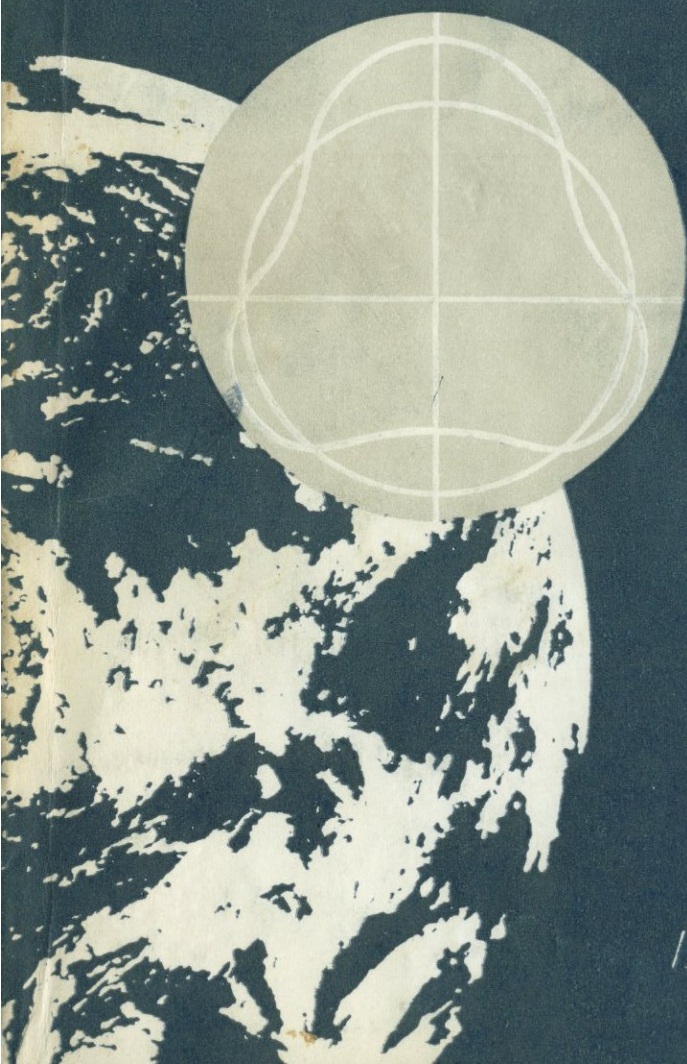


Т. Цубои

*Гравитационное
поле Земли*



Мир



重 力 第2版

坪井忠二著



岩波全書 61

Т. Цубои

Гравитационное поле Земли

Перевод с японского
канд. физ.-мат. наук
И. И. ИВАНЧИКА

под редакцией
д-ра геол.-мин. наук
С. А. УШАКОВА

4057

Москва /МИР/ 1982



Цубои Т.

Гравитационное поле Земли: Пер. с япон. — М.: Мир, 1982. — 288 с., ил.

В книге видного японского геофизика, почетного профессора Токийского университета изложены основы гравиметрии — одного из основных методов исследования Земли. Рассмотрены как теоретические основы изучения силы тяжести, ее аномалий и разложение гравитационного потенциала, так и вопросы измерений и практического использования получаемых результатов для поисков полезных ископаемых и расширения наших знаний о внутреннем строении Земли.

Для студентов геофизических специальностей вузов и втузов, инженеров-геофизиков, физиков и геологов.

*Редакция литературы по космическим исследованиям,
астрономии и геофизике*

Ц $\frac{1903020000-014}{041(01)-82}$ 97-82, ч. 1

© Iwanami Shoten, Publishers, 1979

1979年2月21日 第1刷発行 ©

© Перевод на русский язык, «Мир»
1982

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Труды профессора Т. Цубои, одного из патриархов японской школы геофизиков, хорошо известны советским гравиметристам. Книга «Гравитационное поле Земли» — итог полувековой научно-исследовательской деятельности ее автора и раздумий об основах и путях развития избранного и любимого им научного направления — гравиметрии. Сам автор называет свою книгу учебником, или учебным пособием, и это действительно так. Но книга профессора Цубои — это еще и зрелое, простое по форме изложения и глубокое по содержанию повествование об одном из основных геофизических методов исследования глубинного строения нашей планеты. Мы встречаемся здесь с широким историческим охватом предмета и показом гравиметрии в ее развитии.

Бурное развитие гравиметрических методов исследования Земли, т. е. по существу детального исследования ее гравитационного поля, объясняется успешным применением этих методов для решения многих и практически важных, и чисто научных задач, в частности при поисках полезных ископаемых, расчете траекторий искусственных спутников, изучении фигуры планеты. Автор всесторонне осветил вопросы измерения силы тяжести, постоянно связывая в ходе изложения историю, теорию и практическое применение метода.

Для кого написана эта книга? Конечно, прежде всего для студентов — геофизиков, а также геологов и географов, серьезно интересующихся родственными специальностями. Вероятно, она будет интересна и для специалистов-геофизиков — ведь она дает цельное представление об одном из фундаментальных методов исследования Земли.

Характерная особенность книги — не только удачное сочетание глубокого проникновения в существо предмета с простотой его подачи, но и показ истории становления и развития целого направления геофизики. Однако советскому читателю следует учитывать, что учебник этот написан для японских студентов и в нем особенно подчеркивается вклад японской школы гравиметристов, у истоков которой стоял автор книги.

Очень приятно, что специально для русского издания книги автор добавил библиографический список, отсутствовавший в японском издании.

С. А. Ушаков

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1935 г. издательство «Иванами» выпустило в свет мою книгу «Гравитационное поле Земли», которая была переиздана в 1940 г. С тех пор прошло 40 лет. Содержание книги несколько устарело, да и способ подачи материала в ней был далек от совершенства.

Последние 40 лет я много работал над проблемами гравиметрии. За это время как в Японии, так и за ее пределами гравиметрические исследования получили большое развитие, радикально изменились как техника гравиметрической съемки, так и применяемая аппаратура. Особенно радостно для меня то, что в Японии теперь над решением гравиметрических задач работает гораздо больше людей. Если в момент выхода первого издания книги во всей стране вряд ли можно было насчитать десять специалистов в этой области знаний, то теперь их число увеличилось в несколько десятков раз и ежегодно появляются великолепные гравиметрические результаты. Кроме того, в настоящее время усилилось стремление не только профессионалов-гравиметристов, но и специалистов смежных областей — сейсмологов, вулканологов, геологов-тектонистов — искать связь разнообразных геофизических явлений с распределением гравитационных аномалий.

По всем этим причинам я чувствовал себя обязанным полностью переделать свою старую книгу «Гравитационное поле Земли» и написать по существу новую с гораздо более широким подходом к освещению всех связанных с гравиметрией проблем. Кроме того, мне хотелось свести воедино многочисленные накопившиеся у меня за долгое время фрагменты и записи.

Поэтому, получив предложение от издательства «Иванами», я тут же принялся за работу, и через два года задуманная книга была готова.

Данная книга — учебное пособие, а не монография для специалистов. Поэтому в каждом отдельном случае я не углублялся в подробности, а пытался по возможности более понятно объяснить существо дела.

Но для написания даже такой ограниченной по своему замыслу книги моих собственных знаний и сил было бы, конечно, недостаточно. Я многому научился у своих японских и зарубежных коллег и часто цитирую их работы. Всем им я хотел бы еще раз выразить глубокое уважение и признательность.

Особенно большую помощь при написании книги мне оказали коллеги: Ё. Томода (Токийский университет), Х. Судзуки (Национальное управление геодезии и географии), И. Ёкояма (университет Хоккайдо), К. Данхара (университет Сидзуока). Всем им я приношу самую сердечную благодарность.

Т. Цубои

Январь 1979 г.

СИЛА ТЯЖЕСТИ

§ 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Все, что окружает нас на поверхности земли, испытывает действие силы тяжести. Мы ощущаем ее как вес. Направленные действия этой силы мы называем «направлением вниз».

Величина силы тяжести, действующей на тело в некоторой точке земной поверхности, пропорциональна массе этого тела. Если коэффициент пропорциональности обозначить g , то величина силы тяжести выразится в виде mg . Направляя ось z вниз, запишем уравнение свободного падения тела:

$$m\ddot{z} = mg.$$

Сокращая на m , получаем

$$\ddot{z} = g;$$

иными словами, ускорение свободного падения не зависит от массы тела, а константа g выражает величину этого ускорения. Ускорение, равное 1 см/с^2 , называют 1 Гал в честь Галилео Галилея (1564—1642). На поверхности земли ускорение свободного падения приблизительно равно 980 см/с^2 (980 Гал). Величину $1/1000$ Гал (ускорение $0,001 \text{ см/с}^2$) называют 1 миллигал (мГал); например, запись 980,123 означает, что g известно с точностью 1 мГал. Величины порядка 1 мГал часто фигурируют в геофизических задачах, в частности потому, что таков современный предел точности обычных гравиметрических измерений. Но в связи с прогрессом измерительной техники теперь в ряде случаев ставится вопрос об измерении величин порядка $1/1000$ от 1 мГал, например об измерении значений g до шестого знака (980,123456), т. е. с точностью до одной миллионной. Величину 10^{-6} Гал называют 1 микрогал (мкГал).

Сила тяжести, действующая на тело весом mg , равна mg дин, а на тело массы 1 г — g дин. Таким образом, величина силы тяжести, действующей на тело массы 1 г и измеренная в динах, а также величина ускорения свободного падения, измеренная в галах, имеют одно и то же численное значение. По этой причине вместо правильных развернутых высказываний типа «ускорение свободного падения в данной точке

земной поверхности равно 980,123 Гал» или «величина силы тяжести, действующей на тело массы 1 г в данной точке земной поверхности, составляет 980,123 дин» встречаются выражения: «в данной точке земной поверхности сила тяжести равна 980,123 Гал» или еще короче: «в данной точке земной поверхности сила тяжести равна 980,123». Эти выражения, несомненно, неточны, но если их употреблять с пониманием, то никакого вреда не будет. В данной книге тоже нередки подобные выражения. Если специально не оговорено противное, всюду применяется система единиц СГС. Часто подробного названия соответствующих единиц не дается.

§ 2. ЗЕМНОЕ ПРИТЯЖЕНИЕ

Константа g округленно равна 980. Это значение в основном определяется земным притяжением. Мы говорим «в основном», так как кроме притяжения на тела действует еще центробежная сила, обусловленная вращением Земли. В данном параграфе мы абстрагируемся от вращения и считаем, что покоящаяся Земля — идеальный шар со сферически-симметричным распределением в нем масс и радиусом

$$R = 6,4 \cdot 10^8 \text{ см.}$$

Постоянную, входящую в закон всемирного тяготения, мы обозначим k^2 , чтобы подчеркнуть, что она положительна. В других книгах для нее встречается обозначение G . Из закона всемирного тяготения вытекает, что

$$g = \frac{k^2 M}{R^2},$$

откуда

$$M = \frac{980 \cdot (6,4 \cdot 10^8)^2}{k^2}.$$

Таким образом, зная величину k^2 , можно определить массу земного шара M . Величина k^2 равна силе притяжения двух тел массой 1 г, находящихся на расстоянии 1 см друг от друга.

Схема экспериментального определения величины k^2 в принципе проста. Для этого на концах поперечного стержня нужно укрепить две гирьки массой m , как показано на рис. 1.1, подвесить стержень с гирьками на тонкой проволоке, расположив его горизонтально, и успокоить всю систему. По бокам гирек m надо поместить большие массы S . Притяжение m к S вызовет поворот поперечного стержня и закручивание проволоки. Когда момент кручения проволоки и момент силы притяжения масс уравниваются друг друга, поперечный стержень остановится. Зная величину масс m и S , упругость про-

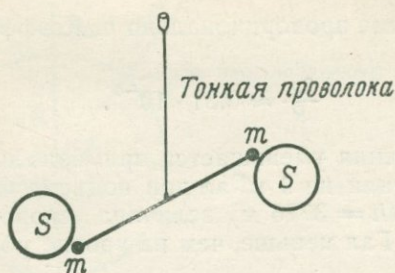


Рис. 1.1.

волоки и размеры всех частей системы, по углу поворота стержня можно определить величину k^2 . Такой опыт в прошлом выполняли многие исследователи. Исторически наиболее известны измерения Г. Кавендиша (1731—1810). Согласно современным данным,

$$k^2 = 6,6720 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2).$$

По случайному совпадению число 6,67 близко к 20/3. Этой дробью иногда пользуются при приближенных расчетах. Подставляя значение k^2 , для массы Земли M получаем

$$M = \frac{gR^2}{k^2} = \frac{980 \cdot (6,4 \cdot 10^8)^2}{6,67 \cdot 10^{-8}} \approx 6,0 \cdot 10^{27} \text{ г}.$$

Деля эту величину на объем земного шара, получаем среднюю плотность Земли

$$\rho = \frac{gR^2}{k^2} / \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{3g}{4\pi k^2 R} \approx 5,5 \text{ г/см}^3.$$

Используя значение k^2 , можно оценивать величину гравитационного притяжения самых различных предметов. Например, два человека, весящие по 60 кг и стоящие на расстоянии 5 м друг от друга, притягиваются с силой 0,001 дин. На поверхности свинцового шара радиуса 3,2 м сила притяжения равна 1 мГал. Этой же величине равно притяжение на поверхности безграничной каменной плиты, имеющей плотность 2,7 и толщину 8,9 м.

Мы уже упоминали, что на поверхности земли $g \approx 980$. При подъеме на высоту h над поверхностью расстояние до центра Земли возрастает, а земное притяжение уменьшается обратно пропорционально квадрату этого расстояния. При $h \ll R$ сила притяжения на высоте h над поверхностью земли

$$F = \frac{k^2 M}{(R+h)^2} \approx \frac{k^2 M}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \approx g - \frac{2g}{R} h$$

уменьшается прямо пропорционально h . Коэффициент пропорциональности

$$\frac{2g}{R} \approx 0,31 \cdot 10^{-5}.$$

Сила притяжения уменьшается примерно на 0,3 мГал при подъеме на 1 м, или на 1 мГал при подъеме на 3,3 м. На высоте Фудзиямы ($h = 3776$ м) величина ускорения свободного падения на 1165 Гал меньше, чем на уровне моря.

§ 3. ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА, СОЗДАВАЕМАЯ ВРАЩЕНИЕМ ЗЕМЛИ

Сила тяжести в основном обусловлена земным притяжением. Но Земля вращается вокруг своей оси. Поэтому при рассмотрении механических явлений в системе отсчета, жестко связанной с Землей, мы не можем ограничиться учетом только земного притяжения; надо принимать в расчет также действие центробежной силы. Под силой тяжести мы понимаем силу, которая действует в системе отсчета, жестко связанной с Землей, т. е. движущейся вместе с Землей при ее вращении. Такая система отсчета неинерциальна. Введение центробежной силы означает, что эту ускоренную систему отсчета мы рассматриваем как неподвижную.

Земля вращается со скоростью один оборот в сутки (86 164 с). Ее угловая скорость вращения равна

$$\omega = 2\pi/86164 \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с.}$$

Если принять, что Земля — идеальный шар, то в точке с географической широтой φ центробежная сила *) равна

$$f = \omega^2 R \cos \varphi.$$

На величину g влияет радиальная составляющая этой силы, поэтому при рассмотрении силы тяжести f нужно умножить на $\cos \varphi$; получается, что под действием центробежной силы земное притяжение уменьшается на $\omega^2 R \cos^2 \varphi$. На экваторе, где $\varphi = 0$,

$$\omega^2 R \cos^2 \varphi = \omega^2 R \approx 3,4;$$

это составляет примерно 1/300 величины $g \approx 980$. На полюсах, где $\varphi = 90^\circ$, центробежная сила отсутствует.

По данным современных измерений (1967 г.)

$$\text{на полюсах } g = 983,218,$$

$$\text{на экваторе } g = 978,032.$$

*) Точнее, f — центробежное ускорение. — Прим. перев.

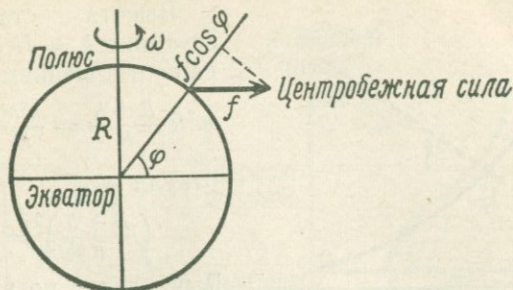


Рис. 1.2.

Разность между этими значениями (5,2) не совпадает с приведенной выше цифрой 3,4. Расхождение объясняется тем, что Земля — не идеальный шар.

§ 4. РАВНОВЕСИЕ СИЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ И ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ

Итак, центробежная сила больше всего на экваторе. Если через h обозначить высоту, то на экваторе

$$f = \omega^2 (R + h) = \omega^2 R \left(\frac{R + h}{R} \right).$$

Величина f растет линейно с увеличением h . На рис. 1.3 зависимость f от h показана пунктиром. С другой стороны, на высоте h сила притяжения равна

$$F = \frac{k^2 M}{(R + h)^2} = \frac{k^2 M}{R^2} \left(\frac{R}{R + h} \right)^2.$$

Зависимость F от высоты показана на рис. 1.3 сплошной кривой; F нелинейно уменьшается с ростом высоты. Это уменьшение можно понимать как уменьшение с высотой величины g .

Две кривые пересекаются в точке H . Если тело, имеющее нулевую начальную скорость, предоставить самому себе на высоте, меньшей H , то оно начнет двигаться по направлению к Земле, так как здесь сила притяжения больше центробежной. Но если это тело освобождено на высоте, большей H , где центробежная сила больше силы притяжения, то оно начнет удаляться от Земли. На высоте H обе силы уравновешиваются, и наше тело не приближается к Земле и не удаляется от нее. Оно обращается вокруг Земли с периодом в сутки, находясь все время над одной и той же точкой экватора; говорят, что оно представляет собой *стационарный спутник*.

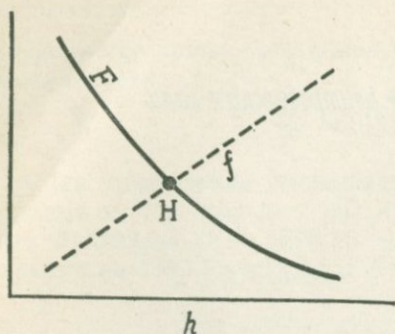


Рис. 1.3.

Высота стационарного спутника $h = H$ определяется соотношением

$$\omega^2 R \frac{R+h}{R} = \frac{k^2 M}{R^2} \left(\frac{R}{R+h} \right)^2,$$

откуда

$$\left(\frac{R+h}{R} \right)^3 = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Вычисление по этой формуле дает

$$h = 5,6R \approx 36\,000 \text{ км.}$$

На меньших высотах величина g при подъеме, например на гору, уменьшается за счет увеличения центробежной силы. На высоте Фудзиямы этот эффект составляет примерно 1,8 мГал.

§ 5. ЗАВИСИМОСТЬ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ОТ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ШИРОТЫ

Как уже говорилось, на поверхности земли на тела действуют две силы: притяжение F и центробежная сила f . Сила тяжести является их равнодействующей.

Примем, что Земля — вращающаяся сфера, и вычислим зависимость силы тяжести от географической широты. Как видно из рассмотрения треугольника со сторонами, равными g , F и f , показанного на рис. 1.4, в точке с географической широтой φ

$$\begin{aligned} g^2 &= F^2 + f^2 - 2Ff \cos \varphi = \\ &= \left(\frac{k^2 M}{R^2} \right)^2 + (\omega^2 R \cos \varphi)^2 - 2 \frac{k^2 M}{R^2} \omega^2 R \cos^2 \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$g \approx \frac{k^2 M}{R^2} \left(1 - \frac{\omega^2 R}{k^2 M / R^2} \cos^2 \varphi \right).$$

Полагая приближенно

$$\frac{k^2 M}{R^2} = 980, \quad \frac{\omega^2 R}{k^2 M / R^2} = \frac{1}{300},$$

найдем

$$g = 980 (1 - 0,0033 \cos^2 \varphi) = 977 (1 + 0,0033 \sin^2 \varphi).$$

Определяемая этой формулой широтная зависимость g изображается кривой, показанной на рис. 1.5.

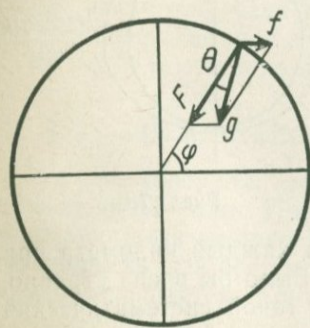


Рис. 1.4.

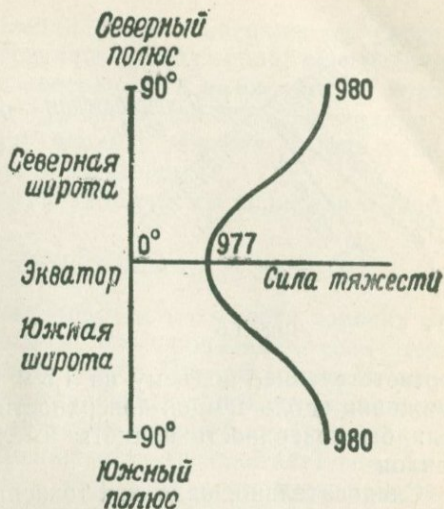


Рис. 1.5.

Эта кривая не является точным представлением действительного широтного хода силы тяжести. Отличия возникают как из-за приближенного характера использованной формулы, так и из-за отклонения формы Земли от сферической. Но она позволяет составить общее представление об искомой широтной зависимости.

§ 6. ГЕОИД

Нашу формулу мы получили в предположении, что Земля — идеальная сфера, но это предположение неверно. В самом деле, направление силы тяжести, определяемое рис. 1.4, не перпендикулярно поверхности. Иными словами, у нас получилось, что земная поверхность не перпендикулярна отвесной линии (как поверхность склона горы). Угол наклона можно вычислить из соотношения

$$\frac{g}{\sin \varphi} = \frac{f}{\sin \theta}.$$

Подставляя сюда выражение $f = \omega^2 R \cos \varphi$, получаем

$$\theta = \frac{f \sin \varphi}{g} = \frac{\omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R}{g} \sin 2\varphi.$$

При $\varphi = 45^\circ$ угол наклона θ принимает максимальное значение

$$\theta \approx 5',$$

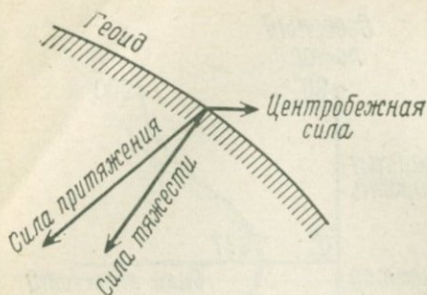


Рис. 1.6.

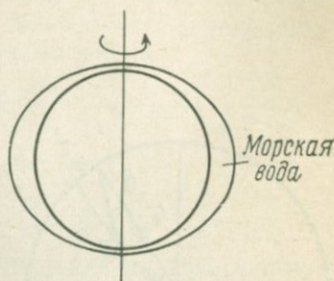


Рис. 1.7.

соответствующее подъему на 1,5 м на каждый километр при движении вдоль земной поверхности. Было бы очень странно, если бы поверхность планеты имела такой систематический наклон.

Следовательно, надо как-то исправить наше предположение о форме земной поверхности. Попробуем это сделать следующим образом. Предположим, что земная поверхность всюду перпендикулярна силе тяжести, или (что то же самое)

земная поверхность всюду горизонтальна.

Иначе говоря, примем, что

поверхность Земли ортогональна равнодействующей сил притяжения и центробежной силы.

Таким образом, земная поверхность ортогональна силе тяжести, а не силе притяжения. Это положение иллюстрируется рис. 1.6. Такую поверхность называют *геоидом*. Геоид получится, если всю поверхность земного шара покрыть водой.

Можно предположить, что твердая часть Земли, имеющая идеальную сферическую форму, также покрыта морем и вся такая Земля вращается. Тогда в окрестности экватора поверхность моря вспучится и в состоянии равновесия примет форму, показанную на рис. 1.7. В таком случае море у экватора было бы значительно глубже, чем у полюсов. Разумеется, в действительности это не так. За несколько миллиардов лет, прошедших с момента образования Земли, ее так называемая «твердая часть» пришла в равновесное состояние, такое же, как если бы Земля была жидкой.

По определению поверхность геоида всюду горизонтальна и при движении тела вдоль нее сила тяжести не совершает работу. Следовательно, геоид — поверхность постоянного потенциала силы тяжести (но сама сила тяжести на нем не

постоянна!). Таких эквипотенциальных поверхностей бесконечно много, и они, не пересекаясь между собой, охватывают Землю. Для геоида из этих поверхностей выбирают ту, которая совпадает со средним уровнем океана. Поверхность геоида получится, если сушу вдоль и поперек изрыть каналами, сообщающимися с открытым морем.

К задаче о потенциале силы тяжести мы вернемся в гл. 6.

§ 7. ДВИЖУЩЕЕСЯ ТЕЛО, ЭФФЕКТ ЭТВЕША

Мы уже говорили, что величина силы тяжести зависит от центробежной силы. Посмотрим, что произойдет, если тело будет двигаться по поверхности земли. При движении на восток скорость его вращения возрастает, а при движении на запад уменьшается. Соответственно возрастает (уменьшается) центробежная сила и уменьшается (возрастает) сила тяжести. Пусть тело движется в восточном направлении вдоль экватора со скоростью v относительно Земли. Тогда скорость его суточного вращения возрастет от значения ωR (около 0,5 км/с) до $(\omega R + v)$, а центробежная сила увеличится от $(\omega R)^2/R$ до $(\omega R + v)^2/R$. Учитывая, что $v \ll \omega R$, получаем

$$\frac{(\omega R + v)^2}{R} - \frac{(\omega R)^2}{R} \sim 2v\omega.$$

Если человек идет со скоростью $v = 1$ м/с, то

$$2v\omega = 2 \cdot 10^2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \sim 15 \cdot 10^{-3}.$$

Величина g при этом уменьшается на 15 мГал. Человек весом 60 кг должен почувствовать, что при такой прогулке он весит меньше на

$$60 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \approx 980 \sim 0,9 \text{ г.}$$

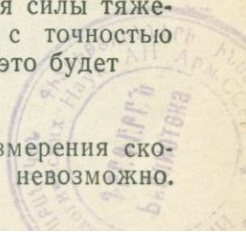
Если же он движется в западном направлении, то его вес возрастает на 0,9 г.

Этот эффект имеет практическое значение при измерении силы тяжести. Например, на движущемся судне невозможно точно измерить величину силы тяжести, если не знать составляющую скорость судна в направлении восток — запад. Поскольку при скорости 1 м/с указанный эффект составляет 15 мГал, то для обеспечения точности измерения силы тяжести в 1 мГал скорость необходимо измерять с точностью $100/15 \approx 7$ см/с. В пересчете на скорость в м/ч это будет

$$7 \times 60 \times 60 \text{ см/ч} \approx 250 \text{ м/ч,}$$

т. е. около 0,1 узла. Достичь такой точности измерения скорости судна обычными методами практически невозможно.

4057



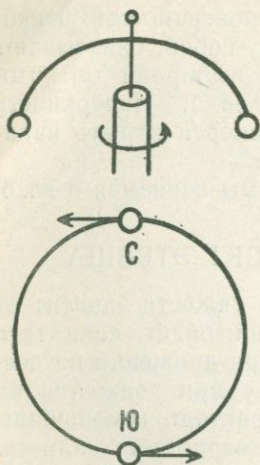


Рис. 1.8.

Но в последнее время эта точность достигается путем измерений с помощью искусственных спутников Земли.

Итак, видимое значение силы тяжести изменяется при движении тела относительно Земли. Впервые на этот эффект обратил внимание венгерский физик Р. Этвеш (1848—1919). В его честь эффект получил название *эффекта Этвеша*.

Эффект Этвеша можно использовать для ориентации без помощи звезд и магнитного компаса. Для определения направления север—юг нужно изготовить нечто вроде игрушечного клоуна-эквилибриста, показанного на рис. 1.8. Если клоуна закрутить на подставке вокруг вертикальной оси,

то две гири в его руках будут двигаться во взаимно противоположных направлениях. Если его руки находятся в меридиональной плоскости, то южная гиря будет перемещаться на восток, а северная—на запад. Благодаря эффекту Этвеша сила тяжести, действующая на гирьку, движущуюся в восточном направлении, слегка ослабляется, а на гирьку, движущуюся на запад, немного увеличивается. Поэтому фигурка наклонится в северную сторону. Подбирая частоту вращения фигурки, можно добиться, чтобы наклоняющая сила оказалась в резонансе с ее собственными колебаниями. Тогда наклон на север может возрасти до заметных значений.

В приведенном выше расчете мы приняли, что $v \ll \omega R$. Рассмотрим теперь случай, когда скорость тела относительно Земли v очень велика. При очень большом v может оказаться, что центробежная сила равна силе притяжения и действующая на тело сила тяжести равна нулю. Если на экваторе бросить тело по горизонтали с такой большой скоростью, то оно полетит вдоль земной поверхности, не падая на нее. Соответствующее значение v определяется из формулы

$$g = (\omega R \pm v)^2 / R$$

(знак «+» используется для движения в восточном, знак «-» — в западном направлении). Отсюда

$$\omega R \pm v = \pm \sqrt{gR}.$$

Подставляя численные значения g и R , находим

$$\omega R \pm v = \pm 7,9 \text{ км/с.}$$

Благодаря суточному вращению Земли точка на экваторе сама по себе перемещается со скоростью $\omega R \sim 0,5$ км/с в восточном направлении. Поэтому тело, брошенное на восток со скоростью $7,9 - 0,5 = 7,4$ км/с, становится искусственным спутником, летящим вплотную к земной поверхности. Аналогичным образом поведет себя тело, брошенное на запад со скоростью $7,9 + 0,5 = 8,4$ км/с.

Любопытно, что период обращения такого искусственного спутника

$$T = \frac{2\pi R}{\omega R \pm v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

совпадает с периодом колебаний простого математического маятника, имеющего длину, равную радиусу Земли R . Этот период равен 5080 с, т. е. около 1 ч 25 мин.

Поскольку речь зашла об искусственных спутниках, скажем несколько слов о состоянии невесомости. Сила притяжения, действующая на космический корабль на орбите спутника, равна центробежной. Это относится не только к кораблю, но и к находящимся в нем космонавтам. Если космонавт не вступает в механический контакт с кораблем, он не должен ощущать своего веса. Это и есть состояние *невесомости*.

Невесомость возникает не только внутри искусственных спутников. Представим себе людей в ящике, подвешенном где-либо высоко на канате. Если канат внезапно перерезать, то и ящик и люди начнут падать с одинаковой скоростью и люди перестанут ощущать свой вес. Это тоже состояние невесомости. Нечто подобное ощущаем мы в лифте, когда он начинает двигаться вниз. Здесь, правда, нет полной невесомости, но «облегчение» тела вполне заметно. Интересно наблюдать за показаниями пружинных весов в лифте, на чашу которых положен груз. Показания весов заметно изменяются в начале спуска или подъема. Видимое значение силы тяжести изменяется из-за наличия вертикального ускорения.

§ 8. СИЛА ТЯЖЕСТИ ВНУТРИ ЗЕМЛИ

До сих пор мы говорили о поверхности земного шара и о пространстве вне его. А как ведет себя сила тяжести внутри Земли? Для простоты примем, что Земля — идеальная сфера и пренебрежем ее вращением. Предположим также, что распределение масс внутри такой Земли сферически симметрично. При этих предположениях сила тяжести совпадает с силой притяжения.

Сила тяготения в точке P внутри гравитирующей сферы создается массами, расположенными глубже P (рис. 1.9). Тяготение масс, расположенных на меньшей глубине, взаимно

Поверхность Земли

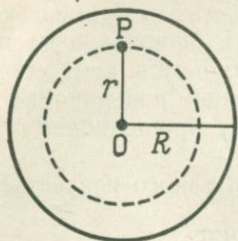


Рис. 1.9.

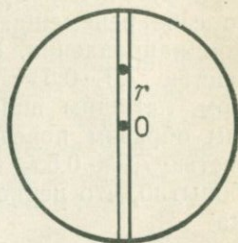


Рис. 1.10.

уничтожается: суммарная сила притяжения со стороны соответствующего сферического слоя равна нулю. Масса, находящаяся глубже P , зависит от распределения плотности внутри Земли. При постоянной плотности ρ она будет равна $\frac{4}{3}\pi r^3\rho$, а сила притяжения в точке P

$$\frac{4}{3} \frac{\pi k^2 r^3 \rho}{r^2} = \frac{4}{3} \pi k^2 \rho r$$

максимальна на поверхности и линейно спадает по мере приближения к центру сферического тела. В центре сила притяжения равна нулю. Такая зависимость силы от расстояния характерна для простых гармонических колебаний. Представим себе, что мы прорыли туннель через центр Земли от некоторой точки на ее поверхности до диаметрально противоположной точки и уронили туда с поверхности тело (рис. 1.10). Оно пройдет через центр Земли до диаметрально противоположной точки и возвратится назад, а затем будет совершать около центра гармонические колебания. Уравнение этих колебаний имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi k^2 \rho r,$$

а их период определяется формулой

$$T = 2\pi / \sqrt{\frac{4}{3}\pi k^2 \rho}.$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$g = \frac{4}{3}\pi k^2 \rho R,$$

то получим, что наш период равен периоду колебаний простого математического маятника длиной R :

$$T = 2\pi \sqrt{R/g};$$

его численное значение

$$T = 2\pi \sqrt{R/g} = 2\pi \sqrt{6,4 \cdot 10^8 / 980} \sim 5080 \text{ с} \sim 1 \text{ ч } 25 \text{ мин}$$

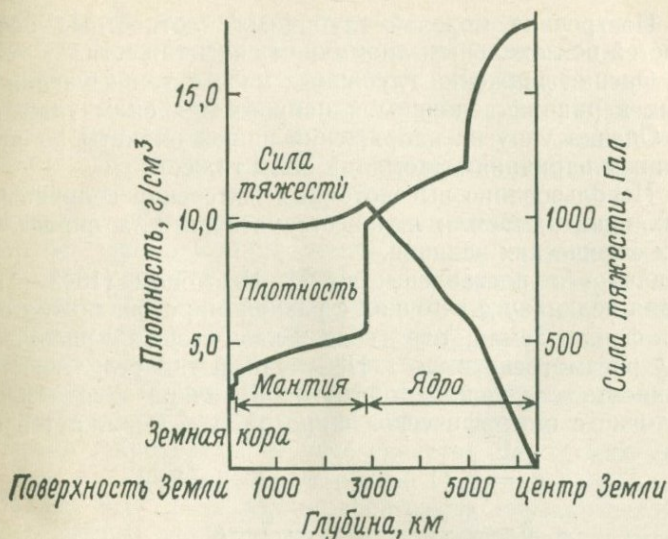


Рис. 1.11.

совпадает с периодом обращения искусственного спутника, летящего вдоль экватора вплотную к земной поверхности. Интересное совпадение.

Действительное распределение масс внутри Земли отличается от рассмотренной нами модели. Его определяют по прохождению сейсмических волн, и в настоящее время оно хорошо известно. Его иллюстрирует рис. 1.11. Получивший эти данные австралийский ученый К. Буллен (1953 г.) ввел термины *земная кора*, *мантия* и *ядро*. На рис. 1.11 показан также глубинный ход силы тяжести, рассчитанный по данным о распределении масс. Если бы плотность вещества в Земле была постоянной, сила притяжения должна была бы уменьшаться с глубиной, но в действительности ввиду возрастания плотности сила тяжести остается практически неизменной до глубины около 2500 км. На глубине 3000 км сила тяжести несколько возрастает, достигая значения 1000 Гал.

§ 9. ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Измерения величины и направления силы тяжести на земной поверхности находят разнообразные применения. Выделяют следующие пять основных приложений гравиметрии.

А. Определение фигуры Земли на основе крупномасштабных изменений величины и направления силы тяжести в функции географической широты.

Б. Построение моделей глубинных плотностных неоднородностей по локальным аномалиям силы тяжести.

В. Оценка движений глубинных масс путем изучения временных вариаций величины и направления силы тяжести.

Г. Оценка упругих напряжений нашей планеты по лунно-солнечным вариациям аномалий силы тяжести.

Д. Использование высокоточных измерений величины g в разных пунктах Земли в качестве основы для определения других физических величин.

Задача «А» поставлена еще И. Ньютоном (1643—1727). Измеряя величину g в точках с разной широтой, можно определить форму Земли, т. е. геоид. Связь геоида с распределением g рассмотрена в гл. 4. Полученный там результат можно записать следующим образом. Величина силы тяжести g_φ в точке с географической широтой *) φ выражается формулой

$$g_\varphi = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta' \sin^2 2\varphi);$$

$$\beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} - \varepsilon - \frac{17}{14} \frac{\omega^2 a}{g_e} \varepsilon;$$

$$\beta' = \frac{\varepsilon}{8} \left(\frac{5\omega^2 a}{g_e} - \varepsilon \right),$$

$$\varepsilon = (a - b)/a.$$

Здесь g_e — сила тяжести на экваторе, ω — угловая скорость вращения Земли, a — ее экваториальный радиус, b — полярный радиус, ε — сжатие (плюснутость) Земли. Поскольку геоид — фигура вращения, величина g зависит только от широты и не зависит от долготы. Пользуясь международными данными, определяют величины g_e , β , β' , а по ним вычисляют сжатие земного шара ε .

Задача «Б» — центральная проблема гравиметрии. Величина g зависит от распределения масс под земной поверхностью. Поэтому, установив распределение g , можно узнать распределение масс. Самые крупные задачи этого класса — проблема образования материков и океанов, а также определение глубинного строения горных хребтов и океанических впадин. В этой связи возникло понятие изостазии, о котором подробно говорится в гл. 12. Более частные задачи — объяснение строения вулканов и проблемы геологии отдельных регионов Земли. И совсем локальные задачи — поиск месторождений нефти и других минеральных ресурсов.

*) Угол пересечения экваториальной плоскости и прямой линии, продолжающей линию отвеса в данной точке земной поверхности. Угол пересечения экваториальной плоскости с прямой, соединяющей данную точку поверхности с центром Земли, называют геоцентрической широтой.

Задача «В» поставлена в самое последнее время. Какие изменения в глубинах Земли связаны с землетрясениями и извержениями вулканов? Ведь если под землей что-то происходит, то в окрестности этого места величина g должна изменяться со временем. По этим изменениям можно изучать движения глубинных масс. Соответствующие вопросы рассмотрены в гл. 11.

В задаче «Г» речь идет о явлении земных приливов. Под влиянием Луны и Солнца Земля периодически деформируется. На величину g в некоторой точке земной поверхности Луна и Солнце влияют непосредственным образом, но этим дело не исчерпывается. Благодаря деформациям тела Земли на локальное значение g влияет притяжение, испытываемое другими частями Земли. Кроме того, деформации изменяют расстояние данной точки до центра Земли. Учитывая эти эффекты, можно определить упругие свойства Земли как единого тела (см. гл. 11).

Задача «Д» не является собственно геофизической проблемой, скорее она относится к определению фундаментальных постоянных физики и химии. Например, температура 100°C определяется как температура кипения воды при давлении 1 атм, т. е. при давлении $1013,250$ дин/см². Но, вообще говоря, давление определяют, пользуясь высотой столбика ртути, по формуле

$$P = \rho gh.$$

Здесь P — давление, ρ — плотность ртути, h — высота столба ртути. Если не знать величину g , то по h нельзя вычислить P . По общепринятому соглашению величина $1013,250$ мбар соответствует значениям $g = 980,665$ Гал, $\rho = 13,5951$ г/см³, $h = 760,00$ мм. Поэтому, чтобы связать 1 атм с высотой столба ртути в некотором месте, надо знать, чему там равно g .

В течение всей нашей жизни сила тяжести неотступно преследует нас на Земле, и мы не в состоянии от нее избавиться. Этим очевидным замечанием мы закончим предварительное ознакомление с силой тяжести и перейдем к конкретному рассмотрению проблем гравиметрии.

ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

§ 10. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Переходя к измерению величины силы тяжести g , вспомним прежде всего математический маятник.

Период колебаний T математического маятника длиной l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right),$$

где α (в радианах) — амплитуда колебаний. Если при малом α пренебречь членом $\alpha^2/16$, то

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Измеряя T и l , находим значение g .

Под математическим маятником подразумевают не имеющую размеров материальную точку, подвешенную на идеально упругой нерастяжимой нити. Разумеется, такое идеальное устройство практически нереализуемо, и в действительности пользуются довольно крупными и тяжелыми грузами, висящими на проволоке, которая деформируется при колебаниях маятника. Эти деформации влияют на величину периода колебаний. Точно измерить длину подвеса удается не всегда; кроме того, часто неизвестно положение центра тяжести груза.

Тем не менее раньше силу тяжести почти всегда измеряли именно так. Пример огромного маятника, использовавшегося Ж. Ш. Борда (1790 г.), показан на рис. 2.1.

Точность подобных измерений не превышает в лучшем случае нескольких десятков миллигал. Для учебных целей этого, возможно, и достаточно, но с точ-

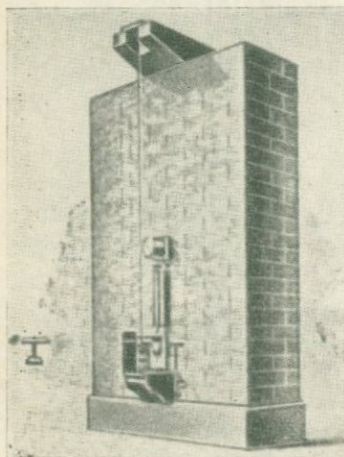


Рис. 2.1. Маятник Борда.

ки зрения современных исследований такая точность совершенно недостаточна.

§ 2. ОБОРОТНЫЙ МАЯТНИК

Недостатки, присущие математическому маятнику, устранены в так называемом физическом, или обратном, маятнике, предложенном Х. Кэтером в 1818 г. Кэтер предложил пользоваться твердым стержневидным маятником массой M , подвешенным в точке O (рис. 2.2). Период его колебаний

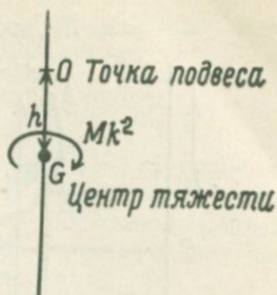


Рис. 2.2

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M(k^2 + h^2)}{Mgh}}$$

где h — расстояние от точки подвеса O до центра тяжести G , а k — радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести. Длина l математического маятника, имеющего тот же период колебаний, определяется из соотношения

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{M(k^2 + h^2)}{Mgh}}$$

откуда следует уравнение для h :

$$h^2 - lh + k^2 = 0,$$

решая которое, находим

$$h = (l \pm \sqrt{l^2 - 4k^2})/2.$$

Таким образом, каждому периоду колебаний (или, что то же, каждому l) отвечают два значения h :

$$h_1 = (l + \sqrt{l^2 - 4k^2})/2, \quad h_2 = (l - \sqrt{l^2 - 4k^2})/2,$$

удовлетворяющие соотношению

$$h_1 + h_2 = l.$$

Из рис. 2.3, на котором изображена зависимость периода колебаний от h , видно, что с каждой стороны центра тяжести имеется по два значения $h_{1,2}$ (всего четыре значения, определяемые точками пересечения A, B, C, D), отвечающие одному и тому же периоду колебаний T , причем расстояния от A до C и от B до D равны l . Измерив расстояние $h_1 + h_2$ и период T и воспользовавшись соотношением

$$T = 2\pi \sqrt{(h_1 + h_2)/g},$$

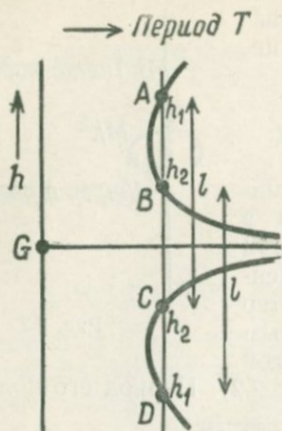


Рис. 2.3.

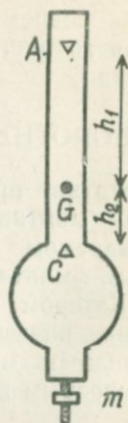


Рис. 2.4. Обратный маятник

находим g . При этом не нужно определять положение центра тяжести маятника или значения h_1 и h_2 по отдельности, достаточно измерить расстояние от A до C или от B до D (каждое из них равно $h_1 + h_2$ — длине l математического маятника, имеющего тот же период колебаний). В ходе измерений маятник приходится переворачивать, поэтому он и называется *обратным*.

Но искать совпадения периодов колебаний при изменении положений точек подвеса и измерять получающиеся в результате расстояния довольно неудобно. Поэтому на практике положения точек подвеса (например, A и C — рис. 2.4) фиксируют на ребрах опорных призм, фиксируя тем самым и расстояние $h_1 + h_2$. Периоды колебаний относительно этих точек подвеса, вообще говоря, не совпадают; чтобы добиться их совпадения, с одной стороны маятника располагают показанный на рис. 2.4 небольшой подвижный груз m , двигая который, находят общий для обеих точек подвеса период колебаний T . Зная T и пользуясь известным значением $h_1 + h_2$, вычисляют g .

Добиться полного совпадения двух периодов колебаний трудно. Если при подвесе в точке A период колебаний

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h_1^2}{gh_1}},$$

а при подвесе в точке C

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h_2^2}{gh_2}},$$

то для периода колебаний математического маятника длиной $h_1 + h_2$ справедлива приближенная формула

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}} \approx \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2},$$

позволяющая точнее определить значение g . Во второе слагаемое правой части величины h_1 и h_2 входят порознь, и, чтобы им воспользоваться, нужно знать положение центра маятника. Но если не стремиться к особой точности, то указанный поправочный член можно и не учитывать.

Для серьезных измерений оборотный маятник впервые был применен немецкими учеными Ф. Кюненом и Ф. Фуртвенглером, которые опубликовали свои результаты в 1906 г. Для пункта в окрестности Потсдамского геофизического института они получили значение

$$g = 981,274 \pm 0,003,$$

которое для своего времени служило образцом точности измерений с учетом всех возможных погрешностей. Более точная цифра была получена лишь спустя 13 лет.

С тех пор для аналогичных измерений оборотный маятник применяли в разных местах земного шара. В частности, П. Хейл (1936 г.) получил значение g на территории Национального бюро стандартов (США), а Дж. Кларк (1939 г.) — вблизи Национальной физической лаборатории (Англия).

Никакой системы сравнения полученных данных не существовало, и было неясно, какому значению надо отдать предпочтение. О трудностях измерений с оборотным маятником лучше всего свидетельствует тот факт, что впоследствии в потсдамском значении обнаружили ошибку: оно было завышено на 14 мГал. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. 3.

§ 3. АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Описанные выше методики работы с математическим и оборотным маятниками позволяют в принципе выполнить независимые измерения величины g в произвольной точке земной поверхности. О таких измерениях говорят как об *абсолютных*.

Ясно, что часто выполнять абсолютные измерения довольно трудно и вряд ли можно быстро осуществить их в большом числе точек. Каждый раз нужно добиваться совпадения периодов T_1 и T_2 ; кроме того, надо следить за параллельностью ребер опорных призм и за тем, чтобы они находились в одной плоскости с центром тяжести маятника. Гораздо

проще вместо абсолютных производить так называемые *относительные* измерения, при которых один и тот же маятник переносится в разные точки и сравниваются периоды его колебаний в разных точках земной поверхности. Для получения относительных значений силы тяжести при таком способе не нужно знать даже параметры маятника.

Обозначим периоды колебаний маятников в точках A и B через T_A и T_B , а значения силы тяжести в этих точках g_A и g_B . Тогда

$$T_A = 2\pi \sqrt{K/g_A}, \quad T_B = 2\pi \sqrt{K/g_B},$$

где K — параметр маятника, одинаковый для точек A и B . Следовательно,

$$g_B : g_A = T_A^2 : T_B^2$$

и

$$g_B - g_A \approx -\frac{2g}{T}(T_B - T_A).$$

Таким образом, помещая один и тот же маятник в две разные точки и измеряя периоды его колебаний, можно определить разность значений в этих точках, даже не зная параметров маятника. Например, не выполняя абсолютных измерений, значение g в Токио можно узнать следующим образом:

- 1) отправиться в точку P , где уже выполнено абсолютное измерение g ;
- 2) измерить в точке P период колебаний маятника T_P ;
- 3) возвратившись с этим маятником в Токио, измерить период T_T ;
- 4) выразить разность $(g_P - g_T)$ через T_P и T_T ;
- 5) прибавив к ней абсолютное значение g_P , определить g_T .

Именно так и было определено значение g в Токио в 1899 г., когда Х. Нагаока (1865—1950) съездил в Потсдам, где уже было выполнено абсолютное измерение g , определил там период колебаний своего маятника, а затем, вернувшись с этим маятником в Токио, измерил T_T . В результате он нашел, что

$$g_T - g_P = -1,473.$$

Добавляя к этой величине потсдамское абсолютное значение 981,274, Нагаока получил

$$g_T = g_P + (g_T - g_P) = 981,274 - 1,473 = 979,801.$$

Это значение послужило основой для измерений силы тяжести в Японии. Когда впоследствии обнаружилось, что потсдамское значение завышено на 14 мГал, соответствующее исправление пришлось внести и в токийское значение силы тяжести.

§ 4. АБСОЛЮТНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ МЕТОДОМ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ТЕЛ

Из сказанного выше ясно, что значения силы тяжести в разных точках земной поверхности можно определить, комбинируя абсолютные и относительные измерения, но основой все же служат абсолютные измерения силы тяжести.

Начиная с 1950 г. стали применять более прямой, чем с помощью оборотного маятника, метод абсолютного измерения силы тяжести, основанный на регистрации свободного падения тел.

Положение свободно падающего тела в момент t дается формулой

$$z = z_0 + v_0 t + gt^2/2,$$

где z_0 — начальное положение, v_0 — начальная скорость. Тело проходит точки $z = z_1, z_2, z_3$ в моменты t_1, t_2, t_3 , где

$$z_1 = z_0 + v_0 t_1 + gt_1^2/2,$$

$$z_2 = z_0 + v_0 t_2 + gt_2^2/2,$$

$$z_3 = z_0 + v_0 t_3 + gt_3^2/2.$$

Исключая z_0 и v_0 , находим

$$g = \frac{2 \{(z_1 - z_2)(t_1 - t_3) - (z_1 - z_3)(t_1 - t_2)\}}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)}.$$

Таким образом, измеряя интервалы между z_1, z_2, z_3 и t_1, t_2, t_3 , можно определить g , причем точность этого определения зависит от точности измерения пространственных и временных интервалов. Для повышения последней предложены различные технические приемы, основанные на достижениях электроники.

Для улучшения рассматриваемого метода было предложено наблюдать за движением тела, подброшенного вертикально вверх. Обозначим v_0 скорость тела в момент $t = 0$. При подъеме (рис. 2.5) это тело пройдет точки z_1, z_2 в мо-

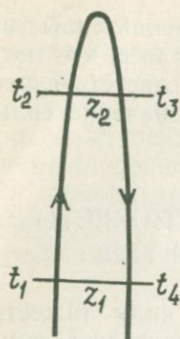


Рис. 2.5.

менты t_1, t_2 , а при падении — в моменты t_3, t_4 , где

$$z_1 = z_0 + v_0 t_1 - g t_1^2 / 2,$$

$$z_2 = z_0 + v_0 t_2 - g t_2^2 / 2,$$

$$z_2 = z_0 + v_0 t_3 - g t_3^2 / 2,$$

$$z_1 = z_0 + v_0 t_4 - g t_4^2 / 2.$$

Отсюда

$$g = \frac{8(z_2 - z_1)}{(t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2}.$$

Таким образом, для определения g достаточно измерить интервалы времени $(t_4 - t_1)$ и $(t_3 - t_2)$ между последовательными прохождениями телом точек на заданной высоте. При этом удается достичь даже большей точности, чем в первом варианте метода свободного падения. Когда А. Сакума в 1968 г. в Международной палате мер и весов в Париже достиг точности абсолютного измерения силы тяжести 6 мкГал, он подбрасывал пробное тело вверх. Принципиально этот метод прост, но технические сложности очень велики. Трудности точного измерения расстояний и интервалов времени меркнут перед сложностью контроля того, что тело подброшено вверх строго вертикально. Колебания тела в момент отрыва вызывают его вращение в полете. Не следует также забывать, что величина силы тяжести в верхней и нижней точках разная: при высоте подъема тела 1 м различие составляет 0,3 мГал, а при высоте 10 см — 30 мкГал. При учете этого обстоятельства приведенная выше простая формула для вычисления g усложняется.

Установка для абсолютных измерений этим методом в целом получается довольно громоздкой. В последнее время И. Цубокаве удалось существенно уменьшить ее размеры. Установка Цубокавы, уместающаяся в одном автомобиле, проходит заводские испытания (1977 г.). Надо думать, что появление такой сравнительно небольшой передвижной высокоточной установки окажет огромное влияние на всю систему гравиметрических измерений.

Попытки измерить g методом, напоминающим метод свободного падения, предпринимались давно. В качестве примера можно указать *машину Атвуда* (Г. Атвуд, 1746—1807), в которой на колесо, имеющее малый момент инерции и малое трение в оси, действуют два груза M (рис. 2.6). На один из них кладется маленькая гирька m , под действием которой

через время t система приобретает скорость $v = mgt/(2M + m)$ (при выводе этой формулы не учтены момент инерции колеса и трение в оси). Если быстро убрать гирьку m , то система начнет двигаться равномерно со скоростью v , что позволяет измерить последнюю. Зная v , t , M , m , можно определить g . Достоинство этого метода состоит в том, что для измерения величины g нужно приложить меньшее, чем g , ускорение. Но поскольку невозможно исключить трение в оси колеса, то достичь хорошей точности измерений не удается.

Эффективного уменьшения измеряемого ускорения можно добиться также, скатывая шарик по наклонной плоскости. В свое время такой опыт проделал Галилей. Скорость шарика легко измерить, поскольку она обусловлена тангенциальной составляющей g , которая гораздо меньше, чем g . Но наклонная плоскость шероховата; кроме того, трудно измерить ее очень малый угол наклона; поэтому при измерениях этим методом тоже нельзя достичь высокой точности.



Рис. 2.6. Машина Атвуда.

§ 5. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Важная предпосылка возможности относительных измерений с помощью физического маятника — постоянство его параметров в разных точках земной поверхности, где производятся измерения. Необходимо свести к минимуму влияние температурных изменений, магнитного поля и т. п. Во всех странах разработаны разнообразные конструкции приборов для относительных измерений; при этом маятники сделаны из латуни, вольфрама и т. п., но теперь в качестве материала маятника чаще всего применяют плавленный кварц, поскольку он характеризуется весьма малым коэффициентом теплового расширения ($0,4 \cdot 10^{-6}$) и легкостью формовки. Периоды колебаний маятников выбирают около 1 с, так что маятники легкие и имеют длину всего 20—30 см. Как правило, измеряют периоды колебаний сразу двух или трех маятников, заключенных в сосуд, из которого выкачан воздух. Вакуум необходим для устранения подъемной силы и сопротивления воздуха, эффекта увлечения воздуха колеблющимся маятником и т. п.

Показанный на рис. 2.7 маятниковый прибор японского Национального управления геодезии и географии (обра-

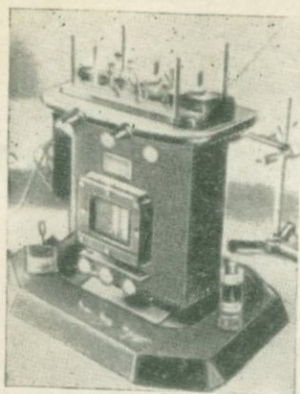


Рис. 2.7. Маятниковый прибор японского Национального управления геодезии и географии. Футляр покрыт теплоизолирующей оболочкой.

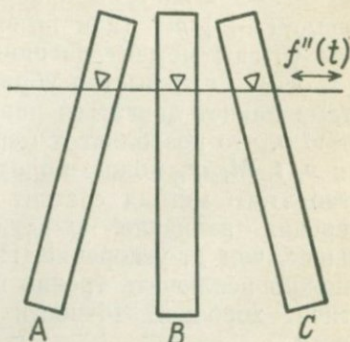


Рис. 2.8.

зец 1951 г.), вероятно, является лучшим в мировой практике. Маятники выполнены из плавленного кварца, снабжены безынерционной стальной опорной призмой и колеблются на ага-товом основании.

Наличие трех маятников в этом приборе (рис. 2.8) позволяет устранить влияние значительных в Японии микросейсм, сбивающих фазу колебаний. Маятники A , B , C (по возможности одинаковые) имеют одну и ту же частоту колебаний. Ввиду идентичности маятников микросейсмсы сообщают всем трем одно и то же горизонтальное ускорение $f''(t)$.

Уравнения движения маятников имеют вид

$$\ddot{x}_A + n^2 x_A = -p f''(t),$$

$$\ddot{x}_B + n^2 x_B = -p f''(t),$$

$$\ddot{x}_C + n^2 x_C = -p f''(t),$$

где p — константа, зависящая от параметров маятников. Вычитая уравнения друг из друга, получаем

$$\ddot{x}_A - \ddot{x}_B + n^2(x_A - x_B) = 0,$$

$$\ddot{x}_C - \ddot{x}_B + n^2(x_C - x_B) = 0.$$

Таким образом, микросейсмсы не влияют на разности координат ($x_A - x_B$ и $x_C - x_B$): разности координат маятников совершают свободные колебания по тому же закону, по ка-

кому колебались бы сами маятники при отсутствии микросейсм. Разностные колебания маятников удобнее всего наблюдать при помощи соответствующих оптических методов. Способ устранения влияния микросейсм, описанный выше, предложен в Голландии, где микросейсмсы особенно значительны. Колебания разностей координат $(x_A - x_B)$, $(x_C - x_B)$ рассматривают как фиктивный маятник. Наилучший режим свободных колебаний такой системы — когда маятники A и C колеблются в противофазе, а маятник B висит неподвижно.

Другое достоинство рассматриваемого прибора заключается в том, что его маятники минимальны в следующем смысле. Период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{(k^2 + h^2)/gh},$$

где k — радиус инерции относительно центра тяжести маятника, а h — расстояние от центра тяжести до точки подвеса. Как видно из рис. 2.3, при некотором h период T минимален. Минимум достигается при

$$\frac{dT}{dh} = 0$$

или при

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \frac{k^2 + h^2}{h} &= 0, \\ 2h^2 - (k^2 + h^2) &= 0, \\ h &= k. \end{aligned}$$

Таким образом, период колебаний минимален, когда расстояние от центра тяжести до точки подвеса равно радиусу инерции маятника.

Достоинство минимального маятника в том, что при небольших изменениях h период колебаний T практически не меняется. Следовательно, небольшой износ опорной призмы не влияет на период колебаний.

Если маятник имеет вид стержня постоянной толщины и длины $2a$, то момент инерции относительно его центра тяжести равен $Ma^2/3$, а радиус инерции $a/\sqrt{3} \approx 0,58a$. Располагая точку подвеса на этом расстоянии от центра тяжести, получаем минимальный маятник.

§ 6. ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ

Итак, пусть у нас имеется хороший маятник. Следующая проблема — точное измерение периода его колебаний. Период T обратно пропорционален квадратному корню из g :

$$T \propto 1/\sqrt{g},$$

откуда

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{g}.$$

Если период колебаний маятника около 1 с, а g мы хотим измерять с точностью 1 мГал, т. е.

$$\delta g/g \sim 10^{-6},$$

то период нужно измерять с точностью

$$\frac{\delta T}{T} = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Иными словами, период нужно измерять с точностью до одной двухмиллионной секунды. Для обеспечения такой точности раньше применяли изящный метод, известный под названием *метода совпадений*.

В этом методе колебания маятника, период которого близок к 1 с (равен $1 + \varepsilon$, где ε мало), наблюдают с интервалом, равным в точности 1 с. При этом от секунды к секунде фаза маятника слегка смещается и по прошествии некоторого времени возвращается к прежнему значению. Соответствующий интервал времени называют *интервалом совпадений*. Если интервал совпадений равен C секундам, то до совпадения при $\varepsilon > 0$ маятник совершает $(C - 1)$ колебаний, а при $\varepsilon < 0$ $(C + 1)$ колебаний, откуда период колебаний

$$T = C/(C \pm 1).$$

Следовательно,

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta C}{C} - \frac{\delta C}{C \pm 1} = \pm \frac{\delta C}{C(C \pm 1)} \approx \pm \frac{\delta C}{C^2}.$$

Если, например, $T = (1 \pm 1/50)$ с, то совпадение происходит через 50 с и

$$\frac{\delta T}{T} = \pm \frac{\delta C}{C^2} = \pm \frac{\delta C}{2500}.$$

Чтобы обеспечить точность измерения периода в одну двухмиллионную секунды, интервал совпадений нужно измерять с точностью

$$\delta C = 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2500 \approx 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

обеспечить которую сравнительно легко. Эффективное понижение точности измерения времени вызвано тем, что $\delta T/T$ обратно пропорционально квадрату интервала совпадений.

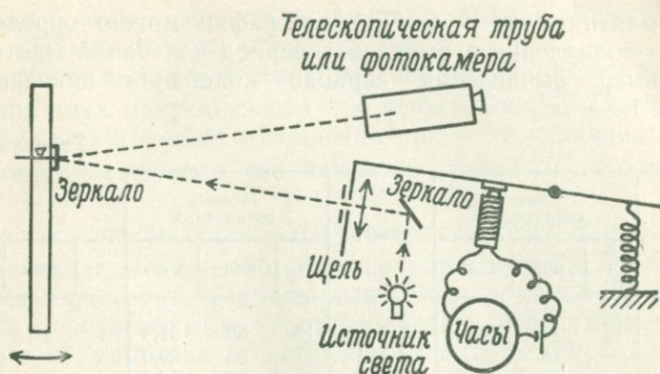


Рис. 2.9.

По мере приближения периода колебаний маятника к 1 с величина ϵ уменьшается, и если, например, сделать $C = 1000$ с, то величину

$$\delta C = 5 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 = 0,5 \text{ с}$$

можно измерять довольно грубо. Но поскольку C теперь очень велико, становится трудно определить, когда именно произошло совпадение, а это снижает точность определения периода. Оптимальная величина C около 50 с.

Практически совпадения наблюдают с помощью установки, принципиальная схема которой показана на рис. 2.9. Зеркальце на маятнике стробоскопически освещается источником, луч света от которого прерывается один раз в секунду затвором, управляемым точными часами. Отраженный от зеркальца свет наблюдается в телескопическую трубу или фотографируется на пленку. Одна из таких фотографий показана на рис. 2.10, где точки показывают, как смещается

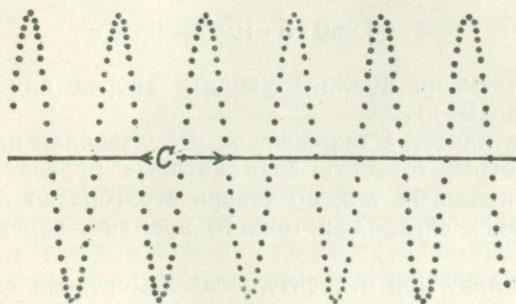


Рис. 2.10.

фаза маятника за 1 с. По фотографии можно определить момент совпадения и вычислить период колебаний маятника.

Пример вычисления периода колебаний приведен в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер	Момент совпадения			Номер	Момент совпадения			nC		
	ч	мин	с		ч	мин	с	ч	мин	с
0	12	17	32,9	<i>n</i>	13	55	31,4	1	37	58,5
1		18	30,5	<i>n</i> + 1		56	29,0			58,5
2		19	28,6	<i>n</i> + 2		57	26,9			58,3
3		20	26,0	<i>n</i> + 3		58	25,2			59,2
4		21	23,8	<i>n</i> + 4		59	22,7			58,9
5		22	21,1	<i>n</i> + 5	14	0	20,1			59,0
6		23	18,7	<i>n</i> + 6		1	17,2			58,5
7		24	15,9	<i>n</i> + 7		2	15,2			59,3
8		25	13,9	<i>n</i> + 8		3	12,8			58,9
9		26	11,5	<i>n</i> + 9		4	10,3			58,8

Среднее значение nC : 1 ч 37 мин 58,79 с = 5878,79 ± 0,032 с.

Среднее арифметическое значение C от (0) до (9):

$$(12 \text{ ч } 26 \text{ мин } 11,5 \text{ с} - 12 \text{ ч } 17 \text{ мин } 32,9 \text{ с}) : 9 = 518,6 : 9 = 57,62 \text{ с.}$$

Среднее арифметическое значение n :

$$5878,79 : 57,62 = 102,03.$$

Значение C :

$$5878,79 : 102 = 57,635 \pm 0,0003 \text{ с.}$$

Период колебаний маятника:

$$T = 57,635 : 56,635 = 1,0176569 \pm 0,0000001 \text{ с.}$$

Часы, используемые в методе совпадений, должны иметь точность того же порядка, что и точность определения периода. В рассматриваемом случае точность хода часов (в пересчете на сутки) должна быть не менее

$$24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 0,04 \text{ с}$$

(за сутки часы не должны уходить вперед или отставать более чем на 0,04 с).

Раньше в качестве таких часов использовали навигационные хронометры, точность хода которых проверяли по наблюдениям небесных тел, но теперь это гораздо проще сделать, пользуясь сигналами точного времени, передаваемыми по радио.

Но, поскольку при относительных измерениях определяется только отношение периодов колебаний маятников, в качестве единицы времени не обязательно использовать 1 с.

В связи с этим автор с сотрудниками (Цубои, Кимура, Фугида, 1935) применил следующий метод.

Сначала в точке A методом совпадений наблюдают колебания двух маятников a и b с периодами T_A^a , T_A^b . Прерыватель света в методе совпадений при этом управляется колебаниями маятника b , что позволяет измерить T_A^a в единицах T_A^b .

После этого маятник a перевозится в точку B и методом совпадений измеряется отношение периодов T_B^a/T_A^b , причем прерыватель света (находящийся теперь в точке B) управляется передаваемыми коротковолновым передатчиком сигналами от маятника b , оставшегося в точке A . Сравнивая отношения T_B^a/T_A^b и T_A^a/T_A^b , определяют разность значений силы тяжести в точках A и B . Этим методом в префектуре Канто было найдено значение g в 58 пунктах.

Еще раньше, в 1933 г., английский ученый Э. Буллард, не пользуясь ни методом совпадений, ни специальными коротковолновыми передатчиками, применил для измерения g сигналы точного времени, передаваемые радиовещательными станциями. Прием одного и того же сигнала в двух точках A и B можно рассматривать как критерий одновременности событий в этих точках. По Булларду сначала наблюдают колебания двух маятников a и b в точке A . Измеряя число качаний n_A^a и n_A^b маятников в течение интервала времени между двумя определенными сигналами, находят

$$T_A^a/T_A^b = n_A^b/n_A^a.$$

Затем маятник a перевозят в точку B и измеряют число качаний n_B^a этого маятника между определенными сигналами некоторой радиостанции, и одновременно в точке A между теми же сигналами точного времени измеряют число качаний n_A^b маятника b . Получают

$$T_B^a/T_A^b = n_A^b/n_B^a.$$

Следовательно,

$$\frac{T_B^a - T_A^a}{T_A^b} = \frac{n_A^b}{n_B^a} - \frac{n_B^b}{n_A^a},$$

откуда можно определить разность g_A и g_B .

Если принять, что точность определения числа качаний маятника в течение некоторого интервала времени равна $1/200$, то длина этого интервала t определится соотношением

$$1/200 = 5 \cdot 10^{-7} \cdot t,$$

откуда

$$t = 1/200 : (5 \cdot 10^{-7}) = 10^4 \text{ с,}$$

т. е. несколько часов. Этим методом Буллард измерил силу тяжести в Рифт-Валли (Африка) относительно ее значения в Кембридже (Англия).

Метод, основанный на использовании радиосигналов, теоретически очень интересен. Но он имеет свои неудобства: во-первых, поскольку измерения надо вести одновременно в двух пунктах, требуется вдвое больше обслуживающего персонала; во-вторых, радиосигналы подвержены влиянию атмосферного электричества и т. п., что ограничивает точность метода.

В последние 20—30 лет сильно повысилась точность хода кварцевых часов, они стали меньше размером и более удобными в обращении. Теперь период колебаний маятника можно достаточно точно измерить, пользуясь кварцевыми часами и не прибегая к методу совпадений.

В упомянутом маятниковом приборе Национального управления геодезии и географии Японии непосредственно измеряется число качаний маятника, соответствующее определенному числу колебаний кварцевой пластинки. При этом достигается точность 0,2 мГал, что является наивысшей в мире точностью для приборов этого класса.

§ 7. ПОПРАВКИ К ПЕРИОДУ КОЛЕБАНИЙ

Когда маятник колеблется с конечной амплитудой α радиан, его период T несколько больше периода T_0 колебаний с бесконечно малой амплитудой. Поэтому для определения T_0 в значение периода T нужно внести поправку для учета конечности амплитуды колебаний α . Связь между T и T_0 дается формулой

$$T = T_0(1 + \alpha^2/16).$$

Для обеспечения точности измерения силы тяжести 1 мГал период нужно измерить с точностью $5 \cdot 10^{-7}$ с. Поэтому поправку вносить не нужно, если

$$\alpha^2/16 < 5 \cdot 10^{-7}$$

или

$$\alpha \leq 3 \cdot 10^{-3} = 10'.$$

Если же амплитуда колебаний превышает $10'$, то нужна поправка к периоду. Поскольку период измеряется с точностью

$5 \cdot 10^{-7}$, точность измерения амплитуды определяется соотношением

$$\delta \left(\frac{\alpha^2}{16} \right) = \frac{\alpha}{8} \delta\alpha = 5 \cdot 10^{-7},$$

откуда

$$\delta\alpha = 4 \cdot 10^{-6} / \alpha.$$

Эта формула иллюстрируется табл. 2.2. Чем больше амплитуда колебаний, тем точнее нужно ее измерять. Но амплитуду колебаний вряд ли можно измерить с точностью, большей чем $1'$. Поэтому даже при внесении поправки амплитуда колебаний маятника не должна превышать 1° .

Таблица 2.2

α	$\delta\alpha$	α	$\delta\alpha$
$10'$	$3,3'$	1°	0,74
$20'$	2,2	2°	0,37
$30'$	1,5	3°	0,25
$40'$	1,1	4°	0,19
$50'$	0,87	5°	0,15

Выше мы считали, что геометрически ребро опорной призмы — прямая линия. Но это заведомо неверно, ибо если бы это было так, то на опорную призму действовало бы бесконечно большое давление, уравнивающее вес маятника. Большое давление в окрестности ребра опорной призмы приводит к закруглению края призмы. Грубо говоря, при колебаниях маятник как бы перекатывается на поддерживающем его ролике, как показано на рис. 2.11. Если попытаться экспериментально исследовать зависимость периода маятника от амплитуды его колебаний, то, конечно, не получится закон $\alpha^2/16$. Причина — в закруглении края опорной призмы (Щуби, 1943).

Кроме того, необходимо соблюдать условие параллельности ребра опорной призмы и оси колебаний маятника: если угол между этими прямыми i , то в формулу для периода вместо g войдет $g \cos i$ и

$$T_i = T_0 / \sqrt{\cos i},$$

где T_i и T_0 — периоды, соответствующие углам i и $i = 0$. При малом i

$$\sqrt{\cos i} = (1 - i^2/2)^{1/2} = 1 - i^2/4.$$

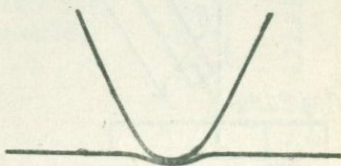


Рис. 2.11.

Выше уже отмечалось, что для обеспечения точности $\delta g/g \sim \sim 10^{-6}$ период нужно измерять с точностью до $\delta T/T = 5 \times \times 10^{-7}$. Следовательно,

$$i^2/4 = 5 \cdot 10^{-7},$$

$$i \approx 1,4 \cdot 10^{-3} = 0,0014 \approx 5'$$

(угол между ребром опорной призмы и осью колебаний не должен превышать $5'$).

§ 8. ОБРАТНЫЙ МАЯТНИК ОЛЬВЕКА — ЛЕЖЕ

Период обычного гравиметрического маятника зависит непосредственно от g , поэтому для точного измерения g нужно точно измерить период. Но если бы удалось каким-то образом скомпенсировать основную часть величины g , так чтобы период оказался зависящим только от изменений ускорения силы тяжести, то измерять его стало бы гораздо легче. Эта идея положена в основу конструкции *обратного* маятника, предложенного французскими учеными Ф. Ольвеком и Р. Леже (1930).

Как видно из рис. 2.12, обратный маятник укреплен в перевернутом положении на пружине. Со стороны пружины на маятник действует момент сил $\epsilon\theta$, отклоняющий его вверх, а момент силы тяжести, отклоняющий маятник вниз, равен $mg l \theta$. При $\epsilon > mgl$ маятник совершает устойчивые колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{I/(\epsilon - mgl)},$$

где I — момент инерции маятника относительно точки опоры, а l — расстояние от его центра тяжести до точки опоры.

При изменении g на величину δg относительное изменение периода будет равно

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{ml}{\epsilon - mgl} \delta g.$$

Если бы тот же маятник был подвешен обычным образом без пружины, то период его колебаний был бы

$$T' = 2\pi \sqrt{I/mgl}$$

и при изменении g на δg мы бы имели

$$\frac{\delta T'}{T'} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{g},$$

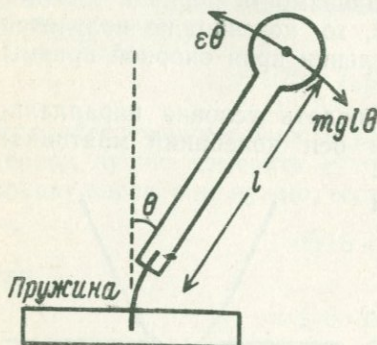


Рис. 2.12. Маятник Ольвека — Леже.

откуда

$$\frac{\delta T/T}{\delta T'/T'} = - \frac{mgl}{\varepsilon - mgl} = - \left(\frac{T}{T'} \right)^2.$$

При увеличении периода обратного маятника по сравнению с обычным в 5 раз относительное изменение периода возрастает в 25 раз, что сильно облегчает измерения.

Идея эта очень привлекательна, но практически осуществить ее трудно прежде всего потому, что упругость пружины зависит от температуры. Поскольку разность $\varepsilon - mgl$ мала, даже небольшие изменения ε сильно влияют на нее, приводя к заметным изменениям периода колебаний. Поэтому маятник Ольева — Леже не нашел широкого практического применения.

