

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
В ГЕОЛОГИИ
И ГЕОСТАТИСТИКА**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Серия

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЗЕМНОЙ КОРЫ

550.8.:519

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
В ГЕОЛОГИИ
И ГЕОСТАТИСТИКА

587



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

1973

МИНИСТЕРСТВО
НАУКИ
И ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

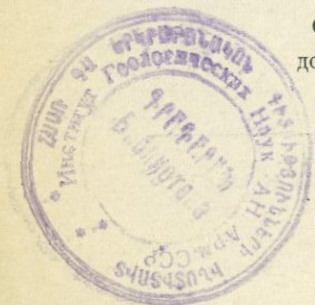
Сборник содержит оригинальные статьи, посвященные математическим моделям процессов и статистическому анализу некоторых природных геологических закономерностей; аппроксимации наблюдаемых статистических распределений и решению обратных задач в геохимии, минералогии и петрографии; процессам метаморфизма и определению эпицентров землетрясений на ЭВМ.

Книга рассчитана на геохимиков, минералогов и петрографов.

Редакционная коллегия

Б. И. БЕЛОВ, И. К. КАРПОВ, С. А. КАШИК,
Г. Д. ФЕОКТИСТОВ

Ответственный редактор
доктор геол.-минерал. наук
И. В. БЕЛОВ



И. В. БЕЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ МИНЕРАЛООБРАЗОВАНИЯ

Известно, что процессы эндогенного минералообразования протекают при высоких температурах и давлениях в многофазных системах с большими массами, с участием в этих процессах большого количества химических элементов, с очень большой временной протяженностью (и, главное, эти процессы идут на глубинах, недоступных непосредственному наблюдению). В этом их особенность и большая сложность, которая проявляется в бесконечном многообразии параметров и вариантов вещественного состава, определяющих течение процессов минералообразования, в большом числе внутренних и внешних связей между параметрами и составом, в их взаимном влиянии, причем изменение одного из них вызывает нелинейное изменение других. Все это усложняется возникновением множества ситуаций с обратными связями между параметрами и составом минералообразующей системы расплава — раствора и тем, что эти процессы необратимы, а минералообразующие системы в той или иной мере открыты.

Информация по минералам и минеральным ассоциациям очень велика. Для того чтобы освоить ее, мы вынуждены искусственно уменьшать эту информацию, ограничивать количество возможностей, между которыми делается выбор. Обычно это достигается восстановлением процесса минералообразования через описательные модели — такие системы представлений, которые отражают отдельные, весьма ограниченные в нужном направлении стороны рассматриваемого процесса.

Для таких сложных природных систем и процессов, как минералообразование, описываемых сложной системой уравнений и приводящих к большому выбору критериев подобия, которые становятся одновременно не совместимыми, использование принципов физического (натурного) моделирования наталкивается на трудности принципиального характера. Они заключаются в том, что принцип подобия оправдал себя при анализе детерминированных процессов, описываемых законами классической механики,

процессов, протекающих в однофазных системах с фиксированными границами, и его использование становится невозможным для процессов минералообразования с многозначной стохастической картиной связи между химическими элементами, т. е. при анализе необратимых процессов в относительно открытых системах.

Сущность метода математического моделирования процессов эндогенного минералообразования заключается в том, что этот процесс изучается не на физической, а на математической модели с помощью аналоговых и электронных вычислительных машин. Идея процесса минералообразования должна формулироваться при помощи наглядных представлений, без применения математического аппарата, но с использованием экспериментальных данных и данных по изучению природных (натурных) параметров и составов исследуемых минеральных ассоциаций. Таким образом, математический метод моделирования позволяет абстрагироваться от субстратного содержания той или другой описываемой системы и рассмотреть ее функционально.

Основная познавательная функция математического метода при изучении эндогенного минералообразования заключается, конечно, в том, что математическая модель может служить более строгим средством предварительного объяснения тех физико-химических (термодинамических) явлений, для которых еще не построена логически не противоречивая и внутренне оправданная теория, могущая служить средством для прогноза в рудной геологии.

Логико-математические модели по своей природе представляют собой целую систему логико-математических элементов, структура которых в меньшей (феноменологические модели) или в большей (сущностные модели) степени должна быть аналогом структуры исследуемых объектов. Известно, что в математическом аппарате имеется основное содержательное условие моделирования — аналогия с соответствующими сторонами процессов минералообразования, т. е. тех процессов, которые регулируются составом системы и ее термодинамическими параметрами. Следует отметить, что эта аналогия носит особый обобщенный характер. Она не сводится к частным соответствиям модели и моделируемого объекта исследований. Здесь имеет место как бы изоморфизм особого рода — каким-то сторонам минералообразования соответствует какое-то логико-математическое выражение, взятое как некоторая целостность физического процесса и не разложимое далее на отдельные элементы.

Употребляя термин «логико-математическая модель», мы хотели бы отметить существенное отличие математических моделей от материальных. Это отличие связано с тем, что математический аппарат имеет логику, в некотором смысле тождественную внутренней логике физического процесса, и именно поэтому он может воспроизводить физическое содержание и структуру моделируе-

мого объекта. Существенная черта математической модели состоит также и в том, что она может дать истолкование таких процессов минералообразования, которые мы пока не можем в целом виде моделировать материально, как например, процессов, протекающих в мантии земли и в магматической системе в целом. В этом случае строится физико-математическая модель процесса, физическая природа которого еще не поддается раскрытию. Основой моделирования такого рода является уже не аналогия между известным и неизвестным, а математическая экстраполяция. При этом физико-математические модели, их пргнозный характер интересны тем, что математический формализм может не только давать прием количественного изучения явления, качественная природа которого еще не вскрыта, но и характеризовать саму качественную природу исследуемого объекта. В этом случае, очевидно, математический аппарат может служить не только средством характеристики количественной стороны процессов минералообразования, но и в не меньшей степени (и это — главное) может характеризовать их с качественной стороны. Одной из общих особенностей математических уравнений является то, что они, как хорошо известно, обычно отражают определенные физические закономерности, и тем самым они как бы переносят в себе эти закономерности на исследуемые объекты (при использовании этого аппарата). Следовательно, по математическим образам можно восстановить и их физический оригинал или качественную сторону исследуемого минералообразующего процесса.

Нами ранее отмечалось, что «вероятностное описание геологических процессов (имелось в виду процессов минералообразования), в том числе и процессов концентрации и рассеяния химических элементов, — это максимум того, на что мы пока способны или что мы пока можем сделать в силу недостаточности знаний о внутрикоровых и более глубоких частях нашей планеты» (Белов, 1970). Принципы теории вероятности, разработанные в математике, выражают как раз ту неопределенность, «...которая существует при любом описании природных — внутриземных процессов» (Белов, 1970). Следует отметить и то, что статистические представления, основу которых образует теория вероятностей, в настоящее время находят весьма широкое применение в современном естествознании — в биологии, астрономии, физике, кибернетике, метеорологии и т. д.

Однако в минералогии, петрографии и геохимии статистические закономерности, видимо, никогда не выступают в чистом виде, а всегда будут иметь или нести в себе материальную основу.

В каждом случае, когда та или иная гипотеза о процессах минералообразования строится как статистическая (вероятностная), собственно она-то и позволяет сформулировать определенную и более или менее близкую к истине физическую картину минералообразования, которая и может представлять основу этой гипотезы. В этом случае, видимо, имеет смысл сочетать вероятностный и

динамический (физический) подходы к изучению систем минералообразования.

В настоящее время в науке прочно укореняется та точка зрения, которая утверждает, что вне статистических концепций не может быть достаточно полного понимания природных закономерностей. Естественно, что эта идея быстро завоевывает все большее число сторонников и в области изучения минеральных ассоциаций земной коры.

Несомненно и то, что прежде, чем исследовать математическими методами природные процессы минералообразования, необходимо схематизировать их, выделить те основные принципы и движущие моменты, которые позволяют достаточно удовлетворительно и просто описать в количественном и качественном отношениях их протекание. Сейчас принято говорить не о схематизации явлений, а о создании их математической модели. За последние годы создан ряд общих математических моделей протекания случайных явлений, позволяющих вполне удовлетворительно описать ряд важнейших физических и химических процессов. И не только описать, но и дать возможность прогнозировать ряд новых, неизвестных ранее закономерностей. Среди таких общих моделей на первом месте следует указать теорию случайных процессов. Возникнув первоначально на конкретных задачах теории диффузии и геофизики, теория случайных процессов очень скоро превратилась в одну из важнейших моделей всего современного естествознания. Естественно, что само понятие случайного процесса, как случайной функции одного аргумента (времени, как правило) пришлось подвергнуть обобщению и рассматривать случайные функции любого числа аргументов, как теперь принято говорить — случайные поля или, в случае минеральных систем, объемы подвижных минеральных масс.

Конечно, изучение стохастической модели природного минералообразования значительно сложнее, чем детерминированной. С этой точки зрения нахождение условий, при которых стохастическую модель можно заменить детерминированной без заметного ущерба в точности, позволяет весьма существенно упростить исследование. Что еще более важно — нахождение условий, при которых стохастическая модель может быть заменена детерминированной, позволяет вскрыть внутреннюю сущность процесса и ответить на вопрос о том, в какой мере случайны результаты процесса, с чем мы имеем дело: со случайностью или необходимостью.

Как известно, минералообразование в земной коре — весьма сложный процесс, состоящий из ряда элементарных процессов. Каждый процесс может подразделяться на некоторое количество составляющих его явлений. Под явлением будем понимать более элементарную часть процесса, происходящую в малый, по сравнению с процессом в целом, отрезок времени, с одной стороны, и характеризующуюся некоторыми результатами, с другой. Мо-

гут быть явления, а в природе минералообразования они есть несомненно, как видно из изложенного выше, элементарные и сложные. Они проявляются как динамические (детерминированные) и статистические (вероятностные) закономерности.

Для динамических закономерностей характерна жесткая причинная связь, т. е. полученное состояние есть функция причин. Однако с такими явлениями приходится сталкиваться при изучении минеральных ассоциаций крайне редко и то в простейших идеализированных процессах. Для статистических закономерностей между результатами элементарного явления и причинами, его породившими, не существует однозначной связи, и в описании результатов явления уже присутствует элемент случайности. Таким образом, мы можем предсказать результат такого явления только в вероятностном (статистическом) смысле. С описаниями результатов процессов статистическими закономерностями приходится сталкиваться весьма часто и, в частности, в случаях недостаточной изученности явления; кроме того, бывает методически удобно рассматривать именно статистические, а не динамические закономерности, и, наконец, возможно искусственное введение в методы исследования элементов случайности.

