НЕКОРРЕКТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

Академия наук СССР Сибирское отделение
Вычислительный центр

НЕКОРРЕКТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

(Математические проблемы геофизики)

Сборник научных трудов

Под редакцией
М.М.Лаврентьева и А.С.Алексеева

Новосибирск 1976

А Н Н О Т А Ц И Я

В сборнике представлены работы теоретического характера, связанные с исследованием вопросов корректности задач для уравнений математической физики. Все рассматриваемые задачи относятся к задачам неклассического типа, большую часть из них составляют обратные задачи для уравнений математической физики. Подобные задачи часто возникают при интерпретации результатов наблюдений геофизических полей.

Сборник рассчитан на специалистов по прикладной математике и геофизике, а также на студентов старших курсов этих специальностей.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

П Р Е Д И С Л О В И Е

Настоящий сборник является продолжением серии сборников "Математические проблемы геофизики". В него включены работы сотрудников отделения математических задач геофизики и геологии Вычислительного центра СО АН СССР теоретического характера.

Большую часть сборника занимают работы, связанные с исследованием обратных задач для уравнений математической физики. Здесь рассмотрены задачи о единственности определения формы тела по его внешнему гравитационному потенциалу (Кондрашков А.В.), об определении коэффициентов линейных (Белинский С.П., Кабанихин С.И., Кардаков В.Б., Романов В.Г.) и квазилинейных (Глушкова Е.С.) уравнений гиперболического типа по известным функционалам от решений некоторых классических задач для этих уравнений; задачи об отыскании правых частей уравнений теплопроводности (Васильев В.Г.) и уравнений Гельмгольца (Запреев А.С.). Приводятся примеры однозначной или неоднозначной разрешимости интегральных уравнений, возникающих при исследовании обратных задач (Аниконов Ю.Е.). Изучена линеаризованная постановка задачи об определении плотности волнового монохроматического потенциала по его преобразованному следу (Кирейтов В.Р.).

Многие обратные задачи для уравнений математической физики сводятся к изучению предельных задач для уравнений со сдвинутым аргументом. Исследованию задачи Коши для одного из таких уравнений посвящена одна из работ сборника (Азаматов С.Ж.).

В сборник включена также работа об отыскании фазовой компоненты волнового монохроматического поля по его амплитудной составляющей (Марчук А.Г.).

Наряду с исследованием вопросов корректности, отдельные работы сборника (Кабанихин С.И., Запреев А.С., Азаматов С.Ж., Марчук А.Г.) содержат в себе алгоритмы решения задачи, которые могут быть положены в основу численных расчетов.

Редколлегия

С.Ж.Азаматов

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СДВИНУТЫМ АРГУМЕНТОМ

Целью настоящей работы является исследование корректности задачи Коши для уравнения первого порядка со сдвинутым аргументом, где коэффициенты уравнения считаются известными функциями:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{b(x,t)}{2}\{\frac{\partial u}{\partial x_1}(0,x_2,\dots,x_{n-1},y-x_1,t) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(0,x_2,\dots,x_{n-1},y+x_1,t)\}, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=o} = \varphi(x,y)\ , \tag{2}$$

где $u = u(x,y,t)$, $x = (x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$, y- параметр. Исследуем задачу (I), (2) для случая двух независимых переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{b(x,t)}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(0,x+y,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(0,y-x,t)\right\}, \tag{3}$$

$$u(x,y,0)=\psi(x,y), \tag{4}$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$ - суть непрерывные функции; $\psi(x,y)$ - непрерывна, непрерывно-дифференцируема по x и ограничена вместе с производными первого порядка в области

$$D=\{(x,t):-\infty<x<\infty,\ 0\le t\le T<\infty\},$$

y - параметр, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$.

Заметим, что в работе [I] была рассмотрена аналогичная задача для уравнения специального вида, которая возникает при линеаризации обратной задачи кинематической сейсмики. Характерной особенностью рассмотренного в [I] уравнения является вырождение коэффициентов на некоторой линии изменения переменных. В настоящей работе рассматривается уравнение без вырождения.

Обозначим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,x+y,t)=f(x+y,t) \tag{5}$$

и будем временно считать функцию f известной. Система характеристик для уравнения (3) имеет вид

$$dt=\frac{dx}{a(x,t)}=\frac{du}{\frac{1}{2}\,b(x,t)\{f(x+y,t)+f(y-x,t)\}}. \tag{6}$$

Из первых двух соотношений (6) имеем

$$x_t=a(x,t). \tag{7}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функция $a(x,t)$ сохраняет знак (например $a>0$) в полосе D, непрерывна в области D и имеет непрерывную частную производную по переменной x. При этих предположениях на коэффициент $a(x,t)$ решение уравнения (7) дает семейство характеристик:

$$x=\alpha(t,x_o),\qquad x_o=x|_{t=o}, \tag{8}$$

причем равенство (8) можно разрешить относительно постоянной интегрирования x_o:

$$x_o = \beta(x,t). \tag{9}$$

Из другого соотношения (6) получим

$$du = \frac{1}{2} b(x,t)\{f(x+y,t) + f(y-x,t)\}dt.$$

Подставляя в последнее выражение $x = \alpha(t,x_o)$, а затем проинтегрировав, имеем вдоль характеристики ($x_o = \mathrm{const}$):

$$u = u_o + \frac{1}{2}\int_0^t b(\alpha(\tau,x_o),\tau)\{f(\alpha(\tau,x_o) + y,\tau) + f(y-\alpha(\tau,x_o),\tau)\}d\tau. \tag{10}$$

Условие (4) дает начальное значение решения

$$u_o = \phi(\alpha(0,x_o),y) = \phi(\beta(x,t),y).$$

Подставляя в правую часть (10) $x_o = \alpha(x,t)$, получим:

$$u(x,y,t) = \phi(\beta(x,t),y) + \frac{1}{2}\int_0^t b(\alpha(\tau,\beta(x,t)),\tau) \times \{f(y+\alpha(\tau,\beta(x,t)),\tau) + f(y-\alpha(\tau,\beta(x,t)),\tau)\}d\tau. \tag{11}$$

Займемся теперь нахождением функции $f(y,t)$. Применяя к (11) преобразование Фурье по параметру y, получим:

$$\hat{u}(x,\lambda,t) = \hat{\phi}(\beta(x,t),\lambda) + \int_0^t \cos\lambda\alpha(\tau,\beta(x,t)) \times b(\alpha(\tau,\beta(x,t)),\tau)\hat{f}(\lambda,\tau)d\tau, \tag{12}$$

где $\hat{u},\hat{\phi},\hat{f}$ – образы Фурье функции u, ϕ, f соответственно, а λ – параметр преобразования Фурье.

Продифференцируем (12) по x:

$$\hat{u}_x(x,\lambda,t) = \hat{\phi}_1(\beta(x,t),\lambda)\beta_x(x,t) + \int_0^t \{b_1(\alpha(\tau,\beta(x,t)),\tau) \times \alpha_2(\tau,\beta(x,t))\beta_x(x,t)\cos\lambda\alpha(\tau,\beta(x,t)) - \lambda b(\alpha(\tau,\beta(x,t)),\tau) \times \alpha_2(\tau,\beta(x,t))\beta_x(x,t)\sin\lambda\alpha(\tau,\beta(x,t))\}\hat{f}(\lambda,\tau)d\tau, \tag{13}$$

где знаки "1" ("2") означают, соответственно, производные по первому (второму) аргументу.

Надо отметить, что в выражении (13) существование производных функции α, β следует из известной теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений [2], а дифференцируемость функции $b(x,t)$ предполагается.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\Phi}(\lambda,t) = \hat{\phi}_1(\beta(0,t),\lambda)\beta_x(0,t),$$

$$\hat{K}(t,\tau,\lambda) = \alpha_2(\tau,\beta(0,t))\beta_x(0,t)\{b_1(\alpha(\tau,\beta(0,t)),\tau)\times \tag{14}$$

$$\times\cos\lambda\alpha(\tau,\beta(0,t))-\lambda b(\alpha(\tau,\beta(0,t))\sin\lambda\alpha(\tau,\beta(0,t))\}.$$

Положив в (13) $x = 0$, учитывая обозначение (14), получим семейство интегральных уравнений Вольтерра II-го рода относительно функции $\hat{f}(\lambda,t)$:

$$\hat{f}(\lambda,t) = \hat{\Phi}(\lambda,t) + \int_0^t \hat{K}(t,\tau,\lambda)\hat{f}(\lambda,\tau)d\tau. \tag{15}$$

Предположим, что функции $b(x,t)$, $\dfrac{\partial b(x,t)}{\partial x}$ ограничены в полосе D и пусть

$$\max_D \left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x_0}, \frac{\partial\beta}{\partial x}, b, \frac{\partial b}{\partial x}\right\} \le M = \mathrm{const}, \tag{16}$$

тогда ядро интегрального уравнения (15) допускает оценку

$$|\hat{K}| \le A(1 + |\lambda|), \text{ где } A = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Используя оценку (17) в качестве мажоранты ядра, нетрудно показать, что резольвента, отвечающая мажоранте, стремится к бесконечности при $\lambda \to \infty$. Этот факт говорит о том, что к решению интегрального уравнения (15) нельзя, вообще говоря, применить обратное преобразование Фурье по λ.

Справедлива следующая

Т е о р е м а I . Пусть функции $b(x,t)$, $a(x,t)$, $\psi(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменной x и пусть выполнено условие (16); кроме того функция $\psi(x,y)$ принадлежит L_2 по переменной y. Тогда, если предположить, что решение задачи (3), (4) существует и принадлежит по переменной y классу $C^m(|y| < \infty)$ – m – раз непрерывно-дифференцируемых по y функции, то в указанном классе решение задачи Коши (3), (4) единственно и имеет место оценка

$$\|f\|_\Pi \leq B(\ln \frac{C}{\|\phi\|})^{-m+\frac{1}{2}}, \; m \geq 1, \tag{18}$$

где B, $C = \text{const}$, а норму следует понимать так:

$$\|f(y,t)\|_\Pi = (\int_{-\infty}^{\infty} |\max_t f(y,t)|^2 dy)^{\frac{1}{2}}.$$

Из формулы (II) видно, что единственность решения исходной задачи (3), (4) следует из единственности решения интегрального уравнения (I5). Оценка получается так же, как и в [3].

З а м е ч а н и е I. Аналогичная теорема справедлива для случая (I), (2) с любым числом независимых переменных. Доказательство проводится аналогично случаю двух независимых переменных.

З а м е ч а н и е 2. Можно вместо уравнения (3) рассмотреть уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,t)\{\frac{\partial u}{\partial x}(0,x+y,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0,y-x,t)\}. \tag{19}$$

В отличие от предыдущего, в последнем уравнении содержится производная по параметру y. Рассматривая далее уравнение (I9) с данными (4), можно показать, что и в этом случае имеет место теорема, аналогичная теореме I.

З а м е ч а н и е 3. Рассмотренные выше постановки можно обобщать, а именно, рассмотрим уравнение следующего вида:

$$Lu = b(x,t)\{\frac{\partial u}{\partial x_1}(0,x_2,\ldots,x_{n-1},y+\zeta(x,t),t) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(0,x_2,\ldots,x_{n-1},y-\zeta(x,t),t)\}, \tag{20}$$

где члены, содержащие сдвиговые аргументы, имеют более общую структуру. Если функции $\zeta(x,t)$ и ее производная $\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}$ суть ограниченные функции от своих переменных, то задача Коши для уравнения (20) исследуется приведенным методом. Для иллюстрации характера некорректности рассмотрим случай постоянных коэффициентов. Интегральное уравнение (I5) в случае $b = \mathrm{const}$ примет вид

$$\hat{f}(\lambda,t) = \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}(at,\lambda) - \lambda b \int_0^t \sin\lambda a(t-\tau)\hat{f}(\lambda,\tau)d\tau, \quad (21)$$

где $\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}(at,\lambda) = \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}(x,\lambda)\Big|_{x=at}$.

Решая уравнение (2I) с помощью преобразования Лапласа [4], получим:

$$\hat{f}(\lambda,t) = \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}(at,\lambda) - \frac{\lambda ab}{\sqrt{a(a+b)}}\int_0^t \sin\lambda\sqrt{a(a+b)}(t-\tau)\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}(a\tau,\lambda)d\tau. \quad (22)$$

Применяя к (22) преобразование Фурье по λ, окончательно имеем:

$$f(y,t) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(at,y) + \frac{ab}{2\sqrt{a(a+b)}}\int_0^t\Big\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(a\tau,y+\sqrt{a(a+b)}(t-\tau)) - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(a\tau,y-\sqrt{a(a+b)}(t-\tau))\Big\}d\tau. \quad (23)$$

Формулы (23) и (II) ($b = \mathrm{const}$) определяют решение задачи (3), (4) в случае $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$. Надо отметить, что решение задачи (3),(4) ($b = \mathrm{const}$) будет классическим, если предположить, что функция ϕ - непрерывна, непрерывнодифференцируема по t и дважды по параметру y и $a > -b$. В случае $a = -b$ имеем

$$f(y,t) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(at,y) + a^2\int_0^t (t-\tau)\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2}(a\tau,y)d\tau,$$

ϕ – удовлетворяет вышеуказанным условиям. Очевидно, что при $a < -b$ решение задачи (3), (4) ($b = const$) некорректно.

II

Перейдем теперь к исследованию вышерассмотренной задачи (3), (4), в предположении, что коэффициент $b = b(y)$. Рассмотрим случай одной пространственной переменной, причем главная часть дифференциального оператора – с постоянными коэффициентами. Имеем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b(y)}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(0,x+y,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0,y-x,t)\right\}, \qquad (24)$$

которое дополняется условием (4). Здесь $a = const$, переменные $x, t \in D$ – определенной выше. Нижевстречающиеся обозначения будут аналогичны I. В отличие от вышерассмотренного случая, к уравнению (24) нельзя применить преобразование Фурье по параметру y. Оказывается, что задача Коши для уравнения (24) может быть корректной или некорректной в классическом смысле, причем корректность определяется соотношением коэффициентов a и $b(y)$. Справедлива следующая

Л е м м а . Пусть функции $b(y)$, $\phi(x,y) \in C^2$ по переменной y и $\phi(x,y) \in C^3$ по переменной x, причем $b(y) \neq 0$. Тогда функция $g(y,t) = f(y,x) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(at,y)$ удовлетворяет эволюционному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = a(a+b(y))\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + A(y)\frac{\partial g}{\partial y} + B(y)g + ab(y)\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Нетрудно показать, что решение задачи (24), (4) имеет вид

$$u(x,y,t) = \phi(x+at,y) + \frac{b(y)}{2}\int_0^t \{f(x+y+a(t-\tau),\tau) + f(y-x-a(t-\tau),\tau)\}d\tau. \qquad (25)$$

Продифференцировав выражение (25) по переменной x и подставив $x = 0$, получим интегро-дифференциальное соотношение для функции $f(y,t)$

$$f(y,t)=\frac{\partial\psi}{\partial x}(at,y)+\frac{b(y)}{2}\int_0^t\{\frac{\partial f}{\partial y}(y+a(t-\tau),\tau)-\frac{\partial f}{\partial y}(y-a(t-\tau),\tau)\}d\tau. \tag{26}$$

Обозначим через

$$J_i(y,t)=\int_0^t\{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}(y+a(t-\tau),\tau)-\frac{\partial^i f}{\partial y}(y-a(t-\tau),\tau)\}d\tau,\ i=1,2,3.$$

В новых обозначениях формула (26) запишется так:

$$g(y,t)=\frac{1}{2}b(y)J_1(y,t).$$

Продифференцируем теперь функцию $g(y,t)$ два раза по переменным y и t, что возможно в силу условий леммы, тогда получим:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=ab(y)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{a^2b(y)}{2}J_3(y,t)+ab(y)\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{2}[b(y)J_2(y,t)+\frac{\partial b}{\partial y}J_1(y,t)],$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}J_1(y,t)+2\frac{\partial b}{\partial y}J_2(y,t)+b(y)J_3(y,t)].$$

Исключая $J_i(y,t)$ $(i=1,2,3)$ из последних трех соотношений, имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=a(a+b(y))\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}-\frac{2a^2}{b(y)}.\frac{db}{dy}.\frac{\partial g}{\partial y}- \tag{27}$$

$$-\frac{a^2}{b(y)}\{b(y)\frac{d^2b}{dy^2}-2(\frac{db}{dy})^2\}g+ab(y)\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2},$$

которое дополняется однородными начальными условиями:

$$g/_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t}/_{t=0} = 0. \tag{28}$$

Лемма доказана.

В связи с выводом уравнения (27) имеет смысл рассмотреть два случая.

С л у ч а й I. Пусть коэффициент перед $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ отрицательный на всей оси y, тогда справедлива

Т е о р е м а 2. Пусть решение задачи (24), (4) существует и суммируемо с квадратом по переменной y; относительно функции $b(y)$, $\phi(x,y)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям леммы и принадлежат L_2 по переменной y. Тогда решение задачи (24),(4) единственно.

Доказательство теоремы вытекает из вышерассмотренной леммы. Из формулы (25) следует, что единственность решения исходной задачи (24), (4) вытекает из единственности решения уравнения (27) с данными (28).

В свою очередь, для функции $v(z,t) = c(z)g(y(z),t)$ справедлива следующая оценка:

$$\|v\|_{L_2(z)} \le \|v(0)\|_{L_2(z)}^{\frac{T-t}{T}} \cdot \|v(T)\|_{L_2(z)}^{\frac{t}{T}}, \tag{29}$$

которая доказывается как в [5].

Здесь функция $c(z)$ выражается через коэффициенты уравнения (27), а $z = \int\limits_{y_0}^{y} [-a(a+b(\tau)]^{-\frac{1}{2}} d\tau$.

Из оценки (29) следует единственность решения задачи Коши (24), (4).

Теорема доказана.

С л у ч а й 2. В случае, когда коэффициент $a(a+b(y)) > 0$ на всей оси y, уравнение (27) будет обычным уравнением гиперболического типа и поэтому имеет место теорема единственности исходной задачи при тех же допущениях на функции $b(y)$ и $\phi(x,y)$, что и было раньше.

Литература

I. АЗАМАТОВ С.Ж. О корректности задачи Коши для линейного уравнения первого порядка со сдвинутым аргументом.- В сб.: Математические проблемы геофизики, вып.6, изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск.

2.СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики. Т.IУ, М., Гостехиздат, 1956.

3. АНДРЕЕВ В.А., АЗАМАТОВ С.Ж. Некоторые задачи для уравнения в частных производных со сдвинутым аргументом. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып.5, Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск,

4. БЭТМАН Г., ЭРДЕЙН А. Таблицы интегральных преобразований. Т.I, М., "Наука", 1969.

5. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1973.

Ю.Е.Аниконов

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ПО ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В данной статье приводятся примеры неединственности решения интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра с положительным ядром и неединственность и неустойчивость решения задач интегральной геометрии.

В первом случае отсутствие единственности решения интегрального уравнения связано с наличием бесконечных осциляций решения, а неединственности и неустойчивости решения задач интегральной геометрии связано с многомерностью задач,финитностью, локальностью и другими причинами.

В конце статьи мы приводим пример уравнения задачи интегральной геометрии, которое имеет такой же вид, что и в случае кривых, допускающих группу параллельных переносов.

Доказательства некорректности задач интегральной геометрии основано на формулах, которые, по нашему мнению, представляют и самостоятельный интерес.

I.Пример неединственности решения интегрального уравнения Вольтерра с положительным ядром

Пусть $\lambda(t)$, $t \geq 0$, $\lambda(0) = 0$, бесконечно дифференцируемая функция, имеющая нуль в любом интервале $(0,\alpha)$, $\alpha > 0$, например, $\lambda(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \sin\frac{1}{t}$, $\lambda(0)=0$. Покажем, что существует ядро $K(x,t) > 0$, $x \neq 0, t \neq 0$. такое, что для любого $x > 0$ выполнено равенство

$$\int_0^x k(x,t)\lambda(t)dt = 0.$$

На существование таких примеров обратили мое внимание Ю.М.Березанский и Л.П.Нижник.

Пусть $E^+(x)$ и $E^-(x)$ – множества, определенные следующим образом:

$$E^+(x) = \{t : \lambda(t) > 0\} \cap (0,x),$$

$$E^-(x) = \{t : \lambda(t) \le 0\} \cap (0,x).$$

Так как $\lambda(t)$ имеет нуль в любом интервале $(0,x)$, то $\operatorname{mes} E^{\pm}(x) > 0$. (*) Положим

1835

$$\mu^+(x,t) = \begin{cases} I, & \text{если} \quad t \in E^+(x), \\ 0, & \text{если} \quad t \in E^+(x),\ 0 \le t \le x, \end{cases}$$

$$\mu^-(x,t) = \begin{cases} -I, & \text{если} \quad t \in E^-(x), \\ 0, & \text{если} \quad t \in E^-(x). \end{cases}$$

Введем функции

$$g^+(x) = \int_{E^+(x)} \lambda(t)dt, \quad g^-(x) = \int_{E^-(x)} \lambda(t)dt.$$

Определим ядро $k(x, t)$ формулой

$$k(x,t) = -\mu^+(x,t)g^-(x) - \mu^-(x,t)g^+(x),$$

Очевидно, что $k(x,t) > 0$, $x \neq 0$ (см (*)).

Имеем

$$\int_0^x k(x,t)\lambda(t)dt = \int_{E^+(x)} k(x,t)\lambda(t)dt + \int_{E^-(x)} k(x,t)\lambda(t)dt = 0.$$

$$= - g^+(x)g^- + g^+(x)g^-(x) = 0.$$

Таким образом построено ядро $k(x,t)$ такое, что для любого $x, x \geq 0$ имеет место равенство

$$\int_0^x k(x,t)\lambda(t)dt = 0.$$

Заметим, что если $\tilde{\lambda}(t)$ является аналитической функцией в области $t \geq 0$, то из равенства

$$\int_0^x k(x,t)\tilde{\lambda}(t)dt = 0, \quad k > 0, \; x \neq t,$$

вытекает, что $\tilde{\lambda}(t) = 0$ [I].

2. Пример неединственности решения задачи интегральной геометрии

Пусть кривые $\gamma = \{x(t), y(t)\}$ обладают свойствами.

I. Они являются решением системы уравнений Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2F(x,y) + h,$$

где h – абсолютная постоянная, не зависящая от кривой γ, $F(x,y)$ – фиксированная функция.

2. Кривая $\gamma = \{x(t), y(t)\}$ является замкнутой.

Рассмотрим функцию

$$\lambda(x,y) = \frac{u(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial x} + v(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}(2F + h)}{\sqrt{2F + h}},$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – гармонические и сопряженные функции. Оказывается, какова бы ни была кривая γ, обладающая свойством I и 2 и каковы бы ни были гармонические функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, имеет место равенство

$$\int_\gamma \lambda(x,y)\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0, \quad [7].$$

Так как таких замкнутых кривых γ может быть много (это зависит, очевидно, только от выбора функции $F(x,y)$), то полученный результат дает примеры неединственности решения класса задач интегральной геометрии. Один пример такого же сорта содержится в книге [6].

Одной из причин отсутствия единственности решения является то обстоятельство, что искомая функция $\lambda(x,y)$ не является финитной. Для финитных функций имеет место (даже в более общих случаях) единственность решения, [2], [3].

3. О неустойчивости решения задач интегральной геометрии

Пусть $ds^2 = a^2(x,y)(dx^2 + dy^2)$ – фиксированная аналитическая метрика, заданная в замкнутой области $\overline{D}$ с границей L и пусть $\gamma(\xi,\eta)$ – ее геодезическая, соединяющая точки ξ и η некоторой дуги $l \le L$ (см. рис.I).

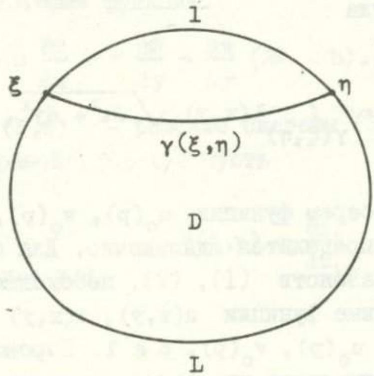

Рис.I

Рассмотрим задачу определения функции $\lambda(x,y)$, $(x,y)\in D$, если известна функция

$$W(\xi,\eta) = \int_{\gamma(\xi,\eta)} \lambda(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2}, \quad \zeta\in l,\ \eta\in l.$$

В работах Лаврентьева М.М., Бухгейма А.Л. показано, что если $L = l$, то при достаточно регулярном расположении кривых

$\gamma(\xi,\eta)$ такие задачи и даже более общие устойчивы, [2], [3]. Здесь мы покажем, что если $l \neq L$, то рассматриваемая задача неустойчива. По этому вопросу см. [9], [10]. Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – произвольные гармонические и сопряженные функции, заданные в области D, а $v_0(p)$ и $u_0(p)$ – их граничные значения, $p \in l$.

Обозначим через $\alpha(\xi,\eta)$, $\beta(\xi,\eta)$ углы, которые образует геодезическая $\gamma(\xi,\eta)$ с осью ox в точках ξ и η, соответственно.

Введем функции $W(\xi,\eta)$ и $\lambda(x,y)$, полагая

$$W(\xi,\eta)=a_0(\eta)[u_0(\eta)\cos\beta+v_0(\eta)\sin\beta]-a_0(\xi)[u_0(\xi)\cos\alpha+v_0(\xi)\sin\alpha],$$

$$\lambda(x,y) = u(x,y)\frac{\partial a}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}a, \qquad (1)$$

Имеет место формула

$$W(\xi,\eta) = \int_{\gamma(\xi,\eta)} \lambda(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2}, \qquad (2)$$

Если мы теперь выберем функции $u_0(p)$, $v_0(p)$, то тем самым функция $W(\xi,\eta)$ определится однозначно. Для определения же решения, в силу равенств (1), (2), необходимо найти гармонические и сопряженные функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ в области D по граничным данным $u_0(p)$, $v_0(p)$, $p \in l$. Хорошо известно, что эта задача аналитического продолжения является неустойчивой, если $l \neq L$. Остается заметить, что в силу формулы для $W(\xi,\eta)$, малость $u_0(p)$ и $v_0(p)$ влечет за собой малость и $w(\xi,\eta)$. Решение же $\lambda(x,y)$ в силу (1) может быть велико. Интересно также отметить, что если априори предполагать искомую функцию $\lambda(x,y)$, не зависящую от одной переменной, скажем от x, то, как показано Романовым В.Г. [4], такие задачи являются устойчивыми и в случае, когда $l \neq L$. При этом для однозначного и устойчивого определения $\tilde{\lambda}(y)$ достаточно знать функцию $w(\eta) = w(\xi_0\eta)$, $\eta \in l$, ξ_0 – фиксировано. Сопоставляя эти факты, можно заключить, что неустойчивость решения задачи интегральной геометрии связана: I) с многомерностью задачи, 2) с незамкнутостью контура, на котором определена информация. Рассмотрим теперь такую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Phi + h, \qquad (3)$$

где h - абсолютная постоянная, не зависящая от решения, $(x(t),\ y(t))$, Φ - фиксированная функция.

Пусть

$$u(x,y) = \frac{\alpha(x-y) + \beta(x+y)}{2}, \quad v(x,y) = \frac{\alpha(x-y) - \beta(x+y)}{2},$$

где α и β - некоторые функции.

Положим $\lambda(x,y) = u\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} - v\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}(2\Phi + h)$. (4)

Обозначим через $\gamma(\xi,\eta)$ - решение системы (3), соединяющее точки ξ и η прямой $y = 0$ и пусть

$$A(\xi,\eta) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{y=0,x=\xi}, \quad B(\xi,\eta) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0,x=\xi},$$

$$C(\xi,\eta) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{y=0,x=\eta}, \quad D(\xi,\eta) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0,x=\eta}.$$

Определим функцию $W(\xi,\eta)$ равенством

$$W(\xi,\eta) = u^0(\eta)C + v^0(\eta)D - (u^0(\xi)A + v^0(\xi)B),\ u^0 = u(x,0),\ v^0 = v(x,0).$$

Имеет место формула

$$W(\xi,\eta) = \int\limits_{\gamma(\xi,\eta)} \lambda(x,y)dt, \quad [7],[8].$$

В отличие от предыдущего результата, здесь имеют место оценки устойчивости, в классе функций $\lambda(x, y)$, представимых в виде (4). По-видимому, это связано с наличием веса.

4. Один пример, связанный с уравнением задачи интегральной геометрии

В работе [5] одна плоская задача интегральной геометрии редуцирована к исследованию уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial W}{\partial y}\sin\varphi + k(x,y,\varphi)\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right) = 0.$$

Геометрический смысл коэффициентов этого уравнения состоит в следующем:

$(\cos\varphi, \sin\varphi)$ – единичный касательный вектор кривой, по которой производится интегрирование искомой функции, а $K(x, y, \varphi)$ – кривизна кривой, проходящей через точку (x,y) в направлении φ. При этом оказывается, что если кривые допускают группу параллельных переносов вдоль оси ox, то кривизна $k(x,y,\varphi)$ не зависит от x. Здесь мы покажем, что обратное неверно.

Пусть $\{\gamma\}$ – геодезические метрики

$$ds^2 = a(y)e^{\alpha x}(dx^2 + dy^2),$$

где $a(y) > 0$, $a'(y) < 0$, α – постоянная. Кривые $\gamma\in\{\gamma\}$ из-за наличия множителя $e^{\alpha x}$, $\alpha \neq 0$, не допускают группу параллельных переносов вдоль оси ox. С другой стороны, кривизна $k(x,y,\varphi)$ такой кривой равна

$$k(x,y,\varphi) = \frac{1}{ae^{\alpha x}}\left[\frac{\partial}{\partial x}[ae^{\alpha x}]\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial y}[ae^{\alpha x}]\cos\varphi\right] =$$

$$= \alpha \sin \varphi - \frac{a'(y)}{a(y)} \cos \varphi .$$

Так как α - постоянная, то кривизна k не зависит от x.

Литература

1. АНИКОНОВ Ю.Е., ШИШКО Н.П. Примеры квазимонотонных операторов.- Сб.Математические проблемы геофизики, вып.5, 1974, с. 19 - 25.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., БУХГЕЙМ А.Л. ДАН, т.211, № 1, 1973.
3. БУХГЕЙМ А.Л. Нормальная разрешимость специальных операторных уравнений I-го рода. - Сб. Математические проблемы геофизики, вып.6, 1975, с.42-54.
4. РОМАНОВ В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск,"Наука", 1969.
5. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., АНИКОНОВ Ю.Е. ДАН, т.176, № 5, 1967.
6. ЙОН.Ф. Плоские волны и сферические средние.М.,"Наука",1958.
7. АНИКОНОВ Ю.Е. Формулы в многомерной обратной кинематической задаче.- Сб. Математические проблемы геофизики. вып.6, часть I, 1975, с.17-27.
8. АНИКОНОВ Ю.Е. К задаче определения римановой метрики $ds^2 = \lambda^2(x)|dx|^2$ - Математические заметки, т. 16, вып.4, 1974, с.611-617.
9. ГАРИПОВ Р.М. Негиперболическая граничная задача для волнового управления.- ДАН СССР, 1974, т.219, № 4, с. 777-780.
10. БУХГЕЙМ А.Л. Необходимые условия устойчивости одного класса интегро-дифференциальных уравнений. - В сб.: "Вычислительные методы и программирование", изд-во ВЦ СО АН СССР, 1975, с.78-86.

С.П.Белинский

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим обратную задачу для гиперболической по Петровскому системы линейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными:

$$u_t + K u_x = Du + F. \tag{I}$$

Здесь $u = u(x,t) = (u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))$ - n неизвестных функций. Матрица $K = K(x)$ - диагональная с элементами, принадлежащими классу C^1. Матрица $D = D(x)$ - с элементами, принадлежащими C^2. Вектор F имеет непрерывные производные по x,t до второго порядка включительно. Будем также считать, что начальные данные и информация о решении, которые мы зададим при постановке обратной задачи, обеспечивают нам принадлежность решения системы (I) к классу W^3_1.

Как и в [I], будем предполагать, что прямая задача для системы (I) ставится внутри области $\Omega = \{0 \le x \le L, 0 \le t < \infty\}$. Обратная задача по отношению к системе (I) будет заключаться в отыскании матрицы $K(x)$ на отрезке $[0, L]$ при заданном векторе F, матрице D и некоторой информации о решении прямой задачи. В дальнейшем мы будем часто ссылаться на работу [I], где решалась подобная задача для матрицы D, поскольку метод построения интегральных уравнений для решения обратной задачи в принципе такой же. Итак, считаем заданными начальные и граничные условия, а также информацию о решении:

$$u_i(x,0) = \phi_i(x), \quad i = 1,2,\dots, n; \quad 0 \le x \le L,$$

$$u_i(0,t) = f_i(t), \quad i = 1,2,\dots, n; \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u_i(L,t) = \varphi_i(t), \quad i = 1,2,\dots, n; \quad t \ge 0.$$

В отличие от [I] нами будет получена лишь теорема единственности для матрицы K(x). Напомним, что в [I] была получена система интегральных уравнений для нахождения матрицы D. Будем предполагать, что искомые элементы матрицы K(x) обладают свойством:

$$|k_i(x)| \ge q > 0; \; x \in [0,L]. \tag{3}$$

Пусть u^1, u^2 – два решения системы (I) с матрицами K_1 и K_2 соответственно, удовлетворяющие условиям (2). Тогда их разность $u = u^1 - u^2$ удовлетворяет следующей системе:

$$u_t + K_1 u_x = Du + K u^2_x; \quad K = K_1 - K_2, \tag{4}$$

$$u_i(x, 0) \quad i = 1,2,\dots n; \quad x \in [0,L],$$

$$u_i(0,t) = 0 \quad i = 1,2,\dots, n; \quad t \ge 0, \tag{5}$$

$$u_i(L,t) = 0 \quad i = 1,2,\dots, n; \quad t \ge 0.$$

Пусть, для определенности, первые s значений k^i_1 положительны, а остальные отрицательны, причем $s \ne 0$; $s \ne n$. Случаи всех отрицательных и всех положительных коэффициентов рассматриваются аналогично. Так же, как и в [I], рассматривая i – е уравнение системы и интегрируя его вдоль характеристики $\tau = \tau_i(x)$:

$$\tau_i(x) = \tau_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} [k^i_1(\xi)]^{-1} d\xi, \tag{6}$$

а также дифференцируя полученное уравнение по t , приходим к следующему уравнению для $w_i(x,t) = u_t^1(x,t)$:

$$w_i(x,t) = \int_{\alpha_i(x,t)}^{x} [k_1^i(\xi)]^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(\xi) w_j(\xi, \tau_i(\xi) - \tau_i(x) + t) d\xi +$$

$$+ \int_{\alpha_i(x,t)}^{x} \frac{k^i(\xi)}{k_1^i(\xi)} u^{2\,i}_{1,2}(\xi, t + \tau_i(\xi) - \tau_i(x)) d\xi + \frac{k^i(\alpha_i(x,t))}{k_1^i(\alpha_i(x,t))} u_1^{2\,i}(\alpha_i(x,$$

$$t), \beta_i(x,t)) \cdot \gamma_i . \qquad (7)$$

Здесь $(\alpha_i(x,t), \beta_i(x,t))$ – координаты точки пересечения i-й характеристики, проходящей через точку (x,t) с границей области Ω, причем $\beta_i(x,t) < t$. Нижние индексы I и 2 у функции $u^{2\,i}$ означают дифференцирование соответственно по первой и по второй переменной функции $u^{2\,i}(x,t)$. Нетрудно заметить, что

$$\alpha_i(x, t) = \max \{x - \int_0^t k_1^i(\xi) d\xi, 0\}; \quad i = 1,2,\dots,s, \qquad (8)$$

$$\alpha_i(x, t) = \min \{x - \int_0^t k_1^i(\xi) d\xi, L\}; \quad i = s+1,\dots,n. \qquad (9)$$

И, наконец

$$\gamma_i = \begin{cases} k_1^i(\alpha_i(x,t)), & \alpha_i(x,t) \neq \{0,L\} \\ 0, & \alpha_i(x,t) = \{0,L\}. \end{cases} \qquad (10)$$

Далее, полагая в формуле (7) $x = 0$ для $s+1 \le i \le n$ и $x = L$ для $i = 1,2,\dots,s$, получаем дополнительные соотношения между $k^i(x)$ и $w_i(x,t)$:

$$k^i(x) = [u_x^{2\,i}(x,0)]^{-1} \cdot \{\int_{\delta_i}^{x} [k_1^i(\xi)]^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(\xi) w_j(\xi, \tau_i(\xi) - \tau_i(x)) d\xi +$$

$$+ \int_{\delta_i}^{x} \frac{k^i(\xi)}{k_1^i(\xi)} u^{2\,i}_{1,2}(\xi, \tau_i(\xi) - \tau_i(x)) d\xi\}; \quad \delta_i = \begin{cases} L: & 1 \le i \le s \\ 0: & s+1 \le i \le n. \end{cases} \qquad (11)$$

Как и в [I], построим область $\Omega(L)$, в которой неизвестные функции $w_i(x,t)$ и $k^i(x)$ выражаются только через свои же значения в этой области. Из точек (0,0) и (L, 0) плоскости (x, t) выпустим характеристики, уходящие из соответствующих точек внутрь области Ω и имеющие наибольшие углы наклона к оси x. Будем для простоты полагать, что все $k_1^i(x)$ различны для каждого $x \in [0,L]$, хотя это и несущественно. Из получившихся точек C и A, являющихся точками пересечения соответствующих характеристик с осями $x = L$ и $x = 0$ соответственно, выпустим внутрь области Ω характеристики с наименьшими углами наклона к оси x. Пусть они пересекутся в точке N. Получившийся криволинейный пятиугольник $OLCNA$ мы и обозначим $\Omega(L)$. Заметим, что если бы $k_1^i(x)$ не были различны для каждого $x \in [0,L]$, то область $\Omega(L)$ строилась бы более громоздко.

