столбцу, первым элементом которого является максимальный из элементов первой строки, а значения всех остальных элементов есть минимальные значения соответствующих строк. Понятно, что при любой перестановке строк заданной матрицы  $A$ , т.е. при преобразовании этой матрицы с иным порядком строк, будем иметь:

$$\max_j (N_j^m) \geq \prod_{i=1}^m \lambda_i - \frac{\prod_{i=1}^m \lambda_i}{\lambda_t},$$

где  $\lambda_t = \min_i (\lambda_i)$ .

Как уже отмечалось, квазиопределенная матрица  $A$  может и не содержать максимально допустимых столбцов. Однако при подсчете затрат памяти ЭВМ для хранения любого столбца матрицы по МПЧ будем исходить из затрат, необходимых для записи именно допустимого значения столбцов матрицы  $A$ .

Сравнение затрат памяти при использовании МПЧ с затратами при использовании прямого метода можно провести по коэффициенту сжатия  $\kappa$  для конкретной матрицы  $A$  и конкретной ЭВМ.

Пусть длина ячейки машины равна  $\beta$  двоичных разрядов, а число элементов в столбце матрицы равно  $m$ . Тогда для хранения элементов одного столбца матрицы прямым методом требуется  $m$  ячеек памяти или  $m\beta$  двоичных разрядов. При использовании же МПЧ мы должны хранить вместо элементов столбца сопоставленное этому столбцу полиадическое число. Чтобы была возможность отделять друг от друга полиадические числа, соответствующие различным столбцам матрицы, будем исходить из затрат на допустимое значение столбцов. Из (8) и (II) получим:

$$S_0 = \left[ \log_2 \left( \prod_{i=1}^m \lambda_i - 1 \right) \right] + 1. \quad (12)$$

Определяя коэффициент сжатия  $\kappa$ , как отношение необходимого числа двоичных разрядов при использовании прямого метода хранения к числу двоичных разрядов при использовании МПЧ, получим:

$$\kappa = \frac{m\beta}{\left[ \log_2 \left( \prod_{i=1}^m \lambda_i - 1 \right) \right] + 1} \quad (13)$$

Например, пусть  $\beta = 15$ ;  $m = 9$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_9 = 10$ . Этими условиями задается матрица с числом строк  $m = 9$  и элементы которой могут принимать десять различных значений от 0 до 9. Ячейка машины содержит  $\beta = 15$  двоичных разрядов. В этом случае по (13) имеем  $\kappa = 9/2$ , т.е. при хранении элементов матрицы по МПЧ потребуется в 4.5 раза меньше двоичных разрядов чем при хранении прямым методом.

Технические возможности современных ЭЕМ (фиксированная длина ячейки) несколько затрудняют использование МПЧ. Мы должны учитывать длину ячейки при записи в машине полиадических чисел. Если допустимое значение  $V$  столбцов матрицы  $A$  меньше  $2^\beta$ , т.е. число входит в одну ячейку памяти, то можно коэффициент сжатия  $\kappa$  выразить в отношении числа ячеек необходимых при прямом методе к необходимому числу ячеек при МПЧ

$$\kappa = \frac{m \times n}{m + n} \quad (14)$$

Здесь в числителе записаны затраты при прямом методе, а в знаменателе затраты при МПЧ, которые складываются из  $n$  ячеек для хранения полиадических чисел и  $m$  ячеек для хранения компонент вектора  $A = \{\lambda_i\}$ . Если же допустимое значение  $V$  не вмещается в одну ячейку, т.е.  $V \gg 2^\beta$ , то матрицу  $A$  можно разбить на  $k$  подматриц. В этом случае с помощью МПЧ получим вместо матрицы  $A$  размерностью  $m \times n$  матрицу  $B$ , состоящую из системы векторов полиадических чисел каждый из которых соответствует определенной подматрице. И коэффициент сжатия запишется

$$k = \frac{m \times n}{kn + m}, \quad (15)$$

где  $k < m$ .

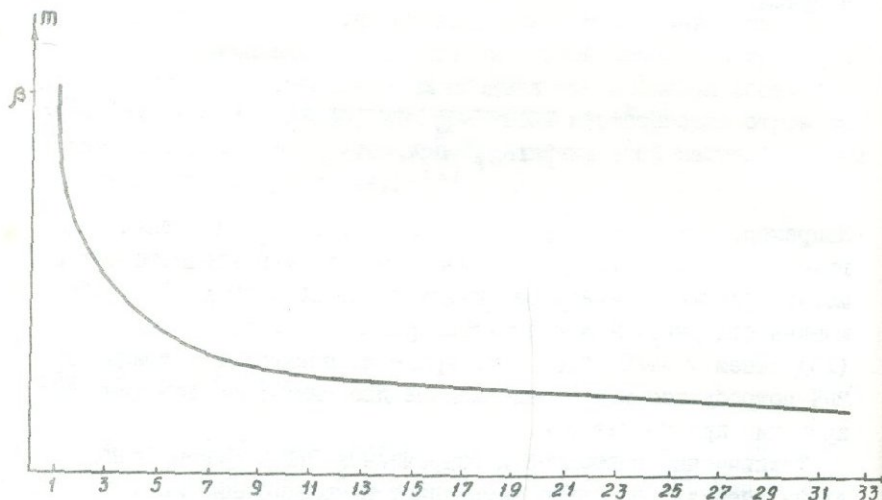


Рис. I

На рисунке I изображена зависимость между числом элементов столбца  $m$ , которое можно хранить в одной ячейке длиной  $\beta$  по МПЧ и максимальным значением этих элементов  $\eta$ , где  $\eta_k = c_1 = c_2 = \dots = c_k$ . При  $\eta = 1$ , т.е. если числа принимают значения только 0 или 1, получаем максимальное значение  $m_1 = \beta$ . Таким образом значение  $m$  будем измерять относительно  $\beta$ , и график дает возможность указать количество чисел по величине, не превосходящих  $\eta_k$ , которое можно записать в ячейке длиной  $\beta$ .

Метод упаковки по максимальному элементу таблицы отдельно рассматривать не будем, поскольку он является частным случаем метода упаковки по максимальным элементам строк таблицы, когда  $c_1 = c_2 = \dots = c_m$ .

Затраты памяти в битах информации при хранении элементов одного столбца матрицы методом упаковки обозначим через  $S_1$

и будем вычислять по (9), поскольку элементы столбца образуют вектор. Затраты памяти на хранение допустимого значения столбца матрицы обозначим через  $S_0$  и будем вычислять по (8), поскольку допустимое значение столбца матрицы есть число.

Любое целое положительное число  $L$  (именно такие числа мы и рассматриваем) можно однозначно представить в виде

$$L = 2^\alpha + k, \quad (16)$$

где  $k, \alpha$  — целые положительные числа, причем  $k < 2^\alpha$ . Например, число 18 можно записать  $18=2^4+2$ , а число 15 запишется в виде  $15=2^3+7$ . Следовательно, всякое  $\lambda_i$  и  $c_i$  с учетом (10) можно записать

$$\lambda_i = 2^{\alpha_i} + k_i; \quad c_i = 2^{\alpha_i} + k_i - 1, \quad (17)$$

где  $k_i < 2^{\alpha_i}$ . По (8) и (9), учитывая (16), можно записать

$$S_1 = \sum_{i=1}^m ([\log_2 c_i] + 1) = m + \sum_{i=1}^m [\log_2 (2^{\alpha_i} + k_i - 1)], \quad (18)$$

$$S_0 = [\log_2 (\prod_{i=1}^m \lambda_i - 1)] + 1 = 1 + [\log_2 (\prod_{i=1}^m (2^{\alpha_i} + k_i) - 1)]. \quad (19)$$

Рассмотрим отдельно (18) и (19) при различных значениях  $\lambda_i$  и  $c_i$ . Поскольку  $k_i < 2^{\alpha_i}$ , то при любом целом положительном  $c_i$  имеем для  $S_1$  из (18)

$$S_1 = m + \sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1 + \text{sign}(k_i)) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \text{sign}(k_i)). \quad (20)$$

Если  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ , то из (20) имеем

$$S_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i. \quad (21)$$

Из (19) имеем при  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$

$$S_0 = 1 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i) - 1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i. \quad (22)$$

Пусть теперь не все  $k_i = 0$ , тогда для функции  $S_1$  имеем значение определенное формулой (20), а для  $S_0$  из (19), имея в виду что  $2^{\alpha_i} + k_i < 2^{\alpha_i+1}$ , имеем неравенство

$$S_0 < 1 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \text{sign}(k_i)) - 1 = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \text{sign}(k_i)). \quad (23)$$

Следовательно, из (21) и (22) имеем для случая, когда все  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$  (или все равно, что  $c_i = 2^{\alpha_i} - 1$ ) затраты в битах при использовании упаковки по максимальным элементам строк таблицы и по МПЧ совпадают, а из (20) и (23) имеем, что во всех остальных случаях  $S_0 < S_1$ . Из (20) видно, что если каждое  $k_i$  изменяется на отрезке  $(1, 2^{\alpha_i})$ , то функция  $S_1$  на этом отрезке является постоянной величиной и в то же время в точке  $k_i = 2^{\alpha_i}$  имеет место равенство  $S_0 = S_1$ , как и для случая  $k_i = 0$ . На этом же отрезке изменения  $k_i$  из (19) видно, что функция  $S_0$  постоянно возрастает при увеличении  $k_i$ , то есть имеет свое наименьшее значение в точке  $k_i = 1$ . Отсюда заключаем, что разность  $(S_1 - S_0)$  достигает своего максимального значения на отрезке  $(1, 2^{\alpha_i})$  в точке  $k_i = 1$ . Иначе говоря, если все  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 2^{\alpha_i}$ , то мы имеем максимальный выигрыш в смысле экономии затрат двоичных разрядов при использовании МПЧ по сравнению с использованием метода упаковки по максимальным элементам строк таблицы. В точках  $c_i = 2^{\alpha_i}$  функция  $S_1$  делает скачок на  $m$  единиц, т.е.

эта функция является ступенчатой. Максимальный выигрыш, получаемый при  $k_1 = 1$ , будет

$$S_1 - S_0 = m - \epsilon,$$

где  $\epsilon \rightarrow 0$  при  $\alpha_1 \rightarrow \infty$ , т.е. на каждом столбце матрицы размерностью  $m \times n$  мы можем экономить, пользуясь МПЧ, около  $m$  двоичных разрядов, что в целом по матрице составит  $m \times n$  двоичных разрядов. Учитывая случаи совпадения затрат, мы можем считать, что средний выигрыш составляет  $m/2$  двоичных разрядов или в целом по матрице  $mn/2$  двоичных разрядов.

Рассмотрим следующий пример. Данные шлиханализа часто кодируются следующим образом. Через 0 обозначается отсутствие или единичное присутствие зерен некоторого минерала в пробе, через 1 обозначается присутствие этого минерала в количестве нескольких десятков зерен и через 2 обозначается наличие зерен данного минерала в количестве нескольких сотен в одной пробе. Таким образом для  $n$  проб и  $m$  минералов получают матрицу соответствия проб и содержания в них различных минералов. Элементами такой матрицы являются числа не превосходящие 2. Понятно, что при упаковке нескольких чисел в ячейку необходимо для каждого элемента матрицы выделять 2 двоичных разряда и таким образом в одну ячейку войдет  $t = \beta/2$  элементов матрицы соответствия. При использовании же МПЧ компоненты вектора  $\lambda = \{\lambda_i\}$  будут все равны 3.

Обозначая через  $r$  количество чисел, помещающихся в одну ячейку длиной  $\beta$  при применении МПЧ к данной матрице, можно записать по (II)

$$3^r = 2^\beta \quad \text{или} \quad r = \beta / \log_2 3.$$

Следовательно, разность

$$r - t = \frac{\beta(2 - \log_2 3)}{2 \log_2 3} \approx 0.135\beta.$$

определяет - на сколько больше элементов заданной таблицы мы можем хранить в одной ячейке длиной  $\beta$ , пользуясь МПЧ по сравнению с методом упаковки. Если, например, длина ячейки  $\beta = 45$  двоичных разрядов то, пользуясь упаковкой, мы можем в ячейке хранить 22 элемента рассмотренной матрицы, а пользуясь МПЧ, можем хранить на 6 элементов больше, т.е. 28 элементов матрицы в одной ячейке. Следовательно, для нашего примера, когда значения элементов матрицы не превосходят 2 и длина ячейки  $\beta = 45$ , пользуясь МПЧ, в заданном количестве ячеек мы можем хранить на 27% больше элементов матрицы по сравнению с методом упаковки.

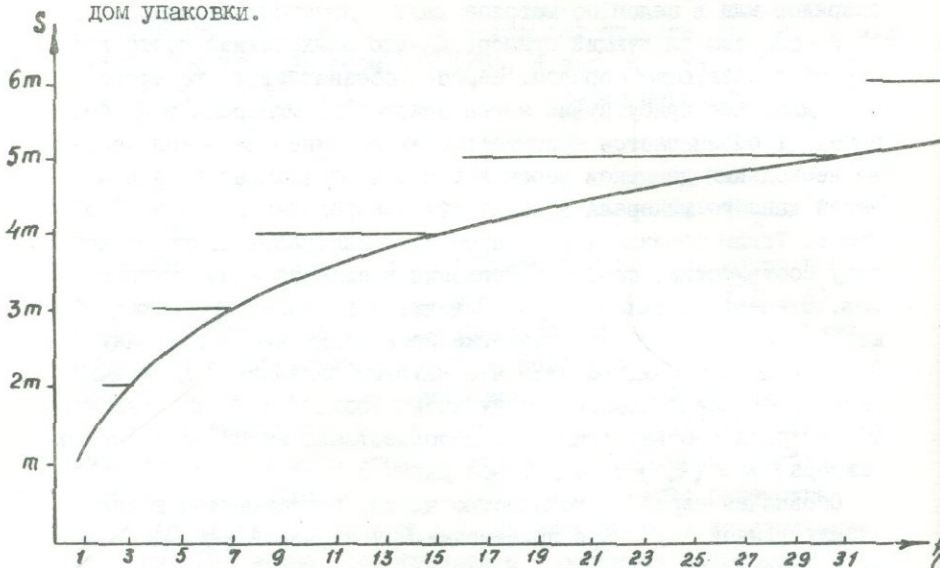


Рис. 2.

На рисунке 2 приведены графики функций затрат  $S_0$  и  $S_1$  для случая  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = \eta_1$ . Функции  $S_0$  и  $S_1$  являются дискретными функциями, но для наглядности на графике они изображены сплошными линиями. При  $\eta = 1$  (это соответствует матрице, элементы которой могут принимать значения только 0 или 1) имеем, что для хранения столбца матрицы, состоящего из  $m$  элементов, необходимо  $m$  бит. Столько же бит нужно и при методе упаковки. Две соседние ступени функции  $S_1$  отстоят по оси затрат  $S$  на расстоянии  $m$  бит. На

графике прямые отрезки соответствуют функции  $S_1$ , а плавная кривая соответствует функции  $S_0$ .

В заключение следует отметить, что МПЧ кроме экономии машинной памяти оказывается очень удобным для программирования. Для представления числовой информации по МПЧ в машине достаточно реализовать в виде процедур на алгоритмическом языке формулы (2) и (4), причем, выражение (2) для удобства программирования и уменьшения затрат времени рекомендуется разложить по схеме Горнера. В тоже время метод упаковки нескольких чисел в одну ячейку требует хорошего знания программистом конкретной ЭВМ и реализуется в кодах этой машины, что допускается не всеми алгоритмическими языками.

Рассмотренный в данной работе метод с успехом может быть использован также в других задачах связанных с обработкой данных на ЭВМ. Например, в задачах сортировки, упорядочения, кодирования.

#### Л и т е р а т у р а

1. АКУШСКИЙ И.Я., ПАК И.Т. К вопросу организации накопительных устройств ЦВМ на принципе сжатия информации-Известия АН Каз.ССР Сер.физ.-мат., №5, Алма-Ата, "Наука", 1971.
2. АКУШСКИЙ И.Я., ЮДИЦКИЙ Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах, М., "Советское радио", 1968.
3. АМЕЛЬКИН В.А. О представлении геологической информации в машинной памяти. - Сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.
4. БЕРЗТИСС А.Т. Структуры данных. М., "Статистика", 1974.
5. КОЛМОГОРОВ А.Н. Три подхода к определению понятия "Количество информации". "Проблемы передачи информации", т.1, вып.1. 1965,

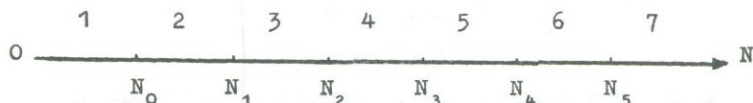
А.Ф. Марасулов

ВВЕДЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ С ЦЕЛЬЮ ВЫБОРА МАТЕРИАЛА  
ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИНДИВИДУАЛЬНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ  
ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ

При индивидуальном подходе к решению задачи распознавания [1,2] для каждого распознаваемого объекта выбирается, в частности, свой материал обучения. Для его выбора свойства, замеренные на объекте, разделяются на группирующие и распознающие. Индивидуальный материал обучения выбирается на основе группирующих свойств. В него входят только те объекты, которые совпадают с распознаваемым объектом по некоторым из группирующих свойств. Разделение свойств на группирующие и распознающие приходится проводить на основе теоретических представлений, относящихся к конкретной задаче распознавания [2,4]. После выбора группирующих свойств оказываются возможными очень многие различные варианты выбора индивидуального материала обучения. Возникает вопрос о выборе оптимального варианта. Для решения этого вопроса необходимо построить некоторые показатели, характеризующие качество индивидуального материала обучения. Ниже речь пойдет о построении одного такого показателя. Заметим, что наличие такого показателя, даже если он является хорошим, еще не решает вопроса об оптимальном выборе индивидуального материала обучения. Оказывается

необходимым найти способ избавиться от полного перебора очень многих возможных вариантов выбора индивидуального материала обучения.

Пусть  $A_t$  -  $t$ -й вариант индивидуального материала обучения. Обозначим через  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  число объектов первого и второго образа в  $A_t$ ;  $m$  - число распознающих свойств;  $n_k$  - число различных значений, которое принимает распознающее свойство  $f_k$ ;  $\lambda^*(t)$  - максимальный коэффициент сходства между объектами разных образов в  $A_t$ ;  $\bar{\lambda}(t)$  - средний коэффициент сходства между объектами  $A_t$  и распознаваемым объектом [3]. Введем  $n(t)$  - показатель частной представительности  $A_t$ . С этой целью по числовой оси  $ON$  фиксируем точки и занумеруем интервалы так, как показано на рис. I.



$$N_0 = m, \quad N_1 = \frac{(\sum n_k)^2 + (m)^2}{\sum n_k + m}, \quad N_2 = \sum n_k, \quad N_3 = \frac{(\sum n_k)^2 + (\prod n_k)^2}{\sum n_k + \prod n_k},$$

$$N_4 = \prod n_k, \quad N_5 = \sum n_k + \prod n_k.$$

Рис. I

Будем считать, что  $n(t) = 1, 2, \dots, 7$ . Для определения  $n(t)$  следует взять наименьшее из чисел  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  и найти номер интервала на оси  $ON$ , куда оно попадает. Исходя из предыдущего, индивидуальный материал обучения  $A_t$ , можно охарактеризовать тремя частными показателями:

$$n(t), \quad \sigma(t) = 1 - \lambda^*(t) \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}(t).$$

Можно ввести и один общий показатель - показатель общей представительности:

$$\kappa(t) = \alpha \cdot n(t) + \beta \cdot \sigma(t) + \gamma \cdot \bar{\lambda}(t).$$

Численные эксперименты показали, что в наших целях  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  следует определять так:

$$\alpha = n_{\sigma} \cdot n_{\lambda}, \quad \beta = n_{\lambda}, \quad \gamma = 1,$$

где  $n_{\sigma}$  и  $n_{\lambda}$  - число различных значений, которые принимают показатели  $\sigma(t)$  и  $\bar{\lambda}(t)$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. ВОРОНИН Ю.А., МАРАСУЛОВ А.Ф., ТИТОВ А.А., ШЕВЧЕНКО Н.Г. О математическом обеспечении ЭВМ для отыскания оптимальных подпространств с целью решения задач распознавания. - В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых. Тр. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1972.
2. ВОРОНИН Ю.А., ИЕРУСАЛИМСКИЙ А.П., ДОРНИН Б.М., МАРАСУЛОВ А.Ф., ШЕВЧЕНКО Н.Г. Об одном подходе к применению математических методов и ЭВМ при дифференциальной диагностике кровоизлияний и размягчений головного мозга в остром периоде. - В сб.: Математические методы в психиатрии и неврологии. Л., "Наука", 1972.
3. ВОРОНИН Ю.А., КАРАТАЕВА Г.Н., СИГАЛ Л.А. и др. Программы "Голотип" для решения задач распознавания образов. Алма-Ата, 1968.
4. ДОРНИН Б.М. О методике и результатах использования эпидемиологических признаков при диагностике сосудистых заболеваний головного мозга. - В сб.: Сосудистые инфекционные и наследственные заболевания нервной системы. Тр. НИМИ, Новосибирск, 1974.

В. А. Воронич

К ВОПРОСУ ОБ ИНФОРМАЦИОННОМ БАЗИСЕ  
И МАТЕМАТИЗАЦИИ ГЕОЛОГИИ

Под информационным базисом будем понимать всю геологическую информацию с непременным условием ее аутентичности (непосредственное восприятие и фиксация первоисточника без всякой интерпретации). Часть этого базиса, которая никогда (при существующих требованиях) не вызовет необходимости в изменении и проверке, с последующей систематикой и оптимальным кодированием определим как геологический информационный банк. (Пример информационного банка – каталог координат в геологической службе; ошибки всегда можно найти, заданы пределы погрешности).

Информационный базис в геологии огромен, информационный банк чрезвычайно скуден. Причин этому много.

I. Создателем информационного базиса является в основном младший геологический персонал. Техники старшие и младшие, со стажем и без одного ведут описание и зарисовку обнажений, горных выработок и буровых скважин, производят опробование, шлихование – все то, что в последующем служит основой для создания геологической надстройки разных уровней (идей, гипотез, разрезов, прогнозных по-

строений и т.д.), включая математическую интерпретацию.

В период авралов, а из них состоит значительная часть года (проектно-сметная кампания, включающая написание бумаг с доказательством доказанного, переделки, утверждение во многих инстанциях, составление поэтапных планов, процедура подготовки и защита этих этапов; составление годовых отчетов, составление дополнения к проекту и т.д.), создаваемый базис остается без контроля со стороны квалифицированных геологов.

Если учесть, что в средней по масштабам работ разведочной экспедиции в год проходится около 50 тыс. погонных метров горных выработок, бурится 2-3 тыс. погонных метров скважин с керном, отбирается до 80 тыс. различных проб, то можно представить возможности и степень контроля зафиксированного.

II. Избыточность информации и информация якобы впрок. Первая проистекает из слепого следования инструкции, вторая - из-за боязни что-либо не отменить такое, что может быть, когда-нибудь, кому-нибудь пригодится. В абсолютном же большинстве первичное описание пород - набор характеристик качественных свойств с весьма ограниченным словарным запасом без целевой направленности и, самое главное, без сравнительных сопоставлений. Нагляднейший пример избыточности - зарисовки горных выработок. Эти зарисовки, как правило, испещрены трещинами, на замер их горным компасом и правильное отображение (в этом всегда масса погрешностей, т.к. мало кто из техников достаточно представляет геометрию плоскостей в проекциях) уходит масса времени, но никто в последующем не обращает внимание на эту трещиноватость. И если у кого-то из специалистов структурной геологии встает задача провести анализ этой трещиноватости (определение систем, удельной насыщенности, построение розы диаграммы и плана деформации), то он самостоятельно проводит документацию этих трещин, не веря зарисовкам техников. То же происходит с приезжающими с разных мест литологами, петрографами и др. Сотни полевых книжек и журналов в год, миллионы образцов в год отбираются теми же техниками, а процент последующей надобности их ничтожен и иногда равен нулю.

III. Непреднамеренно ложная информация (ошибки из-за недостаточного профессиона-

лизма). Самый частный случай — одну и ту же породу разные техники (иногда и геологи) определяют по-разному. И в тех случаях, когда при обработке этих данных получится полная не-суразица, приходят к необходимости передокументации. Основная причина — нарушается принцип обобщенного эталона и сравнения.

На одном из участков месторождения в Кармазаре породы в керне техником определялись как плотный метаморфизованный песчаник (эти породы находятся в зоне оруденения). Микроскопическое определение петрографа партии — микрогранит, петрографа более опытного — кварцевый порфир, и, наконец, определение профессионала — кварцевый сферолит-фельзит-порфир. Представим себе, что обстоятельства оставили без изменения определение техника. Это легло бы на разрезы, планы. Ученые нашли бы стройное объяснение оторочке оруденелых скарнов на контакте песчаников с другими породами, старшие геологи особенно отметили бы все участки в районе с развитием песчаника, математики же ввели бы эти породы в класс с высокоинформативным уровнем, возводя несуществующие песчаники в ранги и разряды в общей картине прогнозных сооружений.

Часто ложная информация происходит из-за отсутствия необходимого пространственного воображения (неправильное отображение проекций). Наиболее типично — неправильное отображение кажущихся углов в проекциях при пересечении выработкой или разрезом какой-либо плоскости не вкрест простирания. Другие частные случаи ложной информации — неправильная фиксация проекции ствола скважины на плоскости разреза при ее искривлении и соответственно проекции рудного тела.

IV. Ошибки из-за догматического следования идее. Наиболее типично — нежелание рассматривать неудобные варианты. Особенно характерно это для твердых сторонников гидротермального происхождения эндогенного оруденения. Для них главное — разломы, которые квалифицируются как рудопроводящие, рудораспределяющие, рудовмещающие. Разломами видимыми и предполагаемыми (таких всегда больше) густо покрываются карты (планы) и разрезы, определяют направления и амплитуда смещений, к ним притягивают проявления руд. Запоздалый "пересмотр" идеи приводит к дорого-

стоящим и трудоемким переделкам, сопровождающимся передокументацией. Случаи трансформации рудных тел из типично секущих, гидротермальных в тела согласные и субсогласные с четким контролем литологическими горизонтами довольно часты (крупные месторождения Уччулач, Хандиза, Кокпатас).

К ошибкам приводят и местные рабочие идеи. Так представление о субсогласных рудных телах с крутым падением на месторождении Айтым привело к совершенно ненужной проходке нескольких выработок, так как на самом деле вмещающие сланцы "стояли на голове" из-за поверхностных изменений и имели вместе с жилой горизонтальное залегание (на поверхности обнажены лишь куски лежащего бока жилы).

У. Ошибки метода - "взять количеством". Главная линия в методике поисков и разведке - опробовать все мало-мальски подозрительные места. Методика эта в общем весьма результативна, но она очень далека от геологической надстройки, что приводит к унылым мыслям и рассуждениям.

Ежегодно по СССР отбираются миллионы проб, из них какая-то доля прицельных и очень небольшая - практически результативных. Нигде это множество не систематизируется, часты случаи многократного повторения опробования одного и того же участка разными организациями (автор этих строк был свидетелем одновременного опробования участка в Кызылкумах тремя полевыми партиями - одной на золото, другой на бокситы, третьей на комплекс элементов). Как видно здесь можно говорить лишь об информационном базисе, но никак не об информационном банке.

УІ. Очень слабое внедрение специальной полевой аппаратуры в практику поисков и разведки. Все полевые определения ведутся визуально и до выполнения химических, петрографических, минералогических анализов являются основой работ всего полевого сезона. Сотни полевых отрядов (которые можно было сократить в десятки раз за счет большого, базисного вертолета с химической лабораторией, спектрографом, шлифовальным станком, микроскопом и вертолетов персональных), тысячи определений, которым в общем-то не верят!

Простой люминоскоп при поисках шеелита может заменить большой полевой отряд, снабженный только геологическим молотком и горным компасом. С помощью люминоскопа геологами-съемщиками открыто в этом году шеелитовое месторождение в Нурутау (новый метод — просвечивание обнажений в ночное время). Нами также с помощью люминоскопа открыто другое месторождение в 25 км от первого по просвечиванию отвалов штольни, пройденной для разведки золота, а затем в других участках — сплошные зоны шеелита мощностью 20–25 см. И люминоскопу мы можем быть обязаны в оформлении новой шеелитоносной провинции.

Количество причин и примеров можно значительно увеличить. Можно отметить неравноценность и неравнозначность базиса (мелкие месторождения имеют минимум признаков — как их сравнивать с крупными), отсутствие общей систематизации, отсутствие критериев объективности признаков, недостаточную достоверность и правильность опробования и т.д. и т.д. Но сказанного кажется достаточно для того, чтобы подчеркнуть необходимость создания критериев избирательности данных из всего геологического информационного базиса при применении математики и ЭВМ. А это будет необходимо до тех пор, пока не будет создан геологический информационный банк.

Создание этого банка — весьма сложная задача, над которой уже трудится большое количество геологических организаций; она связана со службой информации, с АСУ-геологией разных уровней и с математизацией. В целом ведется эволюционное, часто локальное преобразование информационного базиса в информационный банк. Наиболее эффективно это происходит при решении частных задач, когда созданный разовый информационный банк удовлетворяет только постановщиков задачи. Для решения общей проблемы несомненно разумное и решительное административное вмешательство, необходима коренная ломка всей геологической службы. Основные положения, на которых может быть основана эта ломка:

1. Повысить права и ответственность инженера. Не подвергать его многоступенчатому контролю (проект начальника отряда проверяется старшим геологом партии, геологическим отделом и главным геологом экспедиции, геологическим отделом и главным геологом треста, геологическим отделом рес-

пушкинского Министерства или Управления).

2. Создание типовых проектов, особенно жестких для производственно-технической их части и сметы ( в разных уголках СССР проходка 100 м штольни сечением  $3,6 \text{ м}^2$  будет стоить одинаково, необходимы лишь коэффициенты на территориальные пояса и твердость породы).

3. Сократить геологические отчеты в 10 раз (нами предложены формы, не ущемляющие инструктивных положений и содержательного смысла отчетов).

4. Разработать единую форму первичной геологической документации, удобную для последующего кодирования (непосредственная задача соответствующего ВНИИ), при обязательном жестком контроле со стороны квалифицированного инженера.

5. Резко повысить роль карты фактического материала при геологической съемке (четкая привязка обнажений, однозначное определение пород с помощью петрографии, четкие замеры элементов залегания с оценкой в баллах, фиксация и описание видимых проявлений тектонических нарушений с весьма ограниченной интерполяцией и экстраполяцией и т.д).

6. Создать единый фонд результатов всех видов анализов с указанием порогов чувствительности.

Это — главные, с нашей точки зрения, мероприятия. Главная их задача — максимально сократить шум за счет сокращения инстанций от источника информации до потребителя и создать реальные пути для преобразования информационного базиса в информационный банк, который может открыть путь математизации на более высокой ступени.

Л.И.Четвериков

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОБЫ

Опробование является одним из основных методических приемов, применяемых в геологии при изучении разных геологических объектов. Пробы берутся как при литологических и геохимических исследованиях, так и при разведке и эксплуатации месторождений полезных ископаемых. Вообще говоря, опробование не является прерогативой какой-либо одной науки или области практической деятельности человека.

В широком плане опробование можно рассматривать как своего рода измерительную информационную систему, используемую в различных областях научной и практической деятельности.

В геологии, особенно в прикладных ее разделах, проблема опробования всегда стояла очень остро и находилась в центре внимания. Несмотря на это, она никогда не рассматривалась в теоретическом плане. Вопросы опробования рассматриваются попутно, чисто эмпирически, при решении конкретных частных задач в той или иной области геологии. Подобный "узковедомственный", сугубо утилитарный подход к опробованию привел к тому, что в настоящее время, во-первых, не имеется общей теории опробования. Вместо этого имеется набор эмпирических рецептов по производству опробования в конкретных условиях. Во-вторых, нет единой, логически стройной понятийной базы опробования. Вместо этого используется большое количество дублирующих друг дру-

га терминов, лишенных строгой смысловой основы.

В настоящее время под пробой понимается "...материал, взятый по установленным правилам, от изучаемого объекта (породы или полезного ископаемого) и предназначенный для анализа (испытания) ..." (см. [3], стр.138). Вместе с тем, в последнее время все более и более широкое распространение получает "опробование геофизическое", основанное на зависимости физических свойств породы и полезного ископаемого от содержания в них различных элементов, позволяющее "определить содержание компонентов без отбора проб ..." (см. [3], стр.34). Аналогичным образом дело обстоит и с опробованием по типам руд, при котором ..." опробование производится путем детальной геологической документации рудных тел с последующим расчетом содержания полезных компонентов в руде" (см. [3], стр.35). Таким образом, получается, что существует опробование, при котором нет проб.

Подобное несоответствие впервые было замечено В.М.Крейтером, который писал: "В последнее время понятие о пробах и опробовании расширяется, т.к. появляются новые способы (радиометрия, люминесценция) позволяющие визуалью на месте залегания полезного ископаемого определить его качество, используя различные физические свойства минералов" (см.[9] стр. 184). С другой стороны, если проба - это материал, "взятый от изучаемого объекта", то в чем же тогда заключается ее принципиальное отличие от понятия образца, определяемого как "кусок горной породы (минерала) или окаменевшие остатки организмов (следовательно, в общем случае, как материал - Л.Ч.), взятые для изучения из обнажений или кернa" (см. [3], стр.25)?

Добавим к этому, что в практике геологоразведочных работ нередко один и тот же материал выступает в качестве пробы и образца одновременно.

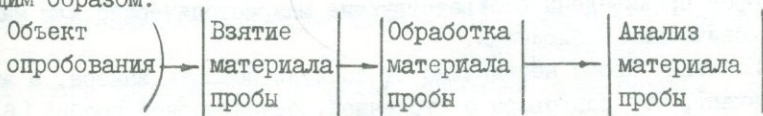
Указанных противоречий можно избежать, если рассматривать пробу [14] как локальный, специфический, единичный замер (измерение, наблюдение), предназначенный для определения содержания изучаемого признака в породе или полезном ископаемом.

С этих позиций, в более широком плане, проба будет представлять собой не что иное как специфический локальный замер

(измерение) содержания чего-либо в чем-то. Подобное определение является не просто другим словесным выражением понятия пробы, а отражает принципиально иной подход к пробе и проблеме опробования в целом. В данном случае проба, подобно измерениям длины, объема, времени и т.д. относится к категории универсальных замеров, осуществляемых человеком в своем познании окружающего и практической деятельности. Пробе, как определенному виду универсальных замеров, присущи свои специфические методические особенности, которые свойственны ей вне зависимости от того, для каких целей, где и как осуществляется подобное измерение. К ним относятся: геометрия пробы, принцип неповторимости сплошной материальной пробы, достоверность и представительность пробы. Эти особенности таковы, что изменения их приводят к получению отличающейся измерительной информации по одному объекту опробования.

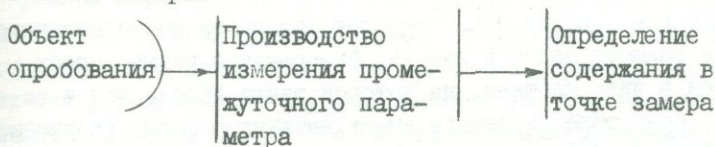
В зависимости от методики и техники осуществления измерения все пробы можно разделить на два типа: материальные и нематериальные.

Общая схема производства материальной пробы выглядит следующим образом:



В свою очередь материальные пробы бывают сплошные и составные. В последнем случае материал пробы составляется из отдельных порций, взятых разобщенно друг от друга.

К нематериальным пробам относятся приборные и другие пробы, при производстве которых никакого материала не берется. Общая схема осуществления данных проб складывается из измерения определенного параметра в заданной точке и определения по величине этого параметра содержания интересующего свойства в точке замера.



Применение нематериальных проб заведомо базируется на наличии строгой функциональной зависимости между измеряемым параметром и содержанием изучаемого признака [3,5,6] .

### Геометрия пробы

Специфической особенностью любой пробы является ее геометрия, которая включает в себя размер, форму и ориентировку "области замера пробы". Несмотря на большие различия, существующие в методике и технике производства материальных и нематериальных проб, всем им свойственна одна особенность - замер интересующего свойства (параметра) осуществляется в пределах какой-то области, занимаемой породой или рудой, назовем ее кратко "областью замера". Для сплошных материальных проб это - область, в пределах которой взят материал пробы. Для составных проб - это область, в контурах которой отобраны отдельные порции (части), составляющие материал пробы. В приборных пробах область замера является область, в рамках которой руда или порода оказывает воздействие на датчик прибора, замеряющий то или иное их свойство [5, 6] . В случае визуальных проб область замера выступает в виде площади забоя, обнажения, шлифа и аншлифа, на которой произведены соответствующие макроскопические или микроскопические наблюдения.

Понятие пробы неотделимо от понятия области замера, а это означает, что разговоры о "точечной, безразмерной пробе" [6, 10] , у которой область замера стремится к нулю, т.е. практически отсутствует, лишены смысла даже в виде теоретической абстракции.

В геометрическом плане область замера пробы представляет собой некую геометрическую фигуру, обладающую той или иной формой, размером и ориентировкой в пространстве.

Таким образом, под "геометрией пробы" понимаются геометрические характеристики (размер, форма и ориентировка) области замера конкретной пробы.

Размер пробы представляет собой количественное выражение размера области замера. На практике размер пробы выражается в виде площади, на которой взята проба, или в виде длины, если область замера имеет вытянутую форму (керновые и бороздовые пробы).