§ 9. ГРАВИМЕТРЫ

Рассмотренные выше методы определения силы тяжести, основанные на измерении периода колебаний маятника, называют динамическими. Существуют также статические методы ее определения, при которых не нужно измерять характеристики каких бы то ни было колебательных процессов. В простейшем из таких методов груз массой m подвешивают на пружине (рис. 2.13). Обозначим l_0 длину пружины без груза, а l — ее длину с подвешенным грузом. Упругая сила, возникающая при растяжении пружины, уравнивает вес груза:

$$mg = \varepsilon(l - l_0).$$

Здесь ε — модуль упругости пружины. Изменение длины пружины при переходе в другое место, где сила тяжести изменилась на δg , определяется соотношением

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta(l - l_0)}{(l - l_0)}.$$

Иначе говоря, по изменению длины пружины можно определить, насколько изменилось значение g . Когда g изменяется на $\delta g = 1$ мГал,

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta(l - l_0)}{(l - l_0)} \approx 10^{-6}.$$

Таким образом, удлинение пружины длиной 1 м при изменении силы тяжести

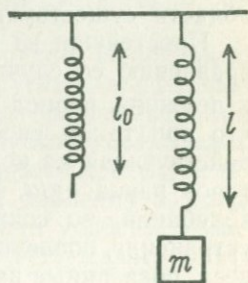


Рис. 2.13.

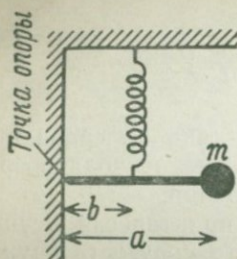


Рис. 2.14.

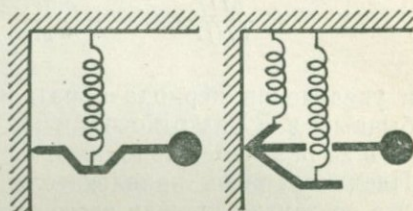


Рис. 2.15.

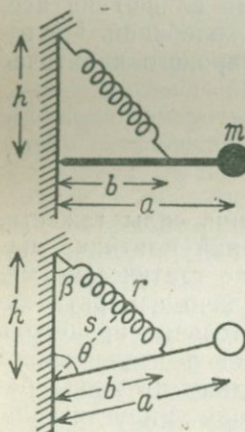


Рис. 2.16.

на 1 мГал составляет всего 1 мкм:

$$1 \text{ м} \cdot 10^{-6} = 1 \text{ мкм.}$$

При заданном изменении $\delta g/g$ увеличить удлинение пружины $\delta(l-l_0)$ можно, только увеличив $(l-l_0)$. Увеличить $(l-l_0)$ означает, что пружину нужно делать более слабой и более длинной. Удлинение пружины, отвечающее изменению силы тяжести на 1 мГал, станет равным 0,1 мм при $(l-l_0)=100 \text{ м}$. Практически это, конечно, нереально.

Период вертикальных колебаний груза на пружине

$$T = 2\pi \sqrt{m/\epsilon} = 2\pi \sqrt{(l-l_0)/g}$$

равен периоду колебаний математического маятника длины $(l-l_0)$. Уменьшение ϵ или увеличение длины пружины приводит к возрастанию периода этих колебаний.

Задача создания пружинного маятника с большим периодом колебаний возникает также при разработке сейсмографов для записи вертикальных колебаний земной коры. В этой области существует много различных технических решений.

Простейшая из подобных схем показана на рис. 2.14. По сравнению со случаем, когда груз крепится непосредственно к пружине, период возрастает в $\sqrt{a/b}$ раз. Можно показать, что при таком способе подвеса эффективная сила тяжести, действующая на конец пружины, в силу геометрических факторов равна bg/a . При уменьшении b увеличивается период колебаний, но сокращается область их устойчивости. Для устранения последнего затруднения применяют способы подвеса, показанные на рис. 2.15.

Л. Лакост (1957) предложил гравиметр с пружиной «нулевой длины», схема которого показана на рис. 2.16. Момент

силы тяжести, смещающий груз в направлении по часовой стрелке, равен

$$M_S = mga \sin \theta.$$

Ненагруженную пружину можно считать пружиной «нулевой длины», подобной пружинному волоску демпфера часов. Момент силы, создаваемый этой пружиной в направлении часовой стрелки, равен

$$M_\varepsilon = -\varepsilon rs.$$

Из геометрических соображений

$$\frac{r}{\sin \theta} = \frac{b}{\sin \beta},$$

$$s = h \sin \beta,$$

откуда

$$M_\varepsilon = -\varepsilon \frac{b \sin \theta}{\sin \beta} h \sin \beta = -\varepsilon bh \sin \theta.$$

Следовательно, полный момент сил будет

$$M = M_S + M_\varepsilon = (mga - \varepsilon bh) \sin \theta.$$

Подбором характеристик пружины и других параметров величину $(mga - \varepsilon bh)$ можно сделать очень малой (а период колебаний — очень большим). Достоинство рассматриваемой системы в том, что колебания остаются устойчивыми в пределе $\sin \theta = \theta$.

При удачной конструкции пружинного маятника становятся возможными статические относительные измерения силы тяжести. Разумеется, при этом нужно очень точно определять положение равновесия маятника.

Устройства для измерения силы тяжести статическим методом называют *гравиметрами*.

Построить хороший гравиметр очень трудно. Необходимо устранить температурную зависимость упругости и размеров пружины, исключить смещения положения равновесия при движениях окружающего воздуха, не допускать ослабления пружины с течением времени (так называемого дрейфа нуля прибора), бороться с изменениями давления воздуха внутри корпуса. Кроме того, из соображений удобства измерений и транспортировки прибор должен быть малогабаритным и легким.

Начиная с 1940 г. были предложены различные конструкции, удовлетворяющие этим жестким условиям. Кроме

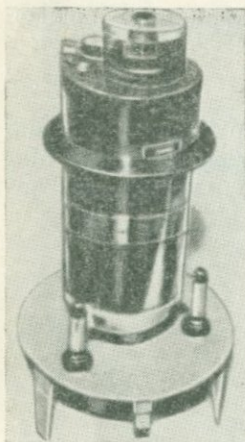


Рис. 2.17. Гравиметр Уордена. Высота прибора около 30 см.

ским маятником, чтобы контролировать параметры пружины.

приборов с пружиной «нулевой длины» разработаны и другие весьма точные схемы. За несколько десятков тысяч долларов можно приобрести гравиметр Уордена, гравиметр «Северная Америка», гравиметр Лакоста — Ромберга. Это надежные приборы, весящие несколько килограммов, имеющие точность 0,01 мГал и требующие на одно измерение около 5 мин. На рис. 2.17 показан гравиметр Уордена.

Но как бы хороши ни были эти приборы, надо помнить, что дрейф у них не равен строго нулю, а параметры пружины не точно постоянны. Поэтому при работе с гравиметрами желательно по несколько раз возвращаться в одну и ту же точку, проверяя наличие дрейфа, и почаще заходить в пункты, где сила тяжести точно измерена гравиметрически, чтобы контролировать параметры пружины.

§ 10. СТАРЫЕ МЕТОДЫ СТАТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Попытки измерить силу тяжести статически, без использования маятника, предпринимались давно. С современной точки зрения эти старые методы, конечно, непригодны, но может быть интересно напомнить, какие трудности преодолели люди в прошлом, прежде чем были созданы современные аппараты.

Немецкий ученый О. Геккер (1908) определял силу тяжести, измеряя точку кипения воды. Вода закипает при той температуре, при которой давление насыщенного пара становится равным внешнему атмосферному давлению P . При изменении P изменяется также точка кипения воды. Например, на высоте Фудзиямы, где атмосферное давление понижено, вода закипает при температуре около 87°C . Иными словами, измеряя температуру закипания воды, можно установить абсолютное значение атмосферного давления (в $\text{дин}/\text{см}^2$).

Если одновременно воспользоваться ртутным барометром, то

$$P = \rho gh,$$

где h — высота столба ртути. Из этой формулы можно определить g , если значение P взять из измерения температуры

кипения воды и измерить высоту столба ртути. К сожалению, точно измерить g таким методом очень трудно.

Другой немецкий ученый Х. Хаальк (1931) предложил прибор, схема которого показана на рис. 2.18. Разность давлений газа p_1 и p_2 создает разность уровней ртути A и B . В состоянии равновесия

$$\rho g h = p_2 - p_1.$$

При изменении g меняется h , но это изменение столь мало, что об измерении его не может быть и речи. Что-

бы сделать наблюдаемым изменение разности уровней ртути, поверх ртути наливается легкая жидкость (например, толуол), мениски которой распространяются в капиллярные трубки. Если площадь поверхности ртути Q , а поперечное сечение капилляра q , то изменение h приводит к перемещению менисков на расстояние, в Q/q раз большее. Например, при радиусе сосуда со ртутью 10 см и радиусе капилляра 1 мм

$$Q/q = 10^4,$$

что позволяет измерить незначительное изменение h .

Идея эта интересна, но на измерения очень сильно влияют тепловое расширение, а также взаимодействие ртути и толуола со стенками. Поэтому созданный Хаальком прибор не получил большого распространения. Автор данной книги в 1936 г. посетил Потсдам и сопровождал Хаалька в полевых работах, где имел возможность наблюдать его гравиметр в действии. Нельзя сказать, чтобы этот прибор давал очень хорошие результаты.

К сожалению, реальные вещества не всегда ведут себя согласно простым математическим формулам. Если бы они вели себя, как ожидается, то можно было бы построить поплавковый гравиметр, схема которого показана на рис. 2.19. Поплавок с налитой в него ртутью плавает в воде. Если к поплавку прикрепить выступающий над поверхностью воды тонкий стерженек, то можно компенсировать подъемную силу. При переходе в место с ббльшим g высота h уменьшается

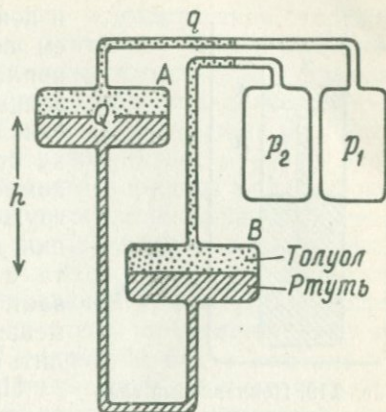


Рис. 2.18. Принципиальная схема гравиметра Хаалька.

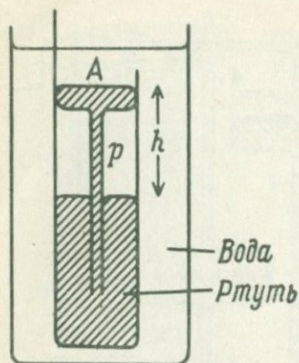


Рис. 2.19. Поплавковый гравиметр.

и понижается уровень ртути A , объем поплавок становится меньше и поплавок чуть-чуть погружается, занимая новое положение равновесия. Если прикрепленный к поплавку стерженек тонкий, то благодаря компенсации подъемной силы погружение поплавок достигнет большой величины. При переходе в места с меньшим g поплавок всплывает. Измеряя вертикальные перемещения поплавок, можно определить изменение h .

Практическое воплощение этого устройства тоже сопряжено с многими трудностями (движение жидкости, поверхностное натяжение, загрязнение и т. п.), и в итоге оно работает не очень точно.

§ 11. МОРСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ПОДВОДНЫХ ЛОДКАХ (МАЯТНИКОВЫЙ ПРИБОР ВЕНИНГ-МЕЙНЕСА)

Морские измерения силы тяжести сопряжены с дополнительными (по сравнению с наземными измерениями) трудностями, связанными прежде всего с качкой судна.

Первую успешную морскую гравиметрическую съемку с точностью, представляющей интерес для геофизики, выполнил голландский ученый Ф. Венинг-Мейнес (1929), заметивший, что качка подводной лодки в погруженном состоянии чрезвычайно слаба. Ему удалось получить хорошие результаты с помощью специально сконструированной маятниковой установки.

Качка погруженной подводной лодки хотя и слаба, но не равна нулю. Для устранения ее влияния Венинг-Мейнес применил три маятника A , B , C и измерял колебания маятников A и C относительно маятника B . Влияние качки не сказывается на разностных колебаниях, так как она одинаково возмущает колебания всех трех маятников. В последнее время этот метод стали применять и на суше при измерении силы тяжести в районах, где значителен фон микросейсм. Схема Венинг-Мейнеса с тремя маятниками использована, например, в описанном выше маятниковом приборе японского Национального управления геодезии и географии (там же подробно разъяснен принцип действия прибора).

Следующая важная проблема — поддержание горизонтальности ребер опорных призм маятников. Выше уже отмечалось, что точность измерения силы тяжести 1 мГал можно гарантировать только в том случае, если угол между ребром опорной призмы и осью колебаний не превышает 5'. Чтобы обеспечить с этой точностью горизонтальность ребер опорных призм, Венинг-Мейнес применил карданов подвес бокса с маятниками (рис. 2.20). Благодаря наличию двух пар взаимно перпендикулярных осей первоначально параллельные ребра опорных призм остаются в горизонтальной плоскости при любом наклоне корпуса подводной лодки. Для демпфирования периодической качки к боксу приделаны лопатки, погружаемые в установленный на палубе бак с маслом.

Правда, последнее приспособление представляется излишним, особенно с учетом малости наклонов палубы подводной лодки. Благодаря карданову подвесу бокс с маятниками при наклоне палубы остается в горизонтальном положении, а сцепленные с маслом лопатки сообщают ему наклон. Кроме того, движения подводной лодки не сводятся к ее наклонам. Как целое она движется в горизонтальной плоскости. Поскольку рассматриваемый прибор расположен не в центре лодки, при ее наклонах относительно центра он в общем случае тоже получает составляющую движения в горизонтальном направлении. Указанные горизонтальные движения



Рис. 2.20. Карданов подвес.

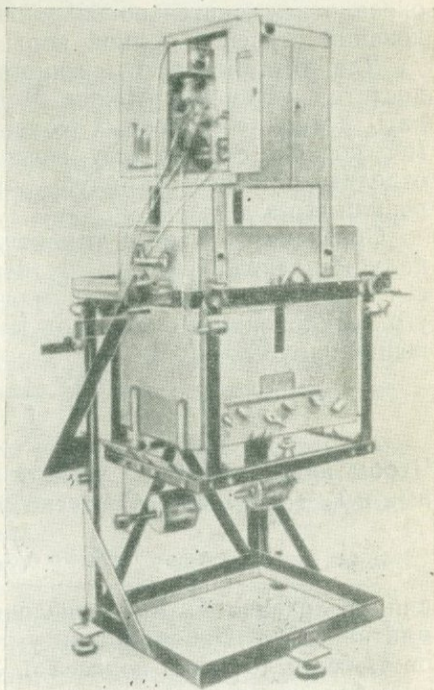


Рис. 2.21. Прибор Венинг-Мейнеса.

действуют на систему маятников подобно сейсмическим толчкам, усиливающим колебания бокса (вместе с системой его подвеса). Эти колебания (собственный период которых порядка нескольких секунд) могут вызвать отклонения ребер опорных призм маятников от горизонтального положения на угол более $5'$, но в системе Венинг-Мейнеса такой источник помех не учтен.

Отмеченный недостаток конструкции измерительного устройства ни в коем случае не обесценивает исторических заслуг Венинг-Мейнеса, который, воспользовавшись подводной лодкой голландских ВМС, впервые произвел несколько сотен измерений силы тяжести в разных точках Атлантического, Индийского и Тихого океанов. В частности, он выполнил детальную съемку в окрестности островов голландской Ост-Индии (ныне — Индонезия) и обнаружил, что в пространстве между островными дугами и океаническими впадинами, а именно в глубоководных желобах, существует аномалия силы тяжести около -100 мГал. Это наблюдение — одно из крупнейших открытий современной геофизики, оно оказало исключительно большое влияние на развитие исследований строения земной коры. К нему мы еще вернемся.

Для устранения отмеченного выше конструктивного недостатка установки Венинг-Мейнеса надо так отрегулировать период собственных колебаний прибора, чтобы он не мог, подобно сейсмографу, воспринимать сотрясения лодки, и отделить демпфер от палубы, чтобы наклоны судна не привели его в движение.

Обозначим буквой a амплитуду горизонтальных смещений палубы подводной лодки, их период через T , а период собственных колебаний самого маятникового прибора T_0 . Тогда угол отклонения прибора под влиянием горизонтальных смещений палубы

$$\alpha = \frac{4\pi^2 a}{gT_0^2} \frac{1}{1 - (T/T_0)^2}.$$

Чтобы при $a \sim 100$ см угол α не превышал $5'$, достаточно иметь $T_0 \sim 50 \div 60$ с. Согласно формуле

$$T_0 = 2\pi \sqrt{I/Mgh},$$

для увеличения T_0 надо увеличить момент инерции самого маятникового прибора I или уменьшить расстояние от центра тяжести до точки подвеса h . Это значит, что надо применить балансирующий подвес.

Не связанный с палубой демпфер может иметь вид укрепленного на боксе с маятниками полого кольца, заполненного

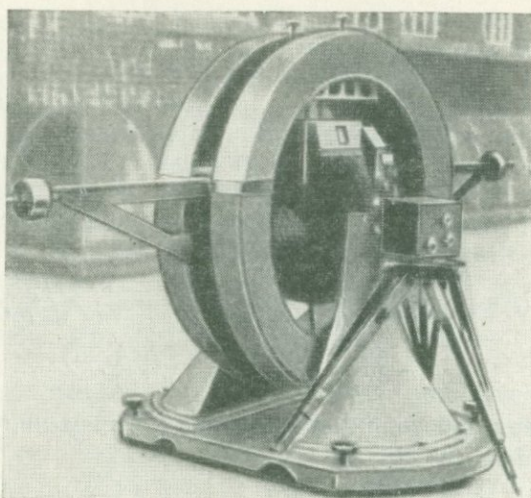


Рис. 2.22. Прибор Цубои.

маслом: относительное движение масла и кольца вызовет затухание колебаний системы. При слишком большой вязкости масло будет двигаться вместе с кольцом, а при чересчур малой вязкости движения масла и кольца будут независимы; в обоих случаях затухание колебаний невелико. Но при некотором оптимальном соотношении между вязкостью масла и диаметром кольца затухание колебаний будет максимальным. Исходя из этих соображений автор данной книги построил прибор, фотография которого приведена на рис. 2.22. Предварительные испытания этой установки были проведены не на подводной лодке, а на обычном судне. Начавшаяся вскоре вторая мировая война не позволила довести работу до конца.

Тем не менее идея балансирующего подвеса все же была впоследствии введена в конструкцию прибора Венинг-Мейнеса. Оптимальные конфигурации подбирались эмпирически с помощью миниатюрных моделей.

Английский ученый Б. Браун (1937) заметил следующее обстоятельство, важное для морских измерений силы тяжести: величину силы тяжести можно определить по среднему значению периода колебаний установленного на палубе маятника, приводимого в движение вертикальными перемещениями палубы.

Обозначая $\ddot{z}(t)$ ускорение вертикального движения судна, получаем, что частота колебаний используемого в гравиметрии

маятника

$$n(t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{l}} \sqrt{g + \ddot{z}(t)},$$

где l — длина соответствующего математического маятника. Если порядок величины вертикальных ускорений судна 100 Гал, то $\ddot{z}(t)/g \sim 1/10$ и последнюю формулу можно разложить в ряд по этому параметру. Ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получаем

$$n(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \left\{ 1 + \frac{\ddot{z}(t)}{g} \right\}^{1/2} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{g} - \frac{1}{8} \left(\frac{\ddot{z}}{g} \right)^2 \right\}.$$

Чертой сверху обозначим усреднение по времени. Поскольку $\overline{\ddot{z}(t)} = 0$, находим

$$\overline{n(t)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \overline{\left(\frac{\ddot{z}}{g} \right)^2} \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \overline{\left(\frac{\ddot{z}}{g} \right)^2} \right\}.$$

Таким образом, в результате усреднения происходит кажущееся уменьшение силы тяжести. Ускорение вертикальных колебаний подводной лодки на порядок меньше, чем надводного судна (около 10 Гал), поэтому под водой

$$1 - \frac{1}{4} \overline{\left(\frac{\ddot{z}}{g} \right)^2} = 0,99998$$

и сила тяжести «уменьшается» всего на 20 мГал. Для проверки этого обстоятельства требуется непрерывная регистрация вертикального ускорения, т. е. дополнительная процедура.

§ 12. ИЗМЕРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ — ПРИБОР ТОМОДЫ

Метод Венинг-Мейнеса дает хорошие результаты, но не всегда легко достать подводную лодку для производства измерений силы тяжести. А метод Брауна очень трудоемок.

Поэтому развитие морских измерений силы тяжести пошло в другом направлении. Предложено два основных метода: в первом из них применяют судовую модификацию статического гравиметра, а второй основан на использовании колебаний струны. В обоих случаях влияние качки удается настолько эффективно исключить, что силу тяжести можно измерять, пользуясь надводными судами (а не только подводными лодками).

При использовании статических гравиметров надо решить три основных вопроса: 1) как поддержать гравиметр в вертикальном положении; 2) как устранить влияние вертикальных колебаний судна на положение равновесия гравиметра; 3) как регистрировать положения равновесия гравиметра?

Поскольку гравиметры обычно невелики по размерам, их можно либо непосредственно поместить в гироскоп, либо установить на подставке, управляемой гироскопом, что позволяет поддерживать вертикальное положение гравиметра.

Чтобы избавиться от влияния качки, надо учесть, что ее средний период 5—10 с, а амплитуда ускорения около 100 Гал, в то время как истинные изменения силы тяжести по курсу судна происходят гораздо медленнее и очень малы по величине. Если точность измерения силы тяжести 1 мГал, то гравиметр должен регистрировать медленные изменения положения равновесия, составляющие примерно одну тысячную быстрых изменений, вызываемых качкой. Для их регистрации выходной сигнал гравиметра можно преобразовать в электрическую форму и пропустить его через соответствующий фильтр. Основанные на этом принципе гравиметры «Аскания», «Белл» и др. получили в настоящее время широкое распространение.

Совсем на другом принципе основан весьма точный Токийский гравиметр для надводных измерений силы тяжести (Tokyo Surface Ship Gravity Meter, TSSG), разработанный профессором Токийского университета Ё. Томодой (1963). В отличие от статических гравиметров в приборе Томоды использованы колебания струны. Схема прибора показана на рис. 2.23. Частота колебаний струны, на которой подвешен груз m , определяется формулой

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\sigma}},$$

где σ — линейная плотность струны. При изменении g на величину δg частота f меняется на δf :

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\delta g}{g}.$$

По изменению частоты можно определить изменение g .

В приборе Томоды струна длиной 25 мм, шириной 0,1 мм и толщиной 0,01 мм выполнена из сплава меди с бериллием.

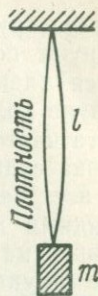


Рис. 2.23.

Масса груза 20 г, частота колебаний струны около 1500 Гц. Струна помещена в магнитное поле. Колебания возбуждаются электрическим путем, и благодаря обратной связи струна колеблется в режиме автоколебаний. Изменения квадрата частоты (f^2) пропорциональны изменению g . Поскольку качка судна не должна вызывать смещение груза, последний со всех четырех сторон закреплен горизонтально натянутыми тонкими проволоками. Прибор портативный, его можно установить на гироскоп, что обеспечивает вертикальное положение струны.

Реальное движение струны определяется суммой смещений за счет качки судна и смещений при ее собственных автоколебаниях (частота которых гораздо выше частоты качки). Электрический сигнал, пропорциональный квадрату частоты, подается на вход фильтра, не пропускающего колебаний с частотой качки судна; на выходе фильтра получается медленно меняющийся сигнал, определяемый локальными изменениями силы тяжести. Такой фильтр встроен в установку Томоды. Мини-ЭВМ подсчитывает число колебаний кварцевого генератора за каждые 850 колебаний струны (примерно за 0,5 с), и наборы по 1000 результатов такого подсчета (примерно за 500 с) пропускаются через указанный фильтр, отсеивающий ускорение вертикальных смещений судна; на выходе фильтра остается сигнал, по которому вычисляется значение g , среднее за эти 500 с. Значение g автоматически печатается.

Кроме измерения силы тяжести установка Томоды ведет непрерывные измерения положения судна, широтной составляющей его скорости, глубины моря и т. п. и печатает эти сведения одновременно со значениями g . Оценивая прибор со всех точек зрения, можно сказать, что это лучшая в мировой практике установка такого рода. Приборами Томоды укомплектованы научно-исследовательское судно «Хакухо мару» Токийского университета, суда «Акиё мару» и «Такуё мару» Управления морских исследований и судно «Умитаку мару» Института морского промысла. Маршруты этих судов в западной части Тихого океана протянулись на 500 000 км вплоть до Южного полюса, ими произведены измерения g в 500 000 точек акватории.

Общий вид прибора показан на рис. 2.24.

Устройство для надводных измерений силы тяжести с использованием колебаний струны, аналогичное прибору Томоды, разработано Массачусетским технологическим институтом США. Схема его показана на рис. 2.25. Груз подвешен на двух струнах, находящихся под большим натяжением T . Сила натяжения верхней струны равна $T + mg$, а нижней

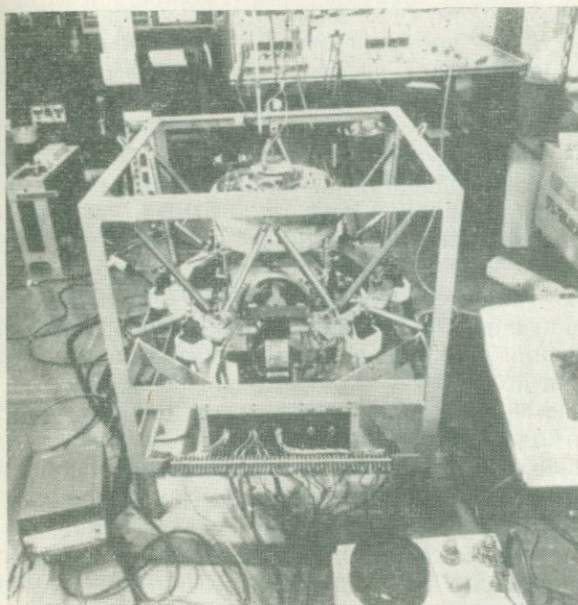


Рис. 2.24. Прибор Томоды TSSG.

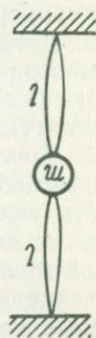


Рис. 2.25.

$T - mg$. Обозначая частоты колебаний верхней и нижней струн f_1 и f_2 , можно написать

$$f_1 = \frac{1}{2l\sqrt{\sigma}} \{T + mg(t)\}^{1/2} \approx \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{mg(t)}{T} - \frac{1}{8} \left\{ \frac{mg(t)}{T} \right\}^2 \right],$$

$$f_2 = \frac{1}{2l\sqrt{\sigma}} \{T - mg(t)\}^{1/2} \approx \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{mg(t)}{T} - \frac{1}{8} \left\{ \frac{mg(t)}{T} \right\}^2 \right],$$

откуда видно, что $g(t)$ определяется разностью частот колебаний верхней и нижней струн

$$f_1 - f_2 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \frac{mg(t)}{T}.$$

§ 13. ПЛАНИРОВАНИЕ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

Подытожим сказанное об измерениях силы тяжести.

1. Абсолютные измерения (результаты которых служат основой для любых других измерений силы тяжести)

выполняют либо методом свободного падения, либо наблюдая движение тела, подброшенного вертикально вверх. Обычно страна располагает несколькими пунктами, в которых произведены абсолютные измерения силы тяжести.

2. Каждая страна в соответствии со своими размерами формирует собственную опорную гравиметрическую сеть (в Японии такая сеть содержит несколько десятков пунктов). Значения g в пунктах опорной сети привязывают к значениям в пунктах абсолютного измерения с помощью маятниковых приборов.

3. Детальную гравиметрическую съемку отдельных районов страны производят с помощью гравиметров, связывая полученные значения g со значениями в пунктах опорной гравиметрической сети.

4. Морские измерения силы тяжести выполняют, например, методом Томоды.

Мы уже отмечали, что существуют различные способы измерения силы тяжести; эти измерения всегда выполняют с какой-то определенной целью. Конечно, бывают случаи, когда значение g интересно само по себе. Типичный пример — абсолютные измерения силы тяжести. Другой пример — измерения силы тяжести в пунктах опорной гравиметрической сети.

Однако случаи, когда нужно знать абсолютное значение g в какой-то конкретной точке, относительно редки. Гораздо чаще для геофизических целей требуется выяснить географическое распределение g в некотором районе. При этом кроме значения g нужно определять высоту точки над уровнем моря и учитывать формы окружающего рельефа. Известно, что подъем над уровнем моря сопровождается уменьшением g . Без учета этого обстоятельства объективное сравнение гравиметрических данных невозможно. Поскольку при подъеме на 3 м g уменьшается на 1 мГал, гравиметрическая съемка с этой точностью не имеет смысла, если не обеспечена точность измерения высоты 3 м. Но это еще не самое страшное. Гораздо тяжелее случаи, когда силу тяжести надо измерять с точностью 1 мкГал, ибо при этом необходима точность измерения высоты 3 мм. Пунктов, высота которых известна с такой точностью, немного. Например, на всю Японию насчитывается лишь около 10 000 триангуляционных пунктов Национального управления геодезии и географии. Для измерения высоты в окрестности этих триангуляционных пунктов в каждую точку замера g нужно вести от них точный теодолитный ход, а это — трудоемкая работа, требующая времени, людских ресурсов и материальных затрат.

Кроме высоты над уровнем моря необходимо учитывать еще широту пункта замера g и окружающий рельеф. На по-

люсах $g = 983$, а на экваторе 978, т. е. при изменении широты на 90° изменение силы тяжести составляет 5 Гал. В окрестности Японии при изменении широты на $1'$ величина g изменяется на 1 мГал. Поэтому при точности съемки 1 мГал широту точек на местности нужно контролировать с точностью 2 км. Такую точность измерения широты обеспечить нетрудно, но если точность измерения g достигает 1 мкГал, то широту нужно знать уже с точностью $0,06''$, что соответствует 2 м на местности. Это очень высокая точность измерения широты, гарантировать которую нелегко. Окружающий рельеф может изменить значение g за счет силы притяжения со стороны окружающих измерительную точку скальных пород.

При точности 1 мкГал на результаты измерений влияет и уровень подземных вод, а также положения Луны и Солнца, перемещение которых следует учитывать, вводя соответствующие поправки. При морских измерениях нужно принимать во внимание широтную составляющую скорости судна и глубину моря. Таким образом, по мере совершенствования методов измерения силы тяжести сильно возрастает число факторов, которые необходимо учитывать. Чтобы найденное для данного пункта значение силы тяжести имело геофизический смысл, недостаточно просто измерить в нем точную величину g .

АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И РЕДУКЦИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. ФОРМУЛА НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. АНОМАЛИИ g

§ 1. АБСОЛЮТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ — ОТ ПОТСДАМСКОЙ К МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЕ

Мы уже отмечали, что для определения g в разных местах земной поверхности необходимо произвести абсолютное измерение этой величины по крайней мере в одном пункте; тогда значения в других местах можно найти с помощью относительных измерений, прямо или косвенно связанных с указанным абсолютным значением g . Абсолютные измерения силы тяжести — основа гравиметрической съемки.

В течение долгого времени наилучшим по точности абсолютным значением g считали значение, измеренное в Потсдаме. Согласно публикации 1906 г., потсдамское значение

$$g_P = 981,274 \pm 0,003.$$

О гравиметрических данных, полученных с привязкой к потсдамскому значению, говорят, что они принадлежат потсдамской системе.

Начиная с 1935 г. появились сомнения в точности потсдамского значения g , и в 1971 г. было окончательно установлено, что оно содержит ошибку — завышено на 14 мГал. В связи с этим данные потсдамской системы на всем земном шаре пришлось уменьшить примерно на 14 мГал — случай, беспрецедентный в мировой научной практике.

Упомянутые сомнения в правильности потсдамского значения возникли после того, как независимые абсолютные измерения были выполнены в других странах. Например, было получено, что в Вашингтоне (США)

$$g_W = 980,080 \text{ (П. Хейл, 1936),}$$

а в Теддингтоне (Англия)

$$g_T = 981,182 \text{ (Дж. Кларк, 1939),}$$

в то время как относительные измерения давали

$$g_W - g_P = -1,174, \quad g_T - g_P = -0,079, \quad g_T - g_W = 1,097,$$

откуда

$$g_P = g_W + (g_P - g_W) = 980,080 + 1,174 = 981,254;$$

$$g_P = g_T + (g_P - g_T) = 981,182 + 0,079 = 981,261.$$

Эти значения меньше принятого в то время потсдамского абсолютного значения примерно на 15 мГал. Надо думать, что расхождение возникло за счет абсолютных, а не относительных измерений, поскольку точность последних выше, чем первых. Прибавляя к теддингтонскому значению g_T результат измерения силы тяжести в Вашингтоне относительно Теддингтона ($g_W - g_T$), получаем

$$g_W = g_T + (g_W - g_T) = 981,182 - 1,097 = 980,085,$$

что на 5 мГал отличается от значения 980,080, полученного в Вашингтоне путем прямого абсолютного измерения. Таким образом, значения g_W , g_T заслуживают большего доверия, чем g_P .

Возникло подозрение, что в абсолютные измерения, выполненные ранее в Потсдаме, вкралась ошибка, которая привела к завышению измеренного значения g_P . Однако уменьшать примерно на 14 мГал значения g во всех точках земного шара, принадлежащих потсдамской системе,— процедура весьма непростая, поэтому вопрос был решен не сразу, некоторое время производили тщательную проверку.

После этих событий абсолютные измерения силы тяжести выполняли и в других местах земного шара. Техника измерений совершенствовалась, возрастала точность. Во всех случаях сила тяжести получалась меньше, чем вытекало бы из потсдамского значения. В конце концов набралось 10 пунктов, в которых значения g были определены с современной точностью, превышающей 1 мГал. Среди них были, в частности, Богота (Колумбия) и Фэрбенкс (Аляска). Богота расположена высоко в горах вблизи экватора, а Фэрбенкс находится на равнине вблизи 60° с.ш.; следовательно, в этих двух пунктах значения g близки к минимальному и максимальному для поверхности Земли.

Выше мы уже говорили об абсолютном измерении g методом подбрасывания тела вверх, выполненном А. Сакумой в Международной палате мер и весов в Париже; среди указанных 10 абсолютных измерений силы тяжести данные А. Сакумы имеют наивысшую точность. По этим 10 абсолютным измерениям найдено, что средняя ошибка потсдамского значения g составляет 13,87 мГал. Стало окончательно ясно, что старое потсдамское значение завышено примерно на 14 мГал.

Меры по исправлению создавшегося положения обсуждались на совещаниях специалистов. Кроме указанных 10 пунктов, в которых абсолютные измерения g были выполнены с наибольшей точностью, имелось еще около 1200 прямо или косвенно связанных с ними точек, относительные

измерения g в которых производились с помощью маятниковых приборов, и около 24 000 точек, съемка в которых была выполнена с гравиметрами; эти пункты в совокупности образуют мировую опорную гравиметрическую сеть. План организации такой сети был принят на московском конгрессе в 1971 г. Согласованное на этом конгрессе исправленное значение g для Потсдама

$$g_P = 981,26019 \pm 0,000017$$

приблизительно на 14 мГал меньше прежнего значения, равного 981,274.

В чем же была причина ошибочности старого потсдамского значения, измеренного с соблюдением всех возможных предосторожностей? Этот вопрос тщательно и всесторонне исследовали сотрудники Национального бюро стандартов США. Они выяснили, что как методика измерений, так и полученные в Потсдаме данные были совершенно безупречны, сомнение вызывал лишь один факт: хотя в Потсдаме и вводили поправку за упругую деформацию при колебаниях обратного маятника, способ ее расчета был несколько сомнителен. Если рассчитать эту поправку правильно, то как раз и возникает разница в 15 мГал.

Как бы то ни было, поскольку потсдамское значение, в течение десятков лет служившее основой для относительных измерений силы тяжести, оказалось ошибочным, Потсдамская система прекратила свое существование, перестала играть какую-либо роль в гравиметрии. Основанное на старых потсдамских данных значение g в японской опорной точке (Токийский университет), полученное Х. Нагаокой, разумеется, необходимо было исправить. Одновременно нужно было внести исправления в значения g во всех точках, где его находили на основе старого токийского значения, уменьшив их приблизительно на 14 мГал. Это огромная и очень трудоемкая работа.

§ 2. МЕЖДУНАРОДНАЯ И ЯПОНСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ ОПОРНЫЕ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

Итак, оказалось, что значения g , принадлежащие потсдамской системе, нужно уменьшить приблизительно на 14 мГал. Этот вывод сделан на основе 10 новых высокоточных абсолютных измерений силы тяжести и подкреплен огромным числом прямо или косвенно связанных с ними относительных измерений. Новые абсолютные измерения и осно-

ванные на них относительные (выполненные в различных пунктах земного шара) нужно было обработать единым образом.

Результаты соответствующих колоссальных расчетов опубликованы в 1974 г. Было отобрано 1854 пункта, в которых величина g измерена надежно, с точностью, превышающей 0,1 мГал; они составили Международную стандартную опорную гравиметрическую сеть (IGSN 1971 — International Gravity Standardization Net, 1971).

Из указанных 1854 пунктов 39 расположены в Японии. Для такой страны, как Япония, 39 пунктов слишком мало. Поэтому в 1975 г. Х. Судзуки добавил к ним еще 83 пункта, относительные измерения силы тяжести в которых выполнены достаточно надежно, и обработал соответствующие гравиметрические данные совместно с данными 39 пунктов Международной опорной гравиметрической сети. В итоге для Японии были определены 122 опорных пункта с достоверно известными значениями g . В некоторых из этих пунктов местные условия за значительный интервал времени изменились. Тем не менее они были включены в Японскую национальную опорную гравиметрическую сеть, охватывающую всю страну. Новое значение в опорном пункте на территории Токийского университета

$$g = 979,78722 \pm 0,025 \text{ мГал,}$$

а соответствующее значение, определенное Х. Нагаокой на основе старых потсдамских данных, было

$$g = 979,801.$$

Разница между этими значениями (14 мГал) в точности соответствует ошибке старых потсдамских абсолютных измерений силы тяжести. Тем самым была подтверждена высокая точность относительного измерения силы тяжести (Токио — Потсдам), выполненного Нагаокой свыше 70 лет назад.

Главным японским опорным гравиметрическим пунктом долгое время был Токийский университет. Но Токио — не очень стабильное место, и на территории Токийского университета трудно сохранять неизменность опорного гравиметрического пункта ввиду постоянной перестройки зданий. Поэтому в 1952 г. опорный пункт перенесли в гравиметрическую лабораторию геолого-минералогического факультета отделения естественных наук университета Киото. Величина g в этом пункте по расчетам Международной опорной гравиметрической сети составляет

$$g_K = 979,70727 \pm 0,032 \text{ мГал.}$$

Таблица 3.1

Координаты некоторых опорных гравиметрических пунктов и значения g в них

		с. ш.	в. д.	Высота, м	g , Гал
F Синтоцугава	Гравиметрическая обсерватория по слежению за искусственными спутниками Земли японского Национального управления геодезии и географии	43° 31,4'	141° 50,5'	88,51	980,49579
F Мидзусава	Гравиметрическая лаборатория широтной станции японского Национального управления геодезии и географии	39 07,9	141 08,2	63,90	980,14656
F Какиока	Гравиметрическая лаборатория геомагнитной станции	36 13,8	140 11,5	32,17	979,96601
F Токио	Гравиметрическая лаборатория японского Национального управления геодезии и географии	35 38,6	139 41,3	28,04	979,76319
NF Киото	Гравиметрическая лаборатория геолого-минералогического факультета Университета Киото	35 01,6	135 47,2	60,82	979,70727
F Киото	Гравиметрическая лаборатория геофизического факультета Университета Киото	35 01,6	135 47,2	59,86	979,70775
F Кумамото	Сейсмостанция физического факультета Университета Кумамото	32 48,8	130 43,8	22,84	979,55162

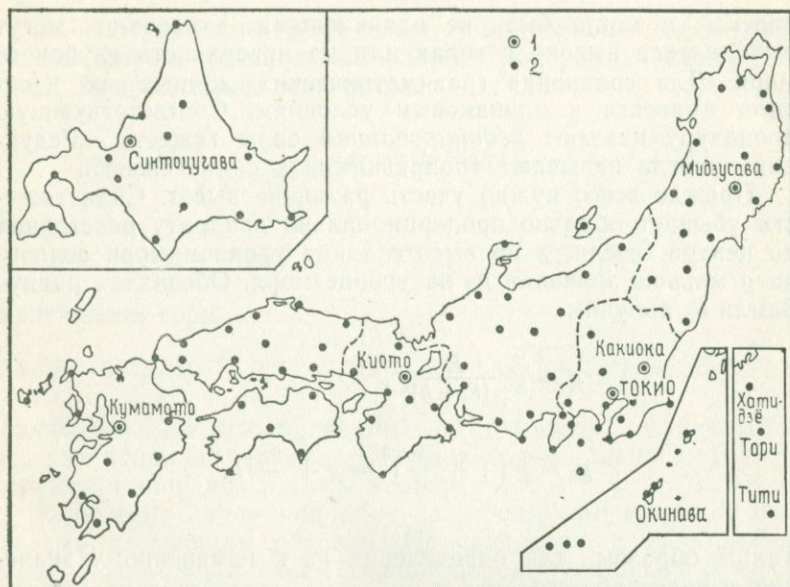


Рис. 3.1. Опорные гравиметрические пункты Японии: 1 — пункты, в которых выполнено абсолютное измерение силы тяжести; 2 — гравиметрические пункты первого класса.

В настоящее время это главный японский опорный гравиметрический пункт.

Территориальное расположение выбранных Судзуки 122 опорных гравиметрических пунктов показано на рис. 3.1. Точное местоположение этих пунктов и значения g в них опубликованы в Ежегоднике по естественным наукам за 1978 г. В табл. 3.1 приведены данные, относящиеся к некоторым международным опорным гравиметрическим пунктам (NF) и к добавленным Судзуки дополнительным опорным пунктам (F).

Впредь при гравиметрической съемке в Японии в качестве опорных точек нужно пользоваться какими-либо из указанных 122 пунктов. Сеть из этих 122 пунктов называют Японской национальной опорной гравиметрической сетью (JGSN 75).

Вновь определяемые значения g теперь взаимно увязываются, поэтому новые данные надежнее старых.

§ 3. РЕДУКЦИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В гл. 2 уже говорилось, что величину g измеряют разными способами. Но условия в окрестности пунктов опре-

деления g могут быть не одинаковыми: измерения могут выполняться высоко в горах или на поверхности глубокого моря. Для сравнения гравиметрических данных их необходимо привести к одинаковым условиям. Соответствующую процедуру называют *редуцированием* силы тяжести. «Редукции» иногда называют «поправками» к силе тяжести.

Прежде всего нужно учесть различие высот. Сила тяжести убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли, и на высоте h над уровнем моря величина g меньше значения g_0 на уровне моря. Обозначая радиус Земли R , получим

$$g \approx g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

$$g_0 \approx g \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \approx g + \frac{2g}{R} h.$$

Таким образом, для определения g_0 к измеренному значению g надо добавить

$$\frac{2g}{R} h \approx 0,3086 \cdot h \text{ мГал},$$

где h выражено в метрах. При подъеме на высоту 3,3 м нужно вносить поправку в 1 мГал. Ее называют *поправкой за свободный воздух*. Например, на высоте Фудзиямы ($h = 3776$ м) эта поправка составляет

$$0,3086 : 3776 = 1,165 \text{ Гал}.$$

Надо иметь в виду, что 0,3086 — приближенное среднее значение коэффициента пропорциональности, получаемое в предположении, что Земля — шар. В действительности этот коэффициент различен в разных местах земной поверхности и зависит от распределения глубинных масс. К этому вопросу мы еще вернемся.

Далее надо ввести поправку за влияние рельефа. Между (воображаемой) поверхностью уровня моря и точкой наблюдения расположены горные породы, формирующие рельеф местности. Их притяжение изменяет величину g в точке наблюдения. Для устранения этого влияния измеренное значение g надо привести к значению для случая, когда рельеф отсутствует.

Рассмотрим пример. В точке P на вершине горы конической формы (поперечный разрез которой показан на рис. 3.2) притяжение горы равно

$$T = 2\pi k^2 \rho \int_0^a \frac{rh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr = 2\pi k^2 \rho h (1 - h \sqrt{a^2 + h^2}).$$

При

$$h = 4 \text{ км}, \quad a = 10 \text{ км}, \quad \rho = 2,7 \text{ г/см}^3$$

притяжение горы

$$T = 2\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2,7 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot (1 - 4 \sqrt{4^2 + 10^2}) = 285 \text{ мГал.}$$

Такие большие изолированные горы иногда встречаются, но, как правило, рельеф изменяется более плавно и соответствующая поправка гораздо меньше.

В общем случае поправку за рельеф вычисляют в два приема следующим образом. По сравнению с (воображаемым) однородным слоем горной породы толщиной h некоторые участки местности в окрестности точки P выступают вверх (рис. 3.3), и есть также участки, не заполненные этой породой. Сила притяжения участков рельефа, возвышающихся над точкой P , имеет составляющую, направленную вверх, а понижения рельефа не влияют на g . Таким образом, во всех случаях неровности рельефа приводят к уменьшению значения g в точке P . Вычисляя величину этого уменьшения, определяют притяжение однородного плоского

слоя горной породы толщиной h . Получаемую таким образом поправку называют *поправкой за рельеф*. Ее величина, зависящая, разумеется, от местных особенностей, как правило, составляет несколько миллигал.

Например, из рис. 3.4 ясно, что притяжение показанного

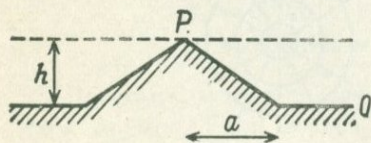


Рис. 3.2.

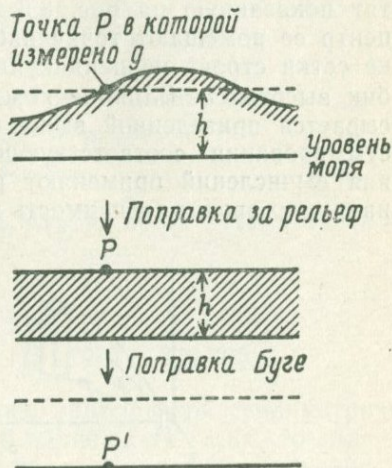


Рис. 3.3.

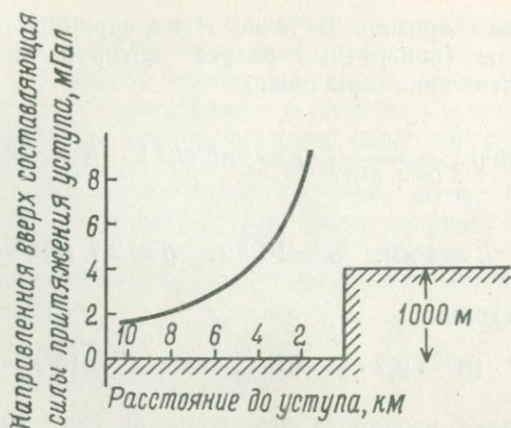


Рис. 3.4.

там уступа вдали от края обрыва влияет на величину g не очень сильно.

В общем случае вертикальная составляющая силы притяжения столбика высотой h в точке P равна

$$t = k^2 \rho \int_0^h \frac{rz \, d\theta \, dr \, dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = k^2 \rho \, d\theta \, dr \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right)$$

(левая часть рис. 3.5). Практически влияние рельефа вычисляют следующим образом. На прозрачной пластине чертят показанную на рис. 3.5 справа координатную сетку, в центр ее помещают точку наблюдения P , а в каждой ячейке сетки строят перпендикулярно плоскости пластины столбик высотой h . Влияние каждого отдельного столбика описывается приведенной выше формулой, и задача состоит в суммировании соответствующих выражений. Для упрощения вычислений применяют разные искусственные приемы, например вводят зависимость интервала dr от r .

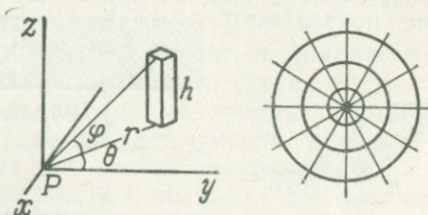


Рис. 3.5.

Проведенные по указанной схеме расчеты показывают, что для обычных форм рельефа поправка за рельеф не превышает нескольких миллигал. Поэтому часто, сопоставляя затраты труда на вычисления и результат, эту поправку просто не учитывают. Сила притяжения удаленных масс рельефа убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до них, а ее направление приближается к горизонтальному. Последнее обстоятельство приводит к тому, что влияние удаленных масс рельефа на g убывает с расстоянием еще быстрее, поскольку в g вносит вклад лишь вертикальная составляющая силы притяжения. Грубо говоря, влияние удаленных форм рельефа на величину g убывает обратно пропорционально кубу расстояния от них до точки наблюдения.

Остается учесть силу притяжения слоя толщиной h :

$$T = 2\pi k^2 \rho h.$$

При $\rho = 2,67$, $h = 1$ м

$$2\pi k^2 \rho h = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ мГал.}$$

Таким образом, для слоя толщиной 10 м рассматриваемая поправка составляет около 1 мГал. Эту поправку называют *редукцией Буге*. Ее всегда желательно вводить в данные гравиметрической съемки.

Французский ученый П. Буге (1698—1758) вывел свою формулу во время гравиметрической съемки в Перу в Южной Америке, где он столкнулся с необходимостью учесть влияние на g горного массива Анд. Его имя прочно увековечено термином «редукция Буге».

Обычно используют следующие обозначения:

Измеренная величина	g
Величина после введения поправки на свободный воздух	g_0
Величина после введения поправки за рельеф	g'_0
Величина после введения поправки Буге	g''_0

Например, в Симосове (уезд Агата, преф. Нагано) ($h = 779$ м)

$$g = 979,615,$$

$$g_0 = 979,615 + (0,3086 \cdot 779) = 979,855.$$

$$g''_0 = 979,855 - (0,112 \cdot 779) = 979,768.$$

Рассмотрим теперь ситуацию при морской гравиметрической съемке. Если ее ведут с надводного судна, то высота над уровнем моря равна нулю и измеренное значение g совпадает с g_0 . Затруднение здесь связано с тем, что

плотность морской воды 1,03, в то время как средняя плотность горных пород на суше 2,67. Таким образом, на море по сравнению со съемкой на суше плотность уменьшена на $2,67 - 1,03 = 1,64$. Если принять, что глубина моря постоянна и равна d , то вызванное указанным дефицитом плотности изменение силы тяжести составит

$$+ 2\pi k^2 \cdot 1,64 \cdot d = + 0,069 d \text{ мГал},$$

где d выражено в метрах. При глубине 1000 м рассматриваемая поправка равна 69 мГал; прибавляя ее к измеренному значению g , получим g'' .

§ 4. ФОРМУЛА НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Итак, в значение g , измеренное в любом районе земного шара, следует внести различные поправки. В результате производимой с учетом таких поправок гравиметрической съемки накапливаются данные о зависимости от географической широты значений g на уровне моря. Обработывая их, можно вывести формулу, описывающую осредненное распределение g по поверхности Земли.

Зависимость g от географической широты φ *) точки измерения описывается формулой

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta' \sin^2 2\varphi),$$

где g_e — значение g на экваторе,

$$\beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} - \varepsilon - \frac{17}{14} \frac{\omega^2 a}{g_e} \varepsilon,$$

ω — угловая скорость вращения Земли, a — экваториальный радиус, b — полярный радиус Земли, $\varepsilon = (a - b) / a$,

$$\beta' = \frac{\varepsilon}{8} \left(\frac{5\omega^2 a}{g_e} - \varepsilon \right).$$

Подробнее о выводе этой формулы будет сказано ниже. Она получается, если принять, что Земля — близкий к сфере эллипсоид вращения, вращающийся с угловой скоростью ω .

Используя огромное количество данных о значениях g на разных широтах, методом наименьших квадратов можно определить коэффициенты g_e , β , β' , входящие в приведенную выше формулу; полученное таким образом выражение называют формулой силы тяжести.

Формулу силы тяжести независимо друг от друга получали разные исследователи. До недавнего времени между

*) Угол между плоскостью экватора и перпендикуляром к поверхности Земли.

народное признание имела формула

$$\gamma = 978,049 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi),$$

принятая на пленарном заседании Международного геодезического и геофизического союза, состоявшемся в Стокгольме в 1930 г. При ее выводе использовались значения g , полученные на основе старого потсдамского абсолютного значения. Даваемые формулой силы тяжести значения g называют стандартной, или *нормальной*, силой тяжести и обозначают эту величину символом γ .

В связи с отменой потсдамской системы устарела и основанная на ней формула 1930 г. Возникла потребность в новой формуле. Мы уже говорили о Международной стандартной опорной гравиметрической сети JGSN 1971, основанной на точном измерении значений g в 1854 точках. Для определения фигуры Земли такого количества данных совершенно недостаточно, а кроме того, точки Международной стандартной опорной гравиметрической сети распределены по поверхности земли неравномерно. Но в наше время для определения фигуры Земли не требуется данных наземной гравиметрической съемки: можно воспользоваться информацией о полете искусственных спутников. Спутник движется в поле земного тяготения, и на его полет оказывает влияние распределение силы тяжести по поверхности земли; последнее можно определить, анализируя траекторию движения спутника. Использование искусственных спутников очень удобно в том отношении, что из-за суточного вращения Земли спутник равномерно сканирует ее поверхность, в то время как распределение точек гравиметрической съемки на земной поверхности практически невозможно сделать однородным. Поэтому данные спутников гораздо представительнее данных наземной гравиметрической съемки. Анализ движения спутников позволяет определить самые разнообразные параметры Земли и, в частности, найти распределение силы тяжести по ее поверхности. Таким путем получается формула нормальной силы тяжести

$$\gamma = 978,03185 (1 + 0,005278895 \sin^2 \varphi + 0,000023462 \sin^4 \varphi),$$

получившая международное признание в 1971 г. Она записана через $\sin^2 \varphi$, $\sin^4 \varphi$ но, разумеется, ее можно переписать и в старом виде:

$$\gamma = 978,03185 (1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi),$$

По коэффициентам β формулы нормальной силы тяжести можно определить сжатие Земли. Расчет по формуле 1971 г. дает

$$\varepsilon = 1/298,25.$$

В начале этой книги было сказано, что одна из целей гравиметрической съемки на поверхности земли — определение фигуры Земли. Но в наши дни для этой цели предпочтительнее использовать данные полета искусственных спутников. Таким образом, цели наземной гравиметрической съемки сужаются до анализа локальных задач.

Вычитая друг из друга формулы 1971 и 1930 гг., получаем

$$\gamma_{1971} - \gamma_{1930} = -17,2 + 13,6 \sin^2 \varphi \text{ мГал.}$$

Широтная зависимость этой разности представлена в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Широтная зависимость разности значений силы тяжести, даваемых формулами 1930 и 1971 гг.

Широта	Формула 1930 г.	Формула 1971 г.	Разность, мГал
0	978,0490	978,031846	-17,2
10	978,2043	978,187550	-16,7
20	978,6517	978,636113	-15,6
30	979,3378	979,324019	-13,8
40	980,1805	980,168966	-11,5
50	981,0786	981,069480	-9,1
60	981,9239	981,916949	-7,0
70	982,6139	982,608720	-5,2
80	983,0647	983,060682	-4,0
90	983,2213	983,217728	-3,6

Как видно из таблицы, новая формула силы тяжести (полученная с помощью искусственных спутников Земли) дает не только новое абсолютное значение, но и другую, чем формула 1930 г., широтную зависимость силы тяжести.

В заключение следует отметить, что поскольку новая формула силы тяжести получена из наблюдений за спутниками, движущимися вне атмосферы, в этой формуле масса Земли включает массу атмосферы.

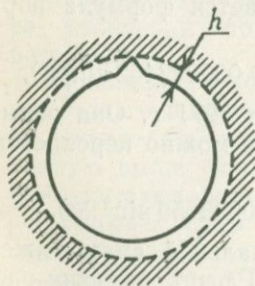


Рис. 3.6.

Величина g , измеренная на горе высотой h , включает силу притяжения воздуха, находящегося под точкой измерения. Суммарная сила притяжения воздуха, расположенного над точкой измерения, например в заштрихованной на рис. 3.6 области, равна нулю. Поэтому при сравнении нормальной силы тяжести, включающей силу притяжения всей атмосферы

ры, с величиной g , измеренной на высоте h , нужно вводить поправку, показывающую, как изменится измеренное значение g , если всю атмосферу сконденсировать на поверхности Земли. Поправка эта зависит не только от высоты горы h , но и от скорости уменьшения плотности воздуха с высотой, которая неодинакова в разных моделях атмосферы. В общем

$$\text{Поправка} = + 0,87 - 0,0965h \text{ мГал},$$

где h выражено в километрах. Для горы высотой 3000 м она будет равна

$$+ 0,87 - (0,0965 \cdot 3) = 0,58 \text{ мГал}.$$

Учет этой поправки необходим лишь в особых случаях, а в обычных геофизических задачах ее можно не принимать во внимание. Но ввиду постоянного совершенствования техники измерений и расчетов интересно указать на обстоятельства, которые могут усложнить работу геофизиков в будущем.

§ 5. АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Определенное в каждой точке значение g в общем случае, естественно, не совпадает с нормальной силой тяжести γ для этой точки, поскольку на измеренное значение g влияет локальное распределение глубинных масс. Разность $g - \gamma$ называют *аномалией силы тяжести* (гравитационной аномалией).

Величина аномалии силы тяжести зависит от того, какие поправки внесены в измеренное значение g . Так, величину $g_0 - \gamma$ называют аномалией в *свободном воздухе* и для ее обозначения применяют символ Δg_0 . Разность $g''_0 - \gamma$ обозначают символом $\Delta g''_0$ и называют *аномалией Буге*. Вместо «аномалии в свободном воздухе» иногда говорят о «высотной аномалии»*), но последний термин малоупотребителен, ибо он звучит так, будто аномалию имеет высота.

Приведем пример. Мы уже говорили, что в Симосове (уезд Агата, преф. Нагано) ($h = 779$ м, $\varphi = 36^\circ 40'$) измерены значения

$$g = 979,615, \quad g_0 = 979,855, \quad g''_0 = 979,775.$$

По формуле 1971 г. для широты $\varphi = 36^\circ 40'$ нормальная сила тяжести

$$\gamma = 979,805.$$

*) В советской геофизической литературе термин «высотная аномалия» не употребляется. — Прим. ред.

Следовательно,

$$\Delta g_0 = +50 \text{ мГал}, \quad \Delta g''_0 = -30 \text{ мГал}.$$

Обычно гравитационная аномалия составляет несколько десятков мГал. Аномалии свыше 200 мГал встречаются очень редко. В Японии максимальное значение $\Delta g''_0$ (+230 мГал) получено в окрестности Немуро на Хоккайдо, следующее по абсолютной величине значение (−80 мГал) — в Накабе Ямадзи.

Мы уже отмечали, что при переходе от Потсдамской к Международной системе все значения g уменьшались приблизительно на 14 мГал. Кроме того, изменилась формула нормальной силы тяжести. Поэтому естественно, что изменилась также и величина аномалий силы тяжести, являющихся разностями указанных величин.

Но вблизи Японских островов не возникло необходимости изменять значения аномалий силы тяжести. Для японских геофизиков это очень удачная случайность. Причина отмеченного обстоятельства в следующем.

Разность между формулами нормальной силы тяжести 1930 и 1971 гг.

$$\gamma_{1971} - \gamma_{1930} = -17,2 + 13,6 \sin^2 \varphi \text{ мГал}$$

в районе Японии составляет

на широте 30°	−13,8 мГал
на широте 40°	−11,5 мГал

Поскольку при переходе от Потсдамской к Международной системе все значения g должны быть уменьшены примерно на 14 мГал, поправка к аномалиям силы тяжести в Японии составит

на широте 30°	−14 − (−13,8) = −0,2 мГал
на широте 40°	−14 − (−11,5) = −2,5 мГал

Для обычных геофизических задач эти поправки пренебрежимо малы. Поэтому можно пользоваться значениями аномалий силы тяжести, найденными на основе старых потсдамских абсолютных измерений, а также старыми картами распределения этих аномалий — это не приведет к существенным ошибкам.

«Высотная аномалия» Δg_0
и аномалия Буге $\Delta g''_0$ показы-



Рис. 3.7.

вают, как отличается значение g в данном месте от усредненного распределения g по поверхности земли. Следовательно, они отражают особенности локального распределения глубинных масс.

Какой из величин — Δg_0 или $\Delta g_0''$ — нужно пользоваться при рассмотрении гравитационной аномалии, зависит от цели исследования. Если интерес представляет общая картина распределения g по поверхности земного шара, следует использовать Δg_0 . А в случае, когда нужно выявить локальное распределение глубинных масс, предпочтительнее пользоваться величиной $\Delta g_0''$, в которой полностью устранено влияние рельефа. Но если нашей целью является изучение распределения масс под морским дном на основе морских гравиметрических данных, то нужно пользоваться величиной Δg_0 , так как в этом случае распределение масс вблизи поверхности земли приблизительно характеризуется схемой, приведенной на рис. 3.7, и задача состоит в рассмотрении равновесия показанных на этом рисунке структур.

СИЛА ТЯЖЕСТИ И ФИГУРА ЗЕМЛИ

§ 1. МОДЕЛЬ НЬЮТОНА

Мы живем на поверхности Земли и, казалось бы, должны знать ее форму. Но мы не в состоянии взглянуть на Землю со стороны, поскольку сами на ней находимся. Для определения формы Земли нужен какой-либо независимый метод. Один из путей к решению этой задачи — измерение силы тяжести во всех точках геоида. По определению геоид — эквипотенциальная поверхность, а сила тяжести, направленная по нормали к геоиду, является вертикальным градиентом соответствующего потенциала. Известно, что форму эквипотенциальной поверхности, вообще говоря, можно установить, если во всех точках известны значения производной потенциала по нормали к поверхности. Решение этой задачи очень облегчается, если учесть, что Земля — фигура вращения, сечение которой в плоскости, проходящей через полярную ось, есть близкий к кругу эллипс.

В предыдущей главе уже говорилось о нахождении распределения силы тяжести по поверхности Земли с помощью искусственных спутников. Об искусственном спутнике нельзя сказать, что он позволяет объективно взглянуть на Землю с большого расстояния от нее, поскольку спутник движется в поле земного притяжения. Правильнее сказать, что спутники — один из инструментов измерения земной силы тяжести.

Рассмотрим связь между распределением силы тяжести и фигурой Земли. Задача установления этой связи возникла около 300 лет назад, когда французский астроном Ж. Рише (1630—1696) поехал в Кайенну (Южная Америка, $Z = 4^{\circ}46'$ с. ш.) для астрономических наблюдений. В те времена при наблюдениях пользовались маятниковыми часами, и Рише обнаружил, что его часы, показывавшие в Париже правильное время, в Кайенне отстают на 148 с в сутки. Этот эффект объясняется тем, что Земля сплюснута у полюсов, вследствие чего сила тяжести на низких широтах меньше, чем на высоких, а период колебаний маятника тем больше, чем меньше сила тяжести. Вопрос этот привлек внимание современ-

ника Рише И. Ньютона (1642—1727), на решении которого мы и остановимся.

Ньютон принимал, что Земля имеет форму эллипсоида вращения, постоянную плотность ρ и находится в равновесии, вращаясь с угловой скоростью ω . Если от полюса и эква-

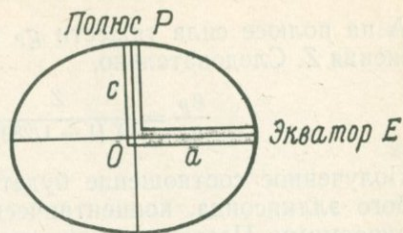


Рис. 4.1.

тора прорыть колодцы к центру Земли, то жидкость на дне этих колодцев будет находиться в равновесии (рис. 4.1).

На экваторе сила притяжения

$$X = \frac{2\pi\rho k^2(1+\lambda^2)}{\lambda^3} a \left(\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right),$$

а на полюсе

$$Z = \frac{2\pi\rho k^2(1+\lambda^2)}{\lambda^3} 2c (\lambda - \operatorname{arctg} \lambda),$$

где λ — эксцентриситет:

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

Поскольку

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{(a+c)(a-c)}{a^2} \approx 2\varepsilon,$$

можно сказать, что λ^2 приблизительно равно удвоенному сжатию Земли ε . Отношение сил притяжения на полюсе и на экваторе составляет

$$\frac{Z}{X} = \frac{2c}{a} \frac{\lambda - \operatorname{arctg} \lambda}{\operatorname{arctg} \lambda - \lambda/(1+\lambda^2)}.$$

Поскольку Земля мало отличается от сферы, должно быть справедливо неравенство $\lambda \ll 1$. Разлагая правую часть последнего соотношения в ряд по λ , получаем

$$\frac{Z}{X} = 1 + \frac{1}{10} \lambda^2 = 1 + \frac{\varepsilon}{5}.$$

Значение силы тяжести g_e на экваторе получается вычитанием из X центробежного ускорения, составляющего $1/289$ часть от X :

$$g_e = X \left(1 - \frac{1}{289} \right).$$

А на полюсе сила тяжести g_p в точности равна силе притяжения Z . Следовательно,

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{Z}{X \{1 - 1/289\}} = \frac{1 + \varepsilon/5}{1 - 1/289}.$$

Полученное соотношение будет справедливо также для любого эллипсоида, концентрического и изоморфного рассматриваемому. Поэтому отношение давлений в основаниях двух столбов жидкости, показанных на рис. 4.1, получится умножением отношения сил тяжести g_p/g_e на отношение радиусов

$$c/a = 1 - \varepsilon$$

и условие равновесия примет вид

$$\frac{1 + \varepsilon/5}{1 - 1/289} (1 - \varepsilon) = 1.$$

Решая это уравнение относительно ε , находим

$$4/5 \varepsilon = 1/289,$$

откуда

$$\varepsilon \approx 1/231.$$

Итак, равновесный однородный жидкий эллипсоид постоянной плотности, вращающийся с угловой скоростью Земли, должен иметь сжатие $1/231$. При этом

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{1 + \varepsilon/5}{1 - 4\varepsilon/5} \approx 1 + \varepsilon,$$

т. е.

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} = \varepsilon = \frac{a - c}{a}$$

(относительная разность сил тяжести равна сжатию). Разумеется, сказанное применимо только к жидкой Земле, имеющей постоянную плотность.

При описании ньютоновской модели мы предполагали, что однородный жидкий вращающийся с постоянной угловой скоростью эллипсоид находится в равновесии. Это положение можно доказать.

§ 2. МОДЕЛЬ ГЮЙГЕНСА

Х. Гюйгенс (1629—1695) рассмотрел модель, противоположную модели однородной жидкости, предложенной Ньютоном. В модели Гюйгенса вся масса Земли сосредоточена в ее центре,

Расчет по модели Гюйгенса совсем прост. Ускорения силы тяжести на полюсах и экваторе равны соответственно

$$g_p = k^2 M/c^2, \quad g_e = k^2 M/a^2 - \omega^2 a.$$

Потенциальная энергия тела массой m равна на полюсах $k^2 m M/c$, а на экваторе $k^2 m M/a + m \omega^2 a^2/2$. Форма Земли определяется из условия равенства этих потенциальных энергий (Земля — эквипотенциальная поверхность):

$$k^2 m M/c = k^2 m M/a + m \omega^2 a^2/2.$$

Учитывая, что

$$c = a(1 - \epsilon),$$

приводим условие, определяющее форму Земли, к виду

$$\frac{k^2 M}{a} (1 + \epsilon) = \frac{k^2 M}{a} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2,$$

откуда

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a}{k^2 M/a^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{289} = \frac{1}{578}.$$

Таким образом, в модели с постоянной плотностью сжатие Земли составляет $1/231$, а если вся масса Земли сосредоточена в ее центре, то $\epsilon = 1/578$. Полученное из измерений реальное значение $\epsilon = 1/298$ лежит между двумя предельными случаями, даваемыми моделями Ньютона и Гюйгенса. Это значит, что реальное распределение плотности внутри Земли имеет вид, промежуточный между константой и сосредоточенным распределением: плотность вещества внутри Земли постепенно увеличивается по мере приближения к ее центру.

§ 3. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ — ТЕОРЕМА КЛЕРО

В моделях Ньютона и Гюйгенса распределение плотности внутри Земли было задано заранее. Следующий шаг в анализе указанной проблемы состоит в том, чтобы, не задавая распределение плотности в явном виде, рассмотреть задачу с более общих позиций. При этом мы по-прежнему будем считать, что форма геоида близка к сферической.

Пользуясь введенными на рис. 4.2 обозначениями, напишем

$$e^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma.$$

Потенциал силы тяжести в точке $P'(x', y', z')$ равен

$$W = k^2 \int \frac{dm}{e} + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \omega^2.$$

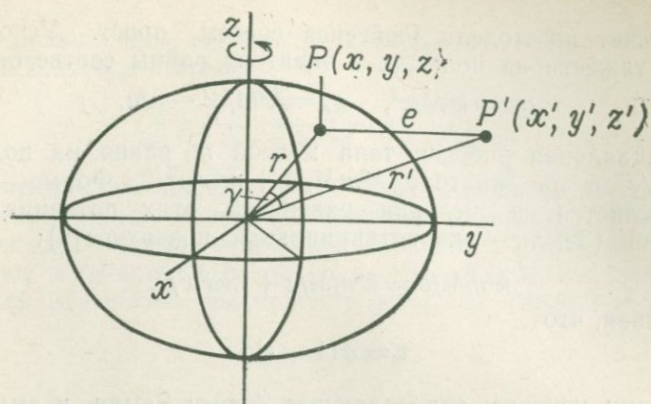


Рис. 4.2.

Имеем

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left[1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \gamma + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Поскольку $r' \geq r$, выражение в правой части можно разложить в ряд по степеням (r/r') :

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right) P_1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 P_2 + \dots \right].$$

где

$$P_1 = \cos \gamma,$$

$$P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\gamma,$$

.....

Подставляя это разложение в формулу для W , получаем

$$W = \frac{k^2}{r'} \left(\int dm + \frac{1}{r'} \int P_1 r dm + \frac{1}{r'^2} \int P_2 r^2 dm + \dots \right) + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \omega^2.$$

Первое слагаемое в скобках

$$\int dm = M.$$

Пользуясь соотношением

$$P_1 = \cos \gamma = (xx' + yy' + zz')/rr',$$

второе слагаемое можно записать в виде

$$\int P_1 r dm = \frac{1}{r'} \left(x' \int x dm + y' \int y dm + z' \int z dm \right).$$

Но, поскольку начало координат находится в центре Земли,

$$\int x dm = \int y dm = \int z dm = 0.$$

Следовательно,

$$\int P_1 r dm = 0.$$

Преобразуя полином P_2 по формуле

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\gamma = \frac{9}{4} \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) + \\ &+ 3 \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda') + \\ &+ \frac{4}{3} \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi' \cos 2(\lambda - \lambda'), \end{aligned}$$

запишем третье слагаемое в скобках (в формуле для W) в виде

$$\begin{aligned} \int P_2 r^2 dm &= \frac{3}{2} \left(\sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \int \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dm + \\ &+ 3 \sin \varphi' \cos \varphi' \left\{ \cos \lambda' \int xz dm + \sin \lambda' \int yz dm \right\} + \\ &+ \frac{3}{4} \cos^2 \varphi' \left\{ \cos 2\lambda' \int (x^2 - y^2) dm + \sin^2 \lambda' \int 2xy dm \right\}. \end{aligned}$$

Обозначая A, B, C моменты инерции

$$\int (y^2 + z^2) dm, \quad \int (z^2 + x^2) dm, \quad \int (x^2 + y^2) dm$$

относительно осей x, y, z соответственно и учитывая, что

$$\int xy dm = \int yz dm = \int zx dm = 0,$$

получим

$$\int P_2 r^2 dm = \frac{3}{2} \left(\frac{A+B}{2} - C \right) \left(\sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} (B-A) \cos \varphi' \cos 2\lambda'.$$

Поскольку Земля — тело вращения относительно оси z ,

$$A = B.$$

Вводя обозначение

$$(C - A)/M = K,$$

подставляя полученные выражения в формулу для потенциала W и опуская штрихи, находим

$$W = \frac{k^2 M}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \dots + \frac{\omega^2 r^3}{2k^2 M} \cos^2 \varphi \right\}.$$

Интересующая нас величина g в общем случае определяется градиентом W , но в принятом приближении можно написать

$$g = - \frac{\partial W}{\partial r}^* ,$$

откуда

$$g = \frac{k^2 M}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{\omega^2 r^3}{2k^2 M} \cos^2 \varphi \right\}.$$

Вводя потенциал на поверхности геоида

$$W_0 = \frac{k^2 M}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2k^2 M} \cos^2 \varphi \right\},$$

величину r можно приближенно представить в виде

$$r = \frac{k^2 M}{W_0} \left\{ 1 + \frac{K}{2a^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 a^3}{2k^2 M} \cos^2 \varphi \right\}.$$

Ускорение силы тяжести g_φ в произвольной точке на поверхности геоида получается подстановкой полученного значения r в формулу для g , поэтому приближенно

$$g_\varphi = \frac{W_0^2}{k^2 M} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{K}{a^2} - \frac{3\omega^2 a^3}{k^2 M} \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{2\omega^2 a^3}{k^2 M} - \frac{3K}{k^2 M} \right) \sin^2 \varphi \right\}.$$

Значение g_φ при $\varphi = 0$

$$\frac{W_0^2}{k^2 M} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{K}{a^2} - \frac{3\omega^2 a^3}{k^2 M} \right\}$$

есть не что иное, как ускорение силы тяжести на экваторе g_e . Следовательно,

$$g_\varphi = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi),$$

где

$$\beta = \frac{2\omega^2 a^3}{k^2 M} - \frac{3K}{2a^2},$$

Аналогичным образом

$$r_\varphi = \frac{k^2 M}{W_0} \left\{ 1 + \frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2k^2 M} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2k^2 M} \right) \sin^2 \varphi \right\}.$$

Поскольку при $\varphi = 0$

$$r_\varphi = a = \frac{k^2 M}{W_0} \left\{ 1 + \frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2k^2 M} \right\},$$

*) В данной книге знаки выбраны таким образом, чтобы производная потенциала в некотором направлении давала компоненту силы в этом направлении.