Первый случай является наиболее распространенным, так как даже для сравнительно простых физико-химических явлений в процессах минералообразования изучены недостаточно, не установлены внутренние связи и закономерности, определяющие явления. В данном случае речь идет о том, что они не познаны в настоящее время, а не о принципиальной непознаваемости явлений. Второй случай часто может встречаться тогда, когда проще тем или иным способом выяснить статистические закономерности, описывающие изучаемую сторону явления, и использовать затем для изучения всего процесса в целом именно эти статистические закономерности. И, наконец, при математическом моделировании некоторых задач оказывается удобным искусственно вводить элементы случайности для более простого решения задачи.

В этой связи обратим внимание на вопрос о степени случайности при изучении минеральных ассоциаций. В качестве меры случайности результата исследования может быть принят коэффициент вариации v , представляющий отношение среднеквадратического отклонения (σ) к математическому ожиданию результата (m_x):

$$v = \sigma/m_x.$$

Если коэффициент вариации равен нулю, то процесс минералообразования детерминирован (результат его — абсолютная необходимость); если он отличен от нуля, то процесс стохастичен (результат его содержит элемент случайности, при этом, чем больше v , тем более случаен результат процесса). Если из каких-то соображений можно установить величину a/m_x , т. е. такое предельное относительное отклонение полученного значения изучае-

мой величины x от математического ожидания m_x , где $\alpha = x - m_x$, при котором принципиальный результат процесса еще сохраняется, то можно получить оценку вероятности того, что этот принципиальный результат не будет сохраняться. В общем случае, на основании закона больших чисел, можем записать (Смирнов, Дунин-Барковский, 1965):

$$P \left(\left| \frac{x}{m_x} - 1 \right| \geq \frac{\alpha}{m_x} \right) \leq \frac{v^2}{\left(\frac{\alpha}{m_x} \right)^2}.$$

В том случае, когда распределение получаемых результатов будет нормальным (условие этого устанавливается центральной предельной теоремой теории вероятности), можно получить точную оценку вероятности того, что принципиальный результат процесса будет сохраняться:

$$P \left(\left| \frac{x}{m_x} - 1 \right| \leq \frac{\alpha}{m_x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} \int_{-\frac{\alpha}{m_x}}^{+\frac{\alpha}{m_x}} e^{-\frac{\left(\frac{x}{m_x} - 1\right)^2}{2v^2}} d\left(\frac{x}{m_x} - 1\right).$$

Задавшись далее вероятностью P , при которой результат будем считать случайным, можно получить условный ответ на вопрос о том, со случайностью (стохастический процесс) или с необходимостью (детерминированный процесс) мы имеем дело. Подчеркнем, что эта оценка в какой-то степени условна и, помимо существования процесса, зависит от α/m_x и P , величины которых выбираются субъективно, но в то же время исходя из особенностей эмпирического и экспериментального материала.

Математические методы могут применяться к экспериментальному и эмпирическому материалу по минеральным ассоциациям по-разному. В качестве первого подхода отметим методы математической статистики, которые позволяют рациональным образом обобщать эмпирические факты, оценивать необходимый объем эмпирических работ для получения достаточно надежных результатов, а также сопоставлять между собой статистические данные разного происхождения с целью суждения об одинаковости или неодинаковости материала, относящегося к нескольким различным статистическим выборкам. При этом каждая статистическая обработка требует формулировки некоторого комплекса статистических гипотез, которые, с одной стороны, в рамках данной работы принимаются безоговорочно, а с другой, в рамках данного исследования подлежат проверке. На основе такой формулировки вопроса исследования должна быть поставлена математическая задача. Методы статистической обработки материала должны выбираться в строгом соответствии с этой математической задачей. Недооценка такого подхода нередко приводит к досадным ошибкам и к некорректным употреблением математической статистики,

что, в свою очередь, ведет к разнообразным ошибкам и необоснованным выводам в области минералообразования.

Второй тип приложения математических методов к разным вопросам минералообразования состоит в следующем. Чаще всего бывает так, что одна часть науки использует устоявшийся материал, разработанный другой частью науки. Однако нередко использование этих общепринятых научных достижений приводит к необходимости решения некоторых математических задач — решение каких-то дифференциальных уравнений, вычисление некоторых функционалов, изучение поведения некоторых функций и т. д. В этом случае математика выступает как аппарат, прилагаемый к модельным представлениям, подготовленным другой областью науки, т. е. роль математики состоит в том, чтобы дать возможность приложить устоявшееся фундаментальное представление одной части науки к частной задаче, возникающей в другой области науки. В таком плане уже теперь математика находит большое количество чрезвычайно существенных полезных приложений в области геохимии, минералогии и петрологии.

Однако за последнее время получает распространение третий тип использования математики в области изучения минеральных ассоциаций. В тех случаях, когда нет определенности в сложившихся представлениях, на которые можно надежно опираться, приходится выработать новые теоретические концепции одновременно с разработкой новой эмпирической области. Случилось так, что математический подход в вопросах минералообразования заставляет исследователей эмпирического материала одновременно собирать и систематизировать эмпирический материал по минеральным природным ассоциациям и конструировать математические модели, при помощи которых можно пытаться объяснить с достаточной простотой изучаемые явления. Здесь придется разработать систему необходимых математических понятий и выяснить те внутренние связи между объектами и явлениями, которые должны составлять основу будущих представлений какого-либо процесса минералообразования.

Для того чтобы фиксировать комплекс эмпирических сведений по изучаемой минеральной ассоциации, весьма удобен и, видимо, в этом случае незаменим аксиоматический метод. Именно аксиоматический метод позволяет в отчетливой форме зафиксировать основные классы существенных объектов исследования, а также классы существенных отношений между объектами, которые определяют основные интегральные черты изучаемого явления. Опять-таки и в этом случае необходим метод последовательных приближений: конструируется первая математическая модель, она исследуется, выясняется характер ее недостаточности, затем она дополняется. И так поступают до тех пор, пока не получают достаточно точного соответствия между аксиоматической моделью, внутренне непротиворечивой, и картиной, наблюдаемой в природе. Такой путь приведет к очень быстрому научному

прогрессу в области изучения процессов эндогенного минералообразования и к возможности новых и очень достоверных приложений в практике.

Конечно, построение математической модели сводится к той или иной формализации процесса минералообразования в виде системы соотношений (например, конечных или дифференциальных уравнений, неравенств, логических и аксиоматических условий, операторов и т. д.), описывающих элементарные явления процесса и взаимодействия между ними с учетом основных факторов минералообразования. Алгоритм, моделирующий изучаемый процесс, может быть записан в виде программы для вычислительной машины. Машина выполняет последовательность операций, предписываемых модели соответствующим алгоритмом. При этом шаг за шагом вырабатывается информация, характеризующая состояния элементарных явлений и процессов в целом, а также формируются величины, используемые в качестве результатов моделирования. Влияние случайных факторов на течение процесса имитируется при помощи случайных величин с заданными и получаемыми в ходе моделирования законами распределения.

Всегда следует иметь в виду, что математическое моделирование ни в коей мере не противопоставляется физическому (натурному) моделированию, а скорее призвано дополнить его имеющимся арсеналом средств математического описания и численного анализа. Всегда следует помнить о том, что одно из главных преимуществ математического моделирования в решении различных задач по минералообразованию состоит в том, что методы анализа, разработанные применительно к отдельным вопросам в одной какой-то области науки, можно с успехом использовать в любой другой области, где имеют место аналогичные функциональные зависимости. Таким образом, осуществляется постоянное взаимодействие между частными вопросами и общими методами (общие методы, как хорошо известно, возникают в процессе исследования частных задач, а частные задачи могут решаться мощными общими методами). По существу это и есть тот принцип изоморфности математических моделей для разных по физической природе явлений. Это можно видеть из приведенных ниже дифференциальных уравнений, описывающих различные по своей природе физические явления (Кафаров, 1968):

перенос количества энергии (сила трения):

$$\tau = -\mu \frac{dw}{dx} \quad \text{закон Ньютона;}$$

перенос тепла (тепловой поток):

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad \text{закон Фурье;}$$

перенос вещества (поток вещества):

$$q_b = -D \frac{dc}{dx} \quad \text{закон Фика;}$$

перенос электричества:

$$i = - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{dx} \quad \text{закон Ома.}$$

Нетрудно увидеть, что во все приведенные выше уравнения входят соответствующие градиенты: скорости dw/dx , температуры dt/dx , концентрации dc/dx и электрического напряжения dU/dx . Очевидно, если ввести соответствующие пересчетные коэффициенты, любое из явлений можно смоделировать переносом электричества. На этом принципе, в частности, основаны аналоговые вычислительные машины, позволяющие моделировать физико-химические процессы самой различной природы (Кафаров, 1968), в том числе и процессы минералообразования.

Разработка вопросов математического моделирования процессов минералообразования, конечно, требует больших фактических знаний, относящихся к изучаемой области, развитого математического мышления, а подчас использования вычислительных или логических операций. В настоящее время нет людей, которые в равной степени являются специалистами всех трех профилей знания. Поэтому совершенно необходимым при разработке этих новых принципов изучения минералообразования оказывается тесное и творческое взаимодействие представителей разных профессий — творческий союз петрографов, геохимиков, физиков и математиков.

Перспективы практического использования знаний о процессах минералообразования заставляют нас добиваться гораздо большей отчетливости их, они требуют объективности и изгнания необоснованных точек зрения. В свою очередь требование объективности знания влечет за собой необходимость количественных подходов, точного языка, выработки точных понятий для фиксации знаний и, наконец, далеко идущего развития точной мысли и выработки методов, позволяющих отчетливо и объективно обосновывать те или другие положения. Все это приводит к необходимости широкого использования математических подходов в самых различных аспектах изучения минеральных ассоциаций и процессов минералообразования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Белов И. В. 1970. Предисловие. — В сб. «Математические методы в петрологии и геохимии». М., «Наука».
- Кафаров В. В. 1968. Методы кибернетики в химии и химической технологии. М., «Химия».
- Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. 1965. Курс теории вероятности и математической статистики для технических приложений. М., «Наука».