Как и в [I], легко убедиться, что L для систем (II) и (7) играет роль малого параметра.

Покажем теперь, что при достаточно малом L системы уравнений (II),(7) имеют единственное решение в классах $C^1(0,L)$ и $C^1(\Omega(L))$ для $K(x)$ и $w(x,t)$ соответственно. Систему (7), (II) можно рассматривать как некоторое операторное уравнение

$$g = Ug, \tag{I2}$$

где $g = g(x,t) = (g_1^1(x,t),\ g_1^2(x,t)) = (w_1(x,t),\ k^1(x))$, а U - оператор, определенный уравнениями (7),(II). Введем на множестве таких функций норму, положив

$$\|g\| = \max_{i,k} \cdot \sup_{(x,t)\in\Omega(L)} |g_i^k(x,t)|, \tag{I3}$$

и рассмотрим множество функций C указанного вида из класса $C^1(\Omega(L))$, удовлетворяющих на $\Omega(L)$ неравенству:

$$\|g\| \leq M. \tag{I4}$$

Покажем, что из того, что $g \in C$, следует, при достаточно малом L, что и $Ug \in C$. Прежде всего получим априорную оценку для u_{xt}^2 в области $\Omega(L)$. Решение u^2, как известно, удовлетворяет системе:

$$u_t^2 + K_2 u_x^2 = Du^2 + F. \tag{I5}$$

Расширим эту систему добавлением к ней следующих производных:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u^2 \\ u_t^2 \\ u_x^2 \\ u_{xt}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_2 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & K_2 & \\ 0 & & & K_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u^2 \\ u_t^2 \\ u_x^2 \\ u_{xt}^2 \end{pmatrix} = D^* \begin{pmatrix} u^2 \\ u_t^2 \\ u_x^2 \\ u_{xt}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ F_t \\ F_x \\ F_{xt} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрицу D^* нетрудно выписать, но мы этим заниматься не будем. Пусть теперь:

$$\|u^2\|_{C^2(\Omega(L))} = \max_i \sup_{(x,t)\in\bar\Omega(L)} \{u^{2i}(x,t); u_x^{2i}(x,t); u_t^{2i}(x,t); u_{xt}^{2i}(x,t)\}. \quad (17)$$

И пусть этот экстремум достигается, например, в точке (x,t) на элементе u^{2i}. Проинтегрируем тогда i - е уравнение системы (16) от точки (x,t) вниз по i - й характеристике:

$$u^{2i}(x,t) = u^{2i}(x_1,t_1) + \int_{\alpha_i(x,t)}^{x} [k_i^2(\xi)]^{-1} \sum_{j=1}^{4n} d_{ij}^*(\xi) \times$$

$$\times\, u^{2j}(\xi, t+\tau_i(\xi)-\tau_i(x))d\xi + \int_{\alpha_i(x,t)}^{x} [k_i^2(\xi)]^{-1} F_i(\xi, t+\tau_i(\xi)-\tau_i(x))d\xi. \quad (18)$$

Или, оценивая обе части по абсолютной величине:

$$\|u^2\|_{C^2(\Omega(L))} \le \|\varphi\| + \|\phi\| + \|f\| + \frac{4n}{q}\|u^2\|\cdot\|D^*\|\cdot L + \frac{L}{q}\|F\|. \quad (19)$$

В общем же случае, учитывая, что

$$\|D^*\| = \max\{\|K_2\|_{C^1(\Omega(L))}, \|D\|_{C^2(\Omega(L))}\}, \quad (20)$$

а также взяв L из неравенства:

$$L \le \frac{1}{2}\, q\, [4n\, \|D^*\|_{C(\Omega(L))}]^{-1}, \quad (21)$$

получим для $\|u^2\|_{C^2(\Omega(L))}$ следующую оценку:

$$\|u^2\|_{C^2(\Omega(L))} \le 2 \max_{(x,t)\in\partial\Omega(L)} \{\|\phi\|_{C^1};\ \|\varphi\|_{C^1};\ \|f\|_{C^1}\} + \tag{22}$$
$$+ [4n\,\|D^*\|]^{-1}\cdot\|F\|_{C^2(\Omega(L))} = 1.$$

Теперь уже легко получается оценка для Ug. Сделав отдельно оценку для $U_i^1 g$ и для $U_i^2 g$, нетрудно получить, что

$$\|Ug\| \le \max\{2,\ \|\phi_x^{-1}\|\}\cdot \frac{L}{q}\cdot M(1 + n\,\|D\|). \tag{23}$$

Из неравенства (23) ясно, что если L будет удовлетворять условию:

$$L \le q\,[(1 + \|D\|\cdot n)\cdot\max\{2,\ \|\phi_x^{-1}\|\}^{-1}, \tag{24}$$

то $\|Ug\| \le M$. Покажем теперь, что U – оператор сжатия на G. Действительно:

$$\|U_i^1 g - U_i^1\tilde g\| \le 2(\frac{L}{q}\,\|D\|\cdot n + \frac{L}{q}\,1)\|g - \tilde g\|;$$
$$\|U_i^2 g - U_i^2\tilde g\| \le \|\phi_x^{-1}\|(\frac{L}{q}\,n\,\|D\| + \frac{1\cdot L}{q})\|g - \tilde g\|. \tag{25}$$

Таким образом, для L, удовлетворяющего (2I) и (24), оператор U является оператором сжатия на $\Omega(L)$. Сформулируем полученный результат.

Т е о р е м а. Пусть для системы (I) неизвестна матрица $K(x)$ с элементами $k_i(x)$; $i = 1,2,\dots,n$, принадлежащими классу C^1 на $[0,L]$ и удовлетворяющими условиям: $|k_i(x)| \ge q > 0$; $\|K\|_{C^1(\Omega(L))} \le P$. Пусть начальные данные и информация (2) таковы, что обеспечивают в области $\Omega(L)$ трижды непрерывно-дифференцируемое решение у системы (I), и пусть $\phi_x \ne 0$ на $[0,L]$. Тогда для любого L, удовлетворяющего условиям (2I), (24), матрица $K(x)$ находится на $[0,L]$ единственным образом.

Л и т е р а т у р а

I. РОМАНОВ В.Г., СЛИНЮЧЕВА Л.И. Обратная задача для линейных гиперболических систем первого порядка.- Сб. Математические проблемы геофизики , вып.Ш, с.I87-2I5.

В.Г.Васильев

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРЕХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим прямую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)\, g(t),\ x \in (0,\ 1),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(o,\ t) = u(1,\ t) = 0,\ u(x,\ 0) = \varphi(x).$$

Решение этой задачи можно представить в виде

$$u(x,\ t) = \int_o^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int_o^t\int_o^1 G(x,\xi,t-\tau)f(\xi)g(\tau)d\xi\, d\tau\ , \tag{2}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2 t} \sin\frac{\pi h}{1}x \sin\frac{\pi h}{1}\xi,\ \alpha = \frac{\pi^2}{1^2}a^2 \tag{3}$$

есть функция Грина данной задачи.

Обозначим

$$v(x,\ t) = u(x,\ t) - \int_o^1 G(x,\ \xi,\ t)\ \varphi(\xi)\ d\xi\ , \tag{4}$$

тогда

$$v(x,\ t) = \int_o^t\int_o^1 G(x,\ \xi,\ t-\tau)f(\xi)g(\tau)\ d\xi\ d\tau. \tag{5}$$

Рассмотрим следующие обратные задачи.

Задача I. Требуется найти функцию $f(\xi)$, если известна функция $v(x, t_0)$.

Из равенства (5) при $t = t_0$ следует

$$v(x, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$a_n = \int_0^{t_0} e^{-\alpha n^2 (t_0 - \tau)} g(\tau) d\tau,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Поэтому, разлагая известную по условию функцию $v(x, t_0)$ в ряд Фурье

$$v(x, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l v(\xi, t_0) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi,$$

получим $c_n = a_n b_n$, откуда $b_n = \frac{c_n}{a_n}$, $a_n \neq 0$.

Следовательно, если $a_n \neq 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n} \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{6}$$

Таким образом, справедлива следующая

Т е о р е м а I. Решение задачи I единственно в классе кусочно-гладких функций при условии $a_n \neq 0$ и представимо в виде ряда Фурье (6).

Задача 2. Требуется найти функцию $f(\xi)$, если известна функция $v(x_0, t)$.

Полагая в (5) $x = x_0$, имеем

$$v(x_0, t) = \int_0^t K(\tau) g(t - \tau) d\tau, \tag{7}$$

$$K(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 \tau}, \qquad (8)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi h}{l}\xi \, d\xi \cdot \sin \frac{\pi h}{l} x_o. \qquad (9)$$

Выражение (7) есть свертка функций $K(\tau)$ и $g(\tau)$, поэтому для доказательства единственности задачи 2 воспользуемся теоремой Титчмарша [I], которая заключается в следующем: если функции $K(t)$ и $g(t)$ непрерывны в области $0 \le t < \infty$ и их свертка

$$\int_0^t K(\tau)\, g(t-\tau) d\tau = 0$$

для всех $t \ge 0$, то по крайней мере одна из этих функций в области $0 \le t < \infty$ всюду равна нулю.

Потребуем, чтобы функция $g(\tau)$ была непрерывной и отличной от нуля при $\tau = \tau_o$. Тогда

$$K(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 \tau} = 0.$$

Следовательно, $b_n = 0$ и если $\sin \frac{\pi h}{l} x_o \ne 0$, то

$$\int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi h}{l} \xi \, d\xi = 0,$$

откуда в силу полноты последовательности функций $\{\sin \frac{\pi h}{l} \xi\}$ следует $f(\xi)=0$ почти всюду.

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Решение задачи 2 единственно в пространстве $L_2(0,1)$, если функция $g(\tau)$ непрерывна, $g(\tau_o) \ne 0$ и $\frac{\pi h}{l} x_o \ne 0$, $n = 1,2,\dots$.

Задача 3. Требуется найти функцию $g(t)$, если известна функция $v(x_o, t)$.

В этом случае согласно теореме Титчмарша для единственности решения потребуем, чтобы функция $K(\tau)$, определяемая формулами (8), (9), была непрерывной и отличной от нуля при $\tau = \tau_0 > 0$.

Литература

1. ДИТКИН В.А., ПРУДНИКОВ А.П. Операционное исчисление. М., "Высшая школа", 1975.

Е.С. Глушкова

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В работе рассматривается обратная задача для квазилинейного уравнения гиперболического типа в случае, когда искомая функция зависит от трех пространственных переменных и от решения этого уравнения. Выделен класс единственности рассматриваемой задачи.

Сформулируем точную постановку обратной задачи. Требуется отыскать функцию $q(x,u)$, входящую в дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + q(x,u), \tag{1}$$

$$\left(x = (x_1,x_2,x_3), t \geq 0, \Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right),$$

если относительно решения задачи Коши для уравнения (I) с данными

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(x,x_0) \tag{2}$$

известно, что

$$u(x,t,x_o)|_{x=x_o} = F(x_o,t). \qquad (3)$$

Здесь точка x_o пробегает все пространство R^3.

В случае одной пространственной переменной $x \in R$ вопрос единственности решения обратной задачи (I)-(3) был исследован в работе [I]. Данная работа является обобщением полученного в [I] результата для $x \in R^3$.

Сделаем некоторые предположения относительно класса функций $q(x,u)$ и функции $f(x,x_o)$. Пусть функции $q(x,u)$ неотрицательны, трижды непрерывно дифференцируемы по всем аргументам для $x \in R^3$, $0 \le u \le u_o$, кроме того, $\frac{\partial q}{\partial u} \ge 0$ и существует константа $M > 0$ такая, что

$$\sum_{|\alpha| \le 3} \sup_{x \in R^3} \sup_{0 \le u \le u_o} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} q(x,u)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial u^{\alpha_4}} \right| \le M,$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i, \qquad \|q\|_{C^3(R^3 \times [0,u_o])} \le M.$$

Относительно функции $f(x,x_o)$ допустим, что $f(x,x_o) \in C^3(R^3 \times R^3)$, $f(x,x_o) \ge \varepsilon > 0$, $\|f\|_{C^3} \le M_1$ $\Delta_x f \ge 0$.

При помощи формулы Кирхгофа сведем задачу (I)-(2) к эквивалентному ей интегральному уравнению

$$u(x,t,x_o) = \frac{1}{4\pi t} \iint_{|x-\xi|=t} f(\xi,x_o) dS_t +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint_{|x-\xi| \le t} \frac{q(\xi,u(\xi,t-|x-\xi|,x_o))}{|x-\xi|} d\xi \quad \text{или}$$

$$u(x,t,x_o) = \frac{t}{4\pi} \iint_{|y|=1} f(x+yt,x_o) dS_1 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^t r dr \iint_{|y|=1} q(x+yr,u(x+yr,t-r,x_o)) dS_1 \qquad (4)$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $|x - \xi| = r$, dS_t – элемент площади сферы радиуса t.

Имеет место следующая

Л е м м а I. Для любой функции $q(x,u)$ из заданного класса интегральное уравнение (4) имеет в области $S=\{(x,t,x_0) : x \in R^3, 0 \le t \le T, x_0 \in R^3\}$, где

$$0 < T < \min\{\frac{-M_1 + \sqrt{M_1^2 + 2Mu_0}}{M}, \sqrt{\frac{2}{M}}\}$$

единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $0 \le u \le u_0$.

Для доказательства этого факта введем оператор B:

$$Bu=\frac{t}{4\pi} \iint_{|y|=1} f(x+yt,x_0)dS_1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t rdr \iint_{|y|=1} q(x+yr,u(x+yr,t-r,x_0))dS_1.$$

Возьмем в пространстве непрерывных функций любой элемент, принадлежащий шару $S(0,u_0)$ радиуса u_0 с центром в точке 0. Покажем, что оператор B переводит любой элемент шара $S(0,u_0)$ в элемент этого же шара. Действительно, из уравнения (4) и условия, наложенного на T, получаем

$$\|Bu\|_C \le t\cdot M_1 + \frac{t^2}{2}\cdot M \le u_0.$$

Проверим, что на шаре $S(0,u_0)$ оператор B является оператором сжатия. Пусть u_1, u_2 – любые два элемента из $S(0, u_0)$. Тогда

$$\|Bu_1 - Bu_2\| \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi}\int_0^t rdr \iint_{|y|=1} |\frac{\partial q(x+yr,u^*)}{\partial u}|\cdot|u_1-u_2|dS_1 \le$$

$$\le \frac{Mt^2}{2}\|u_1-u_2\| \le \frac{MT^2}{2}\|u_1-u_2\|, \frac{MT^2}{2} < 1.$$

Через $u^*(x,t,x_o)$ обозначена средняя точка в теореме о конечных превращениях. Теперь из принципа сжатых отображений следует утверждение о существовании единственного непрерывного решения уравнения (4) в области S.

Дифференцируя равенство (4) по x_i и t, находим

$$u_{x_i}(x,t,x_o) = \frac{t}{4\pi}\iint_{|y|=1} f_{x_i}(x+yt,x_o)dS_1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t rdr \iint_{|y|=1} q_{x_i} + \tag{5}$$
$$+ q_u \cdot u_{x_i}(x+yr,t-r,x_o)dS_1,$$

$$u_t(x,t,x_o) = \frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1} (f(x+yt,x_o) + tq(x+yt,0))dS_1 +$$
$$+ \frac{t}{4\pi}\iint_{|y|=1}\sum_{i=1}^{3} f_{x_i} y_i dS_1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t rdr \iint_{|y|=1} q_u u_t(x+yr,t-r,x_o)dS_1. \tag{6}$$

Сразу же отметим, что по формуле Гаусса-Остроградского

$$\frac{t}{4\pi}\iint_{|y|=1}\sum_{i=1}^{3} f_{x_i} y_i dS_1 = \frac{1}{4\pi t}\iiint_{|x-\xi|\le t} \Delta_x f d\xi \ge 0.$$

Формулы (5) и (6) можно рассматривать как интегральные уравнения Вольтерра второго рода относительно функций u_{x_i}, u_t. Ясно, что при сделанных предположениях о функциях $q(x,u)$ и $f(x,x_o)$ решение задачи Коши (I)-(2) $u(x,t,x_o)$ имеет в области S непрерывные и ограниченные частные производные по переменным x,t,x_o до третьего порядка включительно и, кроме того, обладает очевидными свойствами:

$$0 \le u \le u_o,\ u_t \ge \varepsilon > 0.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий факт.

Л е м м а 2. Существует такое малое t_o, $0 \le t_o < T$, что при любом $0 \le t \le t_o$ выполняется неравенство $u(x,t,x_o) \ge u(\xi,\tau,x_o)$ для любой точки $(\xi,\tau) \in D(x,t)$. $(D(x,t) = \{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le t - |x-\xi|\})$.

Так как функция $u_\tau \ge \varepsilon > 0$, то достаточно показать, что значения функции $u(\xi,\tau,x_0)$ на боковой поверхности конуса $D(x,t)$ будут меньше, чем значение в вершине конуса. На боковой поверхности $u(\xi,\tau,x_0) = u(x + (t-\tau)\nu,\tau,x_0)$, где ν - единичный вектор, направленный по внешней нормали к сфере с центром в начале координат. Покажем, что при малых τ

$$\frac{du(x + (t-\tau)\nu,\tau,x_0)}{d\tau} = u_\tau - (\nu,\operatorname{grad}_\xi u) \geq \varepsilon_1 > 0. \quad (7)$$

Для доказательства этого неравенства представим функцию $u(\xi,\tau,x_0)$ в следующем виде:

$$u(\xi,\tau,x_0) = \tau w_1(\xi,\tau,x_0) + \tau^2 w_2(\xi,\tau,x_0),$$

где

$$w_1(\xi,\tau,x_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} f(\xi + y\tau,x_0)dS_1,$$

а функция $w_2(\xi,\tau,x_0)$ получается из второго слагаемого правой части формулы (4), если в нем сделать замену $r = \tau z$, т.е.

$$w_2(\xi,\tau,x_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 z dz \iint_{|y|=1} q(\xi+y\tau z,u(\xi+y\tau z,\tau(1-z),x_0))dS_1.$$

Очевидно, что $w_1 \geq \varepsilon > 0$, $w_2 \geq 0$. Используя представление функции $u(\xi,\tau,x_0)$, получаем

$$u_\tau - (\nu,\operatorname{grad}_\xi u) = w_1 + \tau w_{1\tau} + 2\tau w_2 + \tau^2 w_{2\tau} -$$
$$-\tau(\nu,\operatorname{grad}_\xi w_1) - \tau^2(\nu,\operatorname{grad}_\xi w_2) \geq w_1 - \tau(|w_{1\tau}| + \sum_{i=1}^{3}|w_{1\xi_i}|) -$$
$$-\tau^2(|w_{2\tau}| + \sum_{i=1}^{3}|w_{2\xi_i}|) \geq \varepsilon - a_1\tau - a_2\tau^2.$$

Здесь a_1, a_2 - положительные постоянные зависящие от M, M_1 и T.

Таким образом, неравенство (7) будет выполнено для

$$\varepsilon \leq t \leq t_0 < \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2\varepsilon}}{2a_2}$$

и при этом $\varepsilon_1 = \varepsilon - a_1 t_o - a_2 t_o^2 > 0$. Лемма доказана.

Отметим условия, которым должна удовлетворять функция $F(x_o, t)$, а также её свойства. Из указанных выше свойств решения $u(x,t,x_o)$ следует, что функция $F(x_o,t)$ имеет непрерывные и ограниченные производные по всем своим аргументам ($x_o \in R^3$, $0 \le t \le t_o$) до третьего порядка включительно, $F(x_o,t) \ge 0$, $F_t(x_o,t) \ge \varepsilon > 0$ и $\inf\limits_{x_o \in R^3} \sup\limits_{0 \le t \le t_o} F(x_o, t) = \inf\limits_{x_o \in R^3} F(x_o,t_o) = H_1$, $0 < H_1 \le u_o$. Для существования решения поставленной обратной задачи (I)-(3) необходимо выполнение условий согласования

$$F(x_o, 0) = 0, \quad F_t(x_o, t)\big|_{t=o} = f(x_o, x_o).$$

Возьмем $0 < H < H_1$. Для произвольного $x_o \in R^3$ найдем $t(x_o)$ такое, что $F(x_o,t(x_o)) = H$, и рассмотрим множество $G = \{(x,t,x_o): x_o \in R^3, (x,t) \in D(x_o,t(x_o))\}$. Тогда для всех $(x,t,x_o) \in G$ решение задачи (I)-(2) удовлетворяет неравенству $0 \le u \le H$, причем $u = H$ только при $x = x_o$, $t = t(x_o)$. В дальнейшем решение задачи (I)-(2) будем рассматривать только в области G, а данные обратной задачи, т.е. функцию $F(x_o,t)$ – на множестве G_o, $G_o = \{(x_o,t): x_o \in R^3, 0 \le t \le t(x_o)\}$. Таким образом, под решением обратной задачи будем понимать такую функцию $q(x,u)$, определенную для всех $x \in R^3$, $u \in [0,H]$, что решение задачи (I)-(2), построенное в G, удовлетворяет условию (3).

Рассмотрим множество $E(M)$ функций $q(x,u)$ со свойствами:

I. $q(x,u) \in C^3(P)$, $(P = R^3 \times [0,H])$;

2. В области P функции $q(x,u)$ представимы в виде

$$q(x,u) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) b_i(u),$$

причем каждой функции $q(x,u)$ могут соответствовать свои p_i, b_i, n.

3. $\|q\|_{C^3(P)} \le M$ для всех $q(x,u)$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а. Если решение обратной задачи (I)-(3) существует на множестве $\tilde{E}(M)$, $(\tilde{E}(M) = E(M) \cap \{q(x,u): q \geq 0, \frac{\partial q}{\partial u} \geq \geq 0\})$, то оно единственно.

Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что имеются две функции $q_1(x,u)$ и $q_2(x,u)$ из $\tilde{E}(M)$, которые являются решением обратной задачи (I)-(3). Обозначим через $u_1(x,t,x_0)$ и $u_2(x,t,x_0)$ решения задачи Коши (I)-(2) при $q = q_1$, $q = q_2$ соответственно. Рассмотрим функции:

$$\tilde{u}(x,t,x_0) = u_1(x,t,x_0) - u_2(x,t,x_0),$$

$$\tilde{q}(x,u) = q_1(x,u) - q_2(x,u).$$

Сразу же отметим, что $\tilde{q}(x,u) \in E(2M)$.

Легко проверить, что $\tilde{u}$ и $\tilde{q}$ удовлетворяет следующим дифференциальным соотношениям:

$$\tilde{u}_{tt} = \Delta\tilde{u} + Q(x,t,x_0)\tilde{u} + \tilde{q}(x,u_1),$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = 0,$$

$$\tilde{u}(x_0,t,x_0) = 0, \tag{8}$$

где

$$Q(x,t,x_0) = \int_0^1 \frac{\partial q_2}{\partial u}(x, u_1(x,t,x_0)\cdot s + u_2(x,t,x_0)\cdot(1-s))ds.$$

Из предположений относительно класса функций $\tilde{E}(M)$ следует, что $Q \in C^2(G)$ и $\|Q\|_{C^2(G)} \leq M_2$. Положительная константа M_2 зависит от M, M_1 и H.

Используя формулу Кирхгофа для $\tilde{u}(x,t,x_0)$, получаем интегральное соотношение между $\tilde{u}$, $\tilde{q}$:

$$\tilde{u}(x,t,x_0) = A[Q\tilde{u}] + C[\tilde{q}], \tag{9}$$

в котором операторы A и C определены формулами:

$$A\tilde{u} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{|x-\xi|\le t} \frac{\tilde{u}(\xi, t - |x - \xi|, x_o)}{|x - \xi|} d\xi,$$

$$C\tilde{q} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|y|=1} [\int_o^t r\tilde{q}(x + yr, u_1(x + yr, t - r, x_o))dr]dS_1.$$

Наряду с равенством (9) рассмотрим равенства, получающиеся из (9) однократным и двукратным дифференцированием по t. Используя нулевые начальные данные для $\tilde{u}$, легко показать, что оператор дифференцирования $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} = D_t^\alpha$ для $\alpha=1,2$ перестановочен с оператором A. Поэтому

$$D_t^\alpha \tilde{u}(x,t,x_o) = A[D_t^\alpha(Q\tilde{u})] + D_t^\alpha C[\tilde{q}], \ \alpha = 1,2. \qquad (10)$$

Покажем, что результат применения оператора $D_t^\alpha C$ к функции $\tilde{q}(x,u)$ может быть выражен только через частные производные от $\tilde{q}$ по x_i. С этой целью сделаем в интеграле, связанном с оператором C, замену переменной интегрирования r на переменную

$$v = u_1(x + yr, t - r, x_o). \qquad (11)$$

Это возможно, так как в силу неравенства (7)

$$-\frac{\partial}{\partial r} u_1(x + yr, t - r, x_o) \ge \varepsilon_1 > 0,$$

и равенство (II) разрешимо относительно r

$$r = r(x,y,t,x_o,v).$$

При этом значению $r = 0$ соответствует значение $v = u_1(x,t,x_o)$, а значению $r = t$ - значение $v = 0$ и, кроме того,

$$-\frac{1}{\varepsilon_1} \le \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{1}{\frac{\partial u_1}{\partial r}} < 0, \ 0 < \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial \tau}}{\frac{\partial u_1}{\partial r}} \le \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tau}.$$

В новых переменных для интегрирования выражение для оператора C примет вид

$$C\tilde{q} = \frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} dS_1 \int_0^{u_1(x,t,x_0)} [r\cdot\tilde{q}(x+yr,v)]_{r=r(x,y,t,x_0,v)} \left(-\frac{\partial r}{\partial v}\right) dv.$$

Отсюда

$$D_t^1 C\tilde{q} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} dS_1 \int_0^{u_1(x,t,x_0)} [(r\cdot r_v)_t \tilde{q}(x+yr,v) + r\cdot r_v\cdot r_t (y, \operatorname{grad}_\xi \tilde{q})] dv,$$

$$D_t^2 C\tilde{q} = \tilde{q}(x, u_1(x,t,x_0)) a_{00}(x,t,x_0) + \tag{12}$$

$$+ \iint_{|y|=1} dS_1 \int_0^{u_1(x,t,x_0)} \sum_{|\alpha|=0}^{2} a_\alpha(x,y,t,x_0,v)\cdot S_\alpha \tilde{q}(x+yr,v) dv,$$

где через S_α обозначены операторы дифференцирования

$$S_\alpha \tilde{q} = \frac{\partial^{|\alpha|} \tilde{q}(\xi,v)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \xi_3^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

и коэффициенты a_α, стоящие при них, легко выписываются и представляют собой ограниченные, непрерывные функции всех переменных для $(x,t,x_0) \in G$, $|y| = 1$, $0 \le v \le u_1(x,t,x_0)$. Коэффициент a_{00} отличен от нуля

$$a_{00} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{|y|=1} [r_t r_v]_{v=u_1(x,t,x_0)} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t,x_0) dS_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial u_1(x,t,x_0)}{\partial t}\right]^2 \cdot$$

$$\cdot \iint_{|y|=1} \frac{dS_1}{|(y, \operatorname{grad}_x u_1(x,t,x_0)) - u_{1_t}(x,t,x_0)|^2} < 0,$$

причем при $x = x_0$ выражается через заданные функции.

Введем вместо переменной t переменную v_0 при помощи однозначной замены

$$v_o = F(x_o,t), \quad (0 \le v_o \le H). \tag{13}$$

Тогда $t = t(x_o,v_o)$ из свойств функции $F(x_o,t)$ очевидным образом вытекает оценка $t \le cv_o$, $c > 0$.

После чего положим для $\alpha = 2$ в формуле (I0) $x = x_o$ и воспользуемся соотношениями (8),(I2),(I3). В результате получаем равенство

$$0 = a_{oo}\tilde{q}(x_o,v_o) + A[D_t^2(Q\tilde{u})]_{x=x_o} + \int\limits_{|y|=1}\int dS \int\limits_0^{v_o} \sum\limits_{|\alpha|=0}^{2} a_\alpha S_\alpha \tilde{q}(x_o + yr,v)dv. \tag{14}$$

Равенства (9),(I0),и (I4) образуют систему четырех интегро-дифференциальных уравнений. Покажем, что для $0 \le v_o \le H$ эта система имеет только тривиальное решение. С этой целью введем следующие нормы:

$$\|\tilde{q}(v_o)\| = \max_{\xi\in R^3} \max_{0\le v\le v_o} |\tilde{q}(\xi,v)|$$

и

$$\|\tilde{u}(v_o)\| = \max_{0\le\alpha\le 2} \max_{\Gamma(v_o)} |D_t^\alpha \tilde{u}(x,t(x_o,v),x_o)|.$$

Здесь $\Gamma(v_o) = \{(x,v,x_o) \in \tilde{G},\ 0 \le v \le v_o\}$, а $\tilde{G}$ - образ области G в системе координат x, v, x_o.

В работе [2] показано, что для функций из класса $E(2M)$ имеет место неравенство

$$\max_{x\in R^3} |S_\alpha \tilde{q}(x,v)| \le K\cdot\max_{x\in R^3} |\tilde{q}(x,v)|, (|\alpha| = 1,2),$$

$0 \le v \le v_o \le H$ и константа $K > 0$ не зависит от v. Тогда, очевидно

$$\max_{x\in R^3} \max_{0\le v\le v_o} |S_\alpha \tilde{q}(x,v)| \le K\cdot\|\tilde{q}(v_o)\|,\ \alpha = 1.2. \tag{15}$$

Используя принятые обозначения, неравенство (I5) и тот факт, что $a_{00} > 0$, от системы уравнений (9),(I0),(I4) переходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} \|\tilde{u}(v_0)\| \le c_1(t\cdot\|\tilde{u}(v_0)\| + v_0\cdot\|\tilde{q}(v_0)\|) \\ \|\tilde{q}(v_0)\| \le c_2(t\cdot\|\tilde{u}(v_0)\| + v_0\cdot\|\tilde{q}(v_0)\|), \end{cases} \tag{16}$$

в которой положительные постоянные c_1 и c_2 зависят от M, M_1, M_2, t_0, K.

С учетом оценки $t \le cv_0$ легко найти такое $h > 0$, что для $v_0 \in [0,h]$ система (I6) имеет чисто нулевое решение $\|\tilde{q}(v_0)\| = \|\tilde{u}(v_0)\| = 0$. В силу того, что константы c_1, c_2, c универсальные для всей полосы $0 \le v \le H$, аналогичный вывод об обращении $\|\tilde{u}(v_0)\|$, $\|\tilde{q}(v_0)\|$ в нуль получаем в областях $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$ и т.д. Так как H конечно, то за конечное число шагов получим $\|\tilde{u}(v_0)\| - \|\tilde{q}(v_0)\| = 0$ для всех $v_0 \in [0,H]$. Отсюда следует $\tilde{q}(x,v) \equiv 0$, то есть $q_1(x,v) = q_2(x,v)$ для всех $x \in R^3$, $v \in [0,H]$. Теорема доказана.

Литература

I. БИДАЙБЕКОВ Е.Ы. Об однозначности определения некоторого дифференциального оператора.- Сб. Математические проблемы геофизики, вып.5, Новосибирск, I974.

2. РОМАНОВ В.Г. Операторные уравнения Вольтерра первого рода. Классы единственности.- Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, "Наука", I975.

А.С. Запреев

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В плоскости OXY рассматривается уравнение

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = f(M, k), \qquad (1)$$

где Δ - оператор Лапласа; M - точка плоскости с координатами (x,y); $k \neq 0$ - действительное или комплексное число; функция $f(M,k)$ имеет вид

$$f(M, k) = \begin{cases} \overset{\Omega}{f}(M, k), & M \in \Omega \\ 0, & M \notin \Omega, \end{cases} \qquad (2)$$

функции $\overset{0}{f}(M,k)$ будут определены ниже, Ω - ограниченное измеримое множество, расположенное в полуплоскости $\{y \geq \delta\}$, $\delta > 0$ - фиксированное число.

Решения уравнения (I) считаются удовлетворяющими условиям излучения на бесконечности

$$u(M) = O(r^{-1/2}); \ \lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial u(M)}{\partial r} + iku(M)\right) = 0. \qquad (3)$$

Ставится следующая обратная задача для уравнения (I).

З а д а ч а I. По известному на прямой $\{y=0\}$ семейству решений прямой задачи (I)-(3)

$$u_k(x, 0) = \Phi_k(x), \ -\infty < x < \infty, \ \forall k \in A, \qquad (4)$$

где A - множество значений волнового числа k, определить множество Ω и функцию $f(M,k)$ как функцию переменной M, если зависимость от k в некотором смысле известна.

Исследованием единственности решения обратных задач для уравнения

$$\Delta u(M) - k^2 u(M) = f(M),$$

где $k \geq 0$ - действительное число, в случае когда требуется определить область (или конечное объединение областей) Ω и функцию $f(M)$, удовлетворяющую определенным условиям гладкости, по известному вне $\bar{\Omega}$ объемному потенциалу, занимались Л.Н.Сретенский, П.С.Новиков, В.К.Иванов, А.И.Прилепко (см. [3], где имеется дальнейшая библиография) и другие. Во всех этих работах задача исследуется для одного волнового числа k и для множества Ω, являющегося односвязанной областью (либо объединением конечного числа односвязанных областей) с достаточно гладкими границами.

В настоящей работе Ω - произвольное ограниченное измеримое множество, кроме того задача рассматривается в новой постановке и исследование проводится с помощью иных методов.

Теорема единственности решения задачи I для однородной плотности $\overset{\circ}{f}(M, k) = \varphi(k)$.