Под формой пробы понимается геометрическая форма ее области замера. Форма пробы может быть самой различной от изометрической (объемной), до плоской или сильно вытянутой, почти линейной. Форма пробы оказывает непосредственное влияние на конечный результат замера. Действительно, из практики опробования хорошо известно, что, например, штучная изометрической формы проба не равнозначна вытянутой бороздовой пробе того же объема (размера). Другими словами, одинаковые по размеру, но разные по форме пробы в пределах одного объекта опробования показывают различную дисперсию у измеряемого свойства породы или руды [6, 10, 14].

Последней особенностью геометрии пробы является ориентировка пробы. Строго говоря, ориентировка пробы представляет собой ориентировку конкретной области замера пробы относительно осей анизотропии изучаемого свойства в пределах области возможной ориентировки. Если рассматривать область замера как некую геометрическую фигуру, то всегда можно найти центр тяжести  $O$  данной фигуры. Вращая область замера вокруг точки  $O$ , т.е. придавая ей то или иное положение в пространстве, тем самым ограничим часть пространства, в пределах которой будут находиться пробы одинаковой формы, имеющие любую, наперед заданную ориентировку. Назовем подобную часть пространства областью возможной ориентировки пробы конкретной геометрической формы или просто "областью ориентировки пробы". Ориентировка пробы не имеет значения в двух случаях: во-первых, когда оруденение в пределах области ориентировки пробы размещено изотропно и, во-вторых, когда проба имеет изометрическую форму. В остальном влияние этого фактора сказывается тем сильнее, чем более вытянутой по форме оказывается проба и чем резче проявляется анизотропия, т.е. чем существенней различия в поведении признака в разных направлениях в пределах области ориентировки пробы [14].

Говоря о влиянии ориентировки пробы, следует уточнить, на каком уровне неоднородности строения опробуемого объекта анизотропия имеет значение. Таким уровнем в строении геологических тел в большинстве случаев оказывается уровень текстуры [11]. Несмотря на это, при конкретных исследованиях немаловажное значение имеет правильное фиксирование уровня строения опро-

буемого объекта, соответствующего размеру области ориентировки пробы. Геометрия проб оказывает непосредственное влияние на результат опробования. Это влияние выражается в разной величине дисперсии признака наблюдаемой по пробам разной геометрии для одного и того же объекта опробования. В связи с этим имеет большое практическое значение сравнение проб разной геометрии. Как ни парадоксально, но несмотря на огромную, многолетнюю практику опробования, вопрос всесторонней оценки геометрии пробы вообще не ставился. В лучшем случае он сводился к определению веса материала, который рекомендовалось брать в пробу [8,9]. При этом совершенно опускалось из вида, что объем и вес материала характеризует только одну сторону геометрии пробы, а именно размер области замера пробы.

Одновременно многочисленные эксперименты, осуществленные Н.В.Барышевым, Е.П.Зайцевым и другими исследователями, наглядно показали, что далеко не всякое значительное уменьшение размера пробы приводит к ощутимому изменению величины дисперсии у измеряемого признака.

Столь непонятное невнимание к геометрии пробы может быть объяснено только тем, что до настоящего времени пробу рассматривают исключительно как материал, совершенно не замечая того, что это прежде всего замер, обладающий своими специфическими особенностями, из которых геометрия пробы играет далеко не последнюю роль.

Согласно Ж.Матерону, "... любому геометрическому объему  $Q$  можно приписать линейный эквивалент  $l...$ ", который "... означает, что содержание в пробе  $Q$  обладает той же дисперсией внутри любого месторождения, что и содержание в линейной пробе длиной  $l...$ " (см. [6], стр.322). В отличие от представлений Ж.Матерона [10], будем предполагать, что линейная проба имеет строго определенную ориентировку [14]. В этом случае линейный эквивалент  $l$  понимается как длина линейной пробы, ориентированной строго по направлению максимальной изменчивости признака (иначе, по наибольшей оси его анизотропии), эквивалентной пробе конкретной геометрии, т.е. имеющей ту же дисперсию признака. Под линейной пробой понимается теоретически возможная проба, имеющая область замера

в виде прямой линии. Таким образом, использование линейного эквивалента в качестве показателя геометрии пробы предполагает, что пробы, отличающиеся по размеру, форме и ориентировке области замера, но обладающие одинаковым линейным эквивалентом, показывают одну и ту же дисперсию признака в рамках одного объекта опробования. Другими словами, имеет место следующее равенство:  $\sigma_1 \cdot l_1 = \sigma_2 \cdot l_2 = \sigma_3 \cdot l_3 = \dots = \sigma_i \cdot l_i$ , где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_i$  - дисперсия изучаемого признака,  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_i$  - линейные эквиваленты проб. Однако следует особо подчеркнуть, что все вышесказанное, включая и данное равенство, приложимо только к полностью достоверным пробам, т.е. к пробам, у которых отсутствует техническая ошибка.

Для подавляющего большинства проб, используемых в геологической практике, геометрическая форма их областей замеров может быть сведена к форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $a > b > c$  (бороздовые, шпуровые, керновые и другие скважинные породы), к форме прямоугольника, квадрата (задирыковые пробы) и куба (штупные и большинство валовых проб).

Проведенные исследования [6, 10, 14] позволяют предложить следующие простые формулы для вычисления линейного эквивалента проб. При наличии области замера, форма которой может быть уподоблена прямоугольному параллелепипеду, линейный эквивалент равен

$$l = K_1 \cdot a + K_2 \cdot b + K_3 \cdot c.$$

В случае кубической или простой изометрической формы области замера с диаметром  $a$  линейный эквивалент  $l = a \cdot (K_1 + K_2 + K_3)$  и при наличии двукосной анизотропии изменчивости признака  $l = a \cdot (K_1 + 2K_2)$ . Для области замера с формой прямоугольника со сторонами  $a > b$ , линейный эквивалент  $l = K_1 \cdot a + K_2 \cdot b$  и с формой квадрата со стороной  $l = a \cdot (K_1 + K_2)$ . Во всех этих формулах коэффициенты  $K_1, K_2$  и  $K_3$  учитывают ориентировку области замера при анизотропном размещении признака и представляют собой отношения ( $K_1 = J_a / J_{\max}$ ,  $K_2 = J_b / J_{\max}$ ,  $K_3 = J_c / J_{\max}$ ) величины изменчивости признака по длине ( $J_a$ ), ширине ( $J_b$ ) и толщине (глубине  $J_c$ ) области замера к величине ( $J_{\max}$ ) максимальной изменчивости этого признака. Значения данных коэффициентов не превышают

единицы и зависят от ориентировки области замера пробы и анизотропии изменчивости признака (типа анизотропии, формы индикатрисы анизотропии и степени анизотропии [I4, I5]). В изотропных условиях

$$K_1 = K_2 = K_3 = 1.$$

При прочих равных условиях наибольшую величину линейного эквивалента и, следовательно, наилучшую геометрию, имеют пробы вытянутой формы области замера ( $\frac{a}{b} > 10$ ), ориентированной по направлению максимальной изменчивости признака (т.е. по наибольшей оси его анизотропии). Изучение строения тел полезных ископаемых показывает, что таким направлением для них является мощность. Видимо поэтому в практике опробования наибольшее распространение получили бороздовые и керновые пробы, которые во всех учебниках и инструкциях по опробованию рекомендуется располагать (ориентировать) по мощности рудного тела. В этом случае линейный эквивалент данных проб в первом приближении, может быть принят равным длине борозды или интервалу скважины с которого отобран материал пробы. Все сказанное позволяет понять и объяснить хорошо известные факты, когда значительное изменение (в два и более раза) размера (веса материала)  $Q$  бороздовых проб, осуществляемое за счет соответствующего изменения ширины или глубины борозды, влечет за собой незначительные изменения величины коэффициента вариации содержания полезного компонента [4]. В то же время как аналогичные изменения размера ( $Q$ ) бороздовых и керновых проб, осуществляемые за счет увеличения или уменьшения их длины, приводят к ощутимым изменениям коэффициента вариации  $v$  согласно эмпирической формуле  $v = \frac{R}{\sqrt{Q}}$ , где  $R$  - коэффициент, постоянный для данного объекта опробования [II, I2, I4]. В первом случае изменение размера областей замера бороздовых проб не приводит к существенному изменению их общей геометрии, чего нельзя сказать о втором случае. Это обстоятельство хорошо фиксируется линейным эквивалентом. В первом случае величина линейного эквивалента практически ос-

тается постоянной, а во втором она меняется прямо пропорционально изменению длины бороздовых и керновых проб.

### Принцип неповторимости материальной пробы

Принцип неповторимости сплошных материальных проб как единичного наблюдения можно сформулировать следующим образом. Каждая такая проба является уникальным, т.е. неповторимым в тех же самых условиях, единичным замером. Каждая новая сплошная материальная проба, какую бы геометрию она ни имела и как бы близко ни находилась к предыдущей пробе, представляет собой самостоятельный, полностью неповторимый замер, характеризующий изучаемый признак в иной точке пространства, в несколько иных условиях.

Для составных материальных проб и нематериальных проб принцип неповторимости не имеет места. По желанию можно несколько раз приложить датчик прибора к одной и той же точке забоя и тем самым повторить приборную пробу в адекватных условиях. То же самое можно сказать и о составных материальных пробах. Расположив несколько поиному точки отбора материала, можно повторить пробу и причем неоднократно в пределах одной и той же области замера. Вполне возможно, что во всех этих случаях будут иметь место несколько отличные значения измеряемого признака, но это уже относится к вопросам достоверности составных проб, а не к возможности их воспроизводства в рамках одной области замера.

### Достоверность и техническая ошибка пробы

Часто в литературе, посвященной опробованию, можно встретить термины "достоверность", "представительность", "репрезентативность", "надежность" и "точность" пробы. Большинство авторов рассматривает и использует их как синонимы, хотя и допускает наличие у них отдельных нюансов.

Анализ пробы как специфического замера показывает, что для всесторонней характеристики точности подобного замера необходимо два показателя, каждый из которых отражает две качественно разные стороны пробы. Впервые эта мысль была высказана Д.А.Зенковым в 1966 году. Для обозначения этих двух показателей в принципе можно воспользоваться двумя любыми из вышеназ-

ванных терминов. Возьмем два наиболее часто употребляемых: "достоверность" и "представительность". Будем называть достоверностью пробы точность производства подобного замера. Ее количественным выражением будет являться техническая ошибка пробы ( $\Delta_T$ ), представляющая собой разницу между значением признака, показанного пробой, и фактическим его значением, характерным для области замера.

Достоверность материальных проб определяется погрешностью ( $\Delta_1$ ) взятия материала пробы, погрешностью ( $\Delta_2$ ) в его обработке и ошибкой ( $\Delta_3$ ) анализа (испытания) материала пробы

$$\Delta_T = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Согласно принципу неповторимости погрешность взятия материала ( $\Delta_1$ ) для сплошных проб непосредственно опытным путем установлена не может быть, что делает невозможным для этих проб определение суммарной технической ошибки.

В отличие от сплошных проб погрешность взятия материала составных проб определяется не только техникой производства отбора материала, но и спецификой размещения измеряемого признака в пределах области замера. В связи с этим достоверность составных материальных проб зависит также и от чисто методического фактора (от количества исходных порций, составляющих материал пробы, их размера и расположения в области замера пробы). Погрешность взятия ( $\Delta_1$ ) играет главную роль в технической ошибке составной пробы и поэтому достоверность сплошной материальной пробы, при прочих равных условиях, всегда существенно выше, чем у составных проб. На практике достоверность последних часто бывает настолько значительной, что определяет ошибку пробы.

Техническая ошибка нематериальных проб имеет свою специфику. Она складывается из ошибки замера и ошибки определения значения содержания. Ошибка замера представляет собой техническую погрешность прибора и производства измерения. Ошибка определения зависит от постоянства и тесноты связи (соотношения) между измеряемым параметром и содержанием определяемого признака в объекте опробования. Сложность эмпирической оценки технической ошибки заключается, во-первых, в труднос-

ти, а часто и просто в невозможности фиксации области замера при данном способе опробования, во-вторых, в непостоянстве связи между измеряемым параметром и содержанием изучаемого признака [ 5,6 ] .

Перейдем к последней особенности пробы, как замера, — ее представительности. Но для этого в начале сделаем одну оговорку. При анализе представительности будем считать, что наши пробы являются полностью достоверными (т.е.  $\Delta_T = 0$ ).

### Представительность и ошибка аналогии пробы

В существующей литературе вопрос о представительности пробы непосредственно связывается с точностью опробования. Для определения точности осуществленного опробования разными авторами предложен целый ряд теоретических и эмпирических формул и показателей (от самых простых до весьма сложных), эффективность которых иллюстрируется на отдельных частных примерах. Интересно, что все эти исследования основываются на субъективной понятийной базе. Вот, например, какое определение дано понятию представительности пробы в Геологическом словаре [ 3 ] на странице 133: "Представительность пробы — степень соответствия установленных в пробе показателей состава и свойств полезного ископаемого с окончательными данными, характеризующими это полезное ископаемое". Сразу же возникает ряд вопросов. Какие данные и на какой стадии опробования следует считать "окончательными"? Что представляют эти "окончательные данные"? Хорошо известно, что состав и свойства полезного ископаемого могут существенно меняться в разных частях рудного тела.

Следует, наконец, понять, что от того, какой смысл вкладывается в представительность пробы и какую часть опробуемого объекта при этом проба должна представлять, существенно меняется не только форма математического решения, но и общий методический подход к решению данной проблемы.

Из самого названия "представительность пробы" предполагается, что должно иметь место что-то, что проба представляет. На этот счет существует четыре принципиально разные точки зрения.

I. Многие считают, что проба представляет только то место,

откуда она непосредственно была взята. При этом фактически имеется ввиду область замера пробы. В этом случае вопрос о представительности пробы сразу же снимается, так как любая, полностью достоверная проба, очевидно, будет точно отражать то место, где был произведен подобный замер. Если этого не наблюдается, то, по всей видимости, следует говорить уже не о представительности, а о достоверности пробы.

2. В других случаях утверждают, что проба должна представлять обнажение, забой, массу отбитой или добытой руды, где был осуществлен данный замер. При этих условиях представительность пробы оказывается непосредственно зависимой от такого чисто формального фактора как площадь обнажения, забоя, или объема массы руды. Например, чем больше площадь забоя, тем ниже будет представительность одной и той же пробы в одних и тех же условиях.

3. Распространено мнение о том, что проба представляет непосредственно примыкающую к ней часть опробуемого объекта, ограниченную по методу "ближайшего района" А.К.Болдырева, т.е. на половину расстояния до соседних проб. Но и в этом случае представительность пробы также оказывается непосредственно зависимой от чисто формального фактора. Чем больше произведено замеров и, следовательно, чем ближе они находятся друг к другу, тем меньше будет часть, которую конкретная проба должна представлять, и тем, очевидно, выше должна быть представительность этой пробы. Таким образом, получается, что представительность пробы оказывается обусловленной в первую очередь не ее самой (точнее, геометрией пробы) и не характером поведения замеряемого признака (например, характером минерализации), а формальным количеством осуществленных проб.

4. Последнее время получает все большее распространение точка зрения, высказанная автором еще в 1966 году, о том, что проба представляет "элементарную часть" [7,13] опробуемого объекта, размер и форма которой целиком определяются особенностями строения объекта, степенью детальности его изучения, предъявляемыми требованиями и целями опробования.

В последнем случае условия представительности пробы выглядят наиболее разумно именно с методологической точки зрения и тех практических задач, которые проба решает в каждом кон-

кретном случае. Необходимо только с геологических и методических позиций правильно выделить ту часть тела, относительно которой должна определяться представительность пробы.

Будем считать, что на каком-либо этапе разведки внутри тела полезного ископаемого на основании всей имеющейся информации о нем, включая и результаты опробования, выделены отдельные элементарные части, иначе — ограничены части тела, внутреннюю структуру которых невозможно однозначно дешифровать на проведенном этапе изучения, т.е., другими словами, определен уровень в строении тела, соответствующий детальности осуществленного этапа изучения [7, 13, 14]. Если сделать это не удастся, то тогда на данном этапе все тело полезного ископаемого в целом рассматривается как одна элементарная часть. Немаловажную роль в этом отношении играют и конкретные практические задачи, поставленные перед опробованием. В таком случае колебания содержания в достоверных пробах, находящихся в рамках конкретной элементарной части, можно расценивать как отдельные флуктуации от величины среднего содержания, присущего в целом этой элементарной части. Допустим, что известно истинное содержание полезного компонента  $\bar{C}$  в конкретной элементарной части. Тогда оценка представительности ( $\Delta_{\text{п}}$ ) достоверной пробы, показавшей содержание  $C_1$ , взятой в пределах элементарной части, будет равна  $\Delta_{\text{п}} = C_1 - \bar{C}$ . Оценка представительности пробы в ее фактическом выражении имеет существенные недостатки: во-первых, тут необходимо заведомо знать значение  $\bar{C}$  для элементарной части, но тогда представительность конкретной пробы теряет практический смысл. Во-вторых, указанная оценка характеризует только данную пробу, но ничего не может сказать о других возможных аналогичных пробах. Всего этого легко избежать, если говорить не о фактической представительности конкретной пробы, а о возможной представительности пробы в пределах элементарной части. В последнем случае термин "представительность пробы" можно определить как возможную точность в ее вероятностном выражении, с какой достоверная проба отражает (представляет) элементарную часть опробуемого объекта. Оценка представительности пробы, или, точнее, ошибка аналогии, обусловленная представительностью пробы, будет

иметь вид:

$$\pm \Delta_{\Pi} = t \cdot S; \quad \pm \Delta_{\Pi} \% = t \cdot v,$$

где  $\pm \Delta_{\Pi}$ ,  $\pm \Delta_{\Pi} \%$  — ошибка аналогии пробы в абсолютном и относительном (в процентах от среднего значения признака) выражениях,  $S$ ,  $v$  — среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации значений признака в пробах определенной геометрии в пределах данной элементарной части опробуемого объекта,  $t$  — величина, определяющая степень принятой вероятности оценки ошибки аналогии.

Характеристика представительности пробы складывается из определения элементарной части, представляемой пробой, и оценки величины ошибки аналогии. При таком подходе представительность пробы будет определяться следующими факторами.

1. Спецификой общего строения объекта опробования.

2. Степенью детальности произведенного этапа опробования. Действительно, чем более детально осуществлен этап изучения, тем более мелкие элементы строения объекта будут выступать в качестве элементарных частей, и, следовательно, тем выше будет и представительность пробы. Степень детальности во многом зависит от плотности сети опробования, т.е. от расстояния между пробами. Вместе с тем, любое сокращение расстояния между пробами далеко не всегда приводит к увеличению степени детальности. В этом отношении немаловажное значение имеет еще и характер строения опробуемого объекта и расположение проб. Таким образом, с одной стороны, получается, что в общем, чем меньше расстояние между пробами, тем меньше должна быть представительность пробы. Однако, с другой стороны, эта зависимость представляет собой лишь косвенное следствие специфики строения объектов опробования и, следовательно, на практике ее нельзя интерпретировать как прямую обратную пропорцию. Подобного рода ошибка совершается, например, Ж.Матероном, когда он пытается вывести математическую зависимость между размером и формой области влияния пробы и точностью оценки содержания полезного компонента в данной области [10].

3. Характером признака и спецификой его размещения в пространстве в пределах элементарной части.

4. Практическими задачами опробования, например, при разведке и эксплуатации месторождений полезных ископаемых часто выделяются отдельные блоки (элементарные части) с определенным средним содержанием или блоки, в которых колебание содержания полезного ископаемого не выходит за рамки установленных пределов.

5. Геометрией пробы, которая отражает методику осуществления подобного единичного замера. В общем зависимость между ошибкой аналогии и геометрией пробы имеет вид:

$$\pm \Delta_n = t \frac{R}{\sqrt{l}}$$

где  $R$  — коэффициент, выражающий характер размещения признака в элементарной части,  $l$  — линейный эквивалент пробы. Из этой зависимости следуют равенства:

$$\Delta_{n_1} \cdot \sqrt{l_1} = \Delta_{n_2} \cdot \sqrt{l_2} = \dots = \Delta_{n_i} \cdot \sqrt{l_i} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta_{n_1}}{\Delta_{n_2}} = \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{l_1}} \quad (1)$$

позволяющие рассчитывать ошибки аналогии для полностью достоверных проб разной геометрии в пределах одной элементарной части. Что касается проб, находящихся в разных элементарных частях, то указанные равенства применимы к ним только тогда, когда значения коэффициента  $R$  для этих частей будут одинаковы.

Таким образом, из сказанного следует, что понятие представительности пробы включает в себя не только то, с какой точностью она представляет, т.е. ошибку аналогии, но и то, что она представляет, т.е. что в данном случае выступает в качестве элементарной части. Если известно, что две разные пробы имеют одинаковую и по значению ошибку аналогии, то на этом основании еще нельзя говорить о том, что они равнозначны по своей представительности. Может быть так, что одна из них — валовая проба большого размера — представляет фактически все тело полезного ископаемого, которое в этом случае рассматривается как одна элементарная часть, в то время как вторая — бороздковая проба — представляет сравнительно небольшую часть

тела — один эксплуатационный блок. Понятно, что в данных условиях представительность этих двух проб различна, несмотря на то, что ошибка аналогии у них одинакова. С другой стороны, одна и та же проба может иметь разную представительность в зависимости от того, что рассматривается в качестве элементарной части, которую она представляет.

### Реальная проба

Реальная проба, как измерение, отражает наблюдаемую изменчивость содержания, характер которой определяется не только природой опробуемого объекта, но, в неменьшей мере, методикой и техникой осуществленного опробования (т.е. самой измерительно-информационной системой). Ошибка реальной пробы складывается из технической ошибки ( $\Delta_T$  и ошибки аналогии ( $\Delta_{\Pi}$ ), соотношение последних определяет достоверность и представительность этого измерения. При  $\Delta_T \geq \Delta_{\Pi}$  проба является недостоверной и непредставительной и не может рассматриваться как информативный замер.

Чем выше представительность, тем более жесткие условия должны быть наложены на достоверность информативной пробы.

Любое дальнейшее преобразование, математическая обработка измерительной информации, получаемой в результате опробования, лишены смысла без предварительного анализа и оценки достоверности и представительности проб.

Методологически сложность оценки ошибки аналогии проб заключается в том, что значение любого показателя, характеризующего изменчивость признака в элементарной части, может быть установлено только экспериментально, т.е. путем соответствующего опробования данной или аналогичной ей элементарной части. Другими словами, практически для того, чтобы установить значение коэффициента, необходимо вначале произвести опробование полностью достоверными пробами одной геометрии, затем, по полученным данным, определить дисперсию  $\sigma^2$  или коэффициент вариации  $v$  признака (например, содержания полезного ископаемого) и только после этого можно определить величину  $R = \sqrt{\sigma^2 \cdot l}$  или  $R = v \cdot \sqrt{l}$  для данной элементарной части. В этом случае не имеет принципиального значения, какую величину линейного эквивалента  $l$  имеют подобные пробы. Установить изменчивость признака аналитическим путем,

минуя опробование, фактически невозможно, ввиду наличия большого количества факторов влияющих на поведение признака в руде и породе.

Имеющие место [ 8 ] попытки априори, без проведения опробования, определить желаемый "надежный вес" пробы не выглядят убедительно и противоречат фактическим данным [ 4 ]. Следует также добавить, что при этом полностью игнорируется вопрос о геометрии пробы "надежного веса", а также вопрос о том, что же представляет такая проба?

При анализе произведенного опробования естественно желание установить раздельно как техническую ошибку, так и представительность проб. Однако из-за наличия принципа неповторимости сделать это для наиболее распространенных сплошных материальных проб невозможно. Теоретически для того, чтобы установить фактическую техническую ошибку реальной пробы, необходимо знать истинное содержание в точке замера, что оказывается доступным только тогда, когда мы можем повторить подобный замер, взяв для этой цели в той же самой точке заведомо полностью достоверную пробу. По техническим причинам в подавляющем большинстве случаев выполнить данную операцию не представляется возможным. Ввиду указанного обстоятельства в практике опробования работ вместо определения суммарной технической ошибки материальной пробы ограничиваются определением только погрешности (ошибки) анализа пробы, значительно реже - еще и погрешности обработки пробы. Что касается третьей составляющей технической ошибки - погрешности взятия пробы, то она вообще не определяется, а вместо этого в инструктивном порядке указываются мероприятия, которые были осуществлены или которые надлежит осуществить для того, чтобы исключить возможность данной ошибки.

Допустим, что имеется серия реальных проб одинаковой геометрии, расположенных в пределах одного элементарного блока с эмпирической дисперсией признака  $\sigma^2$ . Возникает вопрос: в каких случаях этой дисперсией можно воспользоваться для оценки представительности? Во-первых, очевидно, в том случае, когда реальные пробы являются заведомо практически достоверными. Во-вторых, эта возможно и при наличии существенной технической ошибки, но когда эта ошибка является система-

тической. Указанная дисперсия неприменима для оценки представительности реальных проб в том случае, когда техническая ошибка заключает в себе существенную случайную составляющую. В последнем случае дисперсия  $\sigma^2$  признака складывается уже из дисперсии, обусловленной представительностью реальной пробы, и дисперсии, обусловленной случайной составляющей ее технической ошибки.

Из сказанного понятно, что при сравнении реальных проб разной геометрии с точки зрения их представительности большое значение имеет правильный учет влияния случайной составляющей технической ошибки на величину эмпирической дисперсии содержания в этих пробах. В противном случае, если непосредственно использовать для подобного сравнения эмпирические дисперсии признака в реальных пробах, то равенства (I) могут фактически и не иметь места.

В первую очередь это имеет значение для составных материальных проб, которые всегда несут в себе значительную ошибку взятия, обусловленную самой методикой производства подобных проб. В заключение подведем краткий итог.

1. Существующее определение понятия пробы является частным и не охватывает всех применяемых способов опробования. Определение пробы как локального специфического замера какого-либо свойства в объеме руды или породы позволяет устранить данное противоречие.

2. Пробе, как специфическому замеру, свойственны свои особенности. К ним относятся: неповторимость материальных проб, техническая ошибка и достоверность пробы, геометрия пробы, представительность пробы.

3. Геометрия пробы включает в себя размер (масштаб), форму и ориентировку пробы. Линейный эквивалент пробы представляет собой абстрактную, теоретическую модель пробы, позволяющую сравнивать реальные пробы в отношении их геометрии.

4. Понятие и оценка представительности пробы включают в себя не только то, как представляет проба, объект опробования, но и то, что она представляет.

#### Л и т е р а т у р а

И. ВОРОНИН Ю. А., АЛАБИН Б. К., ГОЛЬДИН С. В. и др. Геология и математика. Новосибирск, "Наука", 1967.

2. Геологические проблемы формализации. Минск, "Наука и техника", 1969.
3. Геологический словарь. Т.П.М., "Недра", 1973.
4. ЗАЙЦЕВ Е.К. Опробование коренных месторождений и добытых рудных масс пробами малого веса. М., ЦИИИ цветной металлургии, 1958.
5. КАЖДАН А.Б. Основы разведки месторождений редких и радиоактивных металлов. М., "Высшая школа", 1966.
6. КАРЛБЕ Э. Методика количественной оценки месторождений урана. М., "Атомиздат", 1966.
7. Категории, диалектика и методология современной науки. Раздел "Понятие элементарности и его методологическая роль в геологии", Воронеж, изд. ВГУ, 1970.
8. КРАСНОВ Д.А. Теоретические основы и расчетные формулы определения веса проб. М., "Недра", 1969.
9. КРЕЙТЕР В.М. Поиски и разведка месторождений полезных ископаемых. Т.П., М., Геолтехиздат, 1961.
10. МАТЕРОН Ж. Основы прикладной геостатистики. М., "Мир", 1968.
11. РАЦ М.В. Неоднородность горных пород и их физических свойств. М., "Наука", 1968.
12. Совершенствование методов маркшейдерских работ и геометризация недр. М., "Недра", 1972.
13. ЧЕТВЕРИКОВ Л.И. Некоторые методологические вопросы современной геологии. М., "Философские науки", №1, 1974.
14. ЧЕТВЕРИКОВ Л.И. Теоретические основы моделирования тел твердых полезных ископаемых. Воронеж, изд. ВГУ, 1968.
15. ЧЕТВЕРИКОВ Л.И. Оценка анизотропии наблюдаемой изменчивости параметров тел полезных ископаемых. "Известия вузов", Горный журнал, №4, 1972.

Ю. А. Воронин

## К ТЕОРИИ ПОИСКОВ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Исследования по поиску полезных ископаемых в связи с применением математических методов и ЭВМ проводятся уже давно, особенно интенсивно последние десять лет. Только на русском языке опубликовано свыше 50.000 работ. Назрела необходимость попытаться представить, в общих чертах, всю проблему поиска в целом. Это может помочь привести в систему множество уже полученных факторов и результатов, оценить их и разумно использовать. Ниже предпринята такая попытка, прежде всего, с учетом тех исследований, которые проводятся в СО АН СССР.

1. Частные и общая теории поиска полезных ископаемых. О поиске полезных ископаемых можно говорить, фиксируя, положим, с точностью до класса область поисков, вид полезного ископаемого, тип его скопления и методы поиска. Например, можно говорить о поиске в платформенной области залежей нефти и газа структурного типа сейсмическими методами. В таком случае говорят о частных теориях поиска (ЧТП). О поиске полезных ископаемых можно говорить и не фиксируя так жестко исходные предположения. В таком случае говорят об общей теории поиска (ОТП) [12, 20].

2. Необходимость построения общей теории поиска полезных ископаемых

к о н а е м ы х . ОТП оказывается необходимой, по крайней мере, в следующих целях [12,20,23,24,56] :

- а) для организации и проведения поисковых работ на уровне территориальных управлений и выше;
- б) для создания и эффективного применения новых комплексных физико-химических методов поиска;
- в) для эффективного применения математических методов и ЭВМ, экономико-математических моделей и автоматизированных систем управления поисковыми работами;
- г) для взаимного теоретического обогащения ЧТП;
- е) для эффективного перехода к новым областям поисков, новым комплексным видам полезных ископаемых и новым типам его скопления.

Следует отметить большие трудности, которые возникают при организации исследования по ОТП в геологических научно-исследовательских организациях [23] .

3. 0 д в у х в о з м о ж н ы х п о д х о д а х к построению общей теории поиска полезных ископаемых . При построении ОТП можно исходить из методологических представлений, которые традиционно используются в ЧТП, но можно исходить и из иных представлений, например, системного подхода [47,28] и теории исследования операций [2] . Для разумного выбора одного из возможных подходов необходимо договориться относительно тех требований, которым должна удовлетворять ОТП и провести анализ методологических представлений, используемых сейчас в ЧТП.

4. 0 т р е б о в а н и я х к о б щ е й т е о р и и поиска полезных ископаемых . Следует принять [10,12,18,19,20,23,24] , что ОТП должна удовлетворять известным регулятивным принципам: инвариантности, наблюдаемости, фальсифицируемости и простоты [4] , должна выполнять, обязательно, предсказательные, синтезирующие, направляющие и, желательно, объяснительные функции [31] . Она должна быть формальной, входить как составная часть в статическую геологию [39] . Во всех своих основных конструкциях она должна быть свободна от генетических концепций, однако давать возможность рассматривать эти концепции, после соответствующей

щей формальной статической интерпретации, как априорные предположения, и базироваться на заранее заданных социально-экономических критериях оптимальности поисков. Это значит, что, в первую очередь, должны быть указаны критерии для оценки состояния минерально-сырьевой базы по любому полезному ископаемому для любой территории на любой момент времени [24,29].

5. О методологических представлениях частных теорий поиска полезных ископаемых. Анализ, например, [30, 43, 50], показывает, что в основе ЧТП лежат следующие методологические представления:

1) о "естественных" теориях, не связанных с какими-либо формальными требованиями к языку, процедурам выделения, описания и сопоставления объектов исследования;

2) об "историческом" подходе к анализу экспериментальных данных на основе метода актуализма (механизм образования, время образования, условия развития и т.д.);

3) о "естественных" телах и уровнях организации (минералы, породы, формации и пр.);

4) о "индивидуальности" геологических тел;

5) о приоритете метода исследования перед задачей.

Показано, что эти представления, составляющие фундамент современного геологического мышления [40,61] нуждаются в коренной перестройке [24,35,62]. Их обсуждению посвящено много работ, например [10,11,18,25], однако до сих пор их влияние на практику поиска полезных ископаемых не удалось преодолеть. Именно они диктуют, какие вопросы можно и нужно ставить, как их надо решать и как оценивать ответы на них. По-видимому, сейчас важно, прежде всего, обеспечить модификацию этой устаревшей парадигмы [57,62].

6. Об основной идее общей теории поиска полезных ископаемых. Анализ практических приемов поиска полезных ископаемых показывает [10,12,20,23], что поиск можно строить, опираясь на отношения между телами полезных ископаемых, непосредственное обнаружение которых связано с большими затратами, и телами-индикаторами, непосредственное обнаружение которых можно провести без больших затрат. В первую очередь можно использовать

простейшие отношения: включения, ближайшего соседства, соседства, строгого порядка, одного уровня. При поиске тел индикаторов можно использовать как принцип аналогии (искать тела, сходные с некоторыми фиксированными телами), так и принцип исключительности (искать тела, отличные от некоторых фиксированных тел) [59]. При этом можно использовать формальные приемы, разрабатываемые в связи с распознаванием образов [27] и планированием (направлением) экспериментов [32]. Следует различать три стратегии поисков: единичную, частичную и полную, когда речь идет об обнаружении в заданной области поисков одного, нескольких или всех тел полезных ископаемых фиксированного класса.

7. Основные предположения и цели общей теории поиска полезных ископаемых. До сих пор нами рассматривались только связанные поиски, когда заданы область поиска и объекты поиска, которые обязательно включаются в эту область [12, 20, 23, 24]. Область поиска рассматривалась как часть геологического пространства, обладающая некоторыми свойствами, а объекты поиска задавались как часть этой части, относящиеся к некоторому фиксированному классу [36, 37]. Предполагалось, что имеют место две схемы поиска: прямая, когда от области поиска сразу же переходят к объектам поиска или их частям, она связана с большими затратами, и косвенная, когда выделяются вспомогательные объекты и области поисков, она должна быть связана с малыми затратами. Прямая схема строится на основании равномерного исследования области поиска прямым опробованием. Считались известными результаты прямой схемы и речь шла о построении косвенной схемы, причем простейшей, учитывающей только отношения включения между геологическими телами. Таким образом рассматривались две цели:

1. Равномерное опознание области, заранее разбитой на отдельные тела.

2. Построение косвенной схемы поисков.

Иначе говоря, предполагалось, что в одних областях поиска реализуется прямая схема и строится косвенная схема поиска, которая затем используется в других областях поиска, относящихся к тому же классу. Прямая схема поиска считалась един-

ственной, предполагалось, что косвенных схем поиска может быть много, нужная косвенная схема должна выбираться из экономических соображений.

8. О выборе направлений исследований по общей теории поисков полезных ископаемых. Ниже дается перечень отдельных направлений наших исследований по ОТП, их краткая характеристика и соображения о дальнейших исследованиях. Этот перечень может, как нам представляется, служить описанием содержания ОТП. Следует отметить, что при разработке отдельных направлений приходилось учитывать, помимо прочего, реальные возможности исполнителей и отношение ведущих геологов к постановке тех или иных исследований [18,25].

9. О языке общей теории поисков полезных ископаемых. В качестве языка для ОТП оказалось возможным выбрать язык, основы которого были предложены в [9,10,36,37]. В качестве фундаментальных были использованы понятия о геологическом пространстве и физическом времени. В качестве основных вспомогательных понятий использованы понятия теории множеств, геометрии и математической физики. Уточнено понятие извлекаемой и неизвлекаемой пробы в геологическом пространстве и представление об измерении свойств в точках геологического пространства с учетом способа выделения, формы, размеров и ориентации проб, а также [32]. Уточнены представления о расстоянии и мерах сходства между точками пространства. Уточнены понятия геологической границы и геологического тела, их характеристик и свойств, а также взаимоотношений двух границ и двух тел, двух множеств границ, двух множеств тел в признаковом, геологическом пространствах и во времени. Экспериментально фиксируемые и выводимые: бинарные и  $n$ -арные. Введены представления об операциях над геологическими границами и телами (выделение, описание, вещественно-координатные преобразования, разбиение, группирование и другие [12,24]). По-видимому, в ближайшее время следует, прежде всего, дать систематическое изложение результатов по построению этого языка с подробными геологическими и экономическими комментариями, еще раз рассмотреть возможности иных подходов к построению языка ОТП.

До сих пор некоторые исследователи считают, что формализацию геологических понятий следует вести, начиная с частных понятий, используемых в связи с конкретными задачами, предлагают строить язык ОПГ снизу, опираясь на такую основу, как набор существующих геологических диалектов [8]. Особо следует выяснить возможности использования предлагаемого языка в различного рода информационно-поисковых системах [23].