можно написать

$$r_{\varphi} = a(1 - \varepsilon \sin^2 \varphi),$$

где

$$\varepsilon = \frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2k^2 M}$$

есть сжатие (сплюснутость) геоида, $\varepsilon = (a - c)/a$. Полученная нами функция r_{φ} описывает форму геоида. Соответствующую фигуру называют *уровненным сфероидом* (сфероидом уровня), и она близка к эллипсоиду вращения. Уровненный сфероид сильнее всего отличается от эллипсоида вращения при $\varphi = 45^\circ$; для реальных параметров Земли это максимальное отличие не превышает 27 м.

Складывая почленно выражение

$$\beta = \frac{2\omega^2 a^3}{k^2 M} - \frac{3K}{2a^2}$$

с выражением

$$\varepsilon = \frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2k^2 M},$$

получаем

$$\beta + \varepsilon = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a^3}{k^2 M} \approx \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e},$$

т. е.

$$\varepsilon = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} - \beta.$$

Последнее соотношение называют *теоремой Клеро*. Используя ее, перепишем выражение для g_{φ} :

$$g_{\varphi} = g_e(1 + \beta \sin^2 \varphi) = g_e \left[1 + \left(\frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} - \beta \right) \sin^2 \varphi \right].$$

С помощью теоремы Клеро по коэффициенту β , определяющему зависимость силы тяжести от широты, можно определить сжатие геоида ε .

А. Клеро (1713—1765) — выдающийся французский математик и физик. Его врожденный талант развился очень рано — уже в возрасте 18 лет он был избран во Французскую академию наук.

Заметим, что, согласно теореме Клеро, ε уменьшается при увеличении β . Иными словами, чем сильнее возрастает сила тяжести при увеличении широты, тем меньше сжатие геоида (форма Земли ближе к сферической). Иначе говоря, чем ближе геоид к сфере, тем больше разность между силой тяжести на полюсах и экваторе. Говорят, что даже Ньютон не имел полной ясности в этом вопросе. Причина

указанного, странного на первый взгляд обстоятельства состоит в том, что геоид может оставаться эквипотенциальной поверхностью только в том случае, если при изменении величины его сжатия происходит перераспределение масс внутри него.

В модели Ньютона $\epsilon = 1/231$ и

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{1 + \epsilon/5}{1 - 4\epsilon/5} \approx 1 + \epsilon = 1,0043,$$

а в модели Гюйгенса $\epsilon = 1/578$ и

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{1 + 2\epsilon}{1 - 2\epsilon} \approx 1 + 4\epsilon = 1,0069,$$

откуда видно, что в этих моделях отношение g_p/g_e и ϵ меняются в противоположных направлениях.

Автор этой книги в 1935 г. попытался вывести формулу для нормальной силы тяжести, исходя только из данных по Японии. Получилась зависимость

$$g_\varphi = 977,998(1 + 0,005538 \sin^2 \varphi),$$

в которой коэффициент при $\sin^2 \varphi$ заметно больше соответствующего коэффициента в общепринятой формуле. Из этой зависимости вытекает значение $\epsilon = 1/319,5$, меньшее, чем получается из всей совокупности мировых гравиметрических данных. Таким образом, форма геоида в окрестности Японии очень близка к сферической. Это результат аномального распределения глубинных масс в областях Тохоку и Хоккайдо.

Сжатие геоида можно найти, не прибегая к гравиметрическим данным, путем сравнения широт и долгот, определяемых из наблюдений небесных тел, и широт и долгот, определяемых геодезическими методами (триангуляция). При астрономических наблюдениях телескоп устанавливают по уровню, показывающему направление геоида в данном месте, поэтому с их помощью можно определить форму геоида. Этот метод с привлечением только японских данных дает

$$\epsilon = 1/310,6 \quad (\text{К. Ацуми, 1933}),$$

$$\epsilon = 1/304,2 \quad (\text{С. Кавабата, 1937}).$$

Вновь получается, что вблизи Японии геоид ближе к сфере, чем в среднем по Земле. Правда, по мнению Х. Хирозэ и Ё. Кодзая (1974), данные Ацуми и Кавабаты нуждаются в исправлении.

Выше при выводе теоремы Клеро мы ограничились вторым членом разложения в ряд по степени r/r' . Совершая

еще один шаг разложения, приходим к формулам

$$g_{\varphi} = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta' \sin^2 2\varphi),$$

$$\gamma_{\varphi} = a (1 - \varepsilon \sin^2 \varphi - \varepsilon' \sin^2 2\varphi),$$

$$\beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} - \varepsilon - \frac{17}{14} \frac{\omega^2 a}{g_e} \varepsilon,$$

$$\beta' = \frac{\varepsilon}{8} \left(\frac{5\omega^2 a}{g_e} - \varepsilon \right),$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{4} \varepsilon \left(\frac{g_p - g_e}{g_e} - \varepsilon \right),$$

в которых под φ надо подразумевать не геоцентрическую, а географическую широту. Согласно этим формулам, уровенный сфероид еще ближе к эллипсоиду вращения: на широте 45° , где отличие между ними максимально, оно составляет теперь 17 м.

Все рассмотренные нами формулы силы тяжести имеют вид

$$g_{\varphi} = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta' \sin^2 2\varphi).$$

Вид функциональной зависимости здесь определяется тем, что эллипсоид вращения аппроксимируют уровенным сфероидом. Если же с самого начала принять, что геоид точно описывается эллипсоидом вращения, то в результате несколько громоздкого вывода получается следующая изящная формула:

$$g_{\varphi} = \frac{ag_e \cos^2 \varphi + bg_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}},$$

принадлежащая итальянскому ученому Сомильяне (1929). Но формула Сомильяны не имеет решающих преимуществ перед обычно употребляемой, поскольку она не дает ни новой информации, ни дополнительных удобств при практическом применении.

АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
И ГЛУБИННЫЕ МАССЫ

§ 1. ПРЯМЫЕ *) И КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ

Как правило, измеренные значения g после внесения всех необходимых поправок не совпадают со значениями, вычисленными для данной точки по формуле нормальной силы тяжести; соответствующую разность называют *аномалией силы тяжести*. Наличие аномалии силы тяжести указывает на то, что распределение глубинных масс в данном месте отличается от усредненного по всему земному шару, и возникает задача установить это аномальное распределение глубинных масс по данным о гравиметрической аномалии.

Аномальная глубинная масса создает на поверхности дополнительную силу притяжения, вертикальная составляющая которой проявляется в виде аномалии силы тяжести. Поскольку употребляется каждый раз слово «аномалия» в постоянно встречающихся терминах «аномальная масса», «аномалия силы тяжести» было бы очень навязчиво, впредь мы вместо слов «аномальная масса» будем говорить просто «масса», а вместо «аномалия силы тяжести» — просто «сила тяжести», которую будем обозначать Δg .

Итак, задана сила тяжести, надо определить глубинную массу. Существуют два метода решения этой задачи. В первом из них задаются предположением о распределении глубинных масс, вычисляют соответствующее ему поле силы тяжести и сравнивают его с наблюдаемым. В случае совпадения задача считается решенной, а если совпадения не получено, нужно изменить гипотезу о распределении глубинных масс и вычислить новое поле силы тяжести, более соответствующее наблюдаемому. Этот метод называют косвенным методом. В прошлом его применяли в большинстве случаев. Правда, в нем требуется проводить им воспользоваться, так как для того, чтобы удачно сформулировать предположение о распределении масс на глубине, нужен значительный опыт работы.

*) О прямых методах нахождения аномальной глубинной массы говорится в гл. 7. — *Прим. перев.*

Вначале мы решим несколько простых задач о поле силы тяжести, создаваемом глубинными массами. Это поможет нам создать общее представление о связи глубинной массы с полем силы тяжести на поверхности.

§ 2. НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Прежде всего обратим внимание на следующее важное обстоятельство: одному и тому же распределению силы тяжести на поверхности может соответствовать бесконечное множество распределений масс на глубине. Иными словами, по заданному распределению силы тяжести на поверхности невозможно однозначно установить распределение глубинных масс.

Пусть, например, под землей находится показанный на рис. 5.1 шар радиуса r с плотностью ρ_0 , центр которого расположен на глубине d . На поверхности этот шар создает поле силы тяжести

$$\Delta g(x) = \frac{4}{3} \pi k^2 \rho_0 r^3 \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}},$$

одинаковое (при заданном d) для бесконечного семейства тел сферической формы с разными плотностями ρ_0 и радиусами r , удовлетворяющими условию $\rho_0 r^3 = \text{const}$. По указанному распределению силы тяжести разные тела рассматриваемого семейства невозможно отличить друг от друга.

Другой пример показан на рис. 5.2: на глубине d расположена массивная плоская плита, плотность вещества которой изменяется вдоль оси x по закону $\rho_0 \cos mx$ (в направлении y плотность постоянна). Такая плита создает на поверхности поле силы тяжести

$$\Delta g(x) = 2\pi k^2 \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \cos mx}{d^2 + x^2} dx =$$

$$= 2\pi k^2 \rho_0 \cos mx \exp(-md),$$

которое при условии $\rho_0 \exp(-md) = \text{const}$ будет характеризовать также и плиту, показанную на рис. 5.2 пунктиром, хотя эта вторая плита имеет большую амплитуду плотности ρ_0 и расположена на большей глубине.

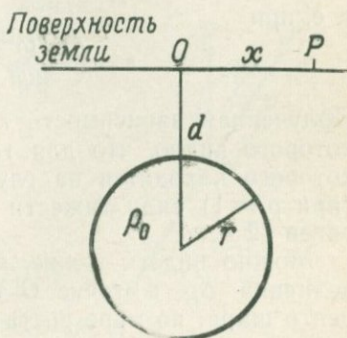


Рис. 5.1.

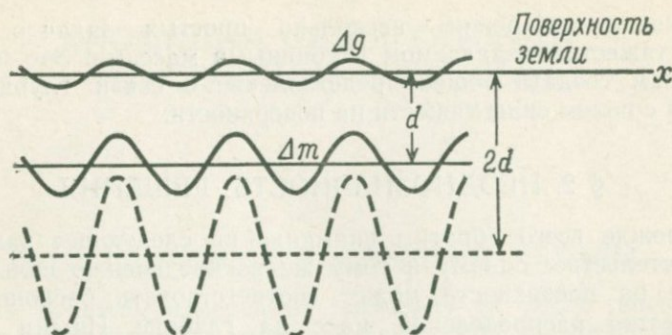


Рис. 5.2.

Итак, связь между глубинной массой и силой тяжести неопределенна. Но в реальных задачах на величину ρ_0 , входящую в приведенные формулы, накладываются известные ограничения, так что неопределенность решения значительно сокращается.

§ 3. ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГЛУБИННЫХ МАСС

а) *Шар*. Поле силы тяжести показанной на рис. 5.1 массы сферической формы в точке O (расположенной в точности над ее центром) характеризуется величиной

$$\Delta g = \frac{4}{3} \frac{\pi k^2 \rho_0 r^3}{d^2}.$$

Если $\rho_0 = 1$, то Δg в точке O равно 1 мГал в случае, когда

$$10^{-3} = \frac{4}{3} \frac{\pi k^2 r^3}{d^2},$$

т. е. при

$$r = \left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{4\pi k^2} \right)^{1/3} d^{2/3} = 15,3d^{2/3}.$$

Полученная зависимость r от d приведена на рис. 5.3, из которого видно, что для того, чтобы, например, шар, центр которого находится на глубине 100 м, создавал в точке O (при $\rho = 1$) силу тяжести 1 мГал, его радиус должен быть равен 72 м.

Можно видеть также, что для шаров одинаковой массы величина Δg в точке O тем меньше, чем глубже залегает центр шара; по мере роста глубины его залегания поле силы тяжести на поверхности все больше приближается к однородному.

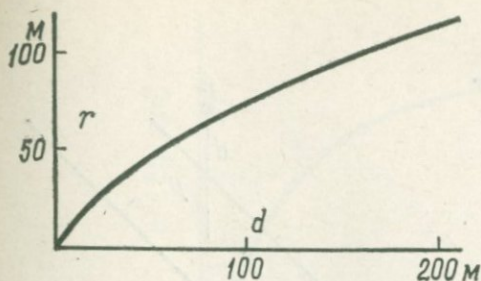


Рис. 5.3.

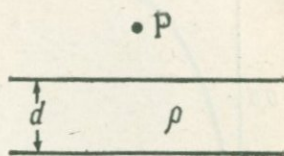


Рис. 5.4.

б) *Бесконечная горизонтальная плита.* Рассмотрим бесконечную в двух горизонтальных направлениях плиту плотностью ρ и толщиной d . Она создает в точке P (рис. 5.4) силу тяжести

$$\Delta g_P = 2\pi k^2 \rho d,$$

не зависящую от высоты точки P над плитой. Определим, при какой толщине d сила тяжести, создаваемая плитой, будет равна 1 мГал. Принимая, что плотность плиты $\rho = 2,67$, получаем

$$d = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2,67} \approx 8,9 \text{ м.}$$

Полезно запомнить, что силу тяжести примерно в 1 мГал создает плита толщиной 10 м.

Рассмотренные в этом пункте соотношения используют при вычислении поправки Буге к измеренному значению силы тяжести.

в) *Линейная масса.* В данном случае притяжение создается горизонтальным отрезком прямой с линейной плотностью ρ (рис. 5.5). Обусловленная им в точке P сила тяжести равна

$$\begin{aligned} \Delta g_P &= 2k^2 \rho \int_0^a \frac{d}{(x^2 + d^2)^{3/2}} dx = - \\ &= \frac{2k^2 \rho}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + (d/a)^2}}. \end{aligned}$$

Зависимость $1/\sqrt{1 + (d/a)^2}$ от отношения a/d представлена кривой на рис. 5.6, из которого видно, что при $a/d > 2$

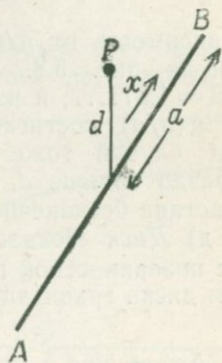


Рис. 5.5.

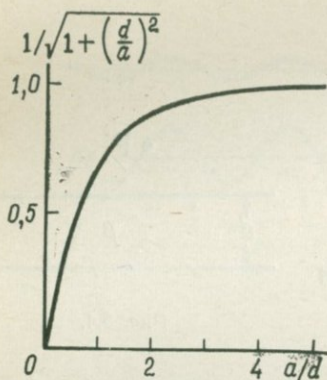


Рис. 5.6.

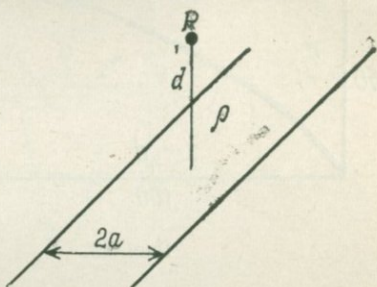


Рис. 5.7.

значение Δg практически не отличается от случая, когда $a = \infty$. Последний часто встречается на практике: достаточно длинный отрезок линейно распределенной массы можно спокойно считать бесконечно длинным. В случае бесконечно длинного отрезка величина

$$\Delta g_p = 2k^2\rho/d$$

убывает обратно пропорционально глубине залегания d .

г) *Плоская пластина конечной ширины и бесконечной длины.* Рассмотрим показанную на рис. 5.7 горизонтально расположенную массивную пластину, имеющую поверхностную плотность ρ , ширину $2a$ и бесконечную длину в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Величина силы тяжести, создаваемой в точке P , будет

$$\Delta g_p = 4k^2\rho \int_0^a \frac{d}{x^2 + a^2} dx = 4k^2\rho \operatorname{arctg} \frac{a}{d}.$$

Зависимость от a/d функции $\operatorname{arctg}(a/d)$ показана графически на рис. 5.8. Значение $\operatorname{arctg}(a/d)$ при $a = \infty$ равно $\pi/2 = 1,571\dots$, и из рис. 5.8 видно, что при $a/d = 5$ функция $\operatorname{arctg}(a/d)$ достигает 90% этого предельного значения. Такой случай тоже часто встречается на практике. Если a гораздо больше d , не будет большой ошибкой считать, что пластина бесконечно широка.

д) *Диск.* Показанный на рис. 5.9 массивный диск радиуса a с поверхностной плотностью ρ создает в точке P над центром диска гравитационное поле

$$\Delta g_p = k^2\rho d \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = 2\pi k^2\rho \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/d)^2}} \right].$$

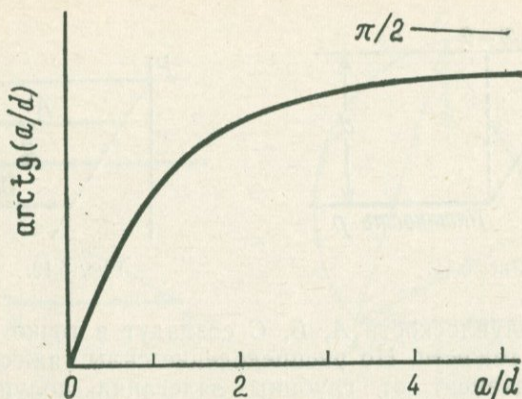


Рис. 5.8.

При $a = \infty$ выражение $[1 - 1/\sqrt{1 + (a/d)^2}]$ равно единице и Δg_P принимает значение $2\pi k^2 \rho$, которое, естественно, совпадает с полученным в п. «б» значением для бесконечной горизонтальной плиты.

Показанная на рис. 5.10 функция $[1 - 1/\sqrt{1 + (a/d)^2}]$ довольно медленно приближается к своему предельному значению, соответствующему $a = \infty$; при $a/d = 5$ она достигает лишь 80% предельного значения.

е) *Полуплоскость*. Залегающая на глубине d массивная полуплоскость с поверхностной плотностью ρ , край которой расположен при $x = a$ (плоскость простирается на бесконечность вправо и в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, — рис. 5.11), создает в точке P поле

$$\Delta g_P = 2k^2 \rho \int_a^{\infty} \frac{d}{x^2 + d^2} dx = 2k^2 \rho \alpha,$$

прямо пропорциональное углу α , под которым край плоскости виден из точки наблюдения P . Поэтому показанные на

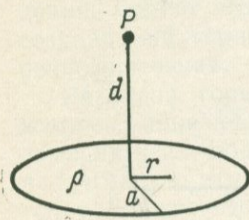


Рис. 5.9.

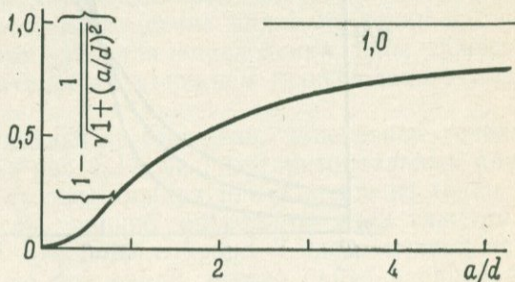


Рис. 5.10.

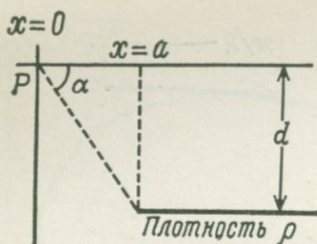


Рис. 5.11.

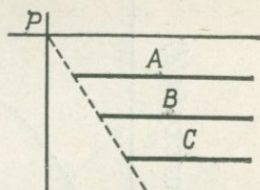


Рис. 5.12.

рис. 5.12 полуплоскости A , B , C создадут в точке P одну и ту же силу тяжести. Но распределение силы тяжести на поверхности зависит от глубины залегания полуплоскости: чем глубже залегает полуплоскость, тем более плавно изменяется наблюдаемое поле силы тяжести. Зависимость распределения силы тяжести от глубины залегания полуплоскости при $d = 1, 2$ и 3 иллюстрирует рис. 5.13.

ж) *Горизонтальная пластина конечной ширины.* Горизонтальная пластина AB (рис. 5.14), имеющая бесконечную длину в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, создает в точке наблюдения силу тяжести, равную разности между силой тяжести, создаваемой полуплоскостью, простирающейся вправо от точки A , и силой тяжести, создаваемой полуплоскостью, простирающейся вправо от точки B .

Как мы видели в предыдущем пункте, сила тяжести, создаваемая полуплоскостью, пропорциональна углу, под которым край этой полуплоскости виден из точки наблюдения

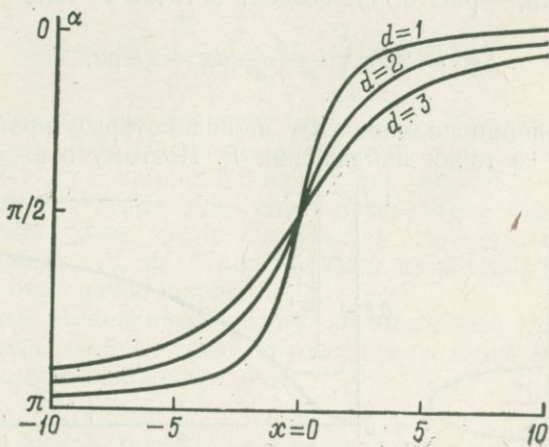


Рис. 5.13,

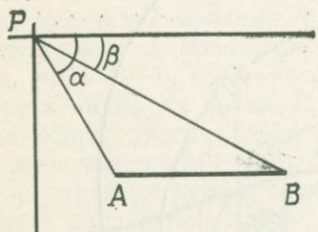


Рис. 5.14.

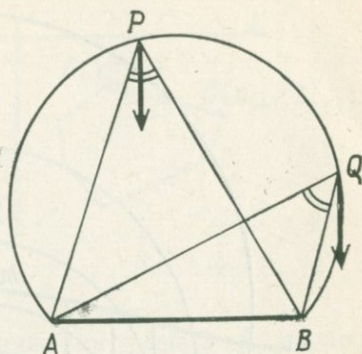


Рис. 5.15.

P . Следовательно, сила тяжести, создаваемая пластиной конечной ширины, показанной на рис. 5.14,

$$\Delta g_P = 2k^2\rho(\alpha - \beta)$$

пропорциональна угловому размеру пластины, если ее рассматривать из точки P .

Если провести окружность, для которой отрезок AB является хордой, то, как следует из рис. 5.15, из разных точек этой окружности отрезок AB виден под одним и тем же углом, равным $\alpha - \beta$; следовательно, сила тяжести во всех точках этой окружности постоянна.

Теперь ясно, что для того, чтобы построить распределение силы тяжести по поверхности земли, надо провести семейство окружностей, из точек которых отрезок AB виден под разными углами, и в точках пересечения этих окружностей с поверхностью отложить величину угла $\alpha - \beta$ (рис. 5.16).

з) *Горизонтальный стержень произвольного поперечного сечения.* Доказанное в предыдущем пункте положение, что гравитационное поле горизонтальной пластины пропорционально углу, под которым пластина видна из точки наблюдения, можно использовать для определения силы тяжести, создаваемой горизонтальным стержнем произвольного поперечного сечения.

Разбивая горизонтальный стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 5.17, на ряд горизонтальных плит, измеряя угол, под которым каждая плита видна из точки P , и суммируя эти углы, можно определить силу тяжести в точке P ; перемещая точку наблюдения P вдоль поверхности и повторяя указанную процедуру, можно найти распределение силы тяжести по поверхности.

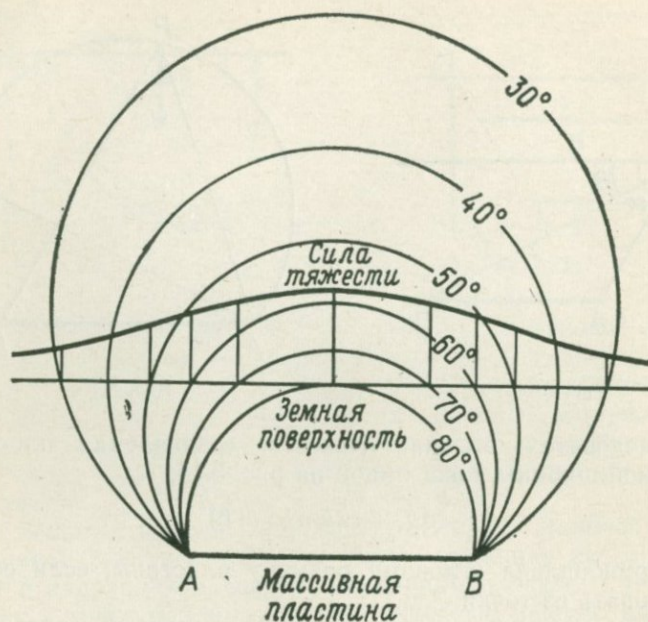


Рис. 5.16.

Для облегчения и ускорения этой работы автор данной книги разработал в 1943 г. приспособление, схема которого показана на рис. 5.18. Точка наблюдения P соответствует центру зубчатого колеса; рычаг L сначала ставится на правый край соответствующей горизонтальной плиты. Затем,

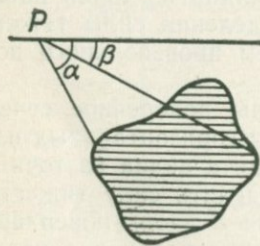


Рис. 5.17.

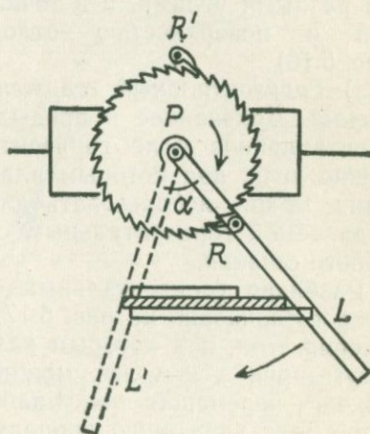


Рис. 5.18.

вращая его в направлении движения часовой стрелки, переводят рычаг L к левому краю той же плиты; при этом под действием собачки R зубчатое колесо поворачивается на угол $\alpha - \beta$, под которым плита видна из точки P . После этого, двигая рычаг L в противоположном направлении, переводят его к правому концу следующей плиты; при движении рычага L вправо благодаря собачке R' зубчатое колесо не вращается. Полный угол поворота зубчатого колеса после повторения описанной операции со всеми горизонтальными плитами, на которые разбит рассматриваемый горизонтальный стержень, пропорционален величине силы тяжести, создаваемой этим стержнем в точке P .

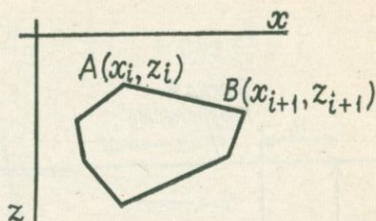


Рис. 5.19.

Той же цели служит метод, предложенный М. Хаббертом (1948) и усовершенствованный М. Талвани (1959). В нем поперечное сечение стержня аппроксимируют многоугольником и выражают силу тяжести в точке наблюдения P через координаты (x_i, z_i) вершин этого многоугольника (рис. 5.19). Довольно громоздкие вычисления приводят к результату

$$\Delta g = 2k^2 \rho \sum_{i=1}^n Z_i,$$

$$Z_i = \frac{(x_{i+1} - x_i) [z_i(x - x_{i+1}) - z_{i+1}(x - x_i)]}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \times \\ \times \left[\operatorname{arctg} \frac{z_i}{x_i - x} - \operatorname{arctg} \frac{z_{i+1}}{x_{i+1} - x} + \frac{1}{2} \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i} \ln \frac{(x_{i+1} - x)^2 + z_{i+1}^2}{(x_i - x)^2 + z_i^2} \right].$$

Вычисления по этой формуле выполняют на ЭВМ; получаемое распределение силы тяжести выводится на дисплей. Разумеется, чтобы добиться совпадения с данными измерений, приходится варьировать форму многоугольника.

Результаты подобных вычислений показывают, что расположенные далеко сбоку массы практически не влияют на наблюдаемую силу тяжести. Объясняется это тем, что сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от точки наблюдения до притягивающего тела и для тела, расположенного далеко в стороне от точки наблюдения, направлена практически горизонтально, в то время как при измерениях мы интересуемся только вертикальной составляющей силы тяжести; в результате оказывается,

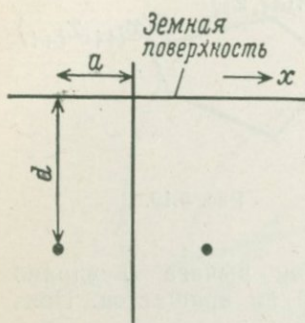


Рис. 5.20.

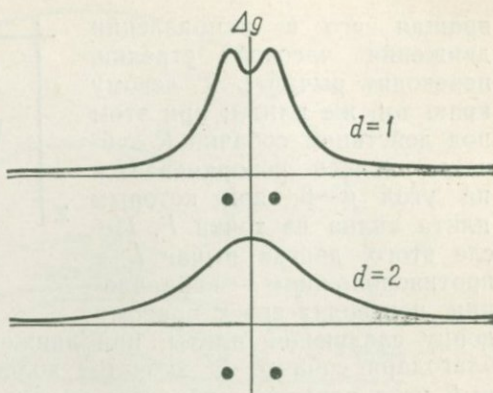


Рис. 5.21.

что вклад расположенной на далеком расстоянии притягивающей массы в наблюдаемую силу тяжести убывает, грубо говоря, обратно пропорционально кубу расстояния до нее от точки наблюдения.

и) *Два заглубленных массивных стержня.* Рассмотрим два бесконечно длинных параллельных друг другу и поверхности земли массивных стержня с линейной плотностью ρ , расположенных на одинаковой глубине d под поверхностью. На рис. 5.20 показано поперечное сечение этой системы (стержни перпендикулярны плоскости рисунка).

Сила тяжести, создаваемая на поверхности парой стержней,

$$\Delta g(x) = 2k^2\rho \left\{ \frac{d}{(a+x)^2 + d^2} + \frac{d}{(a-x)^2 + d^2} \right\}$$

зависит от трех параметров: x , a , d . Чтобы качественно представить себе характер этой зависимости, положим $a=1$ и подсчитаем величину

$$\frac{d}{(1+x)^2 + d^2} + \frac{d}{(1-x)^2 + d^2}$$

для случаев $d=1$ и $d=2$. Результат расчета представлен графически на рис. 5.21. Видно, что при $d=1$ кривая имеет два максимума, а при $d=2$ — один. Из этого, в частности, вытекает тот важный вывод, что наличие одного максимума на кривой Δg , вообще говоря, не означает, что распределение глубинных масс тоже характеризуется одним максимумом плотности. Граничное значение глубины, при котором два максимума на кривой Δg сливаются в один, расположено между значениями $d=1$ и $d=2$; оно определяется усло-

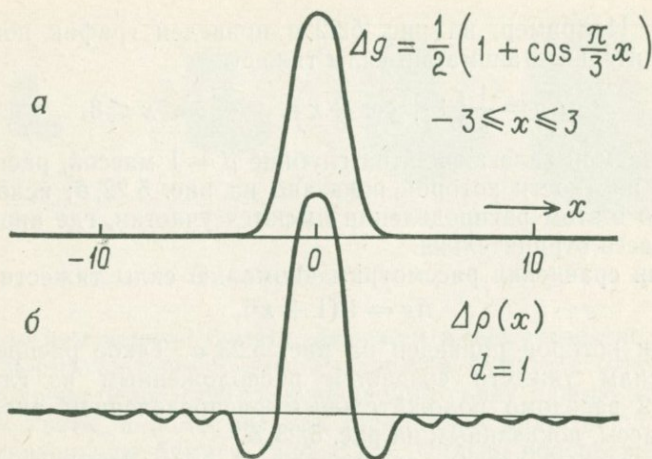


Рис. 5.22.

вием, что кривизна кривой Δg в точке $x=0$ обращается в нуль:

$$\left| \frac{d^2(\Delta g)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 = 2k^2 \rho \frac{-4d(1+d^2) + 16d}{(1+d^2)^3},$$

откуда $d = \sqrt{3}$.

к) *О знаке глубинной аномальной массы.* Положительная аномальная глубинная масса создает на поверхности положительную аномалию силы тяжести, но обратное утверждение справедливо не всегда. Бывают такие положительные аномалии силы тяжести на поверхности земли, для объяснения которых необходимы отрицательные добавки к глубинной

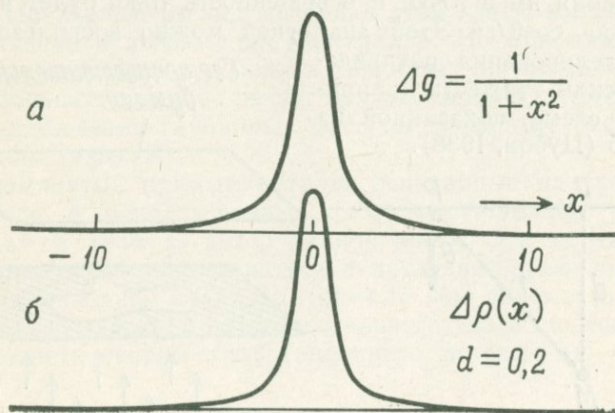


Рис. 5.23.

массе. Например, на рис. 5.22, *a* приведен график повсюду положительной аномалии силы тяжести

$$\Delta g = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} x \right), \quad -3 \leq x \leq 3,$$

создаваемой залегающей на глубине $d = 1$ массой, распределение плотности которой показано на рис. 5.22, *б*; ясно видно, что в этом распределении имеются участки, где аномальная масса отрицательна.

Для сравнения рассмотрим аномалию силы тяжести вида

$$\Delta g = 1/(1 + x^2),$$

график которой приведен на рис. 5.23, *a*. Такое распределение силы тяжести создается расположенным на глубине $d = 0,2$ заведомо положительным распределением аномальной массы, показанным на рис. 5.23, *б*.

На первый взгляд, распределения силы тяжести, приведенные на рис. 5.22, *a* и 5.23, *a*, очень похожи, но первое из них требует отрицательных добавок к глубинной массе, а второе — нет.

К вопросу о том, в каких случаях отрицательная глубинная масса необходима, а когда без нее можно обойтись, мы еще вернемся ниже.

§ 4. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ СИЛОЙ ТЯЖЕСТИ И ОСВЕЩЕННОСТЬЮ

Показанное на рис. 5.24 тело M , расположенное на глубине d под поверхностью, создает в точке P силу тяжести, пропорциональную величине $\cos \theta / r^2$.

Если в точке M поместить точечный источник света, то создаваемая им в точке P освещенность тоже будет пропорциональна $\cos \theta / r^2$. Этой аналогией можно воспользоваться для моделирования распределения силы тяжести, например по схеме, показанной на рис. 5.25 (Цубои, 1938).

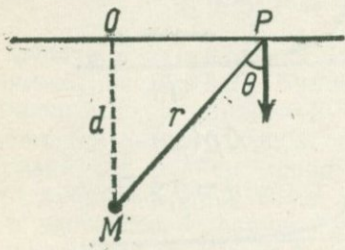


Рис. 5.24.



Рис. 5.25.

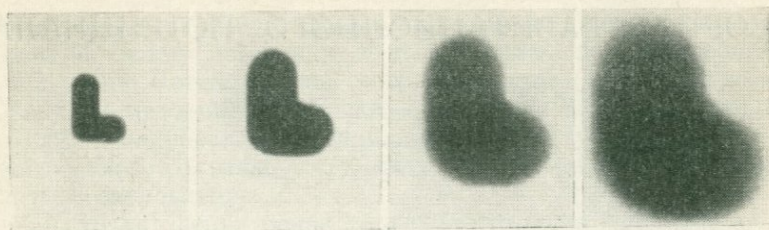


Рис. 5.26.

Возьмем черную бумагу, вырежем в ней отверстие, имеющее форму глубинной массы, наложим бумагу с отверстием на молочно-белое стекло, освещаемое снизу однородным потоком света, и поместим над стеклянной пластинкой светочувствительную бумагу (рис. 5.25). Сильно почерневшие места на светочувствительной бумаге будут соответствовать участкам с большими значениями силы тяжести, а изменение расстояния между стеклянной пластинкой и светочувствительным слоем будет моделировать изменение глубины залегания массы.

Пример получаемых при этом результатов приведен на рис. 5.26. Глубинная масса имеет форму буквы L, разные снимки соответствуют разным глубинам залегания. Пока масса находится на небольшой глубине, форма фигуры (L) прослеживается четко, а по мере роста глубины залегания контуры ее расплываются и контраст черного и белого ослабевает.

Мы рассмотрели несколько примеров полей силы тяжести, создаваемых простыми распределениями глубинных масс. На первый взгляд материал этой главы выглядит как упражнение в вычислении интегралов. Но при анализе общих проблем нельзя избежать подобных вычислений. Кроме того, большое значение имеют *прямые* методы непосредственного нахождения глубинных масс по заданному распределению силы тяжести.

Упомянутые прямые методы, основанные на теории потенциала с использованием уравнения Лапласа, развивал начиная с 1938 г. автор данной книги. Эти методы стали особенно широко применяться в последнее время в связи с распространением ЭВМ. Но, прежде чем описывать прямые методы, в качестве подготовительного шага целесообразно рассмотреть теорию гравитационного потенциала.

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

При решении встречавшихся нам до сих пор задач мы не прибегали к понятию гравитационного потенциала; наш метод решения сводился к вычислению интегралов. Теперь мы изменим свой подход и будем широко применять понятие потенциала к решению задач, связанных с силой тяжести. Мы уже говорили, что сила тяжести есть векторная сумма силы притяжения и центробежной силы; соответственно и гравитационный потенциал определяется как сумма потенциала силы притяжения и потенциала центробежной силы. Использование потенциала позволяет единым образом и очень изящно решить вопросы о связи силы тяжести с распределением глубинных масс, о форме геоида и т. п.

Остановимся сначала на применяемой в теории потенциала символике.

Обычно при записи потенциала V силы притяжения массы m пользуются формулой со знаком минус:

$$V = -k^2m/r$$

(здесь k^2 — постоянная закона всемирного тяготения). Соответственно этому сила, действующая в направлении возрастания r , определяется как взятая с обратным знаком производная $\partial V/\partial r$:

$$f = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k^2m}{r^2}.$$

Это значит, что сила притяжения направлена противоположно направлению возрастания r , т. е. в направлении убывания r , или, что то же, к притягивающей массе.

В данной книге в нарушение общего обычая при определении потенциала V знак минус отбрасывается:

$$V = k^2m/r,$$

и сила в направлении возрастания r определяется как взятая со знаком плюс производная $\partial V/\partial r$:

$$f = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k^2m}{r^2}.$$

Разумеется, сила притяжения при этом по-прежнему направлена к своему источнику, т. е. к создающей ее материальной точке. Потенциал же теперь возрастает по мере приближения к материальной точке — источнику силы притяжения. Дифференцирование потенциала по какому-либо направлению непосредственно дает силу притяжения, действующую в этом направлении.

С точки зрения основ теории потенциала принятое здесь соглашение о знаках недопустимо. Но поскольку мы рассматриваем только статические задачи теории силы тяжести без учета кинетической энергии, выбранный нами способ изложения не приводит к ошибочным результатам, а отказ от двукратного повторения знака минус во всех формулах заметно облегчает их запись.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

В тех точках, где отсутствует масса, гравитационной потенциал V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

называемому уравнением Лапласа (П. С. Лаплас, 1749—1827). Оператор $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$ называют лапласианом и обозначают символом ∇^2 или Δ , так что уравнение Лапласа обычно записывают в виде

$$\nabla^2 V = 0 \text{ или } \Delta V = 0.$$

При рассмотрении проблем силы тяжести мы теперь будем исходить из уравнения Лапласа. Поэтому остановимся кратко на его выводе.

Будем считать, что в пространстве задано поле сил f (рис. 6.1). Рассмотрим замкнутую поверхность S такую, что внутри нее отсутствуют источники нашего силового поля (источником силы притяжения служит некоторая масса). В этом случае каждая силовая линия, входящая в нашу замкнутую поверхность, должна где-либо выйти за ее пределы. Это значит, что число входящих силовых линий равно числу выходящих, а их сумма равна нулю. Вводя единичный вектор нормали n к поверхности, направленный наружу, и определяя скалярное произведение $f \cdot n$, последний результат можно

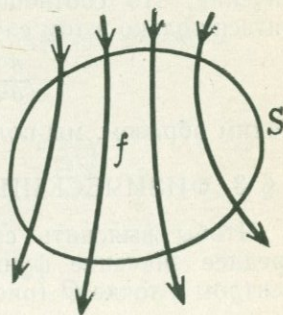


Рис. 6.1.

представить в виде утверждения, что интеграл от указанного скалярного произведения по замкнутой поверхности S равен нулю:

$$\iint (f \cdot n) dS = 0.$$

В векторном анализе имеется теорема Гаусса (К. Ф. Гаусс, 1774—1855), позволяющая преобразовывать поверхностный интеграл в объемный:

$$\iint (f \cdot n) dS = \iiint \operatorname{div} f \, dv,$$

где оператор дивергенции вектора f определен формулой

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}.$$

О теореме Гаусса можно прочесть в любом учебнике теоретической физики.

Пользуясь теоремой Гаусса, формулу

$$\iint (f \cdot n) dS = 0$$

можно записать в виде

$$\iiint \operatorname{div} f \, dv = \iiint \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dv = 0.$$

Если сила f имеет потенциал, то

$$f_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

и предыдущей формуле можно придать вид

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dv = 0.$$

Поскольку на объем dv не наложено никаких особых ограничений, это соотношение может тождественно удовлетворяться только в том случае, если всюду

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Таким образом, мы получили уравнение Лапласа.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Чтобы выяснить смысл уравнения Лапласа, вычислим среднее значение функции V в малой сфере радиуса a с центром в точке O (рис. 6.2):

$$\bar{V} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \iiint V \, dv.$$

Для этого разложим функцию V в ряд Тейлора в окрестности точки O :

$$\begin{aligned}
 V(x, y, z) = & V_0 + x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + \\
 & + z \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \\
 & + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \\
 & + zx \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} + \dots
 \end{aligned}$$

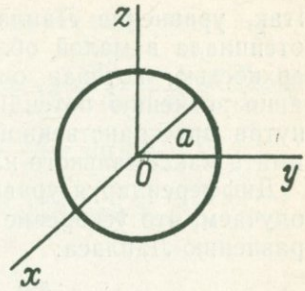


Рис. 6.2.

Пользуясь этим разложением, напомним

$$\begin{aligned}
 \iiint V dv = & \\
 = & \iiint^{(1)} V_0 dv + \frac{\partial V}{\partial x} \iiint^{(2)} x dv + \frac{\partial V}{\partial y} \iiint^{(3)} y dv + \frac{\partial V}{\partial z} \iiint^{(4)} z dv + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \iiint^{(5)} x^2 dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \iiint^{(6)} y^2 dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \iiint^{(7)} z^2 dv + \\
 & + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \iiint^{(8)} xy dv + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \iiint^{(9)} yz dv + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \iiint^{(10)} zx dv + \dots
 \end{aligned}$$

Первый член правой части

$$\iiint V_0 dv = \frac{4}{3} \pi a^3 V_0.$$

Из соображений симметрии 2, 3, 4, 8, 9 и 10-й члены равны нулю, а для 5, 6 и 7-го получаем

$$\iiint x^2 dv = \iiint y^2 dv = \iiint z^2 dv = \frac{4}{15} \pi a^5.$$

Окончательно для искомого среднего значения находим

$$\begin{aligned}
 \bar{V} = & V_0 - \frac{2/15 \pi a^5}{4/3 \pi a^3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \\
 = & V_0 + \frac{a^2}{10} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку, согласно уравнению Лапласа,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

получаем

$$\bar{V} = V_0.$$

Итак, уравнение Лапласа означает, что среднее значение потенциала в малой области, ограниченной сферической поверхностью, которая описана вокруг произвольной точки, равно значению потенциала в этой точке. Иными словами, внутри пространственной области потенциал не может принимать максимального или минимального значения.

Дифференцируя уравнение Лапласа для потенциала по z , получаем, что ускорение силы тяжести g тоже удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0,$$

откуда следует, что величина g не может принимать максимального или минимального значения внутри пространственной области. На первый взгляд это утверждение может показаться странным. В самом деле, рассмотрим, например, показанный на рис. 6.3 массивный стержень, залегающий параллельно поверхности на глубине d . Примем, что стержень имеет бесконечную длину в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, и для простоты положим, что линейная плотность у него равна 1. Тогда стержень создаст на поверхности силу тяжести

$$g(x) = k^2 d / (x^2 + d^2),$$

и очевидно, что в начале координат O на поверхности величина g принимает максимальное значение, в то время как уравнение Лапласа требует, чтобы среднее значение g в малой области, ограниченной сферой с центром в начале координат, равнялось значению g в самом начале координат. Как выйти из этого кажущегося противоречия?

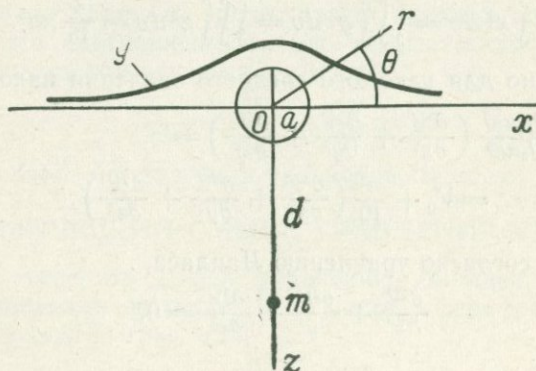


Рис. 6.3.

Разложение $g(xz)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$\begin{aligned}
 g(xz) &= g_0 + x \frac{\partial g}{\partial x} + z \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xz \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \\
 &+ \dots = g_0 + \frac{\partial g}{\partial x} r \cos \theta + \frac{\partial g}{\partial z} r \sin \theta + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} r^2 \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} r^2 \sin \theta \cos \theta + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} r^2 \sin^2 \theta + \dots,
 \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{-2z^3 + 6x^2z}{(x^2 + z^2)^3} k^2, \\
 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} &= \frac{2z^3 - 6x^2z}{(x^2 + z^2)^3} k^2.
 \end{aligned}$$

Кроме того, интегрируя члены, содержащие r и θ , по r от 0 до a и по θ от 0 до 2π , получаем

$$\begin{aligned}
 \iint r \cos \theta d\theta dr &= \iint r \sin \theta d\theta dr = 0, \\
 \iint r^2 \cos^2 \theta d\theta dr &= \iint r^2 \sin^2 \theta d\theta dr = \frac{1}{3} \pi a^3, \\
 \iint r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta dr &= 0.
 \end{aligned}$$

Поэтому среднее значение $g(xz)$ в круге радиуса a

$$\overline{g(xz)} = \frac{k^2}{\pi a^2} \left\{ \pi a^2 g_0 + \frac{1}{6} \pi a^3 \left[\frac{-2z^3 + 6x^2z}{(x^2 + z^2)^3} + \frac{2z^3 - 6x^2z}{(x^2 + z^2)^3} \right] \right\} = g_0.$$

Это произошло потому, что слагаемые $\partial^2 g / \partial x^2$ и $\partial^2 g / \partial z^2$ взаимно уничтожились.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Как уже отмечалось, уравнение Лапласа справедливо в тех точках пространства, где отсутствует притягивающая масса. На какое уравнение нужно заменить его в точках расположения массы?

Если внутри рассматриваемой замкнутой поверхности находится масса m , то сходящиеся к ней силовые линии из нее не выходят. Число силовых линий, оканчивающихся на массе m , равно $4\pi k^2 m$ (k^2 — постоянная тяготения). Когда

внутри поверхности находится несколько масс m_1, m_2, \dots, m_n , то число силовых линий, оканчивающихся на этих массах и не выходящих из замкнутой поверхности, будет $4\pi k^2(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$. Теперь $\iint (f \cdot n) dS$ равен не нулю, а

$$\iint (f \cdot n) dS = 4\pi k^2(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = 4\pi k^2 \sum_{i=1}^n m_i.$$

Выражаемое этой формулой утверждение называется теоремой Гаусса. Если f — сила тяжести, создаваемая массой $\sum m_i$, то, интегрируя величину g по всей земной поверхности, можно определить полную массу Земли M . Предполагая, что Земля — шар, а величина g на ее поверхности постоянна, находим

$$4\pi R^2 g = 4\pi k^2 M (R - \text{радиус Земли}),$$

откуда

$$M = gR^2/k^2.$$

Для определения глубинной массы, создающей гравитационную аномалию, надо проинтегрировать по поверхности аномальную силу тяжести. Этот способ применяется, например, при оценке аномальной массы в основании вулканов.

Рассмотрим случай, когда внутри замкнутой поверхности находится непрерывно распределенная масса (плотность ρ). Потенциал V в точке O определяется суммой потенциала V_0 , создаваемого массой, заключенной внутри рассматриваемой поверхности, и потенциала внешних масс V_1 :

$$V = V_0 + V_1.$$

Примем, что замкнутая поверхность — сфера достаточно малого радиуса, внутри которой плотность массы можно считать постоянной величиной, равной ρ_0 . Сила тяжести f на поверхности однородной гравитирующей сферы равна

$$f = -k^2 \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 \frac{1}{a^2} = -k^2 \frac{4}{3} \pi a \rho_0,$$

откуда

$$\iint (f \cdot n) dS = -k^2 \frac{4}{3} \pi a \rho_0 4\pi a^2 = -k^2 \frac{16}{3} \pi^2 a^3 \rho_0.$$

Преобразуя поверхностный интеграл в объемный с помощью теоремы Гаусса, получаем

$$\iint (f \cdot n) dS = \iiint \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right) dv = -k^2 \frac{16}{3} \pi^2 a^3 \rho_0.$$

Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi a^3$, поэтому

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right) dv = \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right) \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = -4\pi k^2 \rho_0.$$

Потенциал V_1 удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = 0,$$

так как он создается массами, находящимися вне рассматриваемой сферы. Складывая почленно два написанных уравнения, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (V_0 + V_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (V_0 + V_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (V_0 + V_1)}{\partial z^2} &= \\ = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -4\pi k^2 \rho_0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение называют уравнением Пуассона (С. Д. Пуассон, 1781—1840).

§ 5. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В декартовых координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Выясним, как оно преобразуется при переходе к другим ортогональным системам координат. Полагая

$$\begin{aligned} \alpha &= f_1(x, y, z), & x &= F_1(\alpha, \beta, \gamma), \\ \beta &= f_2(x, y, z), & y &= F_2(\alpha, \beta, \gamma), \\ \gamma &= f_3(x, y, z), & z &= F_3(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned}$$

определим элемент дуги ds :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (h_1 d\alpha)^2 + (h_2 d\beta)^2 + (h_3 d\gamma)^2.$$

Тогда

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2,$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2,$$

$$h_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma} \right)^2.$$

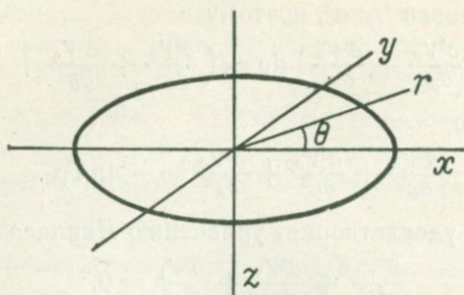


Рис. 6.4.

Пользуясь величинами h_1 , h_2 , h_3 , уравнение Лапласа можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial \gamma} \right) = 0.$$

Эта формула получается, если при преобразовании координат воспользоваться уравнениями дифференциальной геометрии.

Полученные соотношения применим сначала к цилиндрической системе координат (рис. 6.4)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= r \cos \theta, \\ \theta &= \text{arctg}(y/x), & y &= r \sin \theta; \\ z &= z, & z &= z. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \\ &= (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (dz)^2, \end{aligned}$$

имеем

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2,$$

$$h_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 = 1.$$

Следовательно, для уравнения Лапласа получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

В сферических координатах (рис. 6.5)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ \theta &= \arctg(\sqrt{x^2 + y^2}/z), & y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ \varphi &= \arctg(y/x), & z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

имеет место соотношение

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \\ &= (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1, \\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \\ &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2, \\ h_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \\ &= r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Этим уравнением пользуются при рассмотрении распределения силы тяжести по всей поверхности земли.

Поскольку Земля — тело вращения, в первом приближении потенциал V не зависит от φ и удовлетворяет уравнению Лапласа в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned}$$

В этом уравнении переменную θ удобно заменить новой переменной

$$\mu = \cos \theta,$$

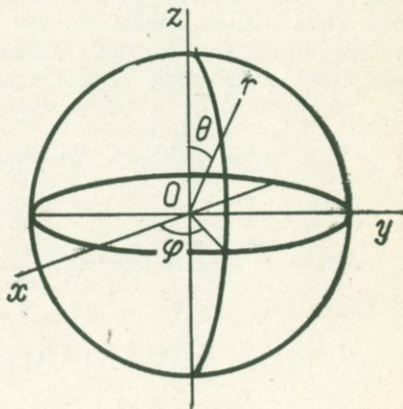


Рис. 6.5.

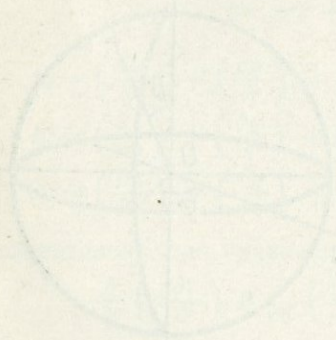
Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu},$$

уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + (1-\mu^2) \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0.$$

Итак, мы записали уравнение Лапласа в различных системах координат. Теперь мы займемся решением этого уравнения и конкретным обсуждением связи силы тяжести и глубинных масс.



РАСЧЕТ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В декартовой системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Поскольку V — гравитационный потенциал, мы будем считать, что ось z направлена вертикально вниз, а оси x и y лежат в горизонтальной плоскости. Рассмотрим решение написанного уравнения.

Решение $V(x, y, z)$ будем искать в виде произведения

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

в котором $X(x)$ — функция только x , $Y(y)$ — функция только y , а $Z(z)$ — функция только z . Подставляя это произведение в уравнение, получим

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Первое слагаемое здесь — функция только x , второе — только y , а третье — только z , и тем не менее сумма этих трех слагаемых равна нулю; это может быть справедливо только в случае, когда каждое из слагаемых — константа. Мы удовлетворим уравнению, если примем, что

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -m^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -n^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = m^2 + n^2.$$

Отсюда

$$X = \frac{\cos}{\sin} mx, \quad Y = \frac{\cos}{\sin} ny, \quad Z = \exp(\pm \sqrt{m^2 + n^2} z).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= X(x)Y(y)Z(z) = \\ &= \frac{\cos}{\sin} mx \frac{\cos}{\sin} ny \exp(\pm \sqrt{m^2 + n^2} z). \end{aligned}$$

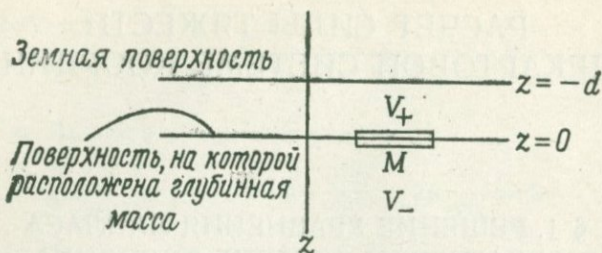


Рис. 7.1.

В полученном частном решении числа m , n произвольны. Поэтому общее решение уравнения Лапласа можно получить, умножая найденное выше частное решение на A_{mn} и суммируя по m и n :

$$V(x, y, z) = \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{\cos mx}{\sin mx} \frac{\cos ny}{\sin ny} \exp(\pm \sqrt{m^2 + n^2} z).$$

Отметим, что показатель экспоненты здесь имеет два знака — плюс и минус.

Введем обозначения, иллюстрируемые рис. 7.1. Ось z направлена вниз, глубинная масса $M(x)$ расположена на уровне $z = 0$, поверхность земли — на уровне $z = -d$. В области выше M (при отрицательном z) в показателе экспоненты нужно брать знак плюс, а в области под M (при положительном z) знаком показателя экспоненты должен быть минус. Соответствующие решения обозначим V_+ и V_- .

Распределение силы тяжести по земной поверхности ($z = -d$) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta g(x, y, -d) &= \left(\frac{\partial V_+}{\partial z} \right)_{z=-d} = \\ &= \sum_m \sum_n \sqrt{m^2 + n^2} A_{mn} \frac{\cos mx}{\sin mx} \frac{\cos ny}{\sin ny} \exp(-\sqrt{m^2 + n^2} d). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$B_{mn} = \sqrt{m^2 + n^2} A_{mn} \exp(-\sqrt{m^2 + n^2} d),$$

получаем

$$\Delta g(x, y, -d) = \sum_m \sum_n B_{mn} \frac{\cos mx}{\sin mx} \frac{\cos ny}{\sin ny}.$$

Предположим теперь, что распределение массы на уровне $z = 0$ описывается двойным рядом Фурье:

$$M(x, y, 0) = \sum \sum C_{mn} \frac{\cos mx}{\sin mx} \frac{\cos ny}{\sin ny}.$$

Применяя теорему Гаусса к малой области, окружающей M (рамка на рис. 7.1), найдем, что

$$\frac{\partial V_+}{\partial z} - \frac{\partial V_-}{\partial z} = 4\pi k^2 M(x, y),$$

откуда

$$\begin{aligned} 2 \sum \sum \sqrt{m^2 + n^2} A_{mn} \frac{\cos mx}{\sin mx} \frac{\cos ny}{\sin ny} &= 4\pi k^2 M(x, y) = \\ &= 4\pi k^2 \sum \sum C_{mn} \frac{\cos mx}{\sin mx} \frac{\cos ny}{\sin ny}. \end{aligned}$$

Из этих формул можно определить связь между A_{mn} , B_{mn} и C_{mn} :

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \sqrt{m^2 + n^2} A_{mn} \exp(-\sqrt{m^2 + n^2} d) = \\ &= 2\pi k^2 C_{mn} \exp(-\sqrt{m^2 + n^2} d) \end{aligned}$$

или

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi k^2} \exp(\sqrt{m^2 + n^2} d) B_{mn}.$$

Таким образом, определяя коэффициенты B_{mn} разложения в двойной ряд Фурье распределения силы тяжести по поверхности земли и умножая величины B_{mn} на $\exp(\sqrt{m^2 + n^2} d)/2\pi k^2$, получаем коэффициенты C_{mn} разложения в двойной ряд Фурье распределения глубинной массы. Подставляя найденные таким образом значения C_{mn} в двойной ряд Фурье и производя суммирование, находим распределение глубинной массы $M(x, y)$.

Мы получили возможность непосредственно узнать распределение массы на глубине по распределению силы тяжести на земной поверхности. Описанный в данном параграфе прямой метод нахождения распределения глубинной массы по распределению силы тяжести на поверхности земли предложен в 1937 г. автором настоящей книги.

§ 2. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Теория, описанная в предыдущем параграфе для двумерного случая, может показаться слишком сложной. Поэтому для упрощения рассмотрим подробнее одномерную задачу,

в которой как распределение силы тяжести, так и распределение глубинной массы не зависят от y . К одномерному случаю мы перейдем, если в формулах предыдущего параграфа примем $n = 0$. Тогда

$$C_m = \frac{1}{2\pi k^2} \exp(md) B_m.$$

Выпишем более подробно ряд Фурье для Δg :

$$\Delta g(x, -d) = B_0 + B_1^C \cos x + B_2^C \cos 2x + B_3^C \cos 3x + \dots + \\ + B_1^S \sin x + B_2^S \sin 2x + B_3^S \sin 3x + \dots$$

и ряд Фурье для M :

$$M(x, 0) = \frac{1}{2\pi k^2} (B_0 + B_1^C \exp d \cos x + B_2^C \exp 2d \cdot \cos 2x + \\ + B_3^C \exp 3d \cos 3x + \dots + \\ + B_1^S \exp d \sin x + B_2^S \exp 2d \sin 2x + \\ + B_3^S \exp 3d \sin 3x + \dots).$$

Методы разложения функций в ряды Фурье и суммирования рядов Фурье с заданными коэффициентами хорошо разработаны. Особенно облегчается эта задача при использовании ЭВМ. Короче говоря, по распределению силы тяжести на поверхности можно непосредственно найти распределение глубинной массы. Как видно из формулы

$$C_m = \frac{B_m}{2\pi k^2} \exp(md),$$

при постоянных фурье-амплитудах B_m амплитуды C_m тем больше, чем глубже расположена масса и чем меньше масштаб (больше m) изменений силы тяжести (в распределении глубинной массы нужно учитывать сильно осциллирующие слагаемые). Схематически эту ситуацию иллюстрирует рис. 7.2.

На рис. 7.2 показано, какие распределения массы нужно задать на глубине $z = 1$ и $z = 2$, для того чтобы объяснить распределение силы тяжести, наблюдаемое на уровне $z = 0$, а именно:

$$\Delta g = \sin x + \sin 3x.$$

Из рисунка понятно, что амплитуда коротковолновых изменений аномальной массы быстро возрастает с ростом глубины залегания. На рис. 7.2 принято, что коэффициент про-

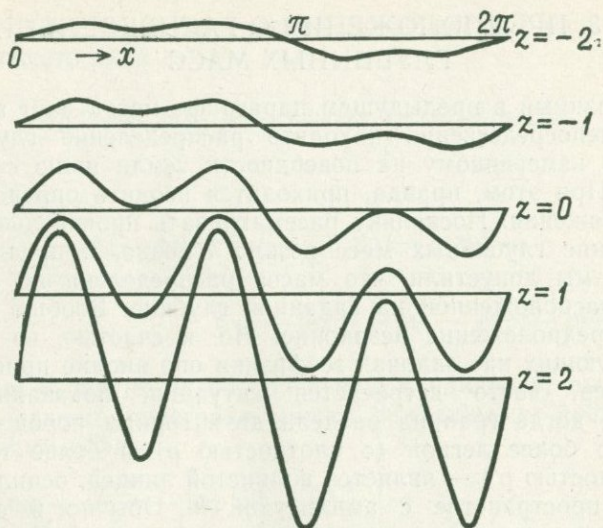


Рис. 7.2.

порциональности между силой тяжести и массой равен 1. При этом

$$C_m = B_m \exp(mz),$$

или

$$B_m = C_m \exp(-mz),$$

и на рисунке ясно различимы распределения как силы тяжести, так и глубинной массы.

Рассмотрим другой пример. Если при $z = 0$

$$M(x) = \cos mx,$$

то при $z = -1$

$$\Delta g_{-1}(x) = \exp(-1) \cos mx$$

и при $z = -2$

$$\Delta g_{-2}(x) = \exp(-2) \cos mx.$$

Но, поскольку

$$\begin{aligned} \Delta g_{-2}(x) &= \exp(-1) \exp(-1) \cos mx = \\ &= \exp(-1) \Delta g_{-1}(x), \end{aligned}$$

можно считать, что распределение силы тяжести при $z = -2$ порождено находящейся на глубине $z = -1$ аномальной массой, пропорциональной $\Delta g_{-1}(x)$.

§ 3. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГЛУБИННЫХ МАСС

Описанный в предыдущем параграфе метод дает возможность непосредственно находить распределение глубинных масс по измеренному на поверхности земли полю силы тяжести. При этом, правда, приходится вводить определенные предположения. Поскольку рассматривать произвольное распределение глубинных масс весьма сложно, в предыдущем расчете мы допустили, что масса распределена по поверхности, расположенной на заданной глубине. Вообще говоря, такое предположение незаконно. Но, к счастью, во многих интересующих нас задачах геофизики оно вполне приемлемо. Например, часто встречается ситуация, показанная на рис. 7.3, когда граница раздела двух горных пород — относительно более легкой (с плотностью ρ) и более тяжелой (ρ') — является волнистой линией, осциллирующей в пространстве с амплитудой h . Обычно в среднем (если отвлечься от мелкомасштабных флуктуаций) граница раздела горизонтальна, а амплитуда ее колебания h не слишком велика по сравнению с глубиной залегания d . Тогда имеет смысл принять, что на глубине находится массивная поверхность, плотность вещества которой колеблется с амплитудой $h(\rho' - \rho)$.

Проиллюстрируем сказанное примером. Находящийся на глубине d (рис. 7.4) бесконечно тонкий массивный слой с поверхностной плотностью

$$M(x) = C_m \cos mx$$

создает на поверхности распределение силы тяжести

$$\Delta g(x) = 2\pi k^2 C_m \cos mx \exp(-md).$$

Рассмотрим теперь массивный слой конечной толщины, простирающийся по глубине от a до b , плотность вещества в котором зависит от координаты x по тому же закону, что

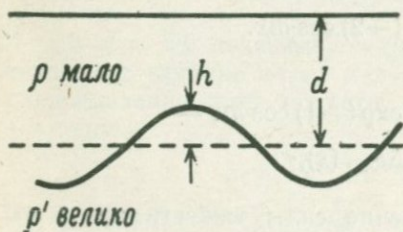


Рис. 7.3.



Рис. 7.4.

и $M(x)$. Этот слой создаст на поверхности распределение силы тяжести вида

$$\Delta g(x) = 2\pi k^2 \frac{C_m}{b-a} \cos mx \int_a^b \exp(-mz) dz,$$

где

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp(-mz) dz &= -\frac{1}{m} \left| \exp(-mz) \right|_a^b = \\ &= \frac{1}{m} [\exp(-ma) - \exp(-mb)]. \end{aligned}$$

Если ma и mb малы по сравнению с единицей, выражение для последнего интеграла можно приближенно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left[1 - ma + \frac{m^2 a^2}{2} - 1 + mb - \frac{m^2 b^2}{2} \right] &= \\ = b - a - \frac{m}{2} (b^2 - a^2) &= (b - a) \left[1 - \frac{m}{2} (b + a) \right]. \end{aligned}$$

Тогда для силы тяжести на поверхности можно написать

$$\Delta g(x) = 2\pi k^2 C_m \cos mx \left[1 - \frac{m}{2} (b + a) \right].$$

Сравнивая эту формулу с выражением силы тяжести, создаваемой бесконечно тонким массивным слоем,

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= 2\pi k^2 C_m \cos mx \exp(-md) = \\ &= 2\pi k^2 C_m \cos mx (1 - md), \end{aligned}$$

мы видим, что при

$$d = (b + a)/2$$

оба выражения совпадают. Мы получили, что слой конечной толщины, верхняя граница которого находится на глубине a , а нижняя — на глубине b , создает на поверхности такое же распределение силы тяжести, как и бесконечно тонкий слой с той же поверхностной плотностью, расположенный на глубине, равной среднему арифметическому из суммы a и b .

Мы рассмотрели вопрос о том, когда слой конечной толщины можно заменить бесконечно тонким слоем. Но на какой глубине располагать аномальную массу? С чисто гравиметрической точки зрения вопрос остается открытым. Иногда его решают исходя из геологического строения того или иного района. Бывают также случаи, когда при решении

этого вопроса исходят из условия изостазии, о котором речь пойдет ниже.

Определенные ограничения (типа неравенств) на глубину залегания тонкого слоя d можно установить из следующих двух соображений. Рассмотрим сначала случай, когда распределение силы тяжести на поверхности имеет вид

$$\Delta g(x) = B \cos(2\pi/\lambda)x,$$

где λ — длина участка поверхности с известными гравиметрическими данными, выбранная в качестве периода функции, изображаемой рядом Фурье. Это поле создается относящимся к глубине d распределением массы

$$M(x) = \frac{B}{2\pi k^2} \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}d\right) \cos\frac{2\pi}{\lambda}x,$$

где величины x и d имеют размерность длины. Предположим, что распределение массы $M(x)$ возникает как результат неровности границы контакта горной породы, имеющей плотность ρ' , с породой, плотность которой ρ . Если рельеф этой границы описывается функцией $H \cos(2\pi/\lambda)x$, то

$$H = \frac{B}{2\pi k^2(\rho' - \rho)} \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}d\right).$$

Величина H не может быть больше d , в противном случае граница горных пород могла бы проходить выше поверхности земли. Следовательно, должно выполняться условие

$$\frac{B}{2\pi k^2(\rho' - \rho)} \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}d\right) \leq d,$$

или

$$\ln \frac{B}{2\pi k^2(\rho' - \rho)} + \frac{2\pi}{\lambda}d \leq \ln d.$$

Поскольку параметры B и λ обычно известны из наблюдений, это неравенство устанавливает ограничение для глубины залегания d . Например, если амплитуда изменения силы тяжести $B = 10$ мГал, пространственная длина волны $\lambda = 20$ км, а разность плотностей верхнего и нижнего слоев породы $\rho' - \rho = 0,3$, то глубина залегания не может быть больше 5 км.

Есть еще одно соображение, позволяющее наложить ограничение на глубину залегания массы. Распределение силы тяжести на поверхности

$$\Delta g = \sum B_m \frac{\cos mx}{\sin mx}$$

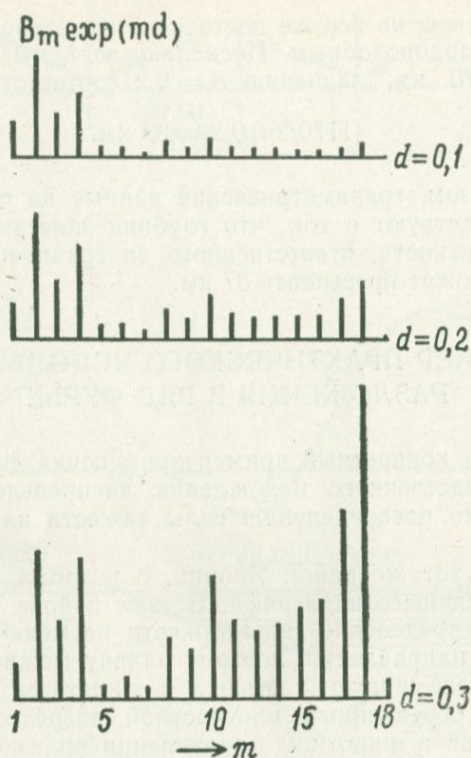


Рис. 7.5.

создается расположенной на глубине d массой

$$M(x) = \frac{1}{2\pi k^2} \sum B_m \frac{\cos mx \exp(md)}{\sin mx \exp(md)}.$$

С геологической точки зрения фурье-амплитуда $B_m \exp(md)$ функции $M(x)$, соответствующая самому большому показателю m , не должна быть слишком велика. Пределы изменения выражения $B_m \exp(md)$ при изменении m зависят от величины d . Отсюда возникает ограничение на d .

В качестве примера рассмотрим широтный плотностной разрез области Тохоку на о. Хонсю. Длину профиля, равную 1170 км, примем за период λ и определим коэффициенты B разложения Δg в ряд Фурье. Величину $B_m \exp(md)$ вычислим для трех случаев, показанных на рис. 7.5. При $d=0,3$ величина $B_m \exp(md)$ резко возрастает с ростом m , что неправдоподобно с точки зрения геологии. При $d=0,2$ возрастание

не столь резкое, но все же достаточно заметное, чтобы показаться неправдоподобным. Поскольку за λ мы приняли расстояние 1170 км, значению $d = 0,2$ соответствует глубина

$$(1170/2\pi) 0,2 = 37 \text{ км.}$$

Таким образом, гравиметрические данные по области Тохoku свидетельствуют о том, что глубина залегания слоя аномальной плотности, ответственного за гравитационную аномалию, не может превышать 37 км.

§ 4. ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ

Приведем конкретный пример применения анализа Фурье для непосредственного нахождения распределения глубинных масс по распределению силы тяжести на поверхности земли.

Возьмем тот же район Японии, о котором говорилось в конце предыдущего параграфа. В этом районе рельеф местности и распределение силы тяжести не меняются в меридиональном направлении, поэтому задачу можно рассматривать как одномерную с осью x в широтном направлении. Рассчитаем осредненный плотностной разрез. Гравиметрическая съемка в широтном направлении произведена только на расстоянии 585 км; вне этого интервала распределение силы тяжести неизвестно. Для применения анализа Фурье продолжим известное распределение силы тяжести зеркально-симметрично, как показано на рис. 7.6. Получится периодическая функция с периодом $\lambda = 585 \cdot 2 = 1170$ км (соответствует 2π). Определим коэффициенты разложения этой периодической функции в ряд Фурье. Поскольку построенное распределение симметрично относительно точки $\lambda/2$ (соответствующей π), члены вида $\sin mx$ в ряде Фурье отсутствуют и надо определить только коэффициенты B_m^C при $\cos mx$.

Интервал 585 км с помощью 19 равноотстоящих точек разбиваем на меньшие интервалы равной длины $585 : 18 = 32,5$ км. Задавая в этих 19 точках значения $\Delta g_0''$, с помощью стандартных правил анализа Фурье определяем 19 коэффициентов $B_0^C, B_1^C, \dots, B_{18}^C$. Принимая, что глубина равна 20 км (соответствует 0,107 рад — см. конец предыдущего параграфа), находим величины $B_m^C \exp(md)$; используя их как коэффициенты ряда Фурье, вычисляем значения массы в 19 точках, отстоящих друг от друга на 32,5 км. Деля

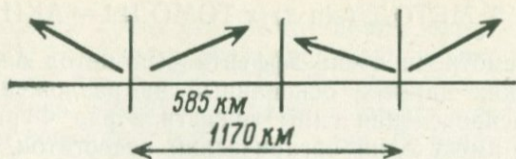


Рис. 7.6.

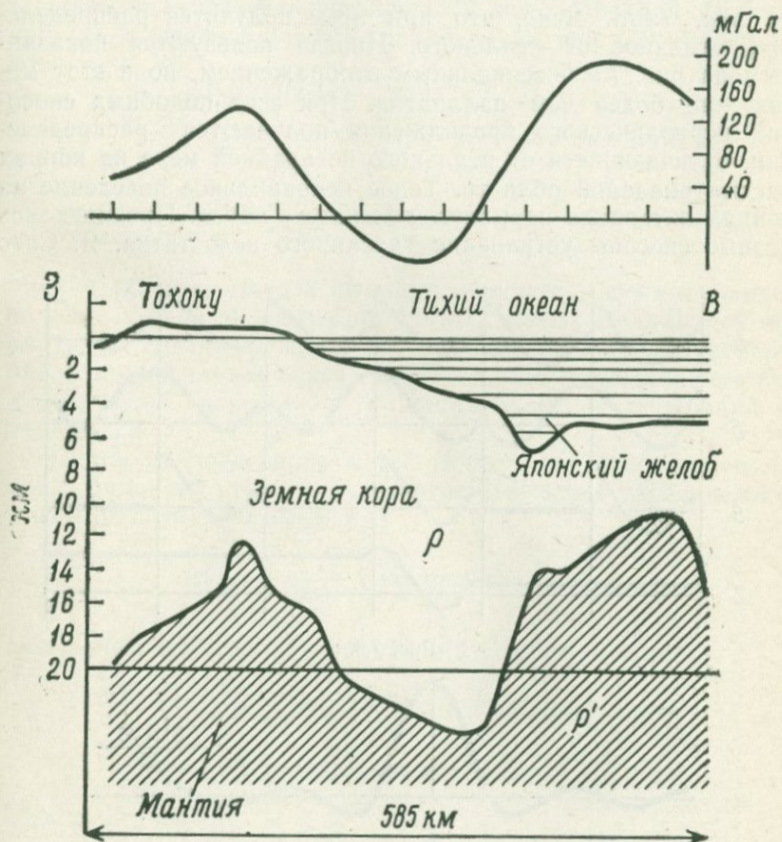


Рис. 7.7.