Пусть $f(M,k)$ имеет вид

$$f(M, k) = \begin{cases} \varphi(k), & M \in \Omega \\ 0, & M \notin \Omega, \end{cases} \qquad (2')$$

где $\varphi(k) \neq 0$ для почти всех k из множества A. Тогда имеет место

Т е о р е м а I. Пусть A – счетное множество действительных чисел, имеющее точку сгущения в нуле; Ω – ограниченное измеримое множество. Тогда по данным (4) множество Ω определяется однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о I. Пусть $k > 0$, ниже это ограничение будет снято. Как известно ([I], [2]), решение задачи (I)-(3) единственно и представляется объемным потенциалом

$$u_k(M) = \frac{i\varphi(k)}{4} \int_{\Omega} H_0^{(2)}(k\cdot r(M, N))d\,\Omega_N, \tag{5}$$

где M – точка, не принадлежащая множеству $\overline{\Omega}$. Считая, что в (5) точка M лежит на прямой $\{y=0\}$, с помощью (4) получим

$$\Phi_k(x) = \frac{i\varphi(k)}{4} \int_{\Omega} H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})d\xi\, d\eta, \quad \forall k \in A. \tag{6}$$

Введем характеристическую функцию множества

$$\chi_{\Omega}(M) = \begin{cases} 0, & M \notin \Omega \\ 1, & M \in \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

так как Ω ограничено и измеримо, то $\chi_{\Omega}(M)$ – финитна и измерима.

Из (6) получаем совокупность соотношений для определения $\chi_{\Omega}(M)$

$$\Phi_k(x) = \frac{i\varphi(k)}{4} \int_{R^2} \chi_{\Omega}(\xi, \eta)\, H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})d\xi\, d\eta, \quad \forall k \in A. \tag{8}$$

Покажем, что из соотношений (8) $\chi_{\Omega}(M)$ определяется однозначно. Пусть существуют две функции $\chi_{\Omega_1}(M)$ и $\chi_{\Omega_2}(M)$, удовлетворяющие всем соотношениям (8). Положим

$$\phi(M) = \chi_{\Omega_1}(M) - \chi_{\Omega_2}(M). \tag{9}$$

Тогда из уравнений (8) получим

$$\int_{R^2} \phi(\xi, \eta)\, H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})d\xi\, d\eta = 0, \quad \forall k \in A. \tag{10}$$

Проделаем, пока формально, следующие операции с уравнениями (I0): применим к (I0) преобразование Фурье по переменной x; изменим надлежащим образом порядок интегрирования и воспользуемся теоремой о свертке.

В результате имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(s, \eta)\cdot\tilde{H}_0^{(2)}(s, \eta)d\eta = 0, \quad \forall k \in A, \tag{11}$$

где

$$\tilde{\psi}(s, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta)\, e^{-is\xi}\, d\xi, \tag{12}$$

$$\tilde{H}_0^{(2)}(s, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{\xi^2 + \eta^2})e^{-is\xi}\, d\xi = 2\int_0^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{\xi^2+\eta^2})\cdot$$

$$\cdot\cos s\xi\, d\xi. \tag{13}$$

По известным формулам (см. [4], №№ 6.677 3, 6.677 4) из (I3) следует

$$\tilde{H}_0^{(2)}(s, \eta) = 2i\, \frac{e^{-|\eta|\sqrt{s^2-k^2}}}{\sqrt{s^2 - k^2}}. \tag{14}$$

Причем $\tilde{H}_0^{(2)}(s, \eta)$ – не однозначная аналитическая функция по s в комплексной плоскости s с разрезами вдоль действительной оси: $(-\infty,-k]$ и $[k, +\infty)$. Ее однозначная ветвь фиксируется тем, что в области аналитичности полагается $\operatorname{Jm}(\sqrt{s^2 - k^2}) \leq 0$. Тогда значение $\tilde{H}_0^{(2)}(s, \eta)$ при действительных $|s| > |k|$ понимается как предел из верхней полуплоскости комплексной плоскости s при $\operatorname{Jm}(\sqrt{s^2 - k^2})$, стремящейся к нулю, и берется арифметическое значение корня.

Пусть теперь $k < 0$, тогда фундаментальным решением уравнения (I) будет функция Ханкеля первого рода $H_0^{(1)}(kr(M,N))$ и вместо формулы (I4) будет иметь место формула

$$\tilde{H}_0^{(1)}(s, \eta) = -2i\, \frac{e^{-|\eta|\sqrt{s^2-k^2}}}{\sqrt{s^2 - k^2}} \tag{14'}$$

относительно $\tilde{H}_0^{(1)}(s,\eta)$ верно предыдущее замечание.

Очевидно, знак "-" в формуле (I4 ') никоим образом не влияет на вид уравнений (II), поэтому в дальнейшем k - любые действительные числа, не равные нулю.

Докажем законность проделанных с уравнениями (I0) операций. Поскольку $\phi(M)$ финитна с носителем в верхней полуплоскости, то в (I0) интегрирование по всей плоскости R^2 можно заменить интегрированием по некоторому прямоугольнику $[-b,b]\times$ $\times[0, a]$, в котором содержится $\operatorname{supp}\phi$.

Обозначим через $J(x)$ интеграл, стоящий слева в уравнении (I0). По определению преобразования Фурье

$$\tilde{J}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} J(x)e^{-isx}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{-isx}dx\left\{\int_0^a d\eta\int_{-b}^{b}\phi(\xi,\eta)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})d\xi\right\}. \tag{15}$$

Так как в (I5) подынтегральная функция тройного интеграла, соответствующего повторному стоящему под знаком "$\lim\limits_{N\to\infty}$", суммируема, то, используя теорему Фубини, можно изменить порядок интегрирования

$$\tilde{J}(s)=\lim_{N\to\infty}\int_0^a d\eta\left\{\int_{-N}^{N} dx\int_{-b}^{b}\phi(\xi,\eta)e^{-is\xi}\cdot H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})\times\right.$$

$$\left.\times e^{-is(x-\xi)}d\xi\right\}=\lim_{N\to\infty}\int_0^a d\eta\left\{\int_{-b}^{b}\phi(\xi,\eta)e^{-is\xi}\,d\xi\int_{-N-\xi}^{N-\xi}H_0^{(2)}(k\sqrt{u^2+\eta^2})\times\right.$$

$$\left.\times e^{-isu}\,du\right\}. \tag{16}$$

Чтобы перейти в (I6) к пределу под знаком первого интеграла, достаточно показать, что $\int_0^a W_N(\eta)d\eta$ сходится равномерно относительно N, то есть надо показать, что $W_N(\eta)$ имеет предел при $N\to\infty$ и сходится к нему равномерно по η на интервале $[0, a]$.

Действительно

$$\left|\int_{-b}^{b}\phi(\xi,\eta)e^{-is\xi}d\xi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}(k\sqrt{u^2+\eta^2})e^{-isu}du - W_N(\eta)\right| \le \tag{17}$$

$$\le \max_{(\xi,\eta)\in[-b,b]\times[0,a]} |\phi(\xi,\eta)| \cdot \int_{-b}^{b} d\xi \Big[\Big| \int_{-\infty}^{-N-\xi} H_0^{(2)}(k\sqrt{u^2+\eta^2})e^{-isu}du\Big| + \tag{17}$$

$$+ \Big| \int_{N-\xi}^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{u^2+\eta^2})e^{-isu}du\Big| \Big].$$

Если покажем, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует число $N_0 > 0$ такое, что

$$\Big| \int_N^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{u^2+\eta^2})e^{-isu}du \Big| \le \frac{\varepsilon}{4b},\ \forall N \ge N_0\ \&\ \forall \eta \in [0, a],$$

то из (I7), при всех $N \ge N_0 + b$, получим оценку

$$\Big| \int_{-b}^{b} \phi(\xi,\eta)e^{-is\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{u^2+\eta^2})e^{-isu}du - W_N(\eta)\Big| \le \varepsilon,$$

$$\forall \eta \in [0, a],$$

тем самым возможность предельного перехода в (I6) будет доказана.

Так как N – достаточно большое, то при $u \ge N$ применимо асимптотическое разложение функции Ханкеля (см. [4] , № 8 45I 4)

$$H_0^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{-i(z-\frac{\pi}{4})}\left[1 + \frac{\tau\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{2z\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right],$$

где τ – величина, ограниченная равномерно относительно z таких, что $|z| \gg 1$. Тогда имеем

$$\Big|\int_N^{\infty} H_0^{(2)}(k\sqrt{u^2+\eta^2})e^{-isu}du\Big| \le c_1 \cdot \Big|\int_N^{\infty} \frac{e^{-ik\sqrt{u^2+\eta^2}}}{\sqrt[4]{u^2+\eta^2}}\cdot e^{-isu}du\Big| +$$

$$+ c_2\cdot\left|\int_N^{\infty}\frac{e^{-ik\sqrt{u^2+\eta^2}}\cdot e^{-isu}}{(\sqrt{u^2+\eta^2}\,)^{3/2}}\,du\right| \le c_1\left|\int_N^{\infty}\left(\frac{e^{-ik\cdot\frac{\eta^2}{\sqrt{u^2+\eta^2}+u}}}{\sqrt[4]{u^2+\eta^2}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, e^{-i(k+s)u}du\right| + c_2\int_N^{\infty}\frac{du}{u^{3/2}} \le \frac{\varepsilon}{4b}. \tag{18}$$

Оценка (I8) имеет место для всех $\eta\in[0,a]$ и для любого $N\ge N_o$, где N_o – достаточно большое число. Действительно, второй интеграл в (I8) сходится абсолютно и стремится к нулю при $N\to\infty$. К первому же интегралу применим признак Дирихле равномерной сходимости, так как $\left|\int_{N'}^{N''}e^{-i(k+s)u}du\right|$ ограничены при любых $N', N''\ge N_o$ для всех η из $[0,a]$ и функции, стоящие в круглых скобках, монотонно стремятся к нулю при $u\to\infty$ равномерно по η из промежутка $[0,a]$. Итак, переход к уравнениям (II) обоснован.

Подставим в (II) выражение (I4), тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\phi(s,\eta)\cdot\frac{e^{-|\eta|\sqrt{s^2-k^2}}}{\sqrt{s^2-k^2}}\,d\eta = 0,\ \forall\, k\in A.$$

Ввиду финитности функции $\phi(\xi,\eta)$ функция $\tilde\phi(s,\eta)$ будет равна нулю для каждого η, не принадлежащего интервалу $[0, a]$. Тогда последнее уравнение переписываем в виде

$$\int_0^a\tilde\phi(s,\eta)\cdot\frac{e^{-\eta\sqrt{s^2-k^2}}}{\sqrt{s^2-k^2}}\,d\eta = 0,\ \forall\, k\in A. \tag{19}$$

Понятно, что если из (I9) следует равенство нулю функции $\tilde\phi(s,\eta)$, то теорема будет доказана.

2. Функция $e^{-\eta\sqrt{s^2-k^2}}$, как функция аргумента $\eta\sqrt{s^2-k^2}$, разлагается в сходящийся на всей комплексной плоскости степенной ряд. Запишем его в виде

$$e^{-\eta\sqrt{s^2-k^2}} = -\sqrt{s^2-k^2}\cdot\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(s^2-k^2)^n\eta^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(s^2-k^2)^n\eta^{2n}}{(2n)!}. \tag{20}$$

Поскольку степенные ряды по η в правой части (20) имеют бесконечные радиусы сходимости, то они сходятся равномерно относительно η из интервала $[0,a]$. Следовательно, после подстановки (20) в (I9) можно изменить порядок интегрирования с суммированием

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (s^2 - k^2)^n \left[\int_0^a \tilde{\phi}(s,\eta) \frac{\eta^{2n+1}}{(2n+1)!} d\eta \right] + \frac{1}{\sqrt{s^2 - k^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (s^2 - k^2)^n \left[\int_0^a \tilde{\phi}(s,\eta) \cdot \frac{\eta^{2n}}{(2n)!} d\eta \right] = 0, \forall k \in A.$$

Вводя соответствующие обозначения для рядов, перепишем это в виде

$$G_1(s, k) + \frac{1}{\sqrt{s^2 - k^2}} G_2(s, k) = 0, \ \forall \ k \in A. \tag{21}$$

По теореме Винера- Пэли $\tilde{\phi}(s, \eta)$ - целая функция по s для каждого η из $[0, a]$. Покажем, что функция $\tilde{\phi}(s, \eta)$ разлагается в степенной ряд по s, сходящийся равномерно относительно η из промежутка $[0,a]$. Обозначим

$$E_\eta = \{(\Omega_1 \cup \Omega_2)\setminus(\Omega_1 \cap \Omega_2)\} \cap \{y = \eta\},$$

тогда из (I2) получим

$$\tilde{\phi}(s, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, \eta) e^{-is\xi} d\xi = \int_{E_\eta} \phi(\xi, \eta) e^{-is\xi} d\xi =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-is)^l}{l!} \int_{E_\eta} \phi(\xi, \eta)\xi^l d\xi \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{l=0}^{\infty} s^{2l} \phi_{2l}(\eta) - i \sum_{l=0}^{\infty} s^{2l+1} \phi_{2l+1}(\eta), \tag{22}$$

где

$$\phi(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & (\xi, \eta) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ 1, & (\xi, \eta) \in \Omega_1 \setminus(\Omega_1 \cap \Omega_2). \\ -1, & (\xi, \eta) \in \Omega_2\setminus(\Omega_1 \cap \Omega_2) \end{cases} \tag{23}$$

Так как $E_\eta \subset [-b, b]$, то

$$|\tilde{\phi}(s, \eta)| \le \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l}{l!} \cdot 2 \int_0^b \xi^l \, d\xi \le 2b \cdot e^{sb}, \ \forall \eta \in [0, a].$$

Таким образом доказана равномерная сходимость ряда (22) относительно η из интервала $[0, a]$ и показано, что $\phi_l(\eta)$, $e = 0, 1, \ldots, \infty$ – ограниченные на $[0, a]$ функции. Кроме того, так как функции $\phi(\xi, \eta) \cdot \xi^l$, $l = 0, 1, \ldots, \infty$ суммируемы на $[-b, b] \times [0, a]$, то по теореме Фубини функции $\phi_l(\eta)$, $l = 0, 1, \ldots, \infty$ – измеримые на $[0, a]$. Из вышесказанного следует, что $\phi_l(\eta), l = 0, 1, \ldots, \infty$ – функции из пространства $L_2[0, a]$.

Так как ряд (22) сходится по s равномерно относительно η из интервала $[0, a]$, то функции $G_1(s, k)$ и $G_2(s, k)$ из (2I) являются целыми функциями по s. Тогда они не имеют точек ветвления для любого конечного s. Из этого факта и из уравнения (2I) следуют равенства:

$$G_1(s, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (s^2 - k^2)^n \cdot \left[\int_0^a \tilde{\phi}(s, \eta) \frac{\eta^{2n+1}}{(2n+1)!} d\eta \right] = 0 \, , \quad \forall k \in A, \tag{24}$$

$$G_2(s, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (s^2 - k^2)^n \cdot \left[\int_0^a \tilde{\phi}(s, \eta) \cdot \frac{\eta^{2n}}{(2n)!} d\eta \right] = 0, \ \forall k \in A. \tag{25}$$

Действительно, в противном случае целая функция $G_1(s,k)$ имеет точку ветвления при $s^2 = k^2$.

Подставляя (22) в (24) и (25), после надлежащих преобразований, которые возможны в силу равномерной сходимости ряда (22) относительно η, приходим к соотношениям

$$G_1(s,k) = \sum_{p=0}^{\infty} s^{2p} \cdot \sum_{\substack{m \ge 0 \\ p-m \ge 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)}(\eta) \cdot g_{1m}(k, \eta) d\eta - is \sum_{p=0}^{\infty} s^{2p} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m \ge 0 \\ p-m \ge 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)+1}(\eta) \cdot g_{1m}(k, \eta) d\eta = 0, \quad \forall k \in A,$$

$$G_2(s,k) = \sum_{p=0}^{\infty} s^{2p} \sum_{\substack{m\geq 0\\ p-m\geq 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)}(\eta)\cdot g_{2m}(k,\eta)d\eta \; -$$

$$- is \sum_{p=0}^{\infty} s^{2p} \sum_{\substack{m\geq 0\\ p-m\geq 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)+1}(\eta)\cdot g_{2m}(k,\eta)d\eta = 0, \forall k \in A,$$

откуда

$$\sum_{\substack{m\geq 0\\ p-m\geq 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)}(\eta)\cdot g_{1m}(k,\eta)d\eta = 0,$$

$$\sum_{\substack{m\geq 0\\ p-m\geq 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)}(\eta)\cdot g_{2m}(k,\eta)d\eta = 0, \; \forall k \in A, \forall p = 0,1,\dots,\infty, \tag{26}$$

$$\sum_{\substack{m\geq 0\\ p-m\geq 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)+1}(\eta)\cdot g_{1m}(k,\eta)d\eta = 0,$$

$$\sum_{\substack{m\geq 0\\ p-m\geq 0}} \int_0^a \phi_{2(p-m)+1}(\eta)\cdot g_{2m}(k,\eta)d\eta = 0,$$

где функции $g_{1m}(k, \eta)$ и $g_{2m}(k, \eta)$ имеют вид

$$g_{1m}(k,\eta) = (-1)^m \frac{k^{-(2m+1)}}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{(k\eta)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{27}$$

$$g_{2m}(k,\eta) = (-1)^m \frac{k^{-2m}}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{(k\eta)^{2n}}{(2n)!}. \tag{28}$$

Заметим, что равенства (26) дают систему рекуррентных соотношений для определения $\phi_e(\eta), e = 0,1,\ldots,\infty$, и, кроме того, $g_{10}(k, \eta) = \frac{1}{k}\sin k\eta$, $g_{20}(k, \eta) = \cos k\eta$. Действительно,

$$p = 0 \quad \frac{1}{k}\int_0^a \phi_0(\eta)\cdot\sin k\eta\, d\eta = 0, \int_0^a \phi_0(\eta)\cdot\cos k\eta\, d\eta = 0, \quad \forall k \in A, \tag{29}$$

$$\frac{1}{k}\int_0^a \phi_1(\eta)\cdot\sin k\eta\, d\eta = 0, \int_0^a \phi_1(\eta)\cos k\eta\, d\eta = 0,$$

$$p = 1, \quad \frac{1}{k}\int_0^a \phi_2(\eta)\cdot\sin k\eta\, d\eta + \int_0^a \phi_0(\eta)\cdot g_{11}(k, \eta)d\eta = 0,$$

$$\int_0^a \phi_2(\eta)\cdot\cos k\eta\, d\eta + \int_0^a \phi_0(\eta)\cdot g_{21}(k,\eta)d\eta = 0, \forall k \in A, \tag{30}$$

$$\frac{1}{k}\int_0^a \phi_3(\eta)\cdot\sin k\eta\, d\eta + \int_0^a \phi_1(\eta)\cdot g_{11}(k,\eta)d\eta = 0,$$

$$\int_0^a \phi_3(\eta)\cdot\cos k\eta\, d\eta + \int_0^a \phi_1(\eta)\cdot g_{21}(k, \eta)d\eta = 0$$

и т.д.

3. Покажем, что любая функция $\varphi(x)$ из пространства $L_2[0, a]$, удовлетворяющая системе равенств

$$\frac{1}{k}\int_0^a \varphi(x)\sin kx\, dx = 0, \quad \int_0^a \varphi(x)\cos kx\, dx = 0, \quad \forall k \in A, \tag{31}$$

равна нулю на $[0, a]$, где $a > 0$ - конечно. Для этого достаточно показать, что множество $L(\{\frac{1}{k}\sin kx, \cos kx\}_{k\in A})$ плотно в пространстве $L_2[0, a]$. Последнее следует из предложения.

Лемма. $L(\{\frac{1}{k}\sin kx, \cos kx\}_{k\in A})$, где A - счетное множество, имеющее точку сгущения в нуле, плотно в $C[0, a]$.

Для доказательства леммы достаточно проверить следующее включение $L(\{\frac{1}{k}\sin kx, \cos kx\}_{k\in A}) \supset \{x^e\}_{e=0}^{\infty}$, то есть показать, что элементы $L(\{\frac{1}{k}\sin kx, \cos kx\}_{k\in A})$ сколько угодно точно приближают x^l для любого $l = 0,1,\ldots,\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Достаточно провести доказательство для множества A, имеющего точку сгущения в нуле справа, в других случаях оно проводится аналогично. Выберем из A последовательность

$$k_0 > k_1 > k_2 > \ldots > k_e > \ldots > 0. \qquad (32)$$

Пусть l - четно, то есть $l = 2m$, $m = 0,1,\ldots,\infty$. Тогда

$m = 0$: $|1 - \cos k_0 x| = k_0^2 \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k_0^{2n}}{k_0^2} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \leq \varepsilon$ при k_0 достаточно малом, так как ряд ограничен,

$$m = 1: \left|x^2 + 2! \frac{\cos k_0 x - \cos k_1 x}{k_0^2 - k_1^2}\right| = 2!(k_0^2 + k_1^2)\left|\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{k_0^{2n} - k_1^{2n}}{k_0^4 - k_1^4} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \leq \varepsilon$$

при k_0 достаточно малом, так как ряд снова ограничен и т.д. По индукции нетрудно показать, что

$$m = m: |x^{2m} - C_{2m}(k_0, k_1, \ldots, k_m; x)| \leq \varepsilon$$

при k_0 - достаточно малом, где

$$C_m(k_0,k_1,\ldots,k_m;x) = (-1)^m \frac{(2m)!}{k_0^2 - k_m^2}[C_{2(m-1)}(k_0,k_1,\ldots,k_{m-1}; x) - C_{2(m-1)}(k_1,k_2,\ldots,k_m;x)],$$

$$(m = 1,2,\ldots,\infty),$$

$$C_0(k_0; x) = \cos k_0 x.$$

Пусть l - нечетно, то есть $l = 2m + 1$, $m = 0,1,\ldots,\infty$. Тогда, также по индукции, нетрудно показать, что при любом $m = 0,1,\ldots,\infty$

$$|x^{2m+1} - S_{2m+1}(k_0, k_1,\ldots,k_m;x)| \leq \varepsilon$$

при k_0 - достаточно малом, где

$$S_{2m+1}(k_0, k_1,\dots,k_m; x) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{k_0^2 - k_m^2}[S_{2m-1}(k_0,k_1,\dots,k_{m-1};$$

$$x) - S_{2m-1}(k_1,k_2,\dots,k_m;x)],$$

$$(m = 1,2,\dots,\infty),$$

$$S_1(k_0; x) = \frac{1}{k_0}\sin k_0 x.$$

Итак лемма доказана.

Таким образом любая функция из $L_2[0, a]$, удовлетворяющая (3I), равна нулю на $[0, a]$. Тогда из соотношений (26) рекуррентно получаем

$$\phi_l(\eta) = 0,\ \forall l = 0,1,\dots,\infty,\ \eta \in [0, a].$$

Доказательство теоремы завершено.

Теорема 2. Пусть A - счетное множество действительных чисел k вида

$$A = \{A_a\}_{a\in D} = \{\{\tfrac{n\pi}{a}\}_{n\in N}\}_{a\in D}, \tag{33}$$

где N - множество натуральных чисел, D - счетное множество положительных чисел, имеющих точку сгущения в бесконечности; Ω - ограниченное измеримое множество. Тогда по данным (4) множество Ω определяется однозначно.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы (I) до получения рекуррентных формул (26) включительно. Из (26) здесь используем только соотношения, содержащие функции $g_{1m}(k, \eta)$ вида (27). Не уменьшая общности, полагаем, что в (26) верхний предел интегрирования $a \in D$. Система функций $\{\sin kx\}_{k\in A_a}$ полна в пространстве $L_2[0, a]$, что является следствием полноты системы функций $\{\sin nx\}_{n\in N}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$. Тогда из соотношений (26) следует

$$\phi_l(\eta) = 0,\ \forall l = 0,1,\ldots,\infty, \eta \in [0,a],$$

где $a > 0$ – любое конечное число. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим задачу I на комплексном множестве чисел A. Тогда имеет место

Теорема 3. Пусть A – счетное множество комплексных чисел, имеющее точку сгущения $k_0 \neq \infty$; Ω – ограниченное, измеримое множество. Тогда по данным (4) множество Ω определяется однозначно.

Действительно, а) при $k \in A_+$, где $A_+ = \{k \in A | Jmk^2 > 0\}$, задача I (так же, как и в доказательстве теоремы I) сводится к решению семейства уравнений (IO);

в) при $k \in A_-$, где $A_- = \{k \in A | Jmk^2 < 0\}$, задача I сводится к решению семейства уравнений, аналогичного (IO), где ядрами являются функции Ханкеля первого рода $H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})$.

Далее доказательство проведем в предположении, что A_+ счетно, то есть для случая а) (в случае, когда A_- счетно – доказательство аналогично).

Так как точка (x, 0) не принадлежит $\overline{(\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)}$, то функция $H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})$, а с ней и интеграл $J(x; k)$, стоящий слева в (IO), являются аналитическими функциями по $k \neq 0$. По теореме единственности для аналитических функций, из равенства аналитической функции нулю на счетном множестве точек A, имеющих точку сгущения внутри области аналитичности, следует равенство ее нулю всюду в области аналитичности. Следовательно, равенства (IO) будут выполняться на любом действительном счетном множестве чисел A_1, имеющем точку сгущения в нуле. Функция же $\phi(\xi, \eta)$ при этом не изменится, тогда доказательство завершается так же, как и в теореме I.

Теорема единственности решения задачи I для неоднородной плотности $\overset{o}{f}(M, k) = \varphi(k)\cdot h(M)$.

Введем в рассмотрение классы F_φ плотностей $f(M, k)$ вида

$$F_\varphi = \{f(M,\,k) = \left\{\begin{matrix} \varphi(k)\cdot h(M), & M \in \Omega \\ 0, & M \in \Omega \end{matrix}\right\}, \qquad (34)$$

где Ω - ограниченные измеримые множества, $\varphi(k)$-фиксированная для данного класса F_φ функция, $h(M)$ - ограниченные измеримые на Ω функции.

Т е о р е м а 4. Пусть A - счетное множество действительных чисел k, имеющее точку сгущения в нуле. Пусть Ω - ограниченное измеримое множество и пусть $f(M,k)$ - функция из класса F_φ вида (34), где $\varphi(k) \neq 0$ для почти всех k из множества A. Тогда по данным (4) множество Ω и функция $f(M,\,k)$ определяются однозначно.

Так же,как и при доказательстве теоремы I,без ограничения общности полагаем, что $k > 0$,тогда вместо (5) имеется равенство

$$u_k(M) = \frac{i\varphi(k)}{4} \int\limits_\Omega h(M)\cdot H_0^{(2)}(kr(M,\,N))d\Omega_N.$$

Далее,аналогично (8),получаем соотношения

$$\Phi_k(x) = \frac{i\varphi(k)}{4} \int\limits_{R^2} \chi_\Omega(\xi,\,\eta)\cdot h(\xi,\,\eta)\cdot H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})d\xi d\eta,$$

$$\forall k \in A. \qquad (35)$$

Покажем, что из (35) функция $\chi_\Omega(\xi,\,\eta)\cdot h(\xi,\,\eta)$ определяется однозначно. Пусть существуют две функции $\chi_{\Omega_1}(M)\cdot h_1(M)$ и $\chi_{\Omega_2}(M)\cdot h_2(M)$, удовлетворяющие всем соотношениям (35). Полагая

$$\psi(M) = \chi_{\Omega_1}(M)\cdot h_1(M) - \chi_{\Omega_2}(M)\cdot h_2(M), \qquad (36)$$

в силу линейности уравнений (35) и условия теоремы о том, что $\varphi(k) \neq 0$ для почти всех k из A, получим систему равенств, аналогичную (I0),

$$\int\limits_{R^2} \phi(\xi, \eta)\cdot H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})d\xi d\eta = 0,$$
$$\forall k \in A. \qquad (37)$$

Далее доказательство совпадает с доказательством теоремы I. Заметим, что так же, как и в разложении (22), в этом случае функции $\phi_1(\eta)$ будут измеримы и ограничены, что следует из ограниченности и измеримости множеств Ω_1, и Ω_2 и из ограниченности и измеримости функций $h_1(M)$ и $h_2(M)$ на них. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть A – счетное множество действительных чисел k вида (33); пусть Ω – ограниченное измеримое множество и пусть $f(M,k)$ - функция из класса F_φ вида (34), где $\varphi(k) \neq 0$, для почти всех k из множества A. Тогда по данным (4) множество Ω и функция $f(M, k)$ определяются однозначно.

Доказательство нетрудно получить, опираясь на доказательства теорем 4 и 2.

Теорема 6. Пусть A – счетное множество комплексных чисел, имеющее точку сгущения $k_0 \neq \infty$; Ω – ограниченное измеримое множество. Пусть $f(M, k)$ – функция из класса F_φ вида (34), где $\varphi(k) \neq 0$ для почти всех k из множества A. Тогда по данным (4) множество Ω и функция $f(M, k)$ определяются однозначно.

Действительно, так как соотношения (37) того же вида, что и система равенств (I0), и поскольку имеет место теорема 4, то доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 3.

Теоремы единственности решения задачи I в классе вложенных ограниченных измеримых множеств

Пусть известное число $a > 0$ такое, что Ω содержится в полосе $\{0 < \delta \leq y \leq a\}$. Пусть A – множество волновых чисел k вида

$$A = \{k | 0 < |k| \leq \frac{\pi}{a}\}. \qquad (38)$$

Пусть для некоторого числа k из A вида (38) известно

$$u_k(x, 0) = \Phi_k(x), \quad -\infty < x < \infty . \qquad (39)$$

Тогда имеет место

Т е о р е м а 7. Пусть Ω - ограниченное измеримое множество; пусть $f(M,k)$ имеет вид (2'), где $\varphi(k) \neq 0$. Тогда в классе вложенных множеств по данным (39) множество Ω определяется однозначно.

Действительно, доказательство проводим так же, как в теореме I, вплоть до получения рекуррентных соотношений (26). Так как теорема доказывается в классе вложенных множеств, то функции $\phi_l(\eta)$, $l = 0,1,\ldots,\infty$ будут знакопостоянными. Покажем это в предположении, что Ω_2 - подмножество Ω_1, (случай Ω_1 - подмножество Ω_2 рассматривается аналогично), тогда $\phi(M)$ имеет вид

$$\phi(M) = \begin{cases} 0, & M \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ 1, & M \in \Omega_1 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2). \end{cases} \qquad (40)$$

Следовательно,

$$\tilde{\phi}(s, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, \eta) e^{-is\xi} d\xi = e^{isb} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - b, \eta) e^{-isx} dx =$$

$$= e^{isb} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-is)^l}{l!} \int_{E_\eta} \xi^e d\xi . \qquad (41)$$

В (4I) E_η - уже подмножество интервала $[0, 2b]$ и поэтому $\phi_l(\eta)$, $l = 0,1,\ldots,\infty$ - знакопостоянны. Тогда из рекуррентных соотношений (26) (это отчетливо видно из последовательной записи (29), (30) и т.д.) следует, так как функция $\sin |k|\eta$ неотрицательна на интервале $[0,a]$, что $\phi_l(\eta) = 0, l=0,1,\ldots,\infty$. Теорема доказана.

Пусть $F_{f,k}$ - класс функций вида

$$F_{f,k} = \left\{ f(M, k) = \begin{cases} \overset{o}{f}(M, k), & M \in \Omega \\ 0, & M \notin \Omega \end{cases} \middle| \, |\overset{o}{f}_1(M,k)| \geq |\overset{o}{f}_2(M,k)| \text{ при } \Omega_1 \geq \Omega_2 \right\}, \qquad (42)$$

где Ω – ограниченные измеримые множества и $f(M, k)$ – ограниченные и измеримые по переменной M функции на Ω, k – фиксированное действительное число.

Т е о р е м а 8. Пусть Ω – ограниченное измеримое множество. Пусть $f(M, k)$ – функция из класса $F_{f,k}$ такая, что $f(M, k) \neq 0$ на Ω. Пусть имеет место (39) для некоторого k из множества A вида (38). Тогда в классе вложенных множеств по данным (39) множество Ω и функция $f(M, k)$ определяются однозначно.

Действительно, в этом случае доказательство проводится так же, как и в теореме 4, вплоть до получения рекуррентных соотношений, где полагаем вместо (36), что $\phi(M) = \chi_{\Omega_1}(M)\cdot f_1(M,k) - \chi_{\Omega_2}(M)\cdot f_2(M, k)$. Доказательство завершается так же, как и в теореме 7, так как нетрудно показать, что и в этом случае функции $\phi_l(\eta; k)$, $l = 0, 1, \ldots, \infty$ – знакопостоянны.

В заключение автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему научному руководителю В.А.Цецохо за постановку задачи и помощь в работе в процессе ее решения.

Л и т е р а т у р а

1. КУПРАДЗЕ В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.,-Л., 1950, с.280.
2. ГЮНТЕР Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., 1953, с.415.
3. ПРИЛЕПКО А.И. Об единственности определения формы и плотности тела в обратных задачах теории потенциала. ДАН СССР, 1970, 193, №2, с.288-291.
4. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963, с.1108.

С.И.Кабанихин

ОБ ОДНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим задачу Коши для двумерного волнового уравнения

$$\left.\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx} + v_{yy} + q(x, y)\cdot v \\ v\big|_{t=o} &= \phi(x, y),\ v_t\big|_{t=o} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $(x, y) \in R^2, t \geq 0$. Постановка обратной задачи и исследование вопросов единственности ее решения содержатся в [I]. В применении к двумерному случаю доказана однозначность определения непрерывной функции $q(x,y)$ вида $\sum\limits_{k=1}^{L} a_k(x)\cdot b_k(y)$ по некоторой функции двух переменных, связанной с решением прямой задачи. В данной статье на функцию $q(x,y)$ налагаются более жесткие требования, что дает возможность доказать кроме единственности также и существование решения и получить алгоритм нахождения функции $q(x,y)$ по некоторой информации о функции $g(y, t)$, определяемой равенством $g(y, t) = v|_{x=o}$.

Перейдем к точной формулировке. Пусть Ω - множество функций $f(x,y,t)$ таких, что для любых $(x,y) \in R^2, t \geq 0$ выполнены условия:

а) f - непрерывна,

б) $f(x,y,t)$ - четна по x и y,

в) по переменной y функция f периодична с периодом 2π и непрерывно дифференцируема.