10. 0 схеме разбиения поиска полезных ископаемых на стадии и этапы. Схема разбиения поиска полезных ископаемых на стадии и этапы, на отдельные отрезки работ, является, как известно, основой для организации, проведения и осмысливания поисковых работ [49,23 42,46]. Она составляет логическую базу ОПГ. Существует несколько, вообще говоря, различных традиционных схем, которые, как полагают, являются усовершенствованными вариантами друг друга [42, 45, 46, 50]. Все они служат, как нам представляется, целям фиксации сложившейся практики работ и содержат три стадии: региональные, поисковые и разведочные исследования. Региональная стадия делится на три этапа: мелкомасштабные, среднемасштабные и крупномасштабные работы. Поисковая стадия делится на два этапа: поисковые и поисково-разведочные работы. Разведочная стадия делится на три этапа: предварительные, детальные и эксплуатационные исследования. Разные схемы отличаются друг от друга содержанием отдельных этапов (что задано, что делается, в чем состоит результат) [54]. По-видимому, эти схемы разбиения содержат в себе в неясной форме отдельные элементы как прямой, так и косвенной схем поиска полезных ископаемых. Ясно, что затруднительно строить и совершенствовать схему разбиения поиска полезных ископаемых, исходя из сложившейся практики работ, если предварительно не оговорить хотя бы минимальные теоретические требования, которым эта схема должна удовлетворять. В [12, 23,24] сформулированы такие требования (отдельные отрезки и связанные совокупности отрезков работ должны иметь: однозначно фиксируемое начало и конец; однозначное описание заданий; объективные прямые и косвенные оценки качества исполнения работ и т.д.). В [23] предложена схема разбиения поиска полезных ископаемых на стадии и этапы, удовлетворяющая

этим требованиям. По своим исходным посылкам эта схема, по-видимому, близка к схеме разведки, предлагаемой в [53]. В соответствии с [23,24] различают рекогносцировочные работы, связанные с формулировкой задания на поиск (фиксация области поиска, обоснование гипотезы о включении объектов поиска в область поиска) и поисковые работы. Схема разбиения поиска на стадии осуществляется на основе перехода из некоторой области поиска к некоторому объекту поиска, который далее рассматривается как область поиска и т.д. (например, в фиксированной провинции отыскивается территория, на территории — район и т.д.). Выбор числа стадий, промежуточных областей и объектов поиска проводится в соответствии с заданием начальной области поиска и конечного объекта поиска, экспериментальных и теоретических средств, а также имеющегося экспериментального материала. Каждая стадия делится на четыре этапа. Первый этап связан с выделением в фиксированной области поиска множества объектов поиска, второй — с разделением объектов поиска на перспективные и прочие, третий — с упорядочением перспективных объектов поиска по значимости, четвертый — с оценением объектов поиска (или, в конечном счете, объекта эксплуатации). Каждый этап делится на три отрезка: первый — теоретический, он связан с выбором схемы наблюдений (сети и набора свойств); второй — экспериментальный, с проведением полевых исследований; третий — теоретический, с решением основной задачи этапа и выдачей установки и рекомендаций по проведению первого отрезка работ следующего этапа. Для каждого этапа каждой стадии фиксируется, что считается заданным перед проведением этапа, в чем состоит задача этапа, в чем состоят и как представляются результаты этапа, вещественные и информационные, с какими формальными и математическими задачами связан этап, состояние и перспективы развития теоретических представлений по выбору и оценке алгоритмов решения математических задач этапа. Эта схема разбиения поиска полевых ископаемых на стадии и этапы представляется сейчас наиболее подходящей. По-видимому, в ближайшее время следует, в первую очередь, заняться уточнением существа работы на отдельных отрезках с экономических позиций, обоснованием выбора прямых и косвенных показателей качества выполнения отдельных отрезков работ [24]. Возможно следует

рассмотреть и основные трудности реализации прямой схемы поисков полезных ископаемых.

II. Об описании областей и объектов поиска. Исходя из [12], уточнены представления об исходном экспериментальном задании геологических тел. Оно сводится к заданию матрицы "пробы-свойства" с указанием характеристики сетей выделения и описания (подробность, правильность, содержание). Уточнены две целевые установки описания геологических тел: для хранения, для проведения операций сравнения и других операций. Заново сформулированы правила описания (объективности, разделения на обязательную и произвольные части, приоритета неизвлекаемых проб, одной структуры, последовательных приближений в получении предельного описания, сильной независимости характеристик описания, выбора информативных). Уточнены представления о задаче описания геологических тел (построение процедуры получения из исходного экспериментального задания последовательных приближений к предельному описанию, и построения процедуры последовательного выбора информативного описания). Уточнены представления о вещественно-координатных преобразованиях под исходным экспериментальным заданием геологических тел, о зависимости характеристик описания от этих преобразований. Уточнены представления о принципиальной схеме формального описания геологических тел. Эта схема предполагает три уровня описания любого тела: как простого, как сложного, состоящего из нескольких простых тел и как элемента некоторого другого сложного тела. Кроме того, описание делится на геометрическое и вещественное, теоретическое и гипотетическое (см. таблицу I). Построены некоторые частные алгоритмы для получения отдельных характеристик описания. Многие вопросы описания геологических тел, в том числе и общего характера (например, соотношение геометрического и теоретико-множественного подходов, зависимости характеристик и др.) остаются до сих пор спорными [24]. По-видимому, в первую очередь следует сейчас заняться именно этими вопросами. Необходимо также разработать способы постановки задач на построение отдельных характеристик геологических тел, например, формы, изменчивости. До сих пор при таком построении, следуя традициям, занимались изобретением

различных показателей, минуя постановку задач [60].

Т а б л и ц а I

Теоретическое	Простое	Геометрическое	Центр масс, форма, размер, ориентация.
		Вещественное	Одномерное, многомерное, бескоординатное, координатное.
	Сложное	Геометрическое	Перечень структурных элементов, конфигурация структурных элементов, решетка, ориентировка.
		Вещественное	Компонентный состав, конфигурация вещественных элементов.
	Внешнее	Геометрическое	Граница, относительное расположение.
		Вещественное	Граница, относительное расположение.
Гипотетическое	Возраст	Геометрико-вещественное	Выводится из теоретического с помощью гипотез.
	Генезис	Геометрико-вещественное	
	Соц. - эконом. знач.	Геометрическое	
		Вещественное	

12. 0 классификации и районировании областей и объектов поиска. Исходя из [10,12], уточнены представления о постановке и решении задач на построение классификаций тел с учетом процедур их выделения и описания. Уточнены представления о целях перечислительных и диагностических классификаций (для указания всех возможных и различных, с точки зрения некоторого отношения неотличимости, объектов фиксированного множества, для организации исследований классов неотличимости по отдельным представителям, для экономической кодировки сведений о принадлежности объектов к классам неотличимости и описания их свойств; для предсказания одних свойств объектов через другие). Даны толкования "естественным", "правильным",

"научным" и другим классификациям. Уточнены общие и частные требования к перечислительным и диагностическим классификациям, сформулированы рекомендации по их построению. Большое внимание уделено оценке общего состояния классификаций, используемых сейчас при поиске полезных ископаемых (в частности, месторождений нефти и газа, урана, горных пород, тектонических структур, фаций и формаций, геофизических регионов и других) [9, 44]. Вскрыты, как нам представляется, достаточно ясно, причины неудовлетворительного состояния этих классификаций: отсутствие понятий, фиксирующих множество классифицируемых объектов, четких целевых установок, использование субъективных свойств, нарушение необходимых формальных требований, крайне бедные изобразительные возможности, отсутствие экспериментальных и теоретических исследований, связанных с проверкой соответствия классификаций целям и формальным требованиям). Эти исследования пока не оказали какого-либо влияния на практику построения новых и использования старых неудовлетворительных классификаций, например, запасов, не остановили роста числа классификаций, которые являются субъективной интерпретацией дорогостоящих экспериментальных фактов. Это необходимо особо отметить, поскольку классификационные представления составляют основу всех отчетных документов по поисковым работам (пикетажки, колонки, разрезы, карты и т.д.). По-видимому, необходимо в дальнейшем, прежде всего, найти пути более действенного внедрения уже полученных результатов в сознание лиц, ответственных за организацию поисковых работ. Уделено внимание разработке способов задания областей и объектов поиска, однако до сих пор не удалось найти формальных аналогов таких множеств объектов как минерал, порода, тело полезного ископаемого, месторождение, формация и т.д. По-видимому, необходимо в дальнейшем в первую очередь, решить вопрос о разумности поисков таких аналогов. Не являются ли представления об этих множествах, которые мы стараемся формально уточнить, внутренне противоречивыми продуктами обобщения наших чувств? Знакомство с [8] дает некоторые основания полагать, что именно так и обстоит дело. Мало внимания уделено толкованию понятия свойств областей и объектов поиска, процедурам его измерения [32] на частях геологичес-

ких тел, через посредство проб (дифференциальные свойства) и на самих геологических телах (интегральные свойства). Нуждаются в уточнении и развитии представления о различных видах свойств (неформальные, формальные, множественные и одностепенные; неосвоенные и освоенные, вводимые аксиоматически и измеряемые, измеряемые опосредованно и непосредственно, арифметические и логические, просто фиксируемые и сложно фиксируемые и другие). Без таких уточнений оказывается затруднительным сформулировать ограничения на множество свойств, которые можно привлекать для построения перечислительных и диагностических классификаций. Необходимо также ввести представления о размерности свойств геологических тел, их зависимости от операций над исходным экспериментальным представлением тел, об информативности и других характеристиках свойств тел, об отношениях между этими свойствами. Уточнено представление о классификационном построении во множестве по заданной системе признаков через понятие об отношении эквивалентности. Дано представление о классификационном построении в геологическом пространстве по заданной системе признаков и расстоянию (районирование) [21]. Уточнены представления о типах классификационных построений на основании типа используемой системы признаков (классификации и систематизации, альтернативные и неальтернативные и т.д.). Введены, еще недостаточно аккуратно, представления о различных отношениях между двумя перечислительными классификациями (совпадения, пересечения, пустого пересечения, следования, эквивалентности и др.), а также представления об операциях над ними (сужение, укрупнение, разбиение на составляющие, вложение и т.д.). Исследованы возможности различных способов изображения простых (без ограничений, нет связи между свойствами) и сложных (с ограничениями, есть связи между свойствами) перечислительных классификаций (табличный, графический, точечный, строчками, логический, арифметический). Предложены характеристики перечислительных классификаций, позволяющие описывать относительную представительность экспериментального материала с учетом числа используемых свойств и масштабов их измерения. Однако эффективность этих характеристик нуждается в исследовании. Даны, еще недостаточно аккуратно, формулировки ос-

новых классификационных задач (разбиение системы признаков на независимые составляющие, выделение минимальной подсистемы признаков, построение эффективной нумерации классов (номерических функций), отыскание условий связи между признаками), а также указаны некоторые частные алгоритмы решения этих задач. Предложены схемы анализа существующих перечислительных и диагностических классификаций. Указаны способы использования перечислительных классификаций и номерических функций для хранения данных на ЭВМ [3].

13. О мерах сходства между областями и объектами поисков. Указаны необходимые условия сопоставления геологических тел (совпадение сетей для их выделения и описания по подробности и правильности, их пересечение по содержанию). С целью выработки теоретических представлений для постановки задач о выборе мер сходства [14], а также конструирования частных мер сходства, проанализированы представления о сходстве, которое используется сейчас в геологии, и дано дальнейшее развитие этих представлений. Оказалось, что проблему сходства толкуют двояко: широко - (выбор описания и функции сопоставления и узко - выбор функции сопоставления при заданном описании). Говорят о мерах сходства между двумя объектами, между объектом и множеством объектов и о мерах сходства между двумя множествами объектов. Дано уточнение понятия о функциях сходства и областях их применимости, введены частные виды этих функций (непараметрические и параметрические, простые и сложные однофакторные и многофакторные, вырожденные и невырожденные и другие). Предложена система аксиом, которым должны удовлетворять меры сходства по одному свойству и многим свойствам, построены явные формулы для некоторых классов мер сходства. Эта система аксиом нуждается в дальнейшем анализе и совершенствовании. Открытым остается вопрос о независимости аксиом. По-видимому, эта система аксиом нуждается и в дополнении. Проведен численный анализ часто используемых в геологии конкретных мер сходства, некоторые из них как оказалось, обладают чудовищными свойствами [24]. Даны определения некоторых отношений между двумя мерами сходства, которые отвечают одним и тем же или различным совокупностям

свойств (следования, эквивалентности, зависимости и т.д.). Сформулирован ряд задач, связанных с мерами сходства (определение числа и свойств объектов, имеющих фиксированную меру сходства с одним или несколькими заданными объектами, установление порядка на множестве объектов, построение компонент связности, установление следования, эквивалентности, зависимости между мерами и другие). Показано, что в узком смысле проблема выбора меры сходства может быть интерпретирована как проблема построения функций по экспериментальным данным с предварительным определением типа, вида и класса функции посредством фиксации аксиом для мер сходства [15]. Рассмотрены некоторые подходы к определению параметров в мерах сходства, даны оценки силы зависимости мер сходства от параметров. Следует считать, что в первую очередь сейчас необходимо описать и исследовать различные модификации процедур, которые проводятся с помощью мер сходства (сравнение двух геологических тел, сравнение двух множеств тел, выделение типичных тел, выделение представительного множества тел, разбиение множества тел, выделение групп тел [15], установление порядка на множестве тел, определение свойств геологических тел и других). Особо следует рассмотреть связь между отношением неотличимости, мерами сходства, мерами связи и вероятностными мерами. Совокупность этих конструкций отвечает математическим моделям непривычного для нас типа, которые являются основными для ОПП (мы привыкли иметь дело с математическими моделями, которые выражаются различными уравнениями, например, алгебраическими, дифференциальными или интегральными).

14.0 мерах связи между свойствами областей и объектов поиска. С целью выработки теоретических представлений для постановки задач на выбор мер связи между свойствами геологических тел [14], а также конструирования частных мер связи, проанализированы представления о связи между свойствами, которые используются сейчас в геологии, и дано дальнейшее развитие этих представлений. Оказалось, что можно различать общие меры связи, которые используются для проверки наличия связи независимо от ее типа и вида, а также частные меры связи, которые используются для проверки предположений о наличии связи опре-

деленного типа и вида. Кроме того, можно говорить о мерах связи, которые используются для проведения различных процедур (сравнение двух совокупностей свойств, выделение типичного свойства, выделение представительной совокупности свойств, выделение групп свойств, установление порядка на совокупности свойств и других). Можно говорить о связи между двумя свойствами, между свойствами и совокупностью свойств, между двумя совокупностями свойств. Рассмотрен вопрос об интерпретации совокупности свойств как одного свойства (задание отношения неотличимости, задание отношения порядка, задание меры сходства). Рассматривались пока только общие и частные меры связи между различными парами свойств с учетом, что каждое свойство, первое и второе, может быть арифметическим, логическим первого рода (ранговым) и логическим второго рода (номинальным, классовым, лингвистическим). Показано, что для разных пар свойств высказывания об отсутствии и наличии связи должны иметь свой смысл. Проведен численный анализ часто используемых в геологии мер связи, свойства некоторых из них оказались чудовищными [24]. Обсуждены возможности задания системы аксиом для общей и частной мер связи. Пока не удалось в общем случае указать в явном виде условие отсутствия связи (нельзя никаким образом (данным образом) использовать знание о значениях одного свойства для предсказания значений другого) и условие наличия связи (можно некоторым образом (данным образом) использовать знание о значениях одного свойства для предсказания значений другого свойства). Фактически пока удалось лишь подтвердить известное соображение о том, что плохо в конкретных задачах использовать модные меры связи, даже если определить для них доверительные интервалы. Видимо общие и частные меры связи следует рассматривать, в первую очередь, на случай связи одного свойства с совокупностью свойств, опираясь на понятие отображения множества и не прибегая, на первых порах, к представлениям о законах распределения. По-видимому, наибольший интерес представляют те меры связи, которые вводятся для проведения определенных процедур и которые фактически до сих пор не рассматривались. При этом основной интерес представляет опять-таки связь одного свойства с совокупностью свойств. Эту связь можно попытаться устано-

вить, опираясь на связь между отношениями неотличимости (разбиениями), мерами сходства и порядками, задаваемыми свойствами. Дано толкование парасвязи между множествами объектов: они называются парасвязанными, если в произвольном достаточно большом объеме по количеству и расположению объектов одного множества можно определить количество и расположение объектов второго множества [19].

15. О б о с н о в н ы х ф о р м а л ь н ы х з а д а ч а х о б щ е й т е о р и и п о и с к а п о л е з н ы х и с к о п а е м ы х . Поиск полезных ископаемых связан с многократным решением таких задач:

- а) выделение объектов поиска в области поиска,
- б) разделение объектов поиска на перспективные и прочие,
- в) упорядочение перспективных объектов поиска по значимости,
- г) оценивание объектов поиска.

Показано, что задача выделения может быть формально интерпретирована либо как задача распознавания двух образов (разделение точек области поиска на два образа: внутренние и (или) граничные точки и внешние точки объектов поиска), либо как задача группирования объектов с заданными свойствами (объединение геологических тел, выделенных в области поиска в группы, отвечающие объектам поиска, [15]). Ясно, что задача разделения также может быть формально интерпретирована как задача распознавания двух образов. Задача упорядочения формально интерпретируется как задача установления строгого порядка во множестве объектов. Задачу же оценивания объектов поиска с формальных позиций следует рассматривать как задачу планирования экспериментов, задачу указания таких экспериментальных процедур, которые устанавливают, на основе формальных определений, принадлежность объекта к фиксированному классу и связаны с минимальными затратами [32]. Указанные выше формальные задачи в различной математической трактовке уже неоднократно рассматривались во многих областях знаний. Выработка для этих задач таких математических трактовок, которые отвечали бы нашим целям, пока еще находится, по-видимому, в начальной стадии. Предложены схемы разбиения задач (а) - (г) на элементарные.

16. О распознавании областей и объектов поиска. Исследования с целью приспособления приемов распознавания образов к целям ОТП [12, 13, 22] и др. сводились к следующему. Дан обзор и оценка работ по применению методов распознавания при поисках полезных ископаемых. Рассмотрены общие, для всех областей знаний, и частные, для поиска, трудности приложения известных алгоритмов распознавания. Они связаны, прежде всего, с отсутствием четких правил постановки задач распознавания, с отсутствием способов описания особенностей экспериментального материала и априорных предположений, с отсутствием представлений о допустимых алгоритмах распознавания, а также критериев сопоставления и оценки этих алгоритмов. (Не ясно, имеет ли смысл сравнивать между собой различные алгоритмы решения плохо поставленных задач?). Дана трактовка понятия образа как подмножества исходного множества объектов, принадлежащих к группе классов неотличимости по совокупности прямых свойств. Введены представления о четкости образов с учетом способа задания исходного множества объектов и совокупности прямых свойств. Предложены правила, позволяющие определять, когда образы организованы четко, а когда нет, когда необходимы дополнительные исследования по заданию образов. Введены представления о различных ситуациях распознавания с учетом образной представительности экспериментального материала (в нем имеются представления всех образов, только некоторых, только одного, и нет указаний о принадлежности к образам), а также способа задания косвенных свойств и соотношения цен ошибок разного рода. Введены представления о двух подходах к решению задач распознавания: бюрократическом и индивидуальном, когда теоретические конструкции (например, материал обучения, информативная совокупность свойств) выбираются одинаково для всех объектов исходного множества, которые предстоит распознавать, и когда они выбираются различно для различных групп распознаваемых объектов исходного множества. Индивидуальный подход связан с вопросом разделения свойств, приписываемых объектам, на группирующие и распознающие с получением однородного исходного экспериментального материала. Введено представление о разложении образов на составляющие, о введении вспо-

могательных образов, о последовательном распознавании. Введены представления об относительной представительности экспериментального материала с учетом числа объектов, числа свойств, используемых для распознавания, числа различных значений этих свойств, а также максимальной меры сходства между объектами разных образов и средней меры сходства между объектами одного и того же образа. Предложены способы описания экспериментального материала через структурные функции от матриц сходства и связи. Введены представления о технологических условиях распознавания (число распознаваемых объектов, максимально допустимое время распознавания одного объекта, предельно допустимые проценты ошибок на исходном экспериментальном материале). Предложены способы фиксации априорных предположений через структурные функции от матриц сходства и связи. Введены представления о различных решающих правилах распознавания (детерминированных и статистических, структурных и неструктурных и пр.) их согласовании, а также допустимых решающих правилах (независимость от кодировки, широкая область применимости, устойчивость, эффективная вычислимость и др.). Предложены критерии оценки устойчивости и качества решения задач распознавания, опирающиеся на результаты всех возможных допустимых разбиений исходного экспериментального материала на материал обучения и экзамена. Предложены частные способы отыскания информативных совокупностей свойств, построены частные решающие правила. Разработана схема построения автоматизированной системы для постановки и решения задач распознавания, опирающаяся на альтернативный набор априорных предположений. Эта схема включает в себя, помимо прочего, различные частные способы выбора материала обучения, мер сходства и связи, информативных совокупностей свойств, решающих правил. Построен примитивный вариант этой системы. Предложена новая постановка задачи распознавания, когда в исходном материале не указана принадлежность объектов к образам, но известны некоторые общие свойства образов. В частном случае, связанном с поиском исключительных месторождений, построен комплекс алгоритмов для решения таких задач [59].

17. О б у п о р я д о ч е н и и о б л а с т е й и о б ъ е к т о в п о и с к а . В целях разработки теорети-

ческих конструкций для постановки задач на упорядочение геологических тел [24] и построения частных алгоритмов упорядочения проанализированы представления, подходы и способы упорядочения геологических тел по возрасту и по экономическому значению [6,7,29] и др. Установлена связь задачи упорядочения геологических тел с проблемой группового выбора и проблемой полезности [41]. Дана общая постановка задачи упорядочения как задачи достроения структуры: задано множество геологических тел, описанных с точки зрения некоторой совокупности свойств, и множество бинарных отношений между телами, которые определены на некоторой совокупности подмножеств тел, требуется определить эти отношения на всем множестве этих тел. Рассмотрены общие подходы к решению такой задачи за счет использования обобщенных законов сокращения и приведения высказываний об отношениях (простое достроение), а также за счет использования соотношений между свойствами геологических тел, находящихся в определенных отношениях (сложное достроение). Рассмотрены возможности установления мер сходства структурными матрицами, описывающими структуру множеств. Задача достроения структуры на множестве формально интерпретирована как нахождение среди всех допустимых структурных матриц такой, которая имеет максимальную меру сходства с заданной структурной подматрицей. Рассмотрен частный случай простого достроения, когда множество бинарных отношений между геологическими телами содержит отношения: лежат на одном уровне, лежит выше (ниже), включается (включает), переслаиваются, находятся в сложном отношении. Рассмотрен частный случай сложного достроения структуры на множестве, когда множество бинарных отношений между геологическими телами содержит только отношение: имеет большее (меньшее) значение. Один из частных алгоритмов сложного достроения связан с номерическими функциями и позволяет устанавливать аналогичное отношение и между свойствами геологических тел. Введено представление о поиске структурных закономерностей.

18. О б о ц е н и в а н и и о б л а с т е й и о б ъ е к т о в п о и с к а . Проведен анализ существующих способов подсчета запасов полезного ископаемого разных категорий, результаты которого используются для оценки зна-

чения геологических тел (например, месторождений, участков, районов, территорий, провинций и пр.) [34,55 и др.]. Установлено, что этот подсчет опирается на различные конкурирующие между собой формулы, которые построены на основе более или менее правдоподобных рассуждений. Эти формулы нельзя вывести из каких-либо других или же получить на основе обработки экспериментальных данных. Они связывают истинные запасы полезного ископаемого внутри геологического тела с различного рода характеристиками этого тела, вычисляемыми на основании экспериментальных данных. Известно, что экспериментально могут быть определены только извлекаемые запасы полезного ископаемого, величина которых зависит от способа извлечения. Построены программы для подсчета истинных запасов полезного ископаемого на основе различных формул, проведены массовые подсчеты для уже отработанных месторождений. Эти подсчеты показали, что вычисленные по формулам и извлекаемые запасы полезных ископаемых не увязываются друг с другом [20]. Следует считать, что известные сейчас формулы подсчета запасов полезных ископаемых, для любых категорий, могут рассматриваться только как весьма спорная основа для обоснования экспертных суждений. С целью выработки теоретических представлений для постановки задачи на оценивание геологических тел [1,29,33,51,52,58 и др.] введены представления о прямых и косвенных оценках, причем одинаковым образом, для любых геологических тел (месторождений, участков, районов и пр.). Среди прямых оценок выделены простые и сложные (если оценивание, например, территории проводится с учетом входящих в нее районов, то мы имеем дело с простой оценкой, если же оценивание территории проводится с учетом входящих в нее месторождений, то со сложной оценкой). В первую очередь необходимо договориться о простых прямых оценках и только после этого строить другие оценки. Показано, что прямые оценки данного геологического тела должны зависеть от характеристик самого тела, характеристик тел, выделяемых в нем, и от характеристик того геологического тела, которое его включает. Помимо этого они должны зависеть от технологии действий над данным геологическим телом. Косвенные же оценки данного геологического тела должны зависеть только от характеристик самого тела и от того геологического

тела, которое его включает, а также должны опираться на учет особым образом полученного и зафиксированного предыдущего опыта. Дана формальная интерпретация задачи подсчета запасов полезных ископаемых для месторождений как двух задач распознавания: определение оптимальной технологии извлечения и определения количества полезных компонент, которые могут быть получены при этой технологии. Поскольку оптимальная технология выбирается из фиксированного перечня, который со временем меняется, возникает вопрос о пересчете уже отработанных месторождений к новым технологиям. Этот вопрос, по-видимому, нельзя решить, если не предусмотреть при обработке месторождений специальных исследований. Аналогично будет обстоять дело с оценкой перспективности провинций, территорий и пр. Эта оценка так же должна определяться с учетом технологии действий (например, территория может быть перспективной с учетом неструктурных залежей нефти и газа и не перспективной с учетом только структурных залежей нефти и газа [55]). До сих пор нет ясности, в каких единицах можно и нужно ли проводить оценку геологических тел: физических, условных или стоимостных? Особо таких тел, которые сами не имеют промышленного значения, но играют роль эталонов при поиске.

19. Об управлении поиском полезных ископаемых. Рассмотрены общие предпосылки для формулировки условий прекращения поиска на некоторой стадии и условий перехода от стадии к стадии. Обсуждены различные подходы к построению совместного учета коэффициентов удачи и коэффициента изученности. Каких-либо окончательных суждений об управлении поиском полезных ископаемых получить не удалось [7, 26, 47]. Остается не ясным, даже с общих позиций, каким образом следует конкретно строить указанные условия и критерии без специальных исследований на полигонах, а также дублирования поисковых работ.

20. Об организации поиска полезных ископаемых. Рассмотрены вопросы соответствия существующей организации поисков полезных ископаемых тем теоретическим представлениям о поиске полезных ископаемых, о которых речь шла выше. Обсуждены возможности специализации отдельных организаций по стадиям: по геологическим ти-

пам областей и объектов поиска; по этапам: по роду деятельности (теоретическая (постановка задач, решение задач), экспериментальная (по методам), по характеру деятельности (производство, производство и наука).

### З а к л ю ч е н и е

Как нам представляется, предложенное выше схематическое описание теории поисков полезных ископаемых, с учетом общей части [43], может служить основой для обсуждения содержания и основных конструкций этой теории, дает основу для систематизации и оценки фактов и результатов по поиску, а так же позволяет увидеть путь совершенствования организации и управления поиском.

### Л и т е р а т у р а

1. АГОШКОВ М.И., ХРУЩЕВ Н.А. Критерии экономической эффективности геологоразведочных работ. Изв. ВУЗов, "Геология и разведка", №12, 1972.
2. АКОФ Р., САСНЕНИ М. Основы исследований. М., "Мир", 1971.
3. АМЕЛЬКИН В.А. О представлении геологической информации в машинной памяти. - Сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.
4. БАЖЕНОВ Л.Б. Строение и функции естественнонаучной теории. - Сб.: Синтез современного научного знания, М., "Наука", 1973.
5. БИРЮКОВ В.И., КОСОВ Б.М., ХРУЩЕВ Н.А. Рациональная последовательность геологоразведочных работ. "Советская геология", №4, 1972.
6. БОРОВИКОВ А.М., ВОРОНИН Ю.А., ГОРЕЛОВА Н.Г. и др. Стратиграфия и математика, НТИГ ДВНЦ АН СССР, Хабаровск, 1974.
7. БОЧАРОВ В.В., ФОКИН В.И. Планирование и финансирование геологоразведочных работ. М., "Недра", 1972.

8. Геологический словарь. Т. I и 2, М., "Недра", 1973.
9. ВОРОНИН Ю.А., ГОЛЬДИН С.В. Вопросы теории конечных геологических классификаций. - В сб.: Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики. Сборник трудов. ИГиГ СО АН СССР, Новосибирск, 1964.
10. ВОРОНИН Ю.А., АЛАБИН Б.К., ГОЛЬДИН С.В. и др. Геология и математика. Ч. I, Новосибирск, "Наука", 1967.
11. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. Вопросы теории формационного анализа ВИНТИ. Новосибирск, 1968.
12. ВОРОНИН Ю.А. Теоретические основы и классифицирование геологических тел. Дисс. на соиск. ученой степени доктора физ.-мат. наук, ИГиГ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
13. ВОРОНИН Ю.А., ИОНИНА Н.А., КАРАТАЕВА Г.Н. и др. "Геология и математика." Ч.2, Новосибирск, "Наука", 1970.
14. ВОРОНИН Ю.А., МАРАСУЛОВ А.Ф., УМАРОВ Р.Д., ХАЛИКОВ А.К. Введение мер сходства и связи для решения геофизических задач. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. II, Новосибирск, 1971.
15. ВОРОНИН Ю.А., АЛАБИН Б.К. О постановке и решении задач группирования. - Сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, 1972.
16. ВОРОНИН Ю.А., АМЕЛЬКИН Ю.А., ХУРРАМОВ А.Д. О математическом обеспечении ЭВМ для решения задач построения функций по экспериментальным данным. - В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972.
17. ВОРОНИН Ю.А., БОРОВИКОВ А.М., САЛИН Ю.С., СОЛОВЬЕВ В.А., ТИТОВ А. О теоретическом совершенствовании

стратиграфических построений с помощью моделирования на ЭВМ. - В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, 1972.

18. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. О генетическом и агенетическом направлениях в геологии. ВИНТИ, № 3934-72 Деп. Новосибирск, 1972.
19. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. Фации и формации. Парагенезис. Новосибирск, "Наука", 1972.
20. ВОРОНИН Ю.А., ЖИГАРЛОВСКИЙ И.М., КУСОВ А.Р., ФЕЙГЕНБЕРГ С.Д. Теоретические вопросы, связанные с применением математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых. - Сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972.
21. ВОРОНИН Ю.А., КОЗЛОВА О.С. О математическом обеспечении ЭВМ для решения задач районирования. - В сб.: О математическом обеспечении ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972.
22. ВОРОНИН Ю.А., МАРАСУЛОВ А.Ф., ТИТОВ А.А., ШЕВЧЕНКО Н.Г. О математическом обеспечении ЭВМ для отыскания оптимальных подпространств с целью решения задач распознавания. - Сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, 1972.
23. ВОРОНИН Ю.А. К проблеме создания автоматизированной системы для решения задач поиска полезных ископаемых. - Сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.
24. ВОРОНИН Ю.А., БОРОВИКОВ А.М., ЧУВАКОВ В.И. и др. Программа и методические разработки к курсу "Применение математических методов и ЭВМ при поисках и раз-

ведке полезных ископаемых", Ротапринт КОМЭ МГ  
Каз. ССР, Алма-Ата, 1973.

25. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. Методологические вопросы применения математических методов и ЭВМ в геологии. Новосибирск, "Наука", 1974.
26. ЗАБАРИНСКИЙ П.П., КОЦИР Е.В., САЗОНОВ И.Я. и др. Геолого-экономическая эффективность поисково-разведочных работ и методы ее опробования. Изв. ВУЗов, "Нефть и газ", №12, 1970.
27. ЗАГОРУЙКО Н.Г. Методы распознавания и их применения. М., "Сов. Радио", 1972.
28. ИВАНКИН П.Ф. О системном подходе в геологических исследованиях. "Сов. геология", №8, 1973.
29. ЛЕВОНИК Б.С. Вопросы экономической геологии. Изв. АН СССР, М., 1963.
30. МАКСИМОВ М.М. Истоки учения о рудных месторождениях. М., "Недра", 1973.
31. НИКИТИН Е.П. Объяснение функции-науки. М., 1970.
32. КАВАЛЕРОВ Г.И., МАНДЕЛЫШТАМ С.М. Введение в информационную теорию измерений. М., "Энергия", 1974.
33. КОБАХИДЗЕ Л.П. Экономика геолого-разведочных работ. М., "Недра", 1973.
34. КОГАН И.Д. Подсчет запасов и геолого-промышленная оценка рудных месторождений. М., "Недра", 1971.
35. КЛАУС Г. Мышление научное и ненаучное, рациональное и иррациональное. Научные доклады высшей школы. "Философские науки", №4, 1971.
36. КОСЫГИН Ю.А., ВОРОНИН Ю.А., СОЛОВЬЕВ В.А. Опыт формализации некоторых тектонических понятий. "Геология и геофизика", №1, 1964.
37. КОСЫГИН Ю.А., ВОРОНИН Ю.А. Некоторые фундаментальные понятия структурной геологии. "Геотектоника", №1, 1965.

38. КОСЫТИН Ю.А., СОЛОВЬЕВ В.А. Проблема усовершенствования геологического языка и "математизации" геологии. Изв.АН СССР. Сер.геол. №11, М., 1967.
39. КОСЫТИН Ю.А., СОЛОВЬЕВ В.А. Статистические, динамические и ретроспективные системы в геологических исследованиях. Изв. АН СССР, Сер.геологическая, №6, М., 1969.
40. КРУТЬ И.В. Исследование оснований теоретической геологии. М., "Наука", 1973.
41. ЛЬЮС Р.Д., РАЙФА Х. Игры и решения. М., ИЛ, 1961.
42. ПЕРВАГО В.А. Стадийность геолого-разведочных работ. "Разведка и охрана недр", с.1-3, №1, 1972.
43. ПОГРЕБИЦКИЙ Е.О., ИВАНОВ Н.В., СКРОПЫШЕВ А.В. и др. Поиск и разведка месторождений полезных ископаемых. М., "Недра", 1968.
44. ПОКРОВСКИЙ М.П. Опыт анализа и оценки классификаций месторождений полезных ископаемых. Диссертация на соискание ученой степени кандидата гео.-мин.наук, СТИ, Свердловск, 1974.
45. ПОПОВ Г.В., ГОЛЬДФЕЛЬД А.И. Основные стадии геолого-разведочных работ. "Разведка и охрана недр", №7, 1972.
46. ПОЯРКОВ И.Э. О стадийности геолого-разведочного процесса. "Разведка и охрана недр", №6, 1973.
47. САДОВСКИЙ В.Н. Основания общей теории систем. М., "Наука", 1974.
48. САЛЪЕ Е.А., ГОЦ А.С. Организация и планирование геолого-разведочных работ. М., "Недра", 1970.
49. СИДОРЕНКО А.Ц. Повышение экономической эффективности геолого-разведочных работ - главная задача. "Разведка и охрана недр", №3, 1974.

50. СМЕРНОВ В.И. Геологические основы поисков и разведок рудных месторождений. Изд. МГУ, 1957.
51. СОЛОВЬЕВА Е.А. Научно-техническая революция и социально-экономические проблемы использования минерально-сырьевых ресурсов. - Сб.: Социально-экономические проблемы рационального использования недр., вып. I, РТИ ЛПИ, 1973.
52. СОЛОВЬЕВА Е.А. Некоторые методические вопросы стоимостной оценки минеральных ресурсов. - Сб.: "Ценообразование: теория и методология", изд. ЛГУ, 1974.
53. СУРАЖСКИЙ Д.Я. К вопросу о стадийности разведки и классификации запасов твердых полезных ископаемых. "Сов. геология", №2, 1974.
54. Требование к содержанию и результатам геолого-разведочных работ по этапам и стадиям (методические указания по проведению отдельных этапов геолого-разведочных работ). Твердые полезные ископаемые, ч. I, Металлы, ч. 2, Неметаллы, М., "Недра", 1967.
55. ФЕЙГИН М.В. Нефтяные ресурсы, методика их исследования и оценка. М., "Наука", 1974.
56. ФОТИАДИ Э.Э., ВОРОНИН Ю.А., КУРБАНАЕВ М.С. Состояние, тенденции и перспективы развития комплексной интерпретации геофизических данных. Тезисы семинара "Применение математических методов и ЭВМ в геологии"; КазИМС, Алма-Ата, 1974.
57. ХАРВЕЙ Д. Научное объяснение в географии. М., "Прогресс", 1974.
58. ХРУЩЕВ Н.А. Основные принципы экономической оценки месторождений полезных ископаемых. - Сб.: Социально-экономические проблемы рационального использования недр, вып. I, РТИ ЛПИ, 1973.

59. ЧЕРЕМИСИНА Е.Н. Применение математических методов и ЭВМ для решения задач направления опробования при поиске полезных ископаемых. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1973.
60. ЧЕТВЕРИКОВ Л.И. Оценка анизотропии наблюдаемой изменчивости параметров тел полезных ископаемых. Изд. ВУЗов, Горный журнал. №4, 1972.
61. ЧЕТВЕРИКОВ Л.И. Некоторые методологические вопросы современной геологии. Научные доклады высшей школы. "Философские науки" №1, 1974.
62. ШАРАПОВ И.П. Проблемы научной революции в геологии. - Сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.

Ю. А. Воронин, И. А. Еганова, Э. А. Еганов

## К ПРОБЛЕМЕ УПОРЯДОЧЕНИЯ ОБЪЕКТОВ В ГЕОЛОГИИ

### В в е д е н и е

Многие задачи геологии, например, задачи определения относительного возраста геологических тел [1] и их экономической оценки [2] сводятся к установлению отношения строгого порядка на классах эквивалентности геологических тел. Установление такого отношения предшествует и решению многих задач геологии, например, задаче выделения формаций [3]. Для решения таких задач упорядочения в геологии разработан ряд приемов. Эти приемы, возникшие вне постановки задачи упорядочения, на основе различного рода правдоподобных рассуждений, содержат в себе ряд неясностей и спорных моментов. Представляет интерес попытаться получить общее формальное описание проблемы упорядочения объектов применительно к нуждам геологии с целью ее методологического и общетеоретического анализа, выяснения перспектив постановки задачи об упорядочении объектов, получения некоторых частных математических постановок и решений для этой задачи. Этому и посвящается предлагаемая статья.