эти значения на $\rho' - \rho$, определяем рельеф границы между слоями пород с плотностями ρ и ρ' . Полученный результат представлен на рис. 7.7. Описанные расчеты выполнены в 1939 г. С. Ямагучи.

§ 5. МЕТОД $(\sin x)/x$ ТОМОДЫ — АКИ

Мы рассмотрели очень эффективный метод анализа гравиметрических данных, основанный на разложении наблюдаемого распределения силы тяжести в ряд Фурье. Однако этот метод имеет один органический недостаток, связанный с необходимостью периодического продолжения наблюдаемых данных вне интервала, в котором выполнена гравиметрическая съемка. Пример такого продолжения показан на рис. 7.8, а. Ясно, что при этом получится распределение, отличное от реального. Иногда пользуются показанным на рис. 7.8, б зеркальным отображением, но и этот метод — не более чем паллиатив. При всех подобных способах периодического продолжения получаются распределения, отличающиеся от реального по крайней мере на концах рассматриваемой области. Такое неправильное поведение на концах интервала называют *явлением Гиббса*. Предлагались разные способы устранения указанного недостатка. Я. Сато

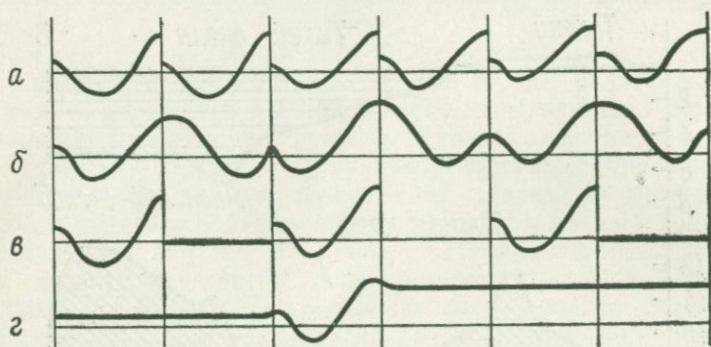


Рис. 7.8.

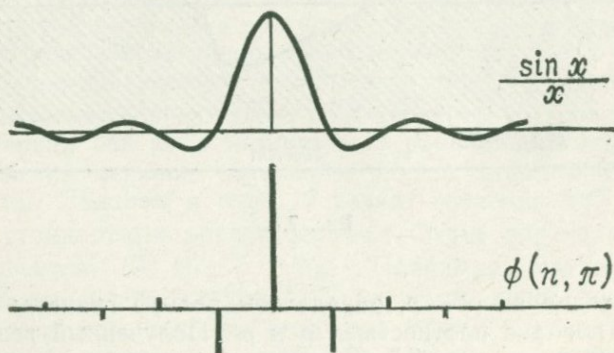


Рис. 7.9.

(1954) вводил с обеих сторон интервала пустые промежутки (рис. 7.8, в), Ч. Дикс (1964) предлагал граничное значение силы тяжести продолжать до бесконечности (рис. 7.8, г), Ц. Тикаратакэ (1952) предлагал вместо разложения по тригонометрическим функциям (ряд Фурье) использовать разложение по функциям Эрмита. Но все эти предложения не нашли широкого применения.

Приблизительно в то же время Ё.Томода и К. Аки (1955) высказали замечательную идею об использовании функции $(\sin x)/x$, график которой приведен на рис. 7.9. Очевидно, что

$$(\sin x)/x = 1 \quad \text{при } x = 0,$$

$$(\sin x)/x = 0 \quad \text{при } x = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

и

$$(\sin x)/x = \int_0^1 \cos mx \, dm.$$

Можно сказать, что эта функция получается суммированием по всем m от 0 до 1 функций $\cos mx$, взятых с единичной амплитудой. Иными словами, эта функция не содержит колебаний с длиной волны короче 2π . Итак, она равна единице при $x = 0$, нулю при $x = n\pi$ и длина волны ее колебаний не меньше 2π .

Пусть распределение силы тяжести на поверхности дается функцией $(\sin x)/x$. Соответствующее распределение массы на глубине d имеет вид

$$M(x) = \frac{1}{2\pi k^2} \int_0^1 \exp(md) \cos mx \, dm.$$

Обозначим интеграл в правой части через ϕ . Имеем

$$\begin{aligned} \phi &= \left| \frac{\exp(md)}{d^2 + x^2} (d \cos mx + x \sin mx) \right|_{m=0}^{m=1} = \\ &= \frac{d}{d^2 + x^2} (\exp d \cos x - 1) + \frac{x \exp d}{d^2 + x^2} \sin x. \end{aligned}$$

При $x = \pm n\pi$

$$\phi(n, d) = \frac{d}{d^2 + (n\pi)^2} (\pm \exp d - 1)$$

(верхний знак соответствует n четному, нижний — n нечетному). Например, при $d = \pi$ и $d = \pi/2$

$$\phi(n, \pi) = \frac{1}{(n^2 + 1)\pi} (\pm \exp \pi - 1),$$

$$\phi(n, \pi/2) = \frac{1}{(4n^2 + 1)\pi} (\pm \exp(\pi/2) - 1),$$

Таблица значений $\phi(n, \pi)$, $\phi(n, \pi/2)$ приведена ниже (табл. 7.1).

Таблица 7.1

n	$\phi(n, \pi)$	$\phi(n, \pi/2)$	n	$\phi(n, \pi)$	$\phi(n, \pi/2)$
0	7,056	2,425	± 6	0,190	0,017
± 1	-3,843	-0,739	± 7	-0,155	-0,019
± 2	1,410	0,143	± 8	0,168	0,010
± 3	-0,768	-0,100	± 9	-0,094	-0,012
± 4	0,414	0,037	± 10	0,072	0,006
± 5	-0,295	-0,036

Итак, мы получили, что распределение силы тяжести, при котором $\Delta g = 1$ в одной точке некоторой расчетной сетки и $\Delta g = 0$ в остальных ее точках, порождается распределением аномальной массы, при котором значение массы в точке, расположенной прямо под n -й точкой рассматриваемой сетки, равно $\phi_n/2\pi k^2$. (При этом не следует забывать о чередовании знаков в формуле для ϕ_n .)

При практическом применении описанного метода расчета распределения глубинной массы задаются сеткой, в точках которой определены значения Δg :

$$\dots, \Delta g_{-3}, \Delta g_{-2}, \Delta g_{-1}, \Delta g_0, \Delta g_1, \Delta g_2, \Delta g_3, \dots$$

Значения массы в точках соответствующей сетки, находящейся на глубине,

$$\dots, M_{-3}, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, M_3, \dots,$$

даются следующими формулами:

$$2\pi k^2 M_{-3} = \dots - g_{-6}\phi_3 + g_{-5}\phi_2 + g_{-4}\phi_1 + g_{-3}\phi_0 + \\ + g_{-2}\phi_{-1} + g_{-1}\phi_{-2} + g_0\phi_{-3} + \dots,$$

$$2\pi k^2 M_{-2} = \dots g_{-5}\phi_3 + g_{-4}\phi_2 + g_{-3}\phi_1 + g_{-2}\phi_0 + \\ + g_{-1}\phi_{-1} + g_0\phi_{-2} + g_1\phi_{-3} + \dots,$$

$$2\pi k^2 M_{-1} = \dots g_{-4}\phi_3 + g_{-3}\phi_2 + g_{-2}\phi_1 + g_{-1}\phi_0 + \\ + g_0\phi_{-1} + g_1\phi_{-2} + g_2\phi_{-3} + \dots,$$

$$2\pi k^2 M_0 = \dots g_{-3}\phi_3 + g_{-2}\phi_2 + g_{-1}\phi_1 + g_0\phi_0 + \\ + g_1\phi_{-1} + g_2\phi_{-2} + g_3\phi_{-3} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 2\pi k^2 M_1 &= \dots g_{-2}\phi_3 + g_{-1}\phi_2 + g_0\phi_1 + g_1\phi_0 + \\
 &\quad + g_2\phi_{-1} + g_3\phi_{-2} + g_4\phi_{-3} + \dots, \\
 2\pi k^2 M_2 &= \dots g_{-1}\phi_3 + g_0\phi_2 + g_1\phi_1 + g_2\phi_0 + \\
 &\quad + g_3\phi_{-1} + g_4\phi_{-2} + g_5\phi_{-3} + \dots, \\
 2\pi k^2 M_3 &= \dots g_0\phi_3 + g_1\phi_2 + g_2\phi_1 + g_3\phi_0 + \\
 &\quad + g_4\phi_{-1} + g_5\phi_{-2} + g_6\phi_{-3} + \dots
 \end{aligned}$$

Расчет по этим формулам достаточно прост.

При всех достоинствах приведенного метода расчета все же остается неясным, как выбирать границы области, в которой производится обработка гравиметрических данных с целью выявить распределение глубинных масс.

§ 6. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Выводы предыдущих параграфов (относящиеся к одномерному случаю) нетрудно обобщить на двумерный случай. Но если в одномерном случае можно было обойтись p коэффициентами, то в двумерном случае нужно учитывать p^2 коэффициентов, что неизбежно усложняет вычисления, делая их более громоздкими.

При обобщении метода $(\sin x)/x$ на двумерный случай нужно рассматривать двойной интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \cos mx \cos ny \exp(\sqrt{m^2 + n^2} d) dm dn,$$

который не вычисляется в аналитической форме и может быть взят только численно. Его вычислением занимались в разное время Цубои; Олдгем и Вайтман (1958); Симадзу (1962); Канамори (1963); Такеучи и Сайто (1964). Наиболее подробные таблицы Такеучи и Сайто, составленные для поверхностной сетки 10×10 при значениях глубин 0,01, 0,02, ..., 0,98, 0,99.

Например, в табл. 7.2 приведены значения коэффициентов, на которые нужно умножать Δg в точках поверхностной сетки для случая, когда глубина залегания притягивающей массы равна расстоянию между соседними точками сетки. Сначала, составляя сумму произведений Δg на соответствующие коэффициенты и деля ее на $2\pi k^2$, определяют значение массы непосредственно под центральной точкой сетки. Затем, последовательно сдвигая сетки и повторяя вычисления,

находят распределение глубинной массы. Заметим, что сумма всех этих коэффициентов равна единице.

Таблица 7.2

....
....	-0,0026	-0,0092	0,0761	-0,0092	-0,0026
....	-0,0092	-0,0199	-0,3712	-0,0199	-0,0092
....	0,0761	-0,3712	2,3433	-0,3712	0,0761
....	-0,0092	-0,0199	-0,3712	-0,0199	-0,0092
....	-0,0026	-0,0092	0,0761	-0,0092	-0,0026
....

Как видно из таблицы, даже для сетки размером 5×5 коэффициенты сильно зависят от направления отрезка, соединяющего центр сетки с какой-либо другой ее точкой. Поэтому пользоваться в качестве расчетной области квадратом с центром в начале координат неразумно — удобнее вместо прямоугольной применять цилиндрическую систему координат, об использовании которой мы поговорим в гл. 9.

§ 7. МЕТОД ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Отмеченные выше затруднения с расчетной областью возникают из-за того, что область, в которой известно поле Δg , недостаточно широка; поэтому распределение глубинных масс удастся вычислить лишь в еще более узкой области. Поскольку указанная трудность практически неустраима, целесообразно с самого начала примириться с тем, что аномальную глубинную массу можно определить в более узкой области, чем та, в которой известно распределение Δg . Если встать на такую точку зрения, то возможен следующий метод расчета глубинных масс, который мы поясним на простом примере.

Рассмотрим в одномерном случае сетку из семи точек, в которых заданы значения Δg . Не будем определять значения глубинных масс под каждой из этих семи точек, а подсчитаем глубинную массу только под одной, средней (в данном случае — четвертой) точкой сетки. Значения Δg в наших семи точках обозначим $\Delta g_0, \Delta g_1, \dots, \Delta g_6$ и вычислим значение массы под точкой с индексом 3. Запишем отрезок ряда Фурье

$$\Delta g = B_0^C + B_1^C \cos x + B_2^C \cos 2x + B_3^C \cos 3x + \\ + B_1^S \sin x + B_2^S \sin 2x,$$

аппроксимирующий распределение Δg в указанных семи точках. Здесь

$$B_0^C = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \Delta g_0 + \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 + \Delta g_5 + \frac{1}{2} \Delta g_6 \right),$$

$$B_1^C = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \Delta g_0 + \Delta g_1 \cos 60^\circ + \Delta g_2 \cos 120^\circ + \Delta g_3 \cos 180^\circ + \right. \\ \left. + \Delta g_4 \cos 240^\circ + \Delta g_5 \cos 300^\circ + \frac{1}{2} \Delta g_6 \cos 360^\circ \right),$$

$$B_2^C = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \Delta g_0 + \Delta g_1 \cos 120^\circ + \Delta g_2 \cos 240^\circ + \Delta g_3 \cos 360^\circ + \right. \\ \left. + \Delta g_4 \cos 120^\circ + \Delta g_5 \cos 240^\circ + \frac{1}{2} \Delta g_6 \cos 360^\circ \right),$$

$$B_3^C = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \Delta g_0 + \Delta g_1 \cos 180^\circ + \Delta g_2 \cos 360^\circ + \Delta g_3 \cos 180^\circ + \right. \\ \left. + \Delta g_4 \cos 360^\circ + \Delta g_5 \cos 180^\circ + \frac{1}{2} \Delta g_6 \cos 360^\circ \right).$$

Коэффициенты B_1^S , B_2^S нам не понадобятся. Находящаяся на глубине d масса $M(x)$, которая соответствует указанному распределению Δg , определяется соотношением

$$M(x) \cdot 2\pi k^2 = B_0^C + \\ + B_1^C \exp d \cos x + B_2^C \exp 2d \cos 2x + B_3^C \exp 3d \cos 3x + \\ + B_1^S \exp d \sin x + B_2^S \exp 2d \sin 2x.$$

Масса, находящаяся под средней точкой упомянутой выше сетки из семи точек, получится, если в последней формуле принять $x = \pi$ (именно поэтому обращаются в нуль слагаемые, зависящие от синусов):

$$2\pi k^2 M(\pi) = \\ = B_0^C - B_1^C \exp d + B_2^C \exp 2d - B_3^C \exp 3d = \\ = \frac{1}{12} \Delta g_0 + \frac{1}{6} \Delta g_1 + \frac{1}{6} \Delta g_2 + \frac{1}{6} \Delta g_3 + \frac{1}{6} \Delta g_4 + \frac{1}{6} \Delta g_5 + \frac{1}{12} \Delta g_6 - \\ - \left(\frac{1}{6} \Delta g_0 + \frac{1}{6} \Delta g_1 - \frac{1}{6} \Delta g_2 - \frac{1}{3} \Delta g_3 - \frac{1}{6} \Delta g_4 + \frac{1}{6} \Delta g_5 + \frac{1}{6} \Delta g_6 \right) \exp d + \\ + \left(\frac{1}{6} \Delta g_0 - \frac{1}{6} \Delta g_1 - \frac{1}{6} \Delta g_2 + \frac{1}{3} \Delta g_3 - \frac{1}{6} \Delta g_4 - \frac{1}{6} \Delta g_5 + \frac{1}{6} \Delta g_6 \right) \exp 2d - \\ - \left(\frac{1}{12} \Delta g_0 - \frac{1}{6} \Delta g_1 + \frac{1}{6} \Delta g_2 - \frac{1}{6} \Delta g_3 + \frac{1}{6} \Delta g_4 - \frac{1}{6} \Delta g_5 + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \Delta g_6 \right) \exp 3d =$$

$$\begin{aligned}
&= (\Delta g_0 + \Delta g_6) \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \exp d + \frac{1}{6} \exp 2d - \frac{1}{12} \exp 3d \right\} + \\
&+ (\Delta g_1 + \Delta g_5) \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \exp d - \frac{1}{6} \exp 2d + \frac{1}{6} \exp 3d \right\} + \\
&+ (\Delta g_2 + \Delta g_4) \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \exp d - \frac{1}{6} \exp 2d - \frac{1}{6} \exp 3d \right\} + \\
&+ \Delta g_3 \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \exp d + \frac{1}{3} \exp 2d + \frac{1}{6} \exp 3d \right\}.
\end{aligned}$$

Выражения в фигурных скобках здесь являются постоянными, зависящими от d . Они играют роль весовых коэффициентов, на которые нужно умножать значения Δg . Например, если глубина d равна расстоянию между узлами сетки ($d = \pi/3$), то, вычисляя значения в фигурных скобках, получаем

$$\begin{aligned}
2\pi k^2 M(\pi) = &- 0,967 \Delta g_0 - 0,967 \Delta g_6 + \\
&+ 2,196 \Delta g_1 + 2,196 \Delta g_5 - \\
&- 4,566 \Delta g_2 - 4,566 \Delta g_4 + \\
&+ 7,678 \Delta g_3.
\end{aligned}$$

Коэффициенты в этой простой формуле близки к коэффициентам, получаемым для $d = \pi$ методом $(\sin x)/x$. Если сетка значений Δg не исчерпывается семью точками, то по семерке значений $\Delta g_0, \dots, \Delta g_6$ определяем массу M_3 , по семерке значений $\Delta g_1, \dots, \Delta g_7$ — массу M_4 и т. д., сдвигаясь на 1 от точки к точке, найдем распределение массы на множестве точек, в котором на шесть точек меньше, чем узлов в сетке значений Δg .

В приведенном примере расчетная сетка содержала шесть избыточных точек. Расчет можно вести и при большем числе таких точек, но при этом увеличивается массив данных, необходимых для определения глубинных масс.

Заменяя в предыдущих выражениях d на $-d$, получаем формулы для нахождения силы тяжести над поверхностью земли по данным гравиметрической съемки.

РАСЧЕТ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНОЙ ЛИНИИ И УНДУЛЯЦИЙ ГЕОИДА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

§ 1. УГОЛ ОТКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА

Мы говорим, что сила тяжести действует «вниз». Прямоу, продолженную вверх и вниз вдоль направления действия силы тяжести на поверхности земли, называют линией отвеса. Когда под поверхностью находится аномальная глубинная масса, направление линии отвеса изменяется за счет горизонтальной составляющей X (составляющей вдоль оси x) силы притяжения этой массы (рис. 8.1). Угол $\theta = X/g$ (где $g = 980$) изменения этого направления по сравнению со случаем отсутствия аномальной массы называют *углом отклонения отвеса*. Отвесные линии в точках A и B (параллельные при отсутствии аномальной массы) при наличии аномальной глубинной массы непараллельны.

Рассмотрим показанные на рис. 8.2 две точки A и B на меридиане Земли. Расстояние s между ними можно определить из астрономических наблюдений. Для простоты будем считать, что в отсутствие аномальных глубинных масс Земля имеет форму шара, а Полярная звезда находится точно на оси мира. Тогда, измеряя в точках A и B направление

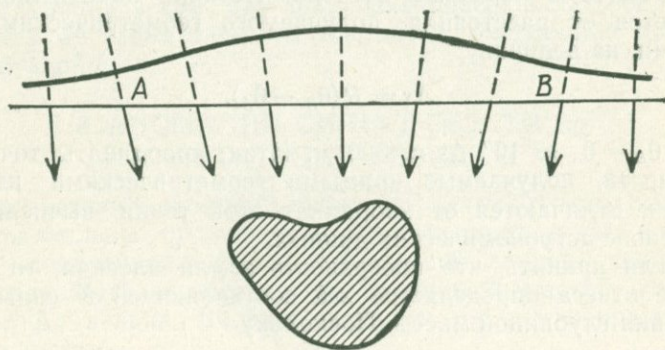


Рис. 8.1.

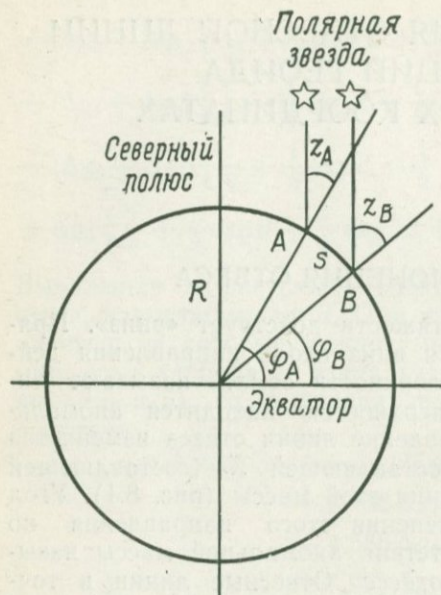


Рис. 8.2.

Если в недрах Земли нет никаких особенностей, оба метода измерения расстояния должны дать одинаковый результат. Иначе будет при наличии глубинных масс, когда линии отвеса в точках A и B отклонены на углы θ_A и θ_B . В этом случае расстояние

$$s = R \{(z_B + \theta_B) - (z_A + \theta_A)\} = R(z_B - z_A) + R(\theta_B - \theta_A),$$

измеренное с помощью астрономических наблюдений, отличается от расстояния, получаемого геометрическими методами, на величину

$$\Delta s = R(\theta_B - \theta_A).$$

При $\theta_B - \theta_A \approx 10''$ $\Delta s \approx 300$ м. Итак, координаты точки на местности, получаемые прямыми геометрическими измерениями, отличаются от координат этой точки, вычисляемых на основе астрономических данных.

Если принять, что поверхность земли плоская, то отклонение отвеса определяется x -й составляющей X силы притяжения глубинной массы. Поскольку

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}$$

на Полярную звезду относительно направления отвеса, получаем

$$z_B - z_A = \varphi_A - \varphi_B.$$

Если радиус Земли R , то расстояние между точками A и B

$$s = R(\varphi_A - \varphi_B) = \\ = R(z_B - z_A).$$

Расстояние AB можно измерить геометрическим путем с помощью мерной ленты. На практике вместо мерной ленты применяют триангуляцию, но с принципиальной точки зрения триангуляция не отличается от измерения с помощью масштабной линейки.

(V — гравитационный потенциал глубинной массы), то

$$\theta = \frac{X}{g} = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Например, при $X = 10$ мГал

$$\theta = 10^{-2}/980 \approx 10^{-5} = 2''.$$

2-я составляющая силы притяжения глубинной массы равна

$$\Delta g = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Величины θ и Δg выводятся из одного и того же потенциала V , поэтому между ними должна существовать математическая связь.

§ 2. УНДУЛЯЦИИ ГЕОИДА

Поверхность, во всех своих точках ортогональную направлению силы тяжести, называют горизонтальной. В случае Земли такой поверхностью является геоид. Плоская поверхность, под которой отсутствуют аномальные глубинные массы (так что направления силы тяжести во всех ее точках взаимно параллельны), будет признана плоской также и в результате геометрических измерений. Но при наличии аномальных глубинных масс направления силы тяжести в разных точках не будут взаимно параллельны и ортогональная к ним поверхность будет отличаться от плоскости. В этом случае наблюдаются *ундуляции* (волнообразные изменения формы) геоида. Разумеется, люди не ощущают ундуляций, полагая, что ортогональная направлению силы тяжести поверхность у них под ногами горизонтальна. Смысл понятия ундуляции в том, что локальная поверхность геоида отличается от геометрической плоскости. Ундуляцию обозначают буквой h .

§ 3. АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ Δg И УНДУЛЯЦИИ ГЕОИДА h

Направления отвесной линии в разных точках рис. 8.1 не параллельны друг другу и ортогональная к ним поверхность (показанная на рис. 8.1 жирной линией) искривлена — вздувается в области над глубинной массой, где величина Δg велика. Вообще величины Δg и h коррелируют друг с другом.

Неизбежность такой корреляции становится очевидной, если рассмотреть поведение гравитационного потенциала.

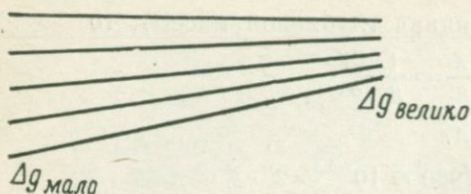


Рис. 8.3.

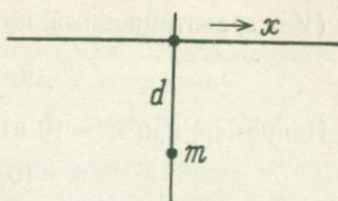


Рис. 8.4.

В областях большого Δg велик градиент потенциала, т. е. эквипотенциальные поверхности сгущаются (рис. 8.3). В то же время ясно, что на достаточно большой высоте над поверхностью земли сила тяжести в общем постоянна, а эквипотенциальные поверхности идут горизонтально. Следовательно, чтобы обеспечить большой градиент потенциала вблизи поверхности, эквипотенциальные поверхности в области большого Δg должны собираться, поднимаясь вверх (геоид должен «вспучиться»).

Рассмотрим простой пример. Пусть на глубине d находится масса m (рис. 8.4). В точке с координатой x

$$\Delta g = k^2 m \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}}.$$

x -я составляющая силы притяжения будет

$$X = k^2 m \frac{x}{(d^2 + x^2)^{3/2}},$$

откуда угол отклонения отвеса равен

$$\theta = \frac{X}{g} = \frac{k^2 m}{g} \frac{x}{(d^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Высота геоида h получается интегрированием θ по x :

$$h = \frac{k^2 m}{g} \int_{-\infty}^x \frac{x}{(d^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{k^2 m}{g} \frac{1}{(d^2 + x^2)^{1/2}}.$$

В точке над глубинной массой (при $x = 0$)

$$\Delta g = \frac{k^2 m}{d^2}, \quad h = \frac{k^2 m}{g} \frac{1}{d},$$

откуда

$$h = \Delta g d/g,$$

или

$$hg = d \Delta g.$$

Например, при $d = 10$ км, $\Delta g = 10$ мГал

$$h = 10^{-2} \cdot 10^6 : 980 \approx 10 \text{ (см)}$$

(геоид в точке $x = 0$ поднимается на 10 см).

§ 4. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим связь между Δg и h с несколько более общих позиций, ограничившись (для простоты) одномерным случаем. Предположим, что на некоторой постоянной глубине находится массивная поверхность, плотность вещества которой изменяется в направлении x (рис. 8.5). Потенциал этого плоского распределения массы выражается следующим рядом Фурье:

$$V = \sum \left[A_m \cos \frac{2\pi m}{D} x \exp \left(\frac{2\pi m}{D} z \right) \right],$$

где D — расстояние на местности, принятое за период функции, определяемой рядом Фурье. На поверхности земли (при $z = 0$)

$$\Delta g(x) = \frac{\partial V}{\partial z} = \sum \frac{2\pi m}{D} A_m \cos \frac{2\pi m}{D} x,$$

$$\theta(x) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{1}{g} \sum \mp \frac{2\pi m}{D} A_m \sin \frac{2\pi m}{D} x,$$

$$h(x) = \frac{1}{g} \sum \int_0^x \mp \frac{2\pi m}{D} A_m \sin \frac{2\pi m}{D} x dx =$$

$$= \frac{1}{g} \sum A_m \left(\cos \frac{2\pi m}{D} x - 1 \right).$$

Полагая $(2\pi m/D) A_m = B_m$, получаем для каждого m

$$\Delta g(x) = B_m \cos \frac{2\pi m}{D} x,$$

$$\theta(x) = \mp \frac{B_m}{g} \sin \frac{2\pi m}{D} x,$$

$$h(x) = \frac{D}{2\pi m g} B_m \left(\cos \frac{2\pi m}{D} x - 1 \right).$$

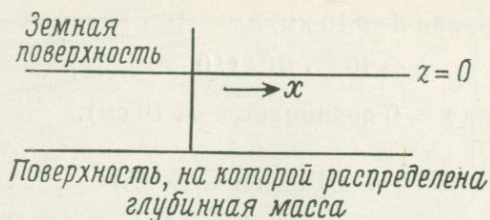


Рис. 8.5.

Из полученных формул видно, что, поскольку в выражениях Δg и θ синус и косинус меняются местами, величины Δg и θ сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Фазы выражений Δg и h одинаковы, а отношение их амплитуд зависит от величины показателя m . Отношение D/m , играющее роль длины волны для рассматриваемой компоненты, обозначим λ_m . Тогда

$$h_{\max} = \frac{\lambda_m}{2\pi g} B_m$$

и видно, что на ундуляцию геоида сильнее влияют компоненты B_m , имеющие большую длину волны.

В табл. 8.1 приведены значения h_{\max} для различных значений λ_m и B_m . Выражения Δg и θ отличаются друг от друга в основном заменой синуса на косинус и обратно, и отношения их амплитуд не зависят от длины волны.

Значения h_{\max} (в см)

Таблица 8.1

B_m , мГал λ_m , км	1	10	100
1	0,02	0,16	1,62
10	0,16	1,62	16,2
100	1,62	16,2	162

В центральных районах Японии расстояние от побережья Тихого океана до Японского моря составляет около 200 км, а величина $\Delta g_0''$ меняется от +50 мГал на обоих побережьях до -80 мГал в центральном горном массиве. Подставляя эти значения в предыдущую формулу

$$h = \frac{200 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 980} \frac{1}{2} (50 + 80) \cdot 10^{-3},$$

находим

$$h = \frac{26\,000 \cdot 10^2}{2\pi \cdot 980} \approx 422 \text{ см.}$$

Таким образом, в центральном горном массиве геоид вогнут относительно побережья приблизительно на 4,2 м.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ θ , h ПО Δg МЕТОДОМ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Выше мы уже говорили об определении глубинной массы M методом весовых функций. Здесь мы применим этот метод к определению угла отклонения отвеса θ по гравиметрическим данным Δg .

Если

$$\Delta g = \sum B_m^C \cos \frac{2\pi m}{D} x + \sum B_m^S \sin \frac{2\pi m}{D} x,$$

то

$$\theta = \frac{1}{g} \left(- \sum B_m^C \sin \frac{2\pi m}{D} x + \sum B_m^S \cos \frac{2\pi m}{D} x \right),$$

где D — длина участка местности, принятая за период представляемой рядом Фурье периодической функции. В средней точке этого участка (при $x = D/2$) $\sin \frac{2\pi m}{D} x = 0$, $\cos \frac{2\pi m}{D} x = \pm 1$ и

$$\theta = \frac{1}{g} (-B_1^S + B_2^S - B_3^S + \dots).$$

Если на отрезке D определить сетку из семи точек, то в формуле для θ сохранятся только коэффициенты B_1^S и B_2^S . Поскольку

$$B_1^S = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_5 \right),$$

$$B_2^S = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta g_5 \right)$$

и

$$\theta = \frac{1}{g} (-B_1^S + B_2^S),$$

то для θ получается простая формула

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{3} g} (\Delta g_4 - \Delta g_2).$$

Разумеется, простота этой формулы определяется тем обстоятельством, что в нашем приближенном расчете мы

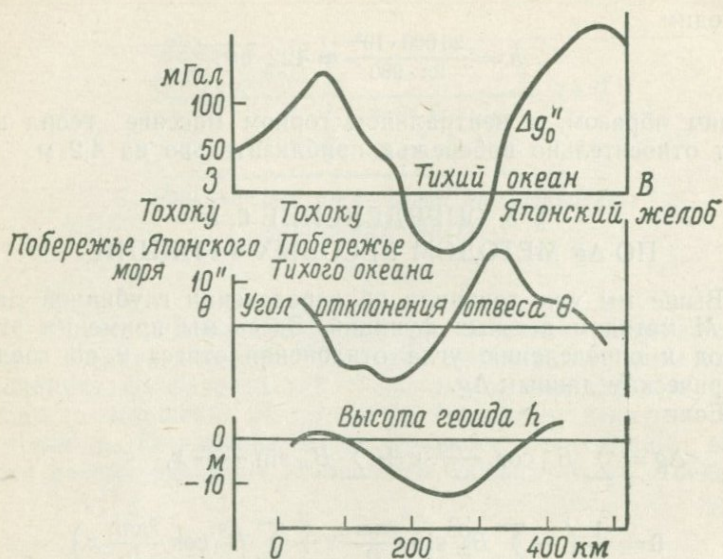


Рис. 8.6.

разбили период функции, определяемой рядом Фурье, на интервалы с помощью всего семи точек. Но ввиду замечательной простоты полученной формулы применим ее для расчета практического примера. Обрабатываем данные по области Тохоку на о. Хонсю, которая от его западного берега до побережья Тихого океана простирается на 585 км. Этот интервал мы разобьем 19 точками на равные отрезки длиной по 32,5 км и, исходя из значений $\Delta g_0''$ в указанных 19 точках, определим в них углы отклонения отвеса θ . Сначала воспользуемся значениями $\Delta g_0''$ в семи точках, чтобы определить угол θ в 4-й точке. Затем, сдвигаясь каждый раз на одну точку вправо, будем повторять вычисления, определяя угол θ в 5-й, 6-й и т. д. точках. Таким путем можно определить уклонение отвесной линии в 12 точках. Интегрируя θ по x , вычислим ундуляцию геоида h . Результат этих вычислений представлен на рис. 8.6. Видно, что ундуляция геоида составляет несколько метров.

В приведенных расчетах мы пользовались сеткой всего из семи точек. При увеличении числа точек в сетке повышается точность вычислений, но одновременно уменьшается число точек, в которых можно рассчитать угол отклонения отвеса θ и ундуляцию геоида h .

РАСЧЕТ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

§ 1. КОГДА ЦЕЛЕСООБРАЗНО ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ?

До сих пор при рассмотрении различных задач гравиметрии мы пользовались декартовой системой координат. При выполнении анализа Фурье в декартовых координатах мы исходили из прямоугольной области, все точки которой рассматривались как равноправные.

Но бывают случаи, когда вместо обработки гравиметрических данных во всех точках области нужно проанализировать их применительно к одной, специально выбранной точке, например определить в этой точке высоту геоида или направление и величину уклонения отвеса. В такой ситуации целесообразно выбрать эту точку за начало цилиндрических координат.

В случае декартовых координат расчетная область может иметь вид, например, квадрата со стороной $2a$. При расчете силы тяжести в центре этого квадрата вдоль осей x и y нужно учитывать гравиметрические данные вплоть до расстояния a от начала координат, а в направлении диагонали квадрата — до расстояния $\sqrt{2}a$, что неестественно с физической точки зрения.

Последнее замечание тоже показывает, что при анализе данных в окрестности некоторой специально выбранной точки удобно ввести цилиндрические координаты (r, θ, z) с центром в этой точке.

§ 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Выше мы уже указывали, что в цилиндрических координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Потенциал V можно представить в виде произведения трех функций, зависящих соответственно только от r , θ и z :

$$V(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z).$$

Подставляя это произведение в уравнение Лапласа, приводим последнее к виду

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Четвертое слагаемое здесь зависит только от z , и тем не менее при сложении его с первыми тремя слагаемыми, от z не зависящими, в сумме получается нуль. Следовательно, должно иметь место соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} &= \mp k^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \pm k^2, \end{aligned}$$

где k^2 — константа. Решая сначала уравнение

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \pm k^2,$$

находим четыре варианта ответа:

$$Z = \exp(kz), \quad \exp(-kz), \quad \cos kz, \quad \sin kz.$$

В задачах гравиметрии ось z обычно направляют вниз, принимая поверхность земли за плоскость $z = 0$, так что область над поверхностью соответствует $z \leq 0$. Тогда из приведенных четырех вариантов нужно выбрать решение

$$Z(z) = \exp(kz).$$

Уравнение

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -k^2$$

запишем в виде

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}.$$

Левая часть здесь зависит только от r , правая — только от θ , и тем не менее они равны друг другу. Следовательно,

$$-\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \pm n^2,$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = \pm n^2,$$

где n^2 — константа. При нашем выборе осей вариант $-n^2$ надо отбросить. Тогда

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0,$$

откуда

$$\Theta(\theta) = \frac{\cos}{\sin} n\theta.$$

Для функции $R(r)$ мы получаем уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0,$$

известное как *уравнение Бесселя* (Φ . Бессель, 1784—1846). Обозначая его решение символом $J_n(kr)$, получаем, что наш потенциал

$$V(r, \theta, z) = J_n(kr) \frac{\cos}{\sin} n\theta \exp kz.$$

Постоянные n и k можно считать положительными. Вводя коэффициент A_{nk} , запишем общее решение для потенциала:

$$V(r, \theta, z) = \sum_n \int_0^\infty A_{nk} J_n(kr) \frac{\cos}{\sin} n\theta \exp(kz) dk.$$

Величину $J_n(kr)$ называют функцией Бесселя первого рода n -го порядка, но мы в дальнейшем будем называть ее просто функцией Бесселя (бесселевой функцией). k есть коэффициент при r , определяющий масштаб изменения r . Вводя обозначение $x = kr$, перепишем уравнение Бесселя в виде

$$\frac{d^2J_n}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0.$$

В окрестности $x = 0$ решения этого уравнения представляются следующими степенными рядами:

$$n = 0: \quad J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \dots,$$

$$n = 1: \quad J_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 - \dots,$$

$$n = 2: \quad J_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{3072}x^6 - \dots$$

Графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ показаны на рис. 9.1. Заметим, что

$$J_0(0) = 1, \quad J'_0(0) = 0,$$

$$J_1(0) = 0, \quad J'_1(0) = 1/2,$$

$$J_2(0) = 0, \quad J'_2(0) = 0, \quad J''_2(0) = 1/4.$$

Из рис. 9.1 ясно, что кривые $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ неограниченное число раз проходят через нуль, так что уравнение

$$J_n(x) = 0$$

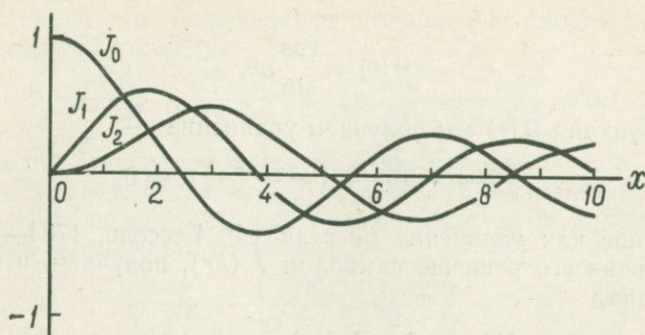


Рис. 9.1.

имеет бесконечно много корней. Некоторые из них приведены в табл. 9.1. Чем выше порядок функций Бесселя J_1, J_2, \dots , тем ближе к оси абсцисс их значения в окрестности точки $x=0$.

Таблица 9.1

Корни $J_0(x)=0$	Корни $J_1(x)=0$	Корни $J_2(x)=0$
	0,000	0,000
2,405	3,832	5,135
5,520	7,016	8,417
8,654	10,173	11,620
11,792
...		

§ 3. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ

В цилиндрических координатах потенциал

$$V(r, \theta, z) = \sum_n \int_0^{\infty} A_{nk} J_n(kr) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \exp(kz) dk$$

выражается в виде произведения трех сомножителей, зависящих каждое только от r, θ и z соответственно. Но эти три сомножителя не являются полностью независимыми, так как в выражения $J_n(kr)$ и $\exp(kz)$ входит одна и та же величина k , а функции $J_n(kr)$ и $\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}$ характеризуются одним и тем же n .

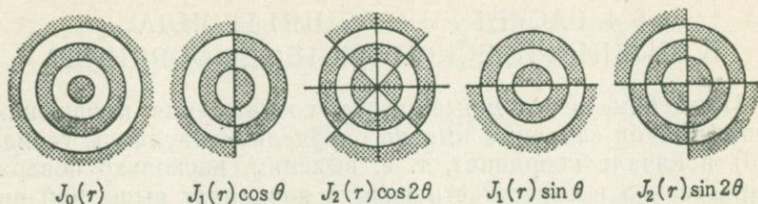


Рис. 9.2.

То обстоятельство, что в функциях $J_n(kr)$ и $\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}$ величина n одинакова, имеет следующий смысл. Проведем в плоскости $z=0$ семейство окружностей с центром в начале координат. На этих окружностях потенциал V зависит только от θ , и его можно разложить в ряд Фурье:

$$V(r, \theta) = \alpha_0(r) + \alpha_1(r) \cos \theta + \alpha_2(r) \cos 2\theta + \dots + \beta_1(r) \sin \theta + \beta_2(r) \sin 2\theta + \dots$$

В этом разложении

$$\begin{aligned} \alpha_0(r) & \text{ зависит от } r \text{ как } J_0(kr), \\ \alpha_1(r), \beta_1(r) & \text{ зависят от } r \text{ как } J_1(kr), \\ \alpha_2(r), \beta_2(r) & \text{ зависят от } r \text{ как } J_2(kr) \\ & \dots \end{aligned}$$

Поэтому области, в которых произведение $J_n(kr) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}$ положительно (отрицательно), имеют такой вид, как показано на рис. 9.2. На узловых прямых этого рисунка в нуль обращаются $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, а на узловых окружностях — значения $J_n(kr)$. Умножая указанные произведения на соответствующим образом подобранные коэффициенты A_{nk} и суммируя, можно получить произвольное распределение в координатах r, θ . Поскольку величина k при этом не фиксирована, вообще говоря,

$$\begin{aligned} \alpha_n(r) \\ \beta_n(r) \end{aligned} = \int_0^\infty A_{nk} J_n(kr) dk.$$

Величину $V(r, \theta)$ как функцию θ мы представили рядом Фурье, а как функцию r — рядом Бесселя. Поэтому построенное нами разложение называют *рядом Фурье — Бесселя*.

§ 4. РАСЧЕТ УНДУЛЯЦИЙ ГЕОИДА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Применим изложенные выше соображения к решению практической задачи, а именно определим ундуляцию геоида $h(0)$ в начале координат, т. е. выясним, насколько поверхность геоида в окрестности начала координат выше или ниже его поверхности в точках, удаленных от начала координат. Гравиметрические данные о распределении Δg в окрестности начала координат будем считать известными.

Задача определения $h(0)$ сводится к вычислению в начале координат значения $V(0)$, так как

$$h(0) = V(0)/g.$$

Вообще говоря,

$$V(r, \theta) = \sum_n \int_0^{\infty} A_{nk} J_n(kr) \frac{\cos n\theta \exp(kz)}{\sin} dk,$$

но, поскольку потенциал в начале координат $V(0)$ не зависит от угла, в последней формуле нужно оставить только член с $n=0$; учитывая еще, что $z=0$, получим

$$V(0) = \int_0^{\infty} A_{0k} J_0(0) dk.$$

Мы уже отмечали, что

$$J_0(0) = 1,$$

поэтому

$$V(0) = \int_0^{\infty} A_{0k} dk.$$

Таким образом, для нахождения $V(0)$ нужно по гравиметрическим данным Δg в окрестности начала координат определить A_{0k} и проинтегрировать эту величину по k .

Воспользуемся зависимостью между Δg и V :

$$\Delta g(r) = \frac{\partial V}{\partial z} = \sum_n \int_0^{\infty} A_{nk} k J_n(kr) \frac{\cos n\theta \exp(kz)}{\sin} dk.$$

При усреднении величины Δg по кругу радиуса r с центром в начале координат слагаемые с $n \neq 0$ выпадут, останется только слагаемое с $n=0$, $z=0$:

$$\overline{\Delta g(r)} = \int_0^{\infty} k A_{0k} J_0(kr) dk.$$

С другой стороны, непосредственно разлагая в ряд по бесселевым функциям величину $\overline{\Delta g(r)}$, получим

$$\overline{\Delta g(r)} = \int_0^{\infty} B_{0k} J_0(kr) dk.$$

Сравнивая две последние формулы, найдем соотношение между коэффициентами A_{0k} разложения потенциала и коэффициентами B_{0k} разложения Δg :

$$A_{0k} = B_{0k}/k.$$

Таким образом,

$$V(0) = \int_0^{\infty} A_{0k} dk = \int_0^{\infty} (B_{0k}/k) dk.$$

Но

$$\int_0^{\infty} J_0(kr) dr = 1/k,$$

откуда

$$V(0) = \int_0^{\infty} \frac{B_{0k}}{k} dk = \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} B_{0k} J_0(kr) dk = \int_0^{\infty} \overline{\Delta g(r)} dr.$$

Итак, высота геоида $h(0)$ в начале координат определяется следующей простой формулой:

$$h(0) = \frac{1}{g} \int_0^{\infty} \overline{\Delta g(r)} dr.$$

Для вычисления $h(0)$ по этой формуле нужно провести много концентрических окружностей с центром в начале координат, усреднить Δg по кругу, ограничиваемому каждой из окружностей, и результат усреднения проинтегрировать по r . При увеличении r величина Δg часто меняет знак, поэтому $\overline{\Delta g(r)}$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ и интеграл по r сходится.

Рассмотрим простую модель. Пусть $\overline{\Delta g(r)}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \overline{\Delta g(r)} &= \frac{\overline{\Delta g(0)}}{2} \left(1 + \cos \pi \frac{r}{a} \right), & 0 \leq r \leq a, \\ &= 0, & a \leq r \end{aligned}$$

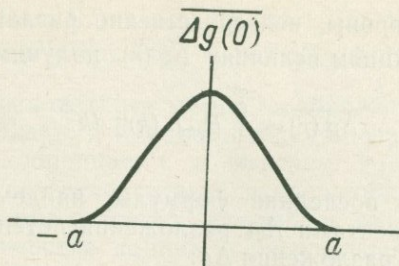


Рис. 9.3.

(график этой функции показан на рис. 9.3). Высота геоида при $r = 0$ будет равна

$$h(0) = \frac{\overline{\Delta g(0)}}{2g} \int_0^a \left(1 + \cos \frac{\pi}{a} r\right) dr = \frac{\overline{\Delta g(0)}}{2g} a.$$

Результаты расчета по этой формуле для разных $\overline{\Delta g(0)}$ и a представлены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Значения $h(0)$ (в см)

a , км	1	10	100
$\overline{\Delta g(0)}$, мГал			
1	0,05	0,5	5,1
10	0,5	5,1	51
100	5,1	51	510

В заключение этого параграфа остановимся на примере уже не модельного, а практического расчета высоты геоида по данным реальной гравиметрической съемки. Распределение аномалии Буге $\overline{\Delta g''}$ в японской области Тюбу показано на рис. 9.4. Определим высоту геоида в точке с координатами $\varphi = 36^\circ$ с. ш., $\lambda = 138^\circ$ в. д. (центр окружностей — в окрестности города Окая, уезд Агата, преф. Нагано). На рис. 9.5, *a* показана зависимость от r значения $\overline{\Delta g(r)}$, получаемого усреднением данных гравиметрической съемки $\overline{\Delta g''}$ по кругам радиусов 10, 20, ..., 100 км с центром в указанной выше точке, а на рис. 9.5, *б* — разделенный на g результат интегрирования этого среднего значения по r от 0 до r . Видно,

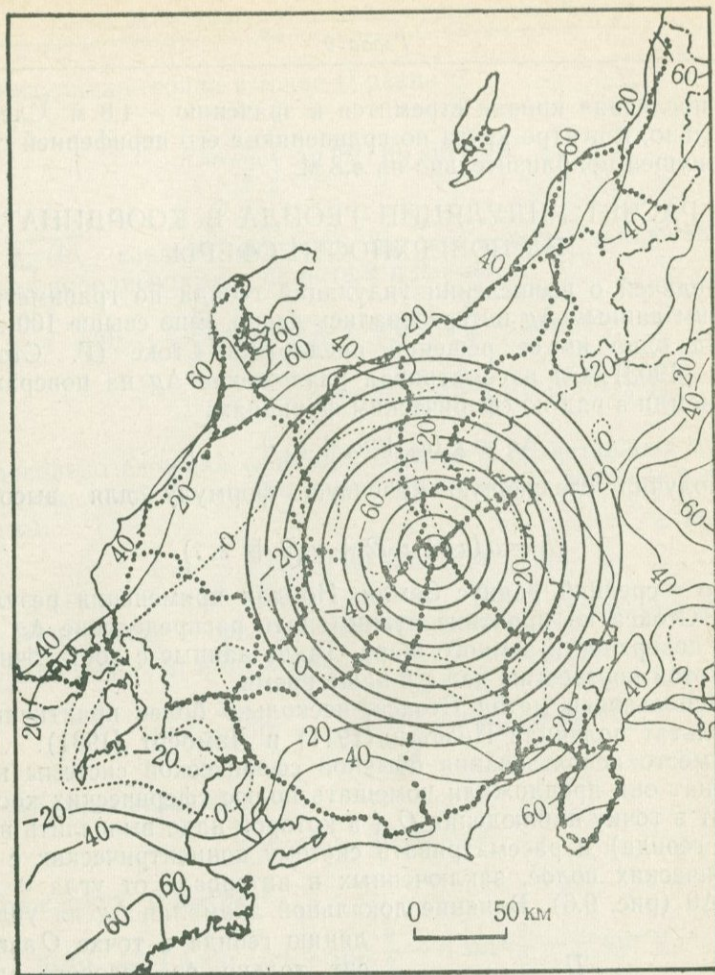


Рис. 9.4. Распределение $\Delta g_0''$ (мГал) в области Тюбу. На сплошных линиях постоянного $\Delta g_0''$ величина $\Delta g_0''$ положительна, на пунктирных отрицательна. Жирными точками нанесены пункты, в которых выполнено измерение силы тяжести

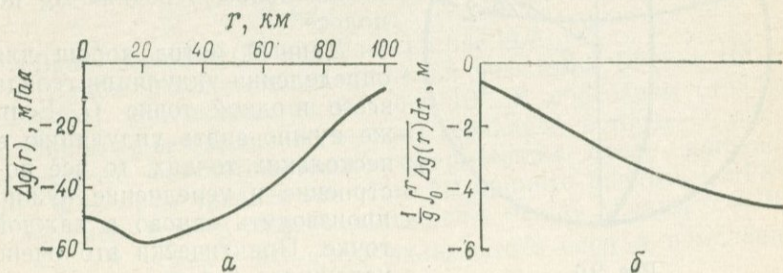


Рис. 9.5.

что последняя кривая стремится к значению $-4,8$ м. Следовательно, в центре круга по сравнению с его периферией геоид опущен приблизительно на $4,8$ м.

§ 5. РАСЧЕТ УНДУЛЯЦИИ ГЕОИДА В КООРДИНАТАХ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

Задачей о вычислении ундуляций геоида по гравиметрическим данным Δg интересовались давно. Еще свыше 100 лет назад одно из ее решений предложил Стокс (Г. Стокс, 1819—1903). Он рассматривал разложение Δg на поверхности земли в ряд по сферическим функциям:

$$\Delta g = g(u_2 + u_3 + u_4 + \dots)$$

и получил следующую красивую формулу для высоты геоида:

$$h = a(u_2 + u_3/2 + u_4/3 + \dots),$$

где a — средний радиус Земли. Но для применения результата Стокса на практике нужно знать распределение Δg по всей поверхности земного шара. Такие данные с достаточной полнотой неизвестны даже в наше время.

Используя метод Стокса, несколько более практичный результат получили Пизетти (1911) и Ламберт (1931).

Вместо использования обычной сферической системы координат они предложили помещать полюс сферических координат в точку наблюдения O (в которой надо вычислить высоту геоида) и рассматривать систему концентрических с O сферических полос, заключенных в интервале от угла θ до $\theta + \Delta\theta$ (рис. 9.6). Влияние локальной аномалии Δg на унду-

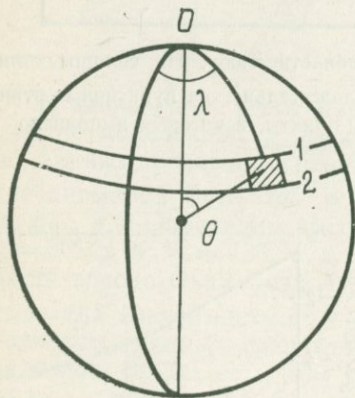


Рис. 9.6.

ляцию геоида в точке O зависит только от углового расстояния θ и не зависит от направления λ на элемент Δg ; именно поэтому целесообразно рассматривать систему сферических полос, усредняя Δg по полосе.

Данный метод хорош для определения ундуляции геоида всего в одной точке O . Если же нужно знать ундуляцию в нескольких точках, то все построение и усреднение нужно производить заново в каждой точке. Практически это очень усложняет задачу.

Ундуляция геоида в точке O равна

$$h = \frac{a}{g} \int_0^{\pi} \overline{\Delta g(\theta)} f(\theta) \sin \theta d\theta,$$

где $\overline{\Delta g(\theta)}$ — среднее значение Δg по полосе, заключенной между дополнениями к широте θ и $\theta + d\theta$, а

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\theta}{2} - 5 \cos \theta - \right. \\ \left. - 3 \cos \theta \ln \left[\sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}$$

— довольно сложная функция. Высота h представлена выше в интегральной форме, но ее можно записать также и в виде суммы:

$$h = \frac{a}{g} \sum \overline{\Delta g} [f(\theta) \sin \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} (\theta_1 - \theta_2),$$

где $[f(\theta) \sin \theta]_{\theta_1}^{\theta_2}$ — среднее значение величины $f(\theta) \sin \theta$ в интервале между θ_1 и θ_2 , а именно

$$[f(\theta) \sin \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Если ввести величину

$$\Phi(\theta) = \int f(\theta) \sin \theta d\theta,$$

выражаемую формулой

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ 4 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 6 \sin^3 \frac{\theta}{2} - \frac{7}{4} \sin^2 \theta - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \ln \left[\sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\},$$

то

$$h = \frac{a}{g} \sum \overline{\Delta g(\theta)} [\Phi(\theta_2) - \Phi(\theta_1)].$$

Зависимость $\Phi(\theta)$ показана на рис. 9.7.

В табл. 9.3 приведены значения разностей $[\Phi(\theta + 10^\circ) - \Phi(\theta)]$ при изменении θ через 10° . В последнем столбце таблицы даны изменения высоты геоида Δh в точке O , обусловленные соответствующим сферическим слоем шириной 10° , в котором среднее значение Δg принято равным 1 мГал. Например, если в слое, заключенном между углами $\theta = 30^\circ$ и $\theta = 40^\circ$, $\overline{\Delta g} = 1$ мГал, то вклад этого слоя в изменение

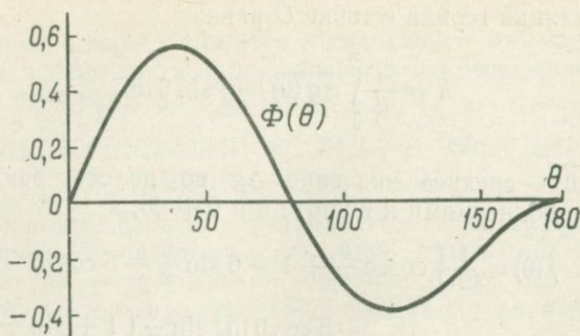


Рис. 9.7.

высоты геоида в начале координат составит $+24$ см. Пользуясь этой таблицей и усредненными по соответствующим сферическим слоям данными гравиметрической съемки, можно определить высоту геоида в начале координат h .

Таблица 9.3

θ	$\Phi(\theta)$	$\Phi(\theta+10^\circ) - \Phi(\theta)$	Δh , см
0	0,0000	0,2068	134
10	0,2068	0,1921	125
20	0,3989	0,1252	82
30	0,5241	0,0367	24
40	0,5608	-0,0530	-35
50	0,5078	-0,1272	-83
60	0,3806	-0,1753	-114
70	0,2053	-0,1915	-125
80	0,0138	-0,1764	-115
90	-0,1626	-0,1355	-88
100	-0,2981	-0,0733	-48
110	-0,3714	-0,0214	-14
120	-0,3928	0,0394	26
130	-0,3534	0,0789	52
140	-0,2745	0,0967	63
150	-0,1778	0,0908	59
160	-0,0870	0,0640	42
170	-0,0230	0,0230	15
180	0,0000		

При выводе формул Ламберта вместо угла θ можно воспользоваться переменной $\mu = \cos \theta$. Тогда для $\Phi(\mu)$ получа-

ется довольно красивая формула (Цубои, 1961):

$$\Phi = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2(n-1)} [P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)],$$

где $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра. Но, поскольку функция Φ выражена здесь с помощью бесконечного ряда, а не в так называемой замкнутой форме, это выражение имеет свои недостатки.

Для практического применения рассматриваемого метода надо знать распределение Δg по всей поверхности земного шара. На сегодняшний день это нереальное требование. Но если соответствующим образом подобрать сферические полосы (с учетом белых мест на гравиметрической карте), то можно все же составить общее представление об ундуляциях геоида. Относящиеся сюда очень трудоемкие расчеты выполнил В. Утила (1962).

При определении ундуляций геоида по гравиметрическим данным приходится прибегать к довольно рискованным аппроксимациям. Но в последние годы появилась совершенно новая возможность для вычисления ундуляций геоида — с помощью анализа движения искусственных спутников Земли. Гравитационное поле Земли влияет на полет спутника; поэтому, исследуя особенности его траектории, можно вычислить ундуляции геоида. Благодаря собственному вращению Земли спутник равномерно сканирует ее поверхность и нет опасности, что он пропустит какой-либо участок земной поверхности.

Большой вклад в определение формы геоида по анализу движения спутников внес Е. Кодзай (1969). Самым значительным из полученных им результатов является то, что геоид оказывается несимметричным относительно экватора в направлении север — юг. Математически это утверждение формулируется следующим образом. В разложении гравитационного потенциала в ряд по полиномам Лежандра

$$V = \frac{k^2 M}{r} \left[1 - \frac{J_2}{r^2} P_2(\cos \theta) - \frac{J_3}{r^3} P_3(\cos \theta) - \dots \right],$$

согласно полученному Е. Кодзай результату,

$$J_2 = + 1,08264 \cdot 10^{-3},$$

$$J_3 = - 2,54 \cdot 10^{-6},$$

.....

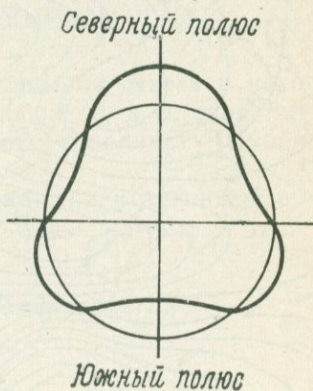


Рис. 9.8.

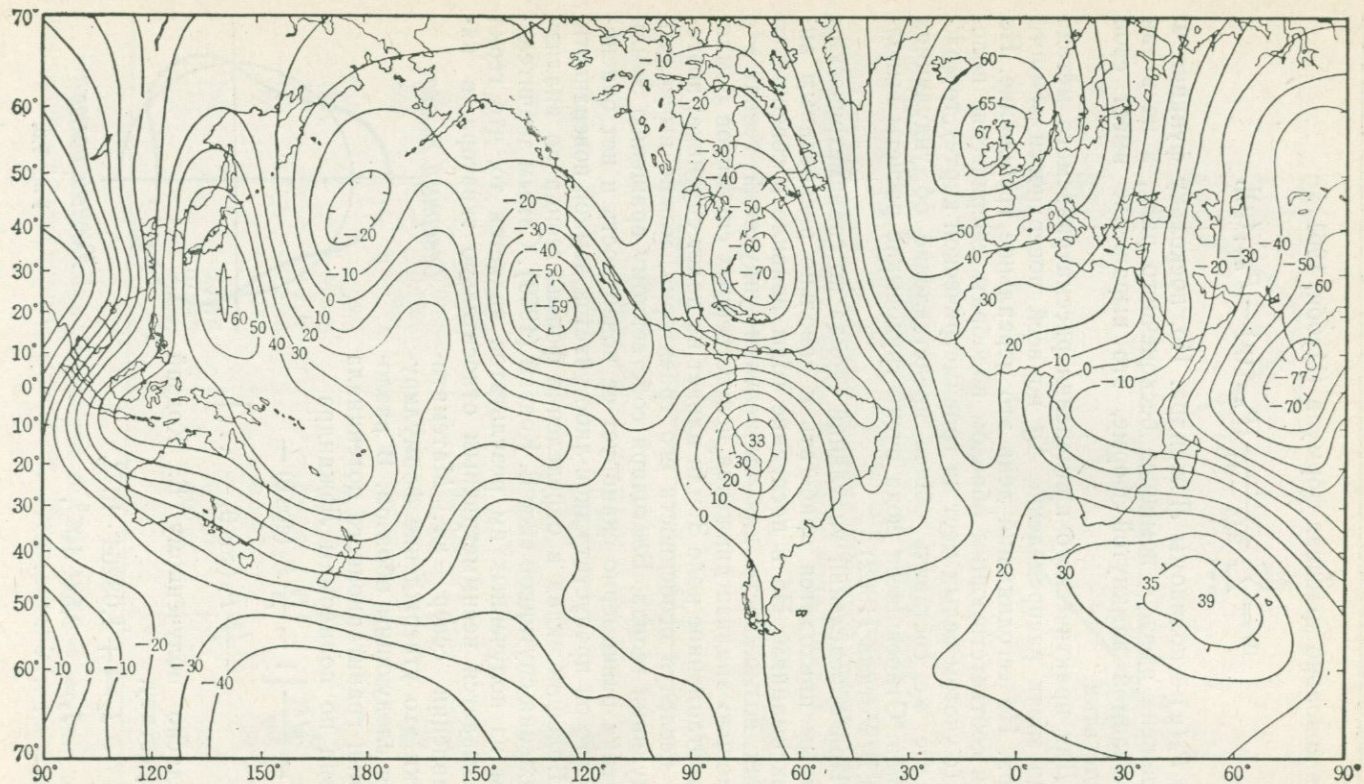


Рис. 9.9. Распределение высоты геоида (м), полученное из анализа движения искусственных спутников Земли (по У. Гийе и Р. Ньютоу).

Коэффициент J_3 при несимметричном относительно направления север — юг полиноме $P_3(\cos \theta)$ оказался отрицательным и не слишком малым. Поэтому в разложение потенциала V член $(-J_3/r^3)P_3(\cos \theta)$ входит со знаком плюс и зависит от θ так же, как $P_3(\cos \theta)$. На Северном полюсе (при $\theta = 0$) потенциал V за счет этого члена несколько увеличивается, а на Южном (при $\theta = \pi$) уменьшается. Таким образом, геоид на Северном полюсе несколько выше, чем на Южном. Амплитуда этих отклонений на Северном полюсе составляет $+13,5$ м, а на Южном $-24,1$ м. Итак, геоид несимметричен относительно плоскости экватора, и, несколько утрируя, можно сказать, что он напоминает показанную на рис. 9.8 грушу.

Кодзай рассчитал усредненную по долготе форму геоида, а У. Гийе и Р. Ньютон, основываясь на анализе движения искусственных спутников Земли, дали более подробный расчет ундуляций геоида. Их результаты приведены в виде карты на рис. 9.9. По порядку величины ундуляции составляют несколько десятков метров.

Карта ундуляций геоида h , построенная Утилой на основе гравиметрических данных, полученных на поверхности земли, в общих чертах очень напоминает карту рис. 9.9.

Методы с использованием сферических координат в принципе наиболее последовательны, но для локальных расчетов они чересчур грубы. При решении локальных задач разумно пренебрегать кривизной Земли и рассчитывать ундуляции геоида в цилиндрических координатах, как было описано выше.

§ 6. РАСЧЕТ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Остановимся на расчете угла отклонения отвеса в некоторой точке по гравиметрическим данным Δg в ее окрестности с использованием цилиндрических координат (Цубои, 1954).

В цилиндрической системе координат гравитационный потенциал равен

$$V(r, \theta, z) = \sum_n \int_0^{\infty} A_{nk}^C J_n(kr) \cos n\theta \exp(kz) dk + \\ + \sum_n \int_0^{\infty} A_{nk}^S J_n(kr) \sin n\theta \exp(kz) dk.$$

На поверхности земли

$$\begin{aligned} \Delta g(r, \theta, 0) = & \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = \int_0^{\infty} k A_{0k}^C J_0(kr) dk + \\ & + \int_0^{\infty} k A_{1k}^C J_1(kr) dk \cos \theta + \int_0^{\infty} k A_{2k}^S J_2(kr) dk \cos 2\theta + \dots + \\ & + \int_0^{\infty} k A_{1k}^S J_1(kr) dk \sin \theta + \int_0^{\infty} k A_{2k}^S J_2(kr) dk \sin 2\theta + \dots, \end{aligned}$$

что можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta g(r, \theta, 0) = & C_0^{(r)} + C_1(r) \cos \theta + C_2(r) \cos 2\theta + \dots + \\ & + S_1(r) \sin \theta + S_2(r) \sin 2\theta + \dots, \end{aligned}$$

где

$$C_1(r) = \int_0^{\infty} k A_{1k}^C J_1(kr) dk, \quad S_1(r) = \int_0^{\infty} k A_{1k}^S J_1(kr) dk.$$

Обозначая уклонение отвеса в направлении оси x (на восток) ξ , а в направлении оси y (на север) η , имеем

$$\xi = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{\theta=0, z=0}, \quad \eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{\theta=\pi/2, z=0}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{1}{g} \left[\int_0^{\infty} k A_{0k}^C J_0'(0) dk + \int_0^{\infty} k A_{1k}^C J_1'(0) dk + \int_0^{\infty} k A_{2k}^C J_2'(0) dk + \dots \right], \\ \eta = & \frac{1}{g} \left[\int_0^{\infty} k A_{1k}^S J_1'(0) dk + \int_0^{\infty} k A_{2k}^S J_2'(0) dk + \dots \right]. \end{aligned}$$

Поскольку, как уже отмечалось выше,

$$J_0'(0) = 0, \quad J_1'(0) = 1/2, \quad J_2'(0) = J_3'(0) = \dots = 0,$$

получаем

$$\xi = \frac{1}{2g} \int_0^{\infty} k A_{1k}^C dk, \quad \eta = \frac{1}{2g} \int_0^{\infty} k A_{1k}^S dk.$$

Но, согласно введенным нами обозначениям,

$$\int_0^{\infty} k A_{1k}^C J_1(kr) dk = C_1(r),$$

$$\int_0^{\infty} k A_{1k}^S J_1(kr) dk = S_1(r).$$

Пользуясь, кроме того, известным в теории бесселевых функций соотношением

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(kr)}{r} dr = 1,$$

можем написать

$$\int_0^{\infty} k A_{1k}^C dk = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k A_{1k}^C \frac{J_1(kr)}{r} dk dr = \int_0^{\infty} \frac{C_1(r)}{r} dr,$$

$$\int_0^{\infty} k A_{1k}^S dk = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k A_{1k}^S \frac{J_1(kr)}{r} dk dr = \int_0^{\infty} \frac{S_1(r)}{r} dr,$$

откуда вытекают следующие довольно красивые окончательные формулы:

$$\xi = \frac{1}{2g} \int_0^{\infty} \frac{C_1(r)}{r} dr, \quad \eta = \frac{1}{2g} \int_0^{\infty} \frac{S_1(r)}{r} dr.$$

Величины $C_1(r)$, $S_1(r)$ имеют смысл соответственно первого коэффициента при косинусах и первого коэффициента при синусах в разложении в ряд Фурье по θ гравиметрических данных Δg в круге радиуса r с центром в начале координат. Итак, процедуру отыскания x -й составляющей уклонения отвеса ξ и y -й составляющей уклонения отвеса η в точке O (выбранной нами за начало координат) можно подытожить следующим образом.

1) Описываем несколько окружностей с центром в начале координат.

2) В каждом из очерченных кругов разлагаем данные гравиметрической съемки Δg в ряд Фурье по θ и определяем первый коэффициент при косинусах $C_1(r)$ и первый коэффициент при синусах $S_1(r)$.

3) Делим $C_1(r)$ и $S_1(r)$ на r .

4) Величины $C_1(r)/r$ и $S_1(r)/r$ интегрируем по r от нуля до точки $r = a$, начиная с которой интегралы перестают изменяться.

5) Величины вычисленных таким образом интегралов делим на $2g$ и определяем ξ и η .

В выражения $C_1(r)/r$ и $S_1(r)/r$ радиус r входит в знаменатель, но это не приводит к расходимости интегралов в нуле. В самом деле, зависимость $C_1(r)$ и $S_1(r)$ от r определяется зависимостью от r функции $J_1(r)$, для которой

$$J_1(r) = \frac{1}{2} \left(r - \frac{r^3}{8} + \dots \right).$$

При малых r эти выражения пропорциональны r , и их можно записать в виде αr . Разбивая промежуток интегрирования от $r=0$ до $r=a$ на два интервала: от 0 до R , где подынтегральное выражение изменяется как αr , и от R до a , получим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2g} \int_0^a \frac{C_1(r)}{r} dr = \frac{1}{2g} \left[\int_0^R \frac{C_1(r)}{r} dr + \int_R^a \frac{C_1(r)}{r} dr \right] = \\ &= \frac{1}{2g} \left[\alpha R + \int_R^a \frac{C_1(r)}{r} dr \right] = \frac{1}{2g} \left[C_1(R) + \int_R^a \frac{C_1(r)}{r} dr \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\eta = \frac{1}{2g} \left[S_1(R) + \int_R^a \frac{S_1(r)}{r} dr \right].$$

§ 7. РАСЧЕТ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Выше мы познакомились с очень простым способом определения уклонения отвеса по данным гравиметрической съемки Δg с помощью цилиндрических координат. До разработки этого способа приходилось пользоваться весьма трудоемкой процедурой расчета уклонения отвеса в сферических координатах. Применяли, например, метод, предложенный Венинг-Мейнесом (1928), который установил, что широтная ξ и долготная η составляющие уклонения отвеса связаны с данными гравиметрической съемки Δg формулами

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta \cos \lambda d\theta, \\ \eta &= \frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta \sin \lambda d\theta, \end{aligned}$$

в которых

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta = \frac{1}{2} \left[-\operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} - 3 - 8 \sin \frac{\theta}{2} + 32 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 12 \sin^3 \frac{\theta}{2} - \right. \\ \left. - 32 \sin^4 \frac{\theta}{2} + 3 \sin^2 \theta \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Не останавливаясь на выводе этих довольно громоздких формул, отметим, что для их практического применения необходимо гравиметрические данные Δg , относящиеся к элементу поверхности, который расположен на угловом расстоянии θ от начала координат в направлении λ , проинтегрировать по всей поверхности сферы с весом $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta \cos \lambda$ или $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \times \times \sin \theta \sin \lambda$. Численные значения $\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta$ даны в виде таблицы А. Соллинсом (1947). Но, поскольку гравиметрические данные Δg известны не для всей поверхности земли, непосредственное практическое применение этого метода невозможно.

Тем не менее сотрудник Национального управления Береговой и геодезической службы США Д. Райс (1949) применил на практике описанный метод определения уклонения отвеса. На территории США он выбрал 16 точек и, пользуясь гравиметрическими данными в их окрестностях, выполнил численное интегрирование по указанным выше формулам. Поскольку данных по всей поверхности земли у него не имелось, Райс, постепенно увеличивая интервал изменения θ , исследовал зависимость от θ компонент уклонения отвеса ξ и η . Например, на рис. 9.10 кружками нанесены результаты, полученные им в окрестности пункта Диркс. Видно, что в этом случае Райс прекратил численное интегрирование на расстоянии, меньшем 400 км (гравиметрические данные для больших расстояний у него отсутствовали). Из рисунка следует, что величины ξ и η в исследованной Райсом окрестности пункта Диркс оставались практически постоянными. Отсюда можно сделать вывод, что данные вне изученной Райсом области не влияют на результат и не будет большой ошибки, если численное интегрирование проводить до указанного Райсом верхнего предела 400 км. На этих расстояниях еще можно пренебрегать кривизной Земли. В самом деле, расстояние между касательной к Земле плоскостью и поверхностью земли в точке, удаленной на 400 км от места касания, не превышает 13 км. Именно такие соображения лежали в основе предложенного автором этой книги простого метода нахождения уклонения отвеса путем разложения

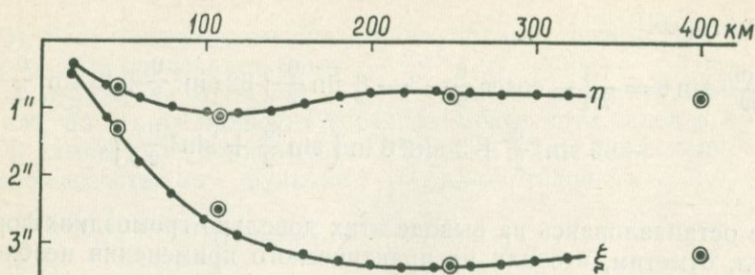


Рис. 9.10. Уклонение отвеса в окрестности пункта Диркс.

гравиметрических данных в ряд Фурье — Бесселя с использованием цилиндрических координат.

Кривые на рис. 9.10 показывают зависимость от расстояния компонент уклонения отвеса, определенных с помощью разложения в ряд Фурье — Бесселя гравиметрических данных в окрестности пункта Диркс, использованных Райсом. Видно, что в данном случае интегрирование можно прекратить на расстоянии от пункта Диркс, равном 200 км. Результат, полученный Райсом путем крайне трудоемких вычислений в сферических координатах, хорошо согласуется с результатом очень простых вычислений автора данной книги, выполненных в цилиндрических координатах.

§ 8. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА В СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В рассмотренном выше примере результат, полученный методом Венинг-Мейнеса в сферических координатах, хорошо согласуется с результатом вычислений, выполненных автором настоящей книги в цилиндрических координатах. Это совпадение не случайно, в чем можно убедиться с помощью следующего доказательства. Разложим величину $df(\theta)/d\theta$, входящую в формулу Венинг-Мейнеса, в ряд Лорана в окрестности $\theta = 0$:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{\theta^2} - \frac{3}{2\theta} + \dots,$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} \sin \theta = -\frac{1}{\theta} - \frac{3}{2} + \dots$$

Ограничиваясь первым членом правой части последнего выражения, получим

$$\xi = \frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \frac{1}{\theta} \cos \lambda d\theta,$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \frac{1}{\theta} \sin \lambda d\theta.$$

Пользуясь обозначениями, использованными при разложении в ряд Фурье — Бесселя,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \cos \lambda d\lambda = C_1(\theta),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda) \sin \lambda d\lambda = S_1(\theta),$$

выражения для ξ и η представим в виде

$$\xi = \frac{1}{2g} \int_0^{\pi} \frac{C_1(\theta)}{\theta} d\theta, \quad \eta = \frac{1}{2g} \int_0^{\pi} \frac{S_1(\theta)}{\theta} d\theta.$$

Если в написанных интегралах верхний предел интегрирования принять равным не π , а некоторому $\theta < \pi$, то

$$\xi = \frac{1}{2g} \int_0^{\theta} \frac{C_1(\theta)}{\theta} d\theta, \quad \eta = \frac{1}{2g} \int_0^{\theta} \frac{S_1(\theta)}{\theta} d\theta.$$

Вводя переменную $r = a\theta$ (a — радиус Земли), приходим к формулам

$$\xi = \frac{1}{2g} \int_0^r \frac{C_1(r)}{r} dr, \quad \eta = \frac{1}{2g} \int_0^r \frac{S_1(r)}{r} dr,$$

совпадающим с теми, которые получаются путем непосредственного вывода в цилиндрических координатах (Дубои, Хаяцу, 1954).

ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. СМЫСЛ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА

Производная гравитационного потенциала V по z (ось z направлена вниз) дает силу тяжести g , а производные по x и y (оси x и y лежат в горизонтальной плоскости) равны составляющим X и Y силы тяжести вдоль осей x и y . Частные от деления X и Y на g суть компоненты уклонения отвеса ξ и η :

$$g = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \xi = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Все это — первые производные потенциала V . Дифференцируя еще раз, находим следующие шесть вторых производных:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z},$$

$$\text{в) } \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Три вторые производные, объединенные в группу «а», связаны с кривизной геоида; две вторые производные, объединенные в группу «б», суть компоненты горизонтального градиента g , показывающие, как изменяется g в направлениях x и y ; компонента «в» — вертикальный градиент g , характеризующий изменение g в вертикальном направлении.

Пять вторых производных, включенных в группы «а» и «б», называют также вариациями силы тяжести по соответствующим координатам. В дальнейшем мы увидим, что они доступны непосредственному измерению. В принципе их можно было бы вычислить даже без специальных измерений, если имеются достаточно подробные данные о распределении g . Но сама возможность прямого измерения производных потенциала силы тяжести представляет несомненный интерес.

Рассмотрим одномерное распределение

$$g(x) = \frac{\partial V}{\partial z} = \sum B_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D} x}{\sin \frac{2\pi m}{D} x},$$

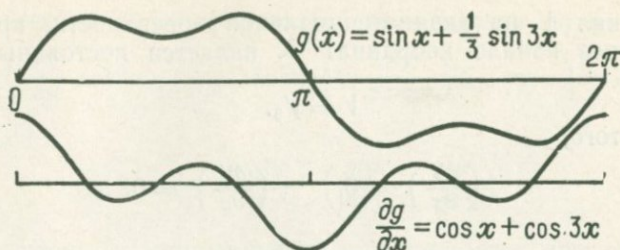


Рис. 10.1.

где D — отрезок на местности, играющий роль периода в ряде Фурье. Дифференцируя его по x , находим горизонтальный градиент g :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = \sum \mp \frac{2\pi m}{D} B_m \frac{\sin \frac{2\pi m}{D} x}{\cos \frac{2\pi m}{D} x}.$$

Поскольку коэффициенты полученной формулы зависят от m , ясно, что вторые производные потенциала особенно удобны для выявления мелкомасштабных аномалий силы тяжести или, если можно так выразиться, вариаций g с небольшим характерным размером аномалии, связанных со структурами, залегающими близко к поверхности. К таким структурам часто приурочены месторождения полезных ископаемых, поэтому измерение вторых производных гравитационного потенциала — один из методов разведки природных ресурсов.

На рис. 10.1 приведена кривая $\{\sin x + (\sin 3x)/3\}$ и получаемая из нее дифференцированием по x кривая $(\cos x + \cos 3x)$. Из рисунка видно, что в результате дифференцирования отчетливо выявляется компонента распределения с более короткой длиной волны.

§ 2. КРИВИЗНА ГЕОИДА И ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ГРАДИЕНТ g

Направим ось z вниз вдоль линии отвеса, а оси x и y — перпендикулярно оси z и разложим потенциал $V(x, y, z)$ в ряд Тейлора в окрестности начала координат O (рис. 10.2):

$$\begin{aligned} V(x, y, z) = & V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 z + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 z^2 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right)_0 yz + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right)_0 zx + \dots \end{aligned}$$

Потенциал V на эквипотенциальной поверхности, проходящей через начало координат O , является постоянным, поэтому

$$V = V_0.$$

Кроме того,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

так как ось z направлена вниз вдоль линии отвеса. Учтем также, что эквипотенциальная поверхность мало отклоняется от плоскости:

$$z \ll x, \quad z \ll y.$$

При этих условиях уравнение эквипотенциальной поверхности примет вид

$$gz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} y^2 \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} xy = 0.$$

Линия пересечения эквипотенциальной поверхности с плоскостью, проходящей через ось z под углом α к оси x , приближенно является дугой окружности, радиус которой (радиус кривизны геоида)

$$R = g \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \sin^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha \right)^{-1}$$

зависит от угла α . Значение α , при котором знаменатель последней формулы максимален (минимален), а радиус кривизны R минимален (максимален), определяется усло-

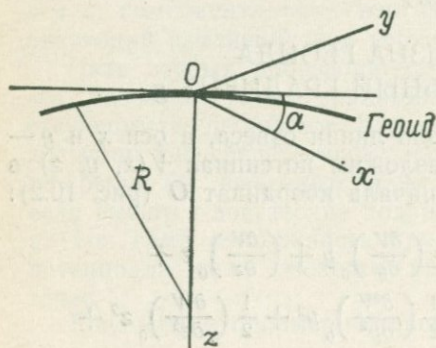


Рис. 10.2.

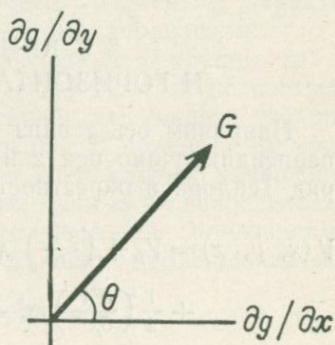


Рис. 10.3.

нием равенства нулю производной знаменателя по α :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \sin^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha \right) = 0,$$

а именно

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} / \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right).$$

Максимальная (и минимальная) кривизна (так называемые главные значения кривизны) определяются формулой

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{2g} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sec 2\alpha \right],$$

а их разность

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{g} \sqrt{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2}.$$

Изменение силы тяжести в горизонтальном направлении характеризуется x -й и y -й компонентами градиента g :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}.$$

Максимальное значение G горизонтального градиента силы тяжести и направление θ , в котором этот градиент максимален (рис. 10.3), определяются формулами

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right)^2},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\partial g}{\partial y} / \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} / \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}.$$

Таким образом, вторые производные гравитационного потенциала (называемые вариациями силы тяжести) определяют разность между максимальной и минимальной кривизной геоида, направления, в которых кривизна принимает главные значения, а также величину и направление горизонтального градиента силы тяжести.

Величины $\partial^2 V / \partial x^2$, $\partial^2 V / \partial x \partial y$, $\partial^2 V / \partial y^2$ называют параметрами кривизны, а $\partial^2 V / \partial x \partial z$, $\partial^2 V / \partial y \partial z$ — градиентными членами.

§ 3. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВАРИОМЕТРЫ

Выше мы выяснили физический смысл вторых производных гравитационного потенциала. Для их измерения пользуются изобретенным Р. Этвешем (1848—1919) гравитационным вариометром (крутильными весами).

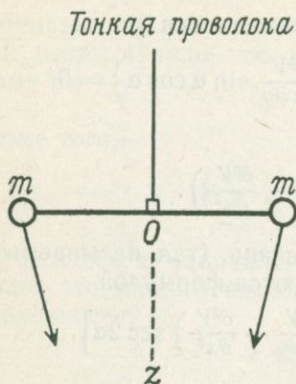


Рис. 10.4.

Выше мы уже говорили об эффекте Этвеша, состоящем в том, что движение тела в широтном направлении вдоль поверхности земли изменяет действующую на него силу тяжести. В данном параграфе мы рассмотрим изобретенный Этвешем прибор — гравитационный вариометр.

Принципиальная схема устройства вариометра проста. Его основной элемент — показанный на рис. 10.4 стержень с грузиками на концах, подвешенный горизонтально на тонкой проволочке. За ось z мы выбираем направление силы

тяжести в точке O . С принятой в данном параграфе точностью сила тяжести, действующая на грузики, не параллельна оси z — она имеет составляющую g_x вдоль оси x и g_y вдоль оси y . Поэтому на стержень действует момент сил

$$M = \int (g_y x - g_x y) dm,$$

поворачивающий его в горизонтальной плоскости. Подставляя сюда разложения в ряд Тейлора

$$g_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} y = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} y,$$

$$g_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} y = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} y,$$

находим

$$M = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \int xy dm + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \int (x^2 - y^2) dm.$$

Обозначая через ξ координату вдоль оси стержня, η — координату в перпендикулярном к ξ направлении и α — угол между осями ξ и x (рис. 10.5), напишем

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha,$$

$$y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,$$

откуда

$$\int xy dm = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \cos 2\alpha \int \xi \eta dm,$$

$$\int (x^2 - y^2) dm = \cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm - 2 \sin 2\alpha \int \xi \eta dm.$$

Таким образом,

$$M = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \cos 2\alpha \int \xi \eta dm \right] + \\ + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \left[\cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm - 2 \sin 2\alpha \int \xi \eta dm \right].$$

Учитывая, что стержень тонкий (η мало), имеем

$$\int (\xi^2 - \eta^2) dm \approx \int (\xi^2 + \eta^2) dm = I$$

(I — момент инерции стержня относительно оси z), а из соображений симметрии

$$\int \xi \eta dm = 0.$$

Таким образом,

$$M = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + I \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha.$$

Под действием момента M стержень поворачивается, а проволочка, на которой он висит, закручивается. Стержень остановится, когда $M = \tau\theta$, где $\tau\theta$ — момент упругих сил, действующих на стержень со стороны проволочки (θ — угол поворота стержня), т. е. при

$$\tau\theta = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + I \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha,$$

где τ , I — параметры прибора. В написанной формуле неизвестны три величины: $(\partial^2 V / \partial y^2 - \partial^2 V / \partial x^2)$, $\partial^2 V / \partial x \partial y$ и θ . Здесь θ — угол поворота относительно положения, в котором напряжение кручения в проволочке равно нулю, однако мы не знаем, в каком положении прибора $\theta = 0$. Поэтому вместо θ в предыдущую формулу нужно ввести разность $\theta - \theta_0$

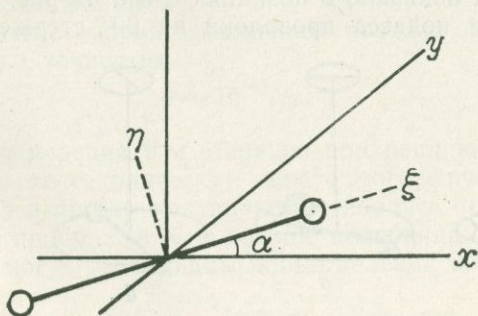


Рис. 10.5.

и написать

$$\tau(\theta - \theta_0) = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + I \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha.$$

Теперь неизвестными, подлежащими определению, являются $(\partial^2 V / \partial y^2 - \partial^2 V / \partial x^2)$, $\partial^2 V / \partial x \partial y$ и θ_0 . Поворачивая прибор как целое, переменной α можно придать три значения: α_1 , α_2 , α_3 , которым будут соответствовать три измеренных угла закручивания проволоки: θ_1 , θ_2 , θ_3 . Придавая α значения 0, 120 и 240°, запишем три варианта предыдущей формулы:

$$\tau(\theta_1 - \theta_0) = I \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

$$\tau(\theta_2 - \theta_0) = -\frac{\sqrt{3}}{4} I \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) - \frac{I}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

$$\tau(\theta_3 - \theta_0) = \frac{\sqrt{3}}{4} I \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) - \frac{I}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

или

$$\tau(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\sqrt{3}}{4} I \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \frac{3}{2} I \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

$$\tau(\theta_1 - \theta_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4} I \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \frac{3}{2} I \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{2\tau}{\sqrt{3}I} \{(\theta_1 - \theta_2) - (\theta_1 - \theta_3)\},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\tau}{3I} \{(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_1 - \theta_3)\}.$$

При повороте прибора как целого верхняя точка подвеса проволоки поворачивается на тот же угол, но стержень не обязательно в точности повторяет поворот прибора. Это можно понять из следующего простого рассуждения. Пусть сначала, как показано в позициях *a* и *b* на рис. 10.6, при повороте точки подвеса проволоки на 90° стержень тоже по-

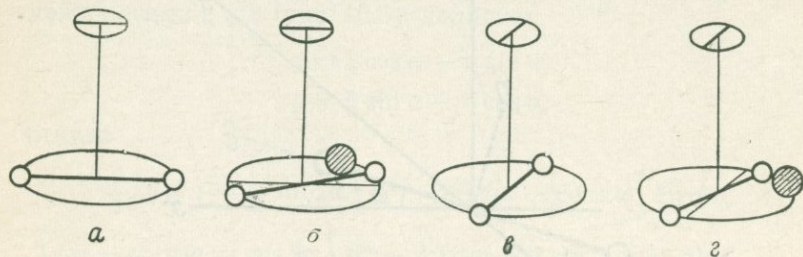


Рис. 10.6.

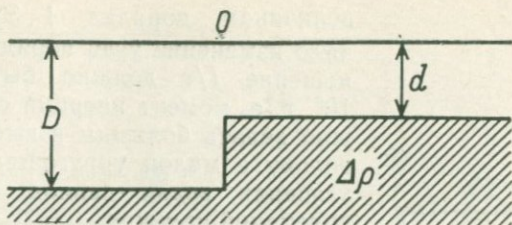


Рис. 10.7.

ворачивается точно на 90° . Поднесем теперь к стержню сбоку большую массу, под действием силы притяжения которой стержень немного поворачивается, а проволока слегка закручивается. Тогда, как ясно из позиций *б* и *г* рис. 10.6, при повороте точки подвеса проволоки на 90° стержень не сможет повернуться точно на 90° . Таким образом, по разности между углом поворота прибора как целого и углом поворота стержня можно определить $(\partial^2 V / \partial y^2 - \partial^2 V / \partial x^2)$ и $\partial^2 V / \partial x \partial y$ в окрестности точки измерения.

Каков порядок величины вторых производных гравитационного потенциала? В качестве примера рассмотрим структуру, показанную на рис. 10.7. В точке *O* над обрывом

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = 2k^2 \Delta\rho \ln \frac{D}{d}.$$

Примем $\Delta\rho = 0,5$, $D/d = 2$. Тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 4,7 \cdot 10^{-8} \text{ СГС.}$$

И в других случаях вариация силы тяжести имеет тот же порядок величины: в единицах 10^{-9} она составляет несколько десятков или сотен. Единица 10^{-9} называется этвешем в честь ученого, заложившего основы рассматриваемого здесь направления исследований *).

Чтобы зарегистрировать величины порядка 10^{-9} , угол θ надо измерять с точностью

$$\theta \sim 10^{-9} I / \tau.$$

Обычно для измерения θ к стержню прикрепляют зеркальце и пользуются телескопическим или фотографическим методом. Телескоп и шкалу монтируют на корпусе прибора. После поворота прибора и успокоения колебаний в телескоп каждый раз могут быть видны новые деления шкалы. Чтобы

*) 1 Этвеш = 1 мГал/10 км = 10^{-9} с^{-2} . — Прим. ред.

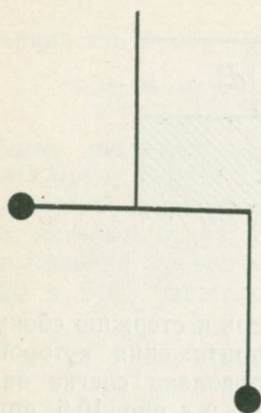


Рис. 10.8.

величинам порядка 1 Этвеш от начало изменение угла порядка 10^{-4} , отношение I/τ должно быть порядка 10^5 , т. е. момент инерции стержня нужно делать большим и выбирать проволоку с малой упругостью. В таких условиях велик период крутильных колебаний стержня:

$$T = 2\pi \sqrt{I/\tau} \approx 2000 \text{ с} \approx 30 \text{ мин};$$

иными словами, рассматриваемый прибор — маятник с чрезвычайно большим периодом крутильных колебаний, легко откликающийся на слабые крутильные возмущения. Поэтому атмосфера вокруг стержня должна быть очень спокойной, в связи с чем корпус

прибора тщательно герметизируют и поддерживают его при постоянной температуре. Если вспомнить, что отсчеты нужно делать при трех ориентациях корпуса, то ясно, что для проведения измерений требуется много времени и терпения. Обычно на взятие отсчета при трех ориентациях прибора тратят около 5 ч.

Если на проволочку вместо горизонтального стержня подвесить коромысло, показанное на рис. 10.8, то условие равновесия примет вид

$$\begin{aligned} \theta = a \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2a \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha - \\ - b \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \sin \alpha + b \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \cos \alpha, \end{aligned}$$

где a, b — параметры прибора. В этом условии пять неизвестных (включая θ_0 — значение θ при отсутствии закручивания), поэтому измерения нужно проводить при пяти ориентациях, что требует большого количества времени. Но если добавить маятник, ориентированный противоположным образом (рис. 10.9), то число необходимых ориентаций прибора сокращается до трех и время измерений уменьшается. Конструкция маятника, показанная на рис. 10.10, позволяет уменьшить размеры установки.

Упомянем еще одно устройство, схема которого приведена на рис. 10.11. Условие равновесия в данном случае имеет вид

$$\theta = b \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \cos \alpha - b \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \sin \alpha,$$

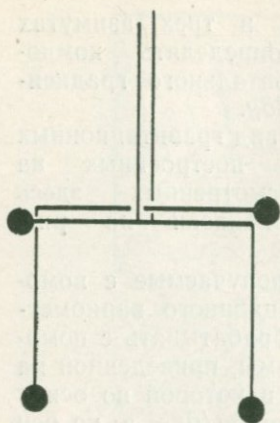


Рис. 10.9.

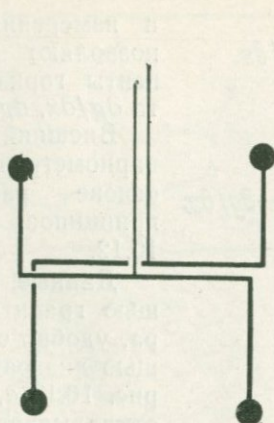


Рис. 10.10.

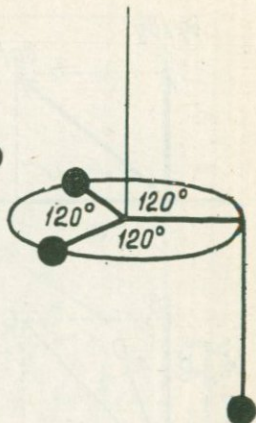


Рис. 10.11.

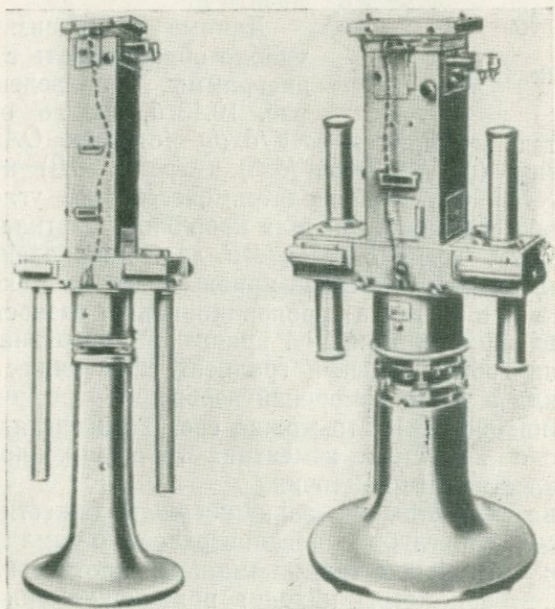


Рис. 10.12. Гравитационные вариометры.

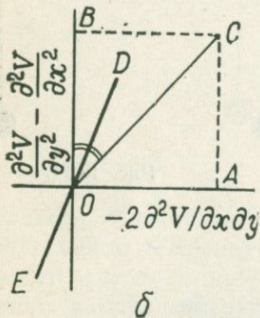
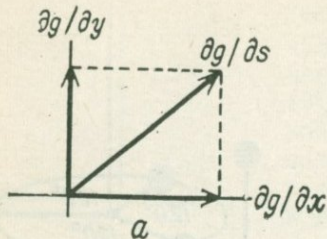


Рис. 10.13.

и измерения в трех азимутах позволяют определять компоненты горизонтального градиента $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$.

Внешний вид гравитационных вариометров, построенных на основе рассмотренных здесь принципов, показан на рис. 10.12.

Данные, получаемые с помощью гравитационного вариометра, удобно обрабатывать с помощью диаграммы, приведенной на рис. 10.13, а, в которой по оси x откладывается $\partial g/\partial x$, а по оси y — величина $\partial g/\partial y$. Их векторная сумма позволяет определять величину и направление максимального горизонтального градиента g .

Данные о кривизне геоида удобно обрабатывать с помощью диаграммы, приведенной на рис. 10.13, б, где по оси x от-

кладывается величина $-2\partial^2 V/\partial x\partial y$ (отрезок OA), по оси y — величина $(\partial^2 V/\partial y^2 - \partial^2 V/\partial x^2)$ (отрезок OB) и строится диагональ OC . Затем проводится биссектриса угла BOC и на ней в обе стороны от начала координат O откладываются отрезки $OC/2$. Тогда отрезок DE даст направление вертикальной плоскости, в которой кривизна геоида максимальна, а длина этого отрезка пропорциональна разности между максимальной и минимальной кривизной, т. е. равна $g(1/R_1 - 1/R_2)$. Если горизонтальный градиент силы тяжести и кривизну геоида в точке измерений изобразить графически, как показано на рис. 10.14, то можно составить наглядное представление о характере изменения гравитационного потенциала в окрестности этой точки.

Мы уже отмечали, что вариации силы тяжести особенно заметны, когда неглубоко под поверхностью земли залегают небольшие тела аномальной плотности. Поэтому вариометры находят применение при изучении локальных разноплотностных структур. Пионером применения вариометров в Японии был М. Мацуяма (1884—1958), который в середине 20-х годов получил геологически значимые результаты при измерениях вариаций силы



Рис. 10.14.

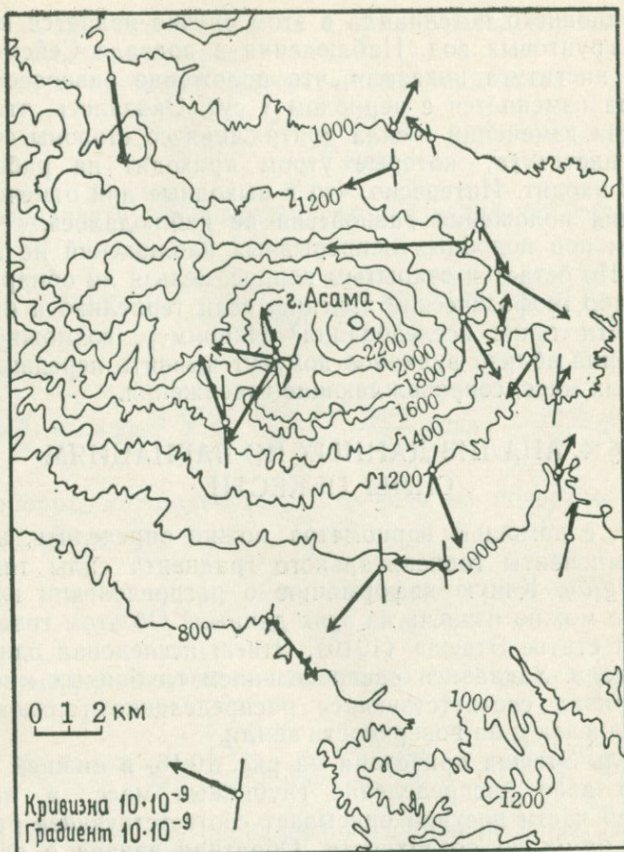


Рис. 10.15. Распределение вариаций силы тяжести в окрестности вулкана Асама (по Т. Мидзуками)

тяжести в окрестностях вулкана Сакурадзима, котловины Сува, рифов Санго.

На рис. 10.15 представлены результаты измерений, выполненных Т. Мидзуками (1937) в окрестностях вулкана Асама.

Автор данной книги в 1929 г. изготовил вариометр из плавленного кварца, позволяющий непрерывно наблюдать за положением покоя горизонтального стержня, которое должно нарушаться, если в пункте наблюдения величины $(\partial^2 V / \partial y^2 - \partial^2 V / \partial x^2)$ и $\partial^2 V / \partial x \partial y$ изменяются с течением времени. Наблюдения показали, что такие изменения действительно происходят, например, во время проливных дождей. По-видимому, причиной изменений в распределении

гравитационного потенциала в этом случае является подъем уровня грунтовых вод. Наблюдения в подвале Сейсмологического института показали, что положение равновесия вариометра изменяется с периодом 1 сут. Оказалось, что причина этих изменений — сила притяжения со стороны сотрудников института, которые утром приходят на работу, а вечером уходят. Интересно, что в выходные дни отмеченного изменения положения равновесия не наблюдалось.

С тех пор подобных непрерывных наблюдений не проводилось. Но остается открытым вопрос, нельзя ли обнаружить какие-либо геофизические явления, если терпеливо и настойчиво вести такие исследования? Например, возможно, что наблюдения вблизи вулканов помогут выявить передвижения глубинных масс, сопровождающие извержения.

§ 4. АНАЛИЗ ДАННЫХ ПО ВАРИАЦИЯМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Итак, с помощью вариометра можно определить, например, компоненты горизонтального градиента силы тяжести dg/dx , dg/dy . Какую информацию о распределении глубинных масс можно извлечь из этих данных? Об этом говорится в первой статье Этвеша (1910). Этвеш исследовал одномерную модель. Задаваясь распределением глубинных масс, он рассматривал соответствующее распределение горизонтального градиента g на поверхности земли.

Модель Этвеша приведена на рис. 10.16, в нижней части которого дано распределение глубинных масс, а кривая в верхней части рисунка описывает соответствующее распределение dg/dx по поверхности. Обратная задача о выявлении глубинных масс по заданной кривой dg/dx немного

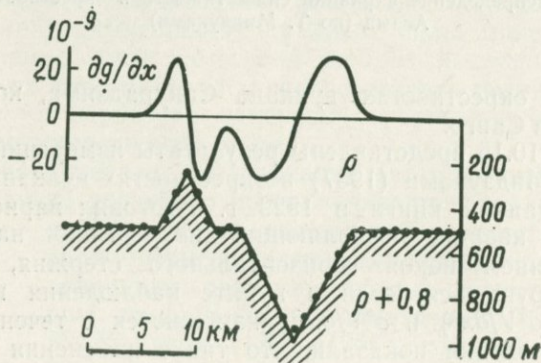


Рис. 10.16.

сложнее. Мы рассмотрим ее прямым методом, с помощью разложения в ряд Фурье.

Пусть на глубине d залегает аномальная масса

$$M(x) = \sum C_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D} x}{\sin \frac{2\pi m}{D} x}.$$

На поверхности ей соответствует распределение силы тяжести

$$g(x) = 2\pi k^2 \sum C_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D} x}{\sin \frac{2\pi m}{D} x} \exp\left(-\frac{2\pi m}{D} d\right),$$

откуда

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \mp 2\pi k^2 \sum C_m \frac{2\pi m}{D} \frac{\sin \frac{2\pi m}{D} x}{\cos \frac{2\pi m}{D} x} \exp\left(-\frac{2\pi m}{D} d\right).$$

И наоборот, можно сказать, что если на поверхности дано распределение $\frac{\partial g}{\partial x}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \sum G_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D} x}{\sin \frac{2\pi m}{D} x},$$

то ему может соответствовать расположенная на глубине d аномальная масса

$$M(x) = \mp \frac{1}{2\pi k^2} \sum G_m \frac{D}{2\pi m} \frac{\sin \frac{2\pi m}{D} x}{\cos \frac{2\pi m}{D} x} \exp\left(\frac{2\pi m}{D} d\right).$$

Таким образом, для определения глубинной массы $2\pi k^2 M(x)$ распределение $\partial g/\partial x$ нужно разложить в ряд Фурье, умножить его коэффициенты на $D/2\pi m$ и на $\exp\left(\frac{2\pi m}{D} d\right)$, заменить синусы на косинусы и обратно и полученный ряд просуммировать. Разумеется, при этом приходится задаваться гипотезой о том, на какой глубине d залегает аномальная масса. Применим описанный метод к случаю, рассмотренному в статье Этвеша. Этвеш задавался распределением глубинной массы и вычислял $\partial g/\partial x$; мы же, наоборот, вычислим распределение глубинной массы исходя из найденного им распределения $\partial g/\partial x$. Расчет проведем, как описано выше, т. е. разложим $\partial g/\partial x$ в ряд Фурье, умножим его коэффициенты на соответствующие числа, заменим синусы косинусами, а косинусы синусами и просуммируем. Нам нужно задать глубину залегания глубинной массы; примем $d = 551$ м. Для определения рельефа границы между слоями пород разной плотности распределение $M(x)$ нужно

разделить на $(\rho' - \rho)$, где ρ' и ρ — плотности слоев. Мы примем, что

$$\rho' - \rho = 0,8.$$

Результат описанного расчета показан на рис. 10.16 черными точками. Видно, что найденное нами распределение массы хорошо совпадает с кривой, из которой исходил Этвеш в своем расчете.

В прошлом гравитационные вариометры широко использовали для обнаружения залегающих вблизи поверхности небольших по размерам аномальных тел. Но в последние 30 лет большое развитие получили статические гравиметры, с помощью которых легко и с высокой точностью можно выполнять детальные измерения силы тяжести. Например, при точности измерения 0,01 мГал, сравнивая значения силы тяжести в точках, удаленных друг от друга на 100 м, можно определить горизонтальный градиент g в 1 этвеш. Таким образом, по-видимому, можно сказать, что эпоха применения вариометров уже окончилась.

§ 5. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ГРАДИЕНТ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Как изменяется сила тяжести в вертикальном направлении? Если Землю считать шаром, то

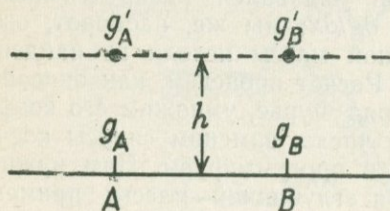
$$g = \frac{k^2 M}{(R + z)^2},$$

где M — масса Земли, R — ее радиус. Отсюда

$$\frac{\partial g}{\partial z} \approx - \frac{2k^2 M}{R^3} \approx - \frac{2g}{R} = - 3,086 \cdot 10^{-9},$$

т. е. вертикальный градиент силы тяжести составляет приблизительно 1 мГал на 3 м. Это усредненное значение вертикального градиента.

Но вертикальный градиент не всегда совпадает со своим усредненным значением. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две точки A и B на поверхности, в которых



$$g_A > g_B.$$

Как следует из рис. 10.17, при подъеме на высоту h разность значений g уменьшается, т. е.

$$g_A - g_B > g'_A - g'_B,$$

откуда

$$g_A - g'_A > g_B - g'_B$$

Рис. 10.17.

и

$$\frac{g_A - g'_A}{h} > \frac{g_B - g'_B}{h}.$$

Это значит, что вертикальный градиент g тем больше, чем больше g .

В одномерном случае

$$V = \sum A_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D}}{\sin \frac{2\pi m}{D}} x \exp\left(\frac{2\pi m}{D} z\right).$$

На поверхности (при $z = -d$)

$$\begin{aligned} \Delta g &= \frac{\partial V}{\partial z} = \sum A_m \frac{2\pi m}{D} \frac{\cos \frac{2\pi m}{D}}{\sin \frac{2\pi m}{D}} x \exp\left(-\frac{2\pi m}{D} d\right) = \\ &= \sum B_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D}}{\sin \frac{2\pi m}{D}} x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial g}{\partial z} &= \sum \left(\frac{2\pi m}{D}\right)^2 A_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D}}{\sin \frac{2\pi m}{D}} x \exp\left(-\frac{2\pi m}{D} d\right) = \\ &= \sum \frac{2\pi m}{D} B_m \frac{\cos \frac{2\pi m}{D}}{\sin \frac{2\pi m}{D}} x, \end{aligned}$$

откуда видно, что коэффициенты ряда Фурье функции $\Delta(\partial g/\partial z)$ в $2\pi m/D$ раз больше соответствующих коэффициентов Фурье функции Δg . Поскольку $\lambda_m = D/2\pi m$, отсюда следует, что $\Delta(\partial g/\partial z)$ сильнее зависит от коротковолновых компонент. В этом отношении вертикальный градиент g напоминает другие вариации силы тяжести.

Пользуясь вместо ряда Фурье разложением в ряд Фурье — Бесселя, можно вычислить $\Delta(\partial g/\partial z)$ по распределению Δg (Цубон, 1955). Результат представляется простой формулой

$$\Delta \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\overline{\partial g(0)} - \overline{\Delta g(R)}}{R} + \int_R^\infty \frac{\overline{\Delta g(0)} - \overline{\Delta g(r)}}{r^2} dr,$$

где $\overline{\Delta g(r)}$ — среднее значение Δg на окружности радиуса r с центром в начале координат, а R — некоторое значение радиуса в области вблизи начала координат, в которой можно считать, что

$$\overline{\Delta g(0)} - \overline{\Delta g(r)} = ar^2.$$

Для вычислений по этой формуле надо: 1) провести систему концентрических окружностей с центром в начале координат и в каждой окружности определить среднее значение $\Delta g(r)$;

2) составить разность этого среднего значения и $\overline{\Delta g(0)}$, разделить ее на r^2 и проинтегрировать по r ; 3) к результату интегрирования прибавить постоянное число. В итоге получится значение $\Delta(\partial g/\partial z)$ в начале координат.

К настоящему времени накоплено довольно много данных о значениях $\partial g/\partial z$, полученных измерением с помощью гравиметра разности значений g у основания и в верхней части высотных зданий и башен и делением этой разности на высоту объекта h . Некоторые результаты приведены в табл. 10.1. Измеренные значения на несколько процентов отличаются от среднего значения вертикального градиента 3,086 и довольно сильно различаются в зависимости от места наблюдения.

Таблица 10.1

Значения $10^{-9} \partial g/\partial z$ по данным К. Тадзими и др. (1971)

Лекционный зал Ясуда Токийского университета	3,047
Здание отеля в Кэйо (Токио)	3,049
Антенна Кавагути	3,066
Высотное здание в Касумигасэки (Токио)	3,021
Управление пожарной охраны в Сакё (Киото)	2,920
Универмаг Омару (Киото)	2,740
Жилое высотное здание в Дайити (Осака)	2,800

Е. Томода и К. Тадзима (1958) установили, что измеренное значение $\Delta(\partial g/\partial z)$ обычно гораздо больше величины, рассчитанной с использованием данных по Δg в окрестности измерительной точки. По-видимому, это связано с тем, что на измеренное значение $\Delta(\partial g/\partial z)$ непосредственно влияет сила притяжения со стороны рельефа, окружающего пункт наблюдения, которая не включается в данные по распределению Δg .

§ 6. ЗАМЕЧАНИЕ О ПОПРАВКЕ ЗА СВОБОДНЫЙ ВОЗДУХ

Если величина $\Delta(\partial g/\partial z)$ достаточно велика, возникает вопрос, законно ли пользоваться обычным выражением $3,086 \cdot 10^{-9} h$ для поправки за свободный воздух? Например, при отклонении от значения 3,086 на 10% в результате подъема на гору высотой 1000 м расхождение между поправками составит 30 мГал. Обычно при вычислении поправки за свободный воздух поступают, как показано на рис. 10.18: через пункт наблюдения G проводят прямую $3,086 \cdot 10^{-9} h$ и определяют g_0 как точку пересечения этой прямой с осью

ординат. Если найденная таким образом величина g_0 больше нормального значения силы тяжести γ точки на уровне моря, имеющей ту же широту, что и пункт наблюдения, то аномалия в свободном воздухе

$$\Delta g_0 = g_0 - \gamma$$

положительна. Но выше мы уже отмечали, что она будет положительна также и в случае, когда вертикальный градиент

силы тяжести больше среднего; такому значению градиента на рис. 10.18 отвечала бы проходящая через точку G более круто идущая прямая, показанная пунктиром. Она пересекает ось ординат выше проходящей через G сплошной прямой и соответствует большему значению аномалии в свободном воздухе. Возникает странное положение, при котором рост аномалии в свободном воздухе требует проведения через G более круто идущей прямой, что еще больше увеличивает аномалию в свободном воздухе.

Отмеченная странность, по-видимому, указывает на то, что вертикальный градиент силы тяжести нельзя считать постоянным во всем промежутке от пункта наблюдения до поверхности геоида. Можно написать

$$\begin{aligned} \Delta g_0 &= g + (\text{поправка за свободный воздух}) - (\text{нормальное значение силы тяжести в точке } O) = \\ &= g - \left\{ \begin{array}{l} \text{нормальное значение силы тяжести в точке } O \\ \text{— (поправка за свободный воздух)} \end{array} \right\} = \\ &= g - (\text{нормальное значение силы тяжести в точке } G). \end{aligned}$$

Поэтому величина, которую мы до сих пор обозначали символом Δg_0 , в действительности не относится к точке O , а представляет собой разность между измеренным значением g и нормальным значением силы тяжести в точке G , т. е. ее следует рассматривать как величину, определенную в точке наблюдения G . Отнесенную к точке G величину Δg называют *аномалией в пункте наблюдения*. Выше мы просто приближенно принимали, что аномалия в пункте

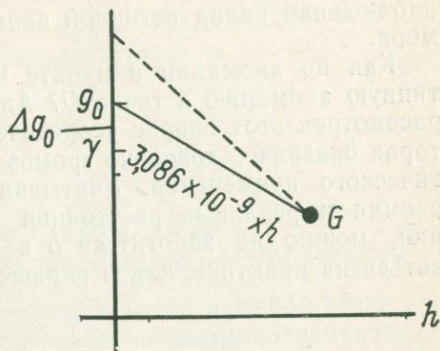


Рис. 10.18.

наблюдения равна истинной аномалии в точке O на уровне моря.

Как по аномалии в пункте наблюдения определить истинную аномалию в точке O ? Автор данной книги в 1965 г. рассмотрел этот вопрос теоретически и вывел формулу, которая оказалась довольно громоздкой и неудобной для практического применения. Учитывая задачи гравиметрической съемки и реальные расстояния между пунктами наблюдений, можно не заботиться о величине $\Delta(\partial g/\partial z)$ и пользоваться на практике, как и раньше, значением $3,086 \cdot 10^{-9}$.

ЗАВИСИМОСТЬ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ОТ ВРЕМЕНИ

§ 1. КОРОТКОПЕРИОДНЫЕ И ДЛИННОПЕРИОДНЫЕ (ВЕКОВЫЕ) ИЗМЕНЕНИЯ

Величина и направление силы тяжести в любой точке поверхности земли непостоянны — они непрерывно изменяются с течением времени. Изменение величины g может составить 0,1 мГал, а ее направления — 0,01". Хотя эти значения и малы, но современной точности измерений вполне достаточно для их уверенной регистрации. Данные о временных вариациях силы тяжести обогащают наши знания о Земле.

Причины изменений могут быть самые разнообразные, например подъем уровня грунтовых вод во время дождей. Пористость горных пород может достигать 20%, и увеличение g при подъеме уровня грунтовых вод на 1 м соответствует силе притяжения слоя воды толщиной 20 см, а именно

$$2\pi k^2 \cdot 1 \cdot 20 \approx 0,00001 = 0,01 \text{ мгал} = 10 \text{ мкгал.}$$

Величины такого порядка регистрируются при современных высокоточных измерениях. Конечно, гравитационную съемку не используют для слежения за изменением уровня грунтовых вод, но при высокоточных измерениях g нужно иметь представление обо всех факторах, способных повлиять на результат.

При возникновении тайфунов резко понижается атмосферное давление, что означает нехватку воздуха над точкой наблюдения; следовательно, в области, охваченной тайфуном, уменьшается сила притяжения атмосферы. Этот эффект может составлять несколько десятков микрогал; соответственно изменяется величина g .

Более отчетливое действие оказывают силы притяжения Луны и Солнца. Одно из их проявлений — морские приливы и отливы. Изменения величины и направления силы тяжести при этом коррелируются с движениями Луны и Солнца. Например, на рис. 11.1 показана реальная непрерывная запись изменений g , полученная с помощью прибора Томоды, установленного на суше (Томода, 1978). Кривая в точности соответствует изменению уровня морской воды во время приливов и отливов.

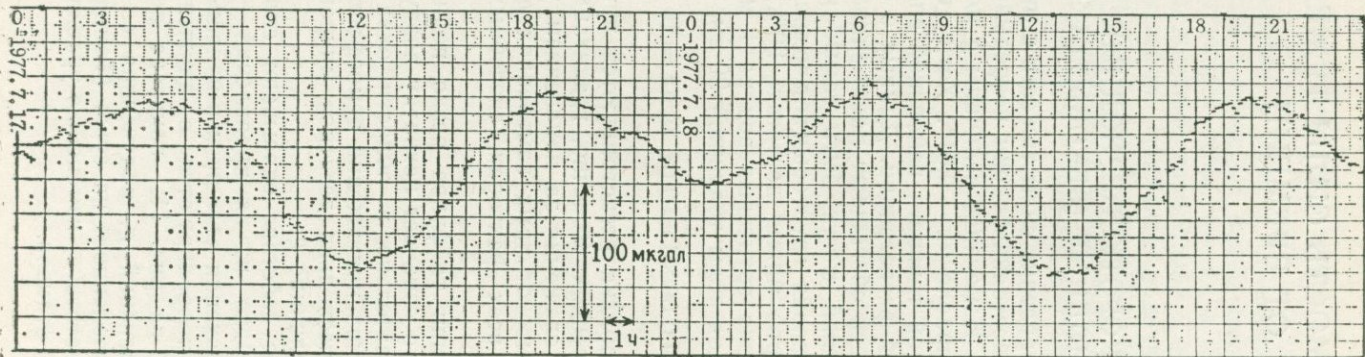


Рис. 11.1. Данные Томоды (1978).

Хотя и говорят, что во время приливов величина g меняется под влиянием сил притяжения Луны и Солнца, следует помнить, что непосредственное воздействие Луны и Солнца — не единственная причина изменения g в этом случае. Косвенное влияние на изменение d при приливах оказывает упругая деформация тела Земли под влиянием притяжений Луны и Солнца (это явление называют *земными приливами*). Земные приливы — важное явление природы, позволяющее, в частности, определить упругость вещества земных недр. О них мы поговорим в последующих параграфах этой главы.

До сих пор мы говорили о явлениях, причины которых совершенно ясны. Но бывают случаи, когда вопрос интересен сам по себе, даже если причина рассматриваемого явления не выяснена до конца. Например, можно полагать, что при крупных землетрясениях и извержениях вулканов происходят изменения распределения g в окрестности места катастрофы. Если это действительно так, то, следовательно, в недрах Земли происходят перемещения глубинных масс. Но даже вне связи с землетрясениями и вулканическими извержениями возникает вопрос: приводят ли медленные перемещения глубинных масс к постепенным, вековым изменениям g ? Постановка таких вопросов стала возможной в связи с развитием техники гравиметрии.

§ 2. ПРИЛИВООБРАЗУЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ ЛУНЫ И СОЛНЦА

Положение Луны и Солнца над данной точкой земной поверхности периодически изменяется. Соответственно изменяется их сила притяжения, что приводит к периодическим изменениям величины g и направления отвеса в рассматриваемой точке. Причина этих изменений совершенно ясна, поэтому с принципиальной точки зрения их рассмотрение не вызывает затруднений, хотя конкретные вычисления довольно сложны.

Эффект силы притяжения небесного тела в данной точке земной поверхности определяется разностью между этой силой и силой притяжения к центру Земли. Запишем выражения для добавки силы притяжения в точке P , пользуясь обозначениями, введенными на рис. 11.2:

вертикальная компонента

$$v = k^2 T \left(\frac{\cos z'}{r'^2} - \frac{\cos z}{r^2} \right),$$

горизонтальная компонента

$$h = k^2 T \left(\frac{\sin z'}{r'^2} - \frac{\sin z}{r^2} \right).$$

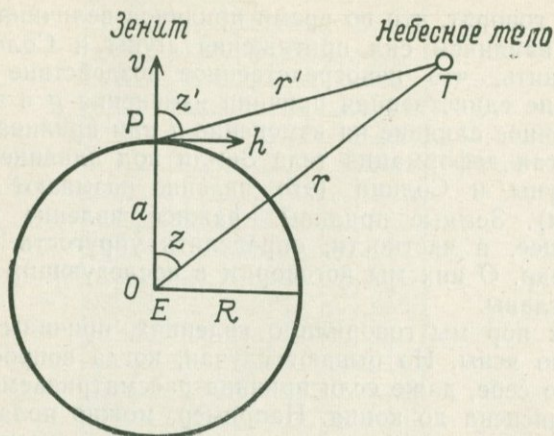


Рис. 11.2.

Здесь T — масса Луны или Солнца, z' — зенитное расстояние. Пользуясь формулами

$$r'^2 = r^2 - 2ar \cos z + a^2, \quad \sin z' = (r/r') \sin z$$

и учитывая, что $a \ll r$, получим приближенно

$$v = 3k^2 T \frac{a}{r^3} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right),$$

$$h = \frac{3}{2} k^2 T \frac{a}{r^3} \sin 2z.$$

Учитывая, что

$$g = k^2 E / R^2,$$

где E — масса Земли, а R — средний радиус, полученные формулы перепишем в виде

$$v = 3g \left(\frac{T}{E} \right) \frac{aR^2}{r^3} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right),$$

$$h = \frac{3}{2} g \left(\frac{T}{E} \right) \frac{aR^2}{r^3} \sin 2z.$$

Теперь ясно, что величина v выражает периодическую зависимость g от времени (время входит через z). Свое максимальное значение

$$|v|_{\max} = 2g \left(\frac{T}{E} \right) \frac{aR^2}{r^3}$$

переменная v принимает при $z = 0, \pi$. Это значение достижимо не при всякой широте точки наблюдения. Там, где

v не может принимать значения 0, π , максимум v достигается при значениях z , наиболее близких к 0 или π .

Входящие в эти формулы величины a и R можно считать равными друг другу, но a имеет смысл координаты точки P , а R — среднего радиуса Земли. По a можно дифференцировать, в то время как R — константа.

В случае Луны

$$T/E = 0,0123, \quad R/r = 1/60,3$$

и

$$|v|_{\max} = 2 \cdot 980 \cdot 0,0123 \cdot (1/60,3)^3 = 0,000109 = 0,109 \text{ мГал.}$$

Для Солнца аналогичный расчет дает

$$|v|_{\max} = 0,041 \text{ мГал.}$$

Горизонтальная составляющая h достигает максимального значения при $z = \pm\pi/4$; оно равно

$$|h|_{\max} = \frac{3}{2} g \left(\frac{T}{E} \right) \frac{aR^2}{r^3}.$$

Для Луны

$$|h|_{\max} = 0,082 \text{ мГал,}$$

а для Солнца

$$|h|_{\max} = 0,037 \text{ мГал.}$$

Деля эти значения h на g , находим уклонение отвеса θ :

$$\text{для Луны } |\theta|_{\max} = 0,082 \cdot 10^{-3}/980 = 0,017'',$$

$$\text{для Солнца } |\theta|_{\max} = 0,037 \cdot 10^{-3}/980 = 0,008''.$$

Величины

$$v = 3g \left(\frac{T}{E} \right) \frac{aR^2}{r^3} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right),$$

$$h = \frac{3}{2} g \left(\frac{T}{E} \right) \frac{aR^2}{r^3} \sin 2z$$

можно вывести из функции

$$V_1 = \frac{3}{2} g \left(\frac{T}{E} \right) \frac{a^2 R^2}{r^3} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right)$$

с помощью дифференцирования

$$v = \frac{\partial V_1}{\partial a}, \quad h = \frac{1}{a} \frac{\partial V_1}{\partial z},$$

откуда ясно, что V_1 играет для v и h роль потенциала. Его называют *приливообразующим потенциалом*.

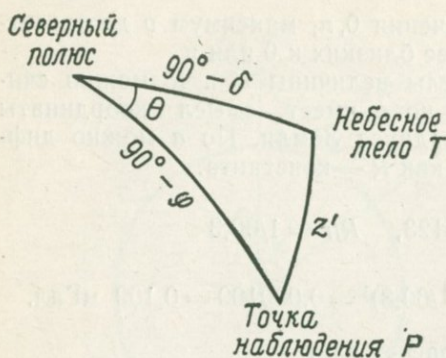


Рис. 11.3.

Мы выразили приливообразующий потенциал V_1 в виде функции z . Если же рассмотреть показанный на рис. 11.3 треугольник на небесной сфере и выразить V_1 через широту точки наблюдения φ , склонение небесного тела δ (угловое расстояние между ним и небесным экватором на небесной сфере) и часовой угол этого тела Θ (угол на небесной сфере

между меридиональными плоскостями, проходящими через зенит точки наблюдения и небесное тело), то

$$V_1 = \frac{3}{4} g \frac{T}{E} \frac{a^2}{r^3} R^2 \left[3 \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) + \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos \Theta + \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2\Theta \right].$$

Для данной точки наблюдения φ — константа. Склонение Луны и Солнца δ изменяется с течением времени сравнительно медленно. Зависимость от времени часового угла Θ определяется собственным вращением Земли и прямым восхождением небесного тела (Луны и Солнца; прямое восхождение — это долгота светила на небесной сфере). Потенциал V_1 в точке наблюдения есть сумма потенциалов, создаваемых Луной и Солнцем; его временная зависимость определяется их совместным движением по небесной сфере. Ясно, что V_1 зависит от времени довольно сложным образом.

§ 3. ЗЕМНЫЕ ПРИЛИВЫ

Итак, приливообразующий потенциал изменяется со временем. Но интенсивность наблюдаемых на земной поверхности явлений, связанных с изменением силы тяжести, нельзя объяснить лишь непосредственным влиянием этого потенциала. Необходимо учитывать еще деформацию твердой части Земли под действием притяжения Луны и Солнца.

В приведенном выше расчете приливообразующего потенциала деформация Земли не учтена. Эффекты, наблюдаемые на поверхности деформированной Земли, нужно выводить не только из изменения самого приливообразующего потенциала, но и из изменения потенциала, возникаю-

щего вследствие соответствующей деформации земного шара. Поэтому величины, рассчитываемые в предположении, что Земля — идеально жесткое тело, не совпадают с данными наблюдений. По расхождению между ними можно оценить упругие свойства Земли.

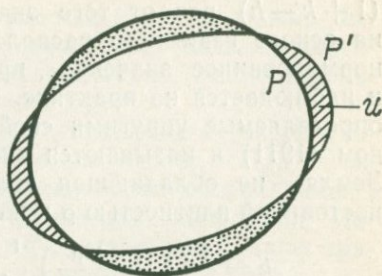


Рис. 11.4.

На рис. 11.4 жирной кривой показана Земля до деформации, а тонкой — Земля после деформации. При расчете изменения гравитационного потенциала в точке P нужно учитывать не только приливообразующий потенциал в этой точке, но и изменение потенциала силы притяжения за счет деформации Земли (т. е. разность между потенциалами, создаваемыми деформированной и недеформированной Землей). Кроме того, надо принять во внимание изменение потенциала за счет смещения u точки наблюдения P в положение P' . Полный потенциал представится суммой следующих четырех слагаемых:

первоначальный потенциал Земли	W
приливообразующий потенциал, создаваемый другими небесными телами	V_1
изменение потенциала за счет деформации Земли	ΔW
изменение потенциала за счет смещения точки наблюдения в радиальном направлении на величину u	$-u \frac{\partial W}{\partial a}$

Потенциал ΔW , возникающий за счет деформации земного шара, пропорционален приливообразующему потенциалу:

$$\Delta W = kV_1.$$

Если принять, что точка наблюдения смещается на величину u в вертикальном направлении, то

$$-u \frac{\partial W}{\partial a} = ug,$$

а поскольку величина смещения u пропорциональна приливообразующему потенциалу V_1 , то

$$u \frac{\partial W}{\partial a} = -ug = -hV_1.$$

В сумме

$$V = W + V_1 + \Delta W - u \frac{\partial W}{\partial a} = W + V_1(1 + k - h).$$

Таким образом, небесное тело изменяет гравитационный потенциал в точке наблюдения на величину, отличающуюся в

$(1 + k - h)$ раз от того значения, которое рассчитывается на основе взаимного расположения его и Земли; это перенормированное значение приливообразующего потенциала и наблюдается на практике. Безразмерные параметры k и h , определяемые упругими свойствами Земли, введены А. Лявом (1911) и называются *числами Лява*. Если принять, что Земля — не обладающая сплюснутостью упругая сфера с постоянной плотностью ρ и жесткостью μ , то

$$k = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{19\mu}{2g\rho R} \right)^{-1}, \quad h = \frac{5}{2} \left(1 + \frac{19\mu}{2g\rho R} \right)^{-1}.$$

Земными приливами объясняются многие геофизические эффекты. Один из самых явных и прямо связанных с явлением земных приливов эффект — приливы и отливы воды вблизи морских берегов. Они объясняются действием приливообразующего потенциала, и если считать, что Земля — абсолютно упругое тело, то наблюдаемый уровень морского прилива должен быть равен V_1/g . Но вследствие деформации твердого вещества Земли точка наблюдения смещается в вертикальном направлении, и в итоге реально наблюдаемый уровень морского прилива составляет $(1 + k - h)V_1/g$. Если, например, рассчитанный по приливообразующему потенциалу уровень морского прилива должен быть 100 см, а наблюдается прилив высотой 90 см, то разницу 10 см нужно отнести за счет деформации Земли. Таким образом, сравнивая рассчитанный по приливообразующему потенциалу и реально наблюдаемый уровни морского прилива, можно определить величину $(1 + k - h)$ и оценить упругость Земли.

Однако не все здесь так просто, как может показаться на первый взгляд. Затруднение связано с инерционностью морской воды и с ее трением о морское дно. Оба этих фактора приводят к тому, что движение морской воды не повторяет временной ход приливообразующего потенциала. Вследствие совместного влияния Луны и Солнца приливообразующий потенциал зависит от времени сложным образом; эту сложную зависимость обычно представляют в виде суммы большого числа синусоидальных составляющих, которые называют *приливными волнами*. Среди них есть долгопериодические и короткопериодические. Примеры короткопериодических волн — лунный прилив (M_2) длительностью в половину лунных суток (12,42 ч) и лунно-солнечный суточный прилив (K_1) длительностью 23,93 ч. Амплитуда изменения потенциала у этих составляющих велика, но на величину периода оказывают влияние инерционность морской воды и трение ее о морское дно. При налаженной

службе наблюдения приливов указанные волны можно выявить, но оказывается, что колебания уровня воды не повторяют изменения потенциала. Следовательно, такие наблюдения непригодны для определения k и h .

Для нахождения k и h нужно использовать долгопериодические волны, например с периодом 19 лет. При столь большом периоде изменений приливообразующая сила и уровень прилива находятся в статическом равновесии. Поэтому подобный прилив называют *статическим*. Такие приливы как раз пригодны для определения k и h .

Кельвин (лорд Кельвин, У. Томпсон, 1824—1907) воспользовался приливами с 19-летним периодом для определения k и h по приведенным выше формулам и получил, что средняя жесткость Земли равна жесткости стали. Это была самая первая работа, заложившая основы рассматриваемой области исследований. Но в наше время результат Кельвина устарел, поскольку он получен с использованием чересчур упрощенных предположений о жесткости Земли и ее внутреннем строении.

§ 4. ПРИЛИВНЫЕ ВАРИАЦИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Мы уже отмечали, что с учетом земных приливов гравитационный потенциал V можно представить в виде суммы четырех слагаемых:

первоначальный потенциал Земли	W
приливообразующий потенциал, создаваемый другими небесными телами	V_1
изменение потенциала за счет деформации Земли	ΔW
изменение потенциала за счет смещения точки наблюдения в радиальном направлении на величину u	$-u \frac{\partial W}{\partial a}$

Следовательно, производная гравитационного потенциала V по $-a$ будет

$$-\frac{\partial V}{\partial a} = g + \delta g = -\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial V_1}{\partial a} - \frac{\partial (\Delta W)}{\partial a} + u \frac{\partial^2 W}{\partial a^2}.$$

Преобразуем правую часть равенства. Первое слагаемое

$$-\frac{\partial W}{\partial a} = g.$$

Второе слагаемое оставим без изменений. В третьем слагаемом ΔW есть изменение гравитационного потенциала за счет деформации земного шара. Масса, заключенная в приращении объема в процессе деформации, создает потенциал

$$\Delta W = 4\pi k^2 \sum \frac{1}{2n+1} \frac{R^{n+2}}{a^{n+1}} S_n(\theta, \varphi),$$

где $S_n(\theta, \varphi)$ — решение угловой части уравнения Лапласа в сферических координатах. В задаче о деформации Земли преобладающую роль играет член с $n = 2$, поэтому

$$\Delta W \approx 4\pi k^2 \frac{1}{5} \frac{R^4}{a^3} S_2,$$

$$\frac{\partial(\Delta W)}{\partial a} = -3 \cdot 4\pi k^2 \frac{1}{5} \frac{R^4}{a^4} S_2 = -\frac{3\Delta W}{a}.$$

Учитывая, что ΔW пропорционально V_1 :

$$\Delta W = kV_1,$$

получаем

$$\frac{\partial(\Delta W)}{\partial a} = -\frac{3}{a} kV_1 = -\frac{3}{2} k \left(\frac{\partial V_1}{\partial a} \right).$$

Четвертое слагаемое

$$u \frac{\partial^2 W}{\partial a^2} = -u \frac{\partial g}{\partial a}.$$

Поскольку

$$u = hV_1/g,$$

имеем

$$g = hV_1/u$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{h}{u} \frac{\partial V_1}{\partial a}.$$

Следовательно,

$$u \frac{\partial^2 W}{\partial a^2} = -u \frac{\partial g}{\partial a} = -h \frac{\partial V_1}{\partial a}.$$

Окончательно сумма четырех слагаемых представится в виде

$$g + \delta g = g - \left(1 - \frac{3}{2} k + h \right) \frac{\partial V_1}{\partial a}.$$

Таким образом, наблюдаемая величина изменения силы тяжести отличается в $(1 - 3k/2 + h)$ раз от величины, рассчитанной в предположении, что Земля идеально жесткая, а земные приливы отсутствуют. Изменение силы тяжести во время прилива по порядку величины составляет 0,1 мГал; такие изменения можно зарегистрировать совместными точными гравиметрами. Сравнивая наблюдаемое и расчетное значения, можно определить коэффициент $(1 - 3k/2 + h)$.

И наоборот, измеренная где бы то ни было величина g содержит эффект $(1 - 3k/2 + h) \partial V_1 / \partial a$. Поэтому при проведении высокоточных измерений в величину g нужно вводить соответствующие поправки.

§ 5. ДРУГИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ

Итак, высота прилива и величина силы тяжести периодически изменяются под действием сил притяжения Луны и Солнца. Сравнивая данные наблюдений со значениями, рассчитанными в предположении, что Земля идеально жесткая, можно оценить ее упругость.

Но кроме указанных двух есть еще и другие геофизические величины, позволяющие путем сравнения результатов наблюдений и расчетов определить упругость вещества земных недр.

а) *Свободная нутация.* Явление свободной нутации Земли состоит в своеобразном покачивании ее оси вращения. Такое покачивание возникает, когда ось вращения физического тела не совпадает с его главной осью инерции. В случае Земли нутация проявляется в том, что астрономическая широта каждой точки земной поверхности слегка изменяется (варьирует) со временем. Проще говоря, изменяется направление на Полярную звезду.

Для регистрации вариаций широты создана международная служба; главная широтная станция Японии в Мидзусаве основана С. Кимурой (1870—1943). Вместо широтных вариаций можно говорить также о смещении по земной поверхности точки пересечения с ней оси вращения Земли (нутация географического полюса). На рис. 11.5 представлены данные о перемещении северного географического полюса за пять лет — с 1971 по 1975 г. Видно, что полюс совершает квазипериодическое движение с диаметром петель в несколько метров. За пять лет полюс описал около четырех петель. Более точные расчеты с использованием многолетних данных позволили получить для среднего периода нутации значение около 430 сут. Эту величину называют *чандлеровским периодом* T_C (С. Чандлер, 1846—1913).

В свое время Л. Эйлер (1707—1783) рассчитал период свободной нутации Земли в предположении, что она является идеально упругим телом. Полученное им значение (305 сут) называют *периодом Эйлера* T_E .

Периоды T_C и T_E не совпадают, поскольку Земля, являясь упругим телом, деформируется под влиянием приливообразующего потенциала. Имеет место соотношение

$$\frac{T_E}{T_C} = 1 - \frac{k}{2ge/R_e \omega^2 - 1},$$

где k — число Лява, e — сжатие Земли, ω — угловая скорость ее вращения, R_e — экваториальный радиус. Отсюда

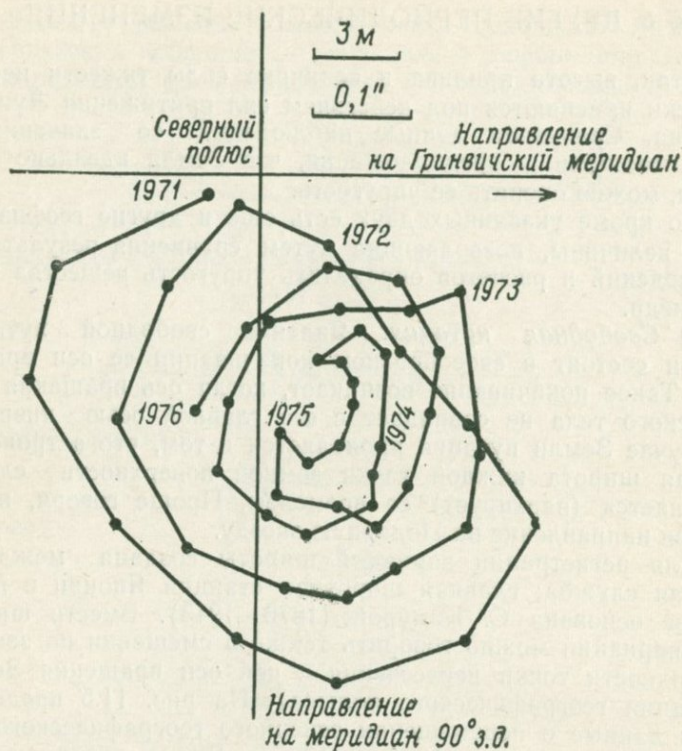


Рис. 11.5.

по наблюдаемому периоду T_0 определяют k , а из соотношения

$$k = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 19\mu/2g\rho R}$$

находят среднюю жесткость Земли μ .

б) *Изменение наклона.* Измерения показывают, что наклон земной поверхности непрерывно меняется с течением времени. Даже если исключить эффект нагрева поверхности Солнцем, уверенно измеряются изменения наклона порядка $0,01''$. Можно указать две причины таких изменений: изменение направления отвесной линии под действием приливообразующего потенциала и изменение, вызываемое деформацией Земли в процессе земных приливов. Во время приливов изменяются обе эти величины, а измеряем мы лишь угол между направлением отвесной линии и земной поверхностью. Наблюдаемый угол отличается от угла, расчи-

танного в предположении, что Земля идеально жесткая, в $(1 + k - h)$ раз. Для измерений пользуются горизонтальным маятником или устройством, состоящим из длинных труб, наполненных водой, — так называемым *наклономером*. Измерения позволяют определить величину $(1 + k - h)$.

Измерение наклона земной поверхности вблизи морского побережья осложняется необходимостью учитывать два мешающих фактора: вес морской воды во время приливов деформирует сушу, а сила притяжения этой воды отклоняет линию отвеса.

в) *Изменение широты*. Изменение астрономической широты под действием возмущающего потенциала во время приливов по порядку величины составляет $0,01''$. Его причины: уклонение отвеса и горизонтальное смещение точки наблюдения в широтном направлении во время приливов. Совместное влияние этих факторов и приводит к регистрируемому на практике изменению широты. Наблюдаемое изменение широты в $(1 + k - l)$ раз отличается от значения, вычисленного в предположении, что происходит только изменение направления отвеса, т. е. что Земля недеформируема.

Безразмерный параметр l впервые введен Д. Шидой (1912) и называется *числом Шиды*.

Для несплюсненной Земли, характеризуемой постоянными плотностью ρ и жесткостью μ ,

$$l = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{19}{2} \frac{\mu}{\rho g R} \right)^{-1}.$$

Величину l определяют путем сравнения измеренных и расчетных значений широты.

В данном случае тоже затруднены наблюдения вблизи морского побережья, так как сила притяжения массы морской воды во время приливов изменяет направление отвеса.

г) *Деформация*. Во время приливов изменяется расстояние между двумя точками на земной поверхности. Относительную деформацию поверхности ϵ измеряют так называемым *тензомером*, принцип действия которого состоит в том, что расстояние между двумя точками измеряют оптическим или электрическим методом и сравнивают со стандартным масштабом длины:

Относительная деформация
вдоль меридиана

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{l}{Rg} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varphi^2},$$

Относительная деформация
вдоль параллели

$$\epsilon_{\lambda} = \frac{l}{Rg \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \lambda^2}.$$

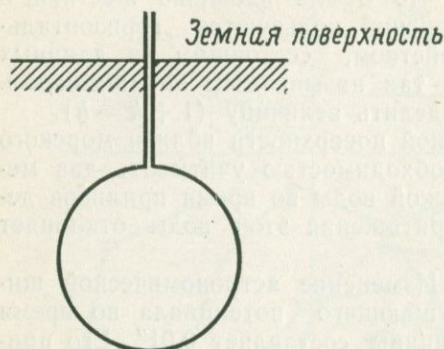


Рис. 11.6.

деформации. Измеряя его, можно определить параметр $(h - 3l/2)$.

Принцип измерения относительных изменений объема при деформации Земли пояснен на рис. 11.6. В землю закапывают большой сосуд, стенки которого плотно прилегают к окружающей породе. Сосуд наполняют подходящей жидкостью и соединяют с дневной поверхностью тонкой трубкой. При изменениях объема сосуда изменяется уровень жидкости в трубке.

Мы познакомились с различными величинами, имеющими отношение к явлению земных приливов. Измеряя эти величины, можно сделать выводы о значениях h , k , l . Перечислим еще раз, какие комбинации чисел h , k , l можно определить в том или ином измерении:

высота прилива	$1 + k - h$
изменение g	$1 - 3k/2 + h$
свободная нутация	k
изменение наклона	$1 + k - h$
изменение широты	$1 + k - l$
деформация	l
объемное сжатие	$h - 3l/2$

Одни из этих величин допускают более точное измерение, другие — менее точное. Некоторые из них верно передают действие именно земных приливов, а некоторые легко поддаются влиянию посторонних факторов, не связанных с земными приливами. Учитывая эти обстоятельства, в 1950 г. Х. Такеучи на основе всей совокупности данных пришел к выводу, что наиболее правдоподобны следующие значения параметров:

$$h = 0,61, \quad k = 0,29, \quad l = 0,08.$$

По порядку величины $\epsilon \sim 10^{-8}$. Измерения позволяют получить величину l .

д) *Объемное сжатие.*

Во время приливных деформаций Земли каждый элемент объема сжимается или расширяется. Относительное изменение объема

$$\Delta = \frac{4V_1}{gR} \left(h - \frac{3}{2} l \right)$$

приблизительно втрое больше относительной

§ 6. ЗЕМНЫЕ ПРИЛИВЫ И ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ ЗЕМЛИ

Мы видели, что разные геофизические наблюдения позволяют определить числа Лява h , k и число Шиды l . Следующая задача — соотнесение этих чисел со строением земных недр. Выше мы отмечали, что для модели несплюснутого земного шара, имеющего постоянную плотность ρ и жесткость μ ,

$$h = 5/2\rho, \quad k = 3/2\rho, \quad l = 3/4\rho,$$

где

$$\rho = 1 + \frac{19}{2} \frac{\mu}{\rho g R}.$$

Сопоставление этих формул со значениями h , k и l , найденными Такеучи, показывает, что такая простая модель не годится.

Величины h , k , l , выводимые из моделей однородной Земли, не удовлетворяют наблюдательным данным. Это указывает на сложность внутреннего строения нашей планеты, о котором известно также из другого источника — данных о распределении скоростей сейсмических волн. В гл. 1 мы уже говорили об успешных исследованиях австралийского геофизика К. Буллена (1906—1976), определившего плотностную структуру Земли. На данные Буллена опирался Х. Такеучи в своих расчетах значений h , k , l . Задача определения этих параметров довольно сложна как с теоретической, так и с вычислительной точек зрения, и ее успешное решение — большая заслуга Такеучи. Приведем еще раз полученные им результаты, хорошо согласующиеся с данными наблюдений:

$$h = 0,59 \div 0,61, \quad k = 0,28 \div 0,29, \quad l = 0,07 \div 0,08.$$

Из этих значений для коэффициента, входящего в формулу для приливных изменений g , получается

$$(1 - 3k/2 + h) = 1,15 \div 1,17.$$

При вычислении поправки за влияние земных приливов, вносимой в данные точной гравиметрической съемки, обычно для этого коэффициента используют значение 1,2, что, как видим, является удовлетворительным приближением.

Известно, что через ядро Земли не проходят поперечные сейсмические волны и поэтому его жесткость нужно принять равной нулю. В своих расчетах Такеучи варьировал жесткость земного ядра в пределах $0 - 10^{10}$, но оказалось, что получаемые при таких вариациях значения h и k не противоречили данным наблюдений.

Теоретические исследования и наблюдения земных приливов ведутся в разных районах мира учеными многих стран. Работы школы Университета Киото, связанные с именами Д. Шиды (1876—1936), М. Мацуямы (1884—1958), Э. Нишимуры (1907—1964), завершённые расчетами Такеучи, вписали в эти исследования блестящую страницу, и теперь уже можно говорить о японском национальном стиле изучения земных приливов.

§ 7. ВЕКОВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Мы рассмотрели периодические изменения гравитационного потенциала под действием приливообразующей силы со стороны небесных тел. Это внешние причины изменения g . Возникает вопрос: не существует ли на Земле внутренних причин для изменения силы тяжести? Например, ими могли бы быть извержения вулканов и землетрясения. Кроме того, можно спросить, не изменяются ли с течением времени постоянные h , k , l , определяемые на основе земных приливов? Постановка этих сравнительно новых вопросов стала возможной в результате прогресса техники измерений, и они привлекли внимание в самые последние годы.

Время от времени в печати появлялись сообщения о возможных вековых изменениях величины силы тяжести. Например, сообщалось, что за период с 1870 по 1900 г. в четырех пунктах на территории Индии величина силы тяжести изменилась на несколько десятков миллигал, а в одном случае даже на 100 мГал. Если бы это было действительно так, возникла бы большая проблема для геофизиков. Но точность измерений в то время была невысока, и эти сведения не заслуживают доверия.

В Японии тоже было сообщение (С. Исимото, Ю. Цудзико, 1929) о том, что в период с 1922 по 1925 г. (этот период включает знаменитое землетрясение 1923 г. в районе Канто) стандартный маятниковый хронометр Рифлера на Токийской обсерватории сильно ушел вперед. Ускорение хронометра стали замечать в 1922 г., а к 1925 г. он ушел вперед на 3 с. Если бы причиной этого ускорения было уменьшение периода колебаний маятника за счет возрастания силы тяжести, то за три года последняя должна была бы возрасти более чем на 70 мГал, что с геофизической точки зрения совершенно неправдоподобно, ибо означает, например, что в слое толщиной 7 км плотность горных пород должна была увеличиться приблизительно на 10%. Чтобы выяснить, действительно ли произошло такое изменение силы тяжести, автор данной книги произвел относительные измерения силы тяжести в Токио,

Сэндае и Мидзусаве и сравнил их с аналогичными данными предшествовавших измерений. При этом не было обнаружено указанного большого изменения на 70 мГал. Впоследствии (Т. Цубои, Т. Футида, 1937; Т. Нагата, 1938) была произведена гравиметрическая съемка в 58 пунктах района Канто описанным выше методом с использованием сигналов радиовещательных станций, и при сравнении с данными предшествовавших измерений тоже не было найдено никаких признаков большого изменения (на 70 мГал) силы тяжести в окрестностях Токио.

Таким образом, в настоящее время невозможно проверить, что в действительности скрывается за указанными сообщениями об изменении силы тяжести. Но поскольку вопрос о вековых изменениях силы тяжести очень важен, желательно все же найти путь к его решению. С точки зрения обычных геофизических представлений изменение силы тяжести не может превышать нескольких миллигал. Поэтому для серьезного рассмотрения проблемы прежде всего необходимы достоверные, высокоточные измерения. В последние годы точность измерений с помощью гравиметров сильно возросла, и можно считать, что к настоящему моменту созрели условия для постановки и рассмотрения проблемы аperiodических вековых изменений g . В Японии уже ведутся практические работы в данном направлении.

Однако на этом пути встают очень большие трудности. Если речь идет об изменениях g порядка 1 мкГал, то высота пункта наблюдения должна быть известна с точностью не ниже 3 мм. Но как быть, если сама высота изменяется? Далее, сохраняется ли постоянной чувствительность гравиметров в течение лет и десятков лет? Для проверки чувствительности гравиметра нужно взять отсчеты g в двух пунктах с известным значением силы тяжести; но что делать, если сила тяжести в этих контрольных пунктах тоже изменяется? Для контроля чувствительности можно было бы воспользоваться вертикальным градиентом g и брать отсчеты в основании и в верхней части высотных зданий, но ведь и вертикальный градиент силы тяжести может аperiodически изменяться со временем. Мы уже говорили, что для определения правильного значения силы тяжести при точной гравиметрической съемке нужно вводить поправку за земные приливы. Как быть с этой поправкой, если коэффициент $(1 - 3/k^2 + h)$ непостоянен во времени?

Таким образом, при повышении точности измерений возникает много новых проблем, и поэтому выявить достоверные несомненные изменения силы тяжести — дело не простое.