Определим на Ω операцию проектирования

$$f_K(x, y, t) = \frac{f_o}{2} + \sum_{m=1}^{K} f_m \cdot \cos my,$$

где $f_m = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x,y,t) \cos my \, dy$, $m = 0, I, \ldots, K$. Предположим, что ϕ и q принадлежат Ω, и пусть нам известна функция

$$(v|_{x=o})_N = g_N(y, t). \tag{2}$$

Очевидно, что для произвольного коэффициента $q(x,y)$ обратная задача (I) - (2) будет недоопределенной, поэтому рассматривается следующая постановка: найти функции q и v, если известно, что

$$q \equiv q_N. \tag{3}$$

Решение будем искать с помощью метода последовательных приближений (МПП), который определим в области $E(T) = \{(x,y,t): y \in R, (x, t) \in D(T)\}$, где $D(T) = \{(x,t) : t \geq 0, |x| + t \leq T\}$. Пусть v^o - произвольная функция из Ω, удовлетворяющая начальному условию задачи (I) - (2), имеющая непрерывную частную производную по t, и $q^o = 0$. Предположим, что нам известна функция $v^{n-1}(x,y,t)$, тогда $q^n(x, y)$, обладающую свойством (3), находим, решая обратную задачу

$$w^n_{tt} = w^n_{xx} + w^n_{yy} + q^n(x, y) \cdot v^{n-1}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &(w^n|_{t=o})_N = \phi_N(x, y), \; (w^n_t|_{t=o})_N = 0, \\ &(w^n|_{x=o})_N = g_N(y, t) \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

После этого находим v^n как решение задачи Коши для уравнения (4) с начальными данными

$$v^n\Big|_{t=o} = \phi(x, y), \; v^n_t\Big|_{t=o} = 0. \qquad (6)$$

Операция проектирования f_N сопоставляет каждой функции f некоторый $(N + 1)$ — мерный вектор, который мы будем обозначать $\overline{f}$. В этом случае, применяя разложение в ряд Фурье и принимая во внимание условие (3), вместо (4)-(5) можно рассматривать следующую систему одномерных обратных задач:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{w}^n_{tt} = \overline{w}^n_{xx} - C\cdot\overline{w}^n + u^{n-1}\cdot\overline{q}^n \\ &\overline{w}^n\Big|_{t=o} = \overline{\phi}(x), \; \overline{w}^n_t\Big|_{t=o} = 0, \\ &\overline{w}^n\Big|_{x=o} = \overline{g}(t). \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

где C и $u^{n-1}(x, t)$ — квадратные матрицы порядка $N + 1$ с элементами:

$$c_{mk} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ k^2 & m = k, \end{cases} \qquad u^{n-1}_{km} = \begin{cases} v^{n-1}_k/2 & m = o, \\ (v^{n-1}_{m+k} + v^{n-1}_{m-k})/2 & m = 1,\dots,N. \end{cases}$$

Для вектора a и матрицы A введем согласованные нормы

$$\|a\| = \max_{i=o,1,\dots,N} |a_i|, \quad \|A\| = \max_{i=o,1,\dots,N} \sum_{k=o}^{n} |a_{ik}|.$$

При исследовании системы одномерных обратных задач (7) мы будем использовать следующие интегральные операторы:

$$A^c_{\alpha\beta}(v) = \int_o^{\alpha-\beta} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} I_o(ic\sqrt{(\alpha-\tau)^2 - \beta^2})\cdot v(\beta, \tau)d\tau \; ,$$

$$B^c_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\beta}\int_{\alpha-\beta+\tau}^{\alpha+\beta-\tau} J_o(ic\sqrt{(\beta-\tau)^2-(\alpha-\xi)^2})\cdot v(\xi,\tau)d\xi\ d\tau,$$

где J_o – функция Бесселя с нулевым значком.

Л е м м а I. Функция $A^c_{t\xi}$ (I) имеет на диагонали особенность вида $(t-\xi)^{-1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$A^c_{t\xi}(1) = \lim_{\varepsilon\to o}\int_o^{t-\xi-\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}J_o(ic\sqrt{(t-\tau)^2-\xi^2})d\tau =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to o}\frac{\partial}{\partial t}J_o(ic\sqrt{(t-\tau)^2-\xi^2})\Big|_o^{t-\xi-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to o}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{c\cos\varphi\cdot\sqrt{(t-\tau)^2-\xi^2}}c\cdot\cos\varphi\cdot\frac{t-\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-\xi^2}}d\varphi\Big|_o^{t-\xi-\varepsilon}.$$

При $\varepsilon\to 0$ показатель экспоненты под интегралом в последнем выражении стремится к нулю, следовательно, можно воспользоваться разложением $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$

$$A^c_{t\xi}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{c\cos\varphi\cdot\sqrt{t^2-\xi^2}}c\cos\varphi\frac{td\varphi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to o}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c\cdot\cos\varphi\frac{t-(\xi+\varepsilon)}{\sqrt{(\xi+\varepsilon)^2-\xi^2}}\left[1+c\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{(\xi+\varepsilon)^2-\xi^2}+\ldots\right]d\varphi.$$

Раскрыв квадратные скобки, нетрудно убедиться, что первое слагаемое равно нулю при любом ε, второе есть непрерывная функция, а все остальные стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, откуда и следует утверждение леммы.

Матрица $\Phi(t) = u^n(t,0)$ зависит, очевидно, только от коэффициентов Фурье функции ϕ_{2N}. Мы будем полагать, что существуют $B > 0$ и $T_1 > 0$, для которых при всех $t \in [0,T_1]$ имеет место неравенство

$$\|\Phi^{-1}(t)\| \le B. \tag{8}$$

Т е о р е м а I. Предположим, что выполнено (8), а также условие согласованности

$$\phi_N|_{x=0} = g_N|_{t=0} \; . \tag{9}$$

Пусть v^{n-1}, ϕ и g принадлежат Ω и, кроме того, $g_N \in C^2(E(T_1))$, $\phi_N \in C^3(E(T_1))$ и $v^{n-1} \in C_1^*(E(T_1))$, где C_1^* – пространство непрерывных функций, имеющих непрерывную частную производную по t, с соответствующей нормой. Тогда в $E(T_1)$ функция q^n из Ω, обладающая свойством (3) и удовлетворяющая (4)–(5), существует и единственна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из каждого уравнения системы (7) найдем w_i^n как решение прямой задачи, используя известные свойства телеграфного уравнения (см., например, [3]). Результат запишем в векторной форме

$$\bar{w}^n(x, t) = \bar{\varphi}(x, t) + B_{xt}(u^{n-1} \cdot \bar{q}^n),$$

где $$\varphi_k(x, t) = \frac{\phi_k(x - t) + \phi_k(x + t)}{2} +$$

$$+ \frac{kt}{2} \int_{x-t}^{x+t} J_0'\left(ik\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2}\right) \frac{\phi_k(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{t^2 - (\alpha - x)^2}} ,$$

$$(B_{xt})_{mk} = \begin{cases} 0 & m \neq k, \\ B^n_{xt} & m = k,\ k = 0,1,\dots,N. \end{cases}$$

Полагая x равным нулю и дважды дифференцируя по t, можно получить систему уравнений для $\bar{q}^n$

$$\bar{q}^n(t) = \tilde{F}(t) + \int\limits_0^t \tilde{K}^1_{n-1}(t, \xi)\cdot\bar{q}^n(\xi)d\xi, \qquad (10)$$

где $\tilde{F}(t) = \Phi^{-1}(t)\cdot\bar{F}(t)$, $\tilde{K}^1_{n-1}(t, \xi) = \Phi^{-1}(t)\cdot\bar{K}^1_{n-1}(t, \xi)$,

$$\bar{F}_k(t) = g''_k(t) - \varphi''_k(t), (\bar{K}^1_{n-1})_{mk} = -\frac{\partial}{\partial t}u^{n-1}_{mk}(\xi, t-\xi) - A^m_{t\xi}(u^{n-1}_{mk}).$$

В силу леммы I второе повторное ядро уравнения (I0) будет непрерывно, то есть $\bar{q}^n(t)$ удовлетворяет следующей системе интегральных уравнений с непрерывным ядром:

$$\bar{q}^n(t) = F^{n-1}(t) + \int\limits_0^t K^1_{n-1}(t, \xi)\bar{q}^n(\xi)\, d\xi, \qquad (11)$$

в которой

$$F^{n-1}(t) = \tilde{F}(t) + \int\limits_0^t \tilde{K}^1_{n-1}(t, \xi)\cdot\tilde{F}(\xi)\, d\xi,$$

$$K^1_{n-1}(t, \xi) = \int\limits_\xi^t \tilde{K}^1_{n-1}(t, \lambda)\cdot\tilde{K}^1_{n-1}(\lambda, \xi)d\lambda.$$

Но в этом случае известно (см., например, [2]), что решение системы (II) существует и единственно в классе непрерывных функций и может быть представлено в виде ряда Неймана

$$\bar{q}^n(t) = F^{n-1}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^t K^m_{n-1}(t, \xi)\cdot F^{n-1}(\xi)d\xi,$$

$$(12)$$

$$K^m_{n-1}(t, \xi) = \int\limits_\xi^t K^{m-1}_{n-1}(t, \lambda)\cdot K^1_{n-1}(\lambda, \xi)d\lambda, m = 2,3,\dots$$

Л е м м а 2. Можно найти такие положительные постоянные $T_2 \in (0,T]$, M_1 и M_2, что при всех $n = 0,1,2\dots$ в $E(T_2)$

$$\|v^n\|_{C_1^*} \le M_1, \quad \|q^n\|_C \le M_2 . \qquad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\|v^{n-1}\|_{C_1^*} \le M_1$.

Ядро $\overline{K}^1_{n-1}$ можно представить в виде произведения двух матриц $G_{t\xi}$ и u^{n-1}, где

$$G_{t\xi} = -E\cdot\frac{\partial}{\partial t} - A_{t\xi}, \quad (A_{t\xi})_{mk} = \begin{cases} 0 & m \ne k \\ A^k_{t\xi} & m = k. \end{cases}$$

В силу леммы I число

$$D = \int_0^{T_1} (1 + \|A_{T_1\lambda}(1)\|)\cdot(1 + \|A_{\lambda 0}(1)\|)d\lambda$$

конечно. Но тогда в $E(T_1)$ имеет место неравенство

$$\|K^1_{n-1}(t,\xi)\| = \|\int_\xi^t \Phi^{-1}(t)\overline{K}^1_{n-1}(t,\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)\overline{K}^1_{n-1}(\lambda,\xi)d\lambda\| \le$$
$$\le \|\|u^{n-1}\|\|^2_{C_1^*}\cdot B^2 D.$$

Вспоминая определение матрицы u^{n-1}, запишем очевидное неравенство

$$\|\|u^{n-1}\|\|_{C_1^*} \le (2N + 1)\,\|v^{n-1}\|_{C_1^*},$$

откуда, благодаря индукционному предположению, следует, что

$$\sup_{E(T_1)} \|K^1_{n-1}(t,\xi)\| \le D\, m^2,$$

где $m = B\, M_1(2N + 1)$. Используя теперь известную оценку для ряда Неймана (I0), получаем

$$\sup_{[0,T_1]} \|\overline{q}^n(t)\| \le \sup_{[0,T_1]} \|F^{n-1}(t)\|\cdot e^{DT_1 m^2}.$$

Далее из очевидных неравенств

$$\|q^n\|_C \le (N + 1)\cdot \sup_{[0,T_1]} \|\overline{q}^n(t)\|,$$

$$\sup_{[0,T_1]} \|F^{n-1}(t)\| \le K(B + Dm),$$

где $K = \sup\limits_{[0,T_1]} \|\bar{F}\|$ следует, что если положить

$$M_2 = (N + 1)\cdot K\cdot (B + Dm)\cdot e^{DT_1 m^2},$$

то второе из неравенств (I3) будет выполнено.

По определению МПП для v^n имеет место формула

$$v^n(x, y, t) = v^*(x, y, t) + L_{x,y,t}(q^n v^{n-1}), \qquad (14)$$

где

$$v^*(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^t \frac{\phi(x + \rho\cos\alpha, y + \rho\sin\alpha)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\rho\, d\rho\, d\alpha,$$

$$L_{x,y,t}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^\rho \frac{f(x + \alpha\cos\beta, y + \alpha\sin\beta, t - \rho)}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}\alpha\, d\alpha\, d\beta\, d\rho.$$

Оператор $L_{x,y,t}$ удовлетворяет неравенствам

$$|L_{x,y,t}(f)| \le \frac{t^2}{2}\|f\|_C,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} L_{x,y,t}(f)\right| \le \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\|f\|_{C_1^*},$$

следовательно,

$$\|v^n\|_{C_1^*} \le \|v^*\|_{C_1^*} + \left(T_1 + \frac{T_1^2}{2}\right)\cdot M_1\cdot M_2 .$$

Если теперь выбрать M_1 из условия $\|v^*\|_{C_1^*} \le \frac{M_1}{2}$, а T_2 из $(0,T_1]$ взять настолько малым, что $\left(T_2 + \frac{T_2^2}{2}\right) M_2 < \frac{1}{2}$, то полученные T_2, M_1 и M_2 будут обладать требуемыми свойствами.

Т е о р е м а 2. Предположим, что выполнены условия теоремы I и, кроме того, $\phi \in C^3(E(T_2))$. Тогда можно найти $T_3 \in \in (0, T_2]$ такое, что в $E(T_3)$ решение обратной задачи (I)-(2) существует и единственно в классе функций, принадлежащих Ω и удовлетворяющих условию (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала разность

$$\bar{q}^n(t) - \bar{q}^{n-1}(t) = F^{n-1}(t) - F^{n-2}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t [K^m_{n-1}(t,\xi)\cdot F^{n-1}(\xi) -$$

$$-K^m_{n-2}(t,\xi)\cdot F^{n-2}(\xi)]d\xi = F^{n-1}(t) - F^{n-2}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t [K^m_{n-1}(t,\xi)(F^{n-1}(\xi) -$$

$$- F^{n-2}(\xi)) + (K^m_{n-1}(t,\xi) - K^m_{n-2}(t,\xi))F^{n-2}(\xi)]d\xi.$$

Учитывая неравенства

$$\int_0^t \|\tilde{K}^1_{n-1}(t,\xi) - \tilde{K}^1_{n-1}(t,\xi)\| d\xi \le BD(2N + 1)\cdot\|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^*_1},$$

$$\sup_{[0,T_2]} \|F^{n-1}(t) - F^{n-2}(t)\| \le KB^2D(2N + 1)\cdot\|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^*_1},$$

$$\|\int_0^t [K^1_{n-1}(t,\xi) - K^1_{n-2}(t,\xi)]\cdot F^{n-2}(\xi)d\xi\| \le p_1\cdot\|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^*_1},$$

где $p_1 = 2T_2KDM_1B^2(2N + 1)^2$, получим оценку

$$\|q^n - q^{n-1}\|_C \le p_2\cdot\|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^*_1}, \tag{15}$$

в которой

$$p_2 = KB^2D(2N + 1)\cdot e^{T_2Dm^2} + p_1\cdot KB[1 + DBM_1(2N + 1)]\cdot e^{2T_2p_1M_1}.$$

Оценим теперь величину $\|v^n - v^{n-1}\|_{C^*_1}$, используя (I5)

$$v^n(x, y, t) - v^{n-1}(x, y, t) = L_{x,y,t}(q^n v^{n-1} - q^{n-1}v^{n-2}) =$$

$$= L_{x,y,t}[v^{n-1}(q^n - q^{n-1}) + q^{n-1}(v^{n-1} - v^{n-2})],$$

$$\|v^n - v^{n-1}\|_{C_1^*} \leq (T_2 + \frac{T_2^2}{2})(p_2 M_1 + M_2)\|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C_1^*}. \tag{16}$$

Из (I5) и (I6) следует, что если T_3 из $(0, T_2]$ удовлетворяет неравенству $T_3 + \frac{T_3^2}{2} < (p_2 M_1 + M_2)^{-1}$, то изложенный выше МПШ сходится в области $E(T_3)$, что и требовалось доказать.

Устремляя n к бесконечности в неравенстве (I3) и вспоминая определение постоянной M_2, получаем оценку

$$\|q\|_C \leq (N + 1)(B + Dm)\cdot e^{DT_1 m^2} \cdot \sup_{[0,T_1]} \|\bar{F}\|,$$

из которой следует, что решение $q(x, y)$ непрерывно зависит от начальных данных $\phi(x, y)$ и $g(y, t)$, следовательно, обратная задача (I)-(2) корректна. Отметим, что с помощью изложенного МПШ можно решить и одномерную обратную задачу для уравнения колебаний струны. В этом случае МПШ совпадает с обычным методом последовательных приближений для системы интегральных уравнений, полученной в [I].

В заключение автор выражает благодарность доктору физико-математических наук В.Г.Романову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

I. РОМАНОВ В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, I973.

2. ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики. М., "Наука", I967.

3. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики. Т.2, ОГИЗ Гостехиздат, I948.

В.Б.Кардаков

О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Исследуемые ниже задачи являются модельными по отношению к сейсмологической проблеме, рассмотренной в [4], кроме того, они представляют интерес при прогнозе волн цунами [6](стр. 323). Поскольку они принадлежат к классу условно-корректных задач математической физики [2], их решение предполагается существующим. В первой части работы исследуются вопросы единственности определения поверхности разрыва и плотности на ней по известному, на некотором непространственном многообразии, волновому полю. Во втором параграфе получена оценка устойчивости (в C^k – норме) восстановления начальных данных. Случай волнового уравнения был рассмотрен в [7].

I. Об определении плотности и поверхности разрыва

Прежде чем конкретизировать классы единственности, рассмотрим одну общую постановку об определении правой части для волнового уравнения. Пусть функция $u(t,x) = u(t,x_1,x_2,x_3)$ дважды непрерывно дифференцируема вне $B_0 \times [0,t_0]$ всюду в области E_0:

$$E_0 \equiv \{(x,t) | 0 \le t,\ 0 \le x_3,\ x' = (x_1,x_2) \in R^2\}.$$

$B_0: |x - x^0| \le k_0$, $\bar{B}_0 \subset E_0$, $\{x_3 = 0\} \cap B_0$ пусто k_0, t_0 – известные числа, x^0 – известный вектор.

Далее u удовлетворяет условиям:

$$\Box u = u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = f(t,x), \quad (1)$$

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0,$$

$$\operatorname{supp} f \subset B_0 \times [0,t_0], \quad (2)$$

$$u(t,x)|_\Pi = g(t,x'), \ \Pi \equiv \{(t,x)|0 \le t, x_3 = 0, |x'| < r\}, \quad (3)$$

$$u_{x_3}(t,x',0) = 0, \ t \ge 0, \ x' \in R^2. \quad (4)$$

Требуется по известной на множестве Π функции $g(t, x')$ определить $f(t, x)$.

2.Легко видеть, что такое определение неоднозначно. Действительно,возьмем $\sigma(t,x)$ с носителем в $B_0 \times [0,t_0]$ и достаточно гладкую. Тогда $\Box\, \sigma(t, x) = \tilde{\sigma}(t,x)$:

$$\operatorname{supp} \tilde{\sigma}(t,x) \subset B_0 \times [0,t_0].$$

Следовательно $f(t, x)$ и $f(t, x) + \tilde{\sigma}(t,x)$ дают одно и то же значение $u(t,x)$ на Π.

Далее будем рассматривать случаи, когда носители правых частей сосредоточены на некоторых поверхностях в R^3 -"поверхностях разрыва среды". Физическое обоснование этой постановки см., например, в [I]. Рассмотрим множество K_0:

$$K_0 \equiv \{(t,x)|[|x - x^0| \le k_0 + t_0 - t] \cap [t \ge t_0, x \in B_0]\}.$$

Продолжим $u(t, x)$ четным образом по переменной x_3 на значения $x_3 < 0$ (см. 4.).

Тогда,если обозначить

$$E = E_0 \cup \tilde{E}_0, \ B = B_0 \cup \tilde{B}_0, \ K = K_0 \cup \tilde{K}_0,$$

где $\tilde{E}_0, \tilde{B}_0, \tilde{K}_0$ симметричны E_0, B_0, K_0 относительно плоскости

$\{x_3 = 0\}$, имеет место

Л е м м а I. Если $g(t,x') \equiv 0$ на Π, то при выполнении (I)-(3) и $(t,x) \equiv 0$ в $E\setminus(B \times [0,t_0] \cup K)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку вне $B \times [0,t_0]$ $u(t,x)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению и дважды непрерывно дифференцируемо, то согласно [3] (стр.749) $u(t, x) = 0$ на объединении K_2 прямых характеристических конусов с вершинами на Π, которые не пересекают $B \times [0,t_0]$ и всюду в цилиндре $Ц_{\delta_0}: |x| \le \delta,\ t \in [0,t_0]$. Здесь $0 < \delta_0 \le \rho(B_1\Pi)$. Итак $u \equiv 0$ в $Ц_\delta \cup K_2$. Рассмотрим в R^3 плоскость π_0, проходящую через начало координат и не пересекающую B. $\rho(\pi_0, B) = \varepsilon_0 < 0$. Покажем, что $u = 0$ на $\Pi_0 \equiv \pi_0 \times [0, \infty)$. Допустим противное $G_0 \equiv \operatorname{supp} u \cap \Pi_0 \ne \emptyset$ (непусто). Тогда [3] найдется цилиндр $Ц(x^1,\varepsilon_1) = \{(t,x) | 0 < t, |x - x^1| \le \varepsilon_1 < \varepsilon_0\}$, $x^1 \in \pi_0$, отстоящий от G_0 сколь угодно близко.

Используя вновь результаты Куранта, получаем, что $u(t, x) = 0$ в $(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$ - окрестности $Ц(x^1,\varepsilon_1)$. Тем самым приходим к противоречию. Далее, аналогично предыдущему, мы также получаем, что $u = 0$ на объединении K_2 тех прямых характеристических конусов с вершинами $(t,x) \in \Pi_0$, которые не пересекают B и всюду в ε_0 окрестности Π_0. Так как по условию B-компакт, то найдется плоскость $\pi_1 \in R^3$, $\pi_1 \cap B = \emptyset$, $\pi_1 \cap \pi_0 \ne \emptyset$. Повторяя рассуждения, убедимся, что $u = 0$ в объединении прямых характеристических конусов с вершинами на $\Pi_1 \times [0, \infty)$, которые не пересекают B и всюду $\varepsilon_2 = \rho(\pi_1, B)$ окрестности Π_1. Таким образом $u = 0$ в $E\setminus(B \times [0,t_0] \cup K)$.

Л е м м а 2. Пусть $f(t,x) \equiv Q(t,x_2,x_3) \times \delta^{(1)}(x_1 - \varphi(x_2,x_3))$, $\varphi \in C^2(R^2)$, Q - финитная функция (t,x_2,x_3); тогда в классе четных функций $f(t,x)$ определяется однозначно, если $\varphi(x_2,x_3)$ известна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы I $u(t,x) = 0$ всюду вне $\{x_1 - \varphi = 0\}$. Отсюда ввиду свойств волновых поверхностных потенциалов $Q \equiv 0$.

3. Введем в рассмотрение класс единственности, то есть такое множество правых частей (I) G, которые однозначно восстанавливаются по известной g на Π. Имеет место следствие леммы 2:

П р е д л о ж е н и е I. Если $f(t,x) = \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu(t,x') \times \delta^{(1)}(x_3 - c_\nu)$, c_ν – известные числа; $c_0 < c_1 < \ldots < c_N$, причем $\{x_3 - c_\nu = 0\} \cap B_0$ – непусто, тогда $f \in G$.

П р е д л о ж е н и е 2. Если $f(t,x) \equiv \varphi(t - \sigma(x))Q(x) \times \delta(x_1 - \phi(x_2,x_3))$, причем поверхность разрыва $\Gamma_\phi \equiv \{x_1 - \phi(x_2,x_3) = 0\}$ известна, $\Gamma_\phi \cap B_0$ – непусто и

а) $\int_0^\infty \varphi(s)ds = b_0 \neq 0$ – известное число, (5)

в) $\varphi \in c^2(-\infty,\infty)$, $\varphi(s) = 0$ при $s < 0$,

с) $\sigma(x) > 0$; $\sigma(x)$, $Q(x)$ – финитны; $\phi(x_2,x_3) \in c^2(R^2)$, то $f \in G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное – функция $f_1(t,x) \equiv \varphi_1(t - \sigma_1(x))Q_1(x) \times \delta(x_1 - \phi(x_2,x_3))$ дает ту же информацию на П. Тогда, в силу леммы I и леммы 2 (Γ_ϕ известна), имеем:

$$\varphi(t - \sigma(x))Q(x) = \varphi_1(t - \sigma_1(x))Q_1(x), \quad x \in \Gamma_\phi. \tag{6}$$

Применяя к (6) преобразование Фурье по t, получим при $\alpha = 0$

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi}(\alpha)e^{i\alpha\sigma(x)}Q(x) = \tilde{\varphi}_1(\alpha)e^{i\alpha\sigma_1(x)}Q_1(x), \\ Q(x) \equiv Q_1(x), \quad x \in \Gamma_\phi. \end{gathered} \tag{6'}$$

Пользуясь финитностью $\sigma(x), \sigma_1(x)$, находим далее, что:

$$\tilde{\varphi}(\alpha) = \tilde{\varphi}_1(\alpha). \tag{7}$$

Откуда $\sigma(x) = \sigma_1(x)$.

Если поверхность Γ_ϕ неизвестна заренее, то это намного усложняет задачу. Задача становится, в частности, нелинейной. Приведем 3 примера, когда удается определить единственным образом Γ_ϕ и плотность на ней.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $f(t,x) \equiv \varphi(t)Q(\check{x}) \times \delta(x_1 - \phi(\check{x}))$, $\check{x} = (x_2,x_3)$, $Q(\check{x})$ известная финитная функция $\Gamma_\phi \cap B_0 \neq \emptyset$, $\phi \in c_0^2(R^2)$, тогда если $\varphi \in c_0[0,\infty)$, $\varphi(t), \phi(\check{x})$ определены однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы I $u(t,x)$ определяется единственным образом, по известной на П $g(t,x')$, всюду вне $B \times [0,t_0] \cup K$. Кроме того, напомним, что $u(t,x)$ четна по переменной x_3. Из формулы Кирхгофа следует, что:

$$u(t,x) = (4\pi)^{-1} \int_{R^2} \frac{\varphi(t - \check{r})Q(\check{y})d\check{y}}{\check{r}}, \tag{8}$$

$$\check{r} = |x - y|\big|_{y_1=\phi(\check{y})}.$$

Рассмотрим известный предел

$$\lim_{\substack{|x|\to\infty \\ t=|x|+s}} |x|u(t,x) = u_\infty(s,\omega),\ s \geq 0,\ \omega \in R^3,\ |\omega| = 1.$$

Переходя в (8) к пределу, имеем:

$$u_\infty(s,\omega) = (4\pi)^{-1} \int_{R^2} \varphi(s + \omega_1\phi(\check{y}) + \check{\omega}\check{y})Q(\check{y})d\check{y}. \tag{9}$$

Причем $u_\infty(s,\omega)$ известна при $s \geq 0$, $|\omega| = 1$.
Применяя к (9) преобразование Фурье по s:

$$v(\alpha,\omega) \equiv \int_0^\infty e^{-i\alpha s}u_\infty(s,\omega)ds = (4\pi)^{-1} \int_{R^2} \tilde{\varphi}(\alpha)e^{i\alpha(\check{\omega}\check{y}+\omega_1\phi(\check{y}))}Q(\check{y})d\check{y}, \tag{10}$$

полагая в (10) $\omega_1 = 0$, следовательно $|\check{\omega}| = 1$, $\check{\omega} = (\omega_2,\omega_3)$, имеем:

$$v(\alpha,0,\check{\omega}) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(\alpha)\tilde{Q}(-\alpha\check{\omega}), \tag{10'}$$

где

$$\tilde{Q}(\check{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i\check{z}\check{x}}Q(\check{x})d\check{x}.$$

Таким образом $\tilde{\varphi}(\alpha)$ определена однозначно.
Для определения $\phi(\check{y})$ вернемся к равенству (10) и продифференцируем его по ω_1:

$$D_{\omega_1}\frac{v(\alpha,\omega)}{\tilde{\varphi}(\alpha)} = -\frac{i\alpha\omega_1}{\omega_3} \int_{R^2} Q(\check{y})y_3 e^{i\alpha(\check{\omega}\check{y}+\omega_1\phi(\check{y}))}d\check{y} + \tag{11}$$

$$+ i\alpha \int\limits_{R^2} Q(\check{y})\phi(\check{y})e^{i\alpha(\omega\check{y}+\omega_1\phi(\check{y}))}d\check{y}. \tag{11}$$

Положим в (II) $\omega_1 = 0$, откуда

$$Q(\check{y})\phi(\check{y})=1/2 \int\limits_{R^2} \frac{D\omega_1(|\check{z}|,0,-\check{z}|\check{z}|^{-1})}{i|\check{z}|\vartheta(|\check{z}|)} \exp(i\check{z}\check{y})d\check{z}.$$

Тем самым $\Gamma_\phi \cap B_0$ – известна.

Следствие I. Если $f(t,x) \equiv \varphi(t)Q(x) \times \delta(x_1 - \phi(\check{x}))$ и $\varphi(t)$ известна, то $Q(x)$, $\phi(\check{x})$ определены однозначно.

Следствие 2. Если $\phi(x_2,x_3) \equiv c$ – const при условии $Q(t,x) > 0$ и $f(t,x) = Q(t,x) \times \delta'(x_1 - c)$, $\{x_1 - c = 0\} \cap B_0 \neq \emptyset$, то $f \in G$.

Доказательство. Определение c аналогично определению $\phi(x_2,x_3)$ в предложении 3. Единственность $Q(t,\check{x})$ – следствие леммы 2.

2. Об одной обратной задаче динамической теории упругости

I. Рассмотрим безграничную идеально упругую среду с постоянными Лямэ λ,μ и плотностью ρ. Пусть упругие смещения $\bar{u}(t,x)$, распространяющиеся в среде, являются решениями системы:

$$\bar{u}_{tt} - \frac{2\mu+\lambda}{\rho}\nabla(\nabla\cdot\bar{u}) + \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{u}) = 0,\ t \geq 0 \tag{1}$$

при следующих начальных данных:

$$\bar{u}(0,x) = \bar{0},\ \bar{u}_t(0,x) = \bar{\Phi}(x), \tag{2}$$

где $\bar{\Phi}(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x))$ удовлетворяют

a) $\Phi_i(x) \in c^6(R^3)$ $(i = 1,2,3)$,

в) $\Phi_i(x',-x_3) = \Phi_i(x',x_3)$, (3)

c) $\operatorname{supp}\Phi_i \subset \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega} \equiv \{x \mid |x| \leq k_0, |x_3| > \delta_0,\ \delta_0 < k_0\}$.

З а м е ч а н и е I. Условия 3в, 3с несущественны и рассматриваются здесь для простоты.

Далее на плоскости $x_3 = 0$ известны

$$\bar{u}(t,x',0) = \bar{a}(t,x'),\ t \geq 0,\ x' \in R^2, \tag{4}$$

$$\bar{u}_{x_3}(t,x',0) = \bar{b}(t,x'),\ t \geq 0,\ x' \in R^2. \tag{5}$$

Требуется по известной информации на $x_3 = 0$, $\bar{a}(t,x'),\bar{b}(t,x')$ оценить $\bar{\bar{\Phi}}(x)$. Можно было бы рассмотреть задачу, когда по известным $\bar{a},\bar{b}$ определяются $\bar{u}(0,x) \not\equiv 0$, $\bar{u}_t(0,x) \not\equiv 0$, но в этом случае оценка устойчивости становится гораздо хуже.

2. Известно, что всякое векторное поле можно разложить на потенциальную и вихревую части:

$$\bar{u}(t,x) = \nabla_x\varphi(t,x) + \mathrm{rot}_x\bar{\phi}(t,x). \tag{6}$$

Причем без ограничения общности [5] (стр.400)

$$\mathrm{div}_x\bar{\phi}(t,x) = 0,\ \ t \geq 0,\ x \in R^3. \tag{6'}$$

Подставляя (6) в (I) и пользуясь (3-а), получаем уравнение для

$$\Delta_x\varphi(t,x) \equiv \tilde{U}_0(t,x),\ \Delta_x\phi_i(t,x) = \tilde{U}_i(t,x),\ (i = 1,2,3),$$

$$\Box_{c_1}\tilde{U}_0 \equiv D_t^2\tilde{U}_0 - c_1^2\Delta\tilde{U}_0 = 0,\ c_1^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho}, \tag{7}$$

$$\Box_{c_2}\tilde{U}_i \equiv D_t^2\tilde{U}_i - c_2\Delta\tilde{U}_i = 0,\ c_2 = \frac{\mu}{\rho}. \tag{8}$$

Рассмотрим функции

$$U_k(t,x) \equiv \frac{\tilde{\dot{U}}_k(t,x',-x_3) + \tilde{U}_k(t,x',x_3)}{2},\ (k = 0,1,2,3). \tag{9}$$

Тогда при $x_3 = 0$ в силу определения

$$\bar{U}_0(t,x),\ \bar{U}(t,x) = (U_1,U_2,U_3)$$

будем иметь

$$U_0(t,x'0) = a_1x_1 + a_2x_2 + b_3 \equiv A_0(t,x'),\ t \geq 0,\ x' \in R^2, \tag{10}$$

$$\bar{U}(t,x',0) = (a_{3x_2} - b_2)\bar{i} + (b_1 - a_{3x_1})\bar{j} + (a_{2x_1} - a_{1x_2})\bar{k} \equiv$$

$$\equiv \bar{A}(t,x') = (A_1, A_2, A_3) \tag{11}$$

$\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ - орты прямоугольной системы координат. Кроме того, ввиду (9):

$$U_{kx_3}|_{x_3=0} = 0,\ t \geq 0,\ x' \in R^2,\ (k = 0,\dots,3). \tag{12}$$

При $t = 0$ соответственно:

$$U_{0t} = \Phi_{1x_1} + \Phi_{2x_2},\ U_0|_{t=0} = 0, \tag{13}$$

$$\bar{U}_t|_{t=0} = \Phi_{3x_2}\bar{i} + (-\Phi_{3x_1})\bar{j} + (\Phi_{2x_1} - \Phi_{1x_2})\bar{k}. \tag{14}$$

В (I3) и (I4) мы воспользовались условием (3в).
Таким образом, задачу (I)-(5) мы свели к задаче (7)-(I4).

3. Сделав замену $t = ct_1$ и оставляя за функцией после этой замены то же обозначение, получаем:

$$\Box U_0 \equiv D_t^2 U_0 - \Delta U_0 = 0,\ t \geq 0.$$

По формуле Кирхгофа имеем:

$$\int\limits_{|x'-y'|^2+y_3^2=t_1^2} U_{0t_1}(0,y)dS_y = 4\pi t_1 A_0(t,x'),\ t_1 \geq 0, \tag{15}$$
$$x' \in R^2.$$

Определим среднее по окружностям Γ_0 от функции U_{0t_1}:

$$\Gamma_0 : |x|^2 = \tau,\ x'\cdot\omega = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 = \lambda,\ |\omega| = 1,\ \lambda \in (-\sqrt{\tau}, \sqrt{\tau}),$$

$$S_0(\omega;\lambda,\tau) = (2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} U_{0t_1}(0,\omega_1\lambda - \omega_2\rho\cos\alpha;\omega_2\lambda +$$

$$+\omega_1\rho\cos\alpha;\rho\sin\alpha)d\alpha=(4\pi)^{-1}\int\limits_{\substack{\omega\cdot x'=\lambda\\|x'|\le\sqrt{\tau}}}\frac{U_{ot_1}(0,x',(\tau-|x'|^2)^{1/2})}{(\tau-|x'|^2)^{1/2}}dl_x, \tag{16}$$

где $\rho = \sqrt{\tau - \lambda^2}$.

Далее положим $\check{U}_{ot_1}(0,x',\tau) = U_{ot_1}(0,x',(\tau - |x'|^2)^{1/2})$. Согласно (I6) функция $S_o(\omega;\lambda,\tau)$ определена лишь при $|\lambda| \le \sqrt{\tau}$, но ввиду условия (3с) $S_o(\omega;\lambda,\tau) = 0$ в окрестности $\lambda = \pm\sqrt{\tau}$. Продолжим S_o нулем на значения λ: $|\lambda| \ge \sqrt{\tau}$.

Т е о р е м а I. Имеет место формула:

$$\check{U}_{ot_1}(0,x',\tau) = -(\tau - |x'|^2)^{1/2}(4\pi)^{-1}\int\limits_{|\omega|=1}d\omega\int\limits_{-\sqrt{\tau}}^{\sqrt{\tau}}\frac{S_{o\lambda}(\omega;\lambda,\tau)d\lambda}{\lambda-\omega x'} \tag{17}$$

и оценка

$$|\check{U}_{ot_1}(0,x',\tau)| \le c_o(1 + \tau^{1/2})\sum_{k=1}^{2}\max_{\lambda,|\omega|=1}|D_\lambda^k S_o(\omega;\lambda,\tau)|. \tag{18}$$

Равенство (I7) - известная формула обращения преобразования Радона (см. Йон [I] (стр.I9.).