I. Формулировка исходного базиса задачи упорядочения  
и ее математического решения

Пусть  $A$  – некоторое множество объектов  $a_i, i=1,2,\dots,N$ ,  
 $F$  – некоторое множество свойств  $f_\alpha, \alpha=1,2,\dots,M$ ,  $R$  – не-  
которое множество бинарных отношений  $r^h, h=1,2,\dots,N$  между  
элементами множества  $A$ .

Будем полагать, что для любого свойства  $f_\alpha \in F$  задана  
экспериментальная процедура на множестве рассматриваемых объ-  
ектов  $A$ , в результате проведения которой каждому объекту  
 $a_i \in A$  однозначно ставится в соответствие одно из значе-  
ний  $f_\alpha$ , которое будем обозначать через  $f_\alpha(a_i)$ . Например,  
задается таблица:

Таблица I

свойства объекты	$f_1$	$f_2$	...	$f_M$
$a_1$	$f_1(a_1)$	$f_2(a_1)$	...	$f_M(a_1)$
$a_2$	$f_1(a_2)$	$f_2(a_2)$	...	$f_M(a_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$a_N$	$f_1(a_N)$	$f_2(a_N)$	...	$f_M(a_N)$

(1)

где каждому объекту  $a_i$  ставится в соответствие  $M$ -мер-  
ный вектор

$$F(a_i) = (f_1(a_i), f_2(a_i), \dots, f_M(a_i)). \quad (2)$$

Так что таблицу (1) можно представить как

$A$	$F$
$a_1$	$F(a_1)$
$a_2$	$F(a_2)$
⋮	⋮
$a_N$	$F(a_N)$

(3)

Сразу уточним, что мы будем понимать в дальнейшем под значением  $f_\alpha(a_i)$  свойства  $f_\alpha$ . Допустим, область изменения значений свойства  $f_\alpha$  разбита на  $n_\alpha$  интервалов, которые как обычно пронумерованы в порядке возрастания значений свойства  $f_\alpha$ . Таким образом, каждое значение  $f_\alpha(a_i)$  свойства  $f_\alpha$  принадлежит некоторому интервалу, номер которого и будет фигурировать далее в качестве этого значения свойства  $f_\alpha$ .

Кроме того, пусть  $A_k^i$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , — собственные подмножества  $A$ , причем их объединение  $A' = \bigcup_k A_k^i$  таково, что его дополнение  $A \setminus A'$  не пусто. Предположим, что каждой паре элементов  $\langle a_i, a_j \rangle$  из  $A_k^i$  на основе некоторой экспериментальной процедуры ставится в соответствие некоторое бинарное отношение  $r_{ij}^k \in R$ :

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow r_{ij}^k, \quad a_i, a_j \in A_k^i, \quad r_{ij}^k \in R. \quad (4)$$

Экспериментальные данные (3) и (4) будем считать исходным базисом задачи.

Условимся под проблемой упорядочения рассматриваемого множества объектов (множества  $A$ ) понимать задание на нем структуры на основе исходного базиса.

Под заданием структуры мы понимаем задание алгоритма, указывающего для каждой пары объектов  $\langle a_i, a_j \rangle$  множества  $A$  одно бинарное отношение  $r_{ij}^k \in R$ .

Напомним, что в исходном базисе паре объектов  $\langle a_i, a_j \rangle$  ставится в соответствие некоторое бинарное отношение  $r_{ij}^k \in R$  только в том случае, если  $a_i$  и  $a_j$  оба принадлежат одному и тому же собственному подмножеству  $A_k^i$ . Поэтому ситуация в исходном базисе такая: для пары любых двух элементов множества  $A$  либо вообще не указывается никакого бинарного отношения, либо указывается одно или несколько, как обычно, разных бинарных отношений из  $R$ . Так что поставленная задача не является тривиальной.

Как видим, в приведенной формулировке задачи нет никаких требований относительно искомой структуры, так что, естественно, существует множество различных решений. Нас могут интересовать лишь некоторые допустимые решения. В конкретных ситуациях нас могут интересовать лишь некоторые из допустимых решений, которые с точки зрения каких-либо критериев являются наилучшими. Очевидно, что эти представления о допустимых и наилучших решениях проблемы упорядочения объектов  $A$  можно формулировать различно.

Когда мы указываем какой-либо прием, позволяющий найти интересующее нас решение проблемы упорядочения объектов  $A$ , мы тем самым в неявном виде фиксируем представление о ее допустимых и наилучших решениях. Поскольку они формулируются неявно, то мы не можем исследовать насколько они разумны и не можем проверить формальную правильность своих действий при реализации указанного приема.

Таким образом, необходимо заранее дать явное определение для множества допустимых и наилучших решений проблемы упорядочения объектов  $A$ .

Заметим, что при попытке дать явные определения для множества допустимых и наилучших решений проблемы упорядочения объектов  $A$  нам необходимо, вообще говоря, иметь общие представления о том, какие определения следует считать разумными. Очевидно, что такие общие представления нельзя выдвинуть без учета того, в каких условиях и целях это упорядочение будет в дальнейшем использовано, без учета экспериментальных и теоретических возможностей и опыта. При этом всегда приходится искать компромисс между желанием и возможностями. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Имеется  $K$  литологических колонок, содержащих руду  $P$ . Множество  $A$  в данном случае образует множество литотел, каждое из которых встречается хотя бы в одной колонке. Совокупность литотел каждой отдельной колонки (обозначим ее для  $i$ -й колонки через  $A_i^!$ ) представляет собой собственное подмножество множества  $A$ :

$$A_i^! \subset A, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Литотела каждой колонки расположены в ней в определенной последовательности, например, в  $i$ -й колонке (см.рис. I):

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, \rho, \dots, a_{i_I}) \quad (5)$$

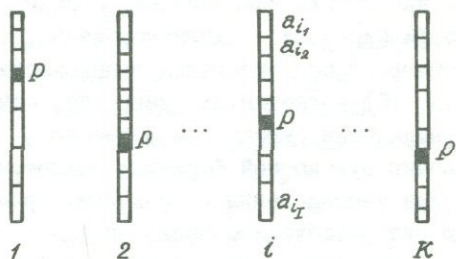


Рис. I

Можно выделить следующие отношения между элементами каждой колонки:

$r_{1,1}^1$ , - "литотело  $a_1$  лежит выше литотела  $a_{1,1}$ " (если в последовательности (5)  $a_1$  встречается только до  $a_{1,1}$ );

$r_{1,1}^2$ , - "литотело  $a_1$  лежит ниже литотела  $a_{1,1}$ " (если в последовательности (5)  $a_1$  встречается только после  $a_{1,1}$ );

$r_{1,1}^3$ , - "литотело  $a_1$  включено в литотело  $a_{1,1}$ " (если в последовательности (5)  $a_1$  встречается между  $a_{1,1}$ , так, например,  $(\dots, a_{1,1}, \dots, a_1, \dots, a_{1,1}, \dots)$ , другими словами, в (5) ни до  $a_{1,1}$ , ни после  $a_{1,1}$  литотело  $a_1$  не встречается);

$r_{1,1}^4$ , - "литотела  $a_1$  и  $a_{1,1}$  переслаиваются" (если в последовательности (5)  $a_1$  и  $a_{1,1}$  чередуются, например,  $(\dots, a_1, \dots, a_{1,1}, \dots, a_1, \dots, a_{1,1}, \dots)$ ).

Таким образом, множество бинарных отношений  $R$  в данном примере образует совокупность отношений  $\{r^1, r^2, r^3, r^4\}$ .

Вернемся к последовательности (5), которую задает некоторая  $i$ -я колонка. В соответствии с (5) каждое собственное подмножество  $A_i^j$ ,  $i=1, 2, \dots, K$ , некоторым образом упорядочено, тем самым множество литотел  $A$  частично упорядочено  $K$  раз.

Таким образом, экспериментальный, исходный базис задачи составляют:

- 1) множество литотел  $A$ ;
- 2) множество  $R$  бинарных отношений между элементами множества  $A$ ;
- 3)  $K$  разных, частичных, упорядочений множества литотел  $A$ .

Отметим, что фиксирование исходного базиса, особенно множества  $A$ , представляет самостоятельную интересную задачу.

Исходный базис (6) является, как известно, основой для решения задачи о выделении рудоносной формации.

Задача выделения рудоносной формации является одной из важнейших среди задач упорядочения в геологии. Прежде чем формулировать ее решение, необходимо предварительно обсудить проблемы, возникающие при выборе ее исходного базиса.

## 2. Задача выделения рудоносной формации

1. При поисках рудных тел, чтобы избежать издержек слепого опознания, основываются на индикаторах руд. Индикаторами являются самые разнообразные геологические тела с определенными характеристиками — химическими, физическими, минералогическими, петрографическими, морфологическими и т.д.

Планирование поисковых работ заключается в последовательном разделении заданной территории на перспективные и неперспективные участки, путем сокращения площади первых до оптимального размера. Это районирование ведется на основании разного рода индикаторов. Таким образом, перспективный участок есть область пересечения поверхности Земли с геологическим телом, в составе которого установлены те или иные индикаторы рудоносности. Участки ранжируются в зависимости от того, какого вида индикаторы рассматриваются и какого вида те тела, в которые они включены.

Одним из видов участков являются формации. Это геологические тела, представляющие ассоциации монопородных геологических тел (слоев, массивов), объединяемых некоторым отношением [3]. Последние можно формулировать разными способами, что приводит к выделению различных формаций как кон-

струкций, используемых в различных целях. При использовании понятия о формации для поисковых исследований выделяют пространственно связную группу породных геологических тел таким образом, чтобы в ее пределах оказалась рудная залежь. Тем самым объект "рудная залежь" заменяется более крупным объектом "рудовмещающая формация".

Выделение рудоносной формации, когда заданы признаки, отличающие данную формацию от других объектов и правило ее выделения, является тривиальной операцией.

Важно построение формации, т.е. отыскание этого правила и признаков.

Такая работа может быть проделана только на тех частях геологического пространства, где известны рудные залежи, а их окрестности изучены достаточно детально.

Поиск процедуры построения рудоносной формации сводится к отысканию индикаторов руды и того порядка, в котором эти индикаторы обычно располагаются по отношению к рудному телу. С другой стороны, определить, что некоторое геологическое тело является индикатором руды можно, лишь доказав, что оно имеет связь с рудой, т.е. всегда располагается по отношению к руде определенным образом. Порядок расположения индикатора может определяться как непосредственно по отношению к руде (скажем, индикатор всегда ниже руды и на расстоянии  $\leq \epsilon$ ), так и через посредников (скажем, руда всегда выше индикатора и если ниже индикатора есть объект  $\alpha$ ).

Таким образом, индикаторы могут быть простыми (единичное геологическое тело) и сложными (система ("бозвездие") геологических тел). Эти системы геологических тел, расположенных в определенном порядке относительно чего-то, могут быть "жесткими", т.е. такими, когда их ориентация, расстояния между их элементами и их структура не меняются, и "гибкими" — когда эти параметры системы колеблются в каких-то пределах.

2. Исходным базисом для построения рудоносной формации являются: а) заданные области (класс областей) геологического пространства (например, к литологических колонок); б) разбиение этих областей на монопородные тела (элементы множеств).

ва А, см. раздел I), которые потом предстоит сгруппировать в формации, и в) список отношений между монопородными телами (множество бинарных отношений R).

Если бы мы имели всего одну область с одним рудопроявлением, скажем, описание литологической колонки из N слоев, среди которых присутствует один или несколько слоев руды, то задача по выделению формации могла бы быть решена только с привлечением генетических представлений о рудообразовании. Это означает, например, что потребовалось бы из каких-либо (физико-химических) соображений представить процесс образования руды и создать модель следствий этого процесса в виде последовательности напластований. Эта последовательность состояла бы из n слоев, каждый из которых считался бы обязательным следствием хода процесса рудообразования. Наиболее наглядным примером такой последовательности является перечисление порядка выпадения солей при выпаривании раствора с заданным составом и концентрациями.

Затем данную модель (разумеется, если бы она оказалась разумной) потребовалось бы сравнить с описанием имеющейся колонки и выделить интервал, в котором на экспериментальной колонке обнаружались элементы колонки, полученной теоретически. Этот интервал и следовало бы принять за формацию (см. рис. 2), рассматривая в нем только те элементы (а, б, в, г, д), которые оказались обязательным следствием процесса рудообразования, считая остальные элементы "случайными".

Таким образом, в естественных условиях не соблюдаются идеальные обстоятельства чистого рудообразующего процесса. Слои, являющиеся необходимым следствием хода процесса, могут разбавляться слоями, возникшими в результате побочных наложенных явлений. Сам рудообразующий процесс геологу не известен и моделировать его возможно в самом лучшем случае лишь фрагментарно. Образ рудоносной формации (ее модель) в геологии выводится из экспериментального материала и поэтому одного разреза здесь недостаточно. В этих условиях экспериментальный материал представляется в виде набора естественных разрезов (колонок), что позволяет выбрать устойчивые (сквозные) элементы, считая, что повторение таких элементов на ряде разрезов не случайно, а отражает необходимость их появления в рудообра-

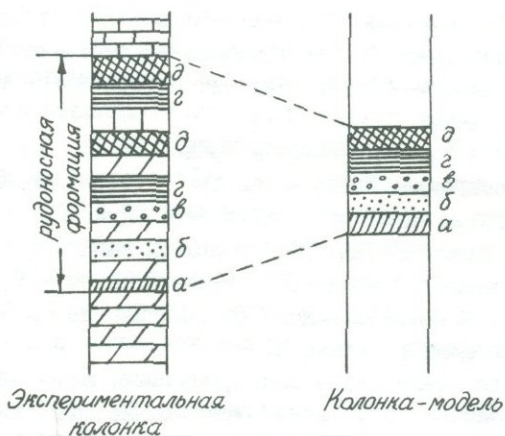


Рис. 2

зующем процессе I).

Здесь возникают первые трудности. Прежде всего неясно, насколько предъявляемые разрезы "адекватны" действительности. На них какие-то объекты отражены, а какие-то (и таких намного больше, чем отраженных) не учтены. Следовательно, залогом успеха по выявлению закономерно построенной ассоциации элементарных геологических тел является удача в выборе исходной классификации элементов [ A: U ] и обеспечение непересекаемости классов (см. п. I) в исходном базисе (6)). Задача выбора исходной классификации элементов [ A: U ] является самостоятельной, преднаучной и основывается на соображениях геолога, определяющих, что окажется важным для дальнейшего. Здесь во многом определяющими являются представления о ходе процессов рудообразо-

I) Возможно воспользоваться и одним разрезом, если формацию представить как целостный объект, включающий руду и обладающий дополнительным свойством, которое измеряется или целиком на формации или присуще каждому (или "каждому" в вероятностном смысле, например, каждому третьему из случайной выборки) образу, взятому из тела формации. Другими словами, вся формация рассматривается как один индикатор, включающий в себя руду или как сплошная однородная совокупность индикаторов одного вида. Примером могут служить формации, выделенные по признаку однородности слагающих слоев, например, красноцветные формации, карбонатные, терригенные и т. д.

вания. Если же имеются опасения о неверности таких представлений или сами представления вообще отсутствуют, то при выборе исходной классификации приходится стремиться к максимальной доступной детальности.

Ограничения ручного счета и сравнений на глаз выдвигают требования сокращать число классов  $[A:U]$ . Возможности машинной обработки приносят здесь некоторое облегчение, но все равно число классов  $[A:U]$  не должно быть очень большим. Поэтому основным требованием к представлению  $[A:U]$  является возможность последующего сокращения числа классов путем их последовательного слияния.

Список отношений между фиксированными классами (см. п.2) в исходном базисе (6)) выбирается так же, как классификация элементарных тел - на основе соображений об искомой структуре исследуемого множества геологических объектов. При работе с системой напластований здесь меньше опасений что-то упустить, так как возможных отношений совсем немного. Это, в основном, - "лежит выше", "лежит ниже", и объединение этих отношений в "переслаивается". Можно учитывать отношение "лежит на одном уровне" ("соседствует").

Эти три основных отношения можно детализировать - "лежит над, соприкасаясь", "лежит под, не соприкасаясь" и т.д.

3. Выше мы обсудили проблемы, связанные с фиксированием исходного базиса рассматриваемой задачи. Теперь перейдем непосредственно к самой задаче упорядочения, связанной с построением рудоносной формации.

Как было сформулировано в разделе I, решить задачу упорядочения - это значит указать структуру на множестве выделенных классов (множество A), исходя из экспериментального базиса<sup>I)</sup> или, другими словами, указать в данной задаче, как располагаются друг относительно друга выделенные классы пород. Так как весь экспериментальный материал, на котором основан исходный базис, относится только к областям рудопроявления, то тем самым мы задаем рудоносную формацию, указывая расположения рудного тела относительно остальных выделенных классов.

---

I) Отметим, что в рассматриваемой задаче отсутствует в исходном базисе множество свойств F (см. (2) в разделе I), к этому в дальнейшем вернемся.

Скажем еще несколько слов о допустимых и наилучших решениях. В задаче построения рудоносной формации наилучшим решением задачи упорядочения нам представляется такое, когда множество элементарных геологических тел, выделяемое классификацией  $[A:U]$ , упорядочивается полностью. Иначе говоря, когда ни один из классов  $[A:U]$  не является зря выделенным и всегда находится в фиксированном отношении к другим классам. При этом сама формация при наилучшем решении имеет оптимальные размеры: она не настолько мелка, чтобы так же, как и рудное тело, затеряться среди других образований и не слишком велика, чтобы при использовании ее давать какой-то эффект экономики.

Упорядочить все тела, выделяемые  $[A:U]$ , однако, нереально. Часть из них вовсе может не поддаваться упорядочению. Поэтому допустимым решением является то, которое из всей совокупности классов выделяет такие, которые все же обеспечивают требование оптимальности размеров формации. Возникает еще одно требование — классификация  $[A:U]$  должна быть достаточно "дешевой". Возможно, что оптимальная упорядоченность окажется осуществимой только на таких классах, само выделение которых сделает процедуру выделения формаций бессмысленной с точки зрения сокращения сил при поиске. (Разумеется, возможны познавательные задачи, при которых никакие затраты не будут являться чрезмерными).

### III. Два этапа задания структуры на множестве

В самой процедуре задания структуры на множестве объектов можно выделить два этапа.

На первом этапе исходный базис составляют:

- 1) заданное множество объектов  $A$ ; (7)
- 2) заданное множество бинарных отношений  $R$  между объектами этого множества;
- 3) заданные частичных упорядочений множества  $A$ .

Исходя из базиса (7), можно осуществить задание структуры на множестве  $A' = \bigcup_k A'_k$ , где  $A'_k$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ , — собственные подмножества  $A$ , на которых задана структура (см. п.3) в (7)) с помощью следующих операций с высказываниями, олицетворяющими бинарные отношения из  $R$ .

А. "Обобщение" высказываний :

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow r_{ij}^h. \quad (8)$$

Например, в некоторых литологических колонках литотело  $a_i$  лежит выше  $a_j$ , т.е. (см. пример в разделе I)

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow r^1,$$

а в остальных колонках  $a_i$  и  $a_j$  вместе не встречаются.

Обобщение этих высказываний может состоять в том, что мы можем предложить считать, что литотело  $a_i$  лежит выше литотела  $a_j$ , т.е.

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow r^1.$$

Сразу отметим, что такая возможная операция с высказываниями, разумеется, может оказаться неудачной для установления структуры на множестве А с точки зрения решения конкретной задачи, но это уже другой вопрос.

Б. "Сокращение" высказываний :

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \& r_{ij}^h \rightarrow r_{ij}. \quad (9)$$

Например, в одних колонках литотело  $a_i$  лежит выше, в других - лежит ниже литотела  $a_j$ , т.е.

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \& r_{h=1,2}^h.$$

Сокращение этих высказываний может состоять в том, что мы можем предложить считать, что литотело  $a_i$  лежит выше литотела  $a_j$ , если, например, оно лежит выше  $a_j$  в подавляющем большинстве колонок:

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \& r_{h=1,2}^h \rightarrow r^1.$$

Снова отметим, что сам способ сокращения высказываний относится к геологической части задачи и что от его выбора существенно зависит вид структуры, который будет установлен. Поэтому при выборе способа сокращения высказываний следует

учесть это и постараться выбрать его таким, чтобы он оказался приемлемым для решения конкретной задачи.

В. "Приведение" и "сокращение" высказываний:

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \& (r_{ik}^{h'} \& r_{kj}^{h''}) \rightarrow \& r_{ij}^h \rightarrow r_{ij}. \quad (10)$$

Например, ни в одной литологической колонке не встретились вместе литотела  $a_i$  и  $a_j$ , другими словами, в исходном базисе для пары литотел  $\langle a_i, a_j \rangle$  не задано никакое бинарное отношение из  $R$ . С другой стороны, известно, что литотело  $a_i$  лежит выше литотела  $a_k$ , а литотело  $a_k$ , в свою очередь, лежит выше литотела  $a_j$ . Тогда можно предположить считать, что литотело  $a_i$  лежит выше литотела  $a_j$ , т.е.

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow (r_{ik}^1 \& r_{kj}^1) \rightarrow r_{ij}.$$

В (10) приведен самый общий случай: учитываются расположения литотел  $a_i$  и  $a_j$  по отношению не к одному, а некоторому ряду тел, в результате отношение между  $a_i$  и  $a_j$  формулируется в виде сложного высказывания  $\& r_{ij}^h$ , которое затем сокращается.

На втором этапе к базису (7) добавляется еще задание совокупности некоторых свойств  $F$ , измеренных на всех объектах множества  $A$ . Задача второго этапа состоит в том, чтобы, во-первых, задать структуру множества  $A^{(1)}$ , полученную на первом этапе, с помощью совокупности свойств  $F$  и, во-вторых, на этой основе достроить структуру на всем множестве  $A$ . Дело при этом сводится к:

1) построению некоторых функций  $\Psi_t(F)$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , принадлежащих некоторому классу;

2) построению высказываний:

если  $\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \Psi_t(F(a_i)), \Psi_t(F(a_j))$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ,  $\iff r_{ij}$   
с учетом оптимизации некоторых приемов.

1) Напомним, что в общем случае дополнение  $A \setminus A'$  не пусто, см. 1.

Второй этап задачи упорядочения будем называть достроением структуры множества  $A$ .

#### IV. Задача достроения структуры множества $A$ .

I. Допустим, первый этап задания структуры на рассматриваемом множестве геологических объектов  $A$  уже пройден, т.е. каждому двум объектам из некоторого подмножества  $A' \subset A$  уже поставлено в соответствие одно бинарное отношение из множества  $R$ . Ниже мы подробно рассмотрим второй этап следующей простейшей задачи упорядочения.

Пусть  $A$  как обычно — некоторое множество, состоящее из  $N$  объектов, которые могут находиться в трех бинарных отношениях:

- $$\begin{aligned} 1) \text{ " } a_i \text{ лежит выше } a_j \text{ " } & - r_{ij}^1; I) \\ 2) \text{ " } a_i \text{ лежит ниже } a_j \text{ " } & - r_{ij}^2; \\ 3) \text{ " } a_i \text{ и } a_j \text{ - на одном уровне " } & - r_{ij}^0. I) \end{aligned} \quad (11)$$

Для всех объектов рассматриваемого множества  $A$  задана некоторая совокупность свойств  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ , другими словами, задана таблица (3).

Далее, на известном подмножестве  $A'$  множества  $A$  в результате первого этапа задана некоторая структура, реализующая только отношения (1) и (2) из множества бинарных отношений (11).

Мы можем занумеровать объекты из  $A'$  следующим образом: через  $a_1$  обозначим тот объект, который лежит выше всех остальных, через  $a_2$  — объект, лежащий ниже  $a_1$ , но выше всех остальных и т.д. Легко видеть, что при такой нумерации

$$\begin{aligned} \langle a_i, a_j \rangle & \rightarrow r_{ij}^0, \quad \text{если } i = j; \\ \langle a_i, a_j \rangle & \rightarrow r_{ij}^1, \quad \text{если } j > i; \\ \langle a_i, a_j \rangle & \rightarrow r_{ij}^2, \quad \text{если } j < i. \end{aligned} \quad (12)$$

1) В некоторых задачах упорядочения отношение  $r_{ij}^1$  формулируют как "  $a_i$  предпочтительнее  $a_j$  ", а  $r_{ij}^0$  — "  $a_i$  и  $a_j$  равноценны ", см., например, [4].

Таким образом, можно сказать, что структура на множестве  $A'$  задана некоторой нумерацией объектов  $A'$ . Другими словами, на  $A'$ , содержащем, допустим,  $n$  объектов, задано упорядочение:

$$P_0 = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle. \quad (13)$$

Так что второй этап задачи упорядочения объектов должен разрешить следующую задачу — найти рецепт такого линейного упорядочения множества  $A$  с помощью заданного набора свойств  $F$ , которое не нарушало бы заданного упорядочения (13) или, если это невозможно, было бы "максимально близким к нему"<sup>1)</sup>. Это, конечно, самая предварительная постановка задачи. Для математической постановки задачи необходимо ввести ряд определений.

2. Будем говорить, что объекты множества  $A$  упорядочены по свойству  $f_\alpha$ , если задано такое упорядочение

$$P_{f_\alpha} = \langle a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_N} \rangle, \quad a_{\alpha_k} \in A, \\ k = 1, 2, \dots, N; \quad (14)$$

которое соответствует монотонной последовательности значений этого свойства.

Другими словами, любому двум объектам  $a_i$  и  $a_j$  множества  $A$  ставится в соответствие одно из отношений (II) по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r_{ij}^0, & \text{если } f_\alpha(a_i) = f_\alpha(a_j), \\ \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r_{ij}^1, & \text{если } f_\alpha(a_i) < f_\alpha(a_j)^2), \\ \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r_{ij}^2, & \text{если } f_\alpha(a_i) > f_\alpha(a_j). \end{aligned} \quad (15)$$

Так что упорядочению (14) соответствует неубывающая последовательность значений свойства  $f_\alpha$ :

1) Ниже этим словам придадим конкретный математический смысл.

2) Или наоборот,  $f_\alpha(a_i) > f_\alpha(a_j)$ , но тогда и в следующем высказывании  $r^2$  должно быть выбрано тоже противоположное неравенство.

$$f_{\alpha}(a_{\alpha_1}) \leq f_{\alpha}(a_{\alpha_2}) \leq \dots \leq f_{\alpha}(a_{\alpha_N}).$$

Отметим, что если значения свойства  $f_{\alpha}$  на каких-либо объектах, например,  $a_{\alpha_i}$  и  $a_{\alpha_{i+1}}$  совпадают, т.е.  $f_{\alpha}(a_{\alpha_i}) = f_{\alpha}(a_{\alpha_{i+1}})$ , то эти объекты мы будем разделять в правой части (I4) не запятыми, а с помощью тире:

$$P_{f_{\alpha}} = \langle a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_{i-1}}, a_{\alpha_i} - a_{\alpha_{i+1}}, \dots, a_{\alpha_N} \rangle.$$

Итак, каждое свойство из  $F$  упорядочивает некоторым образом элементы множества  $A$ . Упорядочения, задаваемые свойствами  $f_1, f_2, \dots, f_M$  будем обозначать через

$$P_{f_1}, P_{f_2}, \dots, P_{f_M}.$$

Далее, в нашей задаче мы должны уметь сравнивать упорядочения  $P_{f_1}, P_{f_2}, \dots, P_{f_M}, P_0$  между собой. Для этого надо, во-первых, договориться, как мы будем описывать упорядочения, и, во-вторых, ввести меру сходства двух упорядочений.

Рассмотрим некоторое множество объектов  $S$ , состоящее из  $k$  объектов  $c_i, i=1, 2, \dots, k$ . Очевидно, имеется  $k!$  возможных строгих<sup>I)</sup> упорядочений этого множества. Одно из них,  $P_0$ , назовем нулевым (или основным) и по нему занумеруем элементы множества  $S$ , так что

$$P_0 = \langle c_1, c_2, \dots, c_k \rangle, \quad (16)$$

а любое другое будет иметь вид:

$$P_i = \langle c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k} \rangle, \quad c_{i_l} \in S, \quad l=1, 2, \dots, k. \quad (17)$$

Дж.Кемени и Дж.Снелл [4] предложили описывать упорядочения  $P_i$  следующей матрицей:

I) Упорядочение (I4) будем называть строгим, если в правой части (I4) объекты разделяются только запятыми, нет ни одного тире.

$$A_{P_i} = \begin{pmatrix} A_{P_i}(1,1) & A_{P_i}(1,2) & \dots & A_{P_i}(1,k) \\ A_{P_i}(2,1) & A_{P_i}(2,2) & \dots & A_{P_i}(2,k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{P_i}(k,1) & A_{P_i}(k,2) & \dots & A_{P_i}(k,k) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$A_{P_i}(1,1') = \begin{cases} I, & \text{если элемент } c_1 \text{ в упорядочении } P_i \text{ встре-} \\ & \text{чается до } c_{1'}; \\ 0, & \text{если элемент } c_1 \text{ в упорядочении } P_i \text{ встре-} \\ & \text{чается одновременно с } c_{1'}; \\ -I, & \text{если элемент } c_1 \text{ в упорядочении } P_i \\ & \text{встречается после } c_{1'}. \end{cases} \quad (18')$$

$1, 1' = 1, 2, \dots, k$

Согласно (18'),  $A_{P_i}(1,1) = 0$ ,  $A_{P_i}(1,1') = -A_{P_i}(1',1)$ .

При таком описании упорядочения  $P_0$  соответствует матрица

$$A_{P_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где над диагональю стоят только единицы, а под диагональю — только  $(-I)$ , на диагонали — нули.

Теперь мы можем сравнивать упорядочения, сравнивая соответствующие им матрицы, так что в качестве меры сходства двух упорядочений  $P_i$  и  $P_j$  введем величину

$$\Delta(P_i, P_j) = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{l=1}^k \sum_{l'=1+1}^k \lambda(1,1'), \quad (19)$$

где

$$\lambda(1,1') = \begin{cases} 0, & \text{если } A_{P_i}(1,1') \neq A_{P_j}(1,1'); \\ 1, & \text{если } A_{P_i}(1,1') = A_{P_j}(1,1'). \end{cases} \quad (19')$$

Она удовлетворяет соответствующим аксиомам [5], а именно:

- $0 \leq \Delta(P_i, P_j) \leq 1$ ;
- $\Delta(P_i, P_j) = \Delta(P_j, P_i)$ ;

$$3. \Delta(P_1, P_j) = 1 \iff P_1 = P_j;$$

$$\Delta(P_1, P_j) = 0 \iff P_1 = \langle c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k} \rangle, \text{ а}$$

$$P_j = \langle \bar{c}_{i_k}, \bar{c}_{i_{k-1}}, \dots, \bar{c}_{i_1} \rangle.$$

Отметим, что в третьей аксиоме фиксируется смысл высказывания — "два самые непохожие упорядочения". Вообще говоря, смысл такого высказывания должен определяться конкретной геологической задачей, что, естественно, должно учитываться при выборе меры сходства.

Выше мы определили упорядочение по одному свойству. Спрашивается, а как проводить упорядочение по двум и более,  $M$  свойствам? По аналогии с одним свойством можно предложить рассматривать некоторую функцию  $M$  переменных:

$$\Psi(f_1, f_2, \dots, f_M) \equiv \Psi(F),$$

и с ее помощью проводить упорядочение на множестве  $A$ , формулируя высказывания следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r_{ij}^0, \text{ если } \Psi(F(a_i)) = \Psi(F(a_j)), \\ \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r_{ij}^1, \text{ если } \Psi(F(a_i)) < \Psi(F(a_j)), \text{ I)} \\ \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r_{ij}^2, \text{ если } \Psi(F(a_i)) > \Psi(F(a_j)). \end{aligned} \quad (20)$$

3. Теперь можно дать математическую формулировку предложенной в п. I задачи — найти такую функцию  $\Psi(F)$ , которая порождает упорядочение  $P_\Psi$  на множестве  $A$ , обращая в максимум  $\Delta(\tilde{P}_\Psi, P_0)^2$ . Но для этого необходимо прежде всего фиксировать класс функций  $\tilde{\Psi}$ , среди которых будем искать функцию  $\Psi$ .

Класс  $\tilde{\Psi}$  фиксируем следующими условиями:

1) Упорядочение, порождаемое функцией  $\Psi \in \tilde{\Psi}$ , должно быть строгим, т.е. если  $F(a_i) \neq F(a_j)$ , то  $\Psi(F(a_i)) \neq \Psi(F(a_j))$ .

2) Функция  $\Psi$  является линейной функцией относительно  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, M$ .

3) Значения функции  $\Psi$  должны находиться в интервале:

I) Знак неравенства выбирается в соответствии с неравенствами в (15).

2) Через  $\tilde{P}_\Psi$  обозначена та часть упорядочения  $P_\Psi$ , которая содержит только те элементы, что встречаются в  $P_0$ .

$$1 \leq \Psi \leq \prod_{\alpha=1}^M n_{\alpha}.$$

(Этим мы хотим избежать появления больших номеров при нумерации объектов множества  $A$  с помощью функции  $\Psi$ . Заметим в связи с этим, что число элементов множества  $A$  не может быть больше, чем  $\prod_{\alpha=1}^M n_{\alpha} = n_1 n_2 \dots n_M$ , т.к. мы предполагаем, что в таблице (3) нет объектов, неразличающихся по всем свойствам).

Можно показать (см. приложение), что при перечисленных предположениях класс  $\tilde{\Psi}$  может быть записан в явном виде следующим образом:

$$\Psi(F) = n_{\alpha_2} n_{\alpha_3} \dots n_{\alpha_M} (f_{\alpha_1} - 1) + n_{\alpha_3} n_{\alpha_4} \dots n_{\alpha_M} (f_{\alpha_2} - 1) + \dots + n_{\alpha_M} (f_{\alpha_{M-1}} - 1) + f_{\alpha_M}, \quad (21)$$

где  $f_{\alpha_i} \in F$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ .

Таким образом, отдельные представители  $\tilde{\Psi}$  отличаются друг от друга порядком следования функций  $f_{\alpha} \in F$ .

4. В заключение заметим, что класс  $\tilde{\Psi}$  можно было бы фиксировать и иначе. Условия (I) и (3) фактически являются условиями, накладываемыми на коэффициенты  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , в представлении

$$\Psi(F) = n_1 f_1 + n_2 f_2 + \dots + n_M f_M + n. \quad (22)$$

Первоначально естественно заняться изучением линейных  $\Psi(F)$  с учетом различных условий, накладываемых на упомянутые коэффициенты. При этом полезно ввести следующие показатели, которые позволяют определить роль, которую играет свойство  $f_{\alpha} \in F$  в линейной комбинации (22).

Назовем показателем единичной мощности свойства  $f_{\alpha}$  величину

$$m_1(f_{\alpha}) = \Psi(\dots, f_{\alpha} + 1, \dots) - \Psi(\dots, f_{\alpha}, \dots) = n_{\alpha} \quad (23)$$

и показателем полной мощности свойства  $f_\alpha$  -

$$m_0(f_\alpha) = \Psi(\dots, p_\alpha, \dots) - \Psi(\dots, 1, \dots) = n_\alpha(p_\alpha - 1). \quad (24)$$

Если выполнено условие

$$m_1(f_\alpha) \geq m_0(f_\beta), \quad (25)$$

то будем говорить, что свойство  $f_\alpha$  доминирует над (руководит) свойством  $f_\beta$ . Действительно, условие (25) означает, что в линейной комбинации (22)

$$n_\alpha f_\alpha(a_i) \geq n_\beta f_\beta(a_i) \quad \text{для любого } a_i \in A. \quad (26)$$

Если неравенство (26) для одних  $a_i \in A$  выполнено, а для других - нет, такие свойства мы называем равноправными или соруководимыми. Тогда, когда множество  $A$  содержит все  $p_1, p_2, \dots, p_M$  объектов, свойства  $f_\alpha$  и  $f_\beta$  будут соруководимыми, если не выполняется ни одно из условий:

$$m_1(f_\alpha) \geq m_0(f_\beta),$$

$$m_1(f_\beta) \geq m_0(f_\alpha).$$

В приложении показано, что в  $\Psi(F)$ , которая определяется формулой (2I), каждое впереди стоящее свойство руководит сзади стоящим, более того, если  $f_\alpha$  стоит впереди нескольких  $f_\beta$ , то

$$m_1(f_\alpha) \geq \sum_1 m_0(f_\beta).$$

5. Отметим еще, что в задаче построения структуры множества  $A$  может быть использована интерполяционная формула Лагранжа. Действительно, т.к. все функции класса  $\Psi$  удовлетворяют условию  $\Psi(F(a_i)) = \Psi(F(a_j))$  только в том случае, если  $a_i = a_j$ , то, взяв любую из них, можем воспользоваться формулой Лагранжа для упорядочения объектов множества  $A \setminus A'$ :

$$N^0(a_m) = \frac{n (\Psi_m - \Psi_1)(\Psi_m - \Psi_2) \dots (\Psi_m - \Psi_{k-1})(\Psi_m - \Psi_{k+1}) \dots (\Psi_m - \Psi_n)}{\sum_{k=1}^n (\Psi_k - \Psi_1)(\Psi_k - \Psi_2) \dots (\Psi_k - \Psi_{k-1})(\Psi_k - \Psi_{k+1}) \dots (\Psi_k - \Psi_n)} N^0(a_k),$$

где  $a_m \in (A \setminus A')$ ,  $a_k \in A'$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  и для сокращения записи использовано обозначение  $\Psi(F(a_i)) \equiv \Psi_i$ . Далее,  $\mathcal{N}^0(a_k)$ , если  $a_k \in A'$ , представляет собой номер этого объекта, т.е. просто  $\mathcal{N}^0(a_k) = k$ , если  $a_k \in A'$ .