К ТЕОРИИ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Для удобства применения соответствующих математических положений любые объекты и их признаки будем называть величинами, а конкретные их реализации — значениями, как это принято в математике, хотя в геологии в некоторых случаях это звучит несколько непривычно.

Изучаемую величину (объект исследований, искомое решение) обозначим буквой r . Из различных возможных решений одной и той же задачи оптимальным будем считать то, которое имеет наибольшую информативность — количество информации об изучаемой действительности, извлекаемое с его помощью из исходных данных.

Совокупность исходных данных обозначим $I = \{I_k\}$. Тогда $r(I)$ — основанное на них решение поставленной задачи. Заметим, что I можно назвать также совокупностью признаков определенной величины $r(I)$. Эквивалентность этих названий мы будем далее подразумевать без особых оговорок.

Для исследований воспользуемся известной формулой Шеннона:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^m P_i \log_a P_i, \quad (1)$$

где $H(x)$ — неопределенность (энтропия) отнесения величины x к классам R_1, R_2, \dots, R_m ; P_i — вероятность появления значения этой величины, принадлежащего к классу R_i ($i = 1, 2, \dots, m$); a — основание логарифмов, определяющее единицу измерения для H . Как известно, при $a = 2$ или 10 энтропия измеряется, соответственно, в битах или хартли. В теоретических выкладках мы будем опускать указание a , считая эту величину одинаковой во всех случаях. В примерах же будем использовать $a = 10$ для упрощения вычислений (в случае необходимости переход к выражению H в битах можно осуществить, пользуясь известным соотношением между десятичными и двоичными логарифмами).

Напомним, что информация, несомая каким-либо событием I об изучаемом явлении, равна $E^I = H^0 - H^I$, где H^0 и H^I — соответственно значения энтропии до и после учета события I . Сообщение о значении x устраняет неопределенность этой величины, т. е. несет информацию $E(x) = H(x)$.

При сравнении величин H и E мы будем использовать не только непосредственно формулу (1), но и известные ее свойства, которые довольно наглядны и удобны. Например, увеличение вероятностей принадлежности x к определенным классам (которое может происходить только за счет уменьшения вероятностей принадлеж-

ности x к другим классам) ведет к росту определенности, т. е. к падению неопределенности. Уменьшение же различия вероятности отнесения x к разным классам соответствует интуитивному представлению о росте неопределенности и увеличивает $H(x)$ при вычислении энтропии по формуле (1). Наибольшее значение $H(x)$ достигается при равенстве всех величин P_i (Вентцель, 1962).

Сформулируем положение, непосредственно следующее из известных положений теории информации, которое понадобится нам для анализа высказываний, довольно часто встречающихся в геологии. Для удобства дадим этому положению название:

Т е о р е м а 1. Пусть выполняется два условия:

а) $I = \{I_k\}_{k=1}^n$ — совокупность n исходных данных, имеющих информативность больше нуля;

б) $I' = \{I'_k\}_{k=1}^m$ — совокупность, в которой $I'_k = f_k(J_k)$, где $J_k \subseteq I$. Тогда $E(I') \leq E(I)$ при любых операторах f_k и $E(I') < E(I)$, если совокупность операторов f_k осуществляет такое отображение $\{f_k(J_k)\} = \{I'_k\}$, при котором одной совокупности значений $\{I'_k\}$ могут соответствовать с отличными от нуля вероятностями две или более разных совокупностей значений $\{I_k\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы означает известное положение, что никакие преобразования не увеличивают информацию, заключенную в исходных величинах. Поэтому остается доказать лишь второе утверждение. Очевидно, достаточно доказать его для случая, когда прямое отображение $I \rightarrow I'$ пространства значений $I = \{I_k\}$ в пространство значений $I' = \{I'_k\}$ однозначно.

Представим вначале, будто отображение $I \rightarrow I'$ взаимно однозначно. Согласно сказанному выше, $E(I') \leq E(I)$, а до получения сведений о I и I' имеются такие же неопределенности отнесения $I = \{I_k\}$ и $I' = \{I'_k\}$ к различным классам значений, т. е. $H(I') \leq H(I)$.

Объединим $N \geq 2$ классов значений I' в один класс. Тогда ему соответствуют N различных значений I . Если не менее двух объединенных классов имели вероятности $P_i \neq 0$, то при описанной операции объединения, по определению энтропии, величина $H(I')$ уменьшается. Следовательно, если до этой операции $H(I') \leq H(I)$, то после нее обязательно $H(I') < H(I)$. Тогда и сообщения о I и I' имеют информативности, для которых справедливо: $E(I') < E(I)$.

Любое неоднозначное соответствие можно представить как результат объединения классов некоторого однозначного соответствия, а это в совокупности с только что сказанным и означает доказательство второго утверждения теоремы.

Заметим, что одна совокупность значений $\{I'_k\}$ может соответствовать разным $\{I_h\}$, когда значения $I'_k = f_k(J_k)$ содержат

случайную составляющую (например, когда операторы f_k отображают влияние ошибок измерений).

То же самое может быть и при неслучайном типе операторов f_k , если соответствующее им обратное отображение $I' \rightarrow I$ неоднозначно. Чем больше элементов содержится в совокупностях J_k , тем больше, при прочих равных условиях, вероятная область неоднозначности, так как тогда растет число возможных комбинаций элементов в J_k . Но расширение J_k означает увеличение числа исходных данных, от которых зависит $I'_k = f_k(J_k)$. Следовательно, с увеличением числа исходных данных, от которых зависят каждая из величин I'_k в отдельности, при отсутствии сведений о $\{f_k\}$ вероятная величина $E(I')$ падает. С другой стороны, тогда и только тогда увеличивается также вероятность зависимости разных элементов совокупности I' от одних и тех же элементов совокупности I , т. е. вероятность взаимной зависимости величин I'_k .

Отсюда следует, что в случае двух совокупностей исходных данных, отражающих предположительно одни и те же явления, предпочтительнее, при прочих равных условиях, та, в которой взаимная зависимость элементов меньше.

П р и м е р. Предположим, что исполнители геологосъемочных и геохимических работ независимо друг от друга указывают на соответствующих картах предполагаемое положение выделяемого (искомого) объекта. Совокупность таких карт, поступающих на обобщение для выработки окончательного решения, есть $I = \{I_k\}_{k=1}^2$, где I_1 и I_2 — соответственно геологическая и геохимическая карты.

Представим, что перед выдачей своих данных исследователи ушли данные друг друга и представили варианты карт (соответственно, I'_1 и I'_2), являющиеся несколько измененными (скорректированными, как говорят в геологии) вариантами предыдущих. При этом по новым картам нельзя однозначно установить исходные карты. Согласно доказанной теореме, информативность совокупности новых карт ниже, чем исходных (хотя для каждой из карт в отдельности соотношение информативностей может быть иным).

Этот вывод заставляет пересмотреть инструктивные положения по составлению геофизических, геохимических и других карт, которые являются исходными для более общих геологических построений (современные инструкции, как известно, предписывают строить названные карты обязательно «с учетом геологических данных»). Такие требования оправданы только в тех случаях, когда каждая из этих карт — окончательная, а также при отсутствии возможности отдельного сообщения об использованных данных. Окончательные обобщения могут содержать меньше информации, чем совокупность исходных данных, но они необходимы для удобства использования этих данных.

Заметим также, что упомянутый «учет» различных данных в современной геологии приходится производить при отсутствии строгих правил — алгоритмов. Это означает неизбежно введение субъективной, т. е. переменной, случайной составляющей в f_k , что дополнительно снижает ценность получаемых результатов.

С увеличением числа взаимно корректируемых данных, согласно изложенному выше, информативность их совокупности (при фиксированном общем числе ее элементов) также может только снижаться и никогда не может увеличиваться.

Сказанное соответствует опыту работ и выражается в том, что многие специалисты, производящие обобщение результатов исследований различными методами, предпочитают иметь дело с первичной документацией.

Величины I_h и I'_k могут быть результатами действия природных процессов при неизвестных операторах f_h . От этого сделанные общие выводы не меняются.

П р и м е р. При исследовании статистических распределений концентраций C олова в одном из интрузивных комплексов было установлено, что на основании известных критериев согласия эти распределения могут считаться подчиняющимися как нормальному, так и логарифмически нормальному законам. Математическое ожидание и дисперсия концентраций олова [соответственно, $M(C)$ и $D(C)$] в интрузивах имеют существенную положительную корреляцию (т. е. взаимно зависимы). Математическое же ожидание и дисперсия логарифмов концентраций [соответственно, $M(\lg C)$ и $D(\lg C)$] не имеют заметной корреляции и приближенно могут считаться взаимно независимыми [величина $D(\lg C)$ здесь приближенно постоянна].

Совокупность параметров $\{M(\lg C), D(\lg C)\}$ при отсутствии каких-либо специальных требований является более предпочтительной для характеристики процессов формирования гранитоидов, чем $\{M(C), D(C)\}$. Действительно, параметр $D(\lg C)$ характеризует в данной ситуации процессы перераспределения вещества через «контрастность» его результативного распределения независимо от $M(\lg C)$, а следовательно, и от $M(C)$. Величина же $D(C)$, по теореме 1, не содержит дополнительной информации об этих процессах и в то же время зависит не только от них, но и от величины $M(C)$, обусловленной иными явлениями (количеством олова, которое было подвергнуто воздействию упомянутых процессов).

Следовательно, для извлечения необходимой информации совокупность $\{M(C), D(C)\}$ должна быть подвергнута еще специальному преобразованию.

Учитывая сказанное, далее при рассмотрении признаков изучаемых величин (исходных данных, промежуточных решений и т. п.) будет предполагаться их взаимная независимость.