Неравенство (I8) получается следующим образом: $|x'| \le \sqrt{\tau}$, следовательно $x'\cdot\omega \le \sqrt{\tau}$. Отсюда

$$|(4\pi)^{-1}\int\limits_{|\omega|=1}d\omega\int\limits_{-\sqrt{\tau}}^{\sqrt{\tau}}\frac{S_{o\lambda}(\omega,\lambda,\tau)}{\lambda-\omega\cdot x'}d\lambda| \le$$

$$\le 2\sqrt{\tau}\max_{\substack{|\omega|=1\\\lambda}}|S_{o\lambda\lambda}(\omega;\lambda,\tau)| + \max_{\substack{|\omega|=1\\\lambda}}|S_{o\lambda}(\omega,x'\cdot\omega,\tau)|\ln\frac{\sqrt{\tau}+|x'|}{\sqrt{\tau}-|x'|};$$

Поэтому

$$|\check{U}_{ot_1}(0,x',\tau)| \le 2\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}-|x'|)^{1/2}\max_{\lambda,|\omega|=1}|S_{o\lambda\lambda}(\omega,\lambda,\tau)|(\sqrt{\tau}+|x'|)+$$

$$+(\sqrt{\tau}-|x'|)(\sqrt{\tau}+|x'|)\max_{\lambda,|\omega|=1}|S_{o\lambda}(\omega;x'\cdot\omega,\tau)\ln\frac{\sqrt{\tau}+|x'|}{\sqrt{\tau}-|x'|}\,).$$

Оценка (I8) следует из последнего неравенства очевидным образом.

4. Для того чтобы получить уравнение для определения $S_o(\omega;\lambda,\tau)$, положим в (I5) $x' = p\omega$, $-\infty \le p \le \infty$, $\omega \in R^2$, $|\omega| = 1$. Интеграл по сфере сведем к повторному интегралу по окружности Γ_λ:

$$\omega\cdot y' = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = \lambda,\ |x'-y'|^2 + y_3^2 = t_1^2$$

и по λ

$$p - t_1 \le \lambda \le p + t_1.$$

Ввиду того, что квадрат расстояния τ от Γ_λ до начала координат равен:

$$\tau = |y'|^2 + y_3^2 = (t_1^2 - |x'|^2 + 2x'\cdot y') = t_1^2 - p^2 + 2p\lambda, \tag{19}$$

получим

$$\int_{p-t_1}^{p+t_1} S_o(\omega;\lambda,t_1^2 - p^2 + 2p\lambda)d\lambda = A_o(t_1,p\omega). \tag{20}$$

Интеграл в (20) берется по отрезку прямой

$$\tau = t_1^2 - p^2 + 2p\lambda \equiv \tau(\lambda).$$

Вспоминая, что $S_o(\omega;\lambda,\tau) = 0$ при $|\lambda| > \sqrt{\tau}$, мы видим, что левая часть (20) есть преобразование Радона $S_o(\omega;\lambda,\tau)$ как функции двух переменных (λ,τ). Воспользовавшись формулой обраобращения будем иметь

$$S_o(\omega;\lambda,\tau) = -\frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}}\int_0^\infty\frac{A_{ot_1}(t_1,p\omega)}{t_1^2-p^2+2p\lambda-\tau}\,dt_1. \tag{21}$$

Объединяя (17),(21), мы находим сумму:

$$B_0(x) = \Phi_{1x_1}(x) + \Phi_{2x_2}(x),\ x \in R^3. \qquad (22)$$

Совершенно аналогично вышеизложенному мы определим

$$\bar{B}(x) = \Phi_{3x_2}\bar{i} + (-\Phi_{3x_1})\bar{j} + (\Phi_{2x_1} - \Phi_{1x_2})\bar{k}. \qquad (23)$$

Таким образом, $B_0(x)$, $\bar{B}(x)$ известны.

5. Получим оценку устойчивости вида:

$$\sum_{i=1}^{3}|\Phi_{i(x)}| \le K(|x|)\sum_{k=0}^{3}\|A_{kt}\|_{3,\gamma},$$

где $\|\cdot\|_{3,\gamma}$ определена ниже. Из (23) имеем, ввиду (3c),

$$\Phi_3(x) = -\int_{-\infty}^{x_1} B_2(\xi,\check{x})d\xi\ . \qquad (24)$$

Из (22), (23)

$$\Delta'\Phi_1 = B_{0x_1} - B_{3x_2},$$

$$\Delta'\Phi_2 = B_{0x_2} - B_{3x_1},\ \Delta' \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad (25)$$

$\bar{\Phi}(x)|_\Gamma = 0$, Γ – окружность в R^2. (25')

Отсюда, воспользовавшись (3c), получим:

$$\Phi_1(x) = (2\pi)^{-1}\int[B_{0\xi_1}(\xi) - B_{3\xi_2}(\xi)]\ln|\xi'-x'|d\xi', \qquad (25'')$$

$$\Phi_2(x) = (2\pi)^{-1}\int[B_{0\xi_2}(\xi) + B_{3\xi_1}(\xi)]\ln|\xi'-x'|d\xi'.$$

Л е м м а. Пусть $p > 0$, $\delta = \rho(\Pi,\Omega)$, $\Pi \equiv \{x_3 = 0\}$ плоскость в R^3. Определим

$$\|A_{0t_1}\|_{3,\gamma} \equiv \sum_{k=0}^{3}\sup_{t>0,x'\in R^2}\{(1+t_1)e^{2\gamma|t_1-|x'||}\left|\frac{\partial^k A_{0t_1}(t_1,x')}{\partial t_1^k}\right|\} < \infty \qquad (26)$$

Ввиду (3с) класс (26) непуст. Существует постоянная $K_1 = K_1(\gamma, \delta)$, что

$$|U_{ot_1}(0,x)| \le K_1(\gamma,\delta)(1 + \|x\|)\|A_{ot_1}\|_{3,\gamma}. \qquad (27)$$

Доказательство. Обозначим $q = p^2 - 2p\lambda + \tau = (p - \lambda)^2 + \tau - \lambda^2 \ge 0$. В силу финитности $\bar{\Phi}(x)$, $x_3 > 0$ $A_{ot_1}(t_1,x') = 0$ при $0 \le t_1 \le \delta$. Продолжим ее нулем на значения $t_1 < 0$, при этом первоначальная гладкость сохранится. Тогда внутренний интеграл в формуле (2I) равен:

$$\int_0^\infty \frac{A_{ot_1}(t_1,p\omega)}{t_1^2 - q}dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{ot_1}(t_1,p\omega)}{2t_1(t_1-\sqrt{q})}dt_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{ot_1}(t_1,p\omega)}{2t_1(t_1+\sqrt{q})}dt_1 = D_1 + D_2.$$

Оценим D_2

$$|D_2| \le 1/2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|A_{ot_1}|}{t_1^2}dt_1 \le \frac{1}{2\delta}\int_\delta^\infty \frac{|A_{ot_1}|}{t_1}dt_1 \le$$

$$\le \frac{1+\delta}{2\delta^2}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-2\gamma|t_1-|p||}}{(1+t_1^2)}dt_1\right)\|A_{ot_1}\|_{1,\gamma}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$t_1 \ge \frac{(1+t_1)\delta}{(1+\delta)} \quad \text{при } t_1 \ge \delta > 0.$$

Отсюда

$$\left|\int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{\sqrt{1 + 4p^2}}\int_\delta^\infty \frac{e^{-2\gamma|t_1-|p||}}{(1+t_1)^2}dt_1\right| \le \qquad (28)$$

$$\le \int_{\delta}^{\infty} \frac{dt_1}{(1+t_1)} \left(\int_{0}^{t_1} e^{-2\gamma t_1} e^{2\gamma p} \frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}} + \right. \tag{28}$$

$$\left. + \int_{t_1}^{\infty} \frac{e^{-2\gamma p}}{\sqrt{1+4p^2}} e^{2\gamma t_1} dp \right) \le \frac{2}{(1+\delta)\gamma}.$$

Далее

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{ot_1}(t_1, p\omega)}{2t_1(t_1 - p\omega)} dt_1 \right| \le$$

$$\le \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}} \int_{|t-\sqrt{q}|\ge 1} \frac{A_{ot_1}(t_1, p\omega)}{2t_1(t_1 - \sqrt{q})} dt_1 \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}} \int_{|t_1-\sqrt{q}|\le 1} \left(\frac{A_{ot_1}}{t_1} - \frac{A_{ot_1}(\sqrt{q}, p\omega)}{\sqrt{q}} \right) 2^{-1}(t_1 - \sqrt{q})^{-1} dt_1 \right| = S_1 + S_2,$$

$$S_1 \le \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}} \int_{0}^{\infty} \left| \frac{A_{ot_1}(t_1, p\omega)}{2t_1} \right| dt_1 \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-2\gamma |t_1 - |p||}}{2t_1(1+t_1)} dt_1 \| A_{ot_1} \|_{1,\gamma} \le \tag{29}$$

$$\le \frac{1}{\gamma\delta} \| A_{ot_1} \|_{1,\gamma}.$$

$$S_2 \le \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \max_{t_1\in(\sqrt{q}-1,\sqrt{q}+1)} \left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{A_{ot_1}}{t_1}\right)\right| \frac{dp}{\sqrt{1+4p^2}}\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \max_{t_1\in(\sqrt{q}-1,\sqrt{q}+1)} \left\{\frac{A_{ot_1t_1}}{t_1} + \frac{|A_{ot_1}|}{t_1^2}\right\}\right|dp \le$$

$$\le \frac{1+\delta}{\delta}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \max_{t_1\in(\sqrt{q}-1,\sqrt{q}+1)} \frac{1}{t_1(1+t_1)}\, dp\right)\|A_{ot_1}\|_{1,\gamma} \le \tag{30}$$

$$\le \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^2\|A_{ot_1}\|_{1,\gamma}\left(\int\limits_{|p'|\le 1} dp' + \int\limits_{|p'|\ge 1} \frac{dp'}{(p')^2}\right) = 4\left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^2\|A_{ot_1}\|_{1,\gamma}.$$

В (30) мы заменили $p - \lambda$ на p' и воспользовались тем, что $\sqrt{q} \ge |p - \lambda|$.

Объединяя (28)-(30), мы получим оценку для $S_o(\omega;\lambda,\tau)$:

$$|S_o(\omega;\lambda,\tau) \le \frac{2}{\pi^2\gamma\delta^2}(1 + \delta + 4(1+\delta)^2\gamma)\|A_{ot_1}\|_{1,\gamma}. \tag{31}$$

Положим далее

$$K_1 = \frac{2}{\pi^2\gamma\delta^2}(1 + \delta + 4(1+\delta^2)\gamma).$$

Для того, чтобы воспользоваться результатом теоремы I, нам необходимо оценить $S_{o\lambda}$, $S_{o\lambda\lambda}$.

В силу (I5) $S_o = 0$ в окрестности $\lambda \pm \sqrt{\tau}$, и продолжена нулем при $|\lambda| > \sqrt{\tau}$. Тогда (20) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_o\left(\omega, \frac{\tau+p^2-t_1^2}{2p}, \tau\right)\frac{d\tau}{2p} = A_o(t_1, p\omega); \tag{20'}$$

продифференцировав по t_1, получаем

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega,\frac{\tau+p^2-t_1^2}{2p},\tau)\frac{d\tau}{2p} = -\frac{p}{t_1}A_{ot_1}(t_1,p\omega). \qquad (32)$$

Тогда из (20) сразу следует

$$|S_{o\lambda}| \le k_1(\gamma,\delta)\|\frac{\partial}{\partial t_1}(\frac{p}{t_1}A_{ot_1})\|_{1,\gamma}.$$

Оценим

$$\|\frac{\partial}{\partial t_1}(A_{ot_1}\frac{p}{t_1})\|_{1,\gamma} = \sup_{t_1\ge\delta,p}\{[|(\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{p}{t_1})A_{ot_1}|+|\frac{p}{t_1}\frac{\partial}{\partial t_1}A_{ot_1}|]\cdot$$

$$\cdot(1+t_1)e^{2\gamma|t_1-|p||}\}\le\frac{2}{\delta^2}\|A_{ot_1}\|_{2,\gamma_1}\sup_{t\ge\delta_1,p}(\frac{|p|}{t_1}e^{-2(\gamma_1-\gamma)|t_1-|p||}$$

$$\gamma_1 > \gamma. \qquad (33)$$

Обозначим

$$k_2(\gamma_1-\gamma,\delta) = \sup_{t\ge\delta,p}(\frac{|p|}{t},e^{-2(\gamma_1-\gamma)(t_1-|p|)}),$$

будем иметь

$$|S_{o\lambda}(\omega;\lambda,\tau)| \le \frac{2k_1(\gamma,\delta)k_2(\gamma_1-\gamma,\delta)}{\delta^2}\|A_{ot_1}\|_{2,\gamma_1}. \qquad (34)$$

Аналогично из (31), (34) получаем

$$|(S_{o\lambda\lambda}(\omega;\lambda,\tau))| \le k_1(\gamma,\delta)\|\frac{\partial}{\partial t_1}(-\frac{p}{t_1}\frac{\partial}{\partial t_1}))(-\frac{p}{t_1}\frac{\partial}{\partial t_1})A_o\|_{1,\gamma}\le$$

$$\le\frac{k_1(\gamma,\delta)\cdot k_2(\gamma_1-\gamma,\delta)k_3(\gamma_2-\gamma_1,\delta)}{\delta^6}\|A_{ot_1}\|_{3,\gamma_2}. \qquad (35)$$

Заменяя γ_2 на γ, мы из неравенств (I8),(3I),(34),(35) получаем утверждение Леммы. Последнее утверждение легко проверяется непосредственным подсчетом.

З а м е ч а н и е 2. Оценки для $U_i(0,x)$ получаем аналогично через известные $B_i(t,x')$ $(i = 1,2,3)$.

Т е о р е м а 2. Имеет место следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^{3} |\Phi_i(x)| \le c(\gamma,\delta)(1+|x|)(\|A_{ot_1}\|_{3,\gamma} + \sum_{i=1}^{3} \|A_{ot_2}\|_{3,\gamma}).$$

Доказательство опускаем, так как оно есть непосредственное следствие леммы и равенств (24),(25). Для этого (25) нужно проинтегрировать по частям.

З а м е ч а н и е. Если $\bar{a}(t,x'),\bar{b}(t,x')$ известны лишь на конечном куске плоскости $R^2: x_3 = 0$, $|x'| < r < \infty$; $t > 0$, то задача сводится к предыдущей с помощью аналитического продолжения по одной переменной.

Автор благодарит своего научного руководителя члена-корреспондента АН СССР М.М.Лаврентьева за внимание к работе и полезные советы.

Л и т е р а т у р а

I. ЙОН Ф. Плоские волны и сферические средние. М., ИЛ, I958.

2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, I962.

3. КУРАНТ Р. Уравнения с частными производными. М., "Мир", I964.

4. КОСТРОВ Б.В. Об одной обратной задаче теории очага землетрясения.- "Изв. АН СССР. Физика Земли".№9, I968.

5. СЕДОВ Л.И. Механика сплошной среды,т.2, М., "Наука",I970.

6. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., ШАБАТ Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", I973.

7. ГАРИПОВ Р.М., КАРДАКОВ В.Б. Задача Коши для волнового уравнения с непространственным начальным многообразием.- ДАН СССР, т.2, № 5, I973.

В.Р.Кирейтов

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ II ж)

Раздел 7

Потенциальным телом будем называть пару (V,μ), состоящую из замкнутого ограниченного множества $V \subseteq E^3$ и, вообще говоря, обобщенной комплекснозначной функции μ на E^3, носитель которой содержится в множестве V; при этом множество V назовем носителем, а функцию μ - плотностью потенциального тела.

Для простоты будем считать, что носитель функции μ совпадает с множеством V.

Скалярное поле $U(q)$, порожденное парой (V,μ) вне множества V, определяем формулой

$$U(q) = k \iiint\limits_{E^3} \mu(p) \frac{\exp ikR_{pq}}{R_{pq}} dV_p, \quad k \text{ - волновое число,}$$

ж) Первую часть статьи см. в сб. Математические проблемы геофизики. вып.6 (II),1975.

dV_p – элемент объема пространства E^3 в точке $p \in E^3$.

Если $F = \{\Sigma, \mathscr{E}, W, \varkappa\}$ – о.с. и $V \subseteq F_+$, то полное F – изображение U_F пары (V, μ) определяем формулой

$$U_F(w) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Sigma U_\Sigma(q)\varkappa(q) \frac{\exp ik R_{qw}}{R_{qw}} (ik - \frac{1}{R_{qw}}) \cos\eta \, d\Sigma_q =$$

$$= \frac{k}{2\pi} \iiint_{E^3} \mu(p) \iint_\Sigma \frac{\exp ik (R_{pq} + R_{qw} + \chi(q))}{R_{pq} R_{qw}} (ik - \frac{1}{R_{qw}}) \times$$

$$\times \cos\eta \, d\Sigma_q \, dV_p,$$

смысл обозначений которой тот же, что и в соответствующей формуле для полного изображения в разделе 2.

Приведенное полное изображение $\mathcal{J}_F(w)$ и приведенное линеаризованное изображение $\mathfrak{J}_F(w)$ определяем формулами:

$$\mathcal{J}_F(w) = \iiint_{E^3} \mu(p) D(w,p) dV_p, \qquad (7.1)$$

$$\mathfrak{J}_F(w) = \iiint_{E^3} \mu(p) D_o(w,p) dV_p, \qquad (7.2)$$

$$D(w,p) = \frac{k}{2\pi} \frac{\exp ik R_{pq_o}}{R_{pq_o}} \iint_\Sigma H \cdot \exp ikL \, d\Sigma_q,$$

$$D_o(w,p) = \frac{ik^2}{2\pi} \frac{\exp ik R_{pq_o}}{R_{pq_o}} \iint_\Sigma \exp\text{-}ikT \, d\Sigma_q,$$

$$H = H(p,q,w) = \frac{R_{pq_o} R_{wq_o} \cos\eta}{R_{pq} R_{wq} \cos\eta_o} (ik - \frac{1}{R_{qw}}),$$

$$L = L(p,q,w) = R_{pq} - R_{pq_o} + R_{wq} - R_{wq_o} + \chi(q),$$

$$T = T(p,q,w) = \frac{1}{d_1} \langle q - q_0, v + w - q_0 + d_1 \frac{p - q_0}{\langle p - q_0, n_F\rangle} \rangle,$$

$$v = d_1 \operatorname{grad} \chi(q_0).$$

Вопрос об условиях близости функций $\mathcal{J}_F(w)$ и $\mathfrak{J}_F(w)$ решается в элементарных оценках таким же образом, как и в случае потенциальных поверхностей; как и в последнем случае можно убедиться в осуществимости условий, при которых линеаризованное изображение аппроксимирует на эффективном подмножестве полное изображение.

Линеаризованный вариант задачи определения потенциального тела (V,μ) по его изображениям формулируется так :

(V,μ) - потенциальное тело, $\{F^j\}_{j\in J}$ - семейство о.с., $V \subseteq F^j_+$ для каждого $j \in J$; какие параметры пары (V,μ) можно определить, если известны его линеаризованные изображения $\mathfrak{J}_{F^j}(w)$, на соответствующих эффективных областях W^j?

В зависимости от размерности тела V получаем 4 варианта указанной задачи - по одному в каждой из размерностей 0,I,2,3. В каждой размерности общая постановка задачи сохраняется, но при решении задачи приходится использовать различные приемы для разных размерностей. Если размерность $\dim V = 2$ и V является гладкой замкнутой поверхностью в E^3, то мы получаем случай потенциальных поверхностей простого слоя, который был рассмотрен в разделах 2-4 и поэтому в настоящем разделе не рассматривается.

Скажем, что потенциальное тело (V,μ) не содержит относительно о.с. F геометрически двойных точек, если разные точки из V имеют разные геометрические F - изображения, то есть, отображение геометрического F - изображения на множестве V взаимно-однозначно.

Пусть носитель потенциального тела (V,μ) является 0 - мерным множеством, то есть, $V = \{p_j\}_{1\le j\le n}, p_j \in E^3$, а плотность $\mu(p) = \sum_{j=1}^{n} c_j\delta(p - p_j)$, где c_j - некоторые константы, δ - δ -функция Дирака.

Из формулы 7.2 для линеаризованного изображения $\mathcal{J}_F(w)$ получаем в этом случае выражение

$$\mathcal{J}_F(w) = \frac{ik^2}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\exp ik R_{q_o p_j}}{R_{q_o p_j}} \iint_\Sigma \exp - ikT_j \, d\Sigma_q, \qquad (7.3)$$

где

$$T_j = T(p_j, q, w) = T_j(q,w).$$

Пусть тело (V,μ) не содержит двойных точек относительно о.с. F. Примем $v = 0$. В формуле 7.3 произведем подстановку $w_j = F(p_j)$, $l_j = \langle p_j - q_o, n_F\rangle$ и, вводя функцию

$$\phi(\bar{w}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \delta(\bar{w} - \bar{w}_j), \qquad (7.4)$$

где

$$\gamma_j = \frac{ik^2}{2\pi} c_j \frac{\exp ik R_{q_o p(\bar{w}_j, l_j)}}{R_{q_o p(\bar{w}_j, l_j)}} \quad \text{при } j = 1,2,\ldots,n,$$

получим из 7.3 представление функции $\mathcal{J}_F(w)$ в виде свертки

$$\mathcal{J}_F(w) = \iint_{\mathcal{E}} \phi(\bar{w})\Delta_o(w - \bar{w})d\Sigma_{\bar{w}}, \qquad (7.5)$$

здесь, как обычно,

$$\Delta_o(w - \bar{w}) = \iint_\Sigma \exp - \frac{ik}{d_1} \langle w - \bar{w}, q - q_o\rangle d\Sigma_q.$$

Пусть носитель потенциального тела (V,μ) представляет собой замкнутую гладкую кривую V в пространстве E^3. Положим $\mu(p) = a(p)\delta(V)$, где $a(p)$ – некоторая гладкая комплекснозначная функция на пространстве E^3, называемая при $p\in V$ линейной плотностью пары (V,μ), а $\delta(V)$ – δ – функция, сосредоточенная на кривой V (см. [3], гл. 3). Назовем потенциальное тело вида $(V,a(p)\delta(V))$ потенциальной гладкой кривой. Дифференциальная форма ω, соответствующая функции $\delta(V)$ в натуральной параметризации кривой V, имеет, как нетрудно вычислить, выражение $\omega = ds$. Для линеаризованного изображения потенциальной кривой $(V, a(p)\delta(V))$ из (7.2) получаем выражение

$$\mathcal{J}_F(w) = \frac{ik^2}{2\pi}\int_V a(p(s))\frac{\exp ik R_{q_op(s)}}{R_{q_op(s)}}\left(\iint_\Sigma \exp -ikTd\Sigma_q\right)ds, \tag{7.6}$$

где $$T = T(p(s),q,w).$$

Пусть потенциальная кривая $(V, a(p)\delta(V))$ не содержит двойных точек относительно о.с. F. Производя в интеграле 7.6 подстановку $\bar{w}(s) = F(p(s))$, $l(s) = \langle p(s) - q_o, n_F\rangle$ и используя обобщенную функцию $\delta(\bar{w} - \bar{w}(s))$ ($\langle\delta(\bar{w} - \bar{w}(s)),\varphi(\bar{w})\rangle = \varphi(\bar{w}(s))$ для основной функции φ), интеграл 7.6 можно переписать в виде

$$\mathcal{J}_F(w) = \frac{ik^2}{2\pi}\int_V\iint_{\mathcal{E}} \delta(\bar{w} - \bar{w}(s))\zeta(\bar{w},l(s))\left(\iint_\Sigma \exp -\frac{ik}{d_1}\langle q - q_o, v + w - \bar{w}\rangle d\Sigma_q\right)d\Sigma_{\bar{w}}ds,$$

где $$\zeta(\bar{w},l(s)) = a\left(q_o - \frac{(q_o - \bar{w})l(s)}{d_1}\right)d_1\frac{\exp \frac{ik}{d_1}|q_o - \bar{w}|l(s)}{|q_o - \bar{w}|l(s)}.$$

Полагая $$\phi(\bar{w}) = \int_V \zeta(\bar{w},l(s))\delta(\bar{w} - \bar{w}(s))ds, \tag{7.7}$$

последний интеграл записываем в виде свертки

$$\mathcal{J}_F(w) = \iint_{\mathcal{E}} \phi(\bar{w})\Delta_0(w - \bar{w})d\Sigma_{\bar{w}}. \qquad (7.8)$$

Как легко проверить, носитель обобщенной функции $\phi(\bar{w})$ содержится в множестве .

Рассмотрим теперь один класс трехмерных потенциальных тел. Будем предполагать, что носители потенциальных тел этого класса являются замкнутыми связными трехмерными областями с кусочно-гладкими границами, а плотности потенциальных тел - обычными интегрируемыми функциями на них.

При заданной о.с. $F = \{\Sigma, \mathcal{E}, W, \varkappa\}$, каждой точке $p \in F_+$ можно сопоставить пару $(\bar{w}, l)$, где $\bar{w} = F(p)$ - точка экрана $\mathcal{E}$, $l = \langle p - q_0, n_F\rangle$ - вещественное число. Очевидно, что соответствие $p \to (\bar{w}, l)$ является дифференцируемым гомеоморфизмом области F_+ на множество всех пар $(\bar{w}, l)$, $w \in \mathcal{E}$, $l > 0$. Выбирая на экране $\mathcal{E}$ какую-либо собственную систему координат, получим систему координат $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, l)$ в области F_+. Если заданы $(\bar{w}, l)$ - координаты точки $p \in F_+$, то сама точка определяется формулой

$$p = p(\bar{w}, l) = q_0 + \frac{(q_0 - \bar{w})l}{d_1}. \qquad (7.9)$$

Для элементов объема в разных системах координат получаем соотношения

$$dV = \frac{l^2}{d_1^2} d\Sigma_{\bar{w}}dl, \quad d\Sigma_{\bar{w}}dl = \frac{d_1^2}{\langle p - q_0, n_F\rangle^2} dV. \qquad (7.10)$$

Заметим также, что $R_{q_0 p(\bar{w}, l)} = \dfrac{|q_0 - \bar{w}|\, l}{d_1}$.

В системе координат $(\bar{w}, l)$ выражения 7.1, 7.2 можно записать в виде

$$\mathcal{J}_F(w) = \iiint_{E^3} \Phi(\bar{w}, l)\Delta(w, \bar{w}, l)d\Sigma_{\bar{w}}dl, \qquad (7.11)$$

$$\mathcal{J}_F(w) = \iiint\limits_{E^3} \Phi(\bar{w},l)\Delta_o(v + w - \bar{w})d\Sigma_{\bar{w}}dl, \qquad (7.12)$$

где

$$\Phi(\bar{w},l) = \mu(p(\bar{w},l)) \frac{\exp ik R_{q_o p(\bar{w},l)}}{R_{q_o p(\bar{w},l)}} l^2 =$$

$$= \frac{d_1 l\mu(p(\bar{w},l))}{R_{q_o\bar{w}}} \exp \frac{ik}{d_1} R_{q_o\bar{w}} l, \qquad (7.13)$$

$$\Delta(w,\bar{w},l) = \frac{k}{2\pi d_1^2} \iint\limits_{\Sigma} H(p(\bar{w},l)),q,w)\exp ikL(p(\bar{w},l),q,w)d\Sigma_q,$$

$$\Delta_o(v + w - \bar{w}) = \frac{ik^2}{2\pi d_1^2} \iint\limits_{\Sigma} \exp - \frac{ik}{d_1} \langle q - q_o, v + w - \bar{w}\rangle d\Sigma_q.$$

Формулу 7.12 для линеаризованного изображения потенциального тела (V,μ) можно записать также в виде

$$\mathcal{J}_F(w) = \iint\limits_{\mathcal{E}} \phi(\bar{w})\Delta_o(v + w - \bar{w})d\Sigma_{\bar{w}}, \qquad (7.14)$$

где

$$\phi(\bar{w}) = \int\limits_{V\cap L(\bar{w},q_o)} \Phi(\bar{w},l)dl = \int\limits_{V\cap L(\bar{w},q_o)} \frac{d_1 l\mu(p(\bar{w},l))}{|q_o-\bar{w}|} \exp(\frac{ikl|q_o-w|}{d_1})dl, \qquad (7.15)$$

а $V \cap L(\bar{w},q_o)$ – линейное множество, получающееся пересечением луча, выходящего из точки q_o в направлении вектора $q_o - \bar{w}$ с носителем V. Функция $\phi(\bar{w})$ определена на экране $\mathcal{E}$ и ее носитель $\operatorname{supp} \phi(w) \subseteq F(V)$. Если функция $\mu(p(\bar{w},l))$ от l не зависит (например, если $\mu = \text{const}$)то

$$\phi(\bar{w}) = \frac{d_1\mu(p(\bar{w}))}{R_{q_o\bar{w}}} \int_{V\cap L(\bar{w},q_o)} l \exp\left(\frac{ikl R_{q_o\bar{w}}}{d_1}\right) dl, \quad (7.16)$$

где функция под интегралом имеет первообразную $F(\bar{w},l)$ по l:

$$F(\bar{w},l) = \frac{d_1}{ikR_{q_o\bar{w}}}\left(l - \frac{d_1}{ikR_{q_o\bar{w}}}\right)\exp\left(\frac{iklR_{q_o\bar{w}}}{d_1}\right). \quad (7.17)$$

Функцию $\phi(\bar{w})$, определенную в соответствующих размерностях формулами (7.4), (7.7), (7.I5), назовем идеальным F - изображением потенциального тела (V,μ). Идеальное изображение более непосредственно связано с потенциальным телом (V,μ) нежели исходное F - изображение $\mathfrak{F}_F$; его можно интерпретировать как изображение тела (V,μ) с помощью некоторой δ - образной п.с. в смысле работы [I].

Раздел 8

В этом разделе приводятся некоторые результаты, относящиеся к задаче определения параметров потенциального тела по его линеаризованным изображениям с помощью семейства о.с., различным образом расположенных в окружающем пространстве. В 0-мерном и I-мерном случаях находятся условия, при которых однозначно определяются и носитель V и плотность μ потенциального тела (теоремы 3-5); в трехмерном случае приводятся некоторые простейшие частные решения задачи и выделяется связь с задачами интегральной геометрии. Вообще, приводимые в этом разделе факты достаточно элементарны и могут рассматриваться скорее как указания на возможность такого рода формулировок; полное изложение этих вопросов будет дано автором в другой работе. На протяжении всего раздела рассматриваются о.с. со сферическими линзами на диафрагме, и, следовательно, параметр $v = d_1 \mathrm{grad}\, \chi(q_o) = 0$.

Дискретное потенциальное тело

Носитель $V = \{p_j\}_{1 \le j \le n}$ – конечное множество точек $p_j \in E^3$, плотность $\mu(p) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta(p-p_j)$, $c_j \ne 0$ при $j = 1,2,\dots,n$.

Предполагаем, что множество V не содержит геометрически двойных точек относительно рассматриваемых о.с..

Пусть $\{F^j\}_{j \in J}$ – семейство о.с. Семейство $\{w^j\}_{j \in J}$ точек $w^j \in \mathcal{E}^j$ назовем геометрически согласованным, если существует точка $p \in \bigcap_{j \in J} F^j_+$, $F^j(p) = w^j$, $j \in J$; точку p назовем в этом случае стереопрообразом семейства $\{w^j\}_{j \in J}$.

Стереопрообраз геометрически согласованного семейства точек не является, вообще говоря, одноточечным множеством. Это очевидно, если семейство $\{F^j\}_{j \in J}$ содержит только одну о.с., или если все о.с. семейства имеют общую точку q_0^j. Рассмотрим случай двухэлементного семейства $\{F^1, F^2\}$, для которого $q_0^1 \ne q_0^2$. В этом случае может существовать не более одной геометрически согласованной пары (w^1, w^2), $w^j \in \mathcal{E}^j$, $j = 1,2$, с неединственным стереопрообразом. Для существования такой особой пары необходимо и достаточно, чтобы выполнялось какое-либо из соотношений $q_0^1 \in F^2_+$, $q_0^2 \in F^1_+$; тогда пара (w^1, w^2) определяется формулами $w^1 = F^1(q_0^2)$, $w^2 = F^2(q_0^1)$.

Для случая двух о.с. F^1, F^2 дадим критерий согласованности пары точек $w^1 \in \mathcal{E}^1$, $w^2 \in \mathcal{E}^2$, использующий только параметры о.с. и геометрических изображений рассматриваемых точек. Примем обозначения: $a_1 = w^1 - q_0^1$, $a_2 = w^2 - q_0^2$, $b = q_0^2 - q_0^1$, и будем считать, что $a_1 \times a_2 \ne 0$, $b \ne 0$. В этих обозначениях условие $a_1 \times a_2 \ne 0$ является необходимым и достаточным условием единственности стереопрообраза для геометрически согласованной пары (w^1, w^2).

У т в е р ж д е н и е 8.I. Точки $w^1 \in \mathcal{E}^1$, $w_2 \in \mathcal{E}^2$ геометрически согласованы, если и только если,

α) $(a_1, a_2, b) = 0$,

β) $(b, a_2, a_1 \times a_2) < 0$, $(b, a_1, a_1 \times a_2) > 0$, где

$(x, y, z) = \langle x, y \times z \rangle$ – смешанное произведение векторов x, y, z.

Стереопрообраз согласованной пары точек w^1, w^2 определяется формулами:

$$p = q_o^1 + \frac{(b, a_2, a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|^2} a_1 = q_o^2 - \frac{(b, a_1, a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|^2} a_2 .$$

Доказательство. Следует из формул аналитической геометрии.

Если $\{w_o^j\}_{j \in \mathcal{J}}$ – семейство точек $w_o^j \in \mathcal{E}^j$, $\{\gamma_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ – набор комплексных чисел, то семейство пар $\{(w_o^j, \gamma_j)\}_{j \in \mathcal{J}}$ назовем согласованным, если существует одноточечное потенциальное тело $(p_o, c\delta(p - p_o))$, для которого $\phi^j(w^j) = \gamma_j \delta(w^j - w_o^j)$, $j \in \mathcal{J}$; здесь $\phi^j(w^j)$ идеальное F^j – изображение тела $(p_o, c\delta(p-p_o))$. Тело $(p_o, c\delta(p - p_o))$ назовем в этом случае стереопрообразом семейства $\{w^j, \gamma_j)\}_{j \in \mathcal{J}}$.

Если семейство $\{F^j\}_{j \in \mathcal{J}}$ содержит хотя бы две о.с., для которых $q_o^{j_1} \neq q_o^{j_2}$, то стереопрообраз любого согласованного семейства точек единственен; в противном случае могут существовать согласованные семейства, обладающие множеством стереопрообразов.

Пользуясь обозначениями утверждения 8.I, дадим критерий согласованности двух пар (w^1, γ_1), (w^2, γ_2), использующий только параметры о.с. и изображений соответствующих пар.

Утверждение 8.2. Пара (w_o^1, γ_1), (w_o^2, γ_2) согласована, если и только если:

а) точки w_o^1, w_o^2 геометрически согласованы,

в) $$\gamma_1 \frac{\exp ikQ_2}{Q_2} = \gamma_2 \frac{\exp ikQ_1}{Q_1},$$ где

$$Q_j = \frac{(b, a_{3-j}, a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|^2} |a_j|, \ j = 1,2.$$

Если $a_1 \times a_2 \neq 0$, то стереопрообраз $(p_o, c\delta(p-p_o))$ согласованной пары (w_o^1, γ_1), (w_o^2, γ_2) определяется формулами:

$$p = q_o^1 + \frac{Q_1}{|a_1|} a_1 = q_o^2 - \frac{Q_2}{|a_2|} a_2,$$

$$c = \frac{\gamma_1}{\frac{ik^2}{2\pi} \frac{\exp ikQ_1}{Q_1}} = \frac{\gamma_2}{\frac{ik^2}{2\pi} \frac{\exp ikQ_2}{Q_2}}.$$

Доказательство. Если точки w_o^1, w_o^2 геометрически согласованы, то для их стереопрообраза p_o имеем, согласно утверждению 8.I, формулы $|p_o - q_o^1| = Q_1$, $|p_o - q_o^2| = Q_2$.