Будем задавать структуру множества  $A$  с помощью  $\mathcal{N}^0(a_m)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r^1, \text{ если } \mathcal{N}^0(a_i) < \mathcal{N}^0(a_j), \\ \langle a_i, a_j \rangle &\rightarrow r^2, \text{ если } \mathcal{N}^0(a_i) > \mathcal{N}^0(a_j). \end{aligned}$$

Можно видеть, что при этом известное упорядочение объектов множества  $A'$  сохраняется.

Отметим только, что выбор конкретной функции  $\Psi$  из класса  $\tilde{\Psi}$  должен фиксироваться геологическим содержанием задачи, дополнительными требованиями на структуру множества  $A$ .

#### У. Алгоритмы задачи построения структуры множества $A$

I. Будем считать, что класс  $\tilde{\Psi}$  задан формулой (2I) и задача заключается в том, чтобы из этого класса, содержащего  $M!$  функций, выбрать искомую  $\Psi$ , которая порождает упорядочение  $R_\Psi$ , наиболее близкое к заданному:

$$\Lambda(\tilde{R}_\Psi, R_0) = \max_{\tilde{\Psi}} \{ \Lambda(\tilde{R}_\Psi, R_0) \}. \quad (27)$$

Сначала рассмотрим способ так называемого полного перебора. Он заключается в том, что рассматриваются непосредственно все  $M!$  функций  $\Psi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, M!$ , вычисляются меры сходства  $\Lambda(\tilde{R}_{\Psi_i}, R_0)$  соответствующих им упорядочений  $R_{\Psi_i}$  с заданным упорядочением  $R_0$  и выбираются те  $\Psi_i$ , для которых имеет место (27).

Величина  $\Lambda(\tilde{R}_{\Psi_i}, R_0)$  фактически определяется числом (+1) над главной диагональю в матрице  $A_{\tilde{R}_{\Psi_i}}$  (обозначим его через  $\rho_{\Psi_i}^+$ ):

$$\Lambda(\tilde{R}_{\Psi_i}, R_0) = \frac{2}{n(n-1)} \rho_{\Psi_i}^+, \quad (28)$$

см. (I9), а величину  $\rho_{\Psi_i}^+$  можно вычислить следующим образом. Как следует из (2I) и (П.6) в Приложении, все функции класса  $\tilde{\Psi}$  определены так, что для

$$\Psi_i(F) = \Psi(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_M}), \quad f_{i_k} \in F, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

$$A_{P_{\Psi_i}}(1, 1') = A_{P_{f_k}}(1, 1'), \quad \text{где} \quad A_{P_{f_{i_1}}}(1, 1') = A_{P_{f_{i_2}}}(1, 1') = \dots \quad (29)$$

$$\dots = A_{P_{f_{i_{k-1}}}}(1, 1') = 0, \quad \text{а} \quad A_{P_{f_k}}(1, 1') \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Поэтому  $A_{P_{\Psi_i}}(1, 1')$  равняется (+I) (или (-I)), если в последовательности

$$A_{P_{f_{i_1}}}(1, 1'), A_{P_{f_{i_2}}}(1, 1'), \dots, A_{P_{f_{i_M}}}(1, 1') \quad (30)$$

первый отличный от нуля член равен (+I) (или, соответственно, (-I)). Следовательно,

$$\rho_{\Psi_i}^+ = \sum_{l=1}^n \sum_{l'=1}^n \pi_{ll'}, \quad (31)$$

$$\text{где} \quad \pi_{ll'} = \begin{cases} 0, & \text{если в (30) первый отличный от} \\ & \text{нуля член равен (-I);} \\ I, & \text{если в (30) первый отличный от} \\ & \text{нуля член равен (+I),} \end{cases} \quad (31')$$

и в качестве искомой функции  $\Psi_\alpha = \Psi(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_M})$  следует выбрать ту, у которой комбинации свойств  $\langle f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_M} \rangle$  в аргументе соответствует наибольшее  $\rho_{\Psi_\alpha}^+$ .

2. Чтобы избежать полного перебора всех возможных  $M!$  комбинаций свойств  $f_1, f_2, \dots, f_M$ , необходимо ввести некоторые показатели для свойств  $f_\alpha \in F$ , с помощью которых можно было бы заранее охарактеризовать эффективность той или иной комбинации свойств в рассматриваемой задаче. Тогда с помощью таких показателей все свойства  $f_1, f_2, \dots, f_M$  можно будет разбить на два класса: в одном - все те свойства, которые имеет смысл выбрать в качестве первого свойства, в дру-

гом — те свойства, которые не должны быть выбраны в качестве первого. Затем рассматриваются свойства только первого класса, с помощью введенных показателей они тоже разбиваются на две группы: в одной — те свойства, которые стоит выбрать в качестве второго свойства, в другой — те свойства, что не имеет смысла выбрать как второе и т.д.

Прежде всего отметим специфическую особенность рассматриваемой задачи. Собственно говоря, что представляет собой упорядочение с помощью  $\Psi_i(F) = \Psi(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_M})$  из класса  $\tilde{\Psi}$ ? Фактически мы как бы сначала упорядочиваем все объекты множества  $A$  по свойству  $f_{i_1}$ , в результате чего каждой паре объектов множества  $A$  в соответствии с (15) приписывается определенное отношение  $r^1$  или  $r^2$  или  $r^0$ . Затем множество  $A$  упорядочиваем по свойству  $f_{i_2}$ , но только те объекты его, которым по свойству  $f_{i_1}$  было сопоставлено отношение  $r^0$  (см. (29)) и т.д. продолжаем упорядочивать последовательно по свойствам  $f_{i_3}, f_{i_4}, \dots, f_{i_M}$  только те объекты, которым все предыдущие упорядочения сопоставили отношение  $r^0$ .

Поэтому

$$\rho_{f_{i_1}}^+ \leq \rho_{\Psi_i}^+ \leq \rho_{f_{i_1}}^+ + \rho_{f_{i_1}}^0, \quad (32)$$

где  $\rho_{f_{i_1}}^0$  — число нулей над главной диагональю матрицы  $A_{P_{f_{i_1}}}$ . При этом  $\rho_{\Psi_i}^+ = \rho_{f_{i_1}}^+$ , если упорядочение  $P_{f_{i_1}}$  является строгим ( $A_{P_{f_{i_1}}}(1,1')^1 \neq 0$ , если  $1 \neq 1'$ , т.ч.  $\rho_{f_{i_1}}^{01} = 0$ ) или если  $\rho_{f_{i_1}}^0 \neq 0$ , но на месте всех этих нулей матрицы  $A_{P_{f_{i_1}}}$  в матрице  $A_{P_{\Psi_i}}$  появились  $(-I)$ .

Будем называть нуль матрицы  $A_{P_{f_{i_1}}}$  перспективным, если на его месте в матрице  $A_{P_{\Psi_i}}$  появляется  $(+I)$  и, наоборот, бесперспективным, если появляется  $(-I)$ .

Вообще говоря, для нуля  $A_{P_{f_{i_1}}}(1,1')$  возможны три ситуации:

1) Здесь и далее везде речь идет о нулях, расположенных над главной диагональю  $A$  — матрицы.

а). Все  $A_{P_{f\beta}}(1,1') \neq 1, \beta \neq i_1$ ; в этом случае нуль  $(1,1')$  бесперспективен независимо от того, в какой последовательности берутся остальные свойства.

б). Все  $A_{P_{f\beta}}(1,1') \neq -1, \beta \neq i_1$ ; в этом случае нуль  $(1,1')$  перспективен независимо от порядка следования остальных свойств.

в). Среди  $A_{P_{f\beta}}(1,1')$  есть и  $(+I)$  и  $(-I)$ , кроме того, конечно, могут быть и нули. В этом случае нет возможности заранее точно сказать, что именно появится на месте этого нуля в  $A_{P_{f\beta}}$ ,  $(+I)$  или  $(-I)$ . В данном случае все зависит в конечном счете от того, какое свойство далее появляется первым: у которого в  $A$  - матрице на месте  $(1,1')$  стоит  $(+I)$  или  $(-I)$ .

Таким образом, наибольшее возможное значение для  $\rho_{\Psi_i}^+$  при фиксированном первом свойстве  $f_{i_1}$  в  $\Psi_i$  достигается в том случае, если все нули матрицы  $A_{P_{f_{i_1}}}$  являются перспективными, оно равно  $(\rho_{f_{i_1}}^+ + \rho_{f_{i_1}}^0)$ .

Очевидно, см. (32), эффективность той или иной комбинации из свойств  $f_1, f_2, \dots, f_M$  при фиксированном первом свойстве, например,  $f_{i_1}$ , определяется, во-первых, числом  $\rho_{f_{i_1}}^+$  и, во-вторых, тем, насколько перспективны при этой комбинации нули в матрице  $A_{P_{f_{i_1}}}$ . Таким образом, для избежания полного пере-

бора необходимо ввести показатель степени перспективности нуля  $(1,1')$ . Обозначим его через  $t_{11}$ . При наличии такого показателя каждое свойство  $f_\alpha \in F$  можно, в свою очередь, характеризовать показателем

$$P(\alpha) = \rho_{f_\alpha}^+ + \sum_{l=1}^n \sum_{l'=1}^n \delta_{ll'} t_{11}(\alpha), \quad (33)$$

где

$$\delta_{ll'} = \begin{cases} 0, & \text{если } A_{P_{f_\alpha}}(1,1') \neq 0 \\ 1, & \text{если } A_{P_{f_\alpha}}(1,1') = 0. \end{cases}$$

Сравнивая (33) с (32) и считая, что мы  $t_{11}$ , ввели так, что  $0 \leq t_{11} \leq 1$ , видим, что  $P(\alpha)$  играет роль некоторого показателя числа (+I) в матрице  $A_{P_{\Psi_1}}$ . Поэтому из рассматриваемых  $M$  свойств в качестве первого свойства в искомой функции  $\Psi_1$  можно рекомендовать выбрать то  $f_\alpha$ , у которого показатель (33) имеет наибольшее значение.

Затем аналогичным образом рассматриваем оставшиеся  $(M-1)$  свойств и из них в качестве второго свойства в искомой функции выбираем то  $f_\beta$ , которому соответствует наибольший показатель

$$P_1(\beta) = \rho_{f_\beta}^+ / f_\alpha + \sum_{l=1}^n \sum_{l'=1+1}^n \delta_{11}^{(1)} t_{11}(\beta), \quad (34)$$

где  $\rho_{f_\beta}^+ / f_\alpha$  - число плюс-единиц в матрице  $A_{P_{f_\beta}}$  там, где в  $A_{P_{f_\alpha}}$  стоят нули;

$$\delta_{11}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } A_{P_{f_\alpha}}(1, 1') = A_{P_{f_\beta}}(1, 1') = 0; \\ 0 & \text{- во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

и т.д. Таким образом алгоритм, избегающий полного перебора всех  $M!$  возможных комбинаций свойств  $f_1, f_2, \dots, f_M$ , строит функцию  $\Psi_1$  за  $M$  шагов I), опираясь на показатель  $P$  и ему подобные ( $P_1$  и другие).

Так как показатель  $t_{11}$ , может быть определен различными способами, то фактически имеется целый класс алгоритмов, каждый из которых использует свой  $t_{11}$ .

Остается еще отметить, что, так как  $P(\alpha)$  не имеет точного смысла числа (+I) в матрице  $A_{P_{\Psi_1}}$ , указанный класс алгоритмов, как это часто бывает при избегании полного перебора, выделяет из класса  $\Psi$  функцию  $\Psi$ , порождающую упорядочение  $P_\Psi$ , достаточно близкое к заданному  $P_0$  (разумеется, при удачном выборе показателя  $t_{11}$ ), но, вообще говоря, не гарантирует выполнение (27).

3. В заключение укажем два конкретных показателя  $t_{11}$ , они будут использованы в следующей части, которая посвящена модельным примерам задачи упорядочения.

I) Строго говоря, число шагов  $\leq M$ . Ведь нули матрицы  $A_{P_{f_\alpha}}$  могут быть исчерпаны раньше, чем за  $M$  шагов.

$$t_{11'}^{(1)} = \frac{(M-1) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^M A_{P_{f_\beta}}(1, 1')}{2(M-1)}, \quad (35)$$

$$t_{11'}^{(2)} = \frac{(n_{11'})!(M-1-n_{11'})!}{(M-1)!}, \quad (36)$$

где  $n_{11'}$  - число свойств, у которых

$$A_{P_{f_\beta}}(1, 1') \neq -1, \quad \beta \neq \alpha.$$

Поясним выражения (35) и (36). Так как

$$-(M-1) \leq \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^M A_{P_{f_\beta}}(1, 1') \leq M-1,$$

то  $0 \leq t_{11'}^{(1)} \leq 1$ ; видим, что величина  $t_{11'}^{(1)}$  определена таким образом, чтобы она была тем больше, чем меньше (-1) встречается в  $A$ -матрицах остальных свойств  $f_\beta$  на месте этого нуля.

В (36) степень перспективности нуля характеризуется отношением числа перспективных комбинаций остальных свойств (т.е. таких, которые определяют функцию  $\psi \in \tilde{\Psi}$ , для которой  $A_{P_\psi}(1, 1') = +1$ ) к числу всех возможных комбинаций остальных свойств при фиксированном первом свойстве.

Ниже рассматриваются на модельных примерах две геологические задачи упорядочения объектов: задача построения рудоносной формации, которая представляет собой первый этап общей задачи упорядочения, и задача построения разреза района, которая охватывает только второй этап.

#### VI. Построение рудоносной формации (модельный пример)

I. Допустим, что уже фиксирована некоторая классификация литотел  $[A:U]$  (см. раздел II), и с ее помощью описаны заданные литологические колонки. Мы будем рассматривать конкретный случай, когда  $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ ,  $a_0$  - интересующее нас рудное тело. Множество  $R$  бинарных отношений  $a_1, a_j \in A$

фиксируем следующим образом:  $R = \{R^1, R^2, R^3, R^4, R^5\}$ , а именно:

- $R^1$  - "лежит выше, соприкасаясь";
  - $R^2$  - "лежит ниже, соприкасаясь";
  - $R^3$  - "лежит выше, не соприкасаясь";
  - $R^4$  - "лежит ниже, не соприкасаясь";
  - $R^5$  - "лежат на одном уровне".
- (37)

По поводу выбора множества  $R$  заметим следующее.

Если два литотела  $a_i$  и  $a_j$  встречаются в колонке каждое только один раз, то они могут находиться в одном из вышеперечисленных отношений (37), и только . Эти отношения будем называть элементарными. В реальных литологических колонках каждое из литотел может встречаться несколько раз, так, например, различают еще следующие отношения:

- $R^6$  - "включено",
- $R^7$  - "лежит между",
- $R^8$  - "переслаиваются",
- $R^9$  - "чередуются".

Эти отношения (их назовем сложными) представляют собой некоторую комбинацию из элементарных отношений. Например,  $R^6 = R^1 \& R^2$ ,  $R^7 = R^3 \& R^4$ ,  $R^8 = R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$  и т.п.












Казалось бы имеется две альтернативы, когда речь идет о реальных литологических колонках:

- 1) работать с множеством  $R$  элементарных отношений и, соответственно, со сложными отношениями между литотелами даже в пределах одной литологической колонки;
- 2) так расширить множество  $R$ , добавляя к элементарным отношениям сложные, чтобы любым двум телам каждой отдельной колонки соответствовало бы о д н о отношение из этого расширенного множества.

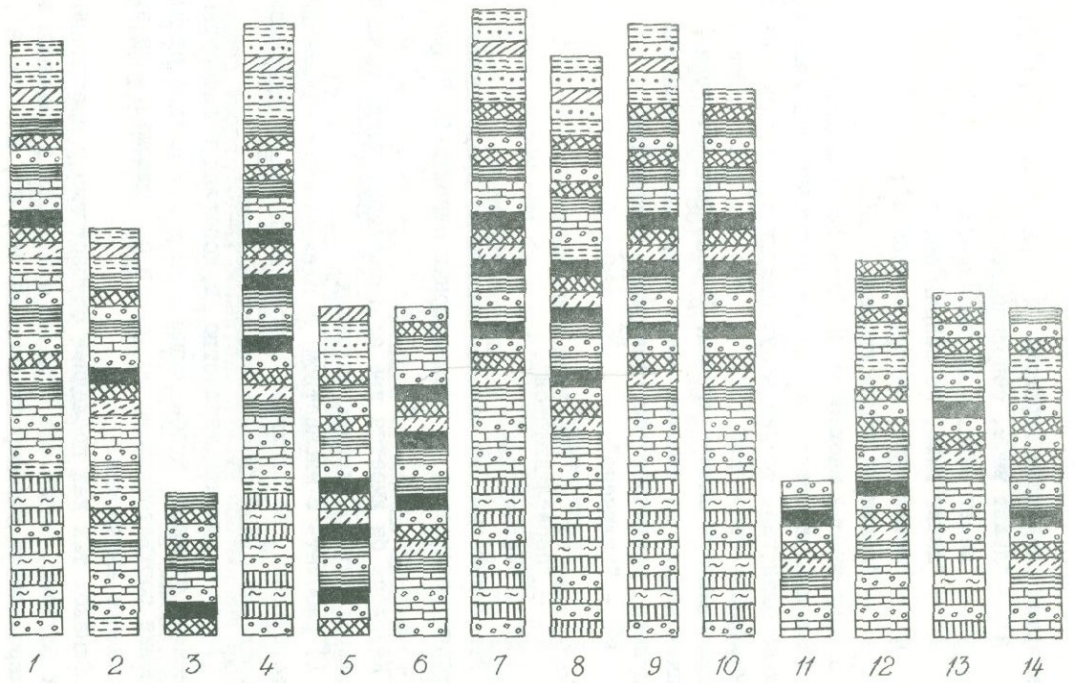
Однако, так как последнее осуществимо в чрезвычайно редких случаях, когда все сложные отношения в заданных колонках исчерпываются вышеперечисленными  $R^6$ ,  $R^7$ ,  $R^8$  и  $R^9$ , то имеет смысл сразу ограничиться множеством только элементарных отношений, т.е. выбрать  $R = \{R^1, R^2, R^3, R^4, R^5\}$ .

Далее, пусть нам задано  $K$  экспериментальных колонок, содержащих руду  $a_0$ . Ниже рассматривается конкретный случай, когда  $K=14$ . Каждая литологическая колонка задает определенное упорядочение на множестве литотел  $A$ , а именно:

Обозначения:

-   $a_0$
-   $a_1$
-   $a_2$
-   $a_3$
-   $a_4$
-   $a_5$
-   $a_6$
-   $a_7$
-   $a_8$
-   $a_9$
-   $a_{10}$

Заданные литологические колонки



$$P_1 = \langle a_9, a_7, a_9, a_8, a_9, a_6, a_2, a_4, a_6, a_{10}, a_4, a_0, a_2, a_3, a_9, \\ a_{10}, a_4, a_6, a_9, a_4, a_2, a_9, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_9, a_5, a_1, \\ a_5, a_4, a_5, a_1, a_5, a_1, a_5, a_4 \rangle;$$

$$P_2 = \langle a_9, a_8, a_9, a_6, a_2, a_4, a_6, a_{10}, a_4, a_0, a_2, a_3, a_9, a_{10}, a_4, \\ a_6, a_9, a_4, a_2, a_9, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_9 \rangle;$$

$$P_3 = \langle a_6, a_2, a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_4, a_0, a_2 \rangle;$$

$$P_4 = \langle a_9, a_7, a_8, a_9, a_7, a_9, a_6, a_2, a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_4, a_0, a_2, \\ a_3, a_0, a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_9, \\ a_5, a_1, a_5, a_1, a_4, a_5, a_1, a_5, a_4 \rangle;$$

$$P_5 = \langle a_8, a_9, a_7, a_9, a_2, a_6, a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_4, a_0, a_2, a_3, a_0, \\ a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2 \rangle;$$

$$P_6 = \langle a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_4, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, \\ a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4 \rangle;$$

$$P_7 = \langle a_9, a_7, a_8, a_9, a_7, a_9, a_2, a_6, a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_4, a_0, a_2, \\ a_3, a_0, a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_{10}, \\ a_5, a_1, a_5, a_4, a_5, a_4, a_5, a_1, a_5, a_4 \rangle;$$

$$P_8 = \langle a_9, a_7, a_8, a_7, a_9, a_2, a_6, a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_4, a_9, a_0, a_2, \\ a_3, a_0, a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_{10}, \\ a_5, a_1, a_5, a_4, a_5, a_4, a_5 \rangle;$$

$$P_9 = \langle a_9, a_7, a_8, a_7, a_9, a_2, a_6, a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_9, a_0, a_2, a_3, \\ a_0, a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_{10}, a_5, \\ a_1, a_5, a_4, a_5, a_4, a_5, a_1, a_5, a_4 \rangle;$$

$$P_{10} = \langle a_9, a_2, a_6, a_4, a_2, a_6, a_{10}, a_9, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_4, a_6, \\ a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_{10}, a_5, a_1, a_5, a_4, a_5, \\ a_1, a_5, a_1, a_5, a_4 \rangle;$$

$$P_{11} = \langle a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10} \rangle;$$

$$P_{12} = \langle a_2, a_6, a_4, a_2, a_9, a_{10}, a_9, a_4, a_2, a_4, a_2, a_6, a_4, a_6, a_0, \\ a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, a_4, a_{10} \rangle;$$

$$P_{13} = \langle a_4, a_2, a_4, a_2, a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10}, \\ a_4, a_{10}, a_5, a_1, a_5, a_4, a_5 \rangle;$$

$$P_{14} = \langle a_6, a_4, a_2, a_9, a_{10}, a_9, a_4, a_2, a_4, a_2, a_6, a_4, a_6, a_0, a_4, a_2, a_3, a_6, a_{10}, a_4, a_{10} \rangle.$$

Требуется на основании этого исходного базиса (фиксированного множества литотел А, фиксированного множества их отношений R и заданных упорядочений  $P_1, P_2, \dots, P_{14}$ ) построить рудоносную формацию.

2. Прежде всего выясним, какие бинарные отношения между литотелами наблюдаются в заданных четырнадцати колонках. Для этого составляется таблица следующего вида:

№ колонки	I	2	...	I4
Сравниваемая пара литотел				
$\langle a_i, a_j \rangle$	$r_1$	$r_2$	...	$r_{14}$

(38)

$r_k$  - сложное отношение, в котором находятся литотела  $a_i$  и  $a_j$  в  $k$ -й колонке. Очевидно, так как  $R_{ij}^1 = R_{ji}^2$  и  $R_{ij}^3 = R_{ji}^4$ , то достаточно рассмотреть  $j < i$ . Например, для  $\langle a_1, a_0 \rangle$   $r_1 = r_2 = \dots = r_{14} = R^4$ , а для  $\langle a_2, a_0 \rangle$   $r_1 = R^2 \& R^3 \& R^4$ ,  $r_2 = R^2 \& R^3 \& R^4$ ,  $r_3 = R^2 \& R^3$  и т.д.

Разумеется, если литотела  $a_i$  и  $a_j$  не встречаются вместе в  $l$ -й колонке, то для них  $r_l$  не существует (будем говорить тогда, что в соответствующей клетке таблицы "имеется дыра"). Существование дыр может объясняться разными причинами: либо колонка просто короткая, либо данное литотело вообще не является индикатором по отношению к руде  $a_0$  (см. II), либо оно в этой колонке замещено другими литотелами. Учитывая это, мы предполагаем следующий способ заполнения дыр.

1). Если для пары литотел  $\langle a_i, a_j \rangle$  дыры имеются не во всех колонках, то при составлении высказывания

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow r_{ij},$$

описывающего бинарное отношение между  $a_i$  и  $a_j$  на всем экспериментальном материале (в рассматриваемом примере - во всех I4 колонках), дыры просто игнорировать, т.е. считать, что  $r_{ij} = \& r_h$ ,  $h$  - номер колонки, в которой нет дыры.

2). Если литотела  $a_i$  и  $a_j$  не встречаются вместе ни в одной колонке (во всех колонках - дыры), то надо по возможности

использовать операцию "приведение высказываний", см. III.

На основании таблицы (38) мы можем составить таблицу бинарных отношений литотел на всем экспериментальном материале. При этом будем считать, что

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \& R^t \text{ I), } R^t \in R,$$

здесь  $R^t$  - те элементарные отношения, которые встречаются в заданных колонках.

Составив эту таблицу (см. Таблица бинарных отношений литотел), мы можем сделать следующие выводы о взаимном расположении литотел в заданных колонках.

I) Прежде всего определим "случайные" литотела. Случайными мы будем считать те  $a_i \in A$ , для которых не наблюдается постоянство в расположении относительно подавляющего большинства остальных литотел. В данном примере, это - литотела  $a_4$  и  $a_9$ . Действительно, литотело  $a_9$  располагается определенным образом только по отношению к одному литотелу  $a_1$ , а литотело  $a_4$  - по отношению к двум литотелам: к  $a_7$  и  $a_8$  (см. таблицу).

2) Можем сказать, что руда  $a_0$  залегает между литотелами  $a_7, a_8$  (сверху) и  $a_1, a_5$  (снизу). Действительно, см. таблицу, литотела  $a_7$  и  $a_8$  лежат выше всех остальных тел, т.к.

$$\begin{aligned} \langle a_7, a_i \rangle &\rightarrow R^3, \\ \langle a_8, a_i \rangle &\rightarrow R^3, \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 10;$$

но друг относительно друга они могут располагаться по-разному, т.к.

$$\langle a_8, a_7 \rangle \rightarrow R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4.$$

Аналогично, литотела  $a_1$  и  $a_5$  лежат ниже всех остальных тел:

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_i \rangle &\rightarrow R^4, \\ \langle a_5, a_i \rangle &\rightarrow R^4, \end{aligned} \quad i = 0, 2, 3, 6, 7, 8, 10;$$

I) Это фактически один из способов "сокращения высказываний", см. III.

ТАБЛИЦА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ЛИТОТЕЛ

150

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
$a_0$											
$a_1$	$R^4$										
$a_2$	$R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^3$									
$a_3$	$R^1 \& R^3 \& R^4$	$R^3$	$R^2 \& R^3 \& R^4$								
$a_4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^3 \& R^4$							
$a_5$	$R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^4$	$R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$						
$a_6$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^3$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^3$					
$a_7$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$				
$a_8$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$			
$a_9$	$R^1 \& R^3 \& R^4$	$R^3$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^3$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$		
$a_{10}$	$R^3 \& R^4$	$R^3$	$R^3 \& R^4$	$R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^1 \& R^3$	$R^2 \& R^3 \& R^4$	$R^4$	$R^4$	$R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4$	

$$\langle a_5, a_1 \rangle \rightarrow R^1 \& R^2 \& R^3 \& R^4.$$

3) Остальные литотела  $a_2, a_3, a_6$  и  $a_{10}$  располагаются между  $a_7, a_8$  (сверху) и  $a_1, a_5$  (снизу). О их взаимном расположении, а также о их расположении относительно руды  $a_0$  пока ничего нельзя сказать.

Чтобы выяснить, имеется ли постоянство во взаимном расположении тел  $a_0, a_2, a_3, a_6$  и  $a_{10}$ , надо отдельно рассмотреть ту часть колонок, которая заключена между  $\{a_7, a_8\}$  и  $\{a_1, a_5\}$ , исключая, разумеется, из рассмотрения случайные тела  $a_4$  и  $a_9$ . Указанные части колонок задают следующие упорядочения:

$$P'_1 = \langle a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_{10}, a_6, a_2, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_2 = \langle a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_{10}, a_6, a_2, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_3 = \langle a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2 \rangle,$$

$$P'_4 = \langle a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_5 = \langle a_2, a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2 \rangle,$$

$$P'_6 = \langle a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_7 = \langle a_2, a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_8 = \langle a_2, a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_9 = \langle a_2, a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_{10} = \langle a_2, a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_{11} = \langle a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_{12} = \langle a_2, a_6, a_2, a_{10}, a_2, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_{13} = \langle a_2, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$$P'_{14} = \langle a_6, a_2, a_{10}, a_2, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle.$$

Сначала выпишем, в каких отношениях встречаются тела  $a_{10}$  и  $a_0$ .

$$\begin{array}{cccccccc} \text{номер колонки:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \langle a_{10}, a_0 \rangle \rightarrow & \{ R^3 \& R^4, R^3 \& R^4, R^3 \& R^4, R^3, R^3 \& R^4, R^3 \& R^4, R^3 \& R^4 \\ & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ & R^3 \& R^4, R^3 \& R^4, R^3 \& R^4, R^4, R^3 \& R^4, R^4, R^3 \& R^4 \}. \end{array} \quad (39)$$

Отметим, что при определении отношения, в котором находится литотело  $a_{10}$  по отношению к руде  $a_0$ , в том случае, когда в одной колонке имеется несколько рудопроявлений (это колонки 4-10), мы вместо одного упорядочения, например,  $R^4$ , рассматривали три таких:

$${}^1 R^4 = \langle a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_0, a_2, a_3, a_6, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$${}^2 R^4 = \langle a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_2, a_3, a_0, a_6, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle,$$

$${}^3 R^4 = \langle a_6, a_2, a_6, a_{10}, a_2, a_3, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6, a_{10} \rangle.$$

Другими словами, отношения одного рудного литотела  $a_0$  с  $a_{10}$  в каждой колонке рассматриваются независимо от этих же отношений других рудных литотел  $a_0$ . Именно поэтому мы можем предложить считать, что

$$\langle a_{10}, a_0 \rangle \rightarrow R^7 \text{ (операция "сокращения высказываний")}. \quad (40)$$

Таким образом, уже получена следующая структура, (см. Рис. 3).

Теперь рассмотрим интервалы колонок между литотелами  $a_{10}$ . Они задают упорядочения:

$$R_1'' = \langle a_0, a_2, a_3 \rangle,$$

$$R_2'' = \langle a_0, a_2, a_3 \rangle,$$

$$R_3'' = \langle a_0, a_2 \rangle,$$

$$R_4'' = \langle a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6 \rangle,$$

$$R_5'' = \langle a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2 \rangle,$$

$$P_6^n = \langle a_0, a_2, a_3, a_0, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6 \rangle,$$

.....

$$P_{14}^n = \langle a_2, a_6, a_0, a_2, a_3, a_6 \rangle.$$

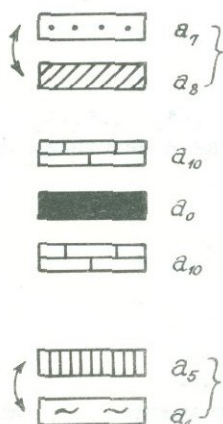


Рис. 3.

Стрелки обозначают, что соответствующие литотела могут находиться в одном из элементарных отношений  $R^1$  или  $R^2$  или  $R^3$  или  $R^4$ .

Так же, как и в (39), выписываем отношения<sup>I)</sup>, в которых встречаются в этом интервале литотело  $a_2$  и руда  $a_0$ :

$$\langle a_2, a_0 \rangle \rightarrow \{ R^4, R^4, R^4, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3 \}. \quad (41)$$

Теперь предлагаем сократить высказывание (41) следующим образом:

$$\langle a_2, a_0 \rangle \rightarrow R^4, \quad (42)$$

так как во всех колонках и ниже рудного тела  $a_0$  всегда встречается  $a_2$ , а выше оно встречалось не во всех случаях.

I) Сразу заметим, что при этом не имеет смысла различать отношения  $R^1$  и  $R^3$ , соответственно,  $R^2$  и  $R^4$ .

Аналогично,

$$\langle a_3, a_2 \rangle \rightarrow \{ R^4, R^4, -, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3 \} \rightarrow R^4;$$

$$\langle a_6, a_3 \rangle \rightarrow \{ -, -, -, R^4 \& R^3, R^4, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3, R^4 \& R^3 \} \rightarrow R^4 \& R^3;$$

$$\langle a_6, a_2 \rangle \rightarrow R^4 \& R^3; \quad \langle a_6, a_0 \rangle \rightarrow R^4 \& R^3.$$

Таким образом, на множестве литотел  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{10}$  получена структура, изображенная и описанная на рис. 4.

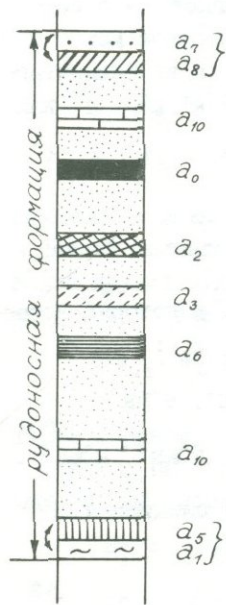


Рис. 4.

Руда  $a_0$  залегает между  $a_{10}$ , которые, в свою очередь, сверху лежат под  $\{ a_7, a_8 \}$ , снизу - над  $\{ a_5, a_1 \}$ .

Тела  $\{ a_7, a_8 \}$ , а также  $\{ a_5, a_1 \}$  друг с другом могут встречаться в любых элементарных отношениях.

Под рудой  $a_0$  всегда лежит  $a_2$ , ниже  $a_2 - a_3$ . Литотело  $a_6$  наблюдается ниже  $a_3$ , но может, кроме того, встречаться и выше  $a_3$ , или  $a_2$ , или  $a_0$ .

Литотела  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{10}$ , образующие структуру, изображенную на рис. 4, будем считать рудоносной (руда -  $a_0$ ) формацией.

УП. Построение разреза района  
(модельный пример)

Г. Пусть на некотором, достаточно изученном участке района, известна последовательность напластований. В этой задаче в качестве множества  $A$  упорядочиваемых геологических объектов будут фигурировать пласты  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  (см. рис. 5).

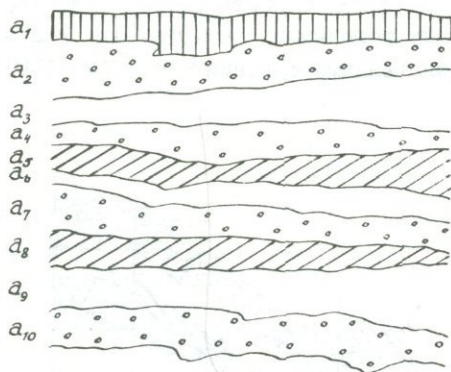


Рис. 5.

На этих пластах измерен ряд характеристик и фиксирован ряд свойств (например, "содержать такую-то фауну"). Следуя принятым в разделе IV обозначениям, эти характеристики и свойства обозначим через  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, M$ . Будем рассматривать конкретный случай, когда  $M = 5$ . Задана таблица объекты-свойства:

Свойства Объекты	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$a_1$	1	1	3	2	1
$a_2$	2	1	2	1	1
$a_3$	2	3	1	3	1
$a_4$	2	2	2	1	2
$a_5$	3	3	3	2	3
$a_6$	3	4	4	3	4
$a_7$	3	7	5	1	2
$a_8$	3	5	2	2	1
$a_9$	3	6	1	3	1
$a_{10}$	3	7	1	1	1

Задача состоит в том, чтобы найти такую функцию  $\Psi (f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_M})$  из класса  $\tilde{\Psi}$  (см. IY, ), которая порождает упорядочение пластов, достаточно близкое к заданному  $P_0 = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10} \rangle$ . Располагая такой функцией, можно строить разрез всего района по данным отдельных колонок. Например, предъявляются две соседние колонки (см. рис.6). Вычислив значения функции  $\Psi (f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_M})$  на пластах обеих колонок, мы можем строить разрез участка района, расположенного между колонками (см.рис.6), учитывая что пласты нумеруются значениями функции  $\Psi$ , см. (20).

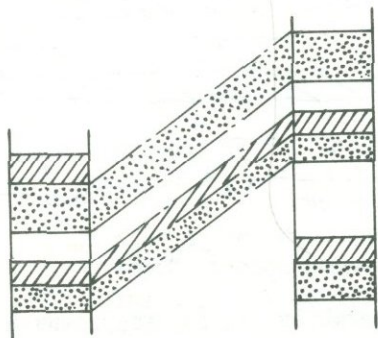


Рис.6.

2. Заданные свойства  $f_1, f_2, \dots, f_5$  порождают следующие упорядочения пластов:

$$\begin{aligned}
 P_{f_1} &= \langle a_1, a_2 - a_3 - a_4, a_5 - a_6 - a_7 - a_8 - a_9 - a_{10} \rangle, \\
 P_{f_2} &= \langle a_1 - a_2, a_4, a_3 - a_5, a_6, a_8, a_9, a_7 - a_{10} \rangle, \\
 P_{f_3} &= \langle a_3 - a_9 - a_{10}, a_2 - a_4 - a_8, a_1 - a_5, a_6, a_7 \rangle, \quad (43) \\
 P_{f_4} &= \langle a_2 - a_4 - a_7 - a_{10}, a_1 - a_5 - a_8, a_3 - a_6 - a_9 \rangle, \\
 P_{f_5} &= \langle a_1 - a_2 - a_3 - a_8 - a_9 - a_{10}, a_4 - a_7, a_5, a_6 \rangle.
 \end{aligned}$$

Эти упорядочения описываются матрицами:

$$A_{P_{f_1}} = \begin{matrix} I & I & I & I & I & I & I & I & I \\ & 0 & 0 & I & I & I & I & I & I \\ & & 0 & I & I & I & I & I & I \\ & & & I & I & I & I & I & I \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{matrix}$$

$$A_{P_{f_2}} = \begin{matrix} 0 & I & I & I & I & I & I & I & I \\ & I & I & I & I & I & I & I & I \\ & & -I & 0 & I & I & I & I & I \\ & & & I & I & I & I & I & I \\ & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & -I & -I & 0 & 0 \\ & & & & & & & I & I \\ & & & & & & & & I \end{matrix}$$

$$A_{P_{f_3}} = \begin{matrix} -I & -I & -I & 0 & I & I & -I & -I & -I \\ & -I & 0 & I & I & I & 0 & -I & -I \\ & & I & I & I & I & I & 0 & 0 \\ & & & I & I & I & 0 & -I & I \\ & & & & I & I & -I & -I & -I \\ & & & & & I & -I & -I & -I \\ & & & & & & -I & -I & -I \\ & & & & & & & -I & -I \\ & & & & & & & & 0 \end{matrix}$$

$$A_{P_{f_4}} = \begin{matrix} -I & -I & -I & 0 & I & -I & 0 & I & -I \\ & I & 0 & I & I & 0 & I & I & 0 \\ & & -I & -I & 0 & -I & -I & 0 & -I \\ & & & I & I & 0 & I & I & 0 \\ & & & & -I & -I & 0 & I & -I \\ & & & & & -I & -I & 0 & -I \\ & & & & & & & I & I & 0 \\ & & & & & & & & I & -I \\ & & & & & & & & & -I \end{matrix}$$

$$A_{P_{f_5}} = \begin{matrix} 0 & 0 & I & I & I & I & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & I & I & I & I & 0 & 0 & 0 \\ & & I & I & I & I & 0 & 0 & 0 \\ & & & I & I & 0 & -I & -I & -I \\ & & & & -I & -I & -I & -I & -I \\ & & & & & -I & -I & -I & -I \\ & & & & & & -I & -I & -I \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{matrix}$$

Здесь в  $A$  - матрицах выписаны только те элементы, которые расположены над главной диагональю.