Пусть известно, что каждое значение изучаемой величины r принадлежит к одному из классов совокупности $R = \{R_i\}_{i=1}^m$, причем P_i — вероятность события $r \in R_i$. Тогда начальная, или априорная (известная до использования наблюдаемых признаков), неопределенность принадлежности r к определенному классу характеризуется величиной:

$$H^0 = - \sum_{i=1}^m P_i \log P_i. \quad (2)$$

Фактическое разделение (сортировка) значений r производится по совокупности признаков $\{I_k\}_{k=1}^n$, причем P_i^j — вероятность появления признака I_j у $r \in R_i$. Тогда сочетания признаков, считающиеся характерными для каких-то значений $r \in R_i$, могут обнаруживаться с отличной от нуля вероятностью у значений $r \in R_j$ ($j \neq i$). Поэтому после фактической сортировки значения r оказываются сгруппированными иначе, чем это произошло бы при точном знании принадлежности r к определенному классу из $\{R_i\}$. Такие фактически получаемые подразделения назовем соответствующими классами совокупности $R^* = \{R_i^*\}_{i=1}^m$. Только в частном, предельном, случае «безошибочной» сортировки $R_i^* = R_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. В общем же случае в R_i^* попадут все значения $r \in R_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$), которые имеют совокупность признаков, считающуюся характерной для класса R_i . Задаваясь правилом установления такой совокупности и зная вероятности появления разных признаков у значений $r \in R_j$, можно найти вероятности включения значений r из различных классов совокупности R в каждый класс совокупности R^* .

Пусть I_{li} — один из признаков, по которым производится выделение значения r в класс R_i^* . (Признак I_{li} , в свою очередь, может быть совокупностью признаков, а класс R_i^* — совокупностью классов, для которых принят этот признак). Через P_j^{li} обозначим вероятность появления признака I_{li} у значений $r \in R_j$.

Пусть $\delta_{i,j} = P_j \cdot P_j^{li}$ — вероятность того, что величина r принадлежит классу R_j и в то же время имеет признак I_{li} (при многократных испытаниях это доля величин $r \in R_j$ с признаком I_{li} среди всех возможных величин r).

Тогда при наличии m классов R_j вероятность включения r в R_i^* равна

$$\delta_i = \sum_{j=1}^m \delta_{i,j}. \quad (3)$$

Вероятность встречи значений $r \in R_j$ среди значений, включенных в класс R_i^* , равна $\delta_{i,j}/\delta_i$. Следовательно, неопределенность

отнесения к различным классам R_j ($j=1, 2, \dots, m$) для значений r , попавших в класс R_i^* по признаку I_{li} , равна

$$H_i^{li} = - \sum_{j=1}^m \frac{\delta_{i,j}}{\delta_i} \cdot \log \frac{\delta_{i,j}}{\delta_i}. \quad (4)$$

Отсутствие признака I_{li} у значения r можно представить как признак \bar{I}_{li} , [по которому значение r включается в объединение классов, не содержащее R_i^* , т. е. тогда $r \in \bar{R}_i^*$, где $\bar{R}_i^* = (\bigcup_j R_j^*) - R_i^*$. Рассматривая R_i^* и \bar{R}_i^* как два класса, к которым может быть отнесено значение r , и обозначая относящиеся к \bar{R}_i^* величины чертой сверху, получаем: $\bar{P}_j = 1 - P_j$, $\bar{\delta}_{i,j} = (1 - P_j) - (1 - P_j^{li})$, $\bar{\delta}_i = 1 - \delta_i$ (если P_j^{li} — вероятность проявления признака I_{li} у $r \in R_j$, то вероятность отсутствия этого признака у таких значений r и включения их в \bar{R}_i^* равна $1 - P_j^{li}$).

Тогда:

$$\bar{H}_i^{li} = - \sum_{j=1}^m \frac{\bar{\delta}_{i,j}}{\bar{\delta}_i} \cdot \log \frac{\bar{\delta}_{i,j}}{\bar{\delta}_i}. \quad (5)$$

Результативная неопределенность для совокупности классов R_i^* и \bar{R}_i^* равна

$$H^i = \delta_i \cdot H_i^{li} + \bar{\delta}_i \bar{H}_i^{li}. \quad (6)$$

Тогда информативность признака I_{li} есть величина

$$E^i = H^0 - H^i. \quad (7)$$

Совокупность $\{I_h\}_{h=1}^n$ из n признаков представим для дальнейшего изложения в виде частично упорядоченного множества, где нумерация элементов произведена в таком порядке, что $E^i \geq E^{i+1}$, или, что то же самое, $H^{i+1} \geq H^i$ (так как величина H^0 для всех признаков одинакова).

Предположим, что n велико и P_i^n ($i=1, 2, \dots, m$) сколь угодно мало отличается от $1/m$. Это соответствует реальной обстановке (для любой величины можно в принципе назвать сколько угодно признаков, но тогда в их совокупность необходимо включить такие, которые несут мало информации об этой величине). Если в качестве признака выбран фактор I_n , для которого $P_i^n = 1/m$ для всех $i=1, 2, \dots, m$, то это означает, что данный признак одинаково свойствен всем возможным значениям r_i , т. е. не несет информации для их разделения. Покажем, что для таких условий справедливо следующее.

Теорема 2. Если принадлежность величины r к одному из классов r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) оценивается только по соотношению количеств различных признаков, то в множестве признаков $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеется конечное подмножество из первых N признаков ($0 \leq N < \infty$), дающее максимальную информацию для установления такой принадлежности. При этом число N зависит от $\{P_{ij}\}_i, \{P_{ij}^1\}_i$ и от способа учета соотношения признаков.

Иными словами, как уменьшение, так и увеличение числа учитываемых факторов может приводить к ухудшению результата, причем оптимальное их число зависит не только от свойств этих факторов и способа их учета, но и от исходной неопределенности искомого результата.

Доказательство. Без потери информации можно представить множество признаков в виде таких совокупностей, каждая из которых рассматривается как один новый (многомерный) признак только одного класса, без объединения признаков, относящихся к одному и тому же классу. Каждый класс может характеризоваться несколькими различными признаками такого рода. Сортировку значений r по классам можно представить как последовательное отделение каждого из классов R_i^* от \bar{R}_i . Поэтому достаточно доказать теорему для случая двух классов, рассматривая $\{I_k\}$ как совокупность признаков, появление каждого из которых считается свидетельством принадлежности r к классу R_1 (в общем случае R_i), а отсутствие (т. е. появление \bar{I}_k) — свидетельством принадлежности к классу R_2 (в общем случае \bar{R}_i). Соответственно суждению о принадлежности к этим классам значения r фактически включаются в классы R_1^* и R_2^* (R_i^* и \bar{R}_i).

Пусть для использования выбрано K первых признаков из $\{I_k\}_{k=1}^n$. Обозначим: K_1 — число признаков, свидетельствующих о принадлежности некоторого конкретного значения r к R_1 ; $\delta_{k_1} = K_1/K$ — доля таких признаков среди общего числа наблюдаемых признаков у этого значения r ; δ_0 — такая величина, что если $\delta_{k_1} \geq \delta_0$, то значение r включается в R_1^* , а если $\delta_{k_1} < \delta_0$ — в R_2^* ; K_2 — число признаков (типа \bar{I}_k), свидетельствующих о принадлежности R к R_2 ; $\delta_{k_2} = K_2/K_1$. Очевидно, что $K_1 + K_2 = K$, $\delta_{k_1} + \delta_{k_2} = 1$. При использовании одного признака задание δ_0 , очевидно, не требуется.

Поскольку информативность признаков убывает с увеличением k , то при достаточно большом значении K в совокупности $\{I_k\}_{k=1}^K$ появляются признаки, вероятности наблюдения которых у значений $r \in R_1$ и $r \in R_2$ различаются меньше, чем на любую заранее заданную величину ε . При дальнейшем увеличении K доля таких признаков в общем числе используемых признаков растет. Но тогда и различие вероятностей встречи любой величины δ_{k_1} , или δ_{k_2} у значений $r \in R_1$ и $r \in R_2$ при неограниченном увеличении K становится сколь угодно малым.

Поэтому при больших K значения $r \in R_1$ и $r \in R_2$ попадают в классы R_1^* и R_2^* примерно в том же соотношении, в каком они находятся в исходном распределении. Если же $K \rightarrow \infty$, то доли значений $r \in R_1$ и $r \in R_2$ в каждом из классов R_1^* и R_2^* сходятся по вероятности, соответственно, к величинам P_1 и P_2 (т. е. к исходным вероятностям). Тогда из определения информативности следует, что при $K \rightarrow \infty$ информативность совокупности признаков $\{I_k\}_{k=1}^K$ стремится к нулю.

Следовательно, отличная от нуля информативность совокупности признаков $\{I_k\}_{k=1}^K$ может быть только при конечных K , т. е. максимальная информативность достигается при $K = K < \infty$. Если ни один из признаков не имеет отличной от нуля информативности, то, очевидно, что при всех K информативность совпадает с максимальной, равной в таком случае нулю, и можно принять $N = 0$. Таким образом, $0 \leq N < \infty$, т. е. первая часть теоремы доказана.

Величина N тем больше, чем медленнее уменьшается E^l с увеличением l . Поскольку E^l зависит и от $\{P_i\}$ и от $\{P_i^l\}$, то, следовательно, от этих совокупностей зависит и N , т. е. доказана и вторая часть теоремы (учитывая также зависимость N от δ_0).

Теорема 2 и приведенные выше формулы для вычисления H^l и E^l дают очевидный принципиальный алгоритм для выделения оптимальной совокупности признаков при использовании методов разделения значений r по классам на основании заданной величины δ_0 .

В практических условиях число K ограничено некоторой величиной K_s , т. е. $N \leq K_s$, что не меняет заключения теоремы 2.

В простейшем случае выбор N может быть сделан перебором, т. е. для ряда значений $K \leq K_s$ вычисляется оценка неопределенности отнесения значений $r \in R_i^*$ к классам R_i , т. е. отличие произведенной сортировки от идеальной. По переходу этой оценки через минимум (соответствующий максимуму информативности) выбирается N . Если указанная оценка уменьшается при увеличении K до K_s , то принимается $N = K_s$. В связи с незростанием E^l при увеличении l оценка неопределенности при больших l не требуется.

Сравнительная оценка величин H^l для разных l в ряде случаев может производиться приближенно, на основании простых соображений. В частности, согласно уже упоминавшемуся свойству, если P_1^l и P_2^l — соответственно вероятности появления признака I_l у значений $r \in R_1$ и $r \in R_2$, а сумма $P_1^l + P_2^l$ мало меняется с изменением l , то величина H^l тем меньше, чем больше абсолютное различие P_1^l и P_2^l (при $P_1^l = P_2^l$ признак I_l имеет, по определению, нулевую информативность, т. е. величина H^l тогда максимальна).