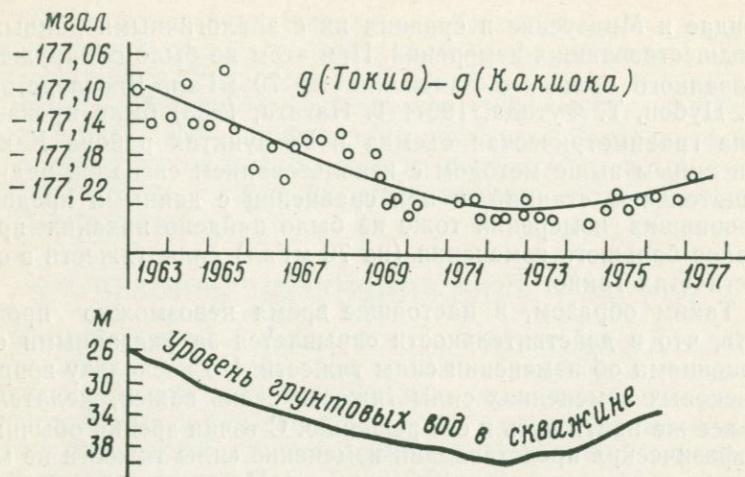


Рис. 11.7.

Тем не менее в Японии организована целевая группа специально для проведения указанных исследований, и постепенно начинают появляться заслуживающие доверия результаты. Остановимся на некоторых типичных работах, выполненных в последнее время.

Так, К. Тадзима и С. Идзуця (1975) в течение ряда лет по несколько раз в год измеряли разность между силой тяжести в опорном пункте Токийского университета и в гравиметрическом пункте Какиока (уезд Агата, преф. Ибарак). Они получили, что величина g в Токио постепенно уменьшается относительно значения g в Какиоке (рис. 11.7) со скоростью около 11 мкГал/год.

На территории Токийского университета есть глубокая скважина, в которой уже много лет ведутся наблюдения за уровнем грунтовых вод. Как видно из рис. 11.7, этот уровень систематически понижается со скоростью около 2 м/год. Следовательно, уменьшается сила притяжения грунтовых вод и первоначально отрицательная разность $\{g(\text{Токио}) - g(\text{Какиока})\}$ с течением времени приобретает еще большую отрицательную величину, поскольку в Какиоке понижения грунтовых вод не отмечено. Вычислим изменение g за счет понижения уровня грунтовых вод под Токио. Если коэффициент пористости горных пород 15%, то годовое уменьшение массы воды соответствует слою воды толщиной $200 \cdot 0,15 = 30$ см. Сила притяжения такого слоя воды

$$2\pi k^2 r h = 2\pi k^2 \cdot 30 = 11 \text{ мкГал}$$

в точности соответствует измеренному годовому изменению силы тяжести. Таким образом, изменение g в Токио можно связать с понижением уровня грунтовых вод.

В предыдущем примере изменение силы тяжести объяснялось изменением уровня грунтовых вод, а теперь мы рассмотрим случай, когда изменение g непосредственно связано с изменением высоты гравиметрического пункта наблюдения.

В 1974 г. наблюдался рой толчков в окрестностях перевала Амаги на п-ове Идзу, а в октябре 1975 г. аналогичное землетрясение произошло вблизи горы Тогаса в северной части горного массива Амаги. И наконец, 18 августа 1976 г. около горы Хати имело место землетрясение с магнитудой $M = 5,5$. В связи с этим Сейсмологический институт и Управление геодезии и географии организовали в данном районе проведение гравиметрической съемки и топографического нивелирования (Ю. Хагивара, К. Тадзима и др., 1976). Краткая сводка полученных ими результатов представлена в виде схемы на рис. 11.8, где показано изменение высоты местности в период 1969—1976 гг. и изменение силы тяжести за время с декабря 1974 г. по март 1976 г. Несмотря на небольшое различие временных интервалов наблюдений, оба распределения на рис. 11.8 довольно близко соответствуют друг другу. Максимальный подъем местности составлял 15 см, а максимальное понижение силы тяжести — 30 мкГал.

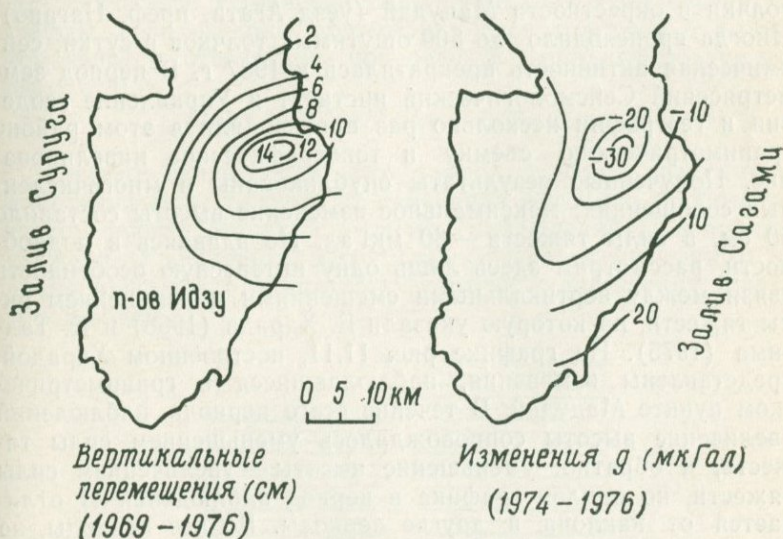


Рис. 11.8.

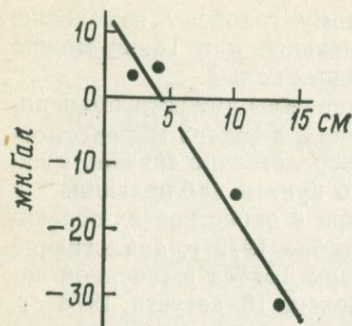


Рис. 11.9.

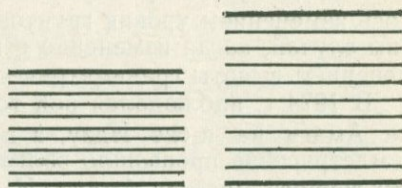


Рис. 11.10.

Изменения высоты и силы тяжести были известны в четырех пунктах; соответствующий этим данным график зависимости изменения силы тяжести от изменения высоты показан на рис. 11.9. Проведенная на рисунке прямая имеет наклон -3 мкГал/см, т. е. -1 мГал/3 м, что точно соответствует высотному ходу поправки за свободный воздух. Отсюда следует, что изменение силы тяжести в указанном районе произошло не за счет поступления новых глубинных масс, а за счет разбухания объема при неизменной массе по схеме рис. 11.10.

Еще раньше, в августе 1965 г., начались многочисленные толчки в окрестности Мацудай (уезд Агата, преф. Нагано). Иногда происходило до 500 ощутимых толчков в сутки; сейсмическая активность прекратилась к 1967 г. В период землетрясений Сейсмологический институт и Управление геодезии и географии несколько раз производили в этом районе гравиметрическую съемку и топографическое нивелирование. Полученные результаты опубликованы в многочисленных сообщениях; максимальное изменение высоты составило 60 см, а силы тяжести — 80 мкГал. Не вдаваясь в подробности, рассмотрим здесь лишь одну интересную особенность связи между вертикальными смещениями и изменением силы тяжести, на которую указали Ё. Харада (1968) и К. Тадзима (1975). На графике рис. 11.11, построенном Харадой, представлены изменения, наблюдавшиеся в гравиметрическом пункте Мацудай. В течение всего периода наблюдений увеличение высоты сопровождалось уменьшением силы тяжести, и наоборот: уменьшение высоты — увеличением силы тяжести, но наклон графика в период наблюдений II отличается от наклона в другие периоды. Во все периоды, за исключением периода II, наклон соответствовал изменению g за счет изменения высоты, а именно был равен 3 мкГал/см,

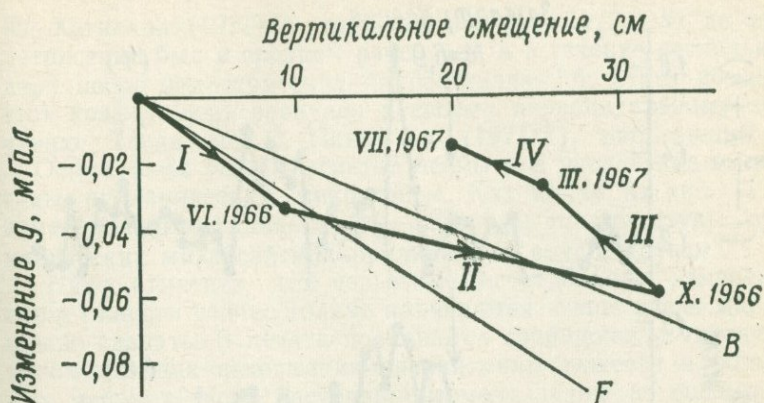


Рис. 11.11. Связь между вертикальными смещениями поверхности земли и изменениями силы тяжести. B — градиент Буге, F — градиент в свободном воздухе.

а в период наблюдений II он отличался от этого значения.

Кроме наклона, соответствующего поправке за свободный воздух, определим еще наклон, отвечающий поправке Буге, т. е. кратко — градиент Буге, соответствующий случаю, показанному на рис. 11.12, когда масса вещества в слое возрастает за счет увеличения его толщины при неизменной плотности. Изменение силы тяжести в этом случае мы найдем, если из силы притяжения слоя толщины h вычтем изменение g , отвечающее поправке за свободный воздух для высоты h :

$$(2\pi k^2\rho - 0,3086)h = -0,2h \text{ мГал.}$$

Однако оказывается, что наклон графика зависимости изменения силы тяжести от изменения высоты в гравиметрическом пункте Мацудай в период наблюдений II отличался также и от градиента Буге. Для объяснения указанного отличия приходится привлекать гипотезу о насыщении горных пород водой.

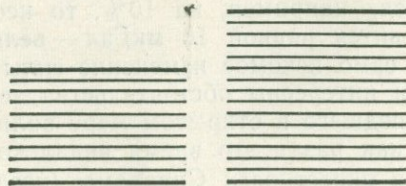


Рис. 11.12.

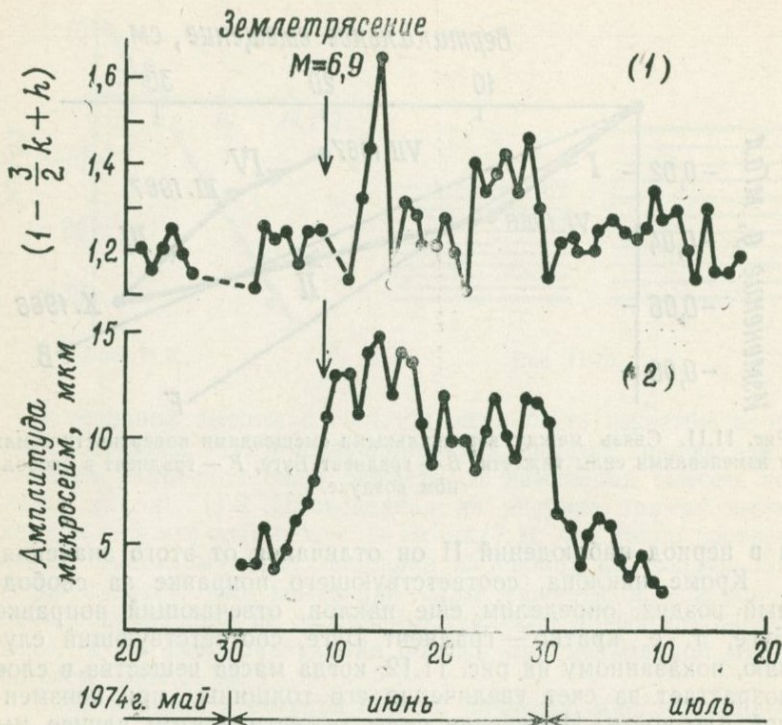


Рис. 11.13. Эффекты при землетрясении 1974 г. с эпицентром в открытом море вблизи п-ова Идзу. (1) — изменение коэффициента $(1 - 3k/2 + h)$; (2) — увеличение амплитуды микросейсм вблизи вулкана Михара на о. Осима (по данным К. Накамуры и К. Тадзавы).

Как видим, интерпретация здесь становится весьма неоднородной, но ничего не поделаешь — таково реальное положение вещей. Надо иметь в виду и другие обстоятельства. Как уже отмечалось, поправка за влияние земных приливов может изменяться вследствие зависимости от времени коэффициента $(1 - 3k/2 + h)$. Максимальное значение этой поправки ± 100 мкГал, и если коэффициент $(1 - 3k/2 + h)$ изменяется, например, на 10%, то неопределенность поправки становится равной 10 мкГал — величине того же порядка, что и само искомое изменение силы тяжести.

В этой связи интересны обстоятельства землетрясения с $M = 6,9$, происшедшего в открытом море вблизи п-ова Идзу 9 мая 1974 г.; как раз в это время недалеко от эпицентра землетрясения в окрестности Сирахама (уезд Агата, преф. Сидзуока) сотрудники Сейсмологического института вели непрерывные гравиметрические наблюдения. Как сообщает

Ю. Хагивара (1971)*), коэффициент $(1 - 3k/2 + h)$ до землетрясения был в среднем равен 1,2, а в течение нескольких дней после землетрясения он составлял 1,6; через 20 дней этот коэффициент вернулся к своему первоначальному значению. Тогда же К. Накамура (1971)*), работавший на о. Осима (о-ва Идзу), отметил необычное увеличение амплитуды вулканических микросейсм. Как видно из рис. 11.13, изменения коэффициента $(1 - 3k/2 + h)$ и амплитуды вулканических микросейсм коррелируются друг с другом.

Надо отметить, что серьезные исследования изменений силы тяжести сейчас только начинаются и еще очень многое нужно сделать. В печати появляются сообщения о явлениях, напоминающих вековые изменения силы тяжести в обширных районах. Но в настоящий момент лучше не спешить с публикациями, теперь гораздо важнее накопление достоверных, несомненных данных.

Чтобы избежать проблем, связанных с влиянием на результаты измерений возможных изменений чувствительности гравиметра, можно воспользоваться методом измерения в пунктах с близкими значениями силы тяжести. Этот метод состоит в том, что выбирают два пункта с почти одинаковыми значениями силы тяжести и наблюдают разность этих значений. При чувствительности гравиметра α разность его отсчета в пунктах A и B будет $\alpha(g_A - g_B)$, а изменение этой разности равно

$$(g_A - g_B)\delta\alpha + \alpha\delta(g_A - g_B),$$

т. е. $\alpha\delta(g_A - g_B)$, так как $(g_A - g_B)$ близко к нулю. Таким образом, влияние возможного изменения α практически сводится на нет.

Проблемы, связанные с изменением силы тяжести в вулканических областях, мы рассмотрим в гл. 14.

*) Здесь, по-видимому, опечатка либо в дате землетрясения, либо в дате публикаций Хагивары и Накамуры. — Прим. перев.

ИЗОСТАЗИЯ (РАВНОВЕСИЕ ЗЕМНОЙ КОРЫ)

§ 1. КОРОТКО О СОДЕРЖАНИИ ПОНЯТИЯ
«ИЗОСТАЗИЯ»

До сих пор мы говорили о том, как измерить силу тяжести и как по данным измерений определить плотностную структуру земных недр. В результате этих работ выясняется, что в одном месте найденный профиль плотности имеет такой-то вид, а в другом месте — такой-то, и постепенно накапливаются сведения о локальных плотностных разрезах. Но сами по себе подобные результаты не очень интересны. Вот если бы удалось охватить взглядом целое и выявить какие-то общие закономерности, тогда наши знания о строении земных глубин сильно обогатились бы.

Одну из таких общих закономерностей — изостазию — мы рассмотрим в настоящей главе. Термин «изостазия» впервые использован в 1889 г. Ч. Деттоном; он образован от греческих слов *isos* — равный и *staticos* — устойчивый. Японские исследователи употребляют также выражение «равновесие земной коры». Это выражение очень хорошее, тем не менее в данной главе вместо него мы будем пользоваться словом «изостазия».

Понятие изостазии применяют к самым верхним слоям земного шара. В крайне упрощенном виде его поясняет рис. 12.1. Толщина земной коры непостоянна — в области

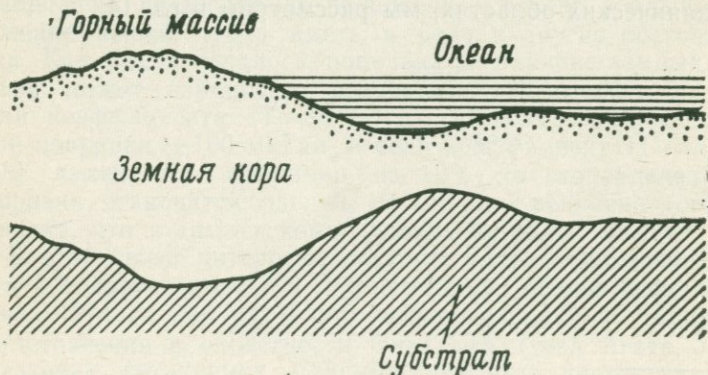


Рис. 12.1.

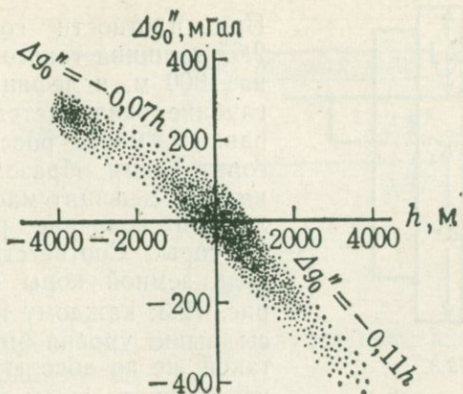


Рис. 12.2.

высоких горных хребтов на материке она толще, в глубоких океанических впадинах тоньше. Можно сказать, что земная кора «плавает» на веществе подстилающих слоев, имеющем большую, чем кора, плотность, и равновесие как бы поддерживается подъемной силой этих подстилающих слоев. Такая картина равновесия вырисовывается на основе гравиметрических данных.

Если, используя очень большое количество данных наблюдений, построить зависимость аномалии $\Delta g_0''$ от высоты h (на море высота имеет знак минус), откладывая по горизонтальной оси h , а по вертикальной $\Delta g_0''$, то получится график, показанный на рис. 12.2. На материках очень много пунктов с отрицательным, а на морях — с положительным $\Delta g_0''$. В общем $\Delta g_0''$ зависит от h линейно, но наклон прямых на материке и в океане разный:

$$\begin{aligned} \text{на материке} \quad \Delta g_0'' \text{ (мГал)} &= -0,11h \text{ (м)}, \\ \text{в океане} \quad \Delta g_0'' \text{ (мГал)} &= -0,07h \text{ (м)}. \end{aligned}$$

На суше величину $\Delta g_0''$ можно рассматривать как поправку, устраняющую притяжение масс, находящихся выше уровня моря. Например, согласно приведенным соотношениям, на горе высотой 1000 м $\Delta g_0'' = -110$ мГал; вычисленная таким образом поправка имеет смысл силы притяжения находящейся на глубине отрицательной массы (дефицита массы). Силу притяжения -110 мГал создает слой, масса которого m , отнесенная к единице поверхности, вычисляется из формулы

$$0,11 = 2\pi k^2 m,$$

откуда

$$m = 2,6 \cdot 10^5 \text{ г/см}^2.$$

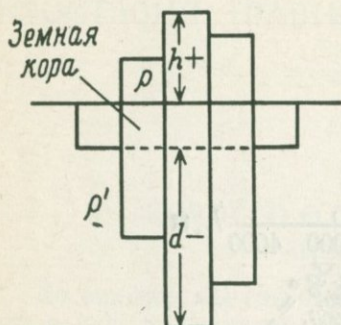


Рис. 12.3.

При плотности горных пород 2,67 толщина такого слоя d_1 равна 1000 м, и дефицит массы на глубине оказывается в точности равным массе рассматриваемой горы. Таким образом, под горой имеется дефицит массы, по абсолютной величине равный массе горы. Соответствующая модель земной коры показана на рис. 12.3: каждому избытку массы выше уровня моря отвечает такой же по абсолютной величине дефицит массы ниже уровня

моря. Такое соотношение имеет смысл условия равновесия для подъемной силы. Если принять, что земная кора, плотность которой ρ , «плавает» на слое подстилающего вещества с большей, чем ρ , плотностью ρ' , то условие равновесия имеет вид

$$\rho h = (\rho' - \rho) d_1,$$

где d_1 — толщина земной коры от уровня моря. Отсюда

$$d_1 = \frac{\rho}{\rho' - \rho} h.$$

При $\rho = 2,67$ и $\rho' = 3,00$

$$d_1 = 8h.$$

Таким образом, гористому рельефу над уровнем моря отвечают гораздо более сильно выраженные неровности нижней границы земной коры.

Поправка $\Delta g_0''$ на морской акватории означает, что мы как бы устраним из океанской чаши морскую воду, имеющую плотность 1,03, заменяя ее горной породой с такой же, как на суше, плотностью 2,67. По сравнению с обычной суши дефицит массы на море равен $(2,67 - 1,03)h$, где h — глубина моря. Сила притяжения этой недостающей массы

$$2\pi k^2 (2,67 - 1,03) h$$

при $h = 1000$ м составляет 70 мГал, что в точности соответствует (по абсолютной величине) среднему наблюдаемому значению $\Delta g_0''$ на море глубиной 1000 м. Дефицит массы на море входит со знаком минус, а соответствующая равная ей по абсолютной величине масса на глубине — со знаком плюс.

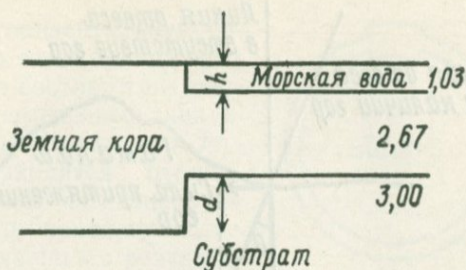


Рис. 12.4.

Модель земной коры для этого случая показана на рис. 12.4. Из условия равновесия

$$(2,67 - 1,03)h = (3,00 - 2,67)d_1$$

определяем

$$d_1 = \frac{2,67 - 1,03}{3,00 - 2,67} h = \frac{1,64}{0,33} h \approx 5h.$$

Неровности нижней границы земной коры под океаном в пять раз сильнее выражены, чем неровности океанического дна.

Таким образом, каждому избытку массы на суше (положительной массе) отвечает равный ей по абсолютной величине дефицит массы на глубине (отрицательная глубинная масса), а дефициту массы в океане соответствует равный по абсолютной величине избыток массы на глубине. Земная кора, по существу, «плавает» на нижележащем субстрате, имеющем большую плотность. Это явление называют *изостазией*.

Разумеется, не все участки земного шара находятся в строго изостатическом состоянии, но несомненно, что изостазия выражает общую широко распространенную тенденцию равновесия земной коры.

§ 2. ЗАРОЖДЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБ ИЗОСТАЗИИ

В предыдущем параграфе содержание понятия изостазии объяснено современным языком. Но в период зарождения этого понятия данных было еще не так много, как теперь, и можно было выработать лишь самое общее представление об этом явлении. С тех пор постепенно накапливались прямые гравиметрические данные, а кроме того, рос объем знаний в смежных разделах геофизики, и в результате было сформулировано описанное выше современное представление об изостазии.



Рис. 12.5.

История возникновения понятия изостазии начинается с измерений уклонения отвеса, выполненных в Индии около 120 лет назад, когда она была еще под британским управлением. В те времена англичане вели в окрестности Гималаев интенсивную геодезическую съемку. В табл. 12.1 представлены полученные ими данные об уклонении отвеса при измерениях южнее Гималаев вдоль меридиана, соответствующего $77,7^\circ$ в. д. Бывший в то время директором Индийского топографического департамента Э. Во, основываясь на идее о силе притяжения со стороны Гималайского хребта, попросил Дж. Пратта в каждой точке геодезической съемки измерять также уклонение отвеса. Из рис. 12.5 ясно, что угол отклонения отвесной линии θ равен отношению силы притяжения со стороны Гималайского хребта к величине g . Измеренные Праттом (1855) значения θ также приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Пункт измерения	Северная широта	Уклонение отвеса		
		измеренное относительное значение	расчетное значение	расчетное относительное значение
Кальяна	29° 31'	+3,367"	+27,853"	+20,944"
Кальянпур	24 7	-1,869"	+11,968"	+5,059"
Дамарджида	18 3	—	+6,909"	—

Наиболее примечательная особенность данных табл. 12.1 в том, что измеренные значения гораздо меньше рассчитанных. Как объяснить это расхождение? Гималайский хребет и создаваемая им горизонтальная составляющая силы притяжения существуют, сомневаться в этом не приходится. Чтобы

уменьшить горизонтальную составляющую силы притяжения и привести в соответствие расчетные и измеренные значения, надо допустить, что под хребтом находится отрицательная масса, компенсирующая его силу притяжения.

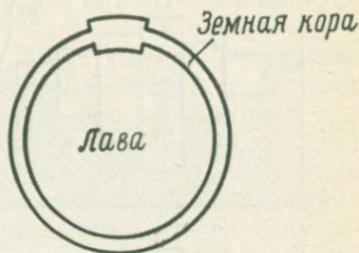


Рис. 12.6

Ознакомившись с результатами Пратта, Г. Эйри (1855), бывший тогда директором астрономической обсерватории в Гринвиче, предложил модель, показанную на рис. 12.6. Согласно этой модели, внутри Земли под земной корой находится «тяжелая лава». По Эйри горные хребты — это утолщения земной коры, выступающие не только вверх, но и вниз, внутрь «лавы». В части горного хребта, выдающейся вниз, внутрь «лавы», вместо вещества «лавы» находится вещество земной коры, имеющее меньшую, чем «лава», плотность. Иными словами, в этом выступе земной коры масса относительно «лавы» отрицательна и эффективная сила притяжения горного хребта уменьшается. В рассмотренной модели принимается, что плотность земной коры всюду, включая выступы в «лаву», постоянна.

Через несколько лет после выхода в свет статьи Эйри Пратт предложил другую модель (1859), в которой в отличие от модели Эйри плотность земной коры неодинакова: она меньше под высокими горными хребтами и, наоборот, больше под низкими, причем существует некоторая определенная глубина, на которой вес вещества под любой точкой земной поверхности (будь то высокие горы или глубокие моря) становится одинаков. Пратт полагал, что эта глубина равна приблизительно 200 км. В модели Пратта, так же, как и у Эйри, под высоким горным хребтом масса относительно вещества «лавы» отрицательна, что позволяет объяснить несовпадение измеренных и расчетных значений уклонения отвеса в Индии.

Поверхность, при достижении которой вес расположенного над ней вещества всюду одинаков, получила название *плоскости компенсации*, а соответствующая глубина — *глубины компенсации*. Модели Эйри и Пратта послужили основой для дальнейшего развития представлений об изостазии.

Из изложенного ясно, что модель Эйри (постоянная плотность земной коры) можно уподобить случаю, когда на поверхности воды плавают древесные щепки разного размера, а модель Пратта (переменная плотность) можно представить в виде погруженных в ртуть металлических столбиков разной

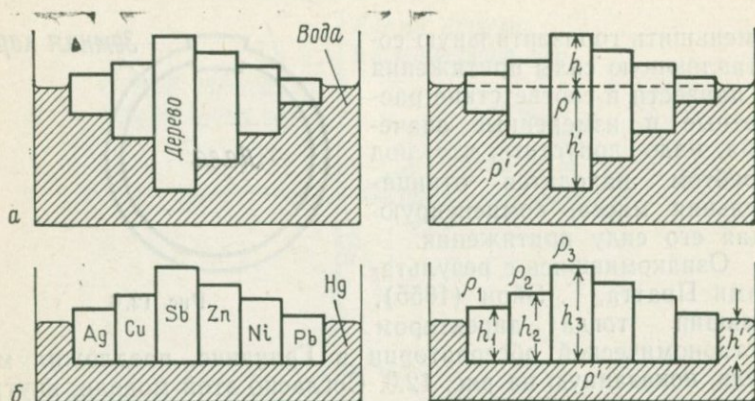


Рис. 12.7. Модели изостазии: Эйри (а) и Пратта (б).

плотности, высота которых обратно пропорциональна плотности. В модели Эйри нижняя граница земной коры имеет выступы и впадины, а в модели Пратта это идеальная плоскость (рис. 12.7).

Условие равновесия в модели Пратта имеет вид

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 = \dots = \rho' h',$$

где h' — глубина компенсации. Отсюда

$$h_2 - h_1 = \rho' h' (1/\rho_2 - 1/\rho_1).$$

Полагая

$$h_2 - h_1 = 3 \text{ км}, \quad h' = 100 \text{ км}, \quad \rho' = 3,00,$$

получаем

$$1/\rho_2 - 1/\rho_1 = 3/300 = 0,01.$$

Если все ρ_1, ρ_2, \dots приблизительно равны 2,7, то

$$\rho_1 - \rho_2 = 0,07.$$

Итак, если разность высот составляет 3 км, то разность плотностей не может превышать 0,07.

У Эйри земная кора плавает на «тяжелой лаве». Но его «лава» имеет не тот смысл, который мы вкладываем в это слово сейчас. У Эйри она представляет собой пластическое вещество, соответствующее современным представлениям о веществе мантии. Из двух рассмотренных нами моделей изостазии в свете современных данных предпочтительнее модель Эйри. Именно поэтому мы воспользовались ею в § 1 данной главы при описании понятия изостазии.

§ 3. РАБОТЫ ХЕЙФОРДА, БОУИ И ХЕЙСКАНЕНА

Приблизительно через 50 лет после выхода пионерских работ Эйри и Пратта проблема изостазии получила большое развитие в США. Сотрудник Национального управления Береговой и геодезической службы США Дж. Хейфорд (1909) обработал результаты приблизительно 250 измерений отклонения отвеса, выполненных в разных местах США. Он пользовался моделью Пратта и пытался определить глубину залегания плоскости компенсации путем минимизации суммы квадратов разностей (расчетное значение минус измеренное значение). Действуя методом проб и ошибок, он задавался разными значениями искомой глубины и каждый раз вычислял указанную сумму из 250 членов. В результате колоссальной вычислительной работы Хейфорд пришел к выводу, что сумма минимизируется при глубине залегания плоскости компенсации 120 км.

Измерения отклонения отвеса — очень трудоемкая работа, поэтому соответствующих данных мало. Гораздо проще измерять силу тяжести. Поэтому У. Боуи частично в сотрудничестве с Хейфордом (1912), частично самостоятельно (1917) исследовал проблему изостазии, пользуясь данными о силе тяжести. Он тоже исходил из модели Пратта и определял глубину компенсации путем минимизации суммы квадратов разностей (расчетное значение минус измеренное). В своем исследовании Боуи использовал большое количество данных по США, Канаде, Индии и нашел, что указанная сумма квадратов разностей минимальна при глубине компенсации ~ 120 км. Результаты Боуи приведены на рис. 12.8.

Кроме определения глубины компенсации, Боуи занимался еще одним важным вопросом: в одинаковом ли состоянии находятся при изостазии мелкие и крупные формы рельефа? С физической точки зрения естественно считать, что вряд ли каждая из мелких форм по отдельности находится в изостатическом равновесии, скорее равновесие наступает в среднем для структур, заключенных в круге некоторого радиуса. Если это так, то каков порядок величины такого радиуса? Диаметр рассматриваемого Боуи круга называют *региональностью изостазии*. На основе американских гравиметрических данных Боуи нашел, что указанный диаметр составляет около 100 км. Более мелкие формы рельефа не находятся в изостатическом равновесии с поъемной силой, а удерживаются упругостью земной коры. Об изостатическом равновесии отдельной структуры данного размера говорят как о *локальной изостазии*, а о равновесии усредненных форм

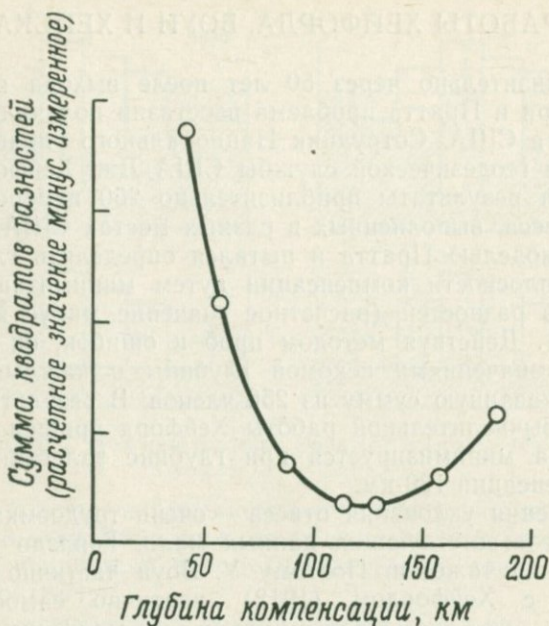


Рис. 12.8.

рельефа, заключенных внутри некоторого региона,— как о региональной изостазии.

Следующее крупное достижение в исследовании проблем изостазии связано с обширными исследованиями финского ученого В. Хейсканена. Начиная с 1925 г. он постепенно обрабатывал доступные ему гравиметрические данные по всем странам и регионам, вычисляя толщину земной коры в модели Эйри, глубину компенсации в модели Пратта и региональность изостазии, введенную Боуи. Обрабатываемые Хейсканеном данные представляли довольно хаотический набор, поскольку относились к самым разным районам земного шара. Но он заметил, что во всех случаях эти данные допускали два равносильных толкования: их можно было объяснить либо с помощью модели Эйри при толщине земной коры d_1 , либо с помощью модели Пратта при глубине компенсации $2d_1$. Если, например, годилась модель Эйри с толщиной земной коры 50 км, то столь же хорошее объяснение получалось при использовании модели Пратта с глубиной компенсации 100 км. Хейсканен пришел к такому выводу «эмпирически», однако он имеет ясный теоретический смысл: сосредоточенная аномальная масса, расположенная на глу-

бине d_1 , создает на дневной поверхности такое же распределение силы тяжести, как и равная ей по величине аномальная масса, равномерно распределенная между дневной поверхностью и глубиной $2d_1$. О подобной неоднозначности мы уже упоминали раньше, но сейчас в связи с проблемами изостазии рассмотрим этот вопрос еще раз. В следующих параграфах мы исследуем вопросы изостазии, применяя метод рядов Фурье, поскольку с его помощью можно получить простое решение многих относящихся к изостазии проблем.

§ 4. КАКАЯ ИЗ МОДЕЛЕЙ — ЭЙРИ ИЛИ ПРАТТА — БОЛЕЕ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНА?

Сначала рассмотрим модель Эйри. Зависимость высоты рельефа h от координаты x представим в виде ряда Фурье:

$$h(x) = \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx}.$$

В модели Эйри (рис. 12.9) на глубине d (равной $2\pi d_1/L$, где L — период ряда Фурье), на которой расположена нижняя граница земной коры, распределена масса ($-rh$), противоположная по знаку массе, образующей рельеф дневной поверхности. Эта масса создает на поверхности земли силу тяжести

$$\Delta g''(x) = -2\pi k^2 \rho \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx} \exp(-md).$$

В модели Пратта (рис. 12.10) масса ($-rh$) равномерно распределена между уровнем моря и глубиной D залегания плоскости компенсации. Распределение массы δ_m на некоторой глубине z

$$\delta_m = -\frac{\rho}{D} \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx} \delta z$$

создает на поверхности земли распределение силы тяжести

$$\delta \Delta g''_0(x) = -2\pi k^2 \frac{\rho}{D} \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx} \exp(-mz) \delta z.$$

Полное распределение $\Delta g''_0(x)$ на дневной поверхности получается интегрированием последнего выражения по z в пределах от 0 до D :

$$\Delta g''_0(x) = -\frac{2\pi k^2 \rho}{D} \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx} \int_0^D \exp(-mz) dz.$$



Рис. 12.9.



Рис. 12.10.

Итак, мы получили два выражения для $\Delta g_0''(x)$ — по модели Эйри и модели Пратта. Если они равносильны, то ни одно из них не лучше другого. Условие совпадения двух выражений для $\Delta g_0''(x)$ имеет вид

$$\exp(-md) = \frac{1}{D} \int_0^D \exp(-mz) dz.$$

Запишем разложения левой и правой частей этого соотношения в ряд Тейлора. При малых d и D получаем для левой части

$$\exp(-md) = 1 - md + \dots$$

и для правой части

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \int_0^D \exp(-mz) dz &= \frac{1}{D} \left[-\frac{1}{m} \exp(-mz) \right]_0^D = \\ &= \frac{1}{mD} [1 - \exp(-mD)] = \\ &= \frac{1}{mD} \left(1 - 1 + mD - \frac{m^2 D^2}{2} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{mD}{2} + \dots \end{aligned}$$

Мы видим, что при $D = 2d$ рассматриваемые выражения совпадают друг с другом. Именно это обстоятельство эмпирически обнаружил Хейсканен. Если бы он проделал изложенные выкладки, отпала бы необходимость в колоссальных расчетах, на которые он затратил годы.

§ 5. ТОЛЩИНА ЗЕМНОЙ КОРЫ

Итак, на основе только гравиметрических данных из двух моделей — Эйри и Пратта — выбрать какую-нибудь одну невозможно. Поэтому изучим их свойства более детально. В данном параграфе мы займемся определением толщины земной коры в модели Эйри. Рассмотрение чрезвычайно облегчается использованием рядов Фурье.

В одномерном случае высота земной поверхности

$$h(x) = \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx}.$$

С этим рельефом связана масса ρh , и в условиях изостазии на глубине d , равной толщине земной коры, расположена масса

$$-\rho h(x) = -\rho \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx},$$

создающая на земной поверхности распределение силы тяжести

$$\Delta g_0''(x) = -2\pi k^2 \rho \sum H_m \frac{\cos mx}{\sin mx} \exp(-md),$$

которое воспринимается при гравиметрической съемке как аномалия

$$\Delta g_0''(x) = \sum B_m \frac{\cos mx}{\sin mx}.$$

Таким образом, в условиях изостазии

$$-2\pi k^2 \rho H_m \exp(-md) = B_m,$$

откуда

$$d = -\frac{1}{m} \ln \left(-\frac{B_m}{2\pi k^2 \rho H_m} \right).$$

Иными словами, в условиях изостазии толщину земной коры d в модели Эйри можно непосредственно и довольно просто определить, обрабатывая топографические данные о рельефе и распределение $\Delta g_0''$ (Цубои, 1938).

В правой части последней формулы стоят знаки минус (один из них — под знаком логарифма). Чтобы величина d (имеющая смысл толщины земной коры) была положительной, должны выполняться два условия.

1) значения B_m и H_m должны иметь противоположные знаки;

2) отношение $B_m/2\pi k^2 \rho H_m$ по абсолютной величине должно быть меньше 1, так чтобы логарифм был отрицательным.

Мы рассмотрели одномерный случай. В двумерном случае с использованием двойного ряда Фурье получается формула

$$d = - \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \ln \left(- \frac{B_{mn}}{2\pi k^2 \rho H_{mn}} \right).$$

§ 6. ИЗОСТАЗИЯ СЕВЕРО-АМЕРИКАНСКОГО КONTИНЕНТА

В предыдущем параграфе мы познакомились с общей схемой применения рядов Фурье к анализу проблем изостазии, а здесь рассмотрим применение этих идей к конкретной задаче (Цубои, 1939).

В качестве примера рассмотрим Северо-Американский континент. Для анализа выберем прямоугольник, ограниченный параллелями 30—48° с. ш. и меридианами 77—125° з. д. и простирающийся с востока на запад на 4000 км и с севера на юг на 2000 км. Карта рельефа этой области и распределение в ней $\Delta g_0''$ приведены на рис. 12.11 и 12.12. Гравиметрическая карта рис. 12.12 построена на основе измерений силы тяжести более чем в 1000 пунктах. Сравнение этих рисунков показывает, что чем выше рельеф, тем больше отрицательная величина $\Delta g_0''$; поэтому в среднем условия изостазии выполнены.

При разложении в двойной ряд Фурье распределений $\Delta g_0''$ и высоты h были подсчитаны коэффициенты членов разложения до 18 порядка вдоль оси x (вдоль параллели) и оси y (вдоль меридиана), т. е. всего по

$$18 \cdot 18 \cdot 4 = 1296 \text{ коэффициентов}$$

для каждого из разложений h и $\Delta g_0''$, и были рассмотрены 1296 пар коэффициентов H_{mn} и B_{mn} . Не все эти пары пригодны для вычисления толщины d . Выше мы отмечали, что необходимое условие пригодности пары коэффициентов H_{mn} и B_{mn} для вычисления d — противоположность знаков этих коэффициентов. Оказывается, что среди 1296 пар коэффициентов знаки их противоположны лишь у 712 пар, т. е.

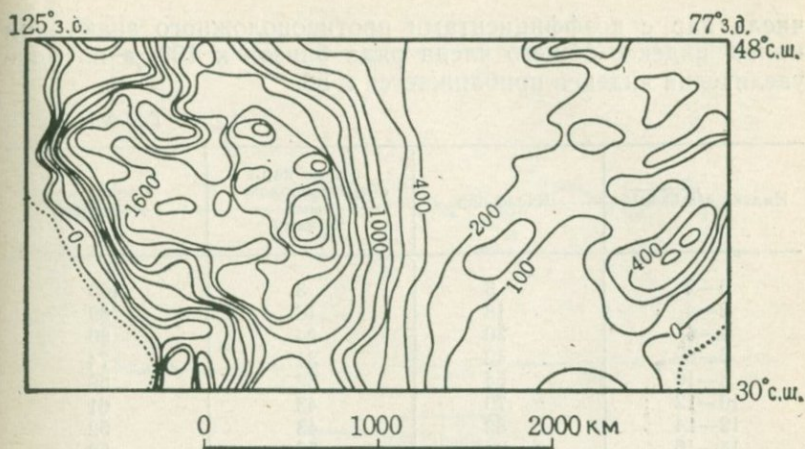


Рис. 12.11. Рельеф США (изолинии в метрах).

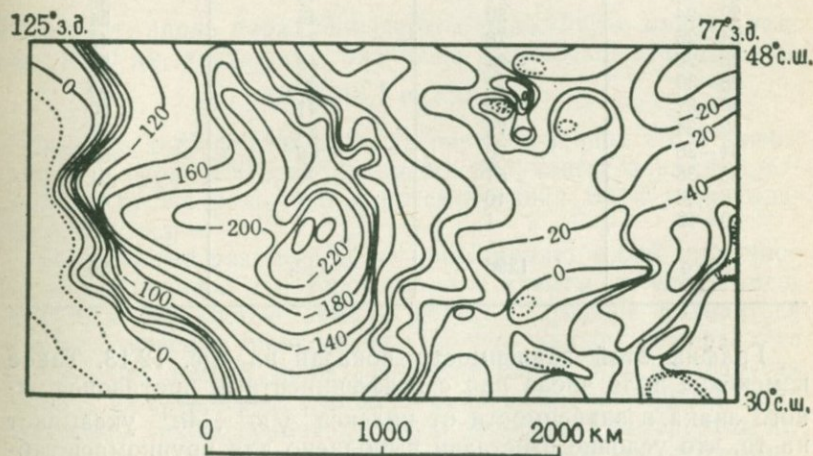


Рис. 12.12. Распределение аномалий Буге в США (мГал)

приблизительно у 55% пар. Этот процент определен без учета индекса общего члена ряда. Зависимость доли числа пар с коэффициентами противоположных знаков от индекса общего члена ряда представлена в табл. 12.2, где в качестве указанного индекса использовано число $\sqrt{m^2 + 4n^2}$. Такой выбор индекса связан с тем, что положенный в основу расчета прямоугольник вдоль параллели имеет размер 4000 км, а вдоль меридиана 2000 км, так что индексу n вдоль меридиана соответствует индекс $2n$ вдоль параллели. Процент

числа пар с коэффициентами противоположного знака при малом индексе общего члена ряда близок к 100, а по мере увеличения индекса приближается к 50.

Таблица 12.2

Индекс $\sqrt{m^2+4n^2}$	Число пар	Число пар с противоположными знаками	Процентное отношение
0—2	3	3	100
2—4	18	16	89
4—6	30	24	80
6—8	42	31	74
8—10	54	32	59
10—12	70	43	61
12—14	82	43	52
14—16	90	52	58
16—18	110	59	54
18—20	95	54	57
20—22	90	44	49
22—24	80	43	54
24—26	78	37	47
26—28	84	43	51
28—30	72	40	56
30—32	82	41	50
32—34	72	34	47
34—36	76	40	53
36—38	51	26	51
38—40	16	7	44
40—42	1	0	0
Итого	1296	712	55

График этой зависимости показан на рис. 12.13. Такое изменение доли числа пар с коэффициентами противоположного знака в зависимости от индекса $\sqrt{m^2+4n^2}$ указывает на то, что условие изостазии выполнено для крупномасштабных форм рельефа, соответствующих небольшим значениям индекса, и не всегда выполняется при уменьшении размера форм рельефа (большие значения индекса). Граничное значение индекса, при котором рассматриваемое отношение становится равным 50%, согласно рис. 12.13, можно определить как

$$\sqrt{m^2+4n^2}=20,$$

что можно записать также в виде

$$\sqrt{2m^2}=20, \quad m=14,1,$$

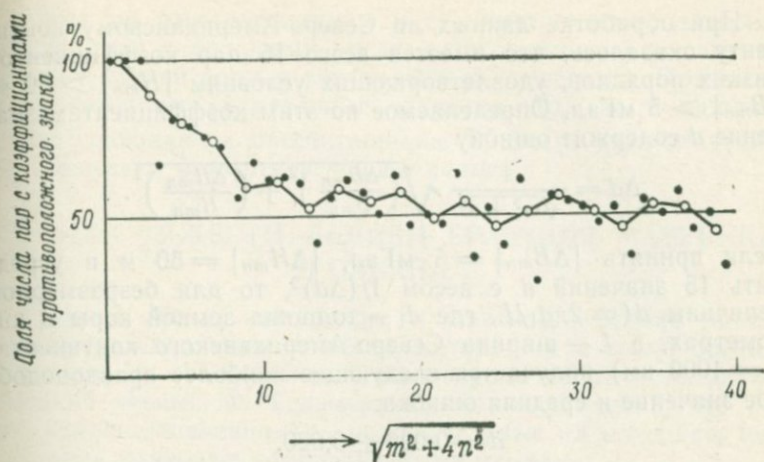


Рис. 12.13.

Поскольку вдоль параллели период ряда Фурье принят равным 4000 км, указанному значению m отвечает длина волны $4000 : 14,1 \approx 280$ км.

Размер средней формы рельефа равен половине этого значения, т. е. около 150 км. Так просто получается параметр, играющий ту же роль, что и рассмотренная Боуи региональность изостази.

Полученный размер 150 км представляет собой граничное значение, начиная с которого горные хребты не могут удерживаться упругостью земной коры, а должны находиться в изостатическом равновесии. Можно также сказать, что в областях земной коры размером более 150 км упругая энергия уже не играет основной роли и, кроме упругой, надо учитывать также гравитационную энергию. Размер этот играет важную роль в теории возникновения землетрясений, о чем еще будет речь ниже.

Перейдем к определению толщины земной коры d . Как уже отмечалось, ее можно вычислить по комбинации коэффициентов H_{mn} и B_{mn} . При вычислении d нужно пренебречь членами высокого порядка, отвечающими мелким формам рельефа, и учитывать только крупномасштабные формы с размером больше региональности изостази. Кроме того, поскольку полученные из измерений коэффициенты H_{mn} и B_{mn} неизбежно содержат погрешности, при вычислении следует учитывать только достаточно большие по величине коэффициенты.

При обработке данных по Северо-Американскому континенту оказалось, что имеется всего 15 пар коэффициентов низких порядков, удовлетворяющих условиям $|H_{mn}| > 50$ м, $|B_{mn}| > 5$ мГал. Определяемое по этим коэффициентам значение d содержит ошибку

$$\Delta d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\left(\frac{\Delta B_{mn}}{B_{mn}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_{mn}}{H_{mn}}\right)^2}.$$

Если принять $|\Delta B_{mn}| = 5$ мГал, $|\Delta H_{mn}| = 50$ м и усреднить 15 значений d с весом $1/(\Delta d)^2$, то для безразмерной величины d ($\equiv 2\pi d_1/L$, где d_1 — толщина земной коры в километрах, а L — ширина Северо-Американского континента; $L = 4000$ км) получается следующее наиболее правдоподобное значение и средняя ошибка:

$$d = 0,096 \pm 0,020.$$

Отсюда находим толщину земной коры:

$$d_1 = \frac{4000}{2\pi} (0,096 \pm 0,020) = 61 \pm 13 \text{ км.}$$

Выше уже говорилось, что рассчитанная Боуи глубина компенсации в модели Пратта оказалась приблизительно равной 120 км, а мы нашли, что толщина земной коры в модели Эйри составляет 61 км. Отмечалось также, что по гравиметрическим данным невозможно отличить модель Пратта с глубиной компенсации 120 км от модели Эйри с толщиной коры 60 км, откуда следует, что полученный нами результат хорошо согласуется с результатом Боуи. Преимущество расчета с помощью разложения в ряд Фурье в его простоте и в том, что таким путем непосредственно определяются сразу два параметра: толщина земной коры и региональность изоэстазии.

Средняя высота Северо-Американского континента $H_{00} = 601$ м, а среднее значение $\Delta g_0''$ по североамериканским данным $B_{00} = -70,9$ мГал. Из соотношения

$$-2\pi k^2 \rho H_{00} = B_{00}$$

можно определить среднюю плотность горных пород ρ , которая оказывается равной 2,8. Чтобы обеспечить указанное среднее значение высоты, земная кора должна быть немного толще. Увеличение толщины земной коры $H_{00}\rho/(\rho' - \rho)$ составляет приблизительно 5 км. Следовательно, у материка, поверхность которого находится на уровне моря, толщина земной коры составит

$$61 - 5 = 56 \text{ км.}$$

Итак, по топографическим и гравиметрическим данным, относящимся к большому числу пунктов, можно рассчитать толщину земной коры и региональность изостазии. При этом оказывается, что измеренные значения $\Delta g_0''$ не в каждом пункте совпадают с рассчитанными. Разность двух значений $\Delta g_0''$ называют *изостатической аномалией*.

§ 7. СИЛА ТЯЖЕСТИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ МАТЕРИКА И ОКЕАНА

Граница между материком и океаном — особая линия в распределении силы тяжести, интересная с точки зрения изостазии. На это обстоятельство впервые обратил внимание немецкий ученый Ф. Гельмерт (1910), полагавший, что на этой границе значения Δg_0 , положительные на материке, меняют знак, становясь отрицательными в океане.

Предположим, что как в области, занимаемой океаном, так и на материке удовлетворяется условие изостазии (рис. 12.14). Соответствующее этому рисунку распределение аномальной массы можно представить простой моделью, показанной на рис. 12.15. В этой модели на небольшой глубине d расположена сосредоточенная на плоскости положительная масса, а на большой глубине kd — отрицательная масса. Вычислим распределение Δg_0 в такой модели.

В § 3 гл. 5 (п. «е») мы выяснили, что аномальная глубинная масса, сосредоточенная на горизонтальной полуплоскости, создает на поверхности силу тяжести Δg_0 , пропорциональную углу, под которым край этой полуплоскости виден из точки наблюдения.

Будем считать, что положительная масса находится на определенной глубине d , а отрицательная масса расположена на глубине kd , где k принимает различные значения, и найдем распределение Δg_0 для каждого k . Для этого надо построить зависимость от расстояния разности углов, под

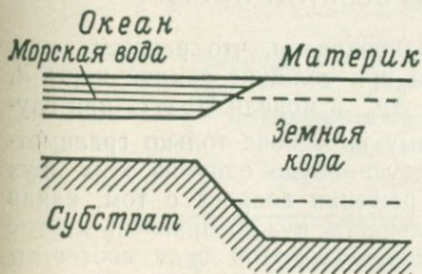


Рис. 12.14.

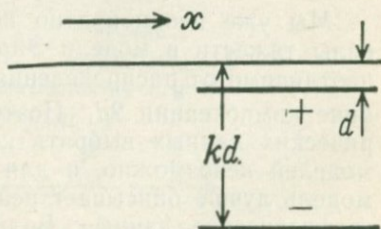


Рис. 12.15.

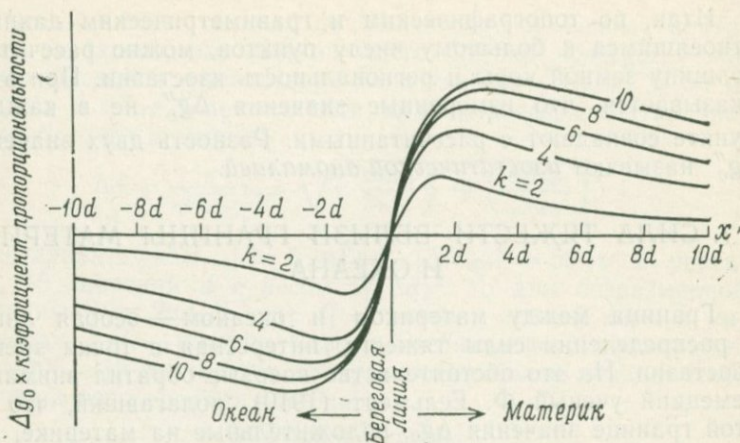


Рис. 12.16.

которыми края двух полуплоскостей видны из точки наблюдения. Результат показан на рис. 12.16.

Мы получили, что величина Δg_0 очень быстро меняется вблизи границы находящихся в состоянии изостазии материка и океана, причем скорость изменения зависит от глубины залегания отрицательной массы, т. е. от толщины земной коры. Этот результат можно использовать для решения обратной задачи — определения толщины земной коры по распределению Δg_0 вблизи побережья.

Но на практике структура границы между материком и океаном часто бывает более сложной и не всегда эта область находится в состоянии изостазии. Поэтому результаты, получаемые для толщины земной коры методом Гельмерта, не всегда удовлетворительны.

§ 8. О СТРОЕНИИ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Мы уже неоднократно подчеркивали, что распределение силы тяжести в модели Эйри при толщине земной коры d_1 неотличимо от распределения $\Delta g_0''$ в модели Пратта при глубине компенсации $2d_1$. Поэтому на основе только гравиметрических данных выбрать какую-нибудь одну из этих двух моделей невозможно, и для решения вопроса о том, какая модель лучше описывает реальность, нужно привлечь другие геофизические данные. Больше всего этой цели соответствуют результаты исследования распространения сейсмических волн.

Рассмотрим показанную на рис. 12.17 модель, в которой вблизи земной поверхности находится слой горной породы толщиной a . Обозначим скорость распространения сейсмических волн в веществе этого слоя v , а в веществе подстилающего его слоя V , причем $V > v$. Возбужденная в точке C сейсмическая волна может достичь точки наблюдения O двумя путями, показанными на рис. 12.17 пунктиром и сплошной линией. Волна, идущая вдоль пунктирной прямой, распространяется непосредственно в приповерхностном слое, а волна, путь которой обозначен сплошной линией, падает на границу раздела слоев под углом полного внутреннего отражения, распространяется вдоль границы раздела и только после этого попадает в точку наблюдения O . Если расстояние Δ между точками C и O невелико, первой приходит волна, следующая вдоль прямого пути, обозначенного пунктиром, а при большом расстоянии Δ в точку O сначала приходит волна, идущая вдоль границы раздела слоев. Обе волны приходят в точку O одновременно при

$$\Delta = 2a \sqrt{(V+v)/(V-v)},$$

откуда

$$a = \frac{\Delta}{2} \sqrt{\frac{V-v}{V+v}}.$$

Таким образом, по измеренным значениям V , v , Δ можно определить толщину приповерхностного слоя a . Например, при $\Delta = 180$ км, $V = 8,0$ км/с, $v = 4,0$ км/с $a \approx 53$ км.

Рассмотренный метод определения толщины приповерхностного слоя предложен югославским ученым А. Мохоровичичем (1909). В его честь нижняя граница земной коры, на которой очень резко изменяется скорость распространения сейсмических волн, названа *разделом Мохоровичича* или, кратко, *Мохо*.

Раздел Мохо в разных местах земного шара расположен на разной глубине, но под материками глубина его залегания



Рис. 12.17.

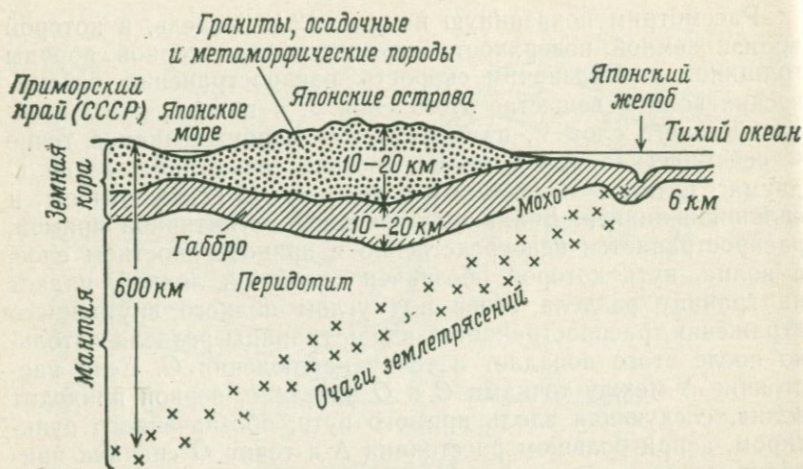


Рис. 12.18. Строение земной коры (по Х. Куно, 1961).

чаще всего 40—60 км. Тот же порядок величины имеет толщина земной коры в модели изостазии Эйри. Поэтому естественно принять, что приповерхностный слой Мохоровичича и земная кора в модели Эйри — одно и то же. Таким образом, вопрос о том, какая из моделей — Эйри или Пратта — более предпочтительна, решается в пользу модели Эйри и термин «земная кора», употреблявшийся нами до сих пор без должного определения, приобретает ясный смысл. Материал, лежащий непосредственно под земной корой, получил название «мантии». Вопрос о том, из каких веществ состоят земная кора и мантия, из гравиметрических данных решить нельзя. На основе данных других исследований в настоящее время состав земной коры и мантии принимается примерно таким, как показано на рис. 12.18 (Х. Куно, 1961).

§ 9. НАРУШЕНИЕ ИЗОСТАЗИИ И ПРОСТИРАНИЕ СТРУКТУР

Итак, наши знания об изостазии стали более конкретными, но, разумеется, они еще далеки от полноты. С явлением изостазии связано много интересных проблем. Одна из них — проблема полярности изостазии.

При использовании двойных рядов Фурье для анализа изостазии направления x и y считаются равноправными. Но всегда ли это оправдано? Например, при рассмотрении изостазии вытянутых в длинные цепи горных хребтов вряд ли

разумно считать равноправными направление вдоль хребта и перпендикулярное к нему направление.

Хорошим примером является распределение $\Delta g_0''$ в горном массиве Альп. Альпийская область и распределение $\Delta g_0''$ в ней заметно вытянуты по широте. Поэтому мы разложим распределения высот и $\Delta g_0''$ в двойной ряд Фурье, выбрав за основу прямоугольник, простирающийся по широте на 600 км ($\lambda = 6,0 \div 14,0^\circ$ в.д.), а по долготе на 440 км ($\varphi = 46^\circ 20' \div 50^\circ 20'$ с.ш.), и определим коэффициенты H_{mn} , B_{mn} . Поскольку наш прямоугольник длиннее вдоль параллели, чем вдоль меридиана, примем, что m изменяется от 0 до 12, а n — от 0 до 9, и выясним, когда H_{mn} и B_{mn} имеют противоположные знаки. Имеется четыре типа слагаемых с одинаковыми m и n , а именно слагаемые вида $\sin mx \sin ny$, $\cos mx \sin ny$, $\sin mx \cos ny$, $\cos mx \cos ny$. На рис. 12.19 квадрат, отвечающий заданной паре m , n , разбит на четыре меньших квадрата; проверим, в каких из них коэффициенты H_{mn} и B_{mn} имеют требуемые условием изостаэии противоположные знаки. Полученный результат представлен на рис. 12.20, где случаи противоположных знаков отмечены кружком.

Из этого рисунка видно, что распределения по широте и по долготе резко различаются. При $n = 0, 1$ доля кружков составляет

$$\frac{17 + 22}{24 + 48} = \frac{39}{72} = 54\%,$$

а при $m = 0, 1$ эта доля

$$\frac{18 + 31}{18 + 36} = \frac{49}{54} = 91\%.$$

Налицо анизотропия. Формы рельефа, вытянутые вдоль параллели, как на рис. 12.21, а, практически уравновешены, а о состоянии форм, ориентированных, как на рис. 12.21, б, нельзя сказать ничего определенного. Таким образом, изостаэию недостаточно рассматривать только как статически равновесное состояние огромных горных масс. По-видимому,

	m	
	$\sin mx$	$\cos mx$
	$\sin ny$	$\sin ny$
n	$\sin mx$	$\cos mx$
	$\cos ny$	$\cos ny$

Рис. 12.19.

n	m												Доля значков	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		12
0	○ ○ ○	○ ○	○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○	○ ○	○	○	○ ○ ○	○ ○	○	17/24
1	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	22/48
2	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	27/48
3	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	32/48
4	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	26/48
5	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	27/48
6	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	31/48
7	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	27/48
8	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	26/48
9	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	16/24
Доля значков	$\frac{18}{18}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{11}{18}$	

Рис. 12.20.

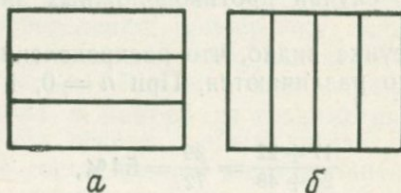


Рис. 12.21.

надо принимать во внимание и динамический аспект этого явления.

§ 10. ПРОЦЕССЫ УСТАНОВЛЕНИЯ ИЗОСТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Какими путями устанавливается изостазия? Этот вопрос удобно рассмотреть на примере поднятия Скандинавского п-ова, где земная кора сильно вспучилась: из рис. 12.22 видно, что следы береговой линии времен последнего крупного следенения в наше время обнаруживаются на высотах до

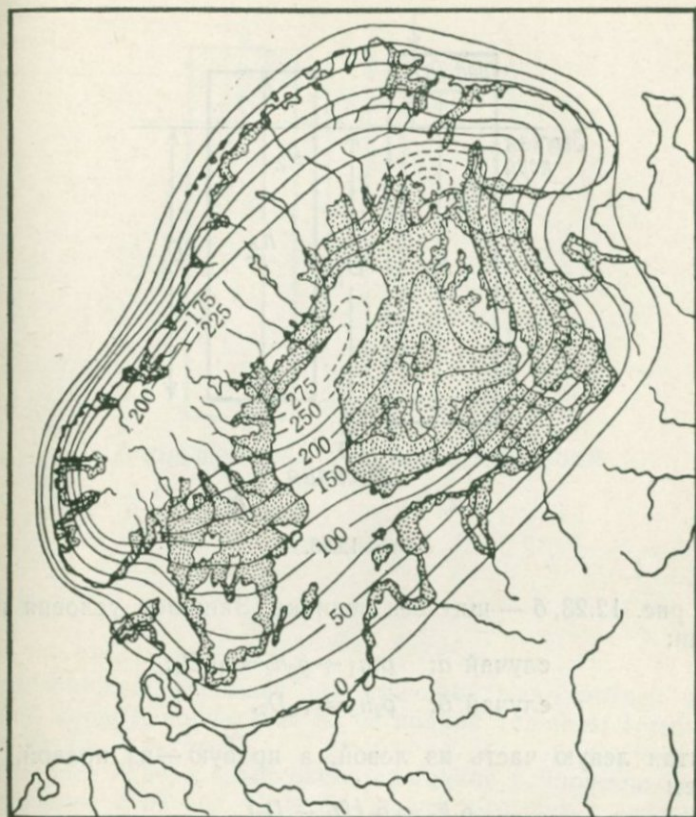


Рис. 12.22. Линии равной высоты подъема Скандинавского п-ова (м).

275 м. Установлено, что с конца ледникового периода и по настоящее время эта область поднималась как единый щит.

В чем причина подъема Скандинавского п-ова? В прошлом земная кора здесь была нагружена весом льда, и можно думать, что Скандинавский щит начал подниматься из-за исчезновения нагрузки после таяния ледника: под тяжестью льда земная кора сначала упруго прогнулась, а когда льда не стало, породы начали возвращаться к первоначальному положению; при этом прогиб земной коры составлял минимум 275 м. Но чтобы обеспечить такой большой упругий прогиб, толщина ледника должна была равняться 6000—7000 м, что слишком много со всех точек зрения.

Другое объяснение основано на представлении об изостазии. На рис. 12.23, а показан щит, покрытый ледником,

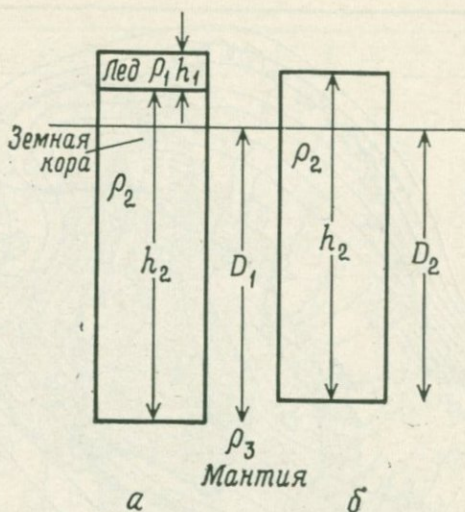


Рис. 12.23.

а на рис. 12.23, б — щит без ледника. Запишем условия изостазии:

$$\text{случай а: } \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho_3 D_1,$$

$$\text{случай б: } \rho_2 h_2 = \rho_3 D_2.$$

Вычитая левую часть из левой, а правую — из правой, получаем

$$\rho_1 h_1 = \rho_3 (D_1 - D_2),$$

где $(D_1 - D_2)$ — величина поднятия щита. Отсюда

$$h_1 = \rho_3 (D_1 - D_2) / \rho_1.$$

Подставляя значения $(D_1 - D_2) = 275$ м, $\rho_1 = 0,9$, $\rho_3 = 3,0$, получаем

$$h_1 = 3,0 \cdot 275 / 0,9 \approx 920 \text{ м.}$$

Значение 920 м для толщины ледника гораздо более правдоподобно. Следовательно, с помощью изостазии удастся дать вполне разумное объяснение подъема Скандинавского щита.

Рассмотрим теперь случай, когда вес материка уменьшается из-за выветривания или, наоборот, возрастает из-за отложения осадков. Запишем условие изостазии для модели, показанной на рис. 12.24, а:

$$\rho_2 (l_1 + l_2) = \rho_3 l_2.$$

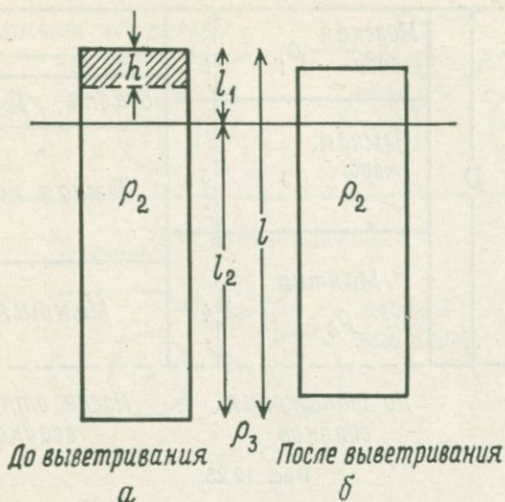


Рис. 12.24.

Отсюда

$$l_1/l_2 = (\rho_3 - \rho_2)/\rho_2.$$

Таким образом, толщина выступающей над мантией части земной коры l_1 получается из ее полной толщины l умножением на $(\rho_3 - \rho_2)/\rho_3$ *).

На рис. 12.24, а изображено состояние равновесия до выветривания, а на рис. 12.24, б — после того, как в результате выветривания был снят слой вещества толщиной h и толщина земной коры стала равна $(l_1 + l_2 - h)$. Толщина возвышающейся над мантией части земной коры в этом состоянии равна

$$(l_1 + l_2 - h)(\rho_3 - \rho_2)/\rho_3.$$

Поскольку до выветривания земная кора возвышалась над мантией на $(l_1 + l_2)(\rho_3 - \rho_2)/\rho_3$, высота земной поверхности уменьшилась на величину $h(\rho_3 - \rho_2)/\rho_3$. Если в результате выветривания толща земной коры сократилась на $h = 1$ км, то поверхность понизилась на

$$1 \cdot \frac{3,0 - 2,7}{3,0} = 0,1 \text{ км.}$$

*) Из условия $l_2/l_1 = \rho_2/(\rho_3 - \rho_2)$ вытекает $l_2/l_1 + 1 = \rho_2/(\rho_3 - \rho_2) + 1$, или $(l_1 + l_2)/l_1 = \rho_3/(\rho_3 - \rho_2)$, т. е. $l_1/l = (\rho_3 - \rho_2)/\rho_3$, где $l = l_1 + l_2$.
Прим. перев.

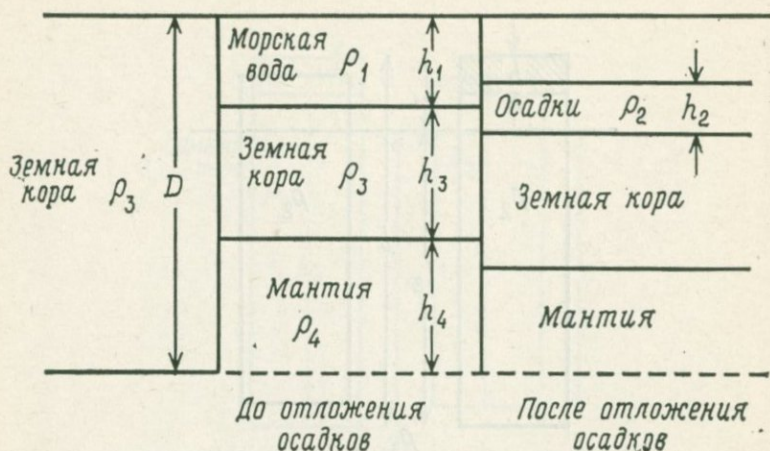


Рис. 12.25.

Условие изостазии не сможет быть выполнено, если не всплывет часть земной коры, имеющая толщину $1 - 0,1 = 0,9$ км. Иными словами, при понижении земной поверхности на 100 м из мантии всплывает 900-метровая толща земной коры. Вообще, если высота местности за счет выветривания понижается на H , то из глубин воздымается толща $9H$. Возможно, именно этот механизм позволяет нам сейчас видеть обнажения магматических пород, которые образовались на очень большой глубине.

Рассмотрим теперь противоположный выветриванию процесс — осадконакопление. Схема его изображена на рис. 12.25, где показаны морская вода, осадки, земная кора и вещество мантии. При изостатическом равновесии

$$\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 = \text{const} = \rho_3 D.$$

До начала осадконакопления $h_2 = 0$. С началом этого процесса равновесие сдвигается, причем

$$\rho_1 \delta h_1 + \rho_2 \delta h_2 + \rho_3 \delta h_3 + \rho_4 \delta h_4 = 0.$$

Но поскольку при отложении осадков толщина земной коры h_3 не изменяется, $\delta h_3 = 0$ и

$$\rho_1 \delta h_1 + \rho_2 \delta h_2 + \rho_4 \delta h_4 = 0.$$

Кроме того, из геометрических соображений следует, что

$$\delta h_1 + \delta h_2 + \delta h_4 = 0.$$

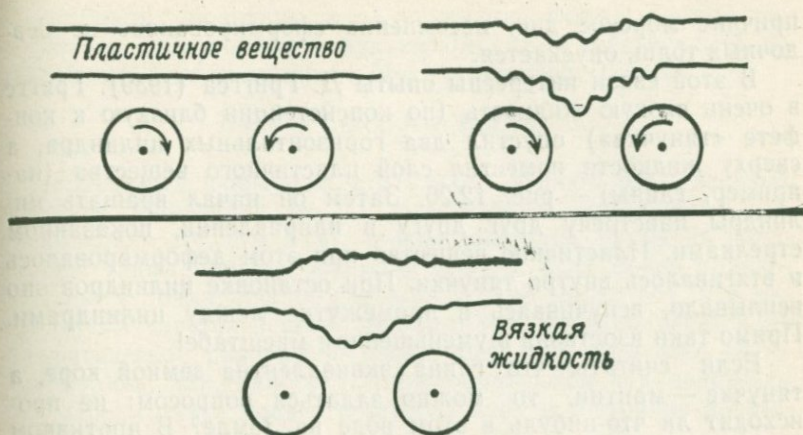


Рис. 12.26. Опыт Григгса.

Комбинируя две последние формулы, приходим к соотношению

$$\delta h_1 = - \frac{\rho_4 - \rho_2}{\rho_4 - \rho_1} \delta h_2.$$

Разности $(\rho_4 - \rho_2)$ и $(\rho_4 - \rho_1)$ положительны. Поэтому при накоплении осадков ($\delta h_2 > 0$) в условиях изостатического равновесия приращение δh_1 отрицательно, т. е. море мелеет. Но уменьшение глубины моря не равно толщине слоя осадка, оно в $(\rho_4 - \rho_2)/(\rho_4 - \rho_1)$ раз меньше. Например, при

$$\rho_1 = 1,0, \quad \rho_2 = 1,5, \quad \rho_4 = 3,0$$

отношение

$$(\rho_4 - \rho_2)/(\rho_4 - \rho_1) = 1,5/2,0 = 0,75.$$

При накоплении 1000-метрового слоя осадков глубина моря уменьшается не на 1000, а на 750 м. На оставшиеся 250 м земная кора погружается в глубь мантии для сохранения равновесия. Тем не менее море мелеет. Морское дно не становится глубже, пока плотность вещества осадков ρ_2 меньше плотности вещества мантии ρ_4 .

Как же тогда объяснить существование геосинклиналей, встречающихся во многих районах земного шара? Геосинклиналями называют узкие, преимущественно вытянутые зоны, в которых скапливаются многокилометровые толщи осадков. Морское дно в геосинклинальных зонах опускается, но, как показывает предыдущий расчет, оно не может опускаться под тяжестью отложившихся на нем осадков. По какой-то

причине морское дно, несомненно сформированное из осадочных толщ, опускается.

В этой связи интересны опыты Д. Григгса (1939). Григгс в очень вязкую жидкость (по консистенции близкую к конфете «тянучка») опустил два горизонтальных цилиндра, а сверху жидкости поместил слой пластичного вещества (например, глины) — рис. 12.26. Затем он начал вращать цилиндры навстречу друг другу в направлении, показанном стрелками. Пластичное вещество при этом деформировалось и втягивалось внутрь тянучки. При остановке цилиндров оно всплывало, вспучиваясь в промежутке между цилиндрами. Прямо-таки изостазия в уменьшенном масштабе!