Очевидно, в качестве  $f_{\alpha_1}$ , мы выбираем  $f_1$ , т.к. в его

$A$  - матрице нет ни одной  $(-I)$ . Поэтому далее мы интересуем-  
ся только теми элементами  $I$ )  $A$  - матриц свойств  $f_2, f_3, f_4$   
и  $f_5$   $A(1,1')$ , которые соответствуют нулям в  $A_{P_{f_1}}$ , т.е.  
 $A_{P_{f_1}}(1,1') = 0$ . Надо заметить, что кроме упорядочений (43)

заданные свойства могут порождать также упорядочения, обрат-  
ные к ним (см. (I5) и сноску к (I5)):

$$\begin{aligned} P_{f_2}^I &= \langle a_7 - a_{10}, a_9, a_8, a_6, a_3 - a_5, a_4, a_1 - a_2 \rangle, \\ P_{f_3}^I &= \langle a_7, a_6, a_1 - a_5, a_2 - a_4 - a_8, a_3 - a_9 - a_{10} \rangle, \\ P_{f_4}^I &= \langle a_3 - a_6 - a_9, a_1 - a_5 - a_8, a_2 - a_4 - a_7 - a_{10} \rangle, \\ P_{f_5}^I &= \langle a_6, a_5, a_4 - a_7, a_1 - a_2 - a_3 - a_8 - a_9 - a_{10} \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Так что надо еще выяснить, какое упорядочение выбирать для  
каждого свойства. Можно либо перебрать все возможные случаи  
(их  $2^m$ ,  $m$  - число оставшихся свойств), либо выдвинуть кри-  
терий, на основании которого будет использоваться  $P_f$  или  
 $P_f^I$ . Разумеется, если в  $A$  - матрице некоторого свойства  $f$   
имеются одни  $(-I)$  и нули, то следует использовать  $P_f^I$ , так  
как  $A_{P_f^I}(1,1') = -A_{P_f}(1,1')$ . Аналогично, если в матрице  
 $A_{P_f}$  число плюс-единиц намного меньше числа минус-единиц,  
то, с одной стороны, естественно перейти к  $P_f^I$ ; однако, с дру-  
гой стороны, в совокупности всех свойств это может, наоборот,  
ухудшить окончательный результат.

В данном примере, будем руководствоваться правилом:  
если в  $A$ -матрице свойства  $f_\beta$  число  $(-I)$   $\rho_\beta^-$  больше, чем  
 $\rho_\beta^+$   $(+I)$ , мы будем рассматривать  $P_{f_\beta}^I$  и  $A_{P_{f_\beta}^I}$ . Поэтому сра-  
зу матрицу  $A_{P_{f_3}}$  заменяем на

$$A_{P_{f_3}^I} = \begin{array}{cccccccc} I & I & I & 0 & -I & -I & I & I & I \\ I & 0 & I & -I & -I & 0 & I & I & \\ & -I & -I & -I & -I & 0 & 0 & & \\ & & -I & -I & -I & 0 & I & I & \\ & & & -I & -I & I & I & I & \\ & & & & -I & I & I & I & \\ & & & & & I & I & I & \\ & & & & & & I & I & \\ & & & & & & & I & I & \\ & & & & & & & & 0 & \end{array}$$

1) Они в  $A$ -матрицах выделены пунктирными линиями.

Вычисляем показатель  $P$  (см. (33) и (35)) для свойств  $f_2, f_3, f_4$  и  $f_5$ :

$$P(f_2) = 14,5;$$

$$P(f_3) = 13 \frac{1}{3};$$

$$P(f_4) = 8 \frac{2}{3};$$

$$P(f_5) = 6 \frac{1}{6}.$$

Аналогичные значения получаются при использовании формулы (36):

$$P(f_2) = 14 \frac{1}{12}; P(f_3) = 12 \frac{1}{3}; P(f_4) = 6,5; P(f_5) = 3 \frac{2}{3}.$$

Таким образом, в качестве свойства  $f_{\alpha_2}$  выбираем свойство  $f_2$ .

Далее вычисляем показатель  $P_1$  для оставшихся свойств  $f_3, f_4$  и  $f_5$ :

$$P_1(f_3) = 1; P_1(f_4) = \frac{1}{2}; P_1(f_5) = 0.$$

Следовательно, следующим будет свойство  $f_3$ . Все нули исчерпаны, поэтому порядок оставшихся свойств  $f_4$  и  $f_5$  роли не играет. Итак,

$$\Psi = \Psi(f_1, f_2, f_3) = n_2 n_3 (f_1 - 1) + n_3 (f_2 - 1) + f_3'$$

или, более подробно,

$$\Psi(a_1) = 35[f_1(a_1) - 1] + 5[f_2(a_1) - 1] + f_3'(a_1), a_1 \in A.$$

При этом  $f_3'(a_1) = n_3 + 1 - f_3(a_1)$ , так как мы используем не  $P_{f_3}$ , а  $P_{f_3}'$ .

$$A_{P\Psi} = \begin{matrix} I & I & I & I & I & I & I & I & I \\ & I & I & I & I & I & I & I & I \\ & & -I & I & I & I & I & I & I \\ & & & I & I & I & I & I & I \\ & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I \\ & & & & & & -I & -I & I \\ & & & & & & & I & I \\ & & & & & & & & I \end{matrix}$$

$$\text{и } \Delta(P_\Psi, P_0) = \frac{42}{45} = 0,93.$$

Заметим, что лучшего при заданных свойствах добиться нельзя, так как в  $A$  - матрицах свойств  $f_2, f_3, f_4$  и  $f_5$  там, где в  $A_{P_{f_1}}$  - нули, число имевшихся  $(-1) \geq 3$ .

Если теперь предъявляются два пласта из исследуемого района  $a_i$  и  $a_j$  и спрашивается, как они расположены друг относительно друга, то (см. (20)) будем считать, что

$$\begin{aligned} a_i & \text{ лежит выше } a_j, \text{ если } \Psi(a_i) < \Psi(a_j); \\ a_i & \text{ лежит ниже } a_j, \text{ если } \Psi(a_i) > \Psi(a_j); \\ a_i & \text{ и } a_j \text{ лежат на одном уровне, если } \Psi(a_i) = \Psi(a_j). \end{aligned}$$

### Приложение

I. Определим явный вид класса функций  $\tilde{\Psi}$  в простом случае, когда  $M = 2$ . Согласно условию (2) на класс функций  $\tilde{\Psi}$ , это - линейные функции двух переменных:

$$\Psi(F) \equiv \Psi(f_1, f_2) = \bar{A}f_1 + \bar{B}f_2 + \bar{C},$$

где  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  - некоторые константы. Так как константа  $\bar{C}$  не играет роли в упорядочении множества  $A$  по функции  $\Psi$  (см. (20), величина  $\bar{C}$  одинакова для всех  $a_i \in A$ ), то ее мы положим равной нулю в соответствии с требованием (3), накладываемым на  $\tilde{\Psi}$ .

Тогда

$$\Psi(F) = \bar{A}f_1 + \bar{B}f_2 = \bar{B} \left( \frac{\bar{A}}{\bar{B}} f_1 + f_2 \right).$$

Величина  $\bar{B}$ , таким образом, не оказывает влияния на вид упорядочения множества  $A$  (см. (20),  $\bar{B}$  одинакова для всех  $a_i \in A$ ) и в соответствии с условием (3), которому должна удовлетворять  $\Psi$ , положим  $\bar{B} = 1$ , а  $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$  обозначим через  $\gamma$ :

$$\Psi(F) \equiv \Psi(f_1, f_2) = \gamma f_1 + f_2. \quad (\text{П.1})$$

Как же выбрать  $\gamma$ ? Можно догадаться, что если положить  $\gamma = n_2$  (напомним, что  $n_\alpha$  - число интервалов на шкале свойства  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , а  $f_\alpha(a_i)$ ,  $a_i \in A$ , принимают целочис-

ленные значения от 1 до  $n_{\alpha}$ ), то условия (1) и (3), наложенные на класс функций  $\tilde{\Psi}$ , будут выполнены.

Действительно, рассмотрим любые два элемента множества  $A : a_1$  и  $a_j$ . Для них

$$\Psi(F(a_1)) = n_2 f_1(a_1) + f_2(a_1),$$

$$\Psi(F(a_j)) = n_2 f_1(a_j) + f_2(a_j).$$

Посмотрим, когда  $\Psi(F(a_1)) = \Psi(F(a_j))$ . Для этого рассмотрим разность

(П.2)

$$\Psi(F(a_1)) - \Psi(F(a_j)) = n_2 [f_1(a_1) - f_1(a_j)] + [f_2(a_1) - f_2(a_j)].$$

Сразу заметим, что если  $f_1(a_1) \neq f_1(a_j)$ , то  $|f_1(a_1) - f_1(a_j)| \geq 1$  и, т.к.  $|f_2(a_1) - f_2(a_j)| \leq (n_2 - 1)$ , то разность (П.2) всегда отлична от нуля, причем ее знак определяется знаком разности  $[f_1(a_1) - f_1(a_j)]$ . Это означает, что функция  $\Psi(F)$  сопоставляет объектам  $a_1$  и  $a_j$  то же отношение  $r^h$ ,  $h = 1, 2$ , что и свойство  $f_1$ .

Если же  $f_1(a_1) = f_1(a_j)$  (т.е.  $a_1$  и  $a_j$  не различаются по свойству  $f_1$ ), то разность (П.2) может равняться нулю только в том случае, если и  $f_2(a_1) = f_2(a_j)$ , т.е. если  $a_1$  и  $a_j$  неразличимы одновременно и по свойству  $f_2$ , что возможно только если  $a_1 = a_j$ .

Таким образом, если  $F(a_1) \neq F(a_j)$ , то и  $\Psi(F(a_1)) \neq \Psi(F(a_j))$  — первое условие на класс  $\tilde{\Psi}$  выполнено.

Теперь посмотрим, удовлетворяет ли

$$\Psi(F) = n_2 f_1 + f_2 \quad (\text{П.3})$$

условию (3). Так как  $1 \leq f_1(a_1) \leq n_1$ ,  $1 \leq f_2(a_1) \leq n_2$ ,  $a_1 \in A$ ,

$$n_2 + 1 \leq \Psi(F) \leq n_2 n_1 + n_2.$$

Поэтому, чтобы  $\Psi$  удовлетворяло условию (3), надо сдвинуть ее значения на  $n_2$ . Для этого перейдем от функции (П.3) к функции (П.4)

$$\Psi(F) = n_2 (f_1 - 1) + f_2, \quad (\text{П.4})$$

которая действительно изменяется в интервале

$$1 \leq \Psi(F) \leq n_1 n_2.$$

От случая двух свойств легко перейти к трем свойствам:

$$\begin{aligned} \Psi(F) &\equiv \Psi(f_1, f_2, f_3) = n_3 [\Psi(f_1, f_2) - 1] + f_3 = \\ &= n_3 n_2 (f_1 - 1) + n_3 (f_2 - 1) + f_3. \end{aligned}$$

и далее аналогично к  $M$  свойствам, см. (2I).

2. Вычислим показатели единичной и полной мощности свойств  $f_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i = 1, 2, \dots, M$ , стоящих в правой части (2I). Согласно (23) и (24),

$$\begin{aligned} m_1(f_{\alpha_i}) &= n_{\alpha_{i+1}} n_{\alpha_{i+2}} \dots n_{\alpha_M}, \\ m_0(f_{\alpha_i}) &= n_{\alpha_{i+1}} n_{\alpha_{i+2}} \dots n_{\alpha_M} (n_{\alpha_i} - 1). \end{aligned}$$

Поэтому свойство  $f_{\alpha_i}$  всегда является руководящим по отношению к любому свойству, стоящему в (2I) после него, т.к.

$$m_1(f_{\alpha_i}) > m_0(f_{\alpha_{i+1}}), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1,$$

оно является руководящим даже по отношению ко всем свойствам, стоящим в (2I) после него, вместе взятым. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M-1} m_0(f_{\alpha_{i+1}}) &= n_{\alpha_{i+2}} n_{\alpha_{i+3}} \dots n_{\alpha_M} (n_{\alpha_{i+1}} - 1) + \\ &+ n_{\alpha_{i+3}} \dots n_{\alpha_M} (n_{\alpha_{i+2}} - 1) + \\ &+ \dots + \\ &+ n_{\alpha_M} (n_{\alpha_{M-1}} - 1) + \\ &+ (n_{\alpha_M} - 1) = \\ &= n_{\alpha_{i+1}} n_{\alpha_{i+2}} \dots n_{\alpha_M} - 1 < m_0(f_{\alpha_i}). \end{aligned}$$

## Л и т е р а т у р а

1. ДАНБАР К., РОДЖЕРС Дж. Основы стратиграфии. М., ИЛ, 1962.
2. ПОГРЕБИЦКИЙ Е.О., ИВАНОВ Н.В., СКРОПЬШЕВ А.В. и др. Поиски и разведка месторождений полезных ископаемых. М., "Недра", 1968.
3. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. Фации и формации. Парагенезис. Новосибирск, "Наука", 1972.
4. КЕМЕНИ Дж., СНЕЛЛИ Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. М., "Советское радио", 1972; гл.2, п.2.
5. ВОРОНИН Ю.А., МАРАСУЛОВ А.Ф., ТИТОВ А.А., ШЕВЧЕНКО Н.Г. О математическом обеспечении ЭВМ для отыскания оптимальных подпространств с целью решения задач распознавания. - В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1972.

Ф.А. Усманов

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ГЕОЛОГИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ И ИХ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

І. В в е д е н и е

Один из основных методов изучения неоднородных геологических объектов сводится к выделению геологических тел, однородных по тем или иным признакам, исследованию выделенных тел и отношений между ними. Этот метод, возникший из-за потребностей компактного описания главнейших свойств сложных неоднородных геологических объектов, начал разрабатываться, вероятно, со времени появления первых зарисовок обнажений и шлифов горных пород, геологических карт, схем и т.п., и сейчас накоплен большой опыт его применения. Разработаны (в основном на содержательном уровне) способы выделения однородных по данным признакам геологических тел, входящих в сложные тела; выделены главнейшие отношения между геологическими телами, такие как "контактирование", "пересечение" (в геологическом смысле), "включение", "неотличимость", "сходство" (например, по составу), отношения относительного возраста — "древнее", "моложе", "одновозрастные", отношения относительного пространственного положения — "выше", "ниже", отношения по условиям формирования — "сходные или эквивалентные по фаціальности",

отношения по генетическому родству и т.п. Выделены наиболее важные задачи, возникающие при изучении отношений между геологическими телами, и найдены возможные пути их решения. В частности, можно указать на существующие способы определения отношений между геологическими телами по возрасту (относительного возраста), через другие отношения (например, установление относительного возраста даек на основании изучения их пересечений, определение возрастной последовательности слоев осадочных пород по данным их пространственного взаиморасположения в разрезах и т.п.).

Интенсивный процесс проникновения математики во все области геологии, а также задачи эффективного использования ЭВМ для обработки геологической информации привели к необходимости формального, математического освоения и дальнейшего развития исторически сложившихся содержательных геологических представлений. Вопросы выделения, описания и классификации геологических тел с формальных позиций достаточно подробно рассматриваются в работах [2,4,5,6,8,9,15]. Однако отношения между геологическими телами в математическом плане специально и систематически не исследовались. Имеются публикации [2,3,4,6,7,8,16,17,18,24], в которых в связи с теми или иными задачами математической геологии освещались некоторые вопросы изучения отношений в геологии и отношений между геологическими телами. В них, в частности, рассматриваются: возможность использования в геологии бинарных отношений между структурными элементами по их пространственному положению для описания геологических структур [2]; изоморфность отношений между геологическими телами в стратиграфии "выше", "ниже" "эквивалентно" отношениям между событиями "позже", "раньше" и "одновременно" [16]; формальные определения и свойства некоторых отношений между геологическими телами [2,3,4,6,7,8].

Из перечисленных выше работ видно, что при формальной интерпретации многих геологических проблем возникают вопросы, касающиеся отношений между геологическими телами. Важность этих вопросов и необходимость их специального рассмотрения вытекает из специфики указанного в начале основного метода исследования строения неоднородных геологических объектов. Математическое исследование отношений между геологическими

телями необходимо для повышения строгости, точности геологических построений и автоматизации обработки геологической информации с помощью ЭВМ (для математической постановки и решения ряда геологических задач, создания информационно-поисковых систем, автоматического анализа с помощью ЭВМ геологической картографической информации; для строгого описания и сопоставления строения горных пород, участков земной коры и т.п.).

Учитывая это, автором предпринята попытка рассмотреть основные отношения между геологическими телами с позиций общей теории бинарных отношений и теории графов [10, 11, 19, 20, 23, 25-29]. Сначала с помощью логических и математических терминов были построены экспликации и обобщения существующих геологических понятий, относящихся к наиболее важным отношениям между геологическими телами. Затем, используя введенные отношения, были исследованы математические свойства основных типов структур геологических объектов и задач на нахождение отношений между геологическими телами. В настоящей работе излагается часть результатов этих исследований, относящаяся к формальному определению основных бинарных отношений между геологическими телами и выявлению их математических свойств. В ходе исследований выяснилось, что для описания многих свойств систем геологических тел достаточно ограничиться введением основных бинарных отношений на множествах тел и использованием теории бинарных отношений (не прибегая к общей теории  $n$ -арных отношений). Установление соответствия между отношениями на множествах геологических тел, с одной стороны, и понятиями теории бинарных отношений и теории графов, с другой, дает возможность использовать достижения этих хорошо развитых математических теорий (методы, понятия, теоремы, связи между различными отношениями, их свойства и т.п.) в геологии.

Перечислим основные термины и обозначения, использованные в данной работе.

Термин "геологическое тело" нами применяется в соответствии с формальным определением, приведенным в [2]. Согласно этому определению геологическое тело представляет собой связанную область произвольной формы и размеров внутри пространства, занятого планетой Земля, для выделения которой существу-

ет однозначная процедура<sup>1)</sup>. Примерами геологических тел являются кристаллы и другие составные части горных пород, интрузивные тела, рудные тела, слои осадочных пород, материка, оболочки Земли и т.п.

Необходимость введения понятия, охватывающего содержательно столь различные объекты, вызвана тем, что существует большая группа задач, которые математически формулируются одинаково для всех геологических тел, независимо от их абсолютных размеров.

Статической системой геологических тел будем называть множество геологических тел  $L = \{G_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , с числом тел  $k \geq 2$ , в фиксированный момент времени.

Используя понятия геологического тела [2] и отношения в теории множеств, определим бинарные отношения на множестве геологических тел как упорядоченную пару множеств  $\varphi = \langle \Phi, L \rangle$ , где  $\Phi \subseteq L \times L$ ,  $L \times L$  - множество всевозможных упорядоченных пар геологических тел из  $L$  вида  $\langle G_i, G_j \rangle$ .

Абстрагируясь от некоторых свойств реальной системы геологических тел  $L = \{G_i\}$ , вместо нее можно рассматривать ее геометрическую модель - множество  $M = \{A_i\}$  закрытых связанных областей (геометрических тел), в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$ , совпадающую с ней по всем геометрическим характеристикам (формы, размеров тел, относительного пространственного их положения, ориентации и т.п.). Основываясь на этом, в дальнейшем определения и утверждения будем формулировать для произвольного множества  $M = \{A_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) геометрических тел в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$ . На произвольном множестве тел в  $R^3$  можно ввести много различных отношений. Однако ниже мы будем рассматривать те из них, которые обычно используются при изучении множеств геологических тел. Например, в качестве одного из отношений относительного пространственного положения между телами можно было бы ввести отношения, определяемые на основании замеров расстояний между центрами масс тел или средними величинами кривизны их поверхности. Однако ниже это отношение не рассматривается, т.к. в силу тех или иных причин (вероятно, трудности замера указанных величин) оно в геологии широко не используется. На-

1) Строгое определение геологического тела см. в [2].

против, отношения контактирования или изолированности, рассмотренные ниже, широко применяются в геологии.

Кроме обозначений и терминов, введенных выше и используемых обычно в теории множеств и математической логике, мы будем, опираясь на работы [12,13,14,27,29], употреблять также следующие.  $\Phi_M = \langle \Phi, M \rangle$  – бинарное отношение, где  $\Phi \subseteq M \times M$ ,  $M$  – базисное множество,  $\Phi$  – график отношения. В том случае, когда это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать индекс  $M$  в символе  $\Phi_M$ .  $A_i \Phi A_j$  – тело  $A_i$  находится в отношении  $\Phi$  к телу  $A_j$ .  $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \langle \Phi_1 \cup \Phi_2, M \rangle$  – объединение отношений  $\Phi_1 = \langle \Phi_1, M \rangle$  и  $\Phi_2 = \langle \Phi_2, M \rangle$ .  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \langle \Phi_1 \cap \Phi_2, M \rangle$  – пересечение отношений  $\Phi_1 = \langle \Phi_1, M \rangle$  и  $\Phi_2 = \langle \Phi_2, M \rangle$ .  $\Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_n$  – произведение (композиция) отношений  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ , заданных на множестве  $M$ . В частном случае, при  $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_n$ ,  $\underbrace{\Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi}_n = \Phi^n$ ; отношение  $\Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_n$  выполняется тогда и только тогда, когда существует такая последовательность  $G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$ ;  $G_i \in M$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , что  $G_1 \Phi_1 G_1, G_1 \Phi_2 G_2, G_2 \Phi_3 G_3, \dots, G_{n-2} \Phi_{n-1} G_{n-1}, G_{n-1} \Phi_n G_j$ .  $\bar{\Phi} = \Phi \cup \Phi^2 \cup \Phi^3 \cup \dots$  – транзитивизация или транзитивное замыкание отношения  $\Phi$ .  $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$  – "отношение  $\Phi_1$  включается в отношение  $\Phi_2$ " (для графиков  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  отношений  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  выполняется условие  $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ ).  $\Phi^{-1}$  – обращение (инверсия) отношения  $\Phi$  ( $G_i \Phi^{-1} G_j \iff G_j \Phi G_i$ ).  $\bar{\Phi}$  – дополнение к отношению  $\Phi$  ( $G_i \bar{\Phi} G_j \iff \neg (G_i \Phi G_j)$ ).  $\Phi_1 \setminus \Phi_2 = \langle \Phi_1 \setminus \Phi_2, M \rangle$  – разность отношений  $\Phi_1 = \langle \Phi_1, M \rangle$  и  $\Phi_2 = \langle \Phi_2, M \rangle$ .

## II. Основные исходные бинарные отношения на множествах геологических тел.

Определения. Примеры.

Определения, обозначения и названия основных исходных бинарных отношений на произвольном множестве тел  $M = \{A_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  приведены в табл. I. Ниже даются некоторые пояснения к этой таблице.

При рассмотрении относительного пространственного располо-

жения любых двух тел  $A_i$  и  $A_j$  в  $R^3$  может возникнуть одна и только одна из следующих ситуаций.

1). Тела  $A_i$  и  $A_j$  не имеют общих точек, т.е. они изолированы друг от друга. Этому случаю соответствует определенное в табл. I бинарное отношение изолированности  $\alpha$ .

2). Тела  $A_i$  и  $A_j$  "соприкасаются" по некоторым поверхностям, линиям или в точках (т.е. общая часть  $A_i \cap A_j$  есть непустое множество точек, объем которого равен нулю). Этому случаю отвечает отношение соприкосновения  $\beta$ , определение которого приведено в табл. I.

3). Тела  $A_i$  и  $A_j$  пространственно "совмещаются", если под этим понимать то, что имеется некоторая конечная область трехмерного пространства, являющаяся одновременно частью одного и другого тела (т.е. общая часть  $A_i \cap A_j$  тел  $A_i$  и  $A_j$  есть множество точек в  $R^3$ , объем которого не равен нулю). Этому случаю соответствует определенное в табл. I. отношение совместимости  $\gamma$ .

Частным случаем соприкосновения двух тел является контактирование, понимаемое как соприкосновение тел по некоторой поверхности или по конечному числу поверхностей. Соответствующее бинарное отношение, названное отношением контактирования  $\sigma$ , определено в табл. I. Отношение контактирования является одним из важнейших и широко распространенных среди отношений между геологическими телами. Это обусловлено указанным в разделе I основным методом исследования неоднородных геологических объектов, путем проведения в них поверхностей (поверхностей контакта), ограничивающих составляющие эти объекты геологические тела. В данной работе предпринята попытка систематизации отношений контактирования по некоторым топологическим свойствам поверхности  $G_i \cap G_j$ , называемой контактовой поверхностью, и характеру соответствия формы этой поверхности контактирующим телам. По общим топологическим свойствам контактовой поверхности выделены следующие три типа отношений контактирования (табл. I).

I. Вмещающее контактирование  $\sigma_1$ . Это отношение выполнено для упорядоченной пары тел  $\langle A_i, A_j \rangle$  тогда и только тогда, когда они контактируют по замкнутой поверхности, во внутреннюю сторону от которой расположено те-

ло  $A_2$ , а во внешнюю — тело  $A_1$ . В отношении вмещающего контактирования, например, находятся: кристалл с включенным в нем более мелким кристаллом; зона в зональном кристалле к следующей, внутренней по отношению к ней зоне; интрузивное тело к включенному в нем останцу кровли; земная кора к верхней мантии и т.п.

2. Частично вмещающее контактирование  $\sigma_2$ . Это отношение выполнено для всякой упорядоченной пары тел  $\langle A_1, A_2 \rangle$  тогда и только тогда, когда общая их граница представляет собой поверхность, ограниченную двумя кривыми, относительно которой тело  $A_1$  является внешним, а  $A_2$  — внутренним. Таким образом, поверхность контакта (общая граница между телами) в случае вмещающего контактирования топологически эквивалентна (гомеоморфна) сфере, а в случае частично вмещающего контактирования — боковой поверхности цилиндра (непрерывной деформацией и без склеиваний ее можно преобразовать в поверхность цилиндра с удаленными основаниями <sup>1)</sup>). В отношении вмещающего контактирования находится, например, некоторый пласт осадочной породы к "проходящей насквозь" его жиле (или же дайке, штоку и т.п.); при этом подразумевается, что, в месте прохождения жилы через данный пласт, вмещающей породой является только порода этого пласта.

3. Простое контактирование  $\sigma_3$ . В этом отношении находится всякая пара тел  $\langle A_1, A_2 \rangle$ , для которой выполнено отношение контактирования  $\sigma$ , но не выполнены отношения вмещающего  $\sigma_1$  и частично вмещающего  $\sigma_2$  контактирования и их инверсии (обращения)  $\sigma_1^{-1}$ ,  $\sigma_2^{-1}$  (строгое определение этого отношения через  $\sigma$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_1^{-1}$ ,  $\sigma_2^{-1}$  дано в разделе III). Если при выполнении отношений вмещающего и частично вмещающего контактирования одно из контактирующих тел можно рассматривать как внутреннее относительно поверхности контакта, а второе — как внешнее, то в случае простого кон-

1) Более строго — существует такая взаимно однозначная функция  $f: P \rightarrow \mathcal{P}$ , что эта функция и обратная ей функция  $f^{-1}: \mathcal{P} \rightarrow P$  непрерывны [22], где  $P = G_1 \cap G_2$ ,  $\mathcal{P}$  — боковая поверхность произвольного цилиндра.

тактирования оба тела занимают одинаковое в указанном смысле положение. Отношение простого контактирования выполнено, например, для соседних контактирующих зерен пород, для контактирующих пластов осадочных пород и т.п.

Рассмотрим теперь типы отношений контактирования, выделяемые по характеру соответствия формы контактовой поверхности контактирующим телам.

Для введения этих отношений вначале разберем несколько примеров. На рисунке I показаны соотношения фигур по форме общей их границы, построенные с помощью двух исходных фигур: ромба I и квадрата 2 (рис. а).

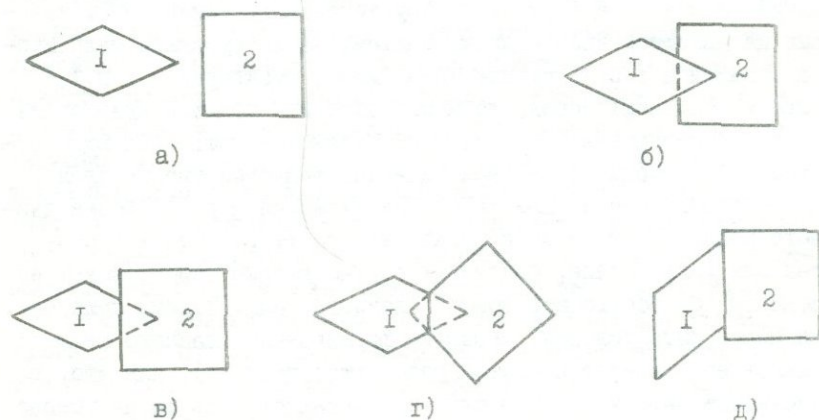


Рис. I. Отношения между фигурами по форме общей границы.

На рис. б) общая граница между фигурами является частью контура ромба, а на рис. в) — частью контура квадрата. На рис. г) — общая граница не является частью контура ни квадрата и ни ромба, на рис. д) — наоборот, границу можно рассматривать как часть контура ромба и как часть контура квадрата. Отношения, аналогичные этим, широко используются при описании структур кристаллических агрегатов (кристаллических горных пород, сплавов и т.п.). В петрографии при рассмотрении структур кристаллических пород вводится понятие собственной формы кристалла (зерна), идиоморфизма и ксеноморфизма [21]. Если фигуры I и 2 на рис. I рассматривать как плоские срезы кристаллов,

соответственно, тригональной и кубической сингоний, то отношения, показанные на этом рисунке в терминах петрографии, можно выразить следующим образом: рис. б) - "кристалл I идиоморфный (относительно кристалла 2), кристалл 2 ксеноморфный (относительно кристалла I)" или, по-другому: "кристалл I на границе с кристаллом 2 обладает собственной формой, а кристалл 2 ею не обладает"; рис. в) - "кристалл 2 - идиоморфный, кристалл I - ксеноморфный"; рис. г) - "кристаллы I и 2 - оба ксеноморфные"; рис. д) - "кристаллы I и 2 - оба идиоморфные".

Таким образом, в случае кристаллов формы каждого реального кристалла сопоставляется форма фигуры (форма идеального кристалла), называемая собственной формой. Если расширить понятие собственной формы и на другие геологические тела, которые не являются кристаллами, скажем, на интрузивные тела (штолки, дайки и т.п.), рудные тела (жилы, штокверки и т.п.), пласты осадочных пород, то можно обобщить понятия идиоморфизма и ксеноморфизма. Это обобщение можно сделать следующим образом. Некоторым типам геологических тел свойственна своя форма (собственная, или характеристическая форма). Форма данного реального тела на контакте его со вторым телом в силу тех или иных причин, связанных с этим вторым телом, может не совпасть с собственной формой данного тела. Такими причинами могут быть условия, мешавшие формированию данного тела (например, наличие при этом рядом второго тела), как это, в частности, имеет место в случае кристаллов, или же нарушение первичной формы тела при формировании соседнего тела. Приведем пример. Допустим, что некоторый гранитовый интрузив  $G_1$  "прорывает" толщину известняков  $G_2$ , на эродированной поверхности тела гранитов  $G_1$  залегает слой конгломератов  $G_3$ ; все породы пересечены дайкой диабаза  $G_4$ . Если в качестве собственной формы этих тел условиться считать форму их "первичной" поверхности (реконструированную некоторым способом) то, приводя формальную аналогию с рассмотренным выше примером можно сказать, что тело гранитов на контакте с известняками обладает собственной формой (идиоморфно), а на контакте со слоем конгломератов  $G_3$  и дайкой диабаза  $G_4$  не обладает ею (ксеноморфно); дайка  $G_4$  идиоморфна на контакте со всеми остальными телами и т.п.

Рассмотренные выше и подобные им примеры формально можно обобщить следующим образом. Каждому телу  $A_i$  на основании его свойств каким-нибудь образом ставится в соответствие некоторая замкнутая поверхность  $\psi(A_i)$ , которую будем называть далее характеристической поверхностью данного тела. Эта поверхность может совпасть с поверхностью самого тела или ее частью. В общем случае характеристическая поверхность произвольного тела  $A_i$  строится на основании каких-либо свойств этого тела. В частном случае она строится путем экстраполяции каких-нибудь частей поверхности самого тела, как это показано на рисунке I (пунктирные линии). Общие формальные определения исходных отношений, выделенных по характеру соответствия формы контактовой поверхности контактирующим телам, приведены в табл. I. Названия этих отношений — идиоморфизм (автоморфизм), панидоморфизм, панксеморфизм, составлены из наиболее близких по значению терминов петрографии. Отношение идиоморфизма  $\omega_1$  выполняется для упорядоченной пары контактирующих тел  $\langle A_i, A_j \rangle$  тогда и только тогда, когда контактовая поверхность совпадает с характеристической поверхностью (или ее частью) первого тела и не совпадает с характеристической поверхностью второго тела. Инверсию (обращение)  $\omega_1^{-1}$  отношения идиоморфизма можно назвать отношением ксеморфизма.

Отношение панидоморфизма (панксеморфизма) выполняется только в том случае, когда поверхность контакта является (соответственно, не является) характеристической поверхностью обоих контактирующих тел.

Очевидно, что высказывание о выполнении определенных таким образом отношений идиоморфизма, ксеморфизма, панидоморфизма и панксеморфизма приобретает содержательный смысл только в том случае, когда указан конкретный способ получения характеристической поверхности каждого тела. Это обстоятельство отражено введением оператора  $\psi$  в определении перечисленных отношений.

Выделенные выше типы отношений контактирования соответствуют общим геометрическим свойствам границы между телами. Для более подробной систематики этих отношений можно использовать классификации геологических границ, разработанных Ю.А. Ворониным, С.В. Гольдиным и др. [2,8].

Основные бинарные отношения на произвольном множестве тел  $M$  в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$ .

№ п/п	Обозначение и название отношения	Определение отношения
I	2	3
I	$\alpha$ - изолированность, $A_1 \alpha A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ не имеют общих точек" или "тело $A_1$ изолировано от тела $A_2$ ", $A_1, A_2 \in M$ .	$(A_1 \alpha A_2) \stackrel{Df}{\iff} [(A_1 \cap A_2) = \emptyset],$ $A_1, A_2 \in M.$
2	$\beta$ - соприкосновение, $A_1 \beta A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ соприкасаются".	$(A_1 \beta A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) \neq \emptyset] \wedge$ $\wedge [v(A_1 \cap A_2) = 0]\}, A_1, A_2 \in M,$ где $v(A_1 \cap A_2)$ - объем множества $A_1 \cap A_2$ .
3	$\sigma$ - контактирование, $A_1 \sigma A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ контактируют".	$(A_1 \sigma A_2) \stackrel{Df}{\iff} [(A_1 \cap A_2) = P],$ $A_1, A_2 \in M,$ где $P$ - конечное множество поверхностей в $R^3$ ( $P \neq \emptyset$ ).
4	$\sigma_1$ - вмещающее контактирование, $A_1 \sigma_1 A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ контактируют по замкнутой поверхности, во внутреннюю сторону от которой расположено тело $A_2$ ".	$(A_1 \sigma_1 A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) = P'] \wedge$ $\wedge (A_2 \subseteq D_{P'})\}, A_1, A_2 \in M,$ где $P'$ - произвольная замкнутая поверхность в $R^3$ , $D_{P'}$ - область в $R^3$ , ограниченная поверхностью $P'$ .