При $m = 2$ (для приводимых далее иллюстраций) формулировки признаков удобно делать такими, чтобы наличие признака I_1 рассматривалось как свидетельство принадлежности r к R_1 , а отсутствие — как свидетельство принадлежности к R_2 . Нетрудно видеть, что это всегда можно сделать без затруднений. Если, например, признаками $r \in R_1$ и $r \in R_2$ считаются, соответственно, прилагательные «тяжелый» и «красный», то в качестве признаков первого класса принимаются «тяжелый» (I_1) и «некрасный» (I_2), а признаков второго класса — «легкий» (\bar{I}_1) и «красный» (\bar{I}_2).

Заметим, что такие преобразования неаналогичны преобразованиям f_k , упоминавшимся в теореме 1, так как признаки I_k остаются взаимно независимыми, потому что каждый из них построен лишь на одном исходном признаке без потери информации с соответствующим изменением преобразования r (I).

Тогда возможные сочетания признаков можно представить в виде $I^{(1)} = \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}, I_k\}$, $I^{(2)} = \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}, \bar{I}_k\}$, $I^{(3)} = \{I_1, I_2, \dots, \bar{I}_{k-1}, I_k\}$, \dots , $I^{(L)} = \{\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_{k-1}, \bar{I}_k\}$. Величины K_1 и K_2 для таких совокупностей — количества элементов, соответственно, без черты и с чертой сверху. Представим, что сочетания $I^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, L$) расположены в таком порядке, что при $l = 1, 2, \dots, L_1$ эти сочетания имеют $\delta_{K_1} \geq \delta_0$, а при $l = L_1 + 1, L_1 + 2, \dots, L$ $\delta_{K_1} < \delta_0$. Через $P_i^{(l)}$ обозначим вероятность проявления l -й совокупности признаков ($I^{(l)}$) у значений $r \in R_i$. Эта вероятность равна произведению вероятностей соответствующих признаков. В частности, для указанных выше сочетаний $P_1^{(3)} = P_1^1 \cdot P_2^1 \dots (1 - P_1^{K-1}) P_1^K$; $P_1^{(3)} = P_2^1 \cdot P_2^2 \dots (1 - P_2^{K-1}) P_2^K$.

Тогда в классе R_1^* значения r попадут с вероятностью

$$\delta_1 = P_1 \sum_{l=1}^{L_1} P_1^{(l)} + P_2 \sum_{l=2}^{L_1} P_2^{(l)}. \quad (8)$$

Среди них значения $r \in R_1$ будут встречаться с вероятностью

$$\delta_{1,1} = \left(P_1 \sum_{l=1}^{L_1} P_1^{(l)} \right) / \delta_1, \quad (9)$$

а значения $r \in R_2$ — с вероятностью

$$\delta_{1,2} = \left(P_2 \sum_{l=1}^{L_1} P_2^{(l)} \right) / \delta_1 = 1 - \delta_{1,1}. \quad (10)$$

Неопределенность встречи значений $r \in R_1$ и $r \in R_2$ в классе R_1^* составит

$$H_1 = -\delta_{1,1} \log \delta_{1,1} - \delta_{1,2} \log \delta_{1,2}. \quad (11)$$

Аналогично для класса R_2^* получаем:

$$\delta_2 = P_1 \sum_{l=L_i+1}^L P_1^{(l)} + P_2 \sum_{l=L_i+1}^L P_2^{(l)} = 1 - \delta_1, \quad (12)$$

$$\delta_{2,1} = \left(P_1 \sum_{l=L_i+1}^L P_1^{(l)} \right) / \delta_2, \quad \delta_{2,2} = \left(P_2 \sum_{l=L_i+1}^L P_2^{(l)} \right) / \delta_2 = 1 - \delta_{2,1}, \quad (13)$$

$$H_2 = -\delta_{2,1} \log \delta_{2,1} - \delta_{2,2} \log \delta_{2,2}. \quad (14)$$

Отсюда получаем общую неопределенность:

$$H = \delta_1 H_1 + \delta_2 H_2. \quad (15)$$

П р и м е р. Предположим, что под микроскопом производится разделение смеси зерен минералов R_1 и R_2 , причем никаких данных о превалировании какого-либо из них нет, т. е. априори $P_1 = P_2 = 0,5$; $H^0 = -P_1 \lg P_1 - P_2 \lg P_2 = 0,301$. Предположим также, что известны три следующих признака, по которым можно классифицировать зерна:

а) при измерении показателя преломления света для минерала R_1 в 90% случаев обнаруживалось высокое значение этого показателя по сравнению с иммерсионной жидкостью. Минерал R_2 , наоборот, характеризуется низким показателем преломления, что обнаруживалось в 80% случаев. Таким образом, принимая за I_1 превышение показателя преломления встречаемого минерала над показателем преломления иммерсионной жидкости, получаем $P_1^1 = 0,90$ и $P_2^1 = 1 - 0,80 = 0,20$;

б) в 85% случаев зерна минерала R_1 имеют примерно изометричную форму. Зерна минерала R_2 характеризуются, наоборот, главным образом вытянутой формой, имея ее в 79% случаев. Принимая за I_2 изометричность формы, получаем: $P_1^2 = 0,89$ и $P_2^2 = 1 - 0,79 = 0,21$;

в) у 83% зерен минерала R_1 отсутствует полосчатость, а зерна минерала R_2 полосчаты в 78% случаях. Принимая отсутствие полосчатости за I_3 получаем $P_1^3 = 0,83$ и $P_2^3 = 1 - 0,78 = 0,22$.

Требуется оценить возможность включения перечисленных признаков в оптимальную совокупность $\{I_k\}$. Каждый из признаков здесь уже описан так, что его наличие свидетельствует о принадлежности зерна к R_1 , а отсутствие — к R_2 . Нетрудно проверить также, что признаки расположены в порядке уменьшения информативности (при $P_1^l + P_2^l \approx \text{const}$ различие P_1^l и P_2^l уменьшается при переходе от первого признака к последнему).

При априорной оценке возможностей использования разных признаков для наглядности удобно говорить не о вероятностях, а об ожидаемых предполагающихся долях зерен минерала R_1 и R_2 ,

которые должны попасть в соответствующие классы R_1^* и R_2^* . Ради краткости мы будем опускать далее частое указание на предположительность.

После сортировки только по признаку I_1 в класс R_1^* попадает доля $\delta_1 = P_1 P_1^1 + P_2 P_2^1 = 0,55$ от всех зерен. Среди оказавшихся здесь зерен минерал R_1 составляет долю $\delta_{1,1} = P_1 \cdot P_1^1 / \delta_1 = 0,82$. Часть же, составляемая зёрнами R_2 , здесь предположительно равна $\delta_{1,2} = 1 - \delta_{1,1} = 0,18$.

В класс R_2^* попадет доля $\delta_2 = 1 - \delta_1 = 0,45$ из всех зерен. Здесь зерна минерала R_1 составят долю $\delta_{2,1} = P_1 (1 - P_1^1) / \delta_2 = 0,11$. Зерна R_2 в этом классе составят часть $\delta_{2,2} = 1 - \delta_{2,1} = 0,89$.

Неопределенность принадлежности зерен к классам R_1 и R_2 среди попавших в класс R_2^* равна $H_1 = -\delta_{1,1} \lg \delta_{1,1} - \delta_{1,2} \lg \delta_{1,2} = 0,2049$. Аналогично для класса R_2^* получим $H_2 = -\delta_{2,1} \lg \delta_{2,1} - \delta_{2,2} \lg \delta_{2,2} = 0,1504$.

Общая неопределенность: $H = \delta_1 H_1 + \delta_2 H_2 = 0,1805$.

Тогда информативность применения только признака I_1 составит $E = H^0 - H = 0,121$.

Оценим величину H при использовании совокупности $\{I_k\}_{k=1}^2$.

В этом случае возможны сочетания признаков: $I^{(1)} = \{I_1, I_2\}$; $I^{(2)} = \{I_1, \bar{I}_2\}$; $I^{(3)} = \{\bar{I}_1, I_2\}$; $I^{(4)} = \{\bar{I}_1, \bar{I}_2\}$.

Поскольку $\delta_0 = 1/2$, зерна включаются в класс R_1^* при проявлении первых трех сочетаний признаков и только при последнем сочетании относятся к классу R_2^* , т. е. $L_1 = 3$. Здесь $P_1^{(1)} = P_1^1 P_1^2 = 0,801$; $P_1^{(2)} = P_1^1 (1 - P_1^2) = 0,099$; $P_1^{(3)} = (1 - P_1^1) P_1^2 = 0,089$; $P_1^{(4)} = (1 - P_1^1) (1 - P_1^2) = 0,011$; $P_2^{(1)} = P_2^1 P_2^2 = 0,042$; $P_2^{(2)} = P_2^1 (1 - P_2^2) = 0,158$; $P_2^{(3)} = (1 - P_2^1) P_2^2 = 0,168$; $P_2^{(4)} = (1 - P_2^1) (1 - P_2^2) = 0,632$.

Подставляя эти величины в формулы (8) — (15), находим, что $H = 0,194$, т. е. $E = H^0 - H = 0,107$.

Как видим, информативность совокупности $\{I_k\}_{k=1}^2$ здесь оказалась ниже, чем при использовании только I_1 .

Нетрудно видеть, что это уменьшение информативности вызвано тем, что при одинаковых числах признаков, свидетельствующих о принадлежности r к R_1 и R_2 , предпочтение отдано отнесению r к R_1^* . Ликвидируем такое предпочтение, т. е. в класс R_1^* будем включать зерна, у которых наблюдаются совокупности признаков $I^{(1)} = \{I_1, I_2\}$ и $I^{(2)} = \{I_1, \bar{I}_2\}$, а в класс R_2^* — зерна с совокупностями признаков $I^{(3)} = \{\bar{I}_1, I_2\}$ и $I^{(4)} = \{\bar{I}_1, \bar{I}_2\}$. Тогда в класс R_1^* объединяются все зерна, имеющие признак I_1 , как при наличии признака I_2 , так и при его отсутствии. Следовательно, в таком случае включение в класс R_1^* происходит незави-

симо от признака I_2 . Включение же в класс R_2^* происходит всегда при отсутствии признака I_1 (т. е. при наличии \bar{I}_1), также независимо от признака I_2 . Следовательно, в таком случае информативность совокупности $\{T_l\}_{l=1}^2$ равна информативности одного признака I_1 .