Если поместить в точку p_o точечный источник с мощностью излучения $c = \frac{\gamma_1}{\frac{ik^2}{2\pi} \frac{\exp ikQ_1}{Q_1}} = \frac{\gamma_2}{\frac{ik^2}{2\pi} \frac{\exp ikQ_2}{Q_2}}$, то F^j - изображение $\mathfrak{J}_{F^j}$ потенциального тела $(p_o, c\delta(p-p_o))$ выразится формулой (7.3):

$$\mathfrak{J}_{F^j}(w^j) = \frac{ik^2}{2\pi} c \frac{\exp ikR_{q_o^j p_o}}{R_{q_o^j p_o}} \iint_{\Sigma} \exp{-ikT_j} d\Sigma_q,$$

$$j = 1,2.$$

Следовательно, в этом случае $\phi^j(w^j) = \gamma_j\delta(w^j - w_o^j), j = 1,2,$ и тело $(p_o, c\delta(p - p_o))$ является стереопрообразом пары (w_o^1,γ_1), (w_o^2,γ_2).

Подобным образом доказывается и вторая часть утверждения.

Пусть $\{F^j\}_{j\in\mathcal{J}}$ - семейство о.с., (V,μ) - дискретное потенциальное тело, $V = \{p_k\}_{1\le k\le n}$,

$$\mu(p) = \sum_{k=1}^{n} c_k\delta(p - p_k),\ F^j(V) \subseteq W^j.$$

Предположим, что семейство $\{\phi^j(w^j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ идеальных F^j - изображений тела (V,μ) обладает следующими свойствами: любые два согласованных семейства пар $\{(w^j_{k_j},\gamma^j_{k_j})\}_{j\in\mathcal{J}}$, $\{(w^j_{l_j},\gamma^j_{l_j})\}_{j\in\mathcal{J}}$ либо полностью совпадают, либо не пересекаются (напомним, что $\phi^j(w^j) = \sum_{m=1}^{n}\gamma^j_m\delta(w^j - w^j_m), j \in \mathcal{J}$).

При этих условиях имеем следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Потенциальное тело (V,μ) однозначно определяется заданием семейства $\{\mathfrak{I}_{F^j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ своих F^j - изображений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство F^j - изображений $\{\mathfrak{I}_{F^j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ однозначно определяет семейство $\{\phi^j(w^j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ идеальных F^j - изображений тела (V,μ). Из множества всех пар (w^j,γ_j), где w^j - точка носителя функции ϕ^j, а γ^j - коэффициент, с которым δ -функция, сосредоточенная в точке w^j, входит в выражение для ϕ^j, выделим все согласованные семейства пар $\{(w^j_{k_j},\gamma^j_{k_j})\}_{j\in\mathcal{J}}$. Каждое согласованное семейство определяет соответствующий ей стереопрообраз и, в силу условий утверждения, на каждую пару $\{(w^j_{k_j},\gamma^j_{k_j})\}_{j\in\mathcal{J}}$ приходится в точности один такой стереопрообраз. Отсюда следует, что множество всех стереопрообразов согласованных семейств образует потенциальное тело, совпадающее с телом (V,μ). Утверждение доказано.

Потенциальная гладкая кривая

Носитель потенциального тела – гладкая замкнутая кривая V, плотность $\mu(p) = a(p)\delta(V)$, где $a(p)$ – линейная плотность потенциальной кривой, не обращающаяся в 0 нигде на V.

Кривую V назовем простой относительно о.с. $F = \{\Sigma, \mathcal{E}, W, \varkappa\}$, если:

а) V не содержит двойных точек относительно F;

в) плоская кривая $F(V) \subseteq \mathcal{E}$ допускает регулярную параметризацию;

с) кривая $F(V)$ не имеет точек самопересечения.

Нетрудно показать, что простая кривая относительно некоторой о.с. является регулярной кривой.

Будем предполагать, что носитель потенциальной кривой является простой кривой относительно рассматриваемых о.с.

Поскольку большая часть доказываемых ниже утверждений имеет чисто геометрический характер, то мы пользуемся понятием проекционной схемы (п.с.), включающей в себя лишь некоторые геометрические элементы о.с. По определению, п.с. $F = \{q_o, \mathcal{E}, W\}$, где q_o – центр диафрагмы, $\mathcal{E}$ – экран, W – эффективная область о.с. (относительно п.с. см. [I]).

Напомним, что символом F_X, где $X \subseteq \mathcal{E}$ – подмножество экрана $\mathcal{E}$, обозначается множество всех $x \in F_+$, для которых $F(x) \in X$.

Пусть $F = \{q_o, \mathcal{E}, W\}$ – п.с., $K \subseteq \mathcal{E}$ – некоторая замкнутая кривая на экране $\mathcal{E}$. Предположим, что в окрестности U точки $w \in K$ (в топологии экрана $\mathcal{E}$) кривая K допускает регулярную параметризацию $w(\sigma)$, $\sigma \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $w(0) = w$. Параметризуем часть $F_U \subseteq F_K$ конической поверхности F_K, полагая

$$p(\sigma, l) = q_o + \frac{(q_o - w(\sigma))l}{d_1},$$ где параметры σ, l

изменяются в пределах: $-\varepsilon < \sigma < \varepsilon$, $0 < l < \infty$. Из формул

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\frac{1}{d_1}\frac{\partial w}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{q_o - w(\sigma)}{d_1},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} \times \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{d_1^2}(q_0 - w(\sigma)) \times \frac{\partial w}{\partial \sigma} = \frac{1}{d_1}(p(\sigma,l) - q_0) \times \frac{\partial w}{\partial \sigma} \tag{8.1}$$

следует, что параметризация $p(\sigma,l)$ является регулярной при всех допустимых значениях параметров σ, l.

Пусть F^1, F^2 – две п.с., K^1, K^2 – две замкнутые кривые на экранах $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$ соответственно. Предположим, что $w^1 \in K^1$, $w^2 \in K^2$ – геометрически согласованные точки и $w^i(\sigma_i)$, $-\varepsilon < \sigma_i < \varepsilon$ – регулярная параметризация кривой K^i в окрестности U^i точки w^i на экране $\mathcal{E}^i$.

Согласно вышесказанному, часть $F^i_{U^i}$ конической поверхности $F^i_{K^i}$ допускает регулярную параметризацию $p(\sigma_i, l_i)$, $i = 1,2$, и, следовательно, в каждой точке p поверхности $F^i_{U^i}$ определен нормальный вектор n^i_p.

Векторное поле $\xi^{i,3-i}(w^i)$ на экране $\mathcal{E}^i$ п.с. F^i определим формулой

$$\xi^{i,3-i}(w^i) = q_0^{3-i} - q_0^i - \frac{\langle q_0^{3-i}, n_{F^i}\rangle}{d_1}(q_0^i - w^i),\quad w^i \in \mathcal{E}^i,\ i = 1,2.$$

Пару точек (w^1, w^2), $w^1 \in K^1$, $w^2 \in K^2$ назовем особой, если касательный вектор кривой K^i в точке w^i коллинеарен вектору $\xi^{i,3-i}(w^i)$, $i = 1,2$.

Утверждение 8.3. Нормальные векторы n^1_p, n^2_p к поверхностям $F^1_{U^1}$, $F^2_{U^2}$ соответственно коллинеарны в точке $p \in F^1_{U^1} \cap F^2_{U^2}$, если и только если пара точек $(F^1(p), F^2(p))$ является особой.

Доказательство. Если $p(\sigma_i, l_i)$ – параметризация поверхности $F^i_{U^i}$, то, согласно формуле 8.I,

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_i} \times \frac{\partial p}{\partial l_i} = \frac{1}{d_i}(p(\sigma_i, l_i) - q_0^i) \times \frac{\partial w^i}{\partial \sigma_i},\quad i = 1,2.$$

Нормали к поверхностям $F^i_{U^i}$ в точке $p \in F^1_{U^1} \cap F^2_{U^2}$ коллинеарны, если и только если в точке p коллинеарны векторы $r_i = \frac{\partial p}{\partial \sigma_i} \times \frac{\partial p}{\partial l_i}, i = 1,2$. Но $r_1 \times r_2 = \frac{1}{d_1 d_2}(q_0^1 - p(\sigma_1, l_1) \times$

$$\times \frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1}) \times (q_0^2 - p(\sigma_2, l_2)) \times \frac{\partial w^2}{\partial \sigma_2}) = \frac{1}{d_1 d_2}((\frac{\partial w^2}{\partial \sigma_2}, q_0^1 - p, \frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1})(q_0^2 - p) -$$

$$- (q_0^2 - p, q_0^1 - p, \frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1})\frac{\partial w^2}{\partial \sigma_2}),$$

где $(x, y, z) = \langle x, y \times z \rangle$ – смешанное произведение векторов x, y, z. Отсюда вытекает, что векторы r_1, r_2 коллинеарны, если и только если $(\frac{\partial w^2}{\partial \sigma_2}, q^1 - p, \frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1}) = 0$ и $(q_0^2 - p, q_0^1 - p, \frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1}) = 0$. Рассмотрим последнее условие. Так как $q_0^2 - p = (q_0^2 - q_0^1) + (q_0^1 - p)$ и вектор $q_0^1 - p$ коллинеарен вектору $q_0^1 - F^1(p)$, то рассматриваемое условие выполнено, если и только если $\frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1} = \alpha(q_0^2 - q_0^1) + \beta(q_0^1 - w^1)$, где α, β – некоторые постоянные коэффициенты. Из условия $\langle \frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1}, n_{F^1} \rangle = 0$ следует, что

$$\frac{\partial w^1}{\partial \sigma^1} = \alpha(q_0^2 - q_0^1 - \frac{\langle q_0^2 - q_0^1, n_{F^1} \rangle}{d_1}(q_0^1 - w^1)),$$

т.е. вектор $\frac{\partial w^1}{\partial \sigma^1}$ коллинеарен векторному полю $\xi^1(w^1)$ в точке $w^1 = F^1(p)$. Проводя такого рода рассуждения и для п.с. F^2, заключаем, что векторы r_1, r_2 коллинеарны, если и только если векторы $\frac{\partial w^1}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial w^2}{\partial \sigma_2}$ коллинеарны векторным полям $\xi^1(w^1)$, $\xi^2(w^2)$ в точках $w^1 = F^1(p), w^2 = F^2(p)$ соответственно. Утверждение доказано.

Пусть $F^i, i = 1,2,3$ – три п.с. $F^i = \{q_0^i, б^i, w^i\}$, объективы q_0^i которых не лежат на одной прямой.

У т в е р ж д е н и е 8.4. Если точка $p \in \bigcap_{i=1}^{3} F_+^i$ не принадлежит плоскости, проходящей через точки q_0^1, q_0^2, q_0^3, то векторные поля $\xi^{1,2}(w^1)$, $\xi^{1,3}(w^1)$ в точке $w^1 = F^1(p)$ линейно-независимы.

Доказательство. Линейная зависимость полей $\xi^{1,2}(w^1)$ и $\xi^{1,3}(w^1)$ в точке $w^1 = F^1(p)$ означала бы линейную зависимость векторов $q_0^2 - q_0^1, q_0^3 - q_0^1, p - q_0^1$. Но последнее возможно, если и только если точка p лежит в плоскости точек q_0^1, q_0^2, q_0^3. Значит, при выполнении условий утверждения векторные поля $\xi^{1,2}$, $\xi^{1,3}$ в точке $w^1 = F^1(p)$ линейно-независимы. Утверждение доказано.

Предположим, что поверхности $F^1_{U^1}$ и $F^2_{U^2}$ имеют общую точку p и что в этой точке нормальные векторы указанных поверхностей коллинеарны; пусть, кроме того, векторы $q_0^1 - p$, $q_0^2 - p$ линейно-независимы.

Утверждение 8.5. Если точка $p \in F^1_{U^1} \cap F^2_{U^2}$ не является точкой уплощения для каждой из поверхностей $F^1_{U^1}$, $F^2_{U^2}$, то либо точка p является изолированной в множестве $F^1_{U^1} \cap F^2_{U^2}$, либо некоторая окрестность множества $F^1_{U^1} \cap F^2_{U^2}$ представляется в виде объединения двух гладких кривых, имеющих разные касательные прямые в единственной своей общей точке p, либо, наконец, множество $F^1_{U^1} \cap F^2_{U^2}$ является гладкой кривой в окрестности точки p.

Доказательство. Выберем прямоугольную систему координат x, y, z в пространстве E^3, начало которой расположено в точке p, а направляющий орт оси Z совпадает с общей нормалью к указанным поверхностям в точке p. В окрестности Q начала координат на плоскости xy поверхность $F^i_{U^i}$ можно отождествить с графиком некоторой гладкой функции $z = f_i(x,y), i=1,2$. При этом, в силу построений, функции f_i таковы, что $f_i(0,0) = 0, \frac{\partial f_i}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(0,0) = 0$.

Проекция пересечения поверхностей $F^1_{U^1} \cap F^2_{U^2}$ на плоскость x, y в окрестности Q описывается уравнением $f_1(x,y) - f_2(x,y)$, т.е. совпадает с поверхностью нулевого уровня функции $h(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$. Из свойств функций f_i и предположений утверждения следует, что функция h имеет в начале координат невырожденную критическую точку и, согласно лемме Морса (см. [5]), в некоторой криволинейной системе координат u, v на плоскости x, y функция h допускает представление $h(u,v) = \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v^2$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i=1,2$ и $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0$. Отсюда доказываемое утверждение вытекает непосредственно.

Утверждение. 8.6. Точка $p \in F_U$ является точкой уплощения поверхности F_U, если и только если точка $F(p) \in U \subseteq K$ является точкой спрямления кривой K.

Доказательство. Пусть точка $F(p) \in U$ является точкой спрямления кривой K и $w(\sigma)$ – регулярная параметризация окрестности U. Вычислим нормальную кривизну регулярной кривой V, проходящей через точку $p \in F_U$ в направлении вектора τ. Если τ коллинеарен вектору $q_0 - p$, то нормальная кривизна V в p равна, очевидно, нулю. Если же τ не коллинеарен вектору $q_0 - p$, то параметризация $p(\sigma) = q_0 + \dfrac{l(\sigma)(q_0 - w(\sigma))}{d_1}$ кривой V в окрестности точки p, σ – натуральный параметр на K в окрестности точки $F(p)$, является регулярной. Так как $\dfrac{d^2p(\sigma)}{d\sigma^2} = \dfrac{1}{d_1}\left(\dfrac{d^2 l}{d\sigma^2}(q_0 - w(\sigma)) - 2\dfrac{dl}{d\sigma}\dfrac{dw(\sigma)}{d\sigma} + l\dfrac{d^2w(\sigma)}{d\sigma^2}\right)$ и нормальный вектор к F_U в p коллинеарен вектору $(q_0 - p(\sigma)) \times \dfrac{dw}{d\sigma}$, то нормальная кривизна кривой V в точке p пропорциональна числу $\left\langle \dfrac{d^2p}{d\sigma^2}, (q_0 - w(\sigma)) \times \dfrac{dw}{d\sigma} \right\rangle = l \left\langle \dfrac{d^2w(\sigma)}{d\sigma^2}, (q_0 - p(\sigma)) \times \dfrac{dw}{d\sigma}(\sigma) \right\rangle$. Но $\dfrac{d^2w(\sigma)}{d\sigma^2} = -k\nu$, где k – кривизна, а ν – нормаль кривой K в точке $F(p)$. В силу предположения, $k = 0$ и, следовательно, нормальная кривизна кривой V в p равна 0. Таким образом, для любого направления τ нормальная кривизна поверхности F_U в точке p в направлении τ равна 0, т.е. p – точка уплощения поверхности F_U. Такого же рода рассуждениями доказывается и вторая часть утверждения.

Рассмотрим потенциальную гладкую кривую $(V,\mu)=(V,a(p)\delta(V))$ и две о.с. $F^j=\{\Sigma^j, \mathcal{E}^j, w^j, \varkappa^j\}$, $j=1,2$ относительно которых будем предполагать, что

а) $\operatorname{supp}\mu = V \subseteq F^1_{W^1} \cap F^2_{W^2}$,

в) векторы $q^1_0 - p$, $q^2_0 - p$ линейно-независимы для каждой точки $p \in V$.

Символом $\mathcal{J}_j(w^j)$ обозначим линеаризованное F^j-изображение $\mathcal{J}_{F^j}(w^j)$ кривой (V,μ) с помощью о.с. F^j. Предположим, что носители K^1, K^2 идеальных изображений, соответствующих изображениям $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ обладают следующими свойствами:

α) существует лишь конечное семейство особых пар геометрически согласованных точек (w^1,w^2), $w^j \in K^j$, $j=1,2$,

β) если (w^1,w^2) – особая пара, то $k^2_1(w^1)+k^2_2(w^2) \neq 0$, где $k_j(w^j)$ – кривизна кривой K^j в точке w^j, $j=1,2$.

Пусть p_0 – некоторая точка кривой V, для которой пара $(F^1(p_0), F^2(p_0))$ не является особой.

В этих предположениях имеет место

Т е о р е м а 4. Потенциальная кривая (V,μ) однозначно определяется заданием двух своих F^j – изображений $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ и точки $p_0 \in V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f^j(w^j)=0$ – регулярное неявное уравнение кривой K^j на экране $\mathcal{E}^j$. Для отыскания кривой V можно воспользоваться уравнениями:

$$f^1(F^1(p))=0,$$
$$f^2(F^2(p))=0,\ p \in F^1_{W^1} \cap F^2_{W^2}. \tag{8.2}$$

Кривая V содержится, очевидно, в множестве решений этой системы уравнений, но здесь могут быть и лишние решения.

Нетрудно проверить, что если p – вырожденная точка системы уравнений 8.2 (то есть точка, в которой матрица Якоби имеет ранг меньший 2), то геометрически согласованная пара точек $(F^1(p), F^2(p))$ будет особой. Следовательно, из условий теоремы вытекает, что система 8.2 имеет конечное число вырожденных точек.

Решение системы 8.2 представляет собой в этом случае объединение конечного числа замкнутых гладких отрезков кривых – регулярных ветвей решения, общими точками которых являются лишь их граничные точки.

На основании всего сказанного дадим правило выделения кривой V из совокупности всех решений системы уравнений 8.2.

Вначале найдем регулярную ветвь Γ_1 решения системы 8.2, содержащую точку p_0. Пусть p_1 – один из концов найденной регулярной дуги. Следующий шаг состоит в нахождении регулярной ветви Γ_2 решения, для которой точка p_1 – граничная точка и предельное положение касательной прямой при движении внутренней точки дуги Γ_1 к граничной точке p_1 совпадает с предельным положением касательной прямой, полученным при движении внутренней точки дуги Γ_2 к той же точке. Согласно вышесказанному, ветвь Γ_2 определяется этими условиями однозначно. После этого, используя такого рода условия, переходим к определению дуги Γ_3 и т.д. Проделав конечное число шагов, получим замкнутую кривую, совпадающую, очевидно, с исходной кривой V.

Если кривая V найдена, то плотность μ потенциальной кривой (V,μ) определяется однозначно уравнением 7.4. Доказательство теоремы закончено.

Пусть $F^j = \{\Sigma^j, \mathcal{E}^j, W^j, \varkappa^j\}$ – три о.с., (V,μ) – гладкая потенциальная кривая и пусть выполнены условия:

А) $\operatorname{supp}\mu = V \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{3} F_{W^j}$,

в) векторы $q_0^1 - p, q_0^2 - p, q_0^3 - p$ линейно-независимы для каждой точки $p \in V$.

Т е о р е м а 5. Потенциальная кривая (V,μ) однозначно определяется заданием трех своих F^j– изображений $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ и некоторой точки $p_0 \in V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если K^j – носитель идеального F^j– изображения $\phi^j(w^j)$, соответствующего F^j – изображению $\mathcal{F}_j$ и $f_j(w^j) = 0$ – регулярное неявное уравнение кривой K^j на экране $\mathcal{E}^j$, $j=1,2,3$, то для отыскания кривой V имеем систему уравнений

$$f_j(F^j(p)) = 0,\ j = 1,2,3,\ p \in \bigcap_{j=1}^{3} F_+^j. \qquad (8.3)$$

Легко проверяется, что если p – вырожденная точка этой системы (т.е. точка, в которой ранг матрицы Якоби меньше 2), то любая пара из тройки точек $F^1(p)$, $F^2(p)$, $F^3(p)$ является особой. Но, согласно утверждению 8.4, при выполнении условий теоремы это невозможно. Следовательно, ранг системы уравнений 8.3 не меньше 2 и, поэтому, кривая V однозначно определяется как непрерывная ветвь решения системы 8.3, проходящая через точку p_0.

При заданном V плотность μ однозначно определяется уравнением 7.4. Теорема доказана.

Трехмерные выпуклые потенциальные тела

I) Носитель V – выпуклая замкнутая гладкая область, плотность μ – постоянная на V заданная функция (будем, для простоты, считать $\mu \equiv 1$ на V).

При заданных о.с. F и F – изображении $\mathcal{J}_F(w)$ потенциального тела (V,μ) выражение 7.I4 можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\phi(w)$ с ядром $\Delta_0(v + w - \bar{w})$ (считаем, что $F(V) \subseteq W$). Разрешая это уравнение, полагаем, что функция $\phi(\bar{w})$ определена. В рассматриваемом нами случае выражение (7.I5), связывающее параметры тела (V,μ) с идеальным F- изображением $\phi(\bar{w})$, принимает вид

$$\phi(\bar{w}) = \frac{d_1}{R_{q_0\bar{w}}} (F(\bar{w},l_1)-F(\bar{w},l_2)), \qquad (8.4)$$

где $F(w,l)$ – функция 7.I6, $l_i = \langle p_i - q_0, n_F\rangle$, а $P_i, i=1,2,$ – граничные точки отрезка $V \cap L(\bar{w},q_0)$ и точка p_1 ближайшая из них к точке q_0. Уравнение 8.4 однозначно разрешимо относительно переменной $l_2(l_1)$ при заданном значении l_1 (l_2) (свойство I). Отсюда следует

Утверждение 8.I. Если задано F- изображение $\mathcal{J}_F(w)$ тела $(V,1)$ и видимая часть $\alpha_V(q_0)$ границы ∂V носителя

V (дополнение к видимой части), то дополнение к видимой части $\partial V \setminus \alpha_V(q_o)$ (сама видимая часть) определяется однозначно. Определение множества $\alpha_V(q_o)$ см. в [2].

Если исходить из заданного семейства F^j - изображений тела $(V,1)$ с помощью семейства о.с. $\{F^j\}_{j\in J}$, различным образом расположенных в пространстве E^3, то свойство I позволяет строить некоторые аппроксимации тела V изнутри, при условии, что известна хотя бы одна точка на границе тела V.

Укажем процедуру, приводящую к построению выпуклого тела, вписанного в тело V и при определенных условиях воспроизводящего форму тела V.

Пусть $\{F^j\}_{j\in J}$ - семейство о.с., $V \subseteq F^j_+$ для всех $j \in J$, символом Q обозначим множество $\{q^j_o\}_{j\in J}$.

Пусть заданы семейство $\{\mathfrak{J}_{F^j}\}_{j\in J}$, F^j - изображений тела $(V,1)$ и некоторая точка $q_o \in \partial V$. Используя свойство I уравнения (8.4) находим, что при этих условиях вполне определено множество $c_{q_o}Q \cap \partial V$, где $c_{q_o}Q$ - конус с вершиной в точке q_o и образующим множеством Q. Выпуклая оболочка этого множества лежит в множестве V и обладает внутренними точками, если в множестве Q найдется тройка точек, несущая плоскость которой не пересекается с множеством V. Если $q' \in c_{q_o}Q \cap \partial V$ и $q' \neq q_o$, то определяется множество $c_{q'}Q \cap \partial V$; по точке $q'' \in c_{q'}Q \cap \partial V$, $q'' \neq q'$ определяется множество $c_{q''}Q \cap \partial V$ и т.д., и каждое вновь получающееся множество отлично от предыдущего. Выпуклая оболочка объединения всех строящихся таким образом множеств лежит в V и является вписанным в V выпуклым подмножеством. При некоторых ограничениях на взаиморасположение множеств Q и V это вписанное в V подмножество может иметь характеристики, близкие к характеристикам носителя V.

Заметим, что при малых угловых размерах тела V относительно о.с. F^j, $j \in J$ хорошей оценкой сверху для множества V может служить множество $\bigcap_{j\in J} F^j_{\mathrm{supp}\phi^j(w^j)}$, где $F^j_{\mathrm{supp}\phi^j(w^j)}$ - множество точек из F^j_+, геометрические изображения которых лежат в множестве $\mathrm{supp}\phi^j(w^j)$.

2. Носитель V - произвольная замкнутая область, μ - произвольная интегрируемая на V функция.

При заданных о.с. F и F - изображении $\mathfrak{J}_F$ тела (V,μ) функция $\phi(\bar{w})$ определяется однозначно и, следовательно, определяется множество $F(V)$ - геометрическое изображение множества V. Это дает возможность из чисто геометрических соображений определять приближенные параметры носителя V. Действительно, для любого семейства о.с. $\{F^j\}_{j\in J}$ множество V лежит в пересечении конусов с вершинами в точках q_o^j и образующими множествами $F^j(V)$. При малых поперечных размерах тела V или большой удаленности его от о.с. задание нескольких его геометрических изображений с помощью "хорошо" расположенных о.с. может локализовать тело в некотором, достаточно близком к V, объеме.

Кроме того, если принять возможность пользоваться континуальным семейством о.с. (например, считать каждую точку объемлющего V пространства объективом некоторой о.с.), то задача определения параметров тела (V,μ) (или самого (V,μ)) становится близкой к одному классу задач интегральной геометрии и, вероятно, может решаться средствами последней. Также, если носитель V тела (V,μ) задан и задано семейство F-изображений тела (V,μ), то задача определения плотности μ есть задача определения функций μ по известным ее интегралам типа

$$\int\limits_{V\cap L(\bar{w},q_o)} \frac{l\mu(P(\bar{w},\ l))}{|q_o - \bar{w}|}\exp\left(\frac{ikl|q_o - \bar{w}|}{d_1}\right)dl,$$

т.е. является типичной задачей интегральной геометрии.

Раздел 9

В этом разделе собраны различные замечания и дополнения к основному тексту работы. В пункте I раздела приведены соображения, касающиеся выбора классов единственности потенциальных поверхностей при решении задачи D. В пунктах 2-4 рассматриваются возможные видоизменения и обобщения исходных постановок и формул. В пункте 5 приводится правило, позволяющее иногда выяснять наличие критических точек на потенциальной поверхности по свойствам ее линеаризованного изображения.

Задача D имеет некоторые особенности в классе излучателей типа потенциальных поверхностей. Для определенности рассмотрим случай потенциальных поверхностей простого слоя.

Пусть S_{R_1}, S_{R_2} - две сферы радиусов $R_1, R_2, R_1 < R_2$, с центрами в точке $p \in E^3$. Пусть поле вне S_{R_1} определяется постоянной на S_{R_1} плотностью μ_1; тогда это же поле вне S_{R_2} можно определить постоянной на S_{R_2} плотностью μ_2. Для наблюдателя, пользующегося информацией о поле в точках вне сферы S_{R_2}, потенциальные поверхности (S_{R_1},μ_1) и (S_{R_2},μ_2) полностью неотличимы. Значит, если мы хотим выделить класс потенциальных поверхностей различимых, и притом однозначно, по данным измерений поля вдали от носителей, то в этот класс не должны входить, например, две потенциальные сферы указанного выше типа - объекты самого естественного характера. Далее, если (V,μ) - компактное потенциальное тело, то поле вне охватывающих V гладких замкнутых поверхностей S_1, S_2 можно считать порожденными плотностями μ_1, μ_2 на поверхностях S_1, S_2 соответственно. Значит, в класс различимых для внешнего наблюдателя потенциальных поверхностей потенциальные поверхности $(S_1,\mu_1),(S_2,\mu_2)$ входить одновременно не могут. Видно также, что класс различимых потенциальных поверхностей не может быть выделен (при произвольных носителях) ограничениями на плотности типа дифференцируемости, аналитичности и т.д.

С этой точки зрения выделяемый в настоящей работе класс потенциальных поверхностей, различимых (и при этом однозначно) внешним наблюдателем, оперирующим информацией о поле, полученной лишь с некоторых ограниченных плоских участков окружающего пространства, не должен представляться необоснованно узким (напомним, что в указанный класс входят потенциальные поверхности с произвольным носителем, плотности которых имеют (как функции) носители, сосредоточенные на определенных, по отношению к наблюдателю, участках поверхности).

Приведем еще одно соображение в пользу такого ограничения. Пусть (S,μ) - потенциальная поверхность простого слоя и $q_0 \in E^3 \setminus S_-$ -регулярная (в смысле статьи [2]) точка относительно S.

Определим на S две функции μ_1 и μ_2 формулами:

$$\mu_1(p)=\begin{cases}\mu(p)+\sum\limits_{p_j\in J(m)}\mu(p_j)\dfrac{|p_j-q_o|^2}{|p-q|^2}\dfrac{\cos(\widehat{\nu_p, m})}{\cos(\widehat{\nu_{p_j}, m})}\exp ikR_{pp_j},\\ \text{если}\quad p\in\alpha_S(q_o),\\ 0,\ \text{если}\quad p\notin\alpha_S(q_o),\end{cases}$$

$$\mu_2(p)=\begin{cases}-\sum\limits_{p_j\in J(m)}\mu(p_j)\dfrac{|p_j-q_o|^2}{|p-q_o|^2}\dfrac{\cos(\widehat{\nu_p, m})}{\cos(\widehat{\nu_{p_j}, m})}\exp ikR_{pp_j},\\ \text{если}\quad p\in\alpha_S(q_o),\\ \mu(p),\ \text{если}\quad p\notin\alpha(q_o),\end{cases}$$

здесь $\sum\limits_{p_j\in J(m)}$ распространена на множество всех точек p_j пересечения луча q_o+tm, $t\le 0$ с поверхностью S, исключая точку p, видимую из точки q_o, $m=\dfrac{q_o-p}{|q_o-p|}$.

Очевидно, что $\mu(p)=\mu_1(p)+\mu_2(p)$, $\operatorname{supp}\mu_1\subseteq\alpha_S(q_o)$; если S – выпуклая поверхность, то μ_1, μ_2 – ограниченные функции. Будем считать μ_1, μ_2 плотностями потенциала простого слоя на S, определяющие поля

$$U_1(q)=\iint\limits_{\alpha_S(q_o)}\mu_1(p)\frac{\exp ikR_{qp}}{R_{qp}}\,dS_p,$$

$$U_2(q)=\iint\limits_S\mu_2(p)\frac{\exp ik R_{qp}}{R_{qp}}\,dS_p.$$

Нетрудно заметить, что поле U_2 вдали от поверхности в области $\omega_S(\alpha_S(q_o))$ убывает пропорционально квадрату расстояния от поверхности и для наблюдателя, фиксирующего пришедшее от (S,μ) поле на ограниченной, достаточно малой диафрагме Σ

вблизи точки $q_o (\Sigma \subseteq \omega_S(\alpha_S(q_o)))$ компонента U_2 имеет второй порядок малости по сравнению с компонентой U_1. Поскольку $U = U_1 + U_2$, то при измерениях с ограниченной точностью потенциальные поверхности (S, μ) и (S, μ_1) могут стать неразличимыми. Классы единственности, определенные в разделах 4,6, состоят из потенциальных поверхностей типа (S, μ_1) и приведенные соображения в некоторой степени обосновывают это ограничение.

п.2. Принятый нами в разделах 2,5,7 способ линеаризации полного приведенного изображения, т.е., переход к линеаризованному изображению $\mathfrak{Z}_F$, не является единственно возможным; назовем условно указанный способ сильной линеаризацией и рассмотрим отличный от него способ слабой линеаризации. Будем пользоваться рядом обозначений и понятий разделов 2,3,7. Для определенности ограничимся рассмотрением трехмерных потенциальных тел (V, μ) с обычной функцией плотности μ.

Как вытекает из формул разделов 2,7, переход к линеаризованному изображению при сильной линеаризации состоит в замене выражения $H \exp ikL$, входящего в формулу полного изображения (ф-лы 2.I,7.I), выражением $\exp^{-ikT}$, где

$$T = \left\langle \frac{v}{d_1} + \frac{w - q_o}{d_1} + \frac{p - q_o}{\langle p - q_o, n_F\rangle}, q - q_o \right\rangle .$$

Способ слабой линеаризации состоит в замене выражения $H \exp ik\, L$ выражением $\exp -ik\, T_1$, где $T_1 = \left\langle \frac{v}{d_1} + \frac{w - q_o}{|w - q_o|} + \frac{p - q_o}{|p - q_o|}, q-q_o \right\rangle$. Таким образом, слабо линеаризованное F - изображение тела (V, μ) с помощью элементарной о.с. F имеет вид:

$$\mathfrak{Z}'_F(w) = \iiint_V \mu(p) D'_o(w,p)\, dV_p ,$$

$$D'_o(w,p) = \frac{ik^2}{2\pi} \iint_\Sigma \exp - ik\, T_1 d\Sigma_q . \qquad (9.1)$$

Выберем систему координат, определяемую начальной точкой $q_o \in \Sigma$ и ортонормированным репером e_1, e_2, n_F. Примем обозначения:

$$q - q_o = u_1 e_1 + u_2 e_2, \quad \left\langle \frac{p - q_o}{|p - q_o|}, e_i \right\rangle = -\xi_i,$$

$$\left\langle \frac{w - q_o}{|w - q_o|}, e_i \right\rangle = w_i, \ i = 1,2, \ \langle p - q_o, n_F \rangle = l.$$

В этих обозначениях имеем формулы $|q_o - p| = \dfrac{l}{\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}$,

$$p = q_o + \frac{l}{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}}(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) + l n_F, \quad dV_p = \frac{1-\xi_1^2-\xi_2^2}{l^2} d\xi_1 d\xi_2 dl,$$

где dV_p - прямоугольный элемент объема в пространстве E^3. В переменных $\xi_1, \xi_2, l, \eta_1, \eta_2$ формула (9.I) может быть записана в виде ($v = 0$):

$$\mathcal{J}_F(w_1, w_2) = \iiint_V \Phi(\xi_1, \xi_2, l)\Delta_o'(w_1-\xi_1, w_2-\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dl,$$

где

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, l) = \mu(p(\xi_1, \xi_2, l))\left(\frac{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}}{l}\right)^3 \exp ik \frac{l}{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}},$$

$$\Delta_o'(w_1-\xi_1, w_2-\xi_2) = \iint_\Sigma \exp -ik((w_1-\xi_1)u_1 + (w_2-\xi_2)u_2) du_1 du_2.$$

Переменные $\xi_i (w_i)$ изменяются в области, которая получается ортогональной проекцией на диафрагму Σ той области на единичной сфере с центром в точке q_o, что зачерчивается на этой сфере радиус - вектором $p-q_o (w-q_o)$, когда $p \in V (w \in W)$.