1	2	3
5	$\sigma_2$ - частично вмещающее контактирование, $A_1 \sigma_2 A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ контактируют по поверхности, ограниченной двумя замкнутыми линиями, во внешнюю сторону от которых расположено тело $A_1$ , во внутреннюю - тело $A_2$ ".	$(A_1 \sigma_2 A_2) \stackrel{Df}{\iff} [(A_1 \cap A_2) = P'']$ , $A_1, A_2 \in M$ , где $P''$ - произвольная поверхность, ограниченная двумя замкнутыми линиями, относительно которых $A_1$ является внешним, $A_2$ - внутренним (поверхность $P''$ - топологически эквивалентна боковой поверхности цилиндра).
6	$\omega_1$ - идиоморфизм (автоморфизм) $A_1 \omega_1 A_2$ - "по заданному оператору $\psi$ тело $A_1$ идиоморфно относительно тела $A_2$ , тело $A_2$ ксеноморфно относительно тела $A_1$ ".	$(A_1 \omega_1 A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) \subseteq \psi(A_1)] \wedge [(A_1 \cap A_2) \not\subseteq \psi(A_2)]\}$ , $A_1, A_2 \in M$ , где $\psi: M \rightarrow S$ - отображение (оператор), которое каждому телу $A_i \in M$ ( $M = \{A_i\}$ ) ставит в соответствие некоторую замкнутую поверхность $\psi(A_i) \in S$ $(S = \{\psi(A_i)\})$ .
7	$\omega_2$ - панидиоморфизм, $A_1 \omega_2 A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ идиоморфны по заданному оператору $\psi$ ".	$(A_1 \omega_2 A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) \subseteq \psi(A_1)] \wedge [(A_1 \cap A_2) \subseteq \psi(A_2)]\}$ , $A_1, A_2 \in M$ .
8	$\omega_3$ - панксенорморфизм, $A_1 \omega_3 A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ ксенорморфны по заданному оператору $\psi$ ".	$(A_1 \omega_3 A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) \not\subseteq \psi(A_2)] \wedge [(A_1 \cap A_2) \not\subseteq \psi(A_1)]\}$ , $A_1, A_2 \in M$ .
9	$\gamma$ - совместимость, $A_1 \gamma A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ - имеют общую часть".	$(A_1 \gamma A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) \neq \emptyset] \wedge [v(A_1 \cap A_2) \neq 0]\}$ , $A_1, A_2 \in M$ .

I	2	3
I0	$\gamma_1$ - частичная совместимость, $A_1 \gamma_1 A_2$ - "тела $A_1$ и $A_2$ имеют общую часть, не совпадающую полностью ни с одним из них".	$(A_1 \gamma_1 A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) = D] \wedge \wedge (D \neq A_1) \wedge (D \neq A_2)\}, A_1, A_2 \in M,$ $D$ - область трехмерного евклидова пространства $R^3$ .
II	$\gamma_2$ - включение, $A_1 \gamma_2 A_2$ (или $A_2 \subseteq A_1$ ) - "тело $A_1$ включает тело $A_2$ ("тело $A_1$ и $A_2$ имеют общую часть, совпадающую с телом $A_2$ ").	$(A_1 \gamma_2 A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap A_2) = D] \wedge \wedge (D = A_2)\} \iff (A_2 \subseteq A_1),$ $A_1, A_2 \in M.$
I2	$\eta$ - вмещение, $A_1 \eta A_2$ - "тело $A_1$ вмещает тело $A_2$ ".	$(A_1 \eta A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{ \exists P [(P \subseteq A_1) \wedge \wedge (A_2 \subseteq D_P)] \}, A_1, A_2 \in M,$ где $P$ - некоторая замкнутая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве $R^3$ , $D_P$ - область в $R^3$ , ограниченная поверхностью $P$ .
I3	$\lambda$ - следование, $A_1 \lambda A_2$ - "при движении по заданной линии в фиксированном направлении тело $A_1$ будет пересечено раньше тела $A_2$ ".	$(A_1 \lambda A_2) \stackrel{Df}{\iff} \{[(A_1 \cap \mathcal{L}) \neq \emptyset] \wedge \wedge (A_2 \cap \mathcal{L}) \neq \emptyset \wedge [q(A_1 \cap \mathcal{L}) < q(A_2 \cap \mathcal{L})]\}, A_1, A_2 \in M,$ где $q(A_1 \cap \mathcal{L})$ и $q(A_2 \cap \mathcal{L})$ - номера пересечений тел $A_1$ и $A_2$ линией $\mathcal{L}$ (нумерация произведена по порядку пересечений тел при движении по линии $\mathcal{L}$ в заданном направлении).
I4	$\kappa$ - совмещение преобразованием (отображением), $A_1 \kappa A_2$ - "тела $A_1$ и	$(A_1 \kappa A_2) \stackrel{Df}{\iff} (\exists f \in F) [(f^{-1} \in F) \wedge \wedge (f: A_1 \rightarrow A_2) \wedge (f^{-1}: A_2 \rightarrow A_1)],$ $A_1, A_2 \in M,$

1	2	3
I4	$A_j$ можно совместить друг с другом преобразованием $f \in F^n$ .	где $f$ - взаимно однозначная функция, ставящая каждой точке $P \in A_1$ в соответствие точку $P' \in A_2$ . $f^{-1}$ - обратная функция, $F$ - множество функций, удовлетворяющих некоторым заданным условиям.
I5	$\rho^0$ - упорядоченность по характеристикам, $A_i \rho^0 A_j$ - "значение функции $f$ в $A_i$ меньше, чем в $A_j$ ".	$(A_i \rho^0 A_j) \stackrel{Df}{\iff} [f(A_i) < f(A_j)], A_i, A_j \in M$ , где $f(A_i)$ и $f(A_j)$ - значения функции $f: M \rightarrow D$ , ставящей каждому телу $A_i \in M$ одно число из множества действительных чисел $D$ .
I6	$\epsilon_0$ - эквивалентность по характеристикам, $A_i \epsilon_0 A_j$ - "значения функции $f$ в $A_i$ и $A_j$ равны".	$(A_i \epsilon_0 A_j) \stackrel{Df}{\iff} [f(A_i) = f(A_j)],$ $A_i, A_j \in M.$

Рассмотрим теперь отношение совместимости  $\gamma$ . Выше было отмечено, что это отношение выполняется в том случае, когда имеется некоторая конечная область трехмерного пространства, являющаяся одновременно частью одного и другого тела. В табл. I определены следующие типы отношений совместимости: 1) частичная совместимость  $\gamma_1$  (два тела имеют общую часть, не совпадающую полностью ни с одним из них), 2) включение  $\gamma_2$  (каждая точка второго тела является также точкой и первого тела). Приведем примеры. Пусть в некотором гранитовом массиве  $G_0$  выделены тела  $G_1$  и  $G_2$ , соответственно, биотитовых и лейкократовых гранитов, а также альбитизированных гранитов  $G_3$ , состоящих из альбитизированных разностей биотитовых и лейко-

кратовых гранитов. В этом случае отношение включения  $\gamma_2$  выполнено для следующих упорядоченных пар тел:  $\langle G_0, G_1 \rangle$ ,  $\langle G_0, G_2 \rangle$ ,  $\langle G_0, G_3 \rangle$ , а частичной совместимости  $\gamma_1$ :  $\langle G_1, G_3 \rangle$  и  $\langle G_2, G_3 \rangle$ . Другой пример. Пусть в каком-либо районе выделена некоторая металлогеническая зона. Эта зона (рассматриваемая как первое тело) к каждому из геологических тел, частично или полностью входящим в нее, находится в бинарном отношении, соответственно, частичной совместимости  $\gamma_1$  и в отношении включения  $\gamma_2$ . Все перечисленные выше отношения между геологическими телами по пространственному их положению для облегчения их сопоставления определены через пересечение множеств точек  $(A_i \cap A_j)$ , хотя некоторые из них могли бы быть более просто определены через другие операции над множествами.

Отношение вмещения  $\eta$  выполнено только в том случае, когда существует некоторая замкнутая поверхность  $P$ , удовлетворяющая условиям: 1) все точки поверхности  $P$  являются также и точками тела  $A_i$  ( $P \subset A_i$ ), 2) все точки тела  $A_j$  принадлежат области  $D_P$ , ограниченной поверхностью  $P$  ( $A_j \subset D_P$ ). Из соответствующих определений, приведенных в табл. I, следует, что, если для произвольной пары тел  $\langle A_i, A_j \rangle$  выполнено вмещающее контактирование  $\sigma_1$  или включение  $\gamma_2$ , то для этой пары тел выполнено также отношение вмещения  $\eta$ , т.е.  $\sigma_{1,M} \subseteq \eta_M$ ;  $\gamma_{2,M} \subseteq \eta_M$ , где  $M$  — произвольное множество тел. Однако обратное утверждение в общем случае не справедливо, т.к. существуют такие пары тел, для которых выполнено вмещение  $\eta$ , но не выполнены вмещающее контактирование  $\sigma_1$  и включение  $\gamma_2$ . Такой случай имеет место, например, тогда, когда  $G_1$  и  $G_3$  являются неконтактирующими зонами некоторого концентрически зонального геологического тела.

Отношение следования  $\lambda$  будет выполнено между двумя телами  $A_1$  и  $A_2$  в том случае, когда при движении по заданной линии  $L$  в фиксированном направлении второе тело следует после первого (для редукции  $\lambda^T$  этого отношения — второе тело непосредственно следует после первого, для инверсии  $\lambda^{-1}$  — первое тело следует после второго, для объединения  $\lambda \cup \lambda^{-1}$  отношения следования  $\lambda$  и его инверсии  $\lambda^{-1}$  — одно из двух тел следует после другого). Отношение следования  $\lambda$  будет выполнено, например, для двух пластов осадочных пород, если

известно, что в некотором разрезе при движении в фиксированном направлении (например, снизу вверх) пласт № 2 встречен после пласта № I или если при пересечении шлифа по некоторой линии в фиксированном направлении зерно № 2 следует после зерна № I. Таким образом, отношение следования имеет место в том случае, когда можно говорить о некоторой последовательности в пространственном расположении геологических тел.

Многие отношения между геологическими телами характеризуются совпадением некоторых их геометрических свойств. Отношения этого типа можно сформулировать с помощью понятия преобразования (отображения) точек пространства, удовлетворяющих тем или иным условиям. Основой для этого может служить следующее положение: различия в пространственном положении, ориентации, формы и размеров двух сопоставляемых тел определяют вид преобразований, нужных для совмещения одного из них с другим. Зависимость свойств преобразований, необходимых для совмещения одного тела с другим, от их относительного пространственного положения, ориентации и сходства формы можно использовать для выделения отношений между ними по этим признакам. При выделении этих отношений, учитывая большое разнообразие отношений между геологическими телами, целесообразно не ограничиваться существующими в различных областях геометрии понятиями эквивалентности фигур и основываться на общем понятии преобразования (отображения). Поэтому мы будем говорить вообще об отношениях совмещения произвольными преобразованиями. Общую схему выделения таких отношений можно выразить следующим образом. Пусть  $A_i$  и  $A_j$  два тела, принадлежащие некоторому множеству тел  $M$ . Будем говорить, что для пары тел  $\langle A_i, A_j \rangle$  выполнено отношение совмещения преобразования вида  $F$ , если существует взаимно однозначное отображение  $f: A_i \rightarrow A_j$ , переводящее  $A_i$  в  $A_j$ , и обратное отображение  $f^{-1}: A_j \rightarrow A_i$ ; такие, что  $f, f^{-1} \in F$ , где  $F$  - класс функций, обладающих определенными свойствами. В зависимости от этих свойств можно вводить различные отношения данного типа. Общие формальные определения отношений этого типа приводятся в табл. I. Это определение можно рассматривать как некоторую "форму", в том смысле, что подставляя вместо  $F$  в данное определение мно-

жество функций, удовлетворяющих условиям, выполняющимся при тех или иных преобразованиях, можно получить определения отношений совмещения соответствующими преобразованиями. Например, если в это определение вместо  $F$  поставить  $F_1$ , обозначающее класс непрерывных функций, то мы получим определение отношения совмещения гомеоморфизмом (топологическим преобразованием). Приведем некоторые отношения, которые можно определить указанным способом:  $\kappa_1$  - совмещение параллельным переносом,  $\kappa_2$  - совмещение движением,  $\kappa_3$  - совмещение аффинным преобразованием,  $\kappa_4$  - совмещение преобразованием подобия (отношения подобия),  $\kappa_5$  - совмещение проективным преобразованием (эквивалентность в проективной геометрии),  $\kappa_6$  - совмещение топологическим преобразованием (топологическая эквивалентность). Заметим, что отношения совмещения параллельными переносом и движением включаются в отношение эквивалентности фигур в евклидовой геометрии, т.е. из  $A_1 \kappa_1 A_2$  или  $A_1 \kappa_2 A_2$  следует эквивалентность  $A_1$  и  $A_2$  в указанном смысле.

Приведем некоторые иллюстративные примеры. Отношение  $\kappa_4$  выполняется, в частности, для двух кристаллов одинаковой формы (которые можно рассматривать как подобные фигуры).

Два пласта осадочных пород, залегающих без углового несогласия, при некоторых дополнительных условиях можно рассматривать как тела, которые можно совместить с помощью параллельного переноса и сжимающего отображения, а в случае их залегания с угловым несогласием - кроме того, еще и некоторого вращения. Следовательно, для них будут выполняться, соответственно, совмещение параллельным переносом и сжимающим отображением, совмещение параллельным переносом, сжимающим отображением и вращением.

Совмещение топологическим преобразованием выполняется для пар топологически эквивалентных тел. Например, между двумя произвольным образом изогнутыми пластами; между двумя рудными телами, одно из которых имеет пластообразную, а другое - изометрическую форму; между двумя оболочками Земли и т.п. Однако совмещение топологическим преобразованием не выполняется между ядром Земли и ее оболочками, между фигурами, представляющими собой поперечные сечения кольцевой дайки и дайки обычной формы, между вмещающим и вмещаемым телом, если это

вмещающее тело само не вмещает другие тела.

Можно выделить два типа отношений строгой упорядоченности  $\rho_0$  и эквивалентности  $\varepsilon_0$  по характеристикам.

1. Отношения упорядоченности  $\rho_1$  и эквивалентности  $\varepsilon_1$  по значениям количественного признака. Определение этих отношений можно получить, соответственно, из определений отношений  $\rho_0$  и  $\varepsilon_0$ , если в них дополнительно указать, что значения функции  $f$  представляют собой значения некоторого количественного признака. В качестве примеров  $\rho_1$  и  $\varepsilon_1$  можно привести отношения сопоставления геологических тел по значениям любого количественного признака  $W$ : величины среднего содержания какого-либо компонента в телах, геометрических характеристик тел (размеров, объема и т.п.) и др. В частности, если  $W = V$ , где  $V$  — величина объема тел, то  $A_i \rho_1 A_j$  — "объем тела  $A_i$  меньше объема тела  $A_j$ ". Отношения  $\rho_1$  и  $\varepsilon_1$  в том случае, когда  $W = T$ , где  $T$  — величина возраста геологических тел, определяемая как и в [2], обозначим, соответственно, через  $\tau_1, \tau_2$ . Эти отношения характеризуют относительный возраст геологических тел:  $G_i \tau_1 G_j$  — геологическое тело  $G_i$  моложе геологического тела  $G_j$  ( $t(G_i) < t(G_j)$ ), где  $t(G_i)$  — возраст геологического тела  $G_i$ ,  $G_i \tau_2 G_j$  — "геологические тела  $G_i$  и  $G_j$  одновозрастные",  $G_i \tau_1^{-1} G_j$  — "геологическое тело  $G_i$  древнее геологического тела  $G_j$ ",  $(G_i \tau_1 \cup \tau_1^{-1} G_j) = (G_i \tau_2 G_j)$  — "геологические тела  $G_i$  и  $G_j$  разновозрастные",  $G_i \tau_1 \cup \tau_2 G_j$  — "геологическое тело  $G_i$  не древнее тела  $G_j$  (моложе или одновозрастное)" и т.п. Если в определении отношения  $\varepsilon_1$  значения функции  $f$  в  $A_i$  рассматривать как вектор  $\langle q_{i_1}, q_{i_2}, q_{i_3} \rangle$ , задающий ориентацию тела  $A_i$ , то полученное при этом отношение будет характеризовать относительную ориентацию тел. Это отношение, которое мы обозначим через  $\pi$  и назовем согласностью (или согласиём), в некоторых частных случаях совпадает с введенным выше отношением совмещения параллельным переносом. Это отношение можно рассматривать как некоторое обобщение и экспликацию существующих в геологии понятий о "согласном (конкордантом, параллельном) залегании пластов", "параллельной (линейно-параллельной, плоско-параллельной) текстуры" пород и т.п.

2. Отношение строгой упорядоченности  $\rho_2$  и эквивалентнос-

ти  $\varepsilon_2$  по набору качественных признаков. Если в определениях отношений  $\rho_0$  и  $\varepsilon_0$  в табл. I дополнительно указать, что значение  $f(A_i) = 1$  функции  $f$  в теле  $A_i \in M$  есть порядковый номер присутствующего в данном теле  $A_i$  качественного признака  $u_1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) из некоторого упорядоченного набора качественных признаков  $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ , то получатся, соответственно, определения отношений  $\rho_2$  и  $\varepsilon_2$  (т.е. в данном случае  $f(G_i) = 1$  означает, что тело  $A_i$  обладает 1-м признаком). Из полученных таким образом определений следует, что каждое тело обладает одним и только одним признаком из упорядоченного набора признаков  $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ . Отношение  $\rho_2(\varepsilon_2)$  выполнено для пары тел  $\langle A_i, A_j \rangle$  тогда и только тогда, когда номер признака, которым обладает тело  $A_i$ , меньше (соответственно, равно) номера признака, которым обладает тело  $A_j$ . Необходимость рассмотрения отношений  $\rho_2$  и  $\varepsilon_2$  возникает, в частности, при сопоставлении тел по номерам присутствующих в них признаков, упорядоченных таким образом, что этот порядок имеет содержательный смысл. Такой случай имеет место, например, когда нужно сопоставить слои осадочных пород по типам находящихся в них остатков организмов, пронумерованных в порядке их возрастной последовательности.

### III. Операции над бинарными отношениями на множествах геологических тел.

#### Производные отношения.

Используя бинарные отношения, приведенные в табл. I, как исходные с помощью операций над отношениями, можно определить другие отношения, которые в отличие от исходных будем называть производными. Очевидно, такое разбиение отношений условно, т.к. в качестве исходных (первичных) можно взять другие отношения.

Для каждого отношения, приведенного в табл. I, можно определить дополнение к нему по формуле  $(G_i \bar{\rho} G_j) \stackrel{Df}{\iff} \neg(G_i \rho G_j)$ . Например, используя отношения изолированности  $\alpha$  можно определить отношение неизолированности  $\bar{\alpha}$ . Аналогично, дополнением к отношению эквивалентности по характеристикам  $\varepsilon_0$  будет отношение неэквивалентности (неравенства) по характеристикам  $\bar{\varepsilon}_0$ .

Для несимметричных отношений  $\sigma_1, \sigma_2, \gamma_2, \eta, \lambda, \rho_1, \omega_1$  можно определить их инверсии (обращения)  $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \gamma_2^{-1}, \eta^{-1}, \lambda^{-1}, \rho_1^{-1}, \omega_1^{-1}$  по формуле:  $(A_i \Phi A_j) \stackrel{Df}{\Leftrightarrow} (A_j \Phi^{-1} A_i)$ . Например, инверсией отношения следования  $\lambda$  будет  $A_1 \lambda^{-1} A_j$  - "при следовании по заданной линии  $\mathcal{L}$  в фиксированном направлении тело  $A_1$  будет встречено после тела  $A_j$ ". Для симметричного отношения, согласно известной теореме, инверсия совпадает с самим отношением.

Ряд распространенных в геологии отношений может быть определен через бинарные отношения, перечисленные в табл. I, с помощью операций объединения и пересечения, соответственно, по формулам:  $\bigcup_{i=1}^m \Phi_i = \langle \bigcup_{i=1}^m \Phi_i, M \rangle$  и  $\bigcap_{i=1}^m \Phi_i = \langle \bigcap_{i=1}^m \Phi_i, M \rangle$ . Ниже в качестве примеров приведем некоторые из них.

1)  $\sigma_1 \cup \sigma_1^{-1}$  - "вмещающее контактирование или его инверсия" (контактирование с вмещающим или вмещаемым телом),  $A_1 \sigma_1 \cup \sigma_1^{-1} A_j$  - "тела  $A_1$  и  $A_j$  контактируют по замкнутой поверхности".

2)  $\sigma_2 \cup \sigma_2^{-1}$  - "частично вмещающее контактирование или его инверсия" (контактирование с частично вмещающим или частично вмещаемым телом),  $A_1 \sigma_2 \cup \sigma_2^{-1} A_j$  - "тела  $A_1$  и  $A_j$  контактируют по поверхности, ограниченной двумя замкнутыми линиями, одно из тел расположено во внутреннюю сторону, а другое - во внешнюю сторону от этой поверхности".

3)  $\gamma_2 \cup \gamma_2^{-1}$  - "включение или его инверсия",  $A_1 \gamma_2 \cup \gamma_2^{-1} A_j$  - "тела  $A_1$  и  $A_j$  имеют общую часть, совпадающую с одним из них".

4)  $\eta \cup \eta^{-1}$  - "вмещение или вмещаемость",  $A_1 \eta \cup \eta^{-1} A_j$  - "одно из тел  $A_1$  и  $A_j$  вмещает другое".

5)  $\lambda \cup \lambda^{-1}$  - "следование или предшествование",  $A_1 \lambda \cup \lambda^{-1} A_j$  - "тела  $A_1$  и  $A_j$  пересечены заданной линией  $\mathcal{L}$ , при движении по этой линии тело  $A_1$  будет встречено раньше или после тела  $A_j$ ".

6)  $\rho_0 \cup \epsilon_0$  - "нестрогая упорядоченность по характеристикам",  $A_1 \rho_0 \cup \epsilon_0 A_j$  - "значение  $f(A_1)$  функции  $f$  в  $A_1$  не больше, чем ее значение  $f(A_j)$  в  $A_j$  (аналогично -  $\rho_1 \cup \epsilon_1$  и  $\rho_2 \cup \epsilon_2$ )".

7)  $\gamma_2 \cap \bar{\epsilon}$  - "включение и неравенство";  $A_1 \gamma_2 \cap \bar{\epsilon} A_j$  - "тело  $A_1$  включает тело  $A_j$ ,  $A_1 \neq A_j$ ".

8)  $\alpha \cap \eta$  - "изолированность и вмещение",  $A_1 \alpha \cap \eta A_j$  - "тела  $A_1$  и  $A_j$  изолированы, тело  $A_1$  вмещает тело  $A_j$ " (пример этого отношения был приведен выше в разделе II).

9)  $\sigma \cap \pi (\alpha \cap \pi)$  — "контактирование (изолированность) и согласие",  $A_1 \sigma \cap \pi A_j$  ( $A_1 \alpha \cap \pi A_j$ ) — "тела  $A_1$  и  $A_j$  контактируют (соответственно, изолированы) и согласны".

Производные отношения можно также получить как разность некоторых введенных выше отношений. Определим отношение простого контактирования  $\sigma_3$  равенством:

$$\sigma_3 \stackrel{\text{Df}}{=} \sigma \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_1^{-1} \cup \sigma_2 \cup \sigma_2^{-1}).$$

Многие распространенные в геологии отношения между геологическими телами можно определить через исходные отношения, перечисленные в табл. I, как их композиции (произведения) с помощью операции умножения по формуле

$$(A_1 \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n A_j) \stackrel{\text{Df}}{\iff} (\exists A_{q_1} \in M) (\exists A_{q_2} \in M) \dots (\exists A_{q_{n-1}} \in M) [(A_1 \varphi_1 A_{q_1}) \wedge (A_{q_1} \varphi_2 A_{q_2}) \wedge \dots \wedge (A_{q_{n-1}} \varphi_n A_j)].$$

В частном случае, когда  $\varphi_l = \varphi$ ,  $l = 1, 2, \dots, n-1$ , вместо  $A_1 \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_n A_j$  будем писать  $A_1 \varphi^n A_j$ . Приведем примеры. Композицией отношений контактирования при  $n=2$  будет отношение

$(A_1 \sigma \circ \sigma A_j) \stackrel{\text{Df}}{\iff} (A_1 \sigma^2 A_j)$ , которое будет выполнено для тел  $A_1$  и  $A_j$ , если существует тело  $A_q \in M$ , контактирующее с телами  $A_1$  и  $A_j$ , композиция  $A_1 \varphi^n A_j$  будет выполнена, если существуют такие тела  $A_{q_1}, A_{q_2}, \dots, A_{q_{n-1}}$ , что  $\langle A_1, A_{q_1} \rangle, \langle A_{q_1}, A_{q_2} \rangle, \dots,$

$\langle A_{q_{n-1}}, A_j \rangle$  являются парами контактирующих тел  $(A_1 \sigma A_{q_1}, A_{q_1} \sigma A_{q_2}, \dots, A_{q_{n-1}} \sigma A_j)$ .

Очень важными являются отношения, которые можно определить через исходные отношения, приведенные в табл. I, с помощью операции, называемой транзитивизацией или транзитивным замыканием [I, 28, 29] по следующей формуле:  $(A_1 \hat{\varphi} A_j) \stackrel{\text{Df}}{\iff} (A_1 \varphi \cup \varphi^2 \cup \dots \cup \varphi^n \cup \dots A_j)$ . Таким образом, если  $\varphi$  некоторое отношение на множестве  $M$ , то его транзитивизация (транзитивное замыкание)  $\hat{\varphi}$  будет выполнено только в том случае, если выполнена хотя бы одна композиция вида  $\varphi^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). На-

пример, транзитивизация отношения контактирования  $\sigma$  между телами  $A_i$  и  $A_j$  будет выполнена в том случае, если выполнено хотя бы одно из отношений  $A_i \sigma A_j, A_i \sigma^2 A_j, \dots, A_i \sigma^n A_j, \dots$ . Существует теорема, утверждающая, что транзитивизация транзитивного отношения совпадает с самим отношением. Следовательно,  $\gamma_2 = \hat{\gamma}_2$ ,  $\eta = \hat{\eta}$ ,  $\lambda = \hat{\lambda}$ ,  $\kappa = \hat{\kappa}$ ,  $\rho_0 = \hat{\rho}_0$  и  $\epsilon_0 = \hat{\epsilon}_0$ . Транзитивизации отношений  $\beta, \gamma, \bar{\alpha}, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \gamma_1$  играют большую роль в геологии.

В работе [6] с помощью термина "общая граница между телами" вводятся некоторые отношения на множестве геологических тел, объединяемых по условиям и обстановкам их образования. Если высказывание "тела  $A_i$  и  $A_j$  имеют общую границу" равносильно высказыванию  $[A_i \cap A_j \neq \emptyset] \wedge [v(A_i \cap A_j) = 0]$ , где  $v(A_i \cap A_j)$  - объем множества  $A_i \cap A_j$ , то выражения "тела  $A_i$  и  $A_j$  - ближайшие соседи", "тела  $A_i$  и  $A_j$  - соседи" и "множество тел  $M$  - есть пространственная компонента связности", составленным в терминах [6], отвечают, соответственно, высказывания "для тел  $A_i$  и  $A_j$  выполнено отношение соприкосновения  $\beta$ ", "для тел  $A_i$  и  $A_j$  выполнена транзитивизация  $\hat{\beta}$  отношения соприкосновения" и "на множестве тел  $M$   $\hat{\beta} = \langle M^2, M \rangle$ ", составленные в терминах настоящей работы.

#### IV. Математические свойства основных бинарных отношений на произвольном множестве геологических тел

В табл.2 перечислены свойства введенных в разделах II и III бинарных отношений. Эти свойства устанавливаются непосредственно из определений отношений I).

Основные бинарные отношения на произвольном множестве тел в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  по свойствам рас-  
пределяются следующим образом:

I) Напомним основные свойства бинарных отношений [27,29] и др. Отношение  $\varphi = \langle \Phi, M \rangle$  называется рефлексивным, если для любого  $x \in M$   $x \varphi x$ , т.е.  $(\forall x \in M) [x \varphi x]$ ; антирефлексивным, если  $(\forall x \in M) (x \not\varphi x)$ ; симметричным, если из  $x \varphi y$  следует  $y \varphi x$ , т.е.  $(x \varphi y) \Rightarrow (y \varphi x)$ ; асимметричным, если  $(x \varphi y) \wedge (x \not\varphi y) \Rightarrow (y \not\varphi x)$ ; антисимметричным, если  $(x \varphi y) \wedge (y \varphi x) \Rightarrow (x = y)$ ; транзитивным, если  $[(x \varphi y) \wedge (y \varphi z)] \Rightarrow (x \varphi z)$ ; антитранзитивным, если  $[(x \varphi y) \wedge (x \varphi z)] \wedge \dots \wedge (x \varphi y) \Rightarrow (x \not\varphi y)$ ; связным, если  $(x \neq y) \Rightarrow \Rightarrow (x \varphi y) \vee (y \varphi x)$  (перед импликациями опущены кванторы  $\forall x \in M, \forall y \in M, \forall z \in M$ ).

1) Эквивалентности (рефлексивные, симметричные и транзитивные отношения) – совмещение переобразованием  $\kappa$  ( $\kappa_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 6$ ); эквивалентности по характеристикам  $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \tau_2$ ; транзитивизация неизолерованности  $\hat{\alpha}$ , транзитивизация совместности  $\hat{\gamma}$ .

2) Толерантности (рефлексивные и симметричные отношения) – неизолерованность  $\bar{\alpha}$ , совместимость  $\gamma$ .

3) Отношение строгого порядка (антирефлексивные, асимметричные и транзитивные отношения) – вмещение  $\eta$ , следование  $\lambda$ , упорядоченность по характеристикам  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \tau_1$ ; изолированность и вмещение  $\alpha \cap \eta$ , включение и неравенство  $\gamma_2 \cap \bar{E}$ , транзитивизация вмещающего контактирования  $\hat{\delta}_1$ , транзитивизация частично вмещающего контактирования  $\hat{\delta}_2$ .

4) Отношения – нестрогого порядка (рефлексивные, антисимметричные и транзитивные отношения) – включение  $\gamma_2$ , нестрогая упорядоченность по характеристикам  $\rho_0 \cup \epsilon_0, \rho_1 \cup \epsilon_1, \rho_2 \cup \epsilon_2, \tau_1 \cup \tau_2$ .

5) Редукция строгого порядка (антитранзитивное отношение) – вмещающее контактирование  $\sigma_1$ . Среди бинарных отношений между телами оказались и такие, которые не могут быть отнесены к перечисленным выше типам, обычно рассматриваемым в теории бинарных отношений. Это следующие.

Т а б л и ц а 2

Основные свойства бинарных отношений на произвольном множестве тел  $M$  в трехмерном евклидовом пространстве.

Обозначение отношения	Название отношения	свойства								Положение в систематике бинарных отношений
		рефлексивность	антирефлексивность	симметричность	асимметричность	антисимметричность	связность	транзитивность	антитранзитивность	
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II
$\alpha$	Изолированность		+	+						
$\alpha$	Неизолерованность	+		+						толерантность

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II
$\beta$	Соприкосновение		+	+						
$\sigma$	Контактирование		+	+						
$\sigma_1$	Вмещающее контактирование		+		+				+	редукция строгого порядка
$\sigma_2$	Частично вмещающее контактирование		+		+					
$\sigma_3$	Простое контактирование		+	+						
$\omega_1$	Идиоморфизм		+		+					
$\omega_1^{-1}$	Ксеноморфизм		+		+					
$\omega_2$	Панидиоморфизм		+	+						
$\omega_3$	Панксеноморфизм		+	+						
$\gamma$	Совместимость	+		+						толерантность
$\gamma_1$	Частичная совместимость		+	+						
$\gamma_2$	Включение	+				+		+		нестрогий порядок
$\eta$	Вмещение		+		+	+		+		строгий порядок
$\lambda$	Следование		+		+	+		+		строгий порядок
$\kappa (\kappa_i, i=1, \dots, 6)$	Совмещение преобразованием	+		+				+		эквивалентность
$\rho_0 (\rho_1, \rho_2, \tau_1)$	Упорядоченность по характеристикам		+		+	+		+		строгий порядок
$\epsilon_0 (\epsilon_1, \epsilon_2, \tau_2)$	Эквивалентность по характеристикам	+		+				+		эквивалентность
$\eta \cup \eta^{-1}$	Вмещение или вмещаемость		+	+						
$\rho_0 \cup \epsilon_0$	Нестрогая упорядоченность по характеристикам	+				+		+		нестрогий порядок
$\alpha \cap \eta$	Изолированность и вмещение		+		+	+		+		строгий порядок

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II
$\sigma_1 \cap \omega_1^{-1}$	Вмещающее контактирование и ксеноморфизм		+		+				+	редукция строгого порядка
$\gamma_2 \cap \tilde{E}$	Включение и неравенство		+		+	+		+		строгий порядок
$\sigma \cap \pi$	Контактирование и согласие		+	+						
$\hat{\beta}$	Транзитивизация соприкосновения				+			+		
$\hat{\sigma}$	Транзитивизация контактирования				+			+		
$\hat{\sigma}_1$	Транзитивизация вмещающего контактирования		+		+	+		+		строгий порядок
$\hat{\sigma}_3$	Транзитивизация простого контактирования				+			+		
$\hat{\gamma}$	Транзитивизация совместности	+		+				+		эквивалентность
$\hat{\omega}_1$	Транзитивизация идиоморфизма							+		
$\hat{\omega}_2$	Транзитивизация панидоморфизма				+			+		
$\hat{\alpha}$	Транзитивизация неизолированности	+		+				+		эквивалентность
$\hat{\sigma} \cap \pi$	Транзитивизация контактирования и согласия				+			+		
$\hat{\sigma} \cap \tilde{E}_0$	Транзитивизация контактирования и неэквивалентности				+			+		

6) Антирефлексивные и симметричные отношения – изолированность  $\alpha$ , соприкосновение  $\beta$ , контактирование  $\sigma$ , простое контактирование  $\sigma_3$ , панидоморфизм  $\omega_2$ , панксеморфизм  $\omega_3$ , частичная совместимость  $\gamma_1$ , неэквивалентность по характеристикам  $\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\tau}_2$ ; ряд отношений, полученных объединением антирефлексивных и асимметричных отношений с соответствующими инверсиями –  $\sigma_1 \cup \sigma_1^{-1}, \sigma_2 \cup \sigma_2^{-1}$  и т.п.; изолированность и согласие  $\alpha \cap \pi$ , контактирование и согласие  $\sigma \cap \pi$ .

7) Антирефлексивные и асимметричные отношения – частично вмещающее контактирование  $\sigma_2$ , идоморфизм  $\omega_1$ , ксеморфизм  $\omega_1^{-1}$ .

8) Симметричные и транзитивные отношения – транзитивизации следующих отношений – соприкосновения  $\hat{\beta}$ , контактирования  $\hat{\sigma}$ , простого контактирования  $\hat{\sigma}_3$ , частичной совместимости  $\hat{\gamma}_1$ , панидоморфизма  $\hat{\omega}_2$ , панксеморфизма  $\hat{\omega}_3$ , контактирования и согласия  $\sigma \hat{\cap} \pi$ , контактирования и неэквивалентности  $\sigma \hat{\cap} \bar{\epsilon}_0$ .

9) Транзитивные отношения – транзитивизации идоморфизма  $\hat{\omega}_1$  и ксеморфизма  $\hat{\omega}_1^{-1}$ .

Относительно свойств отношений, перечисленных в табл. 2 и выше, необходимо заметить следующее. Эти свойства характерны для бинарных отношений на произвольном множестве тел  $M$  в трехмерном евклидовом пространстве  $R$ .

Если же свойства множества тел  $M$  ограничить введением определенных условий, то некоторые из бинарных отношений на этом множестве, кроме перечисленных выше, приобретают те или иные дополнительные свойства. Для примера – транзитивизация отношения идоморфизма  $\hat{\omega}_1$  на произвольном множестве тел  $M$  обладает только свойством транзитивности. Однако если потребовать, чтобы множество тел  $M$  удовлетворяло некоторым условиям, то на этом множестве  $\hat{\omega}_1$  будет обладать, кроме транзитивности, свойствами антирефлексивности и симметричности.

Свойства отношений между телами можно использовать не только для систематики этих отношений, но также для решения ряда конкретных геологических задач. Отношения эквивалентности, перечисленные в первом пункте в начале настоящего параграфа, можно использовать для разбиения множества тел на классы эквивалентности. Отношения строгого и нестрогого порядка, перечисленные там же в пунктах 3 и 4, можно применить для упо-

рядочения тел по тем или иным признакам. При использовании бинарных отношений между телами в описательных целях и для решения некоторых других задач удобно представлять их в виде графов или матриц, получаемых следующим образом: каждому телу соотносится одна вершина графа, вершины  $i$  и  $j$  соединяются дугой (для несимметричных отношений) или звеном (для симметричных отношений), если для пары тел  $\langle A_i, A_j \rangle$ , соответствующих этим вершинам, выполняется данное отношение; в случае матричного представления  $i$ -му телу соответствует  $i$ -я строка и  $i$ -й столбец матрицы  $\|a_{ij}\|$ ; в которой  $a_{ij} = 1$  ( $a_{ij} = 0$ ), если пара тел  $\langle A_i, A_j \rangle$  находится (соответственно, не находится) в данном отношении.

Выше были рассмотрены основные бинарные отношения на множествах тел в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$ . На множествах тел в двумерном  $R^2$  и одномерном  $R^1$  евклидовых пространствах можно определить аналогичным образом такие же бинарные отношения. Исключение составляют некоторые из рассмотренных выше отношений, для которых соответствующие им отношения в  $R^2$  и  $R^1$  не существуют. Бинарные отношения на множествах тел в  $R^2$  и  $R^1$  обладают такими же свойствами, что и соответствующие им отношения на множествах тел в  $R^3$ .

### Л и т е р а т у р а

1. ВАСИЛЕВСКИЙ Я.-П.Л. Об одной конструкции слабого замыкания. - В сб.: Математическая лингвистика. М., "Наука", 1973.
2. ВОРОНИН Ю.А., АЛАБИН Б.К., ГОЛЬДИН С.В. и др. Геология и математика. Новосибирск, "Наука", 1967.
3. ВОРОНИН Ю.А., ГУСЕВ Ю.М. О построении одного алгоритма выделения и описания аномалий гравитационного и магнитного полей. - В сб.: Математические методы в геологии и геофизике, тр. СНИИГТИМС, вып.79, Новосибирск, 1968.

4. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. Универсальная схема аналитического описания сложных геологических тел. – В сб.: "Математические методы в геологии и геофизике", тр. СНИИГТМиС, вып.79, Новосибирск, 1968.
5. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. О процедурах сопоставления сложных геологических тел на основе их аналитического описания. – В сб.: Математические методы в геологии и геофизике, тр. СНИИГТМиС, вып.79, Новосибирск, 1968.
6. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. Фации и формации. Парагенезис. Новосибирск, "Наука", 1972.
7. ВОРОНИН Ю.А., БОРОВИКОВ А.М., САЛИН Ю.С., СОЛОВЬЕВ В.А., ТИТОВ А.А. О теоретическом совершенствовании стратиграфических построений с помощью моделирования на ЭВМ. – В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, 1972.
8. ГОЛЬДИН С.В., ВОЛКОВ А.М., ГОЛЬДИНА Н.А. Аксиоматическая классификация залежей нефти и газа и ее применение для описания месторождений Тюменской области. – Тр. Зап.Сиб.НИГНИ, вып.29, М., "Недра", 1970.
9. ЕГАНОВ Э.А. – О выделении объектов исследования в геологии. – В сб.: Пути познания Земли, М., "Наука", 1971.
10. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. Новосибирск, "Наука", 1969.
11. КАЛУЖНИН Л.А. Введение в общую алгебру. М., "Наука", 1973.
12. КЕМЕНИ Дж., СНЕЛЛ Дж., ТОМПСОН Дж. Введение в конечную математику. М., ИЛ, 1963.
13. КЛИНИ С. Математическая логика. М., "Мир", 1973.

14. КОНДАКОВ Н.И. Логический словарь. М., "Наука", 1971.
15. КОСЫГИН Ю.А., ВОРОНИН Ю.А. Геологическое пространство как основа структурных построений. "Геология и геофизика", №9-11, 1965.
16. КОСЫГИН Ю.А., СОЛОВЬЕВ В.А. Статические, динамические и ретроспективные системы в геологических исследованиях. - Изв. АН СССР, сер. Геологическая, №6, 1969.
17. КОСЫГИН Ю.А. Методологические вопросы системных исследований в геологии. "Геотектоника", №2, 1970.
18. КРЕНДЕЛЕВ Ф.А., КРЕНДЕЛЕВ С.Ф. Сопоставление структур геологии и математики. - В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, 1973.
19. КУРАТОВСКИЙ К., МОСТОВСКИЙ А. Теория множеств. М., "Мир", 1970.
20. ПЕНЗОВ Ю.Е. Элементы математической логики и теории множеств. Изд. Саратовского университета, 1968.
21. ПОЛОВИНКИНА Ю.И. Структуры и текстуры изверженных и метаморфических горных пород. М., "Недра", 1966.
22. СТИНРОД Н., ЧИНН У. Первые понятия топологии. М., "Мир", 1967.
23. СТОЛЛ Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М., "Просвещение", 1968.
24. УСМАНОВ Ф.А. О классификации геологических задач на нахождение  $\alpha$  - отношений и прогнозирования полезных ископаемых. - В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.

25. ФОР Р., КОФМАН А., ДЕНИ-ПАПЕН М. Современная математика. М., "Мир", 1966.
26. ХАРАРИ Ф. Теория графов. М., "Мир", 1973.
27. ШИХАНОВИЧ Ю.А. Введение в современную математику. М., "Наука", 1965.
28. ШРЕЙДЕР Ю.А. Алгебра бинарных отношений. Приложение к работе С.Маркуса "Теоретико-множественные модели языка". М., 1970.
29. ШРЕЙДЕР Ю.А. Равенство. Сходство. Порядок. М., "Наука", 1971.

Б.К. Алабин

### К ПОСТРОЕНИЮ ЧИСЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

I. Как показано в ряде работ Ю.А.Воронина, запись любой геологической информации сводится к матрицам типа: объекты-свойства, объекты-объекты, свойства-свойства. Рассмотрим матрицы объекты-свойства:

$$\|a_i | x_i^1 x_i^2 \dots x_i^p \|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Без ограничения общности можно считать, что  $x_i^j$  есть целые неотрицательные числа. В работе [6] рассматривается задача представления заданного множества векторов  $\langle x_i^1 x_i^2 \dots x_i^p | i = 1, \dots, n \rangle$  натуральными числами. Напомним коротко суть такого представления в терминах классификаций-перечислений.

Пусть задан некоторый массив  $A'$  объектов  $a_i$ , заданных векторами  $x(i) = \langle x_i^1 x_i^2 \dots x_i^p \rangle$ , где  $0 \leq x_i^j \leq q^j$ ;  $q^j = \max_i x_i^j$ . По свойствам  $\{x^1, x^2, \dots, x^p\}$  строится полная детерминированная база  $\alpha$ -классификаций-перечислений, т.е. с областью определения  $x^j = 0 \div q^j$  ( $j=1, \dots, p$ ), на которую не наложены никакие ограничения [9,10]. На множестве  $A$  объектов из классов эквивалентности  $A^k$  этой базы, заданных векторами  $x(k)$ , устанавливается отношение порядка:

$$k_1 < k_2^*,$$

если

$$x_{k_1}^1 = x_{k_2}^1, \dots, x_{k_1}^{j-1} = x_{k_2}^{j-1}, x_{k_1}^j < x_{k_2}^j.$$

Так как для всякого  $a_i \in A'$  имеет место  $a_i \in A^{k_1} \subset A$ , то  $A' \subseteq A$ . Требуется каждому объекту  $a_i$ , заданному компонентами своего вектора  $x(i) = \langle x_i^1 x_i^2 \dots x_i^p \rangle$ , поставить во взаимнооднозначное соответствие его номер  $k_i$  в  $A$ , т.е. требуется найти отображение  $x(k_i) \leftrightarrow k_i$ . В [6] приводятся формулы этого отображения.

**Пример I.** Пусть  $A'$  задано таблицей I. Для этой таблицы  $n=4$ ,  $p=3$  и

$$x^1 = 0 + 1,$$

$$x^2 = 0 + 2,$$

$$x^3 = 0 + 3.$$

Полная база в этом случае, обозначим ее через  $A_0$ , в соответствии с вышесказанным, может быть представлена таблицей 2. Номера классов такой базы можно толковать как значения некоторой функции  $P_0 = P_0(x^1, x^2, \dots, x^p)$ .

Забегая вперед, отметим, что функции типа  $P_0$  называют численными функциями с областью значений от 1 до  $N$ , где  $N$  — число классов соответствующей ей базы классификаций. Вид конкретной численной функции с фиксированной ее областью определения, на которую могут быть наложены различные ограничения, полностью задается отношением порядка на множестве точек этой области, что дает возможность построения формул преобразования

$$k = P(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^p).$$

С другой стороны, в каждой точке своей области определения численная функция определяется одним, и только одним, значением. Это дает возможность для построения формул обратного преобразования

$$x_k^j = P^{-1}(k), \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Таблица 1.

	$x^1$	$x^2$	$x^3$
$a_1$	0	2	0
$a_2$	0	I	2
$a_3$	0	0	3
$a_4$	I	0	I

Таблица 3.

	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
$a_1$	0	2	0	I
$a_2$	0	I	2	0
$a_3$	0	0	3	0
$a_4$	I	0	I	I

Таблица 5.

	$y^1$	$y^2$	$y^3$
$a_1$	4	2	2
$a_2$	3	3	2
$a_3$	3	3	3
$a_4$	4	3	I

Таблица 2.

$x^1$	0								I															
$x^2$	0		I		2		0		I		2		0		I		2							
$x^3$	0	I	2	3	0	I	2	3	0	I	2	3	0	I	2	3	0	I	2	3				
$P_0$	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Таблица 4.

$(x^1)^1$	0				I				2				3							
$(x^1)^2$	0		I		2		3		0		I		2		0		I		0	
$(x^1)^3$	0	I	2	3	0	I	2	0	I	0	0	I	2	0	I	0	0	I	0	0
$(x^1)^4$	3	2	I	0	2	I	0	I	0	0	2	I	0	I	0	0	I	0	0	0
$P_1$	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Таблица 6.

$y^1$	I		2		3				4											
$y^2$	I	I	2	I	2	3	I	2	3	I	2	3	4							
$y^3$	I	I	I	2	I	I	2	I	2	3	I	I	2	3	4					
$P_2$	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Таблица 7.

	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$P_0$	$P_1$				$P_2$
					$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	
$a_1$	0	2	0	9	I3	7	9	8	I3
$a_2$	0	I	2	7	2	2	5	7	9
$a_3$	0	0	3	4	I	I	I	4	10
$a_4$	I	0	I	I4	I4	I4	I2	I2	I4

Отличительной особенностью функции  $P_0$  является то, что она всегда монотонно зависит от своих аргументов. Область ее значений лежит в пределах от 1 до  $\prod_j (q^j + 1)$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ).

Как видно из сравнения таблиц 1 и 2, для каждой строки таблицы 1 имеется аналогичный столбец таблицы 2, т.е.  $A' \subseteq A_0$ .

Однако следует отметить, что база  $A_0$  не единственная, для которой выполняется  $A' \subseteq A$ . Приведем еще два примера из опубликованных работ.

**Пример 2.** Для заданного  $A'$  определим величину

$$q = \max_i \sum_j x_i^j \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, p}).$$

Для таблицы 1  $q=3$ . Дополним каждый вектор  $x(i)$ , соответствующий объекту  $a_i \in A'$ , новой компонентой  $x^{p+1}$  так, чтобы для всякого  $i$  выполнялось

$$\sum_{j=1}^{p+1} x_i^j = q.$$

В нашем примере это соответствует переходу от таблицы 1 к таблице 3.

База  $A_1$  строится в предположениях:  $(x^j)^j = 0 \div q$  ( $j=1, p+1$ ) и  $\sum_k (x^j)^k = q$ . Отношение порядка на множестве векторов ее классов эквивалентности зададим то же, что и в базе  $A_0$ . Таблица 4 иллюстрирует ее построение для таблицы 3.

Числовая функция  $P_1$ , соответствующая построенной базе  $A_1$ , обладает рядом интересных свойств. Так ее область определения в силу условия  $\sum_j (x^j)^k = q$  всегда лежит в плоскости, пересекающей ось координат в  $(p+1)$ -мерном признаковом пространстве на расстоянии  $q$  от начала [3], и обладает "поворотной" симметрией  $(p+1)$ -го порядка. Далее. Классифицирующие свойства  $(x^j)^j$  в принятых предположениях равноправны, благодаря чему зависимости в любой паре  $(x^j)^{j-1}$  и  $(x^j)^{j+2}$  совершенно одинаковы. Значит база  $A_1$  порождает семейство эквивалентных [9] подбаз  $A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,p+1}$  удалением соответственно  $(x^1)^1, (x^1)^2, \dots, (x^1)^{p+1}$  из  $\{(x^1)^1 \mid 1 = 1, \dots, p+1\}$ , т.е. в качестве  $x^1, x^2, \dots, x^p$  можно выбрать любые  $p$  строк в табличном представлении  $A_1$ , сохранив порядок последних. При этом любая подбаза  $A_{1,1}$  такова, что

$A' \subseteq A_{1,1}$ . Однако их нумерические функции  $P_{1,1}$  различны, причем монотонна только одна из них — именно  $P_{1,p+1}$ .

В приведенном примере читатель сам может получить все четыре подбазы для таблицы 4 вычеркиванием из последней поочередно какой-нибудь строки и убедиться, что все полученные таблицы состоят из одних и тех же столбцов, взятых в различном порядке.

Отметим, что между функциями  $P_{1,1}$  существует определенная зависимость, которую еще предстоит исследовать. Область значений функции  $P_1$  находится в пределах от 1 до  $C(p+q-1|q)[II]$ . В работе [12] приводятся формулы преобразования  $k = P_1(x_k^1, \dots, x_k^{p+1})$  и обратного преобразования.  $x_k^j = P_1^{-1}(k)$ ,  $j = \overline{1, p}$ .

**Пример 3.** В качестве исходного множества  $A'$  возьмем то же множество объектов  $a_i$ , что и в предыдущих примерах. Но их вектора  $x(i) = \langle x_1^1 x_1^2 \dots x_1^p x_1^{p+1} \rangle$  перекодируем в вектора  $y(i) = \langle y_1^1 y_1^2 \dots y_1^q \rangle$  по принципу позиционной линейки. Здесь  $q$  имеет тот же смысл, что и в примере 2.

Поясним это преобразование на примере перехода от таблицы 3 к таблице 5. Вначале построим столбец  $y^1$ . Каждое значение  $y_1^1$  равно номеру первого справа ненулевого элемента  $i$ -ой строки таблицы 3. В данном случае такими элементами являются  $x_1^4, x_2^3, x_3^3$  и  $x_4^4$ . Тогда  $y_1^1 = 4$ ,  $y_2^1 = 3$ ,  $y_3^1 = 3$ ,  $y_4^1 = 4$ . От каждого из элементов  $x_1^4, x_2^3, x_3^3, x_4^4$  вычитается по единице и совершенно аналогично строится столбец  $y^2$  таблицы 5. В этом случае первыми справа ненулевыми элементами таблицы 3 являются  $x_1^2, x_2^3, x_3^3$  и  $x_4^3$ , т.е.  $y_1^2 = 2$ ,  $y_2^2 = 3$ ,  $y_3^2 = 3$ ,  $y_4^2 = 3$ . И т.д. до тех пор, пока таблица 3 не окажется нулевой. Так как сумма элементов строк таблицы 3 одинаково и равна  $q$ , то придется совершить всего  $q$  шагов, т.е. построить  $q$  столбцов в таблице 5. Ясно, что максимальным элементом таблицы 5 является число  $p$  — наибольший номер столбца таблицы 3, а элементы в строках таблицы 5 оказываются упорядоченными по величине справа-налево, т.е.  $y_1^{j_1} \leq y_1^{j_2}$ , если  $j_1 > j_2$ .

Теперь для таблицы 5 строится база  $A_2$  в предположениях:  $y^j = 1 \div p + 1$  ( $j = \overline{1, q}$ ) и  $y_1^j \geq y_1^{j+1}$ . Так как других ограничений нет, то  $A' \subseteq A_2$ . Располагая вектора классов эквивалентности базы в том же порядке, что и в предыдущих примерах, получаем ее табличное представление (см. таблицу 6). Нумерическая

функция  $P_2$  для этой базы обладает тем свойством, что расширение области определения не меняет области значений функции на прежней области определения. Это хорошо видно на таблице: наращивание таблицы может происходить только справа, т.е. все вектора при этом сохраняют свои номера.

Область значений нумерической функции  $P_2$  та же, что и функции  $P_1$ . Это объясняется связью баз  $A_1$  и  $A_2$ : обе функции, выражаясь в терминах комбинаторного анализа [13], нумеруют одни и те же сочетания с повторениями из  $p$  элементов по  $q$  раз, записанные в двух разных формах.

Следует заметить, что если бы для таблицы I выполнялось  $x_1^j \geq x_1^{j+1}$ , то базу типа  $A_2$  формально можно было бы построить для нее непосредственно, выбрав соответствующим образом ее параметры  $p'$  и  $q'$ . Разумеется, комбинаторный смысл был бы для нее совершенно иной.

Соответствующие формулы для функции  $P_2$  и обратной ей в явном виде приведены в работе [1].

П. Результаты приведенных примеров полезно свести в единую таблицу (см. таблицу 7). Это таблица наглядно показывает, что различные нумерические функции дают различную нумерацию объектов  $a_i \in A'$ . При этом их базы не являются подмножеством одна другой, (например,  $P_1 \not\subseteq P_0$ ).

Возникает проблема выбора подходящей для заданного  $A'$  нумерической функции, а значит прежде всего — подходящей базы классификаций. Чтобы иметь возможность такого выбора, нужно иметь из чего выбирать и знать как выбирать. Первый вопрос решается построением некоторого множества баз классификаций  $\{A_i\}$  или разработкой регулярного подхода к их построению. Вообще говоря, это можно сделать расширением области определения для полной базы классификаций  $A_0$  как по числу наборов признаков, так и по числу признаков в наборах и наложением на нее различного рода ограничений. Второй вопрос сводится к построению критерия выбора конкретной  $A_i$  из множества  $\{A_i\}$ . Ясно, что такой критерий является целевым. Например, для задач сжатия числовой информации надо, чтобы номера векторов заданного массива были бы поменьше. Для целей же исследования этого массива могут потребоваться нумерические функции, обладающие какими-то специальными свойствами.

Ясно, что вопрос построения множества баз  $\{A_i\}$  требует специальных исследований, и здесь мы на нем останавливаться не будем.

Ш. Несколько слов о целях и способах построения нумерических функций для фиксированных баз классификаций.

Идея нумерических функций в геологии возникла в связи с попыткой аналитического представления  $\alpha$ -классификаций-перечислений в 1967 году. Такое представление для базы типа  $A_1$  было получено [2] и опробовано на конкретной геологической задаче [5]. Эта база была выбрана не случайно. Дело в том, что она имеет глубокий содержательный смысл в геологии, являясь детерминированной базой  $\alpha$ -классификаций-перечислений геологических объектов по компонентному составу [II], а ее нумерическая функция - функцией компонентного состава [2,5]. Подробно о компонентном составе будет изложено в следующем пункте.

Все же мысль об использовании нумерических функций для анализа экспериментальных данных не получила развития. Это можно объяснить тем, что не было опыта их построения, а следовательно - и опыта работы с ними. Тем не менее, к настоящему времени некоторый опыт все-таки накоплен (см., например, [1,6,12]). Это объясняется тем, что на эти функции обратили внимание разработчики информационных систем, столкнувшись с проблемой сжатия информации для ее хранения. Как показано на приведенных ранее примерах, нумерические функции успешно решают эту проблему.

В работе [6] с этой целью строится функция  $P_0$  и выводятся для нее соответствующие формулы, кстати - тем же способом, что и формула в [2]. Этот способ заключается в последовательном сужении заданной базы классификаций как по числу наборов признаков, так и по числу признаков в наборах. Основан он на следующем предложении: всякая подбаза базы некоторого типа является базой этого же типа [9].

Существует еще один весьма эффективный способ вывода формул для нумерических функций, хорошо продемонстрированный в работе [1], преследующей ту же цель сжатия информации, а затем и в [7]. Он заключается в представлении векторов классов эквивалентности заданной базы (в терминах теории классификаций) в некоторой системе счисления, в общем случае -

полиадической, и переводе из этой системы в десятичную. Однако можно показать, что первый является более общим, т.к. далеко не для всякой базы классификаций можно указать соответствующую ей систему счисления, хотя бы и полиадическую.

Способы вывода формул, так или иначе использующие производящие функции комбинаторного анализа [13], по-видимому, не годны для широкого применения ввиду большой трудоемкости как вывода, так и самих формул. Наглядным тому примером является работа [12]. В отдельных случаях эти способы из-за "безотказности" производящих функций могут оказаться и полезными.

Таким образом, первый способ оказывается наиболее предпочтительным, являясь и достаточно экономичным, и достаточно универсальным. Что касается применения нумерических функций, во всяком случае - в геологии, то, очевидно, наибольшего внимания заслуживает та точка зрения, что основным их назначением является аналитическое представление классификаций, роль которых в описательных науках трудно переоценить. И сегодня уже можно сказать, что анализ нумерических функций ждет своих исследователей. В этом смысле особый интерес представляют нумерические функции для базы типа  $A_1$ .

В следующих пунктах будет продемонстрирован указанный способ вывода формул нумерической функции для базы типа  $A_1$  на примере компонентного состава.

IV. В геологии понятие компонентного состава, как некоторой характеристики геологических объектов [4,5,9], давно известно и широко используется. Однако его формальное уточнение возникло лишь в связи с построением детерминированных баз классификаций геологических объектов [10]. Рассмотрим кратко суть построения базы классификаций по компонентному составу, существенно опираясь на работу [II.].

Пусть  $A$  есть множество геологических объектов такое, что все  $a \in A$  состоят из элементов  $a(i)$ ,  $i=1, \dots, p$ . Обозначим через  $\alpha(i)$  количество  $a(i)$  в  $a$ . Наиболее естественный подход для построения классификации объектов  $a \in A$ , используемый в геологии, состоит в учете тех  $a(i)$ , которые присутствуют в различных  $a$ , с учетом соотношений между  $\alpha(i)$ . Пусть процентное содержание  $a(i)$  в  $a$  есть

$$\beta(i) = \frac{\alpha(i)}{\sum_{i=1}^p \alpha(i)} \cdot 100.$$

Исходя из экспериментальных возможностей и целей, процентный промежуток  $[0, 100]$  можно разбить на  $q$  интервалов и каждому  $\beta(i)$  поставить в соответствие целочисленную переменную  $x(i)$ , принимающую значения  $x(i) = 1, 2, \dots, q$ . При этом каждый объект  $a \in A$  оказывается возможным охарактеризовать набором  $\langle a(1), a(2), \dots, a(p) \rangle$  и вектором  $x = \langle x(1), x(2), \dots, x(p) \rangle$ , где  $0 \leq x(i) \leq q$ , и свести задачу построения базы классификации-перечисления объектов из  $A$  по компонентному составу к вычислению общего числа классов эквивалентности, т.е. таких классов, внутри которых объекты из  $A$  содержат одинаковые  $a(i)$  в одинаковом процентном отношении  $\beta(i)$ , и указанию правил фактического построения этих классов эквивалентности при условии:

$$\sum_{i=1}^p x(i) = q \quad (\text{т.к.} \quad \sum_{i=1}^p \beta(i) = 100). \quad (1)$$

Таким образом, здесь мы имеем дело с таким случаем базы классификаций, когда  $x(i) = 0 \div q$  ( $i = \overline{1, p}$ ) и  $\sum_{i=1}^p x(i) = q$ , т.е. с базой типа  $A_1$ . Таблица 4 иллюстрирует этот случай при  $p = 4$ , и  $q = 3$ .

У. Итак, пусть  $p$  - число компонент,  $q$  - число интервалов шкалы  $[0, 100\%]$ . И пусть  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  есть вектор класса эквивалентности, а  $P$  - его номер в рассматриваемой базе классификаций. Требуется по вектору класса эквивалентности указать его порядковый номер в этой базе. Займемся выводом формулы [2].

Условимся в целях удобства печати число сочетаний из  $m$  элементов по  $n$  обозначать символом  $C(m|n)$ .

Зная число всех классов в классификации и число классов, идущих после заданного, можно определить номер заданного класса  $P$  как их разность:  $P = N - N'$ .  $N$  известно и равно  $C(p + q - 1 | q)$  [3]. Найдем остаток  $N'$ .

Фиксируем  $x_1$ . Тогда легко заметить по таблице 4, что ее часть, идущая после  $x_1$ , также представляет собой классифи-

кацию по компонентному составу, для которой

$$\begin{aligned} p^1 &= p = p - (1 - 1), \\ q^1 &= q - (x_1 + 1), \\ N^1 &= C(p^1 + q^1 - 1 | q^1). \end{aligned}$$

Отбросив  $N^1$  классов от  $N$  и зафиксировав  $x_2$ , обнаруживаем аналогичную ситуацию, где

$$\begin{aligned} p^2 &= p - (2 - 1), \\ q^2 &= (q - x_1) - (x_2 + 1), \\ N^2 &= C(p^2 + q^2 - 1 | q^2). \end{aligned}$$

Заметив очевидную закономерность, можем записать для  $i$ -го шага:

$$\begin{aligned} p^i &= p - (i - 1), \\ q^i &= q - \sum_{k=1}^i x_k - 1, \\ N^i &= C(p^i + q^i - 1 | q^i). \end{aligned}$$

Ясно, что  $i$  меняется в пределах от 1 до  $(p - 1)$ , т.к.  $x_p$  не вносит в таблицу никаких изменений.

Просуммировав все  $N^i$ , получим

$$N' = \sum_{i=1}^{p-1} N^i = \sum_{i=1}^{p-1} C(p^i + q^i - 1 | q^i) = \sum_{i=1}^{p-1} C(p - i + q - \sum_{k=1}^i x_k - 1 | q - \sum_{k=1}^i x_k - 1).$$

Сделав замену  $i = p - j$ , будем иметь:

$$N' = \sum_{j=p-1}^1 C(j + q - \sum_{k=1}^{p-j} x_k - 1 | q - \sum_{k=1}^{p-j} x_k - 1) = \sum_{j=1}^{p-1} C(q - \sum_{k=1}^{p-j} x_k + j - 1 | j).$$

И окончательно, формула для  $P$  принимает вид:

$$P = C(p + q - 1 | q) - \sum_{j=1}^{p-1} C(q - \sum_{k=1}^{p-j} x_k + j - 1 | j). \quad (2)$$

Для сравнения с формулой (2) приведем формулу из [12] для этой же нумерической функции, т.е. типа  $P_1$ , при выводе которой существенно используется соответствующая производящая функция [13]:

$$P = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{q-x_k-1} \sum_{j=0}^{p-k} (-1)^j \times C(p-k|j) \times C(p-k - \sum_{\alpha=1}^{k-1} x_{\alpha} + i - 1 - j(q+1) | p - k - 1). \quad (2')$$

Видно на глаз, что считать по формуле (2) гораздо экономнее, чем по формуле (2').

VI. Перейдем к построению формул обратного перехода: от номера класса к значениям компонент вектора класса эквивалентности в рассматриваемой базе классификаций.

Следует отметить, что точные формулы чрезвычайно сложны, так как связаны с факториалами. Поэтому ограничимся изложением алгоритмического способа получения значений компонент.

Пусть заданы  $P, p$  и  $q$ . Требуется определить  $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ . Сразу отметим, что  $x_p$  определяется однозначно из условия (I).

Предварительно заметим, что числа  $N^i$  (см. п. V) образуют ряд

$$N^1, N^2, \dots, N^i, \dots, N^{p-1},$$

где

$$N^i = C(p^i + q^i - 1 | q^i); \quad p^i = p - (i-1), \quad q^i = q - \sum_{k=1}^i x_k - 1.$$

Далее, как легко заметить по таблице 4, ее надкласс  $\langle x_1 \rangle$  также представляет собой классификацию по компонентному составу, для которой

$$\begin{aligned} (p)^1 &= p - 1, \\ (q)^1 &= q - x_1, \\ N(x_1) &= C((p)^1 + (q)^1 - 1 | (q)^1). \end{aligned}$$

Для надкласса  $\langle x_1, x_2 \rangle$  имеет место аналогичная ситуация, где

$$\begin{aligned} (p)^2 &= p - 2, \\ (q)^2 &= q - (x_1 + x_2), \\ N(x_1, x_2) &= C((p)^2 + (q)^2 - 1 | (q)^2). \end{aligned}$$

И вообще для надкласса  $\langle x_1, x_2, \dots, x_i \rangle$

$$\begin{aligned} (p)^i &= p - i, \\ (q)^i &= q - \sum_{k=1}^i x_k, \\ N(x_1, \dots, x_i) &= C((p)^i + (q)^i - 1 | (q)^i). \end{aligned}$$

Теперь можно записать условие для определения  $x_1$ :

$$N - (N^1 + N(x_1)) < P \leq N - N^1;$$

для определения  $x_2$ :

$$N - ((N^1 + N^2) + N(x_1 x_2)) < P \leq N - (N^1 + N^2);$$

и вообще для определения  $x_i$ :

$$N - \left( \sum_{k=1}^i N^k + N(x_1 \dots x_i) \right) < P \leq N - \sum_{k=1}^i N^k$$

или 
$$N(x_1 \dots x_k) > N - \sum_{k=1}^i N^k - P \geq 0, \quad (3)$$

где 
$$N(x_1 \dots x_i) = C(p-i+q - \sum_{k=1}^i x_k - 1 | p-i-1),$$

$$N^k = C(p-k+q - \sum_{j=1}^k x_j - 1 | p-k).$$

В рекуррентном виде формула (3) запишется так:

$$N(x_1 \dots x_i) > N - P - (\sum^{i-1} + N^i) \geq 0, \quad (4)$$

где  $\sum^0 = 0$ ,  $\sum^i = \sum^{i-1} + N^i$ ;  $N^i = \frac{q - \sum_{k=1}^i x_k}{p-i} \cdot N(x_1 \dots x_i)$ ,

т.к. 
$$C(m|n) = \frac{m-n+1}{n} \cdot C(m|n-1).$$

УП. Последний вопрос, который мы здесь рассмотрим, - вопрос нормировки компонентного состава - вряд ли имеет комбинаторный смысл. В терминах классификаций задачу нормировки можно толковать следующим образом. Пусть задан вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  класса эквивалентности базы типа  $A_1$  с фиксированными  $p$  и  $q$ . Требуется в базе с заданными  $p$  и  $q$  отыскать для него единственный вектор  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ , максимально близкий к вектору  $x' = (\frac{q}{q} x_1, \frac{q}{q} x_2, \dots, \frac{q}{q} x_p)$ . Очевидно, что о близости векторов можно говорить здесь лишь в содержательном смысле. Поэтому приведем содержательную трактовку нормировки компонентного состава.

Ясно, что сравнивать объекты по компонентному составу имеет смысл только тогда, когда их компонентный состав определен при одной и той же базе. Объем же базы классификации по компонентному составу зависит только от числа компонент  $p$  и от числа градаций  $q$  процентного промежутка  $[0, 100\%]$ . Вы-

бор числа  $p$  всегда predetermined, тогда как число градаций  $q$  может быть различным в различных ситуациях. В таком случае переход к единой базе классификаций по компонентному составу есть переход от заданного  $q$  к некоторому фиксированному  $q^0$ . При этом для вычисления нового класса эквивалентности по формуле (2) необходимо знание новых компонент вектора этого класса.

Пусть задано некоторое множество классов базы с фиксированными  $p$  и  $q$ . Рассмотрим  $p$ -мерное пространство, в котором введем систему координат так, чтобы каждому  $i$  ( $i=1,2,\dots,p$ ) отвечала бы своя координатная ось. Каждому классу поставим в соответствие радиус-вектор  $x=(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , проекция которого на  $i$ -ю координатную ось соответствует значению  $i$ -ой компоненты этого класса [3]. Так как по условию  $\sum x_i = q$ , то все радиус-векторы лежат в одной плоскости  $Q$ , пересекающей оси координат на расстоянии  $q$  от начала. Поэтому плоскость  $Q$  однозначно определяется в  $p$ -мерном пространстве  $X_1, X_2, \dots, X_p$  заданием  $q$ . Если построить полную базу классификаций по компонентному составу (с фиксированными  $p$  и  $q$ ), то, очевидно, для каждого ее класса эквивалентности найдется точка на этой плоскости  $Q$ . Мало того, если эти точки принять за узлы некоторой сети, то на этой плоскости  $Q$  будем иметь правильную сеть со стороной ячейки, равной  $\sqrt{2}$ .

Рассмотрим произвольный вектор класса эквивалентности  $x=(x_1, x_2, \dots, x_p)$  некоторой базы классификаций по компонентному составу с заданным  $q$ . Пусть  $q^0$ -новое значение  $q$ . Оба значения  $q$  и  $q^0$  задают две плоскости  $Q$  и  $Q^0$  соответственно в  $p$ -мерном пространстве  $X_1, X_2, \dots, X_p$ . Вектору  $x$  на плоскости  $Q$  отвечает точка  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ . Этой точке соответствует некоторая точка на плоскости  $Q^0$ , которую можно рассматривать как образ точки, заданной на плоскости  $Q$ . Требуется найти координаты  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0$  образа данной точки, отвечающей заданному вектору  $x$ .

Для этого спроектируем плоскость  $Q$  вместе с ее сетью на плоскость  $Q^0$ , т.е. произведем преобразование "подобия" над сетью плоскости  $Q$  с коэффициентом "подобия"  $q^0/q$ . Тогда для точки  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  получим:

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_p) = \left( \frac{q^0}{q} x_1, \frac{q^0}{q} x_2, \dots, \frac{q^0}{q} x_p \right);$$

$$\sum_{i=1}^p x'_i = \sum_{i=1}^p \frac{q^0}{q} x_i = q^0.$$

Однако координаты  $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$  могут быть дробными числами, что противоречит смыслу компонентного состава. Поэтому эти числа нужно так приблизить целыми числами  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0$ , чтобы  $\sum_{i=1}^p x_i^0 = q^0$ .

Так как число узлов сети плоскости  $q^0$  конечно и равно  $C(p + q^0 - 1 | q^0)$ , то можно, перебрав все узлы, выбрать такой  $x^0$ , чтобы  $|x' - x^0| = \min$ . Такой перебор можно выполнить, когда число  $C(p + q^0 - 1 | q^0)$  достаточно мало. В противном случае следует поступить иначе.

Точка  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$  обязательно попадает в какую-то ячейку сети плоскости  $Q^0$ . Найдем все ее вершины и среди них выберем такой  $x^0$ , чтобы  $|x' - x^0| = \min$ . Осуществляется это следующим образом. Для каждой компоненты  $x'_i$  вектора  $x'$  определяется верхнее и нижнее целые приближения,  $x_i^{*+}$  и  $x_i^{*-}$ . Из этих целых приближений составляются различные комбинации, их число равно  $2^p$ . Из них выбираются только те, для которых сумма компонент равна в точности  $q^0$ .

Как видно, для больших  $p$  полный перебор не имеет смысла. Направленный перебор в этом случае заключается в следующем. Строится база классификации по компонентному составу, для которой  $p = p, q = 1$ , а сумма компонент каждого вектора класса эквивалентности равна  $q^0 - \sum_{i=1}^p x_i^*$ . В комбинаторных терминах, эта база представляет собой упорядоченное множество всевозможных сочетаний из  $p$  элементов по  $(q^0 - \sum_{i=1}^p x_i^*)$  раз без повторений. Ее построение, как следует из  $[I, I_2]$ , легко осуществляется алгоритмически. Затем делается замена компонент векторов ее классов эквивалентности по следующему правилу: если  $i$ -я компонента равна 0, то берется  $x_i^*$ , если  $-1$ , то  $x_i^{*-}$ . Множество полученных векторов представляет собой "окружение" вектора  $x'$  в плоскости  $Q^0$ , среди которых находим  $x^0$  такой, чтобы  $|x' - x^0| = \min$ .

Уш. В заключение следует отметить связь нумерических функ-

ций с задачами перечисления в комбинаторном анализе. Дело в том, что производящие функции классической теории перечисления Пойя [8] позволяют не только определять число комбинаторных совокупностей  $a(k)$  в  $A$ , но и получать их в явном виде, как это использовано, например, в [9]. Однако ввиду громоздкости вычислений метод производящих функций не получил широкого распространения даже с применением ЭВМ. В этом смысле подход, развиваемый как в этой работе (для сочетаний), так и в работе [6] (для перестановок), является на наш взгляд наиболее перспективным, так как нумерические функции позволяют получать в явном виде, причем - весьма эффективно, даже такие комбинаторные совокупности, которых пока не знает современный комбинаторный анализ, но которые уже встречаются на практике. Например, множество  $A$   $r$ -совокупностей  $a(k) = \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$  может быть задано спецификацией  $Q = \langle q^1, q^2, \dots, q^r \rangle$  и ограничением вида:  $a_i \neq a_{i+1}$ , где  $1 \leq i < r$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. АКУШСКИЙ И.Я., ЗАБОЛОЦКИЙ В.Н. О комбинаторном подходе к идее сжатия информации. - В сб.: Цифровая вычислительная техника и программирование, вып.6, М., "Сов.радио", 1971.
2. АЛАБИН Б.К. Построение дискретной функции компонентного состава. - Материалы к конференции молодых ученых и аспирантов ИГиГ СО АН СССР, Новосибирск, 1967.
3. АЛАБИН Б.К. Выбор меры для некоторых типов объектов геологической природы. - В сб.: Проблемы региональной геологии и петрографии и методы геохимических и геофизических исследований. Новосибирск, "Наука", 1969.
4. АЛАБИН Б.К. О построении системы описания сложных геологических объектов в задаче поиска. - Тезисы докл. Всесоюзной конф. "Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых", Новосибирск, 1973.

5. АЛАБИН Б.К., ПАНЧЕВ В.А. О формальном подходе к расчленению геологического разреза по минералогическому составу. - Тезисы докл. Второго Сибирского совещания по применению математических методов и ЭВМ в геологии и геофизике. Новосибирск, ИГиГ СО АН СССР, 1967.
6. АМЕЛЬКИН В.А. О представлении геологической информации в машинной памяти. - В сб.: Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.
7. АМЕЛЬКИН В.А. Об использовании полиадической системы счисления при хранении числовой информации в памяти ЭВМ. (Настоящий сборник).
8. БРЕЙН де Н.Д. Теория перечисления Пойя. - В сб.: Прикладная комбинаторная математика" (перевод с англ.), М., "Мир", 1968.
9. ВОРОНИН Ю.А., АЛАБИН Б.К., ГОЛЬДИН С.В. и др. Геология и математика. ч. I, Новосибирск, "Наука", 1967.
10. ВОРОНИН Ю.А., ГОЛЬДИН С.В. Вопросы теории конечных геологических классификаций. - В сб.: Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики". Новосибирск, ИГиГ СО АН СССР, 1964.
11. ВОРОНИН Ю.А., ГОЛЬДИНА Н.А. Примеры построения детерминированных баз геологических классификаций-перечислений. - В сб.: Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики" Новосибирск, ИГиГ СОАН СССР, 1964.
12. ГОРОХОВ Ю.П., СОКОЛОВ Г.А. Об одном способе кодирования информации при решении на ЭВМ некоторых комбинаторных задач. - В сб.: Цифровая вычислительная техника и программирование", вып. 3, М., "Сов. радио", 1967.
13. РИОРДАН Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ  
ПРИ ПОИСКЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Под редакцией  
Юрия Александровича Воронина

Корректор Л.И.Черная  
Технический редактор Т.А.Шандарова

---

Подписано в печать 30.XI.74г. МНО МНО8640  
Формат бумаги 60x84 1/16 п.л. 13,1. Уч.изд. 13,6  
Тираж 600 экз. Заказ 732 Цена - 90 коп.

---

Отпечатано на ротапринте Вычислительного центра СО АН СССР  
Новосибирск, 90

Цена 90 коп.

1158