При использовании $\{I_k\}_{k=1}^3$ в R_1^* включаются зерна, имеющие сочетания признаков: $I^{(1)} = \{I_1, I_2, I_3\}$; $I^{(2)} = \{I_1, I_2, I_3\}$; $I^{(3)} = \{I_1, \bar{I}_2, I_3\}$; $I^{(4)} = \{\bar{I}_1, I_2, I_3\}$. В R_2^* включаются зерна с признаками $I^{(5)} = \{\bar{I}_1, I_2, \bar{I}_3\}$; $I^{(6)} = \{\bar{I}_1, \bar{I}_2, I_3\}$; $I^{(7)} = \{\bar{I}_1, I_2, \bar{I}_3\}$; $I^{(8)} = \{I_1, I_2, I_3\}$.

Аналогично предыдущему находим $H = 0,0816$ и $E = 0,219$. Таким образом, увеличение K до 3 при заданных условиях еще увеличивает информативность используемой совокупности признаков.

Предположим, что при прежних P_1, P_2 и неизменности характеристик для I_1 используются иные признаки I_2 и I_3 , и величины P_j^i имеют значения:

$$P_1^1 = 0,9; P_1^2 = 0,60; P_1^3 = 0,51; P_2^1 = 0,2; P_2^2 = 0,45; P_2^3 = 0,48.$$

Подстановка этих значений в приводившиеся формулы для $K = 3$ дает $H = 0,258$ и $E = 0,043$, т. е. при указанных условиях информативность сочетания трех признаков меньше вычислявшейся выше информативности первого из них.

Заметим, что равновероятная встреча значений $r \in R_1$ и $r \in R_2$ в R_1^* иногда ошибочно трактуется как «безрезультатность» разделения, т. е. принимается как свидетельство нулевой информативности совокупности $\{I_k\}_{k=1}^K$. В действительности же это может быть вызвано существенным изменением вероятностей встреч $r \in R_1$ и $r \in R_2$. Например, при поисках рудных месторождений без геохимических и геофизических методов лишь малая доля горных выработок вскрывает рудные тела. Если применение каких-либо методов повышает вероятность такого вскрытия до $1/2$, то, очевидно, такие методы являются высокоинформативными и практически ценными (при условии достаточно низкой стоимости).

Класс R_1^* , выделенный с помощью $\{I_k\}$, может рассматриваться как исходное распределение для применения другой совокупности признаков. Так бывает, например, когда проба горной породы или руда проходит разные стадии очистки (флотация, гравитационное обогащение и др.). Тогда описанный алгоритм применяется отдельно для каждой последовательной совокупности. Если для какой-то из них $N = 0$, то она изымается из такой последовательности.

Оценив информативность каждой совокупности признаков из всех возможных и зная стоимости их использования, при необходимости можно сделать оптимальный выбор между ними вполне очевидным образом.

Приведенные положения могут быть применены при любых исследованиях, где используется соотношение чисел признаков, в частности при распознавании образов методами, иногда называемыми «голосованием признаков», и «эвристическими» методами. В качестве признаков можно рассматривать и параметры дискриминантных функций при классификации величин r по положению относительно этих функций. Поэтому сказанное выше справедливо и для дискриминантного анализа. Это согласуется с уже известными для него положениями о возможности ухудшения результатов с увеличением числа признаков¹.

Т е о р е м а 3. Пусть $\{I_k\}_{k=1}^K$ — множество признаков, которые могут быть использованы для классификации значений r ; $\{I_l\}_{l=1}^L$ — всевозможные совокупности признаков из этого множества ($L \leq K$), проявляющиеся у значений r . Тогда информативность E множества $\{I_k\}_{k=1}^K$ является наибольшей из всех возможных, если значение r включается в такой класс R_i^* , для которого величина $P_i = P_i \prod_{l=1}^L P_i^l$ максимальна. При этом величина E не уменьшается с расширением совокупности $\{I_k\}_{k=1}^K$ дополнительным включением в нее признаков со сколь угодно малой информативностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы использует известный принцип максимального правдоподобия: величина P_i — это вероятность события $r \in R_i$ с наличием у r совокупности признаков $\{I_l\}_{l=1}^L$. Если $P_i < P_j$ для всех $j \neq i$ ($i, j = 1, 2, 3, \dots, m$), то, в силу определения вероятности, при большом числе случаев среди значений r , обладающих этой совокупностью признаков, наибольшую долю составляют значения из класса R_i . Поэтому, принимая r за величину, относящуюся к R_i (т. е. включая r в R_i^*), мы ошибемся в наименьшем числе случаев. Следовательно, при указанной в теореме системе классификации в каждый класс R_i^* попадет наибольшее количество однотипных значений r из класса R_i и наименьшее из других классов совокупности $\{R_j\}_{j=1}^m$, или (более строго и без ограничения числом случаев) вероятность отнесения значения r в класс R_i^* тогда является наибольшей для $r \in R_i$ и наименьшей для $r \in \bar{R}_i$. По определению, это означает, что неопределенность отнесения к классам R_j значений r , включенных в классы R_j^* ($j = 1, 2, \dots, m$), оказывается минимальной, а величина E — максимальной из всех возможных (при любых системах классификации), что выражает первое утверждение теоремы.

¹ Довольно подробные исследования этого вопроса содержатся также в работе С. В. Гольдина (1968).

Для доказательства второго утверждения теоремы, очевидно, достаточно показать, что информативность совокупности $\{I_k\}_{k=1}^K$ не уменьшится, если в нее включить признак I_{K+1} с информативностью $E^{K+1} = 0$. Нулевая информативность признака I_{K+1} означает, что $P_j^{K+1} = 1/m$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Включение I_{K+1} в $\{I_k\}$ при рассматриваемой системе классификации означает, что все величины P_i для $\{I_k\}_{k=1}^{K+1}$ отличаются от величин P_i для $\{I_k\}_{k=1}^K$ только множителем $1/m$. Но такое отличие не меняет индекса i , при котором значение P_i максимально. Следовательно, при этом не меняются заключения о принадлежности r к определенному классу. Но тогда не может уменьшиться и информативность, т. е. теорема доказана.

Расширение совокупности $\{I_k\}$ включением в нее признаков с отличной от нуля информативностью меняет величины P_i , а следовательно и информативность E совокупности $\{I_k\}$ в целом. Поскольку, согласно теореме 3, величина E при этом не может уменьшаться (и быть меньше, чем при расширении $\{I_k\}$ включением признака с нулевой информативностью), то такое изменение означает увеличение E . Тогда из теоремы 3 вытекает следствие: при использовании принципа максимального правдоподобия расширение совокупности $\{I_k\}$ включением в нее признаков с отличной от нуля информативностью всегда увеличивает информативность этой совокупности в целом. Теорема 3 и это следствие указывают на большие преимущества применения принципа максимального правдоподобия по сравнению с методами, обсуждавшимися в предыдущем разделе.

Для многих целей в качестве принципа максимального правдоподобия удобно использовать такую формулировку:

Величина r должна быть отнесена к такому классу R_i , которому соответствует максимальная априорная вероятность явления $r \in R_i$ с наблюдаемой совокупностью признаков.

Рассмотрим зависимость классификации по принципу максимального правдоподобия от величин P_i (т. е. от изучаемого рас-

пределения). Вначале примем $m = 2$. Тогда $P_1 = P_1 \prod_{i=1}^L P_1^i$, $P_2 =$
 $= P_2 \prod_{i=1}^L P_2^i$, $\log P_1 = \log P_1 + \sum_{i=1}^L \log P_1^i$; $\log P_2 = \log P_2 + \sum_{i=1}^L \log P_2^i$.

Обозначим

$$S = \log P_1 - \log P_2; \quad S_1 = \log P_1 - \log P_2;$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^L \log P_1^i - \sum_{i=1}^L \log P_2^i. \quad (14)$$

Тогда

$$S = S_1 + S_2. \quad (15)$$

При увеличении информативности признаков или числа признаков с информативностью больше нуля, когда E растет, математическое ожидание различия между P_1 и P_2 также растет, т. е. растет $|S|$. Поскольку S_1 не зависит от признаков, то, согласно формуле (15), это означает, что растет $|S_2|$. Поэтому при достаточно большом увеличении E можно в выражении (15) пренебречь величиной S_1 и считать, что знак величины S определяется знаком величины S_2 . Но этот знак определяет, в какой класс, R_1^* или R_2^* , включается g . Поскольку любую классификацию можно представить как последовательное разделение на два класса, то сказанное означает, что вероятность отнесения величины g к какому-либо классу из совокупности $\{R_i^*\}_{i=1}^m$ при любом m тем меньше зависит от неизвестного распределения таких величин, чем больше E , т. е. чем больше информативность используемых признаков и их число.

Принципиальный алгоритм применения описанных положений непосредственно следует из теоремы 3.

П р и м е р. Предположим, что используются первые два признака из примера, рассмотренного в предыдущем разделе. Тогда возможны сочетания признаков: $I^{(1)} = \{I_1, I_2\}$; $I^{(2)} = \{\bar{I}_1, I_2\}$; $I^{(3)} = \{\bar{I}_1, \bar{I}_2\}$; $I^{(4)} = \{I_1, \bar{I}_2\}$.

Для $I^{(1)}$ получаем $P_1 = P_1 \cdot P_1^2 \cdot P_1^2 = 0,40$ и $P_2 = P_2 \cdot P_1^2 \cdot P_2^2 = 0,021$, т. е. при появлении этой совокупности признаков значение g должно быть отнесено к R_1^* .

Для $I^{(2)}$: $P_1 = P_1 \cdot P_1^2 \cdot (1 - P_1^2) = 0,050$, $P_2 = P_2 \cdot P_1^2 \cdot (1 - P_2^2) = 0,079$, т. е. $g \in R_2^*$.