Если считать, что глина эквивалентна земной коре, а тянучка — мантии, то можно задаться вопросом: не происходит ли что-нибудь в этом роде на Земле? В противном случае зоны мощных осадочных толщ типа геосинклиналей не могли бы существовать.

§ 11. ГОРЫ — СУБЪЕКТ ИЗОСТАЗИИ ИЛИ ЕЕ ОБЪЕКТ?

Современные крупные горные системы находятся в изостатическом равновесии, но спрашивается: установилось ли состояние изостазии под действием веса уже сформировавшихся гор или дело обстоит, как в опыте Григгса, — по какой-то причине земная кора втягивалась в мантию, а потом под действием подъемной силы всплывала, образуя горы? Говоря короче, горы — субъект или объект изостазии? Проблема эта далеко не ясная, но можно предложить следующий подход к ее решению (Цубои, 1942).

Примем, что в одномерном случае высота земной поверхности

$$H(x) = \sum (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

а выводимая из данных по $\Delta g_0''$ конфигурация нижней границы земной коры определяется формулой

$$D(x) = \sum (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Далее будем рассуждать следующим образом. Обозначим через $\varphi(x)$ изменение конфигурации границы Мохо под действием веса единичной горы на земной поверхности. Если субъектом изостазии являются уже сформированные горы, то условие изостазии имеет вид

$$D(x) = \int H(x + a) \varphi(a) da.$$

И наоборот, обозначим $\psi(\alpha)$ изменение формы земной поверхности под влиянием подъемной силы, действующей на единичный выступ границы Мохо в мантию. Тогда

$$H(x) = \int D(x + \alpha) \psi(\alpha) d\alpha.$$

В написанных формулах $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ играют роль весовых функций. Определяя их по известным из наблюдений распределениям $H(x)$ и $D(x)$, можно выяснить, какая из полученных таким образом функций $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ более правдоподобна с точки зрения физики. Можно надеяться, что таким путем удастся решить вопрос о том, устанавливается ли изостатическое равновесие после того, как горы уже сформировались, или, наоборот, горы образуются под действием сил, стремящихся привести земную кору в состояние изостаааа.

Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определяются путем решения приведенных выше интегральных уравнений. Результат этой работы (Цубои, 1941) можно описать следующим образом. Если в общем случае три произвольные функции

$$F(x) = \sum (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

$$f(x) = \sum (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

$$\phi(x) = \sum (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

связаны интегральным соотношением

$$F(x) = \int f(x + \alpha) \phi(\alpha) d\alpha,$$

то можно доказать, что

$$\alpha_m = \frac{1}{\varepsilon \pi} \frac{a_m A_m + b_m B_m}{a_m^2 + b_m^2}, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi} \frac{b_m A_m - a_m B_m}{a_m^2 + b_m^2}.$$

где

$$\varepsilon = 2 \text{ при } m = 0,$$

$$\varepsilon = 1 \text{ при } m \geq 1.$$

В качестве примера рассмотрим усредненный плотностной разрез Северо-Американского континента вдоль параллели. Пользуясь известными распределениями высоты рельефа и $\Delta g''_0$, определим $\varphi(\alpha)$ для случая, когда изостаааа устанавливается уже после образования гор, и функцию $\psi(\alpha)$ для случая, когда горы формируются под действием сил, стремящихся установить равновесное состояние. Из результатов расчета, представленных на рис. 12.27, видно, что функция $\psi(\alpha)$, соответствующая случаю, когда горы

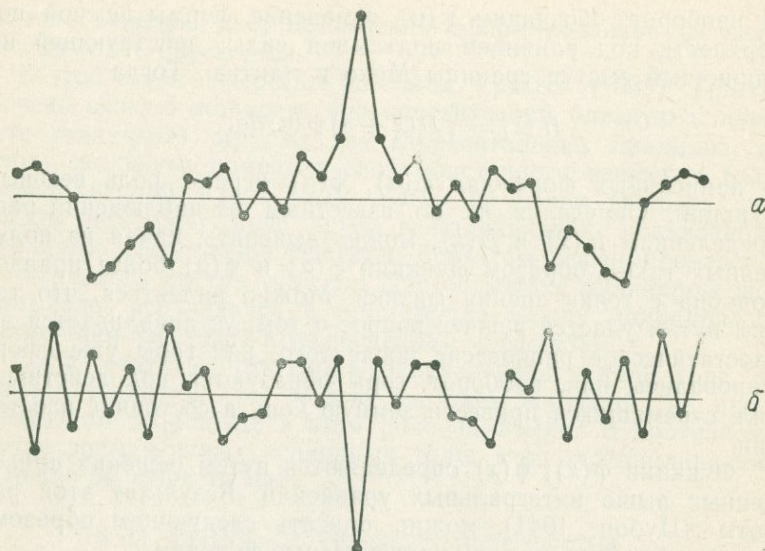


Рис. 12.27. Весовые функции: *a* — для случая, когда горы образуются под действием сил, стремящихся установить изостатическое равновесие; *b* — для случая, когда изостазия устанавливается после образования гор.

образуются под действием сил, приводящих земную кору в изостатическое равновесие (*a*), имеет гораздо более правдоподобный вид, чем альтернативная функция $\varphi(\alpha)$ (*b*). Таким образом, в теории изостатического равновесия земной коры большую роль нужно отводить мантии.

Еще в 1930 г. Венинг-Мейнес выдвинул теорию образования гор, аналогичную механизму Григгса, согласно которой горы образуются под действием конвекционных потоков в мантии. Таким образом, Венинг-Мейнес явился основоположником столь популярной в настоящее время конвекционной теории образования гор.

§ 12. ТОЛЩИНА ЗЕМНОЙ КОРЫ И РЕГИОНАЛЬНОСТЬ ИЗОСТАЗИИ

Использование рядов Фурье сильно сокращает затраты труда на анализ проблем изостазии, в частности в этом случае легко определить толщину земной коры d_1 и региональность изостазии. Некоторые из полученных к настоящему времени результатов представлены в табл. 12.3, из которой видно, что хотя величина d_1 довольно заметно изменяется от района к району, изменение отношения R/d_1 не столь

велико и колеблется около значений $2 \div 3$. Приблизительное постоянство отношения R/d_1 — очень интересный факт, он может иметь важное значение для анализа прочности земной коры в связи с проблемой землетрясений.

Таблица 12.3

Область	d_1 , км	R , км	R/d_1
Тьюбу на о. Хонсю	50	85	1,7
США	61	145	2,4
Индонезия (западная часть)	36	60	1,7
Индонезия (восточная часть)	29	80	2,8
П-ов Корея	30	85	2,7

§ 13. РАЗМЕР ФОРМ РЕЛЬЕФА И ГЛУБИНА КОМПЕНСАЦИИ

Выше при объяснении изостази с помощью модели Эйри мы принимали, что земная кора удерживается в равновесии подъемной силой, действующей на границу Мохо, расположенную одинаковым образом как для крупных, так и для мелких форм рельефа. Верно ли это? Может быть, раздел Мохо, определенный из условия равновесия крупных форм рельефа, при рассмотрении мелкомасштабных образований надо заменить границей, расположенной на меньшей глубине?

Для ответа на этот вопрос мы вновь воспользуемся данными по Северо-Американскому континенту. Выше мы видели, что толщина земной коры

$$d = - \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \ln \left(- \frac{B_{mn}}{2\pi k^2 \rho H_{mn}} \right).$$

Числа m , n изменяются в широких пределах; умножая соответствующие значения d на подходящие весовые множители и усредняя, получаем уже упоминавшееся значение $d_1 = 61$ км. Но сейчас мы поступим иначе: построим зависимость d_1 от длины волны λ , отвечающей разным значениям m , n . Получаемый график, показанный на рис. 12.28, можно аппроксимировать ломаной, состоящей из двух прямолинейных отрезков. Точка излома ломаной приходится на $\lambda = 250 \div 300$ км; характерный размер форм рельефа, равный половине этого значения, составляет около 150 км. Для более крупных форм рельефа величина d_1 почти постоянна и равна приблизительно 60 км, что соответствует полученным нами ранее результатам.

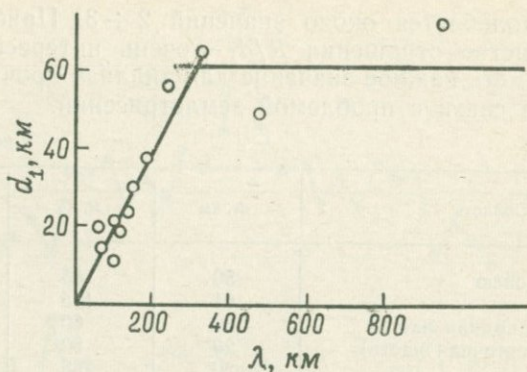


Рис. 12.28.

Для более мелких структур, грубо говоря, выполняется соотношение

$$d_1 = \lambda/3,$$

связывающее размер рельефа с толщиной земной коры.

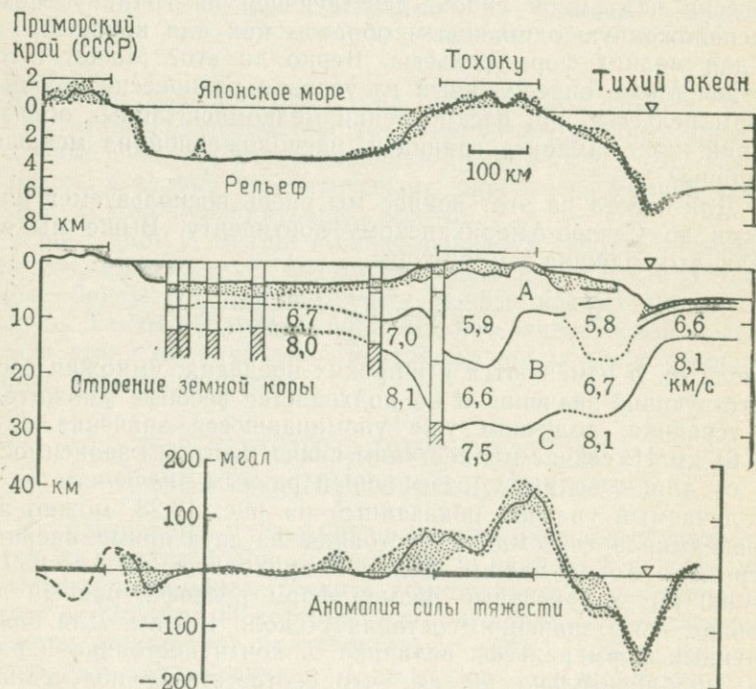


Рис. 12.29. Разрез области Тохоку (Япония) вдоль параллели (по Т. Есии).

Такой результат представляется весьма правдоподобным, но детали механизма, обеспечивающего равновесие, остаются неясными. При идеализированном рассмотрении изостазии пренебрегают упругостью земной коры, что, очевидно, неправомерно. Поддержание равновесия обеспечивается как подъемной силой, так и силой упругости, причем их относительный вклад, возможно, зависит от пространственной длины волны λ .

Кроме гравиметрических, постепенно накапливаются также данные о скоростях распространения сейсмических волн, возбуждаемых искусственным путем, и эти данные не укладываются в простую модель из однослойной земной коры и мантии. Например, обработав всю доступную к настоящему моменту информацию, Т. Ёсии предложил показанную на рис. 12.29 модель плотностного разреза вдоль параллели для области Тохоку в Японии. Модель содержит три слоя, в которых скорости распространения сейсмических волн равны 5,8; 6,7 и 8,0 км/с. Границы между слоями весьма неровные. Обозначим эти слои *A*, *B*, *C*. Из рисунка видно, что граница между слоями *A* и *B* изменяется сильнее, чем граница слоев *B* и *C*. С точки зрения изостазии этот факт можно истолковать так, что равновесие мелкомащтабных форм рельефа устанавливается вдоль границы слоев *A* и *B*, а крупных форм — на границе слоев *B* и *C*.

§ 14. РАЗМЕРЫ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ И ИЗОСТАЗИЯ

Понятие изостазии глубоко укоренилось в геофизике. В качестве одного из примеров использования этого понятия можно указать на задачи, связанные с магнитудой (*M*) землетрясений. Понятие *магнитуды*, введенное Ч. Рихтером (1935), оказалось очень полезным для оценок баланса энергии при землетрясениях. Здесь нам достаточно знать две важные характеристики магнитуды, установленные эмпирически:

- 1) верхний предел магнитуды *M* равен 8,6;
- 2) энергия землетрясения *E* связана с его магнитудой соотношением

$$\log E = 1,5M + 11,8.$$

Энергия землетрясения *E*, имеющего максимальную магнитуду $M = 8,6$, определяется из равенства

$$\log E = 24,7,$$

откуда

$$E = 5 \cdot 10^{24} \text{ эрг.}$$

Как мы видели выше, исследования изостазии приводят к выводу, что под материками земная кора имеет толщину $d_1 \sim 50 \div 60$ км, а региональность изостазии $R \sim 3d_1$. Последнюю можно интерпретировать как максимальный размер области, для которой еще можно принять, что вся запасенная в ней энергия земной коры является упругой энергией. В единичном объеме земной коры запасена энергия

$$e = \frac{1}{2} (\text{модуль упругости}) \times (\text{максимальная деформация})^2 \approx \\ \approx \frac{1}{2} 5 \cdot 10^{11} \cdot (10^{-4})^2 \approx 3000 \text{ эрг/см}^3.$$

Если энергия с такой плотностью запасена в объеме $60 \cdot 180 \cdot 180$ км³, то полная упругая энергия всего объема

$$E = 3000 \cdot 60 \cdot 180 \cdot 180 \cdot 10^{15} = 6 \cdot 10^{24} \text{ эрг}$$

имеет тот же порядок величины, что и энергия землетрясения наибольшей магнитуды (Цубои, 1940).

Далее, Т.Уцу (1955) показал, что афтершоки, следующие за главным толчком магнитуды M , охватывают площадь A , определяемую соотношением

$$\log A = M + 6.$$

Для землетрясения максимальной магнитуды $M = 8,6$

$$\log A = 14,6.$$

Это площадь квадрата, длина стороны которого равна 200 км — величине, близкой к региональности изостазии R (Цубои, 1956).

Далее, в близких друг другу районах Японии наблюдается корреляция между подъемами и спадами сейсмической активности, зависящая от расстояния между областями. Корреляция исчезает, если расстояние между областями превышает 200 км (Цубои, 1949).

Таким образом, все рассмотренные в данном параграфе явления зависят от региональности изостазии.

СИЛА ТЯЖЕСТИ НА МОРЕ

§ 1. МОРЕ И СИЛА ТЯЖЕСТИ

Первые успешные измерения силы тяжести на море относятся к 1929 г., когда Веннинг-Мейнес использовал для этой цели подводную лодку. С тех пор техника измерений совершенствовалась, и в наше время силу тяжести можно изменять практически непрерывно, причем с точностью 1 мГал, на обычных торговых судах, совершающих регулярные рейсы. Об установке TSSG, разработанной Е. Томодой, мы уже говорили. В США и СССР разработаны морские гравиметры и накопление данных о силе тяжести на море происходит очень интенсивно.

В результате таких измерений временами обнаруживаются любопытные факты. Но детали и частные вопросы, относящиеся к разным локальным проблемам, не могут быть включены в настоящую книгу. Здесь речь пойдет только о типичных проблемах, характерных для морей и океанов.

Под словом «море» в данной книге понимается не просто место, покрытое морской водой, такое как, например, Токийский залив, распределение силы тяжести в окрестности которого, представленное линиями постоянного $\Delta g_0''$, показано на рис. 13.1. Как видно из этого рисунка, изолинии $\Delta g_0''$, пересекая залив, совершенно естественно переходят с берега на берег. Отсюда следует, что хотя Токийский залив и покрыт морской водой, но с точки зрения строения слагающих его дно пород он практически не отличается от окружающей суши. Подобные районы не являются морем в принятом в данной книге смысле слова. Скорее их надо рассматривать как низменные участки суши, залитые морской водой.

Что же мы будем называть «настоящим морем»? Ответить на этот вопрос нам поможет рис. 13.2. Приведенный на нем график показывает, какую долю всей поверхности земного шара занимают места, имеющие заданную высоту (глубину). Видно, что на Земле явно преобладают места, высота которых над уровнем моря близка к 0, и места, в которых глубина океана около 5000 м. Если бы неровности земной поверхности были распределены хаотично, указанной особенностью не наблюдалось бы. Районы земного шара с высотами

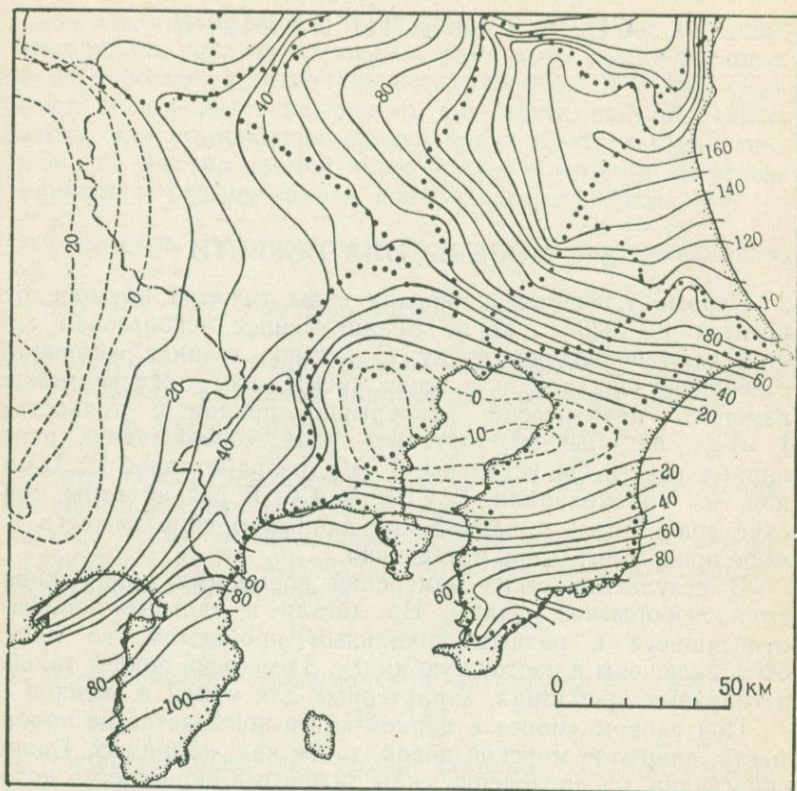


Рис. 13.1. Распределение Δg_0^* в области Канто (мГал). Точками нанесены пункты измерения силы тяжести.

0 и -5000 м различаются по своей природе. О первых мы будем говорить как о суше (материке), а о вторых — как о море (океане). В гл. 12 в связи с понятием изостазии мы уже останавливались на этом различии.

Разумеется, морские глубины не везде равны 5000 м. Существуют океанические горные хребты и впадины, собственно океанический бассейн с более или менее ровным дном, на котором, однако, встречаются изолированные подводные горы. Но в общем, как правило, глубина океана равна 5000 м. Таковы, например, большие части Тихого и Атлантического океанов.

В чем с геофизической точки зрения различия земной коры под такими усредненными океаном и материком? Гравиметрическая съемка — лишь один из способов изучения

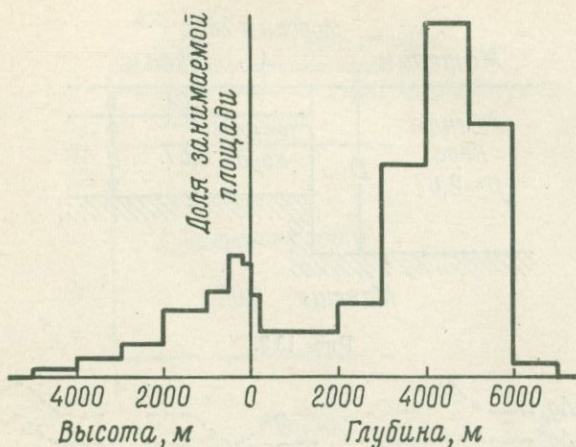


Рис. 13.2.

этого вопроса. В данной главе мы сначала, основываясь на гравиметрических данных, сравним строение земной коры под нормальным материком и нормальным океаном, а затем, завершив эту общую теорию, рассмотрим особенности структур типа подводных хребтов, глубоководных желобов, подводных гор и т. п.

§ 2. МАТЕРИК И ОКЕАН

О различиях между материком и океаном уже говорилось в гл. 12, где шла речь об изостазии. В крайне упрощенной модели, показанной на рис. 13.3, материк и океан находятся в состоянии изостатического равновесия. Учитывая плотности и мощности слоев, условие равновесия можно записать в виде

$$2,67D = 1,03t + 2,67d + 3,00(D - t - d),$$

откуда

$$d \approx D - 6t.$$

При

$$D = 40 \text{ км}, \quad t = 5 \text{ км}$$

получаем

$$d = 10 \text{ км}.$$

Если найденный результат соответствует нормальной, средней ситуации в океане, то на уровне моря величина Δg_0 должна быть близка к 0. Так и бывает чаще всего. Там, где это не так, нужно рассматривать отклонения от нашей

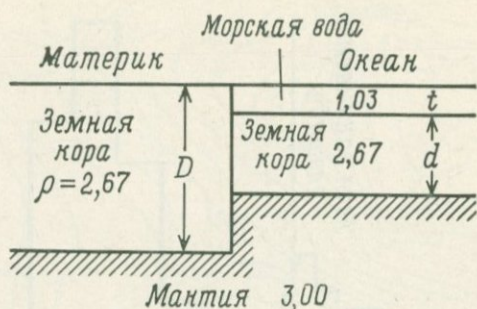


Рис. 13.3.

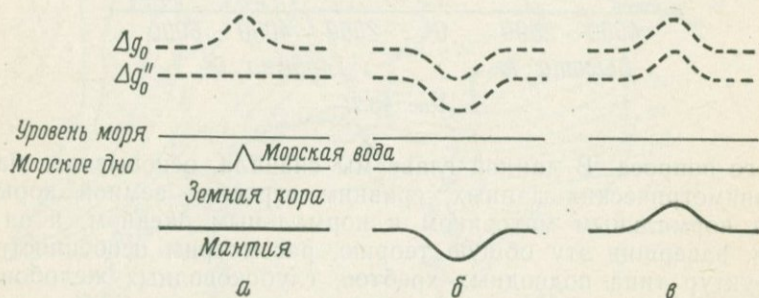


Рис. 13.4.

упрощенной модели, которые бывают нескольких типов. Например, на дне может встретиться показанная на рис. 13.4, а гора. Если она не очень велика, изостазия нарушается (гора держится упругостью земной коры). Влияние горы проявляется в том, что на уровне моря величина Δg_0 имеет локальный максимум. Но аномалия Буге $\Delta g_0''$, вычисленная с учетом поправки за рельеф морского дна, постоянна (не имеет максимума), а следовательно, нижняя граница земной коры (раздел Мохоровичича) залегает на постоянной глубине.

В случае, показанном на рис. 13.4, б, морское дно ровное, но земная кора имеет локальное утолщение и вдаётся в мантию. В этом случае обе величины Δg_0 и $\Delta g_0''$ ведут себя одинаково: они имеют минимум (отрицательны) в месте углубления земной коры в мантию. Если же, как на рис. 13.4, в, земная кора в некотором месте становится тоньше, то величины Δg_0 и $\Delta g_0''$ в этом месте отклоняются в сторону положительных значений.

Итак, можно выделить два типа изменений Δg_0 : 1) связанные с рельефом морского дна и 2) вызванные изменением

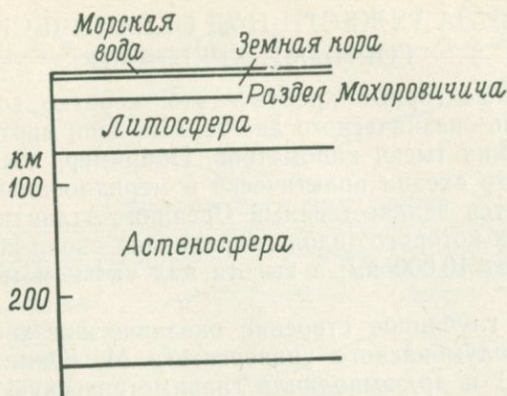


Рис. 13.5.

толщины земной коры. На практике, конечно, дела обстоят не так просто и обе эти причины действуют совместно. Однако рельеф морского дна известен из измерений глубины. Поэтому обычно изменения $\Delta g''_0$, оставшиеся необъясненными после введения поправки за рельеф морского дна, относят за счет изменения толщины земной коры.

В наши дни накопилось не так уж мало данных по независимому от гравиметрии определению толщины земной коры путем наблюдения искусственно возбужденных в морском дне сейсмических волн. Если значения мощности земной коры, определяемые по гравиметрическим и сейсмическим данным, совпадают, то говорить не о чем. Но бывают случаи, когда сейсмические данные указывают на постоянство толщины земной коры, а величина $\Delta g''_0$ изменяется. В таких случаях приходится допустить, что предположение о постоянстве плотности вещества мантии неудовлетворительно и в мантии имеются аномалии распределения плотности.

В наши дни ведутся разнообразные исследования морского дна и не всегда получаемые данные укладываются в рассмотренную выше простую модель земной коры и мантии. Теперь различают литосферу, астеносферу (рис. 13.5). Приставки «лито-» и «астено-» происходят от греческих слов, означающих соответственно „каменный“ и „ослабленный“.

Как видоизменяются условия изостатического равновесия с учетом такого усложненного строения мантии? Это очень важный вопрос, но в данной книге мы его касаться не будем и ограничимся первым приближением — простой моделью, содержащей однослойную земную кору и мантию.

§ 3. СИЛА ТЯЖЕСТИ НАД ОКЕАНИЧЕСКИМИ ГОРНЫМИ ХРЕБТАМИ

Подводные горные хребты — это, коротко говоря, вытянутые вдоль океанического дна горные цепи протяженностью до нескольких тысяч километров. Например, посередине Атлантического океана практически в меридиональном направлении тянется величественный Срединно-Атлантический хребет, ширина которого (вдоль параллели) около 2000 км, длина достигает 10 000 км, а высота над уровнем морского дна 3000 м.

Каково глубинное строение океанических хребтов? Сотрудники Колумбийского университета М. Юинг и М. Талвани (1965) и др. выполнили гравиметрическую съемку поперек Срединно-Атлантического хребта, начиная от точки с координатами 32° с. ш., 40° з. д. Обработав свои результаты с учетом данных глубинного сейсмического зондирования, они пришли к следующим основным выводам.

1) Хребет возвышается над средним уровнем дна Атлантического океана примерно на 3000 м.

2) На склонах хребта встречаются обрывы высотой в несколько сотен метров.

3) Вдоль линии гравиметрического профиля величина Δg_0 в среднем близка к 0 с отклонениями в обе стороны на несколько десятков миллигал, которые объясняются притяжением отдельных элементов рельефа морского дна.

4) Указанные осцилляции Δg_0 устраняются введением поправки за рельеф морского дна, так что величина $\Delta g_0''$ не обнаруживает мелкомасштабных изменений. Но по сравнению с областью предгорий над хребтом величина $\Delta g_0''$ приблизительно на 200 мГал меньше.

5) Данные глубинного сейсмического зондирования не дают оснований считать, что земная кора под хребтом толще, чем вдали от него, и что она углубляется в мантию.

6) Суммируя указанные результаты, авторы приходят к выводу, что под хребтом мантия имеет иные свойства, в частности плотность мантии под хребтом аномально мала.

Данные гравиметрической съемки Срединно-Атлантического хребта и их схематическая интерпретация представлены на рис. 13.6.

В последние годы для объяснения расположения материков и океанов была выдвинута блестящая гипотеза, получившая название тектоники плит. Согласно этой гипотезе, близкие к земной поверхности слои литосферы разбиты на несколько огромных плит, нарастающих в области океанических горных хребтов и сдвигаемых конвекционными по-

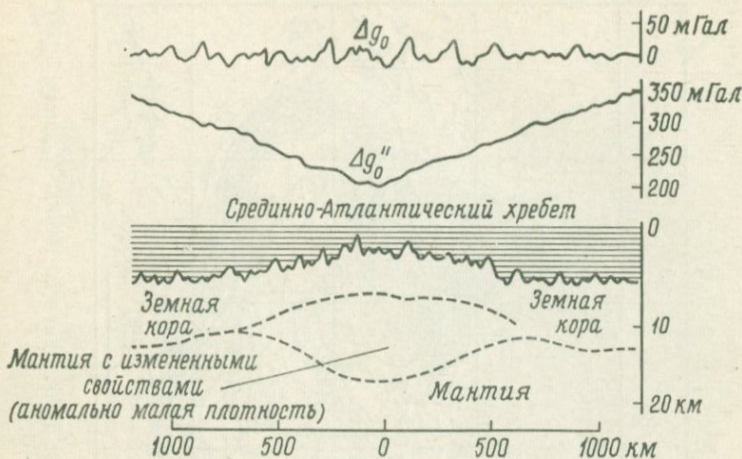


Рис. 13.6.

токама в мантии со скоростью около 1 см/год в горизонтальном направлении. Выяснение строения подводных океанических хребтов с гравиметрической точки зрения — очень важная для тектоники плит задача.

§ 4. СИЛА ТЯЖЕСТИ НАД ГЛУБОКОВОДНЫМИ ЖЕЛОБАМИ

Родоначальник морской гравиметрии Венинг-Мейнес совершил в 1928—1929 гг. большое кругосветное плавание на подводной лодке из Голландии через Средиземное море, Индийский океан, Индонезию, Тихий и Атлантический океаны, во время которого он всюду, где возможно, выполнял гравиметрическую съемку. Среди полученных им результатов особенно известно открытие того, что вдоль глубоководного желоба, расположенного вблизи о-вов Суматра, Ява, Серам и т. д., тянется полоса больших отрицательных значений изостатической аномалии. Схематически эта аномалия изображена на рис. 13.7. В ней встречаются значения вплоть до — 150 мГал, объяснить которые можно, только если предположить, что земная кора здесь утолщается, углубляясь в мантию. Данные Венинг-Мейнеса имели решающее значение для выяснения генезиса глубоководных желобов.

Большие отрицательные аномалии силы тяжести были впоследствии обнаружены в районе Японского желоба (Мацуяма, Кумагая, 1934), глубоководных желобов Вест-Индии (Хесс, 1933) и т. д. Выше мы уже говорили о результатах

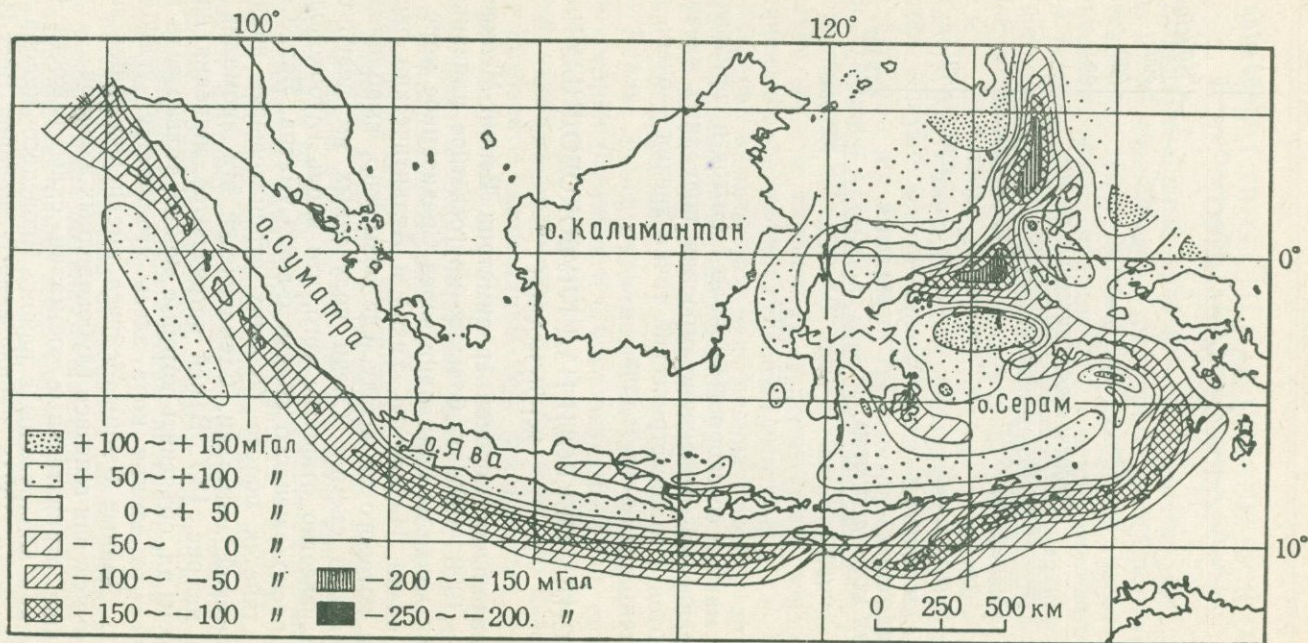


Рис. 13.7. Распределение изостатических аномалий в районе архипелага Ост-Индия (по Венинг-Мейнесу, 1928).

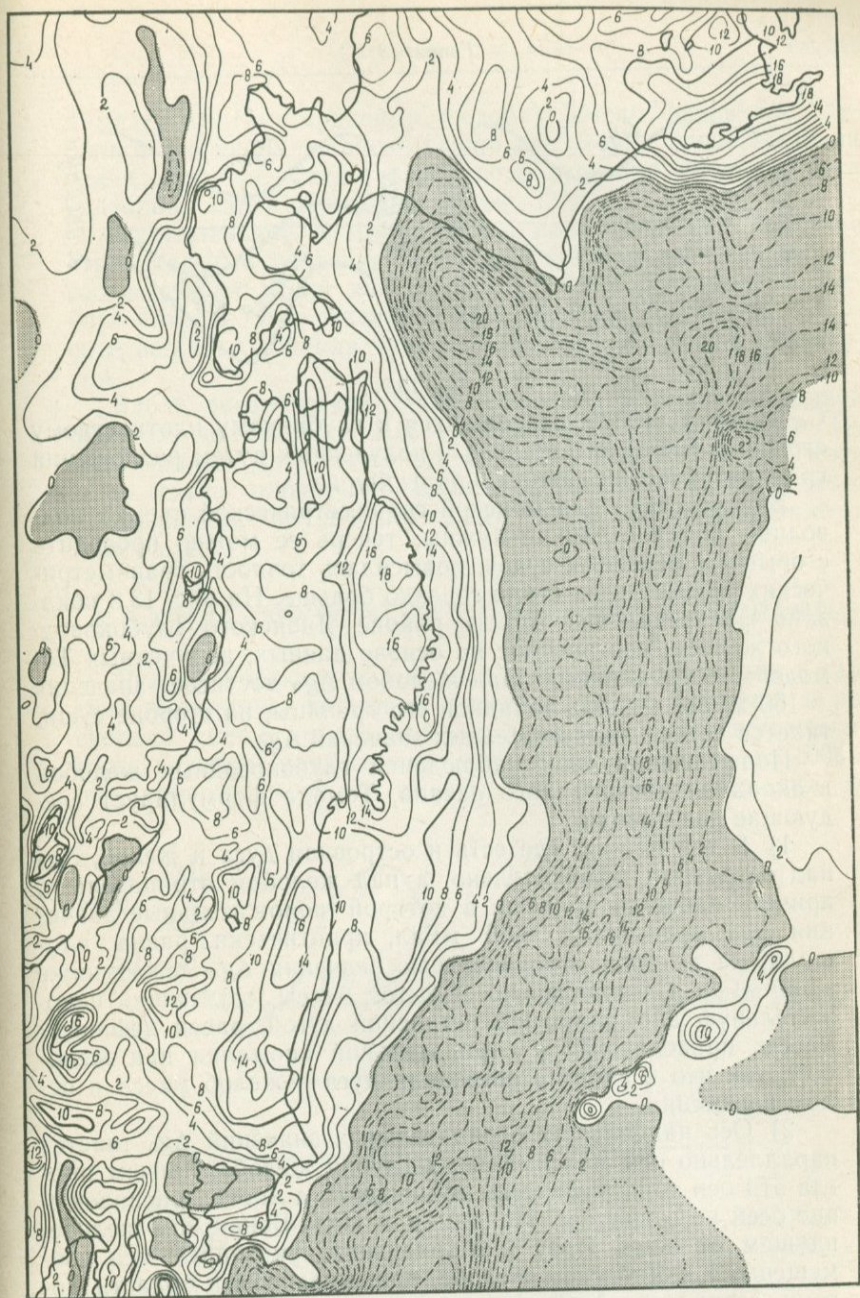


Рис. 13.8. Распределение Δg_0 (на море) и $\Delta g_0''$ (на суше) в районе Японского глубоководного желоба. Сплошным линиям соответствуют положительные значения (положительная аномалия), пунктирным — отрицательные (отрицательная аномалия). Взято из книги: Е. Томода «Maps of Free Air and Bouguer Gravity Anomalies in and around Japan».

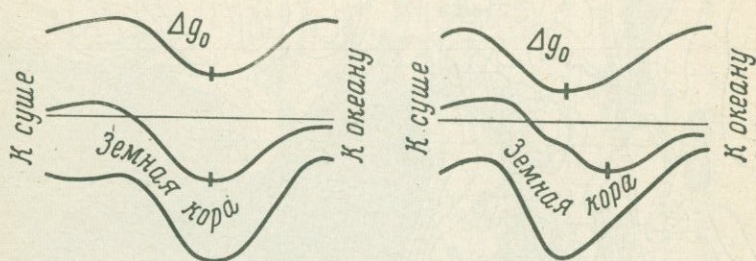


Рис. 13.9.

С. Ямагути (1937), относящихся к глубинному плотностному строению Японского желоба и полученных путем разложения гравиметрических данных в ряды Фурье.

Впоследствии для морской гравиметрической съемки подводные лодки стали не нужны; теперь ее можно проводить с обычных рейсовых судов, повысилась точность гравиметрических данных, и их стало гораздо больше. На рис. 13.8 показано распределение Δg_0 в районе Японского глубоководного желоба, построенное на основе данных, полученных Томодой с сотрудниками. Над желобом Δg_0 достигает значения -150 мГал, а вдоль западной его границы, на стороне суши, тянется полоса положительных значений Δg_0 .

Подытоживая свои наблюдения глубоководных желобов в западной части Тихого океана, Томода формулирует следующие два вывода.

1) В тех местах, где есть и островная дуга и желоб, Δg_0 над островами положительно, а над желобом отрицательно, причем площадь области, в которой положительные значения Δg_0 превышают $+50$ мГал, практически равна площади, на которой отрицательные значения Δg_0 лежат ниже -50 мГал. Следовательно, избыток массы, создающий положительную аномалию над островной дугой, равен дефициту массы, приводящему к отрицательной аномалии над желобом, так что в системе островная дуга — желоб масса в целом неизменна.

2) Ось наибольших отрицательных значений Δg_0 тянется параллельно оси максимальных глубин желоба, причем иногда эти оси топографически совмещены, а иногда расположение осей не совпадает. Например, в Идзу-Бонинском желобе, идущем от о-вов Идзу к Марианским, указанные оси совмещены, а в Японском желобе, примыкающем к области Тохоку, совпадения осей нет: ось отрицательных значений Δg_0 расположена ближе к суше, чем ось максимальных глубин желоба. Два одинаковых желоба, вблизи одного из которых нет материка («океанический желоб»), а другой примыкает

к материку («материковый желоб»), имеют различное глубинное строение, что очень важно для теории происхождения таких желобов. Схемы глубинного строения желобов двух указанных типов приведены на рис. 13.9.

Максимальное и минимальное по абсолютной величине отрицательные значения Δg_0 над желобом не обязательно соответствуют таким же значениям глубин желоба. По мнению Томоды, это связано с тем, является ли желоб относительно молодой или относительно более древней структурой.

Вдоль океанической стороны желоба в полосе шириной 300—600 км значения Δg_0 становятся положительными. По старомодным воззрениям это означало бы, что земная кора здесь стала тоньше, но данные глубинного сейсмического зондирования не подтверждают такой вывод (Фудзимото, Томода, 1977).

§ 5. СИЛА ТЯЖЕСТИ НАД ПОДВОДНЫМИ ГОРАМИ

Рельеф морского дна являет поистине удивительную картину. Например, иногда в открытом океане глубиной в несколько тысяч метров возвышаются одиночные конические горы, вершины которых скрываются на глубине около 1000 м под уровнем моря, а высоты (от океанического дна до

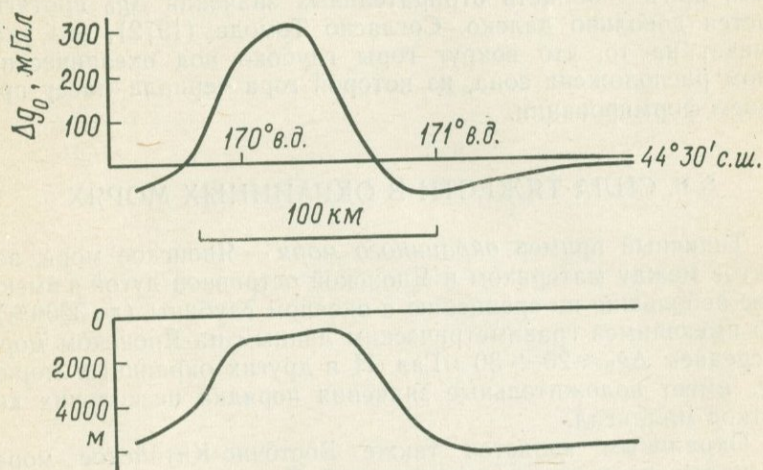


Рис. 13.10. Рельеф морского дна и Δg_0 при движении над подводной горой с запада на восток (координаты горы: $\varphi = 44^\circ 30'$ с. ш., $\lambda = 170^\circ 30'$ в. д.). По данным Н. Сэгавы (1969).



Рис. 13.11.

вершины горы) 3000—4000 м. Вершина такой горы часто имеет вид плато диаметром около 10 км и более.

В Тихом океане тоже много подводных гор. Томода с сотрудниками занимался их гравиметрической съемкой, проплывая над ними на корабле. Пример получаемых таким образом результатов приведен на рис. 13.10. Он относится к подводной горе, расположенной примерно в 1000 км на юго-восток от южной оконечности п-ова Камчатка ($\varphi = 44^{\circ}30'$ с. ш., $\lambda = 170^{\circ}30'$ в. д.). На рисунке показан рельеф глубин морского дна и кривая Δg_0 при пересечении подводной горы с запада на восток (Н. Сэгава, 1969). Значения Δg_0 над горой (+300 мГал) объясняются ее притяжением. Заметим, что у подножья горы Δg_0 становится отрицательным, причем область отрицательных значений Δg_0 протягивается довольно далеко. Согласно Томоде (1972), это указывает на то, что вокруг горы глубоко под океаническим дном расположена зона, из которой гора черпала массу при своем формировании.

§ 6. СИЛА ТЯЖЕСТИ В ОКРАИННЫХ МОРЯХ

Типичный пример *окраинного моря* — Японское море, зажатое между материком и Японской островной дугой и имеющее небольшие по сравнению с океаном глубины (до 3000 м). По имеющимся гравиметрическим данным на Японском море в среднем $\Delta g_0 \approx 20 \div 30$ мГал. И в других окраинных морях Δg_0 имеет положительные значения порядка нескольких десятков миллигал.

Окраинным является также Восточно-Китайское море, расположенное между материковым Китаем и островной дугой Рюкю. Это море мелкое, глубины в нем не превышают несколько сотен метров; тем не менее (положительная) величина Δg_0 здесь в общем такая же, как в других окраин-

ных морях. Автор данной книги задался вопросом, не связана ли видимая мелкость Восточно-Китайского моря просто с тем, что оно засыпано землей и песком, поступающими, например, из реки Янцзы, а в действительности море это не мелкое и с точки зрения его геологического строения не отличается от других окраинных морей. Например, если бы оно имело строение, показанное на рис. 13.11, с толщиной слоя осадков (плотностью $2,0 \text{ г/см}^3$) 2000 м, то сила притяжения осадков на уровне моря давала бы положительную добавку к силе тяжести в несколько десятков миллигал.

СИЛА ТЯЖЕСТИ НАД ВУЛКАНАМИ

§ 1. ВУЛКАНЫ И СИЛА ТЯЖЕСТИ

Вулканы — это горы, образованные веществом, излившимся из недр Земли. Например, Гавайские острова представляют собой огромный вулкан, возвышающийся над дном Тихого океана на 5000 м; на его формирование ушло около 10^{22} т вещества. Таким образом, при образовании вулканов происходят колоссальные перемещения вещества где-то в недрах Земли, и ясно, что распределение силы тяжести в окрестности вулканов должно иметь свои особенности.

Исследование поля силы тяжести не только около таких колоссальных вулканических образований, как Гавайские острова, но и вблизи «обычных» вулканов может дать информацию о структуре этих гор и о процессах их образования.

Уже после возникновения вулкана в ходе вулканической деятельности из недр выбрасываются огромные количества вещества; вещество, попавшее на поверхность земли, подвергается действию ветра и других атмосферных агентов, т. е. происходит его непрерывное перемещение. Например, за весь период своей активности — от образования и до нашего времени — вулканы Асо и Аира на о. Кюсю (рис. 14.1) извергли приблизительно $3 \cdot 10^{11}$ т вещества. Но и в наши дни при одном извержении передвижки вещества колоссальны. Например, при извержении вулкана Сакурадзима в 1914 г. на поверхность излилось лавы и было выброшено другого вещества около $5 \cdot 10^9$ т.

Но что происходит в глубинах Земли, откуда изверглись эти огромные массы вещества? Остаются ли на их месте пустоты, и если да, то откуда берутся новые массы, заполняющие эти пустоты?

Некоторые вулканы, например Усу на о. Хоккайдо, вместо шумных извержений больших масс вещества в полной тишине транспортируют наверх твердую горную породу, образуя горы высотой в несколько сотен метров. Вулкан Усу делал это неоднократно. Последние события такого рода происходили в 1910, 1944 и 1977 гг.; в частности, широко известна новая гора Сёва, возникшая в 1944 г. Какие перемещения глубинных масс сопровождают подобные явления?

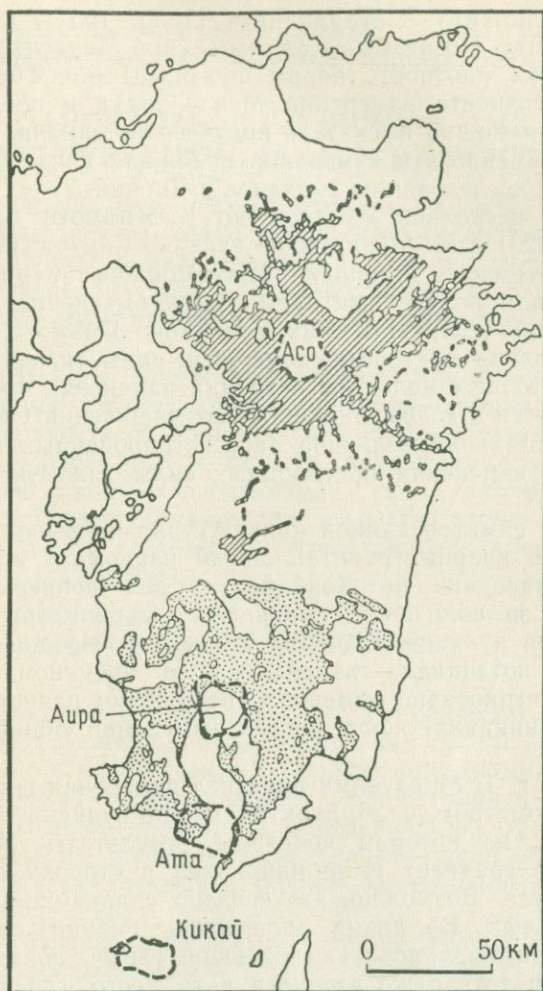


Рис. 14.1. Четыре кальдеры на о. Кюсю (границы кальдер показаны жирным пунктиром) и распределение вулканического материала по данным Т. Мацумото.

Гравиметрическая съемка в районе вулканов важна для выяснения их современного глубинного строения и путей перемещения масс при извержениях. Она стала возможной лишь в последние десятилетия, после создания легких, точных и надежных гравиметров.

В Японии в 1882 г. Т. Менденхолл измерил величину g на вершине Фудзиямы, поднявшись на нее в сопровождении

своего ассистента А. Танакадатэ (1856—1952), в то время еще студента. По результатам измерений Менденхолл нашел, что средняя плотность пород Фудзиямы $\rho = 2,08$. В наше время о точности измерений Менденхолла и предпосылках его расчета можно высказать критические замечания, но тем не менее именно эти измерения положили начало гравиметрическому исследованию вулканов в Японии.

Спустя несколько десятков лет К. Ямамото на вулкане Асама (1923) и М. Мацуяма на вулкане Сакурадзима (1927) провели съемку с помощью гравитационных вариометров и использовали полученные данные для выяснения глубинной плотностной структуры этих вулканов. Ямамото наряду с этим выполнил повторные измерения силы тяжести в одной и той же точке с целью регистрации изменения производной силы тяжести в ходе вулканического извержения. Он сообщил, что максимальная величина зарегистрированных им в 1921 и 1922 г. изменений производных силы тяжести достигала 200 Этвеш.

В 1929 г. автор данной книги установил выполненный из плавленого кварца гравитационный вариометр вблизи вулкана Комагадакэ на Хоккайдо и вел непрерывные наблюдения за положением равновесия вариометра во время извержения вулкана. Если бы вторые производные гравитационного потенциала изменялись со временем, то было бы зарегистрировано изменение положения равновесия прибора, но никаких определенных изменений обнаружить не удалось.

В 1936 г. Т. Мидзуками произвел измерения гравитационным вариометром в 26 пунктах около вулкана Асама. Из рис. 10.15, на котором показаны результаты Мидзуками, видно, что градиент g не направлен в сторону вулканического конуса. Возможно, это связано с влиянием окружающего рельефа. Во время проведения съемки на вулкане Асама произошел довольно большой взрыв, после которого Мидзуками тотчас же вернулся в то место, где производил измерения непосредственно перед взрывом, и снова снял отсчеты. Оказалось, что в результате взрыва четыре (из шести) вторых производных гравитационного потенциала изменились на 2—10 Этвеш.

Указанные результаты имеют большую ценность, но работа с вариометрами очень трудоемка: их нелегко транспортировать, а измерения занимают очень много времени. Эти затруднения были преодолены изобретением легких, простых в эксплуатации, высокоточных и надежных статических гравиметров, после создания которых гравиметрические исследования вулканов стали развиваться очень быстро. Большой

вклад в развитие этих исследований внес И. Ёкояма, работы которого получили широкое международное признание.

§ 2. АНОМАЛЬНАЯ ГЛУБИННАЯ МАССА ПОД ВУЛКАНАМИ И ТЕОРЕМА ГАУССА

Излишне говорить, что гипотезы о строении вулканов, выдвигаемые при их гравиметрическом исследовании, жидятся на данных о распределении аномалий силы тяжести. Ключевые вопросы теории вулканов: имеется ли на глубине избыток или дефицит массы и нет ли каких-либо иных аномалий?

Решению этих вопросов помогает уже упоминавшаяся выше теорема Гаусса, согласно которой интеграл по замкнутой поверхности от нормальной к ней составляющей силы притяжения равен $4\pi k^2 M$, где M — заключенная внутри этой поверхности масса. Определяемая при гравиметрической съемке в районе вулкана величина Δg относится только к поверхности земли, поэтому ее интегрирование дает половину от $4\pi k^2 M$, т. е. $2\pi k^2 M$ и

$$M = \frac{1}{2\pi k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x, y) dx dy.$$

В действительности невозможно из эмпирически определяемого распределения Δg выделить только ту его часть, которая связана с находящейся под вулканом аномальной массой, а пределы интегрирования распространить до бесконечности. Поэтому интеграл, определяющий Δg , содержит ошибки. Тем не менее теорема Гаусса — один из наиболее эффективных инструментов оценки аномальной массы под вулканом.

Отличительная особенность теоремы Гаусса в том, что она позволяет определить полную аномальную массу под вулканом независимо от принятых гипотез о форме аномального тела и его плотности.

§ 3. СТРОЕНИЕ ВУЛКАНОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ ПО АНОМАЛИЯМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Сначала поговорим о Фудзияме. В 1957 г. И. Ёкояма и К. Тадзима измерили с помощью гравиметра Уордена силу тяжести в 123 пунктах в районе этого вулкана. В местах с резкими перепадами рельефа, как на Фудзияме, обязательно нужно учитывать поправку за рельеф, а для этого нужно знать среднюю плотность. Обработывая данные гравиметрической

съемки склонов Фудзиямы на разной высоте, Екояма и Тадзима нашли $\rho = 2,63$. Пользуясь этим значением ρ , учитывая высоту пункта наблюдения и окружающий рельеф, они внесли поправку Буге в каждое из измеренных значений и вычислили аномалию Буге $\Delta g_0''$. Полученные ими результаты приведены на рис. 14.2, из которого видно, что существование Фудзиямы практически не влияет на распределение $\Delta g_0''$, т. е. с учетом поправок за свободный воздух и за рельеф распределение $\Delta g_0''$ в районе Фудзиямы почти

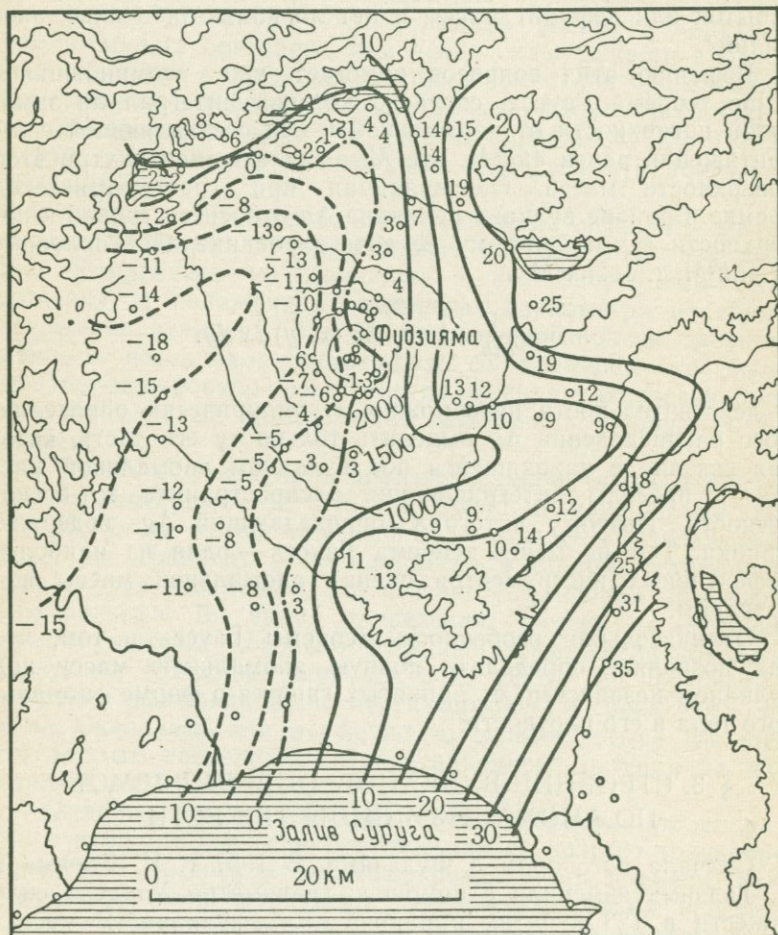


Рис. 14.2. Распределение $\Delta g_0''$ в окрестностях Фудзиямы (мГал) по данным Екоямы и Тадзимы.

нормальное. Проще говоря, глубинный плотностной разрез под Фудзиямой не содержит никаких особенностей. Это указывает на то, что корень вулкана Фудзияма и источник магмы в нижней части земной коры или верхней части мантии связаны между собой только сравнительно узким каналом. То же относится и к вулкану Асама.

К тому же типу вулканов принадлежат вулканы Унгаран, Теломодзё, Мербабу, Мерапи в Центральной Яве, вулкан Этна в Сицилии (Ёкояма, 1960).

Все указанные вулканы являются вулканами так называемого слоистого типа, их корни невелики, и через них просто осуществляется питание вулкана магмой.

Некоторые вулканы имеют кальдеру. Например, хорошо известна кальдера вулкана Асо, имеющая в поперечнике 20 км. Термин «кальдера» португальского происхождения и означает «кастрюля» или «котелок». Кальдерой называют депрессию вокруг кратера, окруженную по периферии крутыми обрывами.

Гравиметрическую съемку в районе кальдеры вулкана Михара на о. Осима (о-ва Идзу) выполнил в 1969 г. Ёкояма; его результаты показаны на рис. 14.3. Величина $\Delta g_0''$ в этих местах положительна и увеличивается в восточном направлении, что является общей тенденцией семи островов Идзу. Отвлекаясь от указанной общей тенденции, заметим, что на восточной окраине кальдеры Михара $\Delta g_0''$ на 7 мГал больше, чем на западной, что указывает на наличие здесь инородного тела цилиндрической формы с поперечником 3 км, погруженного на глубину до 1 км, плотность которого примерно на $0,3 \text{ г/см}^3$ больше плотности окружающих пород. Гора Михара — вулкан, извергающий жидкие базальтовые лавы, которые, застывая, сформировали верхнюю часть кратера, а остальная часть горы образована вулканической брекчией и лавовыми потоками из кратера. В кратере накапливалась лава, имеющая более высокую плотность, и кальдера, по-видимому, образовалась за счет сжатия более рыхлых вулканогенных пород.

В районе Гавайских о-вов довольно большие значения $\Delta g_0'' \sim +200 \div 300$ объясняются притяжением рельефа, возвышающегося над дном Тихого океана на высоту до 5000 м. Расположенный на этих островах вулкан Килауэа имеет кальдеру, в которой $\Delta g_0''$ тоже выше, чем на периферии вулкана, приблизительно на 10 мГал (У. Киносита, 1965). В данном случае это объясняется присутствием блока коренных пород, пронизанных магматическими дайками, плотность которых выше плотности пород на периферии кальдеры

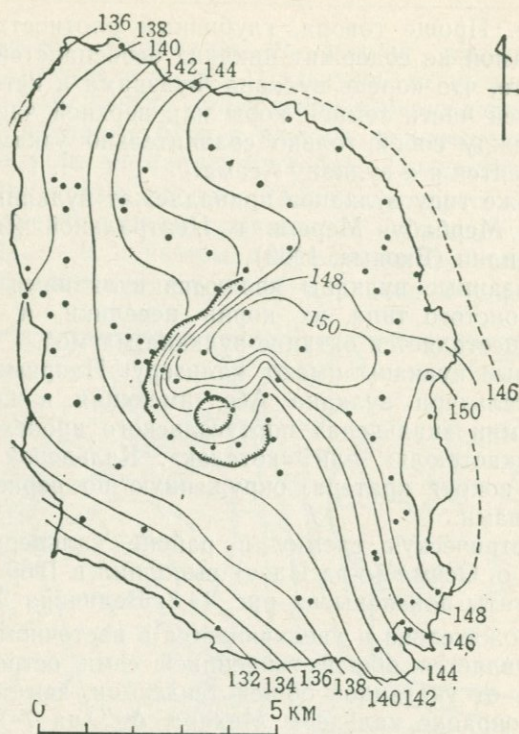


Рис. 14.3. $\Delta g_0''$ на вулкане Михара (Екояма, 1969).

на $0,3 \text{ г/см}^3$. Толщина этого блока достигает 2 км, а его центр расположен на глубине около 3 км (Р. Фиске, У. Киносита, 1969).

Встречаются и другие вулканы, в кальдерах которых $\Delta g_0''$ положительно, например в кальдере вулкана Малл в Шотландии величина $\Delta g_0''$ на 55 мГал больше, чем вне ее. Здесь тоже много даек.

Кроме вулканов, в кальдерах которых $\Delta g_0''$ положительно, есть также вулканы с отрицательным $\Delta g_0''$ в кальдере, которая в таком случае выглядит как воронкообразный провал, заполненный имеющими небольшую плотность продуктами извержения и обломками разрушения вулкана.

В качестве примера рассмотрим кальдеру Куттяро в восточной части о. Хоккайдо. Ее поперечник 22 км, половину площади кальдеры занимает озеро. Зимой 1958 г. Екояма, дождавшись, когда вода в озере замерзла, произвел на льду

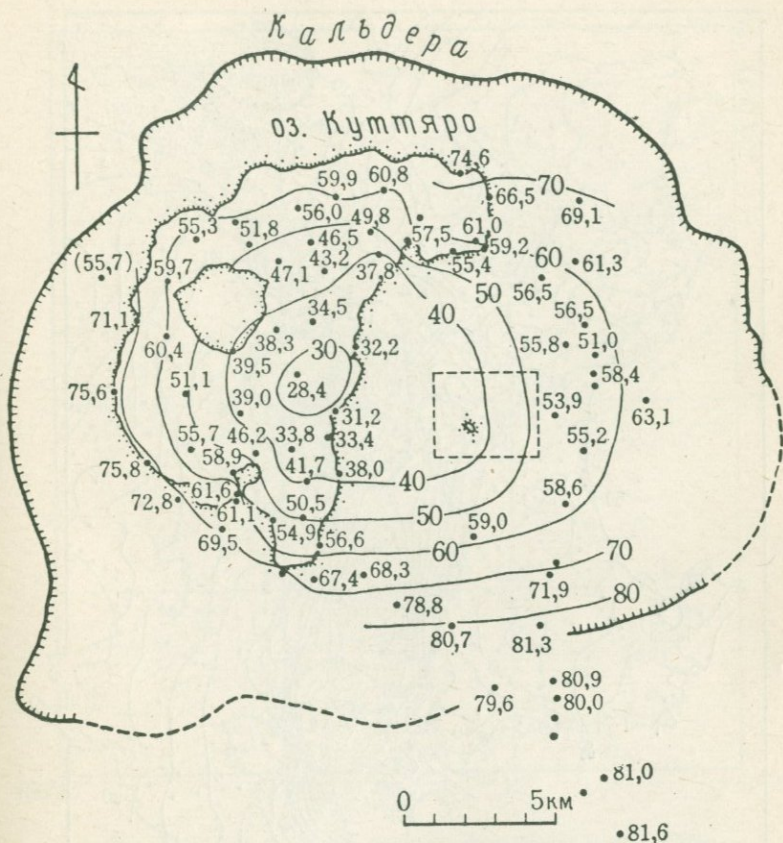


Рис. 14.4. $\Delta g_0'$ в кальдере Куттяро (Екояма, 1969).

гравиметрическую съемку, результаты которой показаны на рис. 14.4. Для объяснения понижения $\Delta g_0'$ на 45 мГал в центре кальдеры по сравнению с ее периферией приходится предположить, что толщина слоя вулканических отложений (плотность которых на $0,4 \text{ г/см}^3$ меньше плотности горных пород вне кальдеры) в центре кальдеры достигает 4 км и постепенно уменьшается к ее краям. Таким образом, по сравнению с обычной местностью в кальдере обнаруживается дефицит массы, который можно оценить по теореме Гаусса. Оценка дает значение порядка 10^{11} т .

Кальдеры с дефицитом массы встречаются в разных местах Земли. В Японии к таким кальдерам, имеющим меньшее, чем на периферии, $\Delta g_0''$ (по отношению к периферии $\Delta g_0''$ в

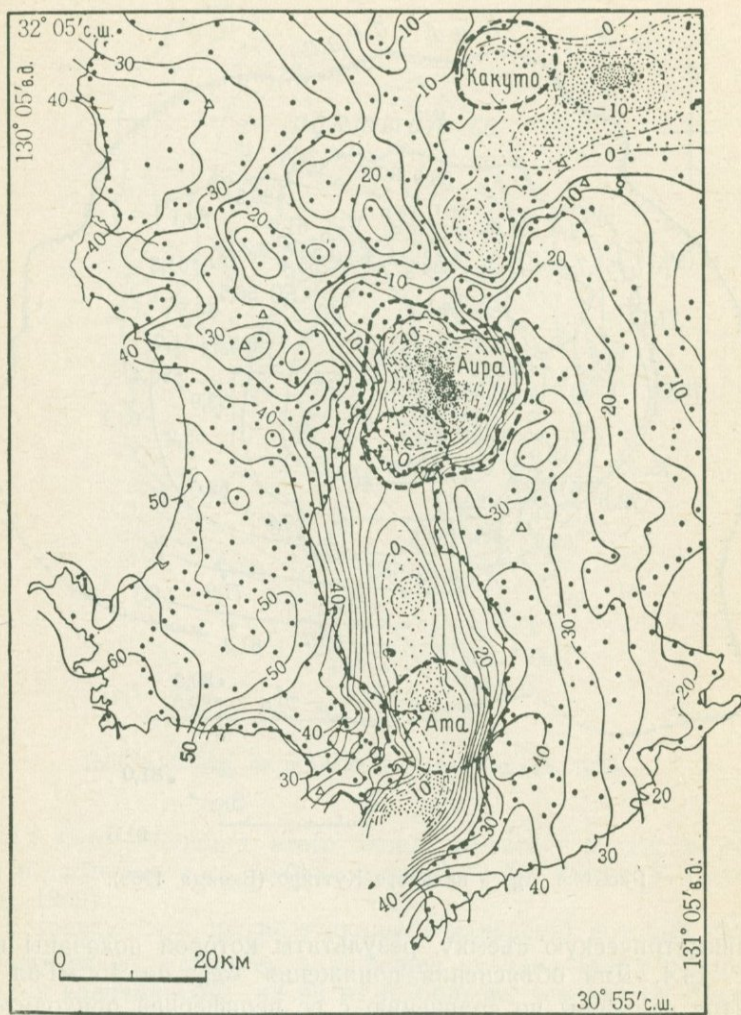


Рис. 14.5. $\Delta g_0''$ на юге о. Кюсю (по Екояме и Огава).

кальдере отрицательно), относятся кальдеры вулканов Аира и Асо на Кюсю; Сикоцу, Тоя, Масю, Кутгара на Хоккайдо; Товада и Хаконэ на Хонсю.

На рис. 14.5 дано распределение $\Delta g_0''$ в южной части о. Кюсю. В кальдере Аира (центр которой находится на северном берегу залива Кагосима) $\Delta g_0''$ меньше, чем в ее окрестностях, на 40 мГал. Вулкан Сакурадзима расположен на

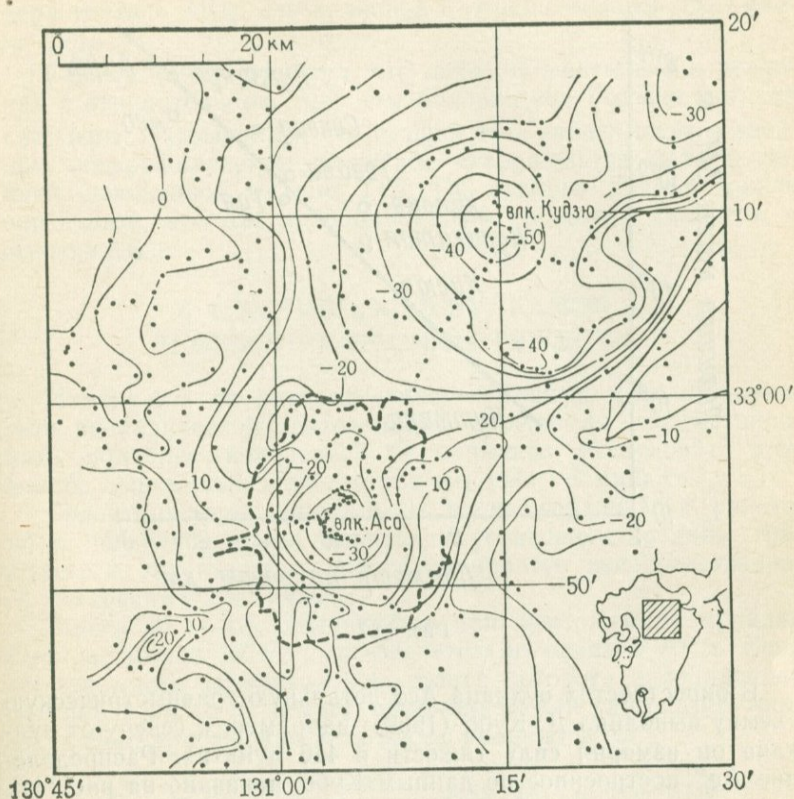


Рис. 14.6. $\Delta g_0''$ в районе вулкана Асо (Кубо и др., 1969).

южной окраине этой кальдеры, а источник напряжения, вызвавший колебания земной коры в южном Кюсю во время извержения Сакурадзимы в 1914 г., находился как раз под центром кальдеры Аира на глубине около 6 км. Что касается показанной на рис. 14.5 кальдере Какуто, то вначале было не совсем ясно, действительно ли она относится к данному типу рельефа. В пользу гипотезы, что это кальдера, говорил лишь анализ распределения вулканического материала (Т. Арита, 1956). Однако гравиметрические данные на рис. 14.5 ясно показывают наличие небольшой области пониженных значений $\Delta g_0''$, а это означает, что Какуто — действительно кальдера с дефицитом массы.

В одном месте между Какуто и Аира отмечается относительное понижение $\Delta g_0''$ на 15 мГал; возможно, здесь на глубине скрыта еще одна кальдера.

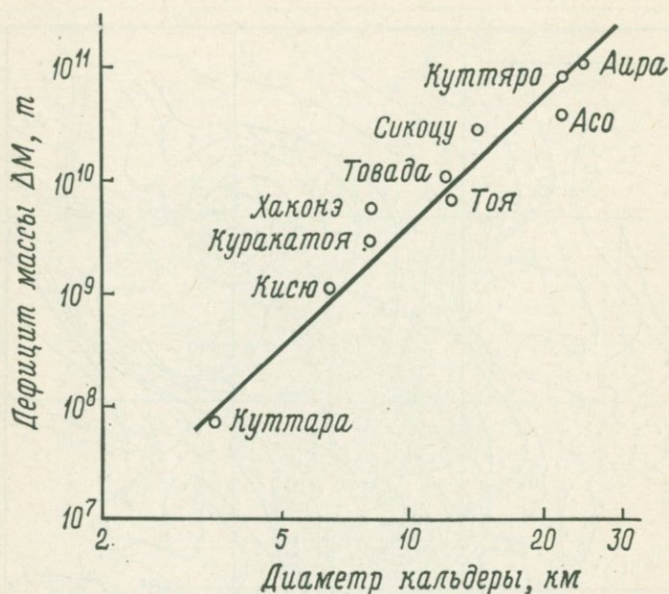


Рис. 14.7

В окрестностях вулкана Асо детальную гравиметрическую съемку выполнил Д. Кубо (1969); например, к северу от вулкана он измерил силу тяжести в 446 пунктах. Распределение $\Delta g_0''$, построенное по данным Кубо, показано на рис. 14.6, из которого видно, что в кальдере Асо относительно ее периферии величины аномалии $\Delta g_0''$ уменьшена примерно на 30 мГал, причем изолинии $\Delta g_0''$ образуют почти правильные концентрические окружности с центром на горе Асо. В 35 км к северо-северо-востоку от Асо видна область, в которой относительно ее ближайшего окружения $\Delta g_0''$ понижено на 25 мГал. Действительно ли здесь расположена кальдера, не ясно, но Т. Мацумото (1963) выдвинул такое предположение исходя из анализа вулканического материала в этом месте. Он даже присвоил ему название «вулкан Кудзю». Гравиметрические данные свидетельствуют в пользу того, что здесь в самом деле имеется кальдера с дефицитом массы.

Итак, мы рассмотрели кальдеры, у которых относительно их ближайшей периферии $\Delta g_0''$ положительно (избыток массы в кальдере) и отрицательно (дефицит массы). К. Яги считает, что указанное различие связано с химическим составом магмы: магма вулканов с положительным $\Delta g_0''$ со-

держит мало SiO_2 , а у вулканов с отрицательным $\Delta g_0''$ много SiO_2 .

Ёкояма (1969) заметил, что дефицит массы ΔM в вулканах с отрицательным $\Delta g_0''$ тем больше, чем больше диаметр кальдеры. Оказывается, что график этой зависимости в двойном логарифмическом масштабе изображается прямой линией, показанной на рис. 14.7. По наклону прямой можно определить, что ΔM пропорционально диаметру кальдеры в степени 3,6.

§ 4. АКТИВНОСТЬ ВУЛКАНОВ И ИЗМЕНЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Изменяется ли распределение глубинных масс в результате вулканической деятельности? Можно ли зарегистрировать подобное изменение? О попытках исследовать этот вопрос с помощью вариометров мы уже упоминали.

Гравитационные вариометры очень неудобны в работе, но в последнее время благодаря усовершенствованию гравиметров значительно упростился процесс непосредственного измерения силы тяжести.

Масса M лавы, излившейся при извержении вулкана Сакурадзима в 1914 г., приблизительно равна $5 \cdot 10^9$ т. Если бы эта масса заполняла шар, центр которого находился на глубине 4 км, то на земной поверхности как раз над центром шара сила притяжения этой массы равнялась бы

$$\frac{k^2 M}{d^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^9 \cdot 10^6}{(4 \cdot 10^5)^2} = 2 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ мГал}$$

Если в результате извержения скопление магмы заменяется пустой полостью, то на поверхности сила тяжести уменьшается на 2 мГал. Если полость опустошается не полностью, а заполняется новой магмой на 90%, то уменьшение силы тяжести на поверхности составит 0,2 мГал — величину, которую можно уверенно измерить современными гравиметрами. Но для достоверной регистрации изменения силы тяжести надо точно измерять высоту пункта наблюдения и в случае ее изменения корректировать поправку за свободный воздух, что само по себе не просто. Кроме того, нужно учитывать изменение силы тяжести за счет земных приливов, а также следить, не изменились ли при извержении числа Лява k , h , используемые при вычислении последней поправки. Уже эти замечания показывают, насколько нелегко получить заслуживающий доверия результат об изменении силы тяжести при вулканических извержениях.