Полученная формула принципиально не отличается от аналогичной формулы для слабой линеаризации и сохраняет важный элемент последней - разностное ядро Δ_o'. Во всех остальных случаях (поверхностные линейные источники) получаем подобные же формулы. Следовательно, и при способе слабой линеаризации основные факты и результаты, полученные в настоящей работе для случая сильной линеаризации, должны иметь силу, быть может, в несколько видоизмененной форме. Основное достоинство слабо линеаризованных изображений - более естественная связь с исходными, полными изображениями и более точная аппроксимация последних. Действительно, как нетрудно заметить, в терминах раздела 3 выражение T_1 является попросту суммой первых членов разложения выражения L по степеням $\left(\frac{R_{q_o q}}{R_{q_o p}}\right)^n$, $\left(\frac{R_{q_o q}}{R_{q_o w}}\right)^n$ (см. ф-лу 3.4 и след.). Следовательно, при оценке близости $\mathcal{J}_F$ и $\mathcal{J}'_F$ член, подобный члену $\Lambda(p,q,w)$ (ф-ла 3.5), отсутствует и это позволяет оценить разность $\mathcal{J}_F - \mathcal{J}'_F$ величиной меньшей, нежели приводимая формулой 3.9 раздела 3.

п.3. Как замечалось ранее, линеаризованные формулы изображений удовлетворительно описывают лишь часть возможных физических ситуаций, которые соответствуют в физической оптике дифракции Фраунгофера. Следующий, более универсальный способ описания, состоит в рассмотрении ситуаций, соответствующих дифракции Френеля.

Формальная часть дела состоит в замене члена H exp ik L (по-прежнему, пользуемся обозначениями и терминологией разделов 2,3,7) в формуле полного изображения (2.I, 7.I), например, выражением $\exp - ik\Pi$, где $\Pi = T + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\phi_o}{R_{q_o w}} + \frac{\sin^2\phi_o}{R_{q_o p}} - \frac{1}{f}\right)R^2_{q_o q}$ (имеется в виду однолинзовая о.с. со сферической линзой). Другой случай возникает при замене слагаемого T выражением T_1. В любом случае важно то, что теперь в разложении L по степеням $\left(\frac{R_{q_o q}}{R_{q_o p}}\right)^n$, $\left(\frac{R_{q_o q}}{R_{q_o w}}\right)^n$, оставлены члены до второго порядка включительно.

Заменяя в формулах 2.2, 7.2 выражения $\iint_\Sigma \exp -ikT d\Sigma_q$ выражениями $\iint_\Sigma \exp -ik\Pi d\Sigma_q$, получим еще один тип изображений, описывающих дифракцию Френеля и, очевидно, сохраняющих близость к полному изображению в более широком классе ситуаций, чем изображения линеаризованного типа. Ядро Δ_1, через которое представляется изображение нового типа, имеет выражение

$$\Delta_1(p,w)=\frac{ik^2}{2\pi}\iint_\Sigma \exp{-ik\Pi} d\Sigma_q=\frac{ik^2}{2\pi}\iint_\Sigma (\exp ik\,\frac{B}{2}R^2_{q_oq})(\exp -ikT)d\Sigma_q,$$

$$\text{где } B=(-\frac{\sin^2\phi_o}{R_{q_ow}}-\frac{\sin^2\varphi_o}{R_{q_op}}+\frac{1}{f}),\ p\in V,\ w\in\mathcal{E}.$$

Естественными заменами переменных ядро Δ_1 уже не приводится к разностному виду и, таким образом, выигрывая в точности аппроксимации полного изображения, теряем важное свойство формул изображения- приводимость к интегральному представлению с разностным ядром.

Производя замену переменных $\bar{w}=F(p)$, $\langle p-q_o, n_F\rangle=l$, приходим к представляющему ядру $\Delta_1(\bar{w},w)=$

$$=\frac{ik^2}{2\pi}\iint_\Sigma (\exp\frac{ik}{2}B(w,\bar{w})R^2_{q_oq})(\exp -\frac{ik}{d_1}\langle w-\bar{w},q-q_o\rangle)d\Sigma_q=$$

$$=\frac{ik^2}{2\pi}\iint_\Sigma (\exp\frac{ik}{2}(\frac{1}{f}-\frac{d_1^2}{R^3_{q_ow}}-\frac{d_1^3}{lR^3_{q_oP}})R^2_{q_oq})(\exp -\frac{ik}{d_1}\langle w-\bar{w},q-q_o\rangle)d\Sigma_q.$$

п.4. Составная о.с. F в пространстве E^3 определяется указанием следующей совокупности объектов:

a) m диафрагм Σ^j на плоскостях $\mathcal{L}_{\Sigma^j}$ - носителях дифрагм Σ^j, $j=1,2,\dots,m$;

в) экрана $\mathcal{E}$;

c) эффективной области $W\subseteq\mathcal{E}$;

d) комплекснозначных функций $\varkappa^j(q)$ - функций пропускания

Для указанных объектов должны выполняться условия:

I) плоскости $\mathcal{L}_{\Sigma^j}$, $\mathcal{E}$, $j=1,2,\dots,m$, - параллельны и не совпадают; плоскость $\mathcal{L}_{\Sigma^j}$ заключена между плоскостями $\mathcal{L}_{\Sigma^{j-1}}$, $\mathcal{L}_{\Sigma^{j+1}}$, при $j=2,\dots,m-1$; все плоскости $\mathcal{L}_{\Sigma^j}$ при $2\leqslant j<m$ заключены между плоскостями $\mathcal{L}_{\Sigma^1}$ и $\mathcal{E}$.

2) прямая, проходящая через центры тяжести q_o^1 и w_o областей Σ^1 и W соответственно, ортогональна к $\mathcal{E}$ и пересекает диафрагмы Σ^j во внутренних точках q_o^j, $j=2,\dots,m$.

Связанную с F п.с. определим набором $\{q_0^1, \mathscr{E}, W\}$, где q_0^1 – центр диафрагмы Σ^1. Когда терминология и понятия, определенные для п.с., применяются к F, то это относится к связанной с F п.с..

Если U – падающее на диафрагму поле, то F-преобразование $U_F^{\Sigma^1}(w)$ поля U_{Σ^1} определим формулой

$$U_F(w) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\Sigma^1} \int_{\Sigma^2} \dots \int_{\Sigma^m} U_{\Sigma^1}(q^1) \Big(\prod_{j=1}^{m} \varkappa^j(q^j) \times$$

$$\times \frac{\exp ik\Big(\sum_{j=1}^{m-1} R_{q^j q^{j+1}} \Big)}{\prod_{j=1}^{m-1} R_{q^j q^{j+1}}} \times \Big(\prod_{j=1}^{m-1} \Big(ik - \frac{1}{R_{q^j q^{j+1}}}\Big)\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{m-1} \cos\eta^j \Big) \times$$

$$\times \frac{\exp ikR_{q^m w}}{R_{q^m w}} \Big(ik - \frac{1}{R_{q^m w}}\Big) \cos\eta \, d\Sigma^1 d\Sigma^2 \dots d\Sigma^m,$$

где $q^j \in \Sigma^j$, $j=1,2,\dots,m$, $w \in \mathscr{E}$, η^j – угол между векторами $q^{j+1} - q^j$ и $q_0^{j+1} - q_0^j$ при $j = 1,2,\dots,m-1$, η – угол между векторами $w - q^m$ и $w_0 - q_0^m$.

Понятия приведенного изображения, линеаризованного приведенного изображения потенциальных тел (поверхностей) определяются точно так же, как и в случае элементарных о.с..

Составные о.с. возникают при описании более сложных, чем однолинзовые, оптических приборов (фотоаппараты со сложным объективом, микроскопы, телескопы и т.д.). Теория формирования изображений с помощью составных о.с., естественно, более сложна, чем соответствующая теория для однолинзовых о.с. (в чем можно убедиться и в области геометрической оптики [4]), однако основные свойства элементарных о.с., необходимые для рассмотрения разобранных в настоящей статье вопросов, сохраняются и в этом более общем случае. Так, линеаризованное изображение потенциального тела с помощью составной о.с. имеет интегральное представление через ядро, получающееся суперпозицией разностных ядер типа $\Delta_0(w - \bar{w})$, рассмотренных в предыдущих разделах. Следовательно, и в этом случае идеальное изображение однозначно определяется заданием линеаризованного изображения и большая часть приведенных в статье результатов легко переносится на случай составных о.с..

Составные о.с. обладают рядом дополнительных свойств, одним из которых является наличие естественного угла поля зрения, определяемого в приближении геометрической оптики, например в [4] (стр. 183). Части светящегося тела, лежащие вне естественного угла зрения, вносят малый вклад в полное изображение объекта и таким образом о.с. сама "вырезает" существенную часть протяженного источника, участвовавшего в формировании изображения. Это свойство позволяет включить в постановку основных обратных задач неограниченные потенциальные тела и поверхности, а также частично освободиться от условия $q_o \in \omega_S(\mathrm{supp}\,\mu)$ (полной видимости всей светящейся части потенциальной поверхности из центра диафрагмы q_o о.с.).

п.5. Пользуемся обозначениями раздела 6.

Пусть опорное поле $m = m_i$; тогда τ_j' - проекция поля m_i из точки q^j на S в точке p. Примем обозначение $K_i(p) = \dfrac{\mathcal{J}_{F^i}(F^i(p))}{\cos^n \psi_i(p)}$. Очевидно, что функция $K_i(p)$ известна, коль скоро известно F^i - изображение $\mathcal{J}_{F^i}(w)$.

Утверждение 9.1. Точка $p \in S$ - критическая точка для потенциальной поверхности (S,μ), тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial \ln K_i(p)}{\partial m_j} = \dfrac{\partial \ln}{\partial m_j}\left(\dfrac{c_i(p,q^i)}{c_j(p,q^j)}\right)$ при $j = 1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Ясно, что $\dfrac{\partial \ln K_i(p)}{\partial m_i} = 0$, т.к. вдоль луча $q^i + t m_i$ функция $K_i(p)$ постоянна.

Далее, если точка p - критическая, то, согласно определению, $\dfrac{\partial \ln \mu(p)}{\partial \tau_j} = \omega_Q(p,\tau_j) = \dfrac{\langle m_i, n_p\rangle}{\langle m_j, n_p\rangle} \dfrac{\partial \ln c_j(p,q^j)}{\partial m_j} - \dfrac{\partial \ln c_i(p,q^i)}{\partial m_i}$ при $j = 1,2,\ldots,n$. Заменяя в формуле

$$\frac{\partial \ln K_i(p)}{\partial \tau_j} = \frac{\partial \ln \mu(p)}{\partial \tau_j} + \frac{\partial \ln c_i(p,q_i)}{\partial \tau_j}$$

первое слагаемое приведенным выше выражением и производя арифметические преобразования, приходим к формуле:

$$\frac{\partial \ln K_i(p)}{\partial \tau_j} = \frac{\langle m_i, n_p\rangle}{\langle m_j, n_p\rangle} \frac{\partial \ln}{\partial m_j}\left(\frac{c_j(p,q^j)}{c_i(p,q^i)}\right), \ j = 1,2,\ldots,n.$$

Используя формулу 6.3, получаем искомую формулу утверждения. Комбинируя указанные формулы в обратном порядке, получаем вторую часть утверждения.

Применительно к рассмотренным в разделе 6 двум частным случаям, имеем следующее.

Если $c_i(p,q)$ для каждого $i=1,2,\ldots,n$-постоянная функция с общим значением c_i, то точка $p \in S$ - критическая для потенциальной поверхности (S, μ) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \ln K_i(p)}{\partial m_j} = 0 \quad \text{для каждого } j = 1,2,\ldots,n.$$

Поскольку $\cos\varphi_i(p) = \frac{d_1}{|w^i - w^i_o|}$, $w^i_o, w^i \in \mathcal{E}^i$, то это утверждение можно переформулировать так: точка $p \in S$ - критическая для потенциальной поверхности (S, μ), если и только если точка $w^i = F^i(p)$ - критическая для функции

$$\frac{|w^i - w^i_o|^n}{d^n_1} \mathcal{J}_{F^i}(w^i).$$

Отсюда, в частности, следует, что в определенных пределах топологический тип множества критических точек последней функции является инвариантом линеаризованного изображения при перемещениях о.с. в окружающем пространстве.

Если $c_j(p,q) = R_{pq} \exp jk R_{pq}$ при $j = 1,2,\ldots,n$, то в критической точке $p \in S$

$$\frac{\partial \ln H_j(p)}{\partial m_i} = jk(1 - \langle m_j, m_i\rangle) + \left(\frac{1}{R_{pq^i}} - \frac{1}{R_{pq^j}}\langle m_j, m_i\rangle\right),$$

здесь j - мнимая единица, k - волновое число, $i = 1,2,\ldots,n$.

Литература

I. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., КИРЕЙТОВ В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей. - ДАН СССР, т.22I, №5, 1975.

2. КИРЕЙТОВ В.Р. О некоторых свойствах (n-1) -мерных поверхностей в n - мерном пространстве. - Сб. Математические проблемы геофизики, вып.6, часть I, Новосибирск, 1975.

3. ГЕЛЬФАНД И.М., ШИЛОВ Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. I, М., Госиздат, 1959.

4. БОРН М., ВОЛЬФ Э. Основы оптики. М., "Наука", 1973.

5. МИЛНОР Дж. Теория Морса. М., "Мир", 1965.

А.В.Кондрашков

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЕЙ ПО ИХ ВНЕШНЕМУ ГРАВИТАЦИОННОМУ ПОТЕНЦИАЛУ

Введение

Через $u(x;\,T,\,\mu)$ обозначим объемный потенциал области T с плотностью μ:

$$u(x;T,\mu) = \int_T \mu(y)|x-y|^{-1}\,dy \quad (x \in R^3).$$

Пусть функция h определена в $R^3 \setminus A$, A – некоторое ограниченное множество, и удовлетворяет условиям:

$$\text{i).}\quad \Delta h(x) = 0 \quad (x \in R^3\setminus A); \qquad \text{ii).}\quad \lim_{|x| \to +\infty} h(x) = 0.$$

Рассматривается следующая задача: требуется найти такую область T, что

$$u(x;T,\mu) = h(x) \quad (x \in R^3\setminus T). \qquad (I)$$

Функция μ предполагается непрерывной во всем пространстве. Отметим сразу, что, согласно (I), должно выполняться условие: $T \supset A$.

Единственность решения обратных задач теории потенциала изучали многие авторы. Укажем здесь лишь на работы А.И.Прилепко [I], [2] и [3].

В этой статье доказывается единственность восстановления области T по значениям функции h в двух случаях:

а) $h(x) = c\cdot|x|^{-1}\ (x \in R^3\setminus\{0\})$, $c = \mathrm{const} > 0$, μ – положительная функция, зависящая только от $|x|$;

в) h совпадает с гармоническим продолжением внешнего потенциала некоторого эллипсоида, $\mu \equiv 1$.

I. Случай шара

Пусть функция $\mu \in C[0, +\infty)$ и $\mu(t) > 0$ для $0 \le t < +\infty$. Известно, что для шара $B_R = \{x \in R^3 \mid |x| < R\}$ объемный потенциал с плотностью $\mu(|x|)$, зависящей только от расстояния, выражается формулой

$$u(x; B_R, \mu) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{|x|}\displaystyle\int_0^{|x|} \mu(\tau)\tau^2\,d\tau + 4\pi \int_{|x|}^{R} \mu(\tau)\tau\,d\tau, & |x| < R, \\[2ex] \dfrac{4\pi}{|x|}\displaystyle\int_0^{R} \mu(\tau)\tau^2\,d\tau, & |x| \ge R. \end{cases}$$

Имеет место следующая:

Т е о р е м а I. Предположим, что плотность $\mu(|x|)$ и постоянная $c > 0$ удовлетворяют условию

$$\int \mu(|y|)\,dy = 4\pi \int_0^{\infty} \mu(\tau)\tau^2\,d\tau > c. \qquad (2)$$

Пусть существует такая ограниченная область T, гомеоморфная шару в R^3 и принадлежащая классу $A^{(1,\lambda)}$ $(0 < \lambda \le 1)$, что внешний потенциал ее с плотностью $\mu(|x|)$ равен

$$u(x;T,\mu) = c\cdot|x|^{-1} \quad (x \in R^3\setminus T). \tag{3}$$

Тогда область T совпадает с некоторым шаром B_R, радиус R которого определяется из уравнения

$$\int_{B_R} \mu(|y|)dy = 4\pi \int_0^R \mu(\tau)\tau^2 d\tau = c. \tag{4}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Условие (2) вполне естественно, так как в противном случае в пространстве R^3 нельзя выбрать шар B_R, внешний потенциал которого равен $c\cdot|x|^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. В этом случае $A = \{0\}$, значит, начало координат O – внутренняя точка области T. Рассмотрим два числа: $r_1 = \inf\{|y| \mid y \in \Gamma\}$ и $r_2 = \sup\{|y| \mid y \in \Gamma\}$, Г – граница области T.

Объемный потенциал $u(x;T,\mu)$ ведет себя при $|x| \to +\infty$ следующим образом:

$$u(x;T,\mu) = |x|^{-1} \int_T \mu(|y|)dy + O(|x|^{-1}).$$

С другой стороны, для $x \in R^3\setminus T$ выполняется условие (3). Поэтому необходимо должно соблюдаться равенство

$$\int_T \mu(|y|)dy = c. \tag{5}$$

Так как $B_{r_1} \subset T \subset B_{r_2}$, то, учитывая (5), имеем неравенство

$$4\pi \int_0^{r_1} \mu(\tau)\tau^2 d\tau \le c \le 4\pi \int_0^{r_2} \mu(\tau)\tau^2 d\tau. \tag{6}$$

Для всех $x \in R^3$ определим функцию

$$v(x) = u(x;T,\mu) - \frac{4\pi}{|x|} \int_0^{|x|} \mu(\tau)\tau^2 d\tau - 4\pi \int_{|x|}^{r_2} \mu(\tau)\tau d\tau.$$

Внутри области T функция v удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta v(x) = 0 \ (x \in T).$$

Известно, что объемный потенциал $u(x;T, \mu)$ и его градиент $\nabla u(x; T, \mu)$ – непрерывные функции во всем пространстве R^3. Поэтому для функции v на границе Γ выполняются условия:

$$v(x) = c\cdot|x|^{-1} - \frac{4\pi}{|x|}\int_0^{|x|}\mu(\tau)\tau^2 d\tau - 4\pi\int_{|x|}^{r_2}\mu(\tau)\tau d\tau \quad (x \in \Gamma);$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x) = \frac{(n,x)}{|x|^3}\left\{4\pi\int_0^{|x|}\mu(\tau)\tau^2 d\tau - c\right\} \qquad (x \in \Gamma),$$

где n – вектор внутренней нормали к Γ в точке x.

Докажем, что $v(x) = \mathrm{const}$ $(x \in T)$. Предположим, что $v(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда, согласно сильному принципу максимума, гармоническая функция v достигает своего наименьшего значения на границе Γ и для любого $x \in T$

$$v(x) > \inf_{\Gamma} v = \inf_{r_1 \le |y| \le r_2} v(y) = \inf_{r_1 \le t \le r_2} \phi(t),$$

$$\phi(t) = c\cdot t^{-1} - \frac{4\pi}{t}\int_0^t \mu(\tau)\tau^2 d\tau - 4\pi\int_t^{r_2}\mu(\tau)\tau d\tau \quad (0<t< +\infty).$$

Пусть число R определяется из уравнения (4). Нетрудно убедиться, что функция ϕ достигает своего наименьшего значения в единственной точке $t = R$. Согласно (6), число R лежит в интервале $[r_1, r_2]$. Последнее означает, что сфера

$S_R = \{x \in R^3 \mid |x| = R\}$ пересекает границу Γ хотя бы в одной точке. В свою очередь функция v достигает своего наименьшего значения в каждой точке множества $\Gamma \cap S_R$. Пусть $x_o \in \Gamma \cap S_R$, тогда $v(x_o) = \inf\{v(y) \mid y \in \Gamma\}$ и $\frac{\partial v}{\partial n}(x_o) = 0$, что, однако, противоречит принципу Хопфа, согласно которому должно быть $\frac{\partial v}{\partial n}(x_o) > 0$.

Полученное противоречие и доказывает, что $v(x) = a = \mathrm{const}$ $(x \in T)$. Постоянная a совпадает с наименьшим значением функции v:

$$a = \inf_{\Gamma} v = \phi(R) = -4\pi \int_R^{r_2} \mu(\tau)\tau d\tau.$$

Тем самым мы определили значения объемного потенциала $u(x; T, \mu)$ внутри области T:

$$u(x;T,\mu) = \frac{4\pi}{|x|} \int_0^{|x|} \mu(\tau)\tau^2 d\tau + 4\pi \int_{|x|}^{R} \mu(\tau)\tau d\tau.$$

Теперь нетрудно увидеть, что радиусы r_1 и r_2 являются положительными корнями уравнения

$$\frac{4\pi}{t} \int_0^t \mu(\tau)\tau^2 d\tau + 4\pi \int_t^R \mu(\tau)\tau d\tau = c \cdot t^{-1}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет единственный положительный корень $t = R$ кратности 2. Значит, $r_1 = r_2 = R$ и $T = B_R$.

2. Случай эллипсоида

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$ и $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 < +\infty$. Известно [4], что объемный потенциал эллипсоида

$$E_\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot \alpha_i^2 < 1\}$$

с постоянной плотностью $\mu \equiv 1$ вычисляется по формуле

$$u(x;E_\alpha,1)=\begin{cases}\pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3\int\limits_0^{+\infty}K(x;s)\dfrac{ds}{\beta(s)}, & x\in E_\alpha,\\ \pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3\int\limits_{\lambda(x)}^{+\infty}K(x;s)\dfrac{ds}{\beta(s)}, & x\in R^3\setminus E_\alpha,\end{cases}$$

$$K(x;s)=1-\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot(\alpha_i^2+s)^{-1},\quad \beta(s)=\sqrt{(\alpha_1^2+s)(\alpha_2^2+s)(\alpha_3^2+s)},$$

$\lambda(x)$ – корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot(\alpha_i^2+s)^{-1}=1$$

такой, что $\lambda(x)\geq -\alpha_1^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 2.I. Функция λ определена всюду в R^3, за исключением эллипса

$$e_\alpha=\{(0,x_2,x_3)\in R^3\,|\,x_2^2\cdot(\alpha_2^2-\alpha_1^2)+x_3^2\cdot(\alpha_3^2-\alpha_1^2)<1\},$$

который лежит в плоскости $\{x_1=0\}$.

2.2. Граница Γ_α эллипсоида E_α выражается через функцию λ следующим образом:

$$\Gamma_\alpha=\{x\in R^3\,|\,\lambda(x)=0\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеется некоторая ограниченная область $T\in A^{(1,\lambda)}$ $(0<\lambda\leq 1)$, гомеоморфная шару в R^3. Пусть существуют такие числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ $(0<\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha_3<+\infty)$, что

$$u(x;T,1)=\pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}K(x;s)\frac{ds}{\beta(s)}\quad(x\in R^3\setminus T).\qquad(8)$$

Тогда $T = E_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На этот раз $A = e_\alpha$. Поэтому $T \cap E_\alpha \neq \emptyset$ и имеются лишь две возможности:

$$1) \quad E_\alpha \subset T \quad \text{или} \quad E_\alpha \supset T;$$

$$2) \quad E_\alpha \not\subset T \quad \text{и} \quad E_\alpha \not\supset T.$$

Из (8) вытекает, что необходимо должно выполняться условие: $m_3(T) = m_3(E_\alpha)$, m_3 - мера Лебега в R^3. Следовательно, в первом случае $T = E_\alpha$.

Рассмотрим второй случай. Очевидно, что граница Γ_α эллипсоида E_α пересекает границу Γ области T, хотя бы в одной точке. Определим в R^3 функцию

$$v(x) = u(x;T,1) - \pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \int_0^\infty K(x;s)\frac{ds}{\beta(s)} \quad (x \in R^3).$$

Функция v - гармоническая в T. На границе Γ выполняются условия:

$$v(x) = -\pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdot \int_0^{\lambda(x)} K(x;s)\frac{ds}{\beta(s)} \quad (x \in \Gamma); \qquad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) = 2\pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3 x_1 \cdot \int_0^{\lambda(x)} (\alpha_1^2 + s)^{-1}\frac{ds}{\beta(s)} \quad (x \in \Gamma). (10)$$

Еще рассмотрим функцию

$$w(x) = -\pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \int_0^{\lambda(x)} K(x;s)\frac{ds}{\beta(s)},$$

которая определена для всех $x \in R^3 \setminus e_\alpha$.

Покажем, что $v(x) = \text{const}$ $(x \in T)$. Предположим противное: $v(x) \not\equiv \text{const}$. Тогда в силу сильного принципа максимума

$$v(x) > \inf_{\Gamma} v = \inf_{y \in \Gamma} w(y) \quad (x \in T).$$

Заметим, что для любого $x \in R^3 \setminus e_\alpha$ $w(x) \geq 0$, причем $w(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda(x) = 0$, то есть для $x \in \Gamma_\alpha$. Поэтому функция v достигает своего наименьшего значения лишь на множестве $\Gamma \cap \Gamma_\alpha$ и $\inf_{\Gamma} v = \inf_{\Gamma} w = 0$. Но из (10) следует, что для любой точки $x_0 \in \Gamma \cap \Gamma_\alpha$ $\frac{\partial v}{\partial n}(x_0) = 0$, что находится в противоречии с принципом Хопфа. Значит, $v(x) = \text{const}$ $(x \in T)$. Вычисляя величину этой постоянной в точке $x_0 \in \Gamma \cap \Gamma_\alpha$, находим, что $v(x) = 0$ $(x \in T)$. Таким образом доказано, что

$$u(x;T,1) = \pi\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \int_0^{+\infty} K(x;s)\,\frac{ds}{\beta(s)} \quad (x \in T). \qquad (11)$$

Значения внутреннего и внешнего потенциалов должны совпадать на границе Γ. Из условий (8) и (11) получаем, что

$$\Gamma = \{x \in R^3 \mid \lambda(x) = 0\},$$

то есть $\Gamma = \Gamma_\alpha$, что и требовалось доказать.

Литература

1. ПРИЛЕПКО А.И. Обратные задачи теории потенциала. -"Математические заметки". т.14, № 5, 1973, с.755-767.
2. ПРИЛЕПКО А.И. Об единственности решения внешней задачи ньютонова потенциала.-"Дифференциальные уравнения", 2, № 1 1966, с.107-124.
3. ПРИЛЕПКО А.И. Смешанные обратные задачи теории потенциала в случае звездных тел. -"Сибирский математический журнал", Т.XII, № 6, 1971, с.1341-1353.
4. СРЕТЕНСКИЙ Л.Н. Теория ньютонова потенциала. ГТТИ, 1946.

А.Г.Марчук

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ПОЛЯ ПО ЕГО АМПЛИТУДЕ

I. В ряде задач оптики, геофизики, радиофизики в силу того, что частоты волновых процессов являются весьма большими, измерение непосредственно поля, то есть его амплитуды и фазы, представляется сложной технической задачей. Измерение же амплитуды поля, как правило, легко осуществимо. В данной работе рассматривается задача определения полного поля по его амплитуде. Мы ограничиваемся здесь случаем уравнения Гельмгольца.

Постановка задачи. Пусть $U(p)$ - стационарное волновое поле, $p = \{x,y,z\}$, удовлетворяющее в некоторой области уравнению Гельмгольца.

$$\Delta U + k^2 U = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что известно значение модуля комплексного поля

$$A(p) = |u(p)|, \; p \in \Omega, \qquad (2)$$

требуется определить значения $U(p)$ при $p \in \Omega$.

II. Представим поле в виде произведения

$$U(p) = A(p)e^{i\varphi(p)}, \tag{3}$$

A и φ – действительные функции.

Таким образом, нужно найти функцию $\varphi(p)$. Подставим (3) в (I), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x,y,z)e^{i\varphi(x,y,z)}\right) = A_x e^{i\varphi} + iAe^{i\varphi}\varphi_x,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(Ae^{i\varphi}\right) = A_{xx}e^{i\varphi} + 2iA_x\varphi_x e^{i\varphi} - Ae^{i\varphi}(\varphi_x)^2 + iAe^{i\varphi}\varphi_{xx},$$

$$\Delta\left(Ae^{i\varphi}\right) + k^2\left(Ae^{i\varphi}\right) =$$

$$= \Delta Ae^{i\varphi} + 2i(\operatorname{grad} A, \operatorname{grad}\varphi)e^{i\varphi} - A(\operatorname{grad}\varphi)^2 + iA\Delta\varphi e^{i\varphi} + k^2Ae^{i\varphi} = 0.$$

Разделяя действительную и мнимую части равенства, получим систему уравнений для A и φ.

$$\begin{aligned} &\Delta A - A(\operatorname{grad}\varphi)^2 + k^2A = 0, \\ &2(\operatorname{grad} A, \operatorname{grad}\varphi) + A\Delta\varphi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ш. Рассмотрим систему (4) в плоском случае, то есть когда все производные по направлению z равны нулю. Мы предполагаем, что амплитуда A нигде в области Ω не обращается в нуль.

$$\begin{aligned} &\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \lambda^2 = \frac{\Delta A + k^2A}{A}, \\ &2(A_x\varphi_x + A_y\varphi_y) + A(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из первого уравнения системы (5) имеем

$$\varphi_y = \pm\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2},$$

$$\varphi_{yy} = \pm (\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2})_y = \pm (\frac{\lambda\lambda_y - \varphi_x\varphi_{xy}}{\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2}}) =$$

$$= \pm \frac{\lambda\lambda_y}{\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2}} \mp \frac{\varphi_x}{\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2}} (\pm \sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2})_x =$$

$$= \pm \frac{\lambda\lambda_y}{\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2}} - \frac{\varphi_x}{\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2}} \frac{\lambda\lambda_x - \varphi_x\varphi_{xx}}{\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2}} =$$

$$= \pm \frac{\lambda\lambda_y}{\sqrt{\lambda^2 - \varphi_x^2}} - \frac{\lambda\lambda_x\varphi_x}{\lambda^2 - \varphi_x^2} + \frac{\varphi_x^2}{\lambda^2 - \varphi_x^2} \varphi_{xx}.$$

Подставим φ_y и φ_{yy} во второе уравнение системы (5):

$$2(A_x\varphi_x \pm A_y\sqrt{\lambda^2-\varphi_x^2}) + A(\varphi_{xx} + \frac{\varphi_x^2}{\lambda^2-\varphi_x^2} \varphi_{xx} \pm \frac{\lambda\lambda_y}{\sqrt{\lambda^2-\varphi_x^2}} - \frac{\lambda\lambda_x\varphi_x}{\lambda^2-\varphi_x^2}) = 0. \tag{6}$$

Выделим φ_{xx}

$$\varphi_{xx} = -\frac{\lambda^2-\varphi_x^2}{A\lambda^2} (2(A_x\varphi_x \pm A_y\sqrt{\lambda^2-\varphi_x^2}) \pm A \frac{\lambda\lambda_y}{\sqrt{\lambda^2-\varphi_x^2}} - A\frac{\lambda\lambda_x\varphi_x}{\lambda^2-\varphi_x^2}). \tag{7}$$

Заменяя φ_x на V получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения V на прямой $y = \text{const}$, если известно значение V_0 в некоторой точке $x=x_0$. Если также известно значение φ_0 в этой же точке, то определяется фаза φ на всей прямой $y = \text{const}, (x,y) \in \Omega$. Причем существует два решения для различных знаков в (7), соответствующих прямой и обратной волне. Две константы φ_0 и V_0 задают начальную фазу и локальное направление движения волны.

Очевидно, есть и симметричное к (7) уравнение

$$\varphi_{yy} = -\frac{\lambda^2-\varphi_y^2}{A\lambda^2} (2(A_y\varphi_y \pm A_x\sqrt{\lambda^2-\varphi_y^2}) \pm A \frac{\lambda\lambda_x}{\sqrt{\lambda^2-\varphi_y^2}} - A \frac{\lambda\lambda_y\varphi_y}{\lambda^2-\varphi_y^2}). \tag{8}$$

Знак плюс или минус в формуле (8) выбирается уже из положительности или отрицательности φ_x, полученного при решении (7). С помощью уравнения (8) полученное на прямой $y = \mathrm{const}$ решение продолжается по прямым $x = \mathrm{const}$ в остальные точки области Ω. Все рассуждения верны в предположениях

I) A не обращается в нуль в области Ω;

2) φ_x, φ_y не обращается в нуль в Ω.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему

Т е о р е м а I. При выполнении в выпуклой области Ω условий (I), I) и 2), в двумерном случае по вещественной функции A разложения $u = Ae^{i\varphi}$ определяется вещественная функция $\varphi(x,y)$ с точностью до двух констант. Причем одна константа есть несущественный фазовый множитель

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_0.$$

IУ. Рассмотрим осесимметричный случай.

В координатах ρ, ϕ, z

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} i_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} i_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z} i_z,$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

Учитывая, что производные по ϕ равны нулю, получаем

$$|\nabla\varphi|^2 = \varphi_\rho^2 + \varphi_z^2,$$

$$(\nabla\varphi, \nabla A) = \varphi_\rho A_\rho + \varphi_z A_z,$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \varphi_{zz} = \varphi_{\rho\rho} + \varphi_{zz} + \frac{1}{\rho}\varphi_\rho.$$

Система (4) в этих координатах будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi_\rho^2 + \varphi_z^2 = \lambda^2 = \frac{\Delta A + k^2 A}{A},$$
$$2(\varphi_\rho A_\rho + \varphi_z A_z) + A\left(\varphi_{\rho\rho} + \varphi_{zz} + \frac{1}{\rho}\varphi_\rho\right) = 0. \tag{9}$$

Из (9) аналогично предыдущему рассмотрению, имеем

$$\varphi_z = \pm \sqrt{\lambda^2 - \varphi_\rho^2},$$

$$\varphi_{\rho\rho} = -\frac{\lambda^2-\varphi_\rho^2}{A\lambda^2}\left(2(A_\rho\varphi_\rho \pm A_z\sqrt{\lambda^2-\varphi_\rho^2}) \pm A\frac{\lambda\lambda_z}{\sqrt{\lambda^2-\varphi_\rho^2}} - A\frac{\lambda\lambda_\rho\varphi_\rho}{\lambda^2-\varphi_\rho^2} + \frac{A}{\rho}\varphi_\rho\right).$$

По направлению z получается

$$\varphi_{zz} = -\frac{\lambda^2-\varphi_z^2}{A\lambda^2}\left(2(A_z\varphi_z \pm A_\rho\sqrt{\lambda^2-\varphi_z^2}) \pm A\frac{\lambda\lambda_\rho}{\sqrt{\lambda^2-\varphi_z^2}} - A\frac{\lambda\lambda_z\varphi_z}{\lambda^2-\varphi_z^2} \pm \frac{A}{\rho}\sqrt{\lambda^2-\varphi_z^2}\right).$$

Соответственно, справедлива следующая теорема

Т е о р е м а 2. Пусть имеется осесимметричная ф-я $u = A e^{i\varphi}$, удовлетворяющая (1) в Ω. Если A, φ_z, φ_ρ не обращаются в нуль, то по вещественной функции $A(\rho, z)$ с точностью до двух констант единственным образом восстанавливается функция $\varphi(\rho, z)$.

З а м е ч а н и е . Наличие двух констант в формулировках теорем имеет принципиальное значение. Пример $e^{i(\bar{k}\bar{r}+k_0)}$ для плоского случая показывает, что уменьшить количество констант неопределенности не удается.

В заключение выражаю благодарность Ю.Е.Аниконову за обсуждение задачи.