Для $I^{(3)}$: $P_1 = P_1 \cdot (1 - P_1^2) \cdot P_1^2 = 0,044$, $P_2 = P_2 \cdot (1 - P_2^2) \cdot P_2^2 = 0,084$, т. е. $g \in R_2^*$.

Для $I^{(4)}$: $P_1 = (1 - P_1^2) \cdot (1 - P_1^2) = 0,0055$, $P_2 = (1 - P_2^2) \cdot (1 - P_2^2) = 0,316$, т. е. $g \in R_2^*$.

Нетрудно увидеть, что описанные положения в принципе могут быть использованы для решения различных задач, в том числе для опознавания образов.

ЛИТЕРАТУРА

- Вентцель Е. С. 1962. Теория вероятностей. М., Физматгиз.
 Гольдин С. В. 1968. К вопросу о числе признаков в статистических классификациях. — В сб. «Математические методы при геологических исследованиях в Западной Сибири». — Труды ЗапСибНИГНИ, вып. 18. Тюмень.

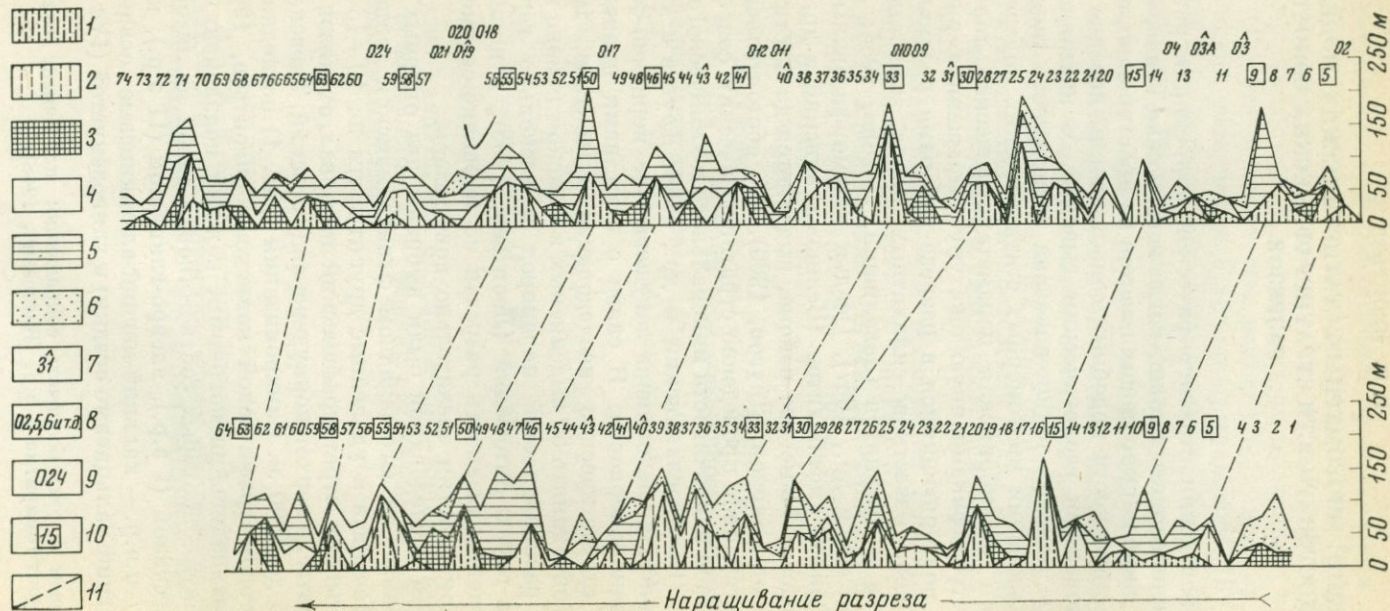
ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДОСТОВЕРНОСТИ СТРАТИГРАФИЧЕСКИХ СОПОСТАВЛЕНИЙ РАЗРЕЗОВ

При проведении стратиграфической корреляции разрезов немых ритмичнослоистых толщ, когда невозможно непосредственное прослеживание маркирующих пластов по простиранию, отсутствие оценки достоверности подобных сопоставлений нередко приводит к необоснованным геологическим выводам. В настоящей статье на примере мамской толщи показана возможность такой оценки при использовании многомерных статистических моделей.

Мамская докембрийская параметаморфическая толща имеет сложную стратификационную текстуру, выраженную ритмически-циклично повторяющимися в разрезе наборами различных гнейсов, сланцев, известково-силикатных пород, кристаллических известняков и кварцитов (Завалишин, Львова, 1954; Леонтьев, 1965; Леонтьев и др., 1967). Осадки метаморфизованы в фации альмандиновых амфиболитов (Великославинский и др., 1963); в них, в пределах Мамского района, выделяется до шести метаморфических зон (Карпов, Другов, 1966). Это обстоятельство существенно затрудняет проведение стратиграфических сопоставлений из-за заметной изменчивости минерального и химического составов парапород (Великославинский и др., 1963; Другов и др., 1968), что в значительной степени затушевывает первично-седиментационные закономерности. В связи с этим нами проведено специальное статистическое исследование (Леонтьев, 1968), позволившее объединить 50 выделяемых в Мамском районе петрографических разновидностей парапород в несколько генетически различных групп литофаций (Леонтьев, 1965), в номенклатуре которых распознаваемость разрезов по первично-седиментационным закономерностям значительно повысилась.

Объектом исследования были выбраны два опорных разреза, расположенные на юго-западном фланге мамской толщи в бассейне р. Мочекита и удаленные друг от друга на 10—15 км. Разрезы охватывали стратиграфический интервал от низов слюдянкинской свиты до верхов конкудерской (Таевский, Таевская, 1961), мощностью до 5000 м. Синхронизация (рис. 1) последних проводилась методом графической коннекции (Леонтьев, 1965). Для этого отстраивались ритмограммы, каждый подэлемент или элемент гемирита¹ которых соответствовал одной из литофаций — глинисто-песчаной (I э.р.), алевро-глинистой (II э.р.), карбонатной (IIIа п.э.р. — кальций-магний-алюминиевые осадки; IIIв п.э.р. — магний-кальциевые осадки) и глиноземистой (IVа п.э.р. —

¹ В дальнейшем будем обозначать сокращенно: подэлемент гемирита — п.э.р.; элемент гемирита — э.р. (Вассоевич, 1948).



глиноземистые осадки; IV в п.э.р. — высокоглиноземистые осадки). В результате было выявлено около 80 седиментационных гемиритмов со средней мощностью до 60 м, среди них — 11 маркирующих.

Несмотря на эффективность примененного метода по сравнению с традиционными геологическими, строгая оценка достоверности сопоставления все же отсутствовала.

Поэтому для объективной оценки проведенной корреляции были использованы многомерные статистические модели дисперсионного и регрессионного анализов (Алешин, Карпов, 1970; Езекиэл, Фокс, 1966; Лукомский, 1961; Родионов, 1964).

Применение многомерного дисперсионного анализа предполагало проверку нулевой гипотезы (H_0) о равенстве средних «составов», где под «составом» для каждого гемиритма подразумевался многомерный вектор, компонентами которого были литофациальный состав э.р. и п.э.р., характер их сочетания (чередования в гемиритме), их мощности и мощность всего гемиритма, а под средним «составом» для данного разреза — вектор, усредненный по всем гемиритмам этого разреза.

Таблица 1

Преобразование сравниваемых разрезов для обработки на ЭВМ

Гемиритм, №	Характер сочетания (чередования) э. р. и п. э. р. в седиментационных гемиритмах						Мощность						Целый гемиритм
							Э. р., п. э. р.						
	I (1)	II (2)	IIIa (3)	IIIe (4)	IVa (5)	IVe (6)	I (7)	II (8)	IIIa (9)	IIIe (10)	IVa (11)	IVe (12)	
1	0	0	1	1	1	0	0	0	12	18	22	0	52
2 (и т. д.)	0	1	0	0	1	1	0	24	0	0	10	15	49

Примечание. Присутствие признака — 1; отсутствие — 0.

В табл. 1 приводится схема преобразования сравниваемых разрезов к виду, удобному для обработки на электронно-вычислительной машине.

Рис. 1. Контексия опорных разрезов

Глиноземистая литофация (IV э.р.): 1 — высокоглиноземистые осадки, 2 — глиноземистые осадки; карбонатная литофация (III э.р.): 3 — магний-кальциевые осадки, 4 — кальций-магний-алюминиевые осадки; 5 — алевро-глинистая литофация (II э.р.); 6 — глинисто-песчаная литофация (I э.р.); 7 — регрессивные гемиритмы (без знака над порядковым индексом — трансгрессивные); 8 — порядковые индексы гемиритмов; 9 — гемиритмы, отсутствующие в основном разрезе; 10 — маркирующие гемиритмы; 11 — линии трассирования маркирующих гемиритмов

В рассматриваемом случае средние «составы» синхронизированных разрезов исследованы дважды: как тринадцатимерные (признаки 1-13) и семимерные (признаки 1-6; 13) векторы (табл. 1).

Для синхронизированных разрезов характеристикой их неравномерности и зависимости значений отдельных признаков друг от друга являлась матрица ковариаций. Диагональные элементы этой матрицы представляли собой дисперсии случайных величин (значений признаков); остальные элементы являлись ковариациями их различных пар (Родионов, 1964).

На электронно-вычислительной машине БЭСМ-2М по специальной программе с использованием данных по двум выборкам (разрезам) были вычислены эмпирическая ковариационная матрица S' , в которой не исключалось влияние значимой разницы между средними «составами» (если таковая имела) и статистическая ковариационная матрица S^0 , элементы которой вычислялись, исходя из предположения, что разницы между средними «составами» не существует (табл. 2, 3).

В качестве многомерного статистического критерия для проверки гипотезы H_0 использовался критерий V , вычисляемый по формуле (Родионов, 1964):

$$V = - \left(N_1 + N_2 - 1 - \frac{m+2}{2} \right) \ln \frac{|S'|}{|S^0|},$$

где m — число признаков, $|S'|$ и $|S^0|$ — детерминанты матриц S' и S^0 , N_1 и N_2 — соответственно количество седиментационных гемиритмов в первом и втором разрезах.