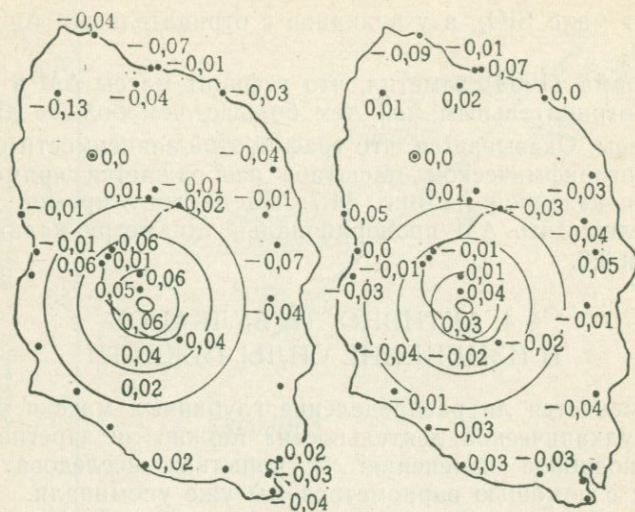


Рис. 14.8. Изменения g на вулкане Михара, о. Осима (мГал). Слева — данные за 1967—1969 гг., справа — за 1969—1972 гг. (Фудзии и др., 1972)

К настоящему времени опубликованы сообщения о гравиметрической съемке района горы Михара на о. Осима (о-ва Идзу), проводившейся с целью обнаружить изменения силы тяжести при извержениях этого вулкана. По сообщению Н. Иути, К. Кано, Ё. Фудзии (1972), в период с 1967 по 1972 г. на о. Осима произошли изменения силы тяжести, отраженные в схемах на рис. 14.8: на горе Михара сила тяжести увеличилась на 50—60 мкГал, а в северо-западной части полуострова она уменьшилась на несколько десятков микрогал. Указанные величины превышают ошибку измерения. Изменение силы тяжести максимально вблизи кратера вулкана и уменьшается по мере удаления от кратера. Наличие изменений силы тяжести в этом районе не вызывает сомнений, но, к сожалению, авторы не контролировали высоту пунктов наблюдения, а это необходимо, поскольку изменение высоты на 15 см приводит к изменению силы тяжести более чем на 50 мкГал.

Подытожим требования к измерениям, проводимым с целью установить изменение силы тяжести за счет перемещения глубинных масс.

- 1) Точность измерения не ниже 10 мкГал при использовании двух или более гравиметров.
- 2) Повторное измерение высоты пунктов наблюдения.
- 3) Повторное измерение силы тяжести в нескольких пунктах вблизи вулкана, выбранных с таким расчетом, что-

бы разность значений силы тяжести в них не превышала 1 мГал (с целью устранить влияние изменений параметров пружин в гравиметрах).

4) Непрерывное наблюдение за величиной силы тяжести по крайней мере в одном специально предназначенном для этого пункте с помощью одного и того же установленного там гравиметра.

5) По мере возможности повторные измерения с помощью портативной установки для абсолютных измерений силы тяжести способом свободного падения тел.

Проблема регистрации изменения силы тяжести при вулканическом извержении стоит на повестке дня, но получение здесь достаточно надежных, заслуживающих доверия результатов — дело очень сложное.

Мы уже отмечали возможность изменения чисел Лява h , k при вулканическом извержении. За их величиной нужно следить при внесении поправки в измеренное значение силы тяжести, но эти изменения интересны и сами по себе.

ГРАВИМЕТРИЯ В ЯПОНИИ

§ 1. ИСТОРИЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
В ЯПОНИИ

В данной главе мы поговорим о распределении силы тяжести в Японии и ее окрестностях. В первом параграфе рассмотрим развитие японской гравиметрии и кратко познакомимся с прогрессом техники измерений.

Первое измерение силы тяжести в Японии было выполнено в 1878 г. За прошедшие с тех пор 100 лет число пунктов, в которых сила тяжести измерена с точностью выше 0,1 мГал, перевалило за 10 000. По точности гравиметрической съемки и плотности гравиметрической сети Япония теперь занимает одно из первых мест в мире. Создание такой густой сети частично объясняется сложностью геологического строения Японии, следствием чего является большая географическая изменчивость распределения силы тяжести на ее территории; так или иначе, современное состояние гравиметрической службы в Японии можно считать очень хорошим.

Даже по сравнению с бурным прогрессом исследований в других областях для периода всего в 100 лет это неплохое достижение. Мы ограничимся здесь вопросами, связанными с измерениями собственно силы тяжести (ее величины). О выводимом из этих измерений географическом распределении аномалий силы тяжести и его истолковании речь пойдет в следующих параграфах, а вопросов, связанных с измерением отклонения отвеса, с локальной гравиметрической съемкой для специальных целей и с измерением вторых производных гравитационного потенциала, вообще не будем затрагивать.

Историю гравиметрии в Японии можно разбить на три периода: начальный, эпоху классических маятниковых измерений и длящийся по настоящее время период внедрения новой техники.

Первое в Японии измерение силы тяжести было выполнено в 1878 г., когда У. Айртон и Дж. Перри измерили значение g в Тигровых воротах Токийского технологического института. Полученное ими значение 979,74 на 50 мГал ниже современного, но эта ошибка была в пределах точности измерений того времени.

В 1880 г. Дж. Менденхолл (1841—1924) и А. Танакадатэ с помощью маятника измерили значения g в Токио и на вершине Фудзиямы:

$$g \text{ (Токио)} = 979,84,$$

$$g \text{ (Фудзияма)} = 978,86.$$

Найденное ими для Токио значение примерно на 50 мГал выше современного.

По разности значений g на вершине Фудзиямы и в Токио Менденхолл и Танакадатэ рассчитали среднюю плотность пород Фудзиямы, получив значение $\rho = 2,08$. С современной точки зрения точность их измерений была недостаточна, а метод расчета ρ вызывает сомнения, поэтому вычисленное ими значение ρ в наше время нельзя принимать всерьез, но их работа важна как первая попытка в указанном направлении.

С 1881 по 1884 г. Танакадатэ с помощью оборотного маятника выполнил абсолютные измерения силы тяжести в Саппоро, Нахе, Кагосиме, Огасаваре, а Х. Нагаока, С. Ниики (1873—1938), Р. Отани (1875—1934) в 1899 г. произвели аналогичные измерения в Киото, Канадзаве, Токио и Мидзусаве, получив результаты

Киото	979,737	Токио	979,813
Канадзава	979,890	Мидзусава	980,179

В настоящее время известно, что значения g в этих четырех пунктах совпадают с точностью 2—3 мГал, но современное абсолютное значение примерно на 20 мГал ниже того, которое получили указанные авторы. Вероятно, в их измерения вкралась какая-нибудь систематическая ошибка.

До сих пор мы говорили о начальном этапе развития гравиметрии в Японии, для которого были характерны измерения g в небольшом числе произвольно выбранных пунктов. Наступивший вслед за ним второй этап характеризуется большей систематичностью и точностью измерений силы тяжести. В 1899 г. Х. Нагаока съездил в Германию и закупил там гравиметрические маятники Штернека. К концам этих латунных маятников были прикреплены грузики, по форме напоминающие шарики в японских национальных счетах (соробан). Маятники опирались на ребра агатовых опорных призм и имели единый, стандартный в то время период колебаний около 0,5 с.

Нагаока сначала измерил период колебаний своего маятника в Потсдамском геодезическом институте, где уже были

выполнены абсолютные измерения силы тяжести*), а по возвращении в Токио снова измерил период в метрологической лаборатории Токийского университета. Сравнивая периоды колебаний, он нашел

$$g \text{ (Потсдам)} - g \text{ (Токио)} = 1,473 \text{ Гал}$$

и, подставляя результат абсолютного измерения g в Потсдаме, равный 981,274, определил

$$g \text{ (Токио)} = 981,274 - 1,473 = 979,801$$

— значение, принятое для Японии в качестве опорного. С тех пор гравиметрическую съемку других районов страны проводили с учетом опорного значения на территории Токийского университета.

После установления в Японии опорного значения силы тяжести дело гравиметрической съемки было передано Геодезическому комитету Министерства просвещения, и трудами Х. Нагаоки, С. Ниики, Д. Шиды, М. Мацуямы и др. во всех районах страны развернулись систематические измерения силы тяжести, прямо или косвенно привязанные к опорному значению g на территории Токийского университета. К 1915 г. величина g была измерена в 18 пунктах на Хоккайдо, 85 — на Хонсю, 6 — на Сикоку, 13 — на Кюсю (всего в 122 пунктах). К 1930 г. М. Мацуяма и С. Тайкоку измерили g на о. Ики (о-ва Цусима), о-вах Оки, в 24 пунктах на территории п-ова Корея и 10 — в северо-восточных районах Китая. Таким образом, за исключением акватории, была составлена общая картина распределения силы тяжести в Японии и ее ближайших окрестностях.

Приблизительно в это же время голландский ученый Венинг-Мейнес провел успешные измерения силы тяжести на подводной лодке. Геодезический комитет немедленно приобрел установку Венинг-Мейнеса и в сотрудничестве с ВМС Японии начал осуществлять морскую гравиметрическую съемку на подводной лодке. Мацуяма, Тайкоку и др. измерили силу тяжести примерно в 60 пунктах Тихого океана вблизи Японии и обнаружили, что вдоль Японского глубоководного желоба тянется полоса больших отрицательных аномалий силы тяжести. Это открытие стимулировало исследования глубинного плотностного разреза в районе глубоководного желоба.

Во всех упомянутых измерениях силы тяжести нужно было определять период колебаний маятника с помощью хронометра, а единицей времени у всех хронометров была секун-

*) Результат абсолютного измерения g в Потсдаме опубликован в 1906 г., но во время визита туда Нагаоки (1899 г.) он был уже известен.

да. Достоверность этой единицы времени сначала контролировали с помощью астрономических наблюдений, а затем для этой цели стали применять сигналы точного времени, передаваемые по радио. Но при относительных измерениях силы тяжести требуется определять лишь отношение периодов колебаний, поэтому единица времени может быть произвольной. Пользоваться секундой не было необходимости, поэтому были сделаны попытки избавиться от нее как от единицы времени при гравиметрических измерениях. В частности, в 1937 г. автор данной книги с помощью К. Кимуры и Т. Футиды разработал метод сравнения, с помощью коротковолновой радиосвязи, периодов колебаний маятника, колеблющегося в опорной точке, и маятника в пункте наблюдения. Этим методом были измерены значения g в 58 пунктах области Канто.

В течение всего второго этапа развития гравиметрии исследователи твердо придерживались так называемого классического (с помощью маятника) метода измерения силы тяжести, но постепенно стала усиливаться тенденция к замене этого метода другими. Наступил третий этап.

Отличительной особенностью третьего этапа развития гравиметрии является успешное освоение двух технических новшеств, первое из которых связано с развитием электроники, а второе — с разработкой статических гравиметров. Начиная с 1940 г. в связи с развитием электроники и созданием кварцевых часов совершенно изменился подход к измерению периода колебаний маятника: отпала необходимость в методе совпадений и период колебаний гравиметрического маятника стали измерять просто сравнением числа его колебаний с числом колебаний осциллятора кварцевых часов. Благодаря этому сильно повысилась точность измерения периода.

Параллельно с улучшением методов измерения периода колебаний совершенствовалась и техника изготовления маятников. К 1951 г. была завершена разработка маятниковой установки типа GSI, в конструкцию которой внесены все известные к тому моменту усовершенствования. Созданный под руководством сотрудника Национального управления геодезии и географии Х. Иноуэ прибор GSI обеспечивает высокую точность измерения (0,02 мГал). О нем уже говорилось в гл. 2.

Сотрудники Национального управления геодезии и географии Х. Иноуэ и Х. Судзуки с помощью прибора GSI провели относительные измерения силы тяжести во многих пунктах как в самой Японии, так и за ее пределами. Основываясь на полученных результатах и применив очень тщательно процедуру их отбора и согласования, Судзуки (1975) выделил в Японии 122 опорных гравиметрических пункта, которые составили Японскую национальную опорную гравиметрическую сеть

(JGSN 75), о которой упоминалось в гл. 3. Эта сеть представляет собой основу для гравиметрической съемки в Японии.

В 1963 г. сотрудник Института океанологии Томода закончил разработку морского гравиметра (Tokyo Surface Ship Gravity Meter — TSSG), позволяющего непрерывно вести гравиметрическую съемку на рейсовых судах торгового флота (о приборе Томода говорилось в гл. 2). Ё. Томода, С. Утадзиро, Н. Сэгава с сотрудниками на судах «Хакухо мару» (Океанологический институт), «Умитаку мару» (департамент морских исследований) и других осуществили морскую гравиметрическую съемку главным образом в западной части Тихого океана, где до 1977 г. было проведено свыше 400 000 измерений силы тяжести. Выше уже отмечалось, что в приборе TSSG использованы колебания струны; он оснащен высокопроизводительным и сложным электронным оборудованием, с помощью которого определяется период колебаний струны и вычисляются поправки, компенсирующие влияние качки судна. Приборы TSSG и GSI в своем классе принадлежат к числу лучших в мире.

Нельзя не упомянуть об устройствах для абсолютного измерения силы тяжести методом свободного падения тел. На этом принципе основана уникальная установка, разработанная К. Сакума, Т. Кицунэдзаки и др. Она позволяет достичь очень высокой точности 0,010 мГал.

В 1977 г. на геофизической обсерватории Мидзусава (уезд Агата, преф. Ивате) закончено сооружение специального корпуса, в котором смонтирована установка для абсолютных измерений силы тяжести методом свободного падения тел. На этой установке через определенные промежутки времени должны вестись повторные измерения силы тяжести с целью наблюдения ее вековых изменений. Сотрудник обсерватории И. Цубокава занят разработкой малогабаритного варианта установки для абсолютных измерений силы тяжести методом свободного падения, которая могла бы уместиться в кузове грузовой автомашины.

Итак, в Японии непрерывно возникают новые идеи, шаг за шагом претворяемые в жизнь. Кроме того, активизации гравиметрических измерений в Японии способствовал импорт оборудования из США, в основном статических (пружинных) гравиметров, о которых рассказано в гл. 2. Эти приборы в Японии пока не производятся.

Еще до второй мировой войны управление Геологической службы импортировало немецкие пружинные гравиметры фирмы «Аскания». Это были большие, тяжелые, трудно передвигаемые приборы. В 1951 г. Сейсмологический институт закупил большую партию очень простых гравиметров Уордена,

и под руководством автора этой книги развернулась большая работа по измерению силы тяжести на каждом нивелирном репере по всей Японии. При помощи А. Санэкавы, К. Тадзимы и др. за три года (к 1954 г.) автору удалось измерить силу тяжести примерно в 3500 пунктах (исключая Хоккайдо). Конечно, эти измерения по необходимости проводились не слишком тщательно: гравиметрические профили замыкали в кольцо без увязки с имевшимися опорными пунктами, в которых сила тяжести ранее была измерена маятниковыми приборами. Поэтому точность измерений была не очень высока — около 1 мГал. Но число точек, в которых были выполнены эти измерения (3500), почти в 30 раз превосходит число опорных гравиметрических пунктов Геодезического комитета (122), что позволило выяснить детали распределения силы тяжести в таких местах, для которых ранее это было невозможно. В итоге удалось уточнить связь между геологическим строением и сейсмической активностью.

В 1952 г. Национальное управление геодезии и географии закупило партию гравиметров «Северная Америка» и гравиметров Лакоста — Ромберга. С помощью этих приборов осуществлена сплошная гравиметрическая съемка всей территории Японии, включая Хоккайдо (всего около 10 000 точек). В ходе этой работы производилась увязка с опорными гравиметрическими пунктами, в которых сила тяжести была измерена маятниковыми приборами. Для территории Японии 10 000 — огромное число. Как по качеству измерений, так и по их объему результаты этой съемки, несомненно, одни из лучших в мире.

В Японии проводится не только сплошная гравиметрическая съемка территории, но и исследуются изменения силы тяжести при землетрясениях и вулканических извержениях. В нескольких обсерваториях для этой цели созданы исследовательские группы и мобилизованы все имеющиеся на них гравиметры.

Гравиметрические исследования шаг за шагом обогащают наши знания о сложном геологическом строении Японских о-вов и повышенной активности земной коры в этом регионе.

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ В ЯПОНИИ И ЕЕ ОКРЕСТНОСТЯХ

Основные тенденции в распределении гравитационных аномалий в районе Японских о-вов отражены на рис. 15.1. На суше здесь показаны значения $\Delta g''_0$, а на море Δg_0 . Карта со-

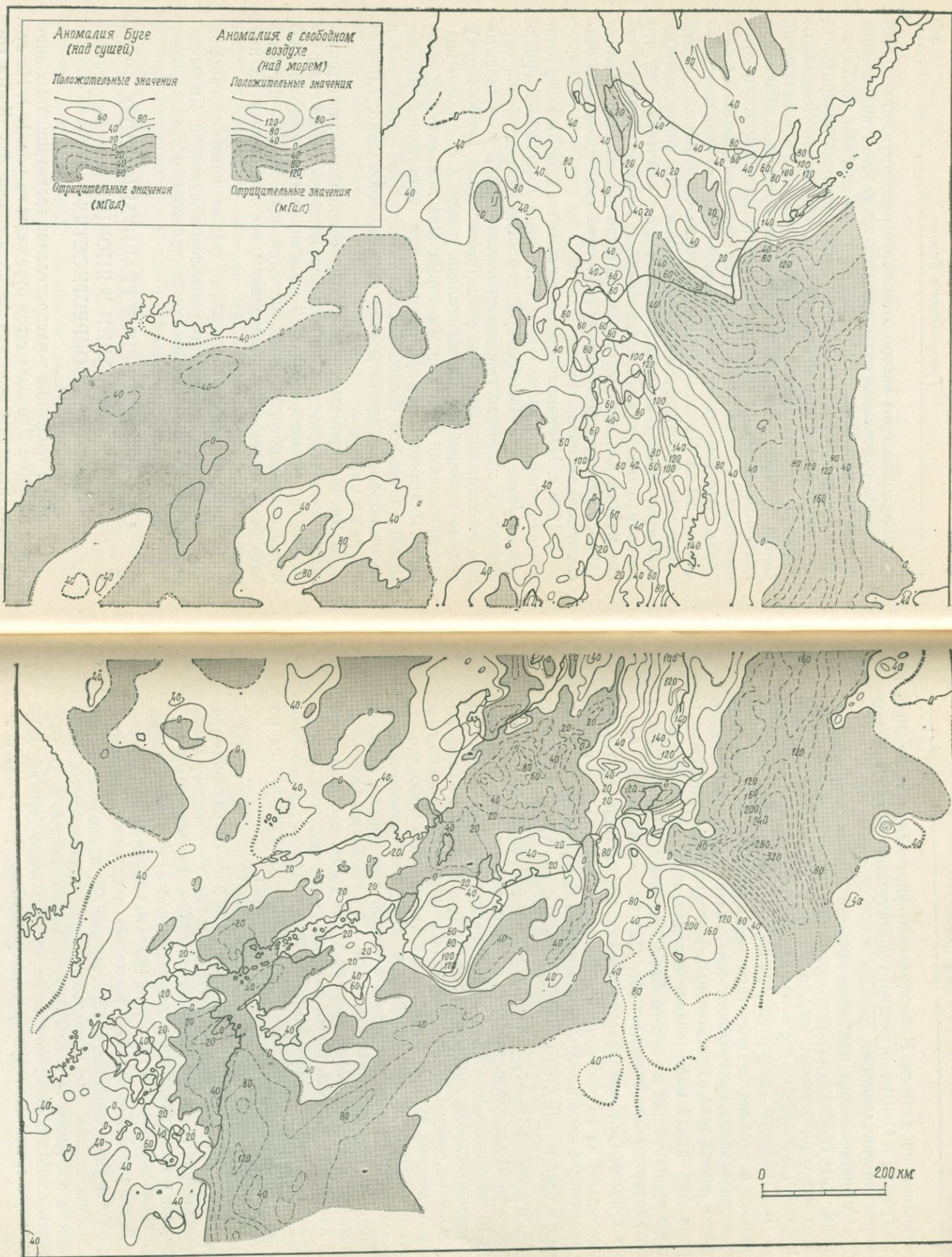


Рис. 15.1. Схематизированный вариант карты, изданной Национальным управлением геодезии и географии.

ставлена по данным Национального управления геодезии и географии и Океанологического института и дважды отредактирована управлением.

Остановимся на наиболее примечательных особенностях поля силы тяжести, изображенного на карте. Начнем с самых крупных образований и шаг за шагом будем уточнять детали картины, переходя ко все более мелкомасштабным структурам.

1. В области Тохоку (северо-восток Хонсю) $\Delta g''_0$ положительно, а в области Тюбу (центральная часть Хонсю), если следовать вдоль центральной оси Хонсю в западном направлении, видна зона отрицательных значений $\Delta g''_0$. В центре острова $\Delta g''_0$ имеет минимальное отрицательное значение, а по мере приближения к берегам Японского моря и Тихого океана возрастает, меняя знак на плюс, так что в среднем $\Delta g''_0$ близко к нулю. Положительные значения $\Delta g''_0$ в области Тохоку указывают на то, что земная кора здесь тоньше. Для Тохоку усредненное значение $\Delta g''_0 \approx +50$ мГал, а на юго-западе Японии, в зоне минимальных значений, в среднем $\Delta g''_0 \approx -30$ мГал, так что разность $\Delta g''_0$ между этими районами составляет около 80 мГал; следовательно, в Тохоку земная кора примерно на 10 км тоньше, чем в западной Японии; сейсмические волны с больших глубин приходят здесь примерно на 1 с раньше.

Оценка сжатия фигуры Земли на основе одних только гравиметрических данных по Японии дает значение $1/320$, что заметно меньше среднего значения сжатия, получаемого по гравиметрическим данным для всей земной поверхности (Цубои, 1935). Мы уже упоминали об этом обстоятельстве. Оно означает, что в Тохоку геоид располагается выше, чем в среднем по данной параллели. Более высокое положение геоида тоже связано с утоньшением земной коры в Тохоку, вследствие чего тенденция к увеличению силы тяжести усиливается по мере продвижения в северном направлении.

Подразделение на северо-восточную и юго-западную Японию уже давно принято в геологии; эти районы различаются как с гравиметрической точки зрения, так и по геологическому строению. Но четко выраженной границы между ними (например, в виде какой-либо геологической структурной линии или гравиметрической границы) указать невозможно.

В западной Японии $\Delta g''_0$ вдоль оси островной дуги минимально и увеличивается к берегам как Японского моря, так и Тихого океана, где в открытом море принимает положительные значения. Эти особенности можно понять в рамках представления о береговом эффекте Гельмерта (см. гл. 12). Западную Японию следует рассматривать не просто как воз-

дымающуюся из моря сушу, а как независимый от окружения структурный «материковый блок».

На Кюсю линии постоянного $\Delta g_0''$ идут практически по меридиану, причем $\Delta g_0''$ повышается в западном направлении, достигая у берегов Восточно-Китайского моря значений около +50 мГал. Восточно-Китайское море мелкое, глубина его составляет всего несколько сотен метров, но значения Δg_0 здесь гораздо больше, чем в других мелких морях. Возможно, что земная кора под этим морем относится к «океаническому типу», а его современная малая глубина объясняется заполнением его чаши песком и глиной, доставляемыми р. Янцзы. Тогда западный берег Кюсю можно рассматривать как западную оконечность японского «материкового блока», а большие положительные значения $\Delta g_0''$ на западном побережье Кюсю можно объяснить как проявление берегового эффекта Гельмерта.

2. От района Тихого океана, примыкающего к области Тохоку, мимо о-вов Идзу к Марианским о-вам протянулся Японский глубоководный желоб. Полоса минимальных значений Δg_0 , достигающих —150 мГал, несколько сдвинута в нем в сторону суши, а еще дальше по направлению к матерiku аномалия Δg_0 меняет знак, становясь положительной. Считается, что там, где Δg_0 отрицательно, земная кора под желобом погружается в мантию. Сопряженные между собой аномальные зоны (на западе положительная, на востоке отрицательная) тянутся от Хоккайдо мимо Тохоку, о-вов Идзу к Марианским о-вам. На суше область Тохоку соединена с юго-западной Японией, но в структурном отношении зона перехода от материка к океану протягивается здесь в меридиональном направлении.

3. Распределение $\Delta g_0''$ в области Тюбу показано также на рис. 9.4, из которого видно, что в центральной горной стране, где высота местности над уровнем моря велика, $\Delta g_0''$ отрицательно. Отсюда следует, что земная кора здесь находится в состоянии изостазии; ее толщина, оцененная из условия равновесия, составляет около 50 км. Интересно отметить, что зона минимального $\Delta g_0''$ сдвинута к северу от района, где горы имеют наименьшую высоту, всего на несколько десятков километров. В этом обстоятельстве можно искать ключ к решению вопроса о происхождении центрального горного массива.

4. В центре Хоккайдо с севера на юг проходит горный хребет Хидака, на котором $\Delta g_0''$ имеет большие положительные значения в противоречии с условием изостазии. Это про-

тиворечие можно рассматривать как важное указание для теории происхождения хребта Хидака. Возможно, с нарушением изостазии связано встречающееся здесь огромное множество ультраосновных интрузий.

5. Вдоль юго-восточного побережья Хоккайдо вплоть до Немуро тянется полоса больших значений силы тяжести, где $\Delta g_0''$ местами превышает 220 мГал. Это максимальные в Японии значения $\Delta g_0''$.

6. На юго-западе Хоккайдо расположена область минимальных для Хоккайдо значений силы тяжести. Она находится к западу от Уракавы и имеет вид полосы, захватывающей и побережье, и море. Сюда заходит ответвление пояса минимальных значений $\Delta g_0''$, который далее проходит вблизи Тохоку и затем идет на юг к Марианским о-вам. В этом ответвлении, вдающемся в сушу в виде рога, часты землетрясения.

7. Распределение $\Delta g_0''$ в области Тохоку воспроизведено на рис. 15.2. В восточной половине ее, включая горные массивы Китаками и Абукума, $\Delta g_0''$ положительно и превышает 100 мГал, а изолинии $\Delta g_0''$ идут приблизительно в меридиональном направлении. Но картина изолиний $\Delta g_0''$ резко меняется при переходе в западную часть области Тохоку, где распределение $\Delta g_0''$ очень плоское и незакономерное. Между массивами Китаками и Абукума с одной стороны и горным хребтом Оу с другой должен существовать довольно резкий разрыв непрерывности. Автор данной книги назвал эту границу линией Мориока — Сиракава (1953) по названию населенных пунктов, расположенных вблизи нее. Линия Мориока — Сиракава протягивается в южном направлении до района Канто, где почти под прямым углом поворачивает к востоку и заканчивается на побережье Кудзюкури к югу от горы Цукуба. В области больших значений $\Delta g_0''$ много обнажений гранитов.

8. Известно, что основные тектонические линии юго-западной Японии идут от Кюсю через Сикоку к п-ову Кии. Распределение силы тяжести в общем, хотя и не очень точно, повторяет ход этих геологических структур.

Тектонические разрывы, разделяющие северо-восточную и юго-западную Японию, с геологической точки зрения видны исключительно четко, но на гравиметрических картах они прослеживаются не очень ясно.

Итак, встречаются случаи, когда четко выраженным с геологической точки зрения изменениям на гравиметрической карте не отвечает столь же заметное изменение распределе-

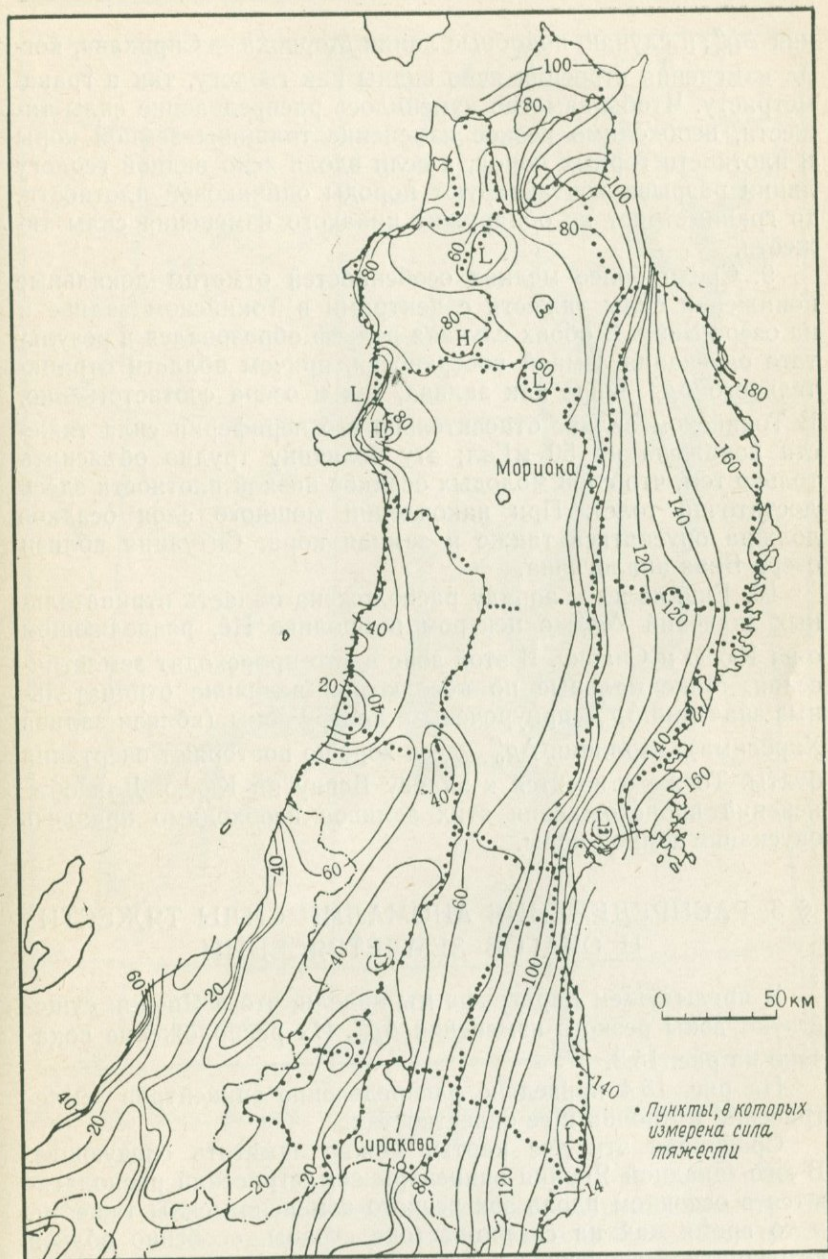


Рис. 15.2. Δg_0 в области Тохоку (мГал). L и H — области соответственно низких и высоких значений.

ния $\Delta g_0''$, и случаи, подобные линии Мориока — Сиракава, когда изменения строения ясно видны как геологу, так и гравиметристу. Чтобы заметно изменилось распределение силы тяжести, необходимо резкое изменение толщины земной коры и плотности горных пород, а если вдоль ясно видной геологу линии разрыва контактируют породы одинаковой плотности, то гравиметрист не обнаружит никакого изменения силы тяжести.

9. Среди более мелких особенностей отметим локальные понижения силы тяжести с центрами в Токийском заливе и на озере Бива. В обоих случаях рельеф образовался в результате опускания земной поверхности, причем области отрицательного $\Delta g_0''$ шире как залива, так и озера соответственно. В Токийском заливе относительно его периферии сила тяжести понижена на 50 мГал; эту величину трудно объяснить только тем, что слой молодых осадков низкой плотности здесь достаточно толст. При накоплении мощного слоя осадков должна опускаться также и земная кора. Ситуация вблизи озера Бива аналогична.

10. Еще далее к западу расположена область отрицательных значений $\Delta g_0''$ с центром в проливе Иё, разделяющем о-ва Кюсю и Сикоку. В этой зоне часто происходят землетрясения. Максимальные по абсолютной величине отрицательные значения $\Delta g_0''$ приурочены к центру зоны (вблизи залива Хиросима); изолинии $\Delta g_0''$ здесь хорошо повторяют очертания бухты. То же относится к заливу Беппу на Кюсю. Для объяснения происхождения этих заливов необходимо привлечь опускание земной коры.

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ОЧАГОВ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

В предыдущем параграфе мы видели, что в Японии существуют зоны резкого изменения $\Delta g_0''$. Их расположение показано на рис. 15.3.

На рис. 15.4 приведено распределение эпицентров землетрясений в Японии и ее окрестностях.

Сравнивая эти две карты, можно заметить следующее. В юго-западной Японии эпицентры землетрясений располагаются в основном вдоль зон резкого изменения силы тяжести, в то время как на северо-востоке страны, особенно вблизи юго-западной оконечности Хоккайдо около Уракавы, эпицентры землетрясений приурочены к площадям, ограниченными зонами резкого изменения $\Delta g_0''$.

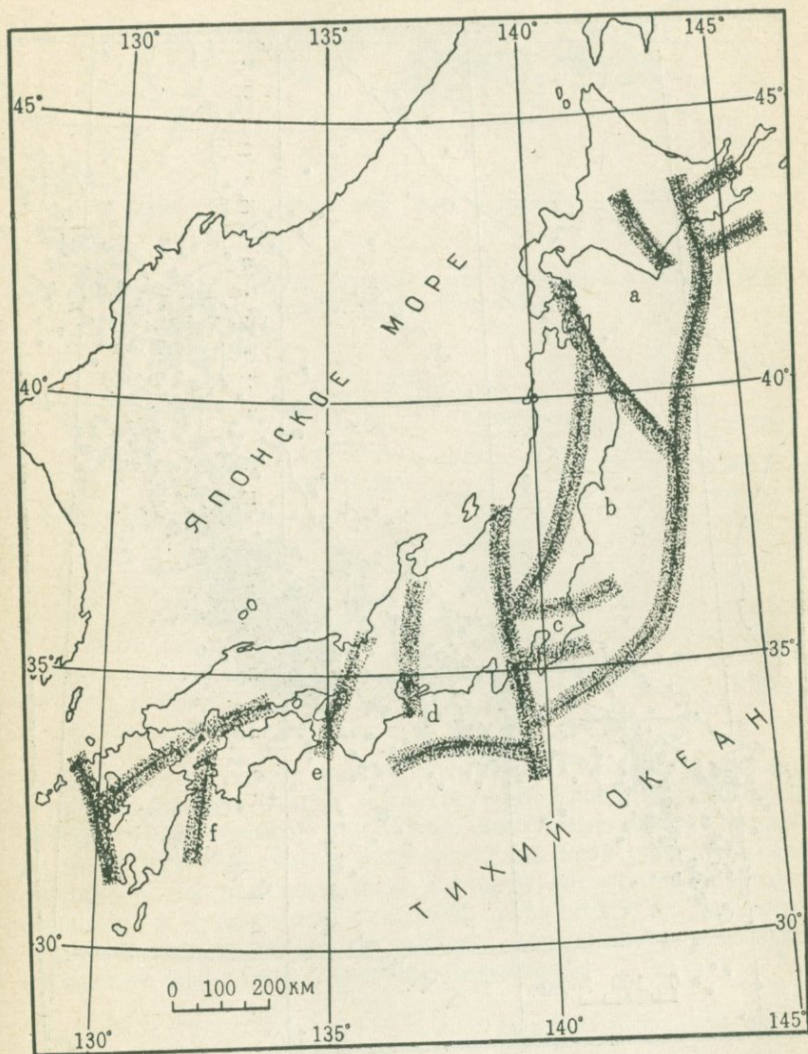


Рис. 15.3. Зоны резкого пространственного изменения аномалий силы тяжести.

Если оставить в стороне глубокофокусные землетрясения, то типичные для Японии и ее окрестностей землетрясения характеризуются следующими особенностями. В юго-западной Японии очаги землетрясений чаще всего локализованы внутри земной коры, а на северо-востоке страны они

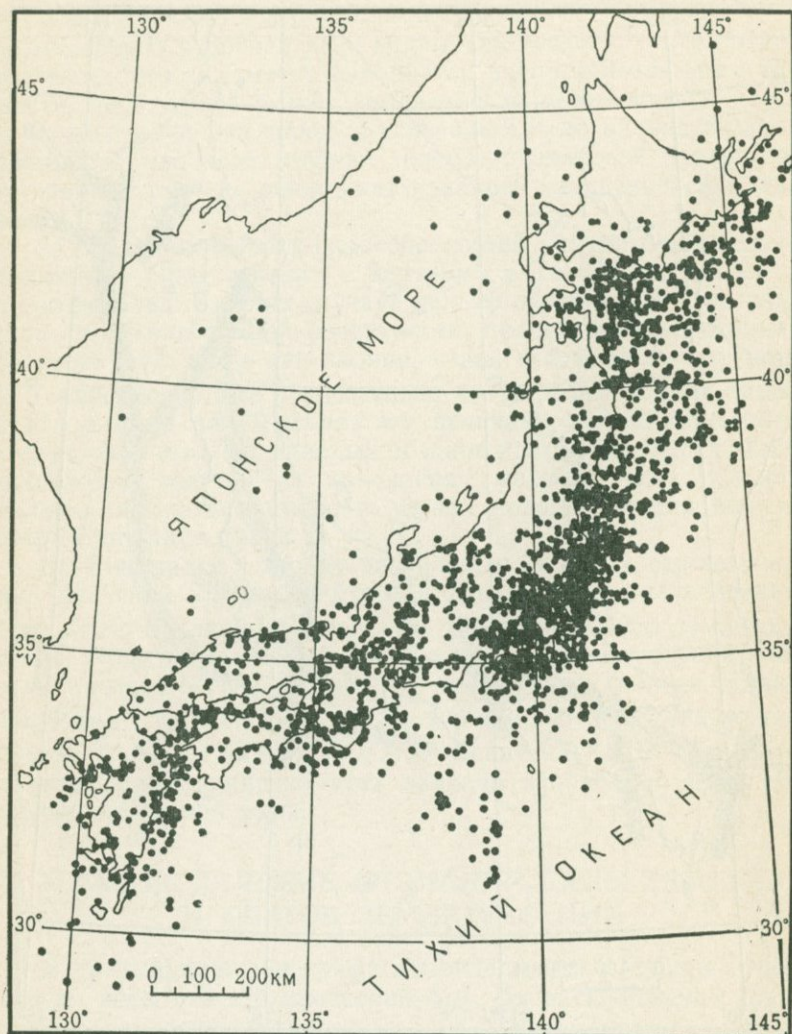


Рис. 15.4. Распределение эпицентров умеренных и сильных землетрясений (1900—1950 гг.).

расположены глубже — землетрясения там возникают в мантии. На рис. 15.5 показано распределение очагов землетрясений по глубине. На его основе и вытекающих из гравиметрических данных изменений толщины земной коры построена схема соответствия между мощностью земной коры и распределением очагов землетрясений (рис. 15.6),

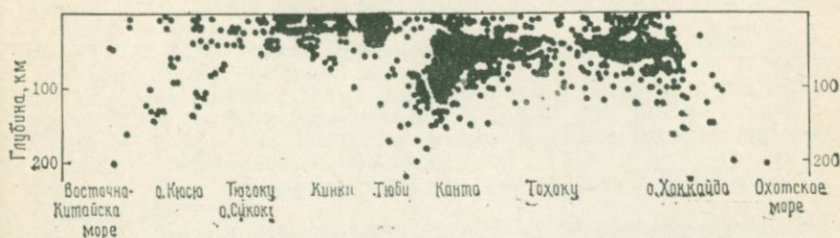


Рис. 15.5. Распределение по глубине очагов умеренных и сильных землетрясений (по М. Кацумате).



Рис. 15.6. Распределение очагов землетрясений в земной коре и верхней мантля Японии.

Впервые на связь между распределением силы тяжести и расположением очагов землетрясений указал М. Мацуяма (1926). После этого, привлекая доступные тогда данные, Цубои (1929) обосновал существование этой связи. За прошедшие с тех пор несколько десятков лет объем гравиметрических и сейсмических данных увеличился в несколько десятков раз и теперь появилась возможность высказать сделанные выше определенные утверждения.

ЛИТЕРАТУРА

В данный список включены также статьи, не использованные в тексте книги. Статьи, отмеченные звездочкой, опубликованы на японском языке.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

- Cook A. H.* Gravity and the earth. London: Wykeham Publ., 1969.
- Garland G. D.* The earth's shape and gravity. London: Pergamon Press, 1965. (Имеется перевод: Дж. Гарленд. Форма Земли и сила тяжести. — М.: Мир, 1967.)
- Heiskanen W., Vening Meinesz F. A.* The earth and its gravity field. New York: McGraw-Hill, 1958.
- Heiskanen W., Moritz P.* Physical Geodesy. San Francisco: W. H. Freeman, 1967.
- Helmert F. A.* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Leipzig: Seubner, 1884.
- Jeffreys H.* The earth. 3rd edition. Camb. Univ. Press, 1952. (Имеется перевод 4-го изд.: Г. Джеффрис. Земля, ее происхождение, история и строение. — М.: ИЛ, 1960.)
- National Research Council. The figure of the earth. Bull. U. S. Nat. Res. Council., № 78, Washington, D. C., 1931.

ГЛАВА 1

- Bullen K. E.* The variation of density and the ellipticities of strata of equal density within the earth. Month. Not. Roy. Astr. Soc., Geophys. Suppl., 3, 395, 1936.
- Cavendish H.* Experiments to determine the density of the earth. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 88, 469, 1798.
- Heyle P. R.* A redetermination of the constant of gravitation. Journ. Res. U. S. Bur. Stand., 5, 1243, 1930.
- Heyle P. R., Chrzanowski P.* A new determination of the constant of gravitation. Journ. Res. U. S. Bur. Stand., 29, 1, 1942.
- Lambert W.* Density, gravity, pressure and elasticity in the interior of the earth. Physics of the earth, VII, 1939, New York: McGraw-Hill, 1939, 329
- Lambert W., Darling F. W.* Internal constitution of the earth. New York: Dover Pub., 1951.
- Poynting J. H.* The mean density of the earth. London: C. Griffin and Co., 1894.

ГЛАВА 2

- Browne B. C.* Second order corrections to pendulum observations. Month. Not. Roy. Astr. Soc., Geophys., Suppl., 4, 271, 1937.
- Bullard E. C.* The observation of gravity by means of invariable pendulums. Proc. Roy. Soc. London, 141, 233, 1933.

- Bullard E. C.* Gravity survey measurements in East Africa. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 235, 445, 1936.
- Gilbert R. L. C.* A dynamic gravimeter of novel design. Proc. Phys. Soc., London, 62, 445, 1949.
- Haalck H.* Ein statischer Schwerkraftmesser. ZS. f. Geophys., 7, 95, 1931.
- Haalck H.* Ein statischer Schweremesser, *ibid.*, 8, 17, 197, 1932.
- Haalck H.* Berichte über den gegenwärtigen Stand der Entwicklung des statischen Schweremessers, *ibid.*, 9, 81, 1933.
- Haalck H.* Neue Messungsergebnisse mit dem statischen Schweremesser, *ibid.*, 9, 285, 1933.
- Haalck H.* Der neue statische Schweremesser des Geodätischen Instituts in Potsdam, *ibid.*, 12, 1, 1936.
- Hecker O.* Bestimmung der Schwerkraft auf den Atlantischen Ozean sowie in Rio de Janeiro. Veroff. Preuss. Geod. Inst. № 11, 1903.
- Hecker O.* Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen Ozean und deren Küsten, *ibid.*, № 16, 1908.
- Kater H.* An account of experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in the latitude of London, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 108, 32, 1818.
- LaCoste L. J. B.* A new type long period vertical seismograph. Physics, 5, 178, 1934.
- LaCoste L. J. B., Carkson H. N.* Improvements in tidal gravity meters. Trans. Amer. Geophys. Un., 38, 1957.
- **Tomoda Y.* Tokyo surface ship gravity meter. Journ. Geod. Soc. Japan, 7, 116, 1961.
- Tomoda Y., Segawa J., Takemura T.* Comparison measurements of gravity at sea using a T. S. S. G. and Graf-Askania sea gravimeter. Journ. Phys. Earth, 20, 267, 1972.
- Tomoda Y., Tsuboi C., Kanamori H.* Continuous measurements of gravity on board a moving surface ship. Proc. Jap. Acad., 37, 571, 1961.
- Tsuboi C.* On the possibility of taking gravity measurements at sea on board an ordinary vessel. Proc. Imp. Acad. Japan, 9, 374, 1933.
- **Tsuboi C.* Improved apparatus for taking gravity measurements at sea on board an ordinary vessel, *ibid.*, 10, 640, 1934.
- **Tsuboi C., Fuchida T.* Relative gravity measurements of gravity by means of short wireless wave communications. Journ. Seis. Soc. Japan, 9, 546, 1937.
- Vening Meinesz F. A.* Theory and practice of gravity measurements at sea. I. Waltman, Delft, 1929, II. Pub. Neth. Geod. Comm., 1941.
- Volet Ch.* Mesure de l'accélération due a la pesanteur, au pavillon de Breteuil, C. R., 235, 442, 1952.
- Wing C. C.* An experimental deep sea-bottom gravimeter. Journ. Geophys. Res., 72, 1249, 1967.

ГЛАВА 3

- Clark J. S.* An absolute determination of the acceleration due to gravity. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 238, 65, 1939.
- Cook A. H.* Comparison of the acceleration due to gravity at the National Physical Laboratory, Toddington, the Bureau International des Poids et Mesure, Savre, the Physikalische-technische Bundesanstalt, Brunswick and the Geodetic institute, Potsdam. Proc. Roy. Soc., London, 213, 408, 1952.
- Dryden H. L.* A reexamination of the Potsdam absolute determination of gravity. Journ. Res. Nat. Bur. Stand., 29, 303, 1942.
- Heyle P. R., Cook G. S.* The value of gravity at Washington. Journ. Res. Nat. Bur. Stand., 17, 505, 1936.

- Kühnen F., Furtwängler Ph.* Bestimmung der absoluten Grösse der Schwerkraft zu Potsdam, Veröff. Königl. Preuss. Geod. Inst. № 27, 1906.
- Preston-Thomas H., Turnbull L. G., Green E., Dauchinee T. M., Kalra S. N.* An absolute measurement of the acceleration due to gravity at Ottawa. *Can Journ. Phys.*, 38, 824, 1960.
- Wollard G.* An evaluation of the Potsdam Datum. *Sc. Rep. Hawaii Inst. Geophys.*, № 1, 1963.

ГЛАВА 4

- Clairaut A. C.*, Theorie de la figure de la terre. Chez. Courier, Paris, 1743.
- Kozai Y.* Potential field of the earth derived from motions of artificial satellite. *Proc. Symp. Geod. Space Age, Ohio State Univ.*, 174, 1961.
- Kozai Y.* The gravitational field of the earth derived from motions of three satellites. *Astr. Journ.*, 68, 8, 1961.
- Kozai Y.* Tesseral harmonics of the gravitational potential from satellite motions. *Asr. Journ.*, 66, 355, 1961.
- Kozai Y.* New determination of zonal harmonics coefficients of the earth's gravitational potential. *Spec. Rep. Smithsonian Astr. Observ.*, № 165, 1964.
- Kozai Y.* The earth gravitational potential derived from satellite motion. *Space Sc. Res.*, 5, 818, 1966.
- Kozai Y.* Revised values for coefficients of zonal spherical harmonics in the geopotential, dynamics of satellites. Berlin: Springer-Verlag, 1969, 104.
- Somigliana C.* Sul campo gravitazionale estero del geoid ellipsoidico. *Atti Acad. Nazl., Lincei Rend.*, 11, 237, 1930.

ГЛАВА 5

- Talwani M., Ewing M.* Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophys.*, 25, 203, 1960.
- **Tsuboi C.* Calculation of gravity due to an infinitely long column with an arbitrary cross sectional form. *Journ. Seis. Soc. Japan*, 15, 167, 1943.

ГЛАВА 6

- Byerly W. E.* An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics. Boston: Ginn and Co., 1893.
- Kellog O. D.* Foundation of potential theory. New York: Ungar, 1929.
- MacMillan W. D.* The theory of the potential. New York: Dover Pub., 1930.

ГЛАВА 7

- Bullard B. C., Cooper I. B.* The determination of the masses necessary to produce a given gravity field. *Proc. Roy. Soc., London*, 194, 273, 1938.
- Dix C. H.* Use of the function $(\sin x)/x$ in gravity problems. *Proc. Jap. Acad.*, 40, 276, 1964.
- Kanamori H.* A new method for downward continuation of twodimensional gravity distribution. *Proc. Jap. Acad.*, 39, 469, 1963.
- Takeuchi H., Saito H.* Numerical tables useful in three dimensional gravity interpretation. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 42, 39, 1964.
- Tomoda Y., Aki K.* Use of the function $(\sin x)/x$ in gravity problems. *Proc. Jap. Acad.*, 31, 443, 1955.

- Tsuboi C.* Gravity anomalies and the corresponding subter-ranean mass distribution. Proc. Imp. Acad. Japan, 14, 170, 1938.
- Tsuboi C.* Applications of Fourier series for computing gravity anomalies and other gravimetric quantities at any elevation from surface gravity anomalies. Rep. Inst. Geod. Photogr. Cartogr. Ohio State Univ., № 1, 1959.
- Tsuboi C.* Application of double Fourier series to computing gravity anomalies and other gravimetric quantities at higher elevations from surface gravity anomalies. *ibid.*, № 2, 1959.
- Tsuboi C.* Application of $(\sin x)/x$ and other similar functions to computing gravity anomalies at higher elevation, starting from given surface anomalies. *ibid.*, № 3, 1959.
- Tsuboi C.* Weight function method for computing gravity anomalies at higher elevations, starting from given surface gravity anomalies. *ibid.*, № 4, 1959.
- Tsuboi C., Fuchida T.* Relation between gravity anomalies and the corresponding subterranean mass distribution (II). Bull. Earthq. Res. Inst., 16, 273, 1938.
- Tsuboi C., Oldham C. H. G., Waithman V. B.* Numerical tables facilitating three-dimensional gravity interpretations. Journ. Phys. Earth, 6, 7, 1958.
- Rikitake T.* Analysis of geomagnetic field by use of hermite functions. Bull. Earthq. Res. Inst., 30, 293, 1952.
- Sato Y.* A note on Tsuboi-Nagata's method. Bull. Earthq. Res. Inst., 32, 259, 1954.

ГЛАЗА 8

- Lambert W. D.* Deflections of the vertical from gravity anomalies. Trans. Amer. Geophys. Un., 28, 153, 1947.
- Lambert W. D., Darling F. W.* Tables for determining the form of the geoid and its indirect effect on gravity. Spec. Pub. U. S. C. G. S., N 199, 1936.
- Pizetti P.*, Sopra il calcolo delle deviazioni del geode dell'ellissoide. Atti Reale Accad. Sc. Torino, 46, 223, 1911.
- Rice D. A.* Gravimetric deflections by the method of condensation. Trans. Amer. Geophys. Union, 30, 323, 1949.
- Rice D. A.* Deflection of the vertical from gravity anomalies. Bull. Geod., 25, 285, 1952.
- Sollins A. D.* Tables for the computation of deflections of the vertical from gravity anomalies. Bull. Geod., 6, 279, 1947.
- Stokes G. G.* On the variation of gravity at the surface of the earth. Trans. Camb. Phil. Soc., 8, 672, 1849.
- Tsuboi C.* The deflection of the vertical, the undulation of the geoid and the gravity anomalies. Bull. Earthq. Res. Inst., 15, 650, 1937.
- Tsuboi C.* Relation between the gravity anomalies and the corresponding subterranean mass distribution (V), isostatic anomalies and the undulation of the isostatic geoid in the United States of America. Bull. Earthq. Res. Inst., 18, 384, 1940.
- Tsuboi C.* Undulation of the isostatic geoid in the East Indies as calculated from gravity anomalies. Geophys. Notes, 40, 1948.
- Tsuboi C.* Numerical tables useful studying the gravitational field at higher elevations of the earth. The earth today. Roy. Astron. Soc., 73, 1961.
- Vening Meinesz F. A.* A formula expressing the deflection of the plumb-line in the gravity anomalies and some formula for the gravity field and gravity potential outside the geoid. Kon. Akad. van Wet., Amsterdam, 31, 315, 1928.
- Vos van Steenwijk J. E.* Plumb-line deflections and geoid in Eastern Indonesia as derived from gravity. Pub. Neth. Geod. Comm., 1947.

ГЛИАВА 9

- **Tsuboi C.* Calculation of the deflection of the vertical with aid of Bessel-Fourier series. Journ. Geod. Soc., Japan, 1, 25, 1954.
- Tsuboi C.* A simple method for calculating the deflection of the vertical from gravity anomalies, with its applications to 16 selected stations in U. S. A. Journ. Phys. Earth. 2, 45, 1954.
- Tsuboi C.* A new and simple method for calculating the deflections of the vertical from gravity anomalies with aid of Bessel-Fourier series. Proc. Jap. Acad., 30, 461, 1954.
- Tsuboi C.* Upward and downward continuation of gravity values based on the cylindrical co-ordinate system. Proc. Jap. Acad., 37, 37 (1961).
- Tsuboi C.* Upward continuation of gravity values based on the cylindrical co-ordinate system. Rep. Inst. Geod. Photogr. Cartogr. Ohio State Univ., 16, 1961.
- Tsuboi C.* Deflection of the vertical at Tokyo. Proc. Jap. Acad., 55, 49, 1979.

ГЛИАВА 10

- Elkins T. A.* The second derivative method of gravity interpretation. Geophysics, 16, 29, 1951.
- Eötvös R. V.* Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehewage. Verh. XV Allg. Konf. d. Intern. Erdmag., Budapest, 1, 337, 1906.
- Evjen H. M. M.* The place of the vertical gradient in gravity interpretation. Geophys., 1, 127, 1936.
- Hagiwara Y.* Three-dimensional distribution of real Bouguer anomalies from gravity values observed at various elevations. Bull. Earthq. Res. Inst., 44, 519, 1966.
- Henderson R. G., Cordell L.* Reduction of unevenly spaced potential field data to a horizontal plane by means of finite harmonic series. Geophysics, 3, 856, 1971.
- **Tajima H., Izutuya S.* Measurements of the vertical gradient of gravity at Keio Plaza hotel building: Journ. Geod. Soc. Japan, 17, 187, 1971.
- Tsuboi C.* A study of the anomalies in the vertical gradient of gravity with the aid of the Bessel-Fourier series. Proc. Jap. Acad., 30, 453, 1954.
- Tsuboi S.* Anomalies in $\partial g/\partial z$. Journ. Geod. Soc. Japan, 2, 21, 1955.
- Tsuboi C.* Calculation of bouguer anomalies with due regard to the anomaly in the vertical gravity gradient. Proc. Jap. Acad., 41, 386, 1965.
- Tsuboi C.* Derivation of real Bouguer anomalies from gravity values observed at various elevations. Journ. Geod. Soc. Japan, 10, 94, 1963.
- Tsuboi C., Kato M.* The first and second vertical derivatives of gravity. Journ. Phys. Earth, 1, 95, 1952.

ГЛИАВА 11

- Darwin G. H.* Attempted evaluation of the rigidity of the earth based on tides of long periods. Sc. Papers, I, Cambridge, 1907.
- Love A. E. H.* Some problems of geodynamics. Camb. Univ. Press, Cambridge, 1911.
- Shida T., Matuyama M.* Change of plumb line referred to the axis of the earth as found from the result of the international latitude observations. Mem. Coll. Sc. Eng., Kyoto Imp. Univ., IV, № 1, 1912.
- Takeuchi H.* On the earth tide in the compressible earth of varying density and elasticity. Trans. Amer. Geophys. Union, 31, 651, 1950.
- Tsuboi C.* Observation of the time variation of the second space derivatives of the gravitational potential. Bull. Earthq. Res. Inst., 7, 457, 1929.

ГЛАВА 12

- Airy G. B.* On the computation of the effect of the attraction of mountain masses as disturbing the apparent astronomical latitude of stations in geodetic surveys. Phil. Trans. Roy. Soc., London, **145**, 101, 1855.
- Born A.* Isostasie und Scheremessungen. Berlin: Julius Springer, 1932.
- Bowie W.* Investigation of gravity and isostasy. Spec. Pub. U. S. C. G. S., **40**, 1, 1917.
- Bowie W.* Isostasy. New York: E. P. Dutton and Co., 1927.
- Bowie W.* Isostatic investigations and data for gravity stations in the United States established since 1915. Spec. Pub. U. S. C. G. C., **99**, 1, 1942.
- Dutton C. E.* On some of the great problems of physical geology. Bull. hil. Soc. Wash., № 11, 1889.
- Griggs P.* A theory of mountain building. Amer. Journ. Sc., **237**, 611, 1939.
- Hayford J. H.* The figure of the earth and isostasy from measurements in the United States. Spec. Pub. U. S. C. G. S., **1**, 1909.
- Hayford J. H., Bowie W.* The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity. Spec. Pub. U. S. C. G. S., **10**, 1, 1912.
- Heiskanen W.* Untersuchungen uber Schwerkraft und Isostasie. Veröff. Finn. Geod. Inst., № 4, 1924.
- Heiskanen W.* Das Problem der Isostasie. Handb. d. Geophys., Bd. 1, Lf. 4, 1936.
- Mohorovičić A.* Das Beben vom 8, X, 1909. Jahrb. Met. Obs. für das Jahr 1909, Zagreb, 1910.
- Pratt J. H.* On the attraction of the Himalaya mountains and of the elevated regions beyond them upon the plumb-line in India. Phil. Trans. Roy. Soc. London, **145**, 1855, 53; **149**, 745, 779, 1859; **161**, 335, 1871.
- **Tsuboi C.* Hypothesis of Airy and Pratt. Journ. Seis. Soc. Japan, **10**, 109, 1938.
- Tsuboi C.* The direct and indirect methods for determining the thickness of the isostatic earth's crust. Geophys. Notes, **4**, 1940.
- Tsuboi C.* Isostasy and maximum earthquake energy. Proc. Imp. Adad. Japan, **16**, 449, 1940.
- Tsuboi C.* Relation between the gravity anomalies and the corresponding subterranean mass distribution (VII). Bull. Earthq. Res. Inst., **20**, 30, 1942.
- Tsuboi C.* Thickness of the isostatic earth's crust in various parts of the United states of America. Geophys. Notes, № 5, 1950.
- Tsuboi C.* Dependence of the isostatic depth on the horizontal scale of the topographie to be compensated. Geophys. Notes, № 6, 1950.
- Tsuboi C.* Earthquake energy, earthquake volume, aftershock area and strength of the earth's crust. Journ. Phys. Earth, **4**, 63, 1956.
- Tsuboi C., Kaneko T., Miyamura T.* Relation between the gravity anomalies and the corresponding mass distribution, isostasy in the United States of America. Bull. Earthq. Res. Inst., **17**, 385, 1939.
- **Utsu T.* A relationship between the aftershock area and the energy of the main shock. Journ. Seis. Soc. Japan, **7**, 233, 1954.

ГЛАВА 13

- Hess H. H.* Interpretation of geological and geophysical observations. Rep. Navy-Princeton gravity expedition to the West Indies in 1932. U. S. Navy Hydrographic Office, **27**, 1933.
- Hess H. H.* Gravity anomalies and island-arc structure with particular reference to the West Indies. Proc. Amer. Phil. Soc., **79**, 71, 1938.
- Matuyama M.* Distribution of gravity over the nippon trench and related areas. Proc. Imp. Acad. Japan, **12**, 93, 1936.

- Talwani M. Le Pichon X., Ewing M.* Crustal structure of the mid-oceanic ridge. Journ. Geophys. Res., **70**, 341, 1965.
- Tomoda Y.* Gravity anomalies in the Pacific ocean. The Western Pacific, Univ. of Western Australia Press, 1973.
- Tomoda Y.* Maps of free air and bouguer anomalies in and around Japan. Univ. Tokyo Press, 1973.
- Tomoda Y., Segawa J., Tokuhiro A.* Free air gravity anomalies at sea measured by the Tokyo surface ship gravity meter (1961—1969). Proc. Jap. Acad., **46**, 1006, 1970.
- Tsuboi C.* Relation between the gravity anomalies and the corresponding subterranean mass distribution (III). Bull. Earthq. Res. Inst., **17**, 351, 1939.
- Tsuboi C.* Crustal structure along a certain profile across the East Indies at deduced by a new calculation method, Gedenkboek F. A., Vening Meinesz, N. V. Boek-en Kunstdrkkerij, V/H Mouton and Co., 287, 1957.
- Vening Meinesz P. F.* Gravity expeditions at sea. Pub. Meth. Geod. Comm., **1**, 1934; **II**, 1948.

ГЛАЗА 14

- Minakami T.* Torsion balance surveys on volcano Asama. Bull. Earthq. Res. Inst., **15**, 50, 1937.
- Tsuboi C.* On a relation between the distribution of gravitational anomalies and the origins of earthquakes in Japan. Proc. Imp. Acad. Japan, **5**, 326, 1929.
- Yokoyama I.* Structure of caldera and gravity anomaly. Bull. Volc., **26**, 67, 1963.
- Yokoyama I.* Geomagnetic and gravity anomalies in volcanic areas. Phys. Volc., **15**, 41, 1974.
- Yokoyama I.* Volcanic calderas and meteorite craters with the special relation to their gravity anomalies. Journ. Fac. Sc. Hokkaido Univ., Ser. II, **2**, 37, 1963.
- **Yokoyama I.* Structure of calderas and their origin. Journ. Volc. Soc. Japan, **10**, 119, 1966.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютные измерения силы тяжести 27, 54, 56
— — методом свободного падения 29, 262
— — с помощью оборотного маятника 31
Аномалии силы тяжести 69, 82, 102, 127, 171, 248, 260, 263, 270
Аномалий силы тяжести связь с потенциалом 138
— — — с высотой геоида 143, 145
— — — с уклонением отвеса 149—152
Аномальная масса 82, 93, 102, 110, 113, 125, 127, 167, 204, 213, 247
Атвуда машина 30
- Балансирующий подвес 48, 49
Бесселя уравнение 135
— функции 135
Буге градиент 193
— редукция 65, 85, 140
- Вариации силы тяжести 154, 157, 161, 164—166
Вековые изменения силы тяжести 175, 188
Весовые функции 122, 131, 225, 226
Вулканы 23, 175, 195, 244
Высота местности 191—193, 197, 231, 256
- Гармонические колебания 20
Гаусса теорема 98, 102, 247
Гельмерта эффект 213, 266, 267
Геоид 16, 72, 127
Геоида высота *см.* Геоида ундуляции
— кривизна 155—157, 164
— несимметричность 145
— сжатие 79, 80
— ундуляции 127—132, 138—142
Геосинклинали 223, 224
Гиббса явление 118
Глубина залегания массы 83, 92, 108, 110—116, 167
— компенсации 201, 203, 204, 212, 227
Глубинных масс оценка 102, 167
— — распределение 21, 84, 109, 112, 116, 123, 129
Глубоководные желоба 237, 260, 267
Гравиметрическая сеть 54, 58, 258
- Гравиметрическая съемка 54, 56, 237, 263
Гравиметрия 21, 258
Гравиметры 41—46, 51
Гравитационный вариометр 157, 163, 164, 168, 246
— потенциал *см.* Потенциал гравитационный
Градиентные члены 157
Градиент силы тяжести вертикальный 154, 168
— — — горизонтальный 155—157, 164, 166
Григгса опыт 223, 224
Гюйгенса модель 74
- Деформация Земли 178—180, 184, 185
- Землетрясения 23, 175, 191, 192, 194, 195, 211, 229, 270
Земной, коры толщина 204, 207, 211—216, 226, 227, 230, 235—237
- Изостазии гипотезы 201, 202
— нарушение 216, 268
— региональность 203, 211, 212, 226, 230
Изостазия 196, 234, 267
— локальная 203
— региональная 204
Изостатическая аномалия 213, 237, 238
Искусственные спутники Земли 67, 145
- Кавендиша измерения 11
Карданов подвес 47
Клеро теорема 79
Крутильные весы *см.* Гравитационный вариометр
- Лапласа уравнение 97—101, 103, 107, 108, 133
Лежандра полиномы 145
Лява числа 180, 181, 186, 187, 257
- Магнитуда землетрясения 229
Масса Земли 10, 11, 102
Маятник математический 24
— минимальный 33
— оборотный (физический) 25, 31
— обратный 40

- Маятниковые приборы 31, 32, 46
 Метод совпадений 34
 — $(\sin x)/x$ 118
 Микросейсмы 32, 195
 Мохо 215, 224, 225
 Наклон поверхности 184—185
 Невесомость 19
 Нормальная сила тяжести 67, 70
 Нутаця 183
 Ньютона модель 72
 Опорные гравиметрические сети 58, 261
 Относительные измерения силы тяжести 28, 31
 Параметры кривизны 157
 Периода колебаний измерение 33
 Период колебаний груза на пружине 42
 — — маятника 24, 25, 33—41
 Плоскость компенсации 201, 203
 Плотность горных пород 85, 129, 198, 202, 212, 235
 — Земли 11, 21, 75
 Поправки к значениям силы тяжести 62, 69, 170, 182, 187, 189, 192, 193, 197, 247
 Потенциала вторые производные 154, 161
 Потенциал гравитационный 16, 96, 102, 128, 129, 133, 145, 147, 179
 — приливообразующий 177—180
 Потсдамская система 56
 Пратта модель изостазии 201, 202, 204, 205
 Приливные вариации силы тяжести 181
 — волны 180
 Приливы земные 23, 175, 178, 184, 187
 — морские 173, 174, 180, 185
 — статические 181
 Пружина нулевой длины 42
 Пуассона уравнение 101—103
 Распределение силы тяжести 105, 108, 110—112, 114, 167, 263—270
 Сила притяжения 10—13, 19, 175
 — тяжести 9, 12, 17
 — — на море 46, 50, 234—242
 Силы тяжести зависимость от расстояния 13, 14, 19—21, 62
 — — — от широты 14, 15, 22, 68, 79
 — — измерение 17, 27—31
 — — потенциал *см.* Потенциал гравитационный
 — — формулы 14, 22, 66, 81, 102
 Сжатие Земли 67, 74, 75, 79, 266
 Статические измерения 41, 44
 Стационарный спутник 13
 Тектоника плит 236
 Точность измерений гравиметров 44, 55, 189
 — — маятниковых приборов 24, 27, 30, 31, 34, 38, 261
 Уклонение отвеса 125, 131, 147, 154, 177, 184, 200
 Упругость Земли 180, 183
 Уровень грунтовых вод 55, 173, 190, 191
 Ускорение свободного падения 9
 Фигура Земли 21, 67, 72
 Фурье — Бесселя ряд 136, 152, 169
 Фурье ряд 109, 110, 114, 115, 116, 118, 122, 129, 167, 205, 207, 208, 217
 Центробежная сила 12—17
 Чандлеровский период 183
 Шиды число 185—187
 Широты изменения 183, 185
 Эйлера период 183
 Эйри модель изостазии 201, 202, 204—207, 216
 Эквипотенциальные поверхности 17, 128, 156
 Этвеша эффект 18, 158

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. СИЛА ТЯЖЕСТИ	9
§ 1. Вводные замечания	9
§ 2. Земное притяжение	10
§ 3. Центробежная сила, создаваемая вращением Земли	12
§ 4. Равновесие силы притяжения и центробежной силы	13
§ 5. Зависимость силы тяжести от географической широты	14
§ 6. Геоид	15
§ 7. Движущееся тело, эффект Этвеша	17
§ 8. Сила тяжести внутри Земли	19
§ 9. Задачи гравиметрии	21
Глава 2. ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ	24
§ 1. Математический маятник	24
§ 2. Обратный маятник	25
§ 3. Абсолютные и относительные измерения	27
§ 4. Абсолютное измерение силы тяжести методом свободного падения тел	29
§ 5. Относительные измерения с помощью физического маятника	31
§ 6. Измерение периода колебаний	33
§ 7. Поправки к периоду колебаний	38
§ 8. Обратный маятник Ольвека — Леже	40
§ 9. Гравиметры	41
§ 10. Старые методы статических измерений	44
§ 11. Морские измерения силы тяжести на подводных лодках (маятниковый прибор Веннинг-Мейнеса)	46
§ 12. Измерения силы тяжести на поверхности моря — прибор Томоды	50
§ 13. Планирование гравиметрической съемки	53
Глава 3. АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И РЕДУКЦИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. ФОРМУЛА НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. АНОМАЛИИ g	56
§ 1. Абсолютные значения силы тяжести — от Потсдамской к Международной системе	56
§ 2. Международная и Японская национальные опорные гравиметрические сети	58

	§ 3. Редукция силы тяжести	61
	§ 4. Формула нормальной силы тяжести	66
	§ 5. Аномалии силы тяжести	69
Глава	4. СИЛА ТЯЖЕСТИ И ФИГУРА ЗЕМЛИ	72
	§ 1. Модель Ньютона	72
	§ 2. Модель Гюйгенса	74
	§ 3. Общее рассмотрение — теорема Клеро	75
Глава	5. АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ГЛУБИННЫЕ МАССЫ	82
	§ 1. Прямые и косвенные методы	82
	§ 2. Неоднозначность решения	83
	§ 3. Поле силы тяжести некоторых простых распределений глубинных масс	84
	§ 4. Аналогия между силой тяжести и освещенностью	94
Глава	6. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА	96
	§ 1. Гравитационный потенциал	96
	§ 2. Уравнение Лапласа	97
	§ 3. Физический смысл уравнения Лапласа	98
	§ 4. Уравнение Пуассона	101
	§ 5. Уравнение Лапласа в цилиндрических и сферических ко- ординатах	103
Глава	7. РАСЧЕТ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ	107
	§ 1. Решение уравнения Лапласа в декартовой системе коор- динат	107
	§ 2. Одномерный случай	109
	§ 3. Предположения о распределении глубинных масс	112
	§ 4. Пример практического использования разложения в ряд Фурье	116
	§ 5. Метод $(\sin x)/x$ Томоды — Аки	118
	§ 6. Двумерный случай	121
	§ 7. Метод весовых функций	122
Глава	8. РАСЧЕТ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНОЙ ЛИНИИ И УНДУЛЯ- ЦИЙ ГЕОИДА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ	125
	§ 1. Угол отклонения отвеса	125
	§ 2. Ундуляции геоида	127
	§ 3. Аномалии силы тяжести Δg и ундуляции геоида h	127
	§ 4. Общий случай	129
	§ 5. Определение θ , h по Δg методом весовых функций	131
Глава	9. РАСЧЕТ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ	133
	§ 1. Когда целесообразно пользоваться цилиндрическими коор- динатами?	133
	§ 2. Решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат	133
	§ 3. Разложение в ряд Фурье — Бесселя	136
	§ 4. Расчет ундуляций геоида в цилиндрической системе ко- ординат	138

§ 5.	Расчет иудуляций геоида в координатах на поверхности сферы	142
§ 6.	Расчет уклонения отвеса в цилиндрических координатах	147
§ 7.	Расчет уклонения отвеса в сферических координатах	150
§ 8.	Сравнение методов расчета в сферических и цилиндрических координатах	152
Глава 10. ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛА		154
§ 1.	Смысл вторых производных потенциала	154
§ 2.	Кривизна геоида и горизонтальный градиент g	155
§ 3.	Гравитационные вариометры	157
§ 4.	Анализ данных по вариациям силы тяжести	166
§ 5.	Вертикальный градиент силы тяжести	168
§ 6.	Замечание о поправке за свободный воздух	170
Глава 11. ЗАВИСИМОСТЬ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ОТ ВРЕМЕНИ		173
§ 1.	Короткопериодные и длиннопериодные (вековые) изменения	173
§ 2.	Приливообразующий потенциал Луны и Солнца	175
§ 3.	Земные приливы	178
§ 4.	Приливные вариации силы тяжести	181
§ 5.	Другие периодические изменения	183
§ 6.	Земные приливы и внутреннее строение Земли	187
§ 7.	Вековые изменения силы тяжести	188
Глава 12. ИЗОСТАЗИЯ (РАВНОВЕСИЕ ЗЕМНОЙ КОРЫ)		195
§ 1.	Коротко о содержании понятия «изостазия»	196
§ 2.	Зарождение представлений об изостазии	199
§ 3.	Работы Хейфорда, Боуи и Хейсканена	203
§ 4.	Какая из моделей — Эйри или Пратта — более предпочтительна?	205
§ 5.	Толщина земной коры	207
§ 6.	Изостазия Северо-Американского континента	208
§ 7.	Сила тяжести вблизи границы материка и океана	213
§ 8.	О строении земной коры	214
§ 9.	Нарушение изостазии и простираение структур	216
§ 10.	Процессы установления изостатического равновесия	218
§ 11.	Горы — субъект изостазии или ее объект?	224
§ 12.	Толщина земной коры и региональность изостазии	226
§ 13.	Размер форм рельефа и глубина компенсации	227
§ 14.	Размеры землетрясений и изостазия	229
Глава 13. СИЛА ТЯЖЕСТИ НА МОРЕ		231
§ 1.	Море и сила тяжести	231
§ 2.	Материк и океан	233
§ 3.	Сила тяжести над океаническими горными хребтами	236
§ 4.	Сила тяжести над глубоководными желобами	237
§ 5.	Сила тяжести над подводными горами	241
§ 6.	Сила тяжести в окраинных морях	242
Глава 14. СИЛА ТЯЖЕСТИ НАД ВУЛКАНАМИ		244
§ 1.	Вулканы и сила тяжести	244
§ 2.	Аномальная глубинная масса под вулканами и теорема Гаусса	247

§ 3. Строение вулканов, определяемое по аномалиям силы тяжести	247
§ 4. Активность вулканов и изменение силы тяжести	255
Глава 15. ГРАВИМЕТРИЯ В ЯПОНИИ	258
§ 1. История гравиметрических исследований в Японии	258
§ 2. Распределение гравитационных аномалий в Японии и ее окрестностях	263
§ 3. Распределение аномалий силы тяжести и очагов землетрясений	270
Литература	274
Предметный указатель	281

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и др. просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., дом 2, изд-во «Мир».

Тсюдзи Цубои
ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Научный редактор В. А. Пантаева
Мл. научный редактор Л. П. Лебедева
Художник Л. Е. Безрученков
Художественный редактор М. Н. Кузьмина
Технический редактор И. М. Кренделева
Корректор Н. А. Гирия

И. Б. 2831

Сдано в набор 02.12.81.
Подписано к печати 09.08.82.
Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага кн. - журн. № 2.
Гарнитура латинская. Печать высокая.
Объем 9,00 бум. л. Усл. печ. л. 18,00.
Усл. кр.-отт. 18,23. Уч.-изд. л. 15,29.
Изд. № 27/1472. Тираж 4000 экз.
Зак. 14. Цена 1 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие
ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объ-
единения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном Комитете
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной тор-
говли. 138052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский про-
спект, 29.

Измерения величины и направления силы тяжести на земной поверхности находят разнообразные применения. Построение моделей глубинных неоднородностей по локальным аномалиям силы тяжести, — центральная проблема гравиметрии. Величина g зависит от распределения масс под земной поверхностью. Поэтому, установив распределение силы тяжести, можно узнать распределение масс. Самые крупные задачи этого класса — проблема образования материков и океанов, а также определение глубинного строения горных хребтов и океанических впадин.