В.Г.Романов

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть u - векторная функция, $u = (u_1, \dots, u_m)$, переменных x, t, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим систему уравнений первого порядка

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} A_i u_{x_i} + Qu = F. \qquad (I)$$

Мы будем предполагать, что система (I) слабо связана, то есть матрицы $A_i = (a^i_{kj})$ диагональны:

$$a^i_{kj} = \delta_{kj}\, \lambda_{ik}, \qquad (2)$$

δ_{kj} - символ Кронекера, и матрицы A_i, Q зависят только от x, а $F = F(x, t)$. Задача, которой мы будем заниматься, заключается в нахождении матрицы $Q = (q_{kj})$. Ее точную постановку мы сформулируем позднее. Сейчас же приведем ее аналог для того случая, когда система (I) вырождается в одно уравнение первого порядка (обозначим в этом случае $\lambda_{i1} = \lambda_i$):

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{x_i} + qu = f. \qquad (3)$$

В этом последнем случае задача ставится так: требуется найти коэффициент $q = q(x)$ в области $|x| < \infty$, если известно решение уравнения (3) для двух фиксированных значений t:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u(x,T) = \varphi_2(x), \quad |x| < \infty, \quad (T > 0) \tag{4}$$

В подобной постановке обратные задачи для некоторых уравнений второго порядка изучались в работах [I], [2]. Мы проведем исследование задачи (3), (4), а уже затем сформулируем аналогичную задачу для уравнения (I). Так как все принципиальные моменты рассуждения достаточно ясно проявляются на частной задаче (3), (4), то это позволит нам не останавливаться на отдельных достаточно громоздких выкладках для более общей задачи.

Будем предполагать, что $\lambda_i, \frac{\partial\lambda_i}{\partial x_k}, q, f, f_t, \varphi_l, \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_k}$ - непрерывны и равномерно ограничены для всех i,k,l в области $D_T = \{(x, t) : |x| < \infty, \ 0 \le t \le T\}$.

Эти условия обеспечивают существование непрерывного вместе с первой производной по t в области D_T решения для уравнения (3) задачи Коши с данными при $t = 0$. Это решение является, вообще говоря, обобщенным решением, так как может не иметь производных по переменным x. Пусть, кроме того, по крайней мере один из коэффициентов λ_i, например λ_n, не меняет знака и равномерно отделен от нуля по абсолютной величине. Очевидно, что в этом случае, за счет изменения знака t, если потребуется, можно считать:

$$\lambda_n(x) \ge \mu > 0. \tag{5}$$

Заметим, что задача отыскания коэффициента $q(x)$ является нелинейной, так как неизвестна также и функция $u(x, t)$. С целью дальнейших упрощений в рассуждениях рассмотрим вначале линейную задачу отыскания $q(x)$ из уравнения

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{x_i} + q\,\phi = f, \tag{6}$$

по условиям (4). Здесь $\phi = \phi(x,t)$ - заданная функция, которую мы будем предполагать непрерывной в D_T и ограниченной.

К уравнению (6) мы придем, если проведем линеаризацию задачи (3),(4). Задача (6), (4) может иметь также и самостоятельное значение.

Анализ задачи (4), (6) сразу показывает, что без дальнейших предположений о коэффициенте $q(x)$ и функции $\phi(x,t)$ решение ее не единственно. Действительно, во-первых, если $\phi \equiv 0$, то коэффициент $q(x)$ в уравнение совсем не входит. В связи с этим будем предполагать, что

$$|\phi(x,T)| \geq \phi_0 > 0. \tag{7}$$

Во-вторых, положив в уравнении (6) $\lambda_i = 0$, для $1 \leq i \leq n-1$, $\lambda_n = 1$, $\phi = 1$, $f = 0$ и интегрируя уравнение по характеристике от $t = 0$ до $t = T$, находим

$$\varphi_2(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+T) - \varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = \int_0^T q(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+\tau)d\tau .$$

Решение этого уравнения не единственно. Действительно, любая функция периодическая по x_n с периодом T и обладающая нулевым интегралом по периоду, является решением соответствующего однородного уравнения. Ситуация однако, существенно меняется, если рассматривать класс $\mathfrak{M}$ непрерывных функций $q(x)$, удовлетворяющих условию:

$$q(x) \equiv 0, \quad \text{для} \quad x_n < 0. \tag{8}$$

В этом классе функций решение выписанного интегрального уравнения будет единственно. В дальнейшем мы будем предполагать условие (8) выполненным.

Отметим, что из сделанных относительно коэффициента λ_i предположений следует, что через каждую точку пространства x, t проходит единственная характеристика уравнений (3) или (6):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(x), \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \tag{9}$$

которая может быть продолжена в обе стороны сколько угодно далеко (см. [3]). При этом вдоль характеристики координата x_n монотонно растет с ростом t. Пусть x^0 – произвольная точка, а $t^0 \in [0,T]$. Обозначим через $L(x^0,t^0)$ ориентированную кривую, совпадающую с отрезком характеристики (9), проходящей при $t = t^o$ через точку x^o и отвечающей значениям параметра $t \in [0, t^o]$. В качестве положительного направления примем направление, отвечающее возрастанию параметра t. Кроме того, обозначим через ξ точку на кривой $L(x^o, t^o)$, отвечающую значению $t = 0$. Естественно, что $\xi = \xi(x^o, t^o)$. Кривая $L(x^o, t^o)$ проходит, таким образом, через точки $(\xi, 0)$, (x^o, t^o), которые для нее являются концевыми.

Т е о р е м а I. При сделанных выше относительно коэффициентов λ_1, ψ, f и функций φ_1, φ_2 предположениях для существования решения обратной задачи (4), (6) в классе $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно выполение условия

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(\xi(x,T)) = \int_{L(x,T)} f\,dt, \quad x_n < 0. \qquad (10)$$

В классе $\mathfrak{M}$ решение обратной задачи единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя уравнение (6) вдоль кривой $L(x,T)$ и используя условия (4), находим

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(\xi(x,T)) = \int_{L(x,T)} (f - q\psi)dt. \qquad (11)$$

Пусть в этом равенстве $x_n < 0$. Тогда вдоль кривой $L(x, T)$ ее n-я координата в параметрическом представлении кривой отрицательна и, следовательно, в силу условия (8), вдоль кривой $q = 0$. При этом равенство (11) переходит в равенство (10). Необходимость условия (10), таким образом, установлена. Покажем теперь, что при его выполнении решение обратной задачи (4), (6) в рассматриваемом классе функций существует и единственно.

Заметим, что для $x_n \geq 0$ равенство (11) представляет собой интегральное уравнение первого рода по отношению к функции $q(x)$. По установившейся терминологии (см. [4]) возникающая здесь задача отыскания функции $q(x)$ через известные интегралы вдоль кривых $L(x,T)$ с известной весовой функцией $\psi(x,T)$ называется задачей интегральной геометрии. В данном случае она имеет свою специфику, которая существенно облегчает ее анализ. Для исследования уравнения (11) воспользуемся его дифференциальными следствиями. Рассмотрим равенство (11) вдоль проекции на пространство x фиксированной характеристики и вычислим от обеих частей равенства производную вдоль нее. Замечая, что дифференцирование по x вдоль проекции характеристики эквивалентно с точностью до частной производной по t полному дифференцированию по t вдоль кривой $L(x, T)$ находим

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_{2x_i}(x)\lambda_i(x) - \varphi_{1x_i}(\xi(x,T))\lambda_i(\xi(x,T))] =$$

$$= f(x,T) - f(\xi(x,T),0) - q(x)\phi(x,T) + q(\xi(x,T))\phi(\xi(x,T),0) +$$

$$+ \int_{L(x,T)} (q\phi_t - f_t)dt.$$

Это равенство по отношению к функции $q(x)$ представляет собой интегральное уравнение со сдвинутым аргументом

$$q(x) = a(x) + b(x)q(\xi(x,T)) + c(x) \int_{L(x,t)} q\phi_t dt, \qquad (12)$$

в котором

$$a(x) = [\phi(x,T)]^{-1}\{f(x,T) - f(\xi(x,T),0) - \int_{L(x,T)} f_t dt -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} [\varphi_{2x_i}(x)\lambda_i(x) - \varphi_{1x_i}(\xi(x,T))\lambda_i(\xi(x, T))]\},$$

$$b(x) = [\phi(x,T)]^{-1}\phi(\xi(x,T),0); \quad c(x) = [\phi(x,T)]^{-1}.$$

При $x_n < 0$ функция $a(x) \equiv 0$, так как выражение в фигурных скобках обращается в нуль как дифференциальное следствие равенства (10). Поэтому $q(x) \equiv 0$ в области $x_n < 0$ удовлетворяет уравнению (12). Рассмотрим теперь произвольное h, удовлетворяющее условию $0 < h < \mu T$, в котором μ взято из неравенства (5). Пусть x – произвольная точка из полосы $G_h = \{x: 0 \le x_n \le h\}$. Тогда из условия (5) следует, что n-я координата точки $\xi(x,T)$, которую мы обозначим через $\xi_n(x, T)$, удовлетворяет неравенству

$$\xi_n(x, T) \le x_n - \mu T < h - \mu T < 0.$$

Поэтому для $x \in G_h$ уравнение (I2), в силу условия (8), принимает вид

$$q(x) = a(x) + c(x) \int\limits_{L(x,T)} q\phi_t dt, \; x \in G_h. \qquad (I3)$$

Нетрудно понять, что на части проекции на пространство x каждой характеристики, принадлежащей G_h, уравнение (I3) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Действительно, так как между t и текущей координатой ξ_n кривой $L(x,T)$ существует, в силу (5), взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое соответствие, которое может быть представлено в виде

$$t = t(\xi_n, x, T), \qquad (I4)$$

то, производя в уравнении (I3) замену переменной t на ξ_n, получаем

$$q(x) = a(x) + c(x) \int\limits_0^{x_n} [q\, \phi_t]_{t=t(\xi_n,x,T)} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi_n} \cdot d\xi_n. \qquad (I5)$$

Вдоль проекции любой фиксированной характеристики, принадлежащей G_h, это соотношение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Ядро этого уравнения и свободный член непрерывны по своим аргументам в силу условий, наложенных на функции $f, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \lambda_i$, и вследствие непрерывной зависимости решений системы (9) от точки x, которая играет здесь роль параметра. В силу известных свойств интегральных уравнений Вольтерра второго рода уравнение (I5) имеет единственное непрерывное решение. Склеивая решение, полученное на проекциях отдельных характеристик, получим решение в области G_h, которое также будет непрерывным как следствие непрерывной зависимости ядра и правой части от точки x. При найденной в G_h функции $q(x)$ рассмотрим уравнение (I2) последовательно в областях $h \le x_n \le 2h$, $2h \le x_n \le 3h$, и т.д. При этом так как точка $\xi(x,T)$ попадает в полосу, где $q(x)$ уже известно, то уравнение (I2) в каждой из указанных областей приводится к уравнению, аналогичному (I5), и мы можем решение уравнения (I2) последовательно продолжить единственным и непрерывным образом на все полупространство $x_n \geq 0$. Это рассуждение и завершает доказательство теоремы I.

Перейдем теперь к анализу обратной задачи (3),(4). Рассмотрим класс $\mathfrak{M}(q_o)$ непрерывных функций $q(x)$, удовлетворяющих условию (8) и неравенству $|q(x)| \leq q_o$ $(q_o > 0)$. Будем теперь также предполагать, что $|\varphi_2(x)| \geq \varphi_o > 0$.

Т е о р е м а 2. Существуют такие положительные числа q_o, h, что в области $x_n \leq h$ решение обратной задачи (3),(4) в классе $\mathfrak{M}(q_o)$ при выполнении условия (I0) существует и единственно.

Действительно, аналогом равенства (II) в данном случае является равенство

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(\xi(x,T)) = \int\limits_{L(x,T)} (f-qu)dt, \qquad (I6)$$

из которого вытекает необходимость выполнения условия (I0)для существования решения в классе $\mathfrak{M}(q_o)$. Вычисляя производную по направлению проекции на x характеристики, придем к уравнению, аналогичному (I2):

$$q(x) = \tilde{a}(x) + \tilde{b}(x)q(\xi(x,T)) + \tilde{c}(x) \int\limits_{L(x,T)} q \cdot v\, dt, \qquad (I7)$$

в котором $v = u_t$, а коэффициенты $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ находятся из соответствующих формул для коэффициентов a,b,c заменой функции $\phi(x,T)$ на $\varphi_2(x)$, а $\phi(x,0)$ на $\varphi_1(x)$. Для функции $v(x,t)$, дифференцируя уравнение (3) по переменной t и используя первое из условий (4), получаем задачу Коши:

$$\left.\begin{aligned} & v_t + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{x_i} + qv = f_t, \\ & v(x,0) = f(x,0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\varphi_{1x_i}(x) - q(x)\varphi_1(x) \end{aligned}\right\} \qquad (I8)$$

Решение этой задачи эквивалентно решению интегрального уравнения

$$v(x,t) = v(\xi(x,t),0) + \int\limits_{L(x,t)} (f_t - qv)dt. \qquad (I9)$$

Уравнения (I7), (I9) представляют собой замкнутую систему уравнений относительно функций $q(x)$, $v(x,t)$. Пусть, как и ранее, $h < \mu T$. Тогда для $x \in G_h = \{x: 0 \le x_n \le h\}$ $q(\xi(x,T)) = 0$, и уравнения (I7), (I9) представляют собой для $x \in G_h$, $t \in [0,T]$ систему нелинейных интегральных уравнений достаточно простой структуры. Переходя, как и ранее, в интегралах вдоль характеристики от переменной t к переменной ξ_n, убеждаемся, что h является параметром малости в уравнениях (I7), (I9). Поэтому, если q_0 выбрано из условия $\|\tilde{a}(x)\|_C < q_0$, то по заданному q_0 нетрудно подобрать такое $h = h(q_0, f, \varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, что в области $x \in G_h$, $t \in [0,T]$ система (I7), (I9) имеет единственное непрерывное решение (см., например, [5]). В области $x_n < 0$ существование у уравнения (I7) чисто нулевого решения $q \equiv 0$ вытекает из выполнения условия (I0), которое приводит к равенству $\tilde{a} \equiv 0$, $x_n < 0$. Таким образом, в области $x_n \le h$ существует единственное решение обратной задачи (3), (4), принадлежащее множеству $\mathfrak{M}(q_0)$.

Доказанная теорема представляет собой так называемую теорему "в малом". Выяснение вопроса, существует ли глобальное решение задачи (3), (5), сводится к изучению возможности продолжения решения системы (I7), (I9) за пределы области $x_n \le h$ с некоторым равномерным по x_n шагом. Мы этим здесь заниматься не будем, так как это требует довольно значительных выкладок. Однако довольно просто решается вопрос о единственности решения обратной задачи (3), (4) "в большом".

Т е о р е м а 3. Решение обратной задачи (3), (4) в классе $\mathfrak{M}$ единственно.

Действительно, пусть существуют два решения q_1, q_2 задачи (3), (4). Обозначим соответствующие им функции $v = u_t$, отвечающие данным Коши при $t = 0$ через v_1, v_2. Пусть $\tilde{q} = q_1 - q_2$, $\tilde{v} = v_1 - v_2$. Каждая пара q_i, v_i, $i = 1,2$ удовлетворяет уравнениям (I7), (I9). Вычитая из равенств, отвечающих значению $i = 1$, соответствующие равенства при $i = 2$ и используя очевидное тождество $q_1 v_1 - q_2 v_2 = q_1 \tilde{v} + \tilde{q} v_2$, получим

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}(x) &= \tilde{b}(x)\tilde{q}(\xi(x,T)) + \tilde{c}(x) \int_{L(x,T)} [q_1 \tilde{v} + \tilde{q} v_2]\,dt \\ \tilde{v}(x,t) &= -\tilde{q}(\xi(x,t))\varphi_1(\xi(x,t)) - \int_{L(x,t)} [q_1 \tilde{v} + \tilde{q} v_2]\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$0 \le t \le T.$$

Для $x \in G_h$, $0 < h < \mu T$, в силу (8) $\tilde{q}(\xi(x, T)) \equiv 0$, и система (20) представляет собой систему из двух линейных однородных интегральных уравнений с непрерывными ядрами. Единственное непрерывное ее решение $\tilde{q} = 0$, $\tilde{v} = 0$. Аналогично, рассматривая систему (20) в областях $h \le x_n \le 2h$, $2h \le x_n \le 3h$ и т.д., убеждаемся, что она имеет только нулевое решение. Отсюда следует $q_1 = q_2$ и теорема доказана.

Перейдем теперь к формулировке обратной задачи по отношению к системе (I). Как мы уже ранее говорили, она заключается в определении квадратной матрицы $Q = (q_{kj}$, $k, j = 1, 2, \ldots, m)$. Естественно, что для ее отыскания данных (4) по отношению к системе (I) явно недостаточно. Мы будем предполагать, что нам задана информация вида (4) для m различных решений системы (I). Для дальнейшего удобно ввести матрицу $U = (u_{kl}$, $k, l = 1, 2 \ldots, m)$, составленную из столбцов, каждый из которых является решением системы (I). Тогда условия, аналогичные (4), могут быть записаны в виде

$$U(x,0) = \Phi_1(x), \quad U(x,T) = \Phi_2(x). \tag{2I}$$

Представляется вполне естественным условие

$$|\det \Phi_2(x)| \ge \alpha > 0, \tag{22}$$

которое мы будем считать выполненным. Из него следует, в частности, линейная независимость рассматриваемых решений системы (I) при $t = T$.

Будем, как и в случае одного уравнения, предполагать, что матрицы A_i, Φ_1, Φ_2 непрерывны и ограничены вместе с частными производными первого порядка во всем пространстве x; Q просто непрерывна и ограничена, вектор $F(x,t)$ непрерывен и ограничен вместе с частной производной F_t в области $D_T = \{(x,t): |x| < \infty, 0 \le t \le T\}$. Эти условия влекут за собой непрерывность и ограниченность в D_T матрицы U, вместе с производной U_t.

Рассмотрим далее два типа ограничений на коэффициенты λ_{nk}, обобщающих условие (5):

а) $\lambda_{nk}(x) \ge \mu > 0$, $\quad k = 1, 2, \ldots, m$,

б) $\lambda_{nk}(x) \ge \mu > 0$, $\quad 1 \le k \le s$; $-\lambda_{nk}(x) \ge \mu > 0$, $\quad s+1 \le k \le m$.

С каждым из этих условий свяжем класс матриц $Q(x)$, обозначив их соответственно $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_б$. Матрица Q принадлежит к классу $\mathfrak{M}_a$ или $\mathfrak{M}_б$, если дополнительно к наложенным ранее условиям гладкости удовлетворяет условию:

$$Q \in \mathfrak{M}_a, \quad \text{если } Q(x) \equiv 0, \quad \text{для} \quad x_n < 0,$$

$$Q \in \mathfrak{M}_б, \quad \text{если} \quad Q(x) \equiv 0, \quad \text{для} \quad x_n < 0, \quad x_n > h > 0.$$

Рассмотрим характеристику, отвечающую k – му уравнению системы (I):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^k(x), \quad \lambda^k = (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots, \lambda_{nk}),$$

проходящую при $t = t^o$, $t^o \in [0,T]$ через точку x^o, и обозначим через $\xi^k = \xi^k(x^o, t^o)$ точку на этой характеристике, отвечающей значению $t = 0$. Ориентированный отрезок характеристики, заключенный между точками (x^o, t^o), $(\xi^k, 0)$, с положительным направлением от $(\xi^k, 0)$ к (x^o, t^o), обозначим $L_k(x^o, t^o)$. Обозначим через $\varphi_{1kl}, \varphi_{2kl}, F_k$ компоненты матриц Φ_1, Φ_2 и вектора F.

Нетрудно выписать необходимые условия существования решения обратной задачи (I), (2I) в классе $\mathfrak{M}_a$. Они обобщают условие (I0) и имеют вид

$$\varphi_{2kl}(x) - \varphi_{1kl}(\xi^k(x,T)) = \int_{L_k(x,T)} F_k dt, \quad x_n < 0, \tag{23}$$

$$k, l = 1, 2, \dots, m.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_a(q_o)$ класс матриц $Q(x)$, принадлежащих $\mathfrak{M}_a$, для которых элементы матриц ограничены по абсолютной величине заданным положительным числом q_o.

Т е о р е м а 4. Существуют такие положительные числа q_o, h, что при выполнении условий а), (23) в области $x_n \le h$ в классе функции $\mathfrak{M}_a(q_o)$ решение задачи (I), (2I) существует и единственно.

Получим, используя уже применявшийся ранее прием, замкнутую систему уравнений для решения обратной задачи. Интегрируя k -е уравнение системы (I) вдоль характеристики в пределах от $t = 0$ до $t = T$, находим

$$\varphi_{2kl}(x) - \varphi_{1kl}(\xi^k(x,T)) = \int_{L_k(x,T)} (F_k - \sum_{j=1}^{m} q_{kj} u_{jl}) dt, \tag{24}$$

$$k, l = 1, 2, \dots, m.$$

Вычисляя в точке x производную по направлению проекции кривой $L_k(x,T)$ на пространство x, получаем систему равенств:

$$\sum_{j=1}^{m} q_{kj}(x)\varphi_{2jl}(x) = a_{kj}(x) + \sum_{j=1}^{m} q_{kj}(\xi^k(x,T)) \cdot$$

$$\cdot\, \varphi_{1jl}(\xi^k(x,T)) + \int_{L_k(x,T)} \sum_{j=1}^{m} q_{kj} v_{jl}\,dt, \quad k,l = 1,2,\ldots,m,$$

в которых $v_{jl} = \dfrac{\partial}{\partial t} u_{jl}$ и $a_{kj}(x)$ вычисляются по формулам

$$a_{kj}(x) = F_k(x,T) - F_k(\xi^k(x,T),0) - \int_{L_k(x,T)} (F_k)_t \cdot dt -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} [\varphi_{2klx_i}(x)\lambda_{ik}(x) - \varphi_{1klx_i}(\xi^k(x,T))\lambda_{ik}(\xi^k(x,T))].$$

В силу условия (22) систему равенств (25) можно разрешить относительно q_{kj}, $k,\ j = 1,2,\ldots,m$. Дифференцируя систему (1) по t и используя первое из равенств (4), получаем систему интегральных равенств для v_{kl}:

$$v_{kl}(x,t) = v_{kl}(\xi^k(x,t),0) + \int_{L_k(x,t)} (F_t - \sum_{j=1}^{m} q_{kj} v_{jl})\,dt, \tag{26}$$

$$k,l = 1,2,\ldots,m,$$

в которых $v_{kl}(x,0)$ находятся по формулам

$$v_{kl}(x,0) = F(x,0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik}(x)\varphi_{1klx_i}(x) - \sum_{j=1}^{m} q_{kj}(x)\varphi_{1jl}(x).$$

Система равенств (25), (26) по отношению к q_{kj}, v_{kl} представляет собой замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений со сдвинутым аргументом. В случае выполнения условия а) для $x \in D_h = \{x:\ 0 \le x_n \le h\}$, $0 < h < \mu T$, $t \in [0,T]$ эта система превращается в обычную систему интегральных уравнений. Действительно, в этом случае $\xi_n^k(x,T) < 0$ и $q_{kj}(\xi^k(x,T)) = 0$. Разрешая систему (25) относительно q_{kj} и переходя в интегралах от интегрирования по t к интегрированию по ξ_n, приведем систему к нормальному виду. Выразим $q_{kj}(\xi^k(x,t))$, входящие во внеинтегральный член формулы (26), через правую часть разрешенной системы (25). Получившаяся система нелинейных интегральных уравнений содержит h в качестве малого параметра (промежуток интегрирования по ξ_n от 0 до h), ядра и внеинтегральные члены непрерывны, причем частные производные от ядер по q_{kj}, v_{jl} непрерывны и ограничены. Поэтому, если выбрать q_0 из условия, что элементы произведения матриц $\Phi_2^{-1}(x)$ $A(x)$, $A = (a_{kj})$, ограничены по абсолютной величине числом, меньшим, чем q_0, то существует такое малое h, что в области $x \in D_h$, $t \in [0,T]$ непрерывное решение системы (25),(26) существует и единственно, причем $|q_{kj}(x)| \le q_0$. Так как в области $x_n < 0$ система (25) очевидно, имеет, в силу выполнения условий (23), нулевое решение, то в области $x_n \le h$ обратная задача (I),(2I) имеет единственное непрерывное решение $Q \in \mathfrak{M}_a(q_0)$.

Условие разрешимости обратной задачи в случае б) в классе $\mathfrak{M}_\delta$ хотя и может быть сформулировано, имеет довольно сложный вид. В связи с этим соответствующую теорему существования мы не приводим, а сформулируем только теорему единственности и одновременно глобальную теорему единственности на множестве $\mathfrak{M}_a$.

Т е о р е м а 5. Решение обратной задачи (I),(2I) в случае выполнения условия а) единственно на множестве $Q \in \mathfrak{M}_a$, в случае выполнения условия б)–на множестве $Q \in \mathfrak{M}_\delta$ при h достаточно малом.

Пусть существует два решения обратной задачи $Q^1 = (q^1_{kj})$, $Q^2 = (q^2_{kj})$ из классов $\mathfrak{M}_a$ или $\mathfrak{M}_\delta$ и соответственно два набора v^1_{kj}, v^2_{kj}. Тогда, обозначая через $\tilde q_{kj} = q^1_{kj} - q^2_{kj}$, $\tilde v_{kj} = v^1_{kj} - v^2_{kj}$ из равенств (25),(26), выписанных для наборов q^1_{kj}, v^1_{kj}; q^2_{kj}, v^2_{kj}, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \tilde q_{kj}(x)\varphi_{2\,jl}(x) &= \sum_{j=1}^{m} \tilde q_{kj}(\xi^k(x,T))\varphi_{1\,jl}(\xi^k(x,T)) + \\ &+ \int\limits_{L_k(x,T)} \Big[\sum_{j=1}^{m} (q^1_{kj}\tilde v_{jl} + \tilde q_{kj} v^2_{jl})\Big]dt, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{v}_{kl}(x,t) = -\sum_{j=1}^{m}\tilde{q}_{kj}(\xi^k(x,T))\varphi_{jl}(\xi^k(x,T)) - \\ -\int_{L_k(x,t)}\Big[\sum_{j=1}^{m}(q^1_{kj}\tilde{v}_{jl}+\tilde{q}_{kj}v^2_{jl})\Big]dt,\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$k,l = 1,2,\ldots,m.$$

В случае выполнения условия б) для $Q_i \in \mathfrak{M}_б$, $i = 1,2$, $\tilde{q}_{kj}(x) \equiv 0$ вне $D_h = \{x: 0 \le x_n \le h\}$. Если $h < \mu T$, то для $x \in D_h$, $\tilde{q}_{kj}(\xi^k(x,T)) \equiv 0$, так как в силу условия б):

$$\xi^k_n(x,T) \le x_n - \mu T < 0, \quad 1 \le k \le s,$$

$$\xi^k_n(x,T) \ge x_n + \mu T > h, \quad s+1 \le k \le n.$$

В случае выполнения условия а) $Q^i \in \mathfrak{M}_a$, $i = 1,2$, $\tilde{q}_{kj}(x) \equiv 0$ для $x_n < 0$. Тогда для $x \in D_h$, $h < \mu T$, по аналогичным соображениям, $\tilde{q}_{kj}(\xi^k(x,T) \equiv 0$.

И в том, и в другом случаях для $x \in D_h$, $t \in [0,T]$ система равенств (27) представляет собой по отношению к $\tilde{q}_{kj}$, $\tilde{v}_{kj}$ систему однородных интегральных уравнений с непрерывными ограниченными ядрами.

В случае выполнения условия а), эта система Вольтеррова. Поэтому $\tilde{q}_{kj} \equiv 0$ для $x \in D_h$. Для завершения доказательства в этом случае достаточно повторить рассуждения последовательно для областей $h \le x_n \le 2h$, $2h \le x_n \le 3h$, и т.д.

В случае выполнения условия б) система (27) для $x \in D_h$, $h < \mu T$, является однородной системой с малым параметром h. Поэтому для h достаточно малых отсюда следует $\tilde{q}_{kj} = 0$, $x \in D_h$. Отсюда и вытекает справедливость теоремы.

Литература

I. ИСАКОВ В.М. О единственности решения некоторых обратных гиперболических задач.- "Дифференциальные уравнения," т.X, № I, 1974, с. 165-167.

2. БЕЗНОЩЕНКО Н.Я. Об определении коэффициентов при младших членах в параболическом уравнении. СМЖ, т. XVI, №3, 1975, с.473-482.

3. ПЕТРОВСКИЙ И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Наука", 1964, с.55-56.

4. ГЕЛЬФАНД И.М., ГРАЕВ М.И., ВИЛЕНКИН Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.- Серия "Обобщенные функции" вып.5, М.,Физматгиз, 1962.

5. ЗАБРЕЙКО П.П. и др. Интегральные уравнения. СМБ, М.,"Наука", 1968, с.400.

А Н Н О Т А Ц И И
статей, помещенных в сборнике

УДК 517.946

О задаче Коши для уравнения первого порядка со сдвинутым аргументом. Азаматов С.Ж. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.6-15.

В статье исследуется влияние сдвиговых членов на корректность задачи Коши для линейного уравнения первого порядка вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(0, x + y, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0, y - x, t)\right\},$$

где коэффициенты уравнения считаются заданными функциями своих аргументов, а y является параметром.

Рассмотрены два случая, когда $b = b(y)$ и $b = (x,t)$. Оказывается, что и в том, и в другом случаях корректность исследуемой задачи зависит от соотношения коэффициентов b и a. Библ. - 5 назв.

УДК 513.78

Несколько замечаний по теории обратных задач. Аниконов Ю.Е. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.16-25.

В статье приводятся примеры неединственности и неустойчивости решения интегральных уравнений I-го рода типа Вольтерра с положительным ядром и примеры ряда задач интегральной геометрии. При построении примеров приводятся новые формулы обращения для некоторых задач интегральной геометрии. Библ.- 10 назв., рис.-I.

УДК 517.944

Теорема единственности одной обратной задачи для гиперболической системы первого порядка. Белинский С.П. Сб."Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.24-30.

Для системы линейных уравнений первого порядка, гиперболической по Петровскому, записанной в каноническом виде

$$U_t + K\, U_x = DU + F,$$

рассматривается задача отыскания диагональной матрицы K в интервале $[0,L]$. Подобная задача о нахождении матрицы D рассматривалась Романовым В.Г. и Слинючевой Л.И. Информация о решении задается теми компонентами решения, которые дополняют граничные условия. При некоторых общих ограничениях на матрицу K и при достаточной малости L получается теорема единственности. Библ. - 1 назв.

УДК 517.946.

О единственности трех обратных задач для уравнения теплопроводности. Васильев В.Г. Сб."Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.31-34.

В работе рассматриваются три обратные задачи определения правой части уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной на конечном промежутке. Библ. - 1 назв.

УДК 517.946

Теорема единственности одной обратной задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа. Глушкова Е.С. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.35-45.

В работе исследуется одна обратная задача для квазилинейного уравнения гиперболического типа. Специфика задачи состоит в том, что искомая функция зависит от трех пространственных переменных и от решения этого уравнения. Выделен некоторый класс функций, в котором поставленная обратная задача имеет единственное решение. Библ. - 2 назв.

УДК 517.946

Теоремы единственности решения одной плоской обратной задачи для уравнения Гельмгольца. Запреев А.С. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.46-63.

В статье рассмотрена следующая обратная задача для уравнения Гельмгольца в плоскости OXY

$$\Delta u(M) + K^2 u(M) = f(M, K), \qquad (1)$$

где M - точка плоскости; функция $f(M,K)$ финитна, ограничена и измерима по переменной M, причем $\operatorname{supp} f = \Omega$ - ограниченное измеримое множество, расположенное в полуплоскости $\{y \geq \delta\}$, $\delta > 0$ - фиксированное число. Решения уравнения (1) считаются удовлетворяющими условиям излучения на бесконечности. Требуется по известному на прямой $\{y = 0\}$ семейству решений уравнения (1)

$$U_k(X, 0) = \Phi_k(X), \ -\infty < x < \infty, \ \forall k \in A,$$

где A - некоторое множество действительных или комплексных чисел, определить множество Ω и функцию $f(M, k)$ как функцию переменной M, если зависимость от K в некотором смысле известна. В работе получено несколько теорем единственности решения этой обратной задачи. Библ. - 4 назв.

УДК 517.946.

Об одной постановке двумерной обратной задачи для уравнения колебаний. Кабанихин С.И. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.64-73.

Доказывается теорема существования и единственности решения двумерной обратной задачи для уравнения колебаний в классе функций вида $q(x, y) = \sum_{k=1}^{m} a_m(x) \cos my$.

Приводится алгоритм построения функция q. Библ.- 3 назв.

УДК 517.946

О некоторых постановках обратных задач. Кардаков В.Б. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)." Изд.-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.74-89.

В работе исследуются вопросы единственности и устойчивости определения поверхности разрыва и плотности на ней по известному на непространственном многообразии волновому полю. Библ. - 7 назв.

УДК 513.82

О некоторых обратных задачах волновой оптики. П.[ж)] Кирейтов В.Р. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976 с.90-121.

В этой части работы рассмотрена задача определения плотности объемного волнового монохроматического потенциала по заданному семейству линеаризированных изображений этой плотности, полученных с помощью простейшей однолинзовой оптической системы. В случае, когда носитель плотности (которая предполагается, вообще говоря, обобщенной функцией) является дискретным множеством или гладкой замкнутой кривой, получены теоремы единственности определения плотности по конечному числу ее изображений. Если носитель - трехмерная область, то задача определения плотности сводится к задаче определения функции по известным ее интегралам вдоль кривых, образующих заданное семейство. В конце работы приведен ряд замечаний и дополнений к основному тексту. Библ. - 5 назв.

УДК 517.946

Об единственности восстановления некоторых областей по их внешнему гравитационному потенциалу. Кондрашков А.В. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики"). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.122-129.

Рассматривается задача нахождения области T трехмерного пространства по известным значениям ее внешнего гравитационного потенциала с заранее заданной плотностью распределения вещества μ. Доказывается единственность упомянутой задачи в двух случаях, когда внешний потенциал искомой области равен: а) внешнему потенциалу некоторого шара (μ - зависит только от расстояния); в) внешнему потенциалу эллипсоида с плотностью $\mu \equiv 1$. Библ. - 4 назв.

УДК 517.947

Восстановление полного поля по его амплитуде. Марчук А.Г. Сб."Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики"). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.130-134.

В работе рассмотрен вопрос восстановления фазовой компоненты гармонического поля, удовлетворяющего однородному уравнению Гельмгольца в некоторой области, по его амплитудной составляющей. Доказано, что в случае двумерного и осесимметрического волновых полей имеет место единственность задачи восстановления с точностью до двух констант. Приведен пример, показывающий, что количество констант неопределенности уменьшить нельзя.

УДК 517.944

Об одной обратной задаче для слабо связанных гиперболических систем первого порядка. Романов В.Г. Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики (Математические проблемы геофизики"). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.135-148.

По отношению к системе уравнений

$$U_t + \sum_{i=1}^{n} A_i U_{xi} + QU = F, \qquad (2)$$

в которой матрицы A_i - диагональны, $U = (U_1, \dots, U_m)$, рассматривается задача отыскания матрицы $Q = Q(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, при известных матрицах A_i и правой части F. В качестве данных обратной задачи задаются m решений системы (I) при $t = 0$ и $t = T (T > 0)$. Установлены теоремы существования и единственности решения обратной задачи. Библ. - 5 назв.

НЕКОРРЕКТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

(Математические проблемы геофизики)

Под редакцией
Михаила Михайловича Лаврентьева
и Анатолия Семеновича Алексеева

Технический редактор В.С.Сергеев
Художник-оформитель И.Г.Бархатова

Подписано в печать 14/X-1976г. МН07509
Формат бумаги 60x90 1/16 Объем 9,5п.л. Уч.-изд.л.9.7
Тираж 600 экз. Заказ № 272 Цена 67 коп.

Ротапринт ВЦ СО АН СССР, Новосибирск - 90

Цена 67 коп.