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина V распределяется по закону χ^2 с m степенями свободы; если же величина V превышает критическое значение χ_q^2 при заданном уровне значимости q и m степенях свободы, то принимается альтернативная гипотеза H_1 (Родионов, 1964).

Проведенные расчеты показали, что в целом средние «составы» исследуемых разрезов и как тринадцати- и как семимерные векторы идентичны ($V_{13}^{5\%} = 21,03 < \chi_{5\%}^2 = 22,36$; $V_7^{5\%} = 9,22 < \chi_{5\%}^2 = 14,06$), однако близость полученных значений V к критическому значению $\chi_{5\%}^2$ неодинакова. Это указывает на различную степень близости синхронизированных разрезов — более значительную по семи, менее по 13 признакам. Следовательно, не лимитируемое увеличение количества анализируемых факторов при стратиграфических сопоставлениях разрезов высокометаморфизованных ритмичнослоистых осадков может значительно ухудшить распознаваемость последних, так как одновременно стабильное поведение большинства из них маловероятно. Таким образом, нужно использовать некоторый ограниченный оптимальный набор наиболее существенных признаков, которые можно эффективно использовать при корреляции разрезов. Применение в этом случае многомерного регрессионного анализа (Езекиэл, Фокс, 1966) поз-

Таблица 2

Эмпирическая ковариационная матрица S^1

		Номера признаков гемиритмов												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,22	-0,07	-0,04	0,01	-0,03	-0,04	1,37	-0,93	-0,10	0,07	-0,42	3,55	-0,32	
2	-0,07	0,23	-0,04	0,001	-0,05	-0,01	-0,52	1,78	-0,06	0,11	-0,34	-3,46	0,36	
3	-0,04	-0,04	0,20	-0,05	-0,002	-0,04	0,35	-0,44	0,91	-0,17	-0,09	-2,16	-0,35	
4	0,01	0,001	-0,05	0,15	-0,04	-0,07	0,02	0,004	-0,23	0,85	-0,26	-1,90	-0,38	
5	-0,03	-0,05	-0,002	-0,04	0,20	-0,03	-0,15	-0,44	-0,16	-0,29	-1,26	-2,52	0,15	
6	-0,04	-0,01	-0,04	-0,07	-0,03	0,24	-0,24	0,01	-0,29	0,47	-0,15	6,16	0,87	
7	1,37	-0,52	-0,35	0,02	-0,15	-0,24	14,48	-6,25	-0,73	-0,09	-3,00	36,71	2,30	
8	-0,93	1,78	-0,44	0,004	-0,44	0,01	-6,25	35,28	1,67	-0,28	-3,05	-0,003	19,13	
9	-0,10	-0,06	0,91	-0,23	0,16	-0,29	-0,73	-1,67	9,45	-1,53	-0,58	-11,22	0,47	
10	0,07	0,11	-0,17	0,85	-0,29	0,47	-0,09	-0,28	-1,53	7,74	-2,63	-12,40	0,69	
11	-0,42	-0,34	-0,09	-0,26	1,26	-0,15	-3,00	-3,05	-0,58	-2,63	17,35	-20,84	2,41	
12	3,55	-3,46	-2,16	-1,90	-2,52	6,16	36,71	-0,003	-11,22	-12,40	12,84	483,90	27,56	
13	-0,32	0,36	-0,35	-0,38	0,15	0,87	2,30	19,13	0,47	0,69	2,41	27,56	87,37	

Примечание. В табл. 2 и 3 жирными линиями выделены ковариационные матрицы при втором варианте оценки (по семи признакам).

Таблица 3
 Статистическая ковариационная матрица S^0

Номера признаков гемиритмов													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,22	-0,08	-0,04	0,01	-0,02	-0,04	1,40	-0,93	-0,12	0,07	-0,40	3,86	-0,29
2	-0,08	0,24	-0,04	0,002	-0,06	-0,01	-0,59	1,78	-0,03	0,11	-0,39	-4,08	0,30
3	-0,04	-0,04	0,20	-0,05	-0,003	-0,04	-0,35	-0,43	0,91	-0,17	-0,09	-2,21	-0,35
4	0,01	0,002	-0,05	0,15	-0,04	-0,07	0,06	0,004	-0,23	0,85	-0,25	-1,91	-0,38
5	-0,02	-0,06	-0,003	-0,04	-0,23	-0,08	-0,09	-0,44	0,02	-0,29	1,31	-1,96	0,21
6	-0,04	-0,01	-0,04	-0,07	-0,03	-0,24	-0,25	0,01	-0,29	-0,47	-0,15	6,09	0,86
7	1,40	-0,59	-0,35	0,06	-0,09	-0,25	15,03	-6,26	-0,95	-0,12	-2,64	41,58	2,78
8	-0,93	1,78	-0,43	0,004	-0,44	0,01	-6,26	35,28	-1,67	-0,28	-3,06	-0,003	19,12
9	-0,12	-0,03	0,91	-0,23	0,02	-0,29	-0,95	-1,67	9,54	-1,53	-0,73	-13,16	0,28
10	0,07	0,11	-0,17	0,85	-0,29	-0,47	-0,12	-0,28	-1,53	7,74	-2,65	-12,65	0,67
11	-0,40	-0,39	-0,09	-0,25	1,31	-0,15	-2,64	-3,06	-0,73	-2,65	17,58	-17,65	2,72
12	3,86	-4,08	-2,21	-1,91	-1,96	6,09	41,58	-0,003	-13,16	-12,65	-17,65	481,19	31,74
13	-0,29	0,30	-0,35	-0,38	0,21	0,86	2,78	19,12	0,28	0,67	2,72	31,74	77,78

Примечание. См. табл. 2.

воляет на строгой количественной основе оценить значимость каждого из выбранных признаков (факторов), о чем подробнее будет сказано ниже.

Постановка вопроса о повторной оценке достоверности проведенной корреляции с помощью алгоритма многомерной регрессии представляет особый интерес. Вычисления осуществлялись на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2М. Исходные данные по опорным разрезам использовались в том же виде, как и в случае многомерного дисперсионного анализа (см. табл. 1).

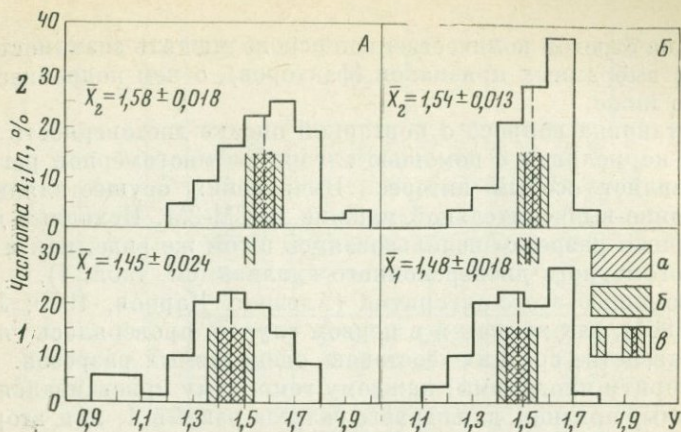
С помощью этого алгоритма (Алешин, Карпов, 1970; Лукомский, 1961), так же как и в первом случае, проверялась гипотеза H_0 о равенстве средних «составов» оцениваемых разрезов.

Алгоритм программы: каждому гемириту присваивался количественный признак, для первого разреза равный 1, для второго — 2. Затем методом наименьших квадратов дважды решалась система из 132 линейных уравнений с 13 независимыми переменными в первом случае и с семью — во втором (см. табл. 1). Результатом решения явились уравнения многомерной (множественной) регрессии, представляющие собой линейную интерполяционную функцию вида: $y^{(13)} = 1,664 + 0,046x_1 + 0,175x_2 - 0,180x_3 - 0,041x_4 - 0,218x_5 - 0,061x_6 - 0,035x_7 - 0,020x_8 - 0,021x_9 - 0,013x_{10} - 0,055x_{11} - 0,0005x_{12} + 0,002x_{13} \pm s_y$; $y^{(7)} = 1,591 - 0,085x_1 + 0,136x_2 + 0,008x_3 - 0,044x_4 - 0,181x_5 - 0,003x_6 - 0,005x_{13} \pm s_y$.

В дальнейшем, путем подстановки в полученные уравнения соответствующих значений признаков (см. табл. 1), определялся «многомерный индекс» каждого седиментационного гемирита, а затем строились гистограммы их распределения (рис. 2). Вычисленные средние арифметические многомерных величин («многомерных индексов»), отвечающие средним «составом» сопоставляемых разрезов соответственно для двух вариантов оценки, сравнивались между собой при помощи t — критерия Стьюдента (Лукомский, 1961).

В первом варианте оценки (рис. 2, А) гипотеза H_0 подтвердилась только на уровне значимости 0,001, т. е. средние «составы» сравниваемых разрезов оценивались как идентичные лишь на предельном, практически мало приемлемом уровне, хотя их доверительные интервалы и в этом случае имели совместную область перекрытия,

Во втором варианте (рис. 2, Б) гипотеза H_0 принималась на более низком уровне значимости (0,05) и средние «составы» оцениваемых разрезов принимались идентичными при уровне надежности 0,95. Во всех случаях, когда принималась гипотеза H_0 , расчетные значения t -критериев для соответствующих уровней значимости были меньше затабулированных критических (Лукомский, 1961); однако во втором варианте (при исключении признаков, соответствующих мощностям отдельных э.р. и п.э.р.) разница между ними была более существенна и, следовательно,



Р и с. 2 Гистограммы распределения количественных характеристик («многомерных индексов») седиментационных гемиритмов для оцениваемых разрезов

1 — разрез 1; 2 — разрез 2; А — разрезы, изученные по 13 признакам (13-мерные векторы); Б — разрезы, изученные по семи признакам (7-мерные векторы); доверительные интервалы: а — при уровне значимости 0,05; б — при уровне значимости 0,001; в — области перекрытия доверительных интервалов при соответствующих уровнях значимости (а, б); количество гемиритмов: $n_1 = 64$ — в первом разрезе; $n_2 = 68$ — во втором разрезе; \bar{X}_1 и \bar{X}_2 (показаны пунктиром) — оценки средних арифметических «многомерных индексов» седиментационных гемиритмов, соответствующие средним «составам» синхронизированных разрезов; $\mp 0,018; 0,024; 0,013; 0,018$ — оценки ошибок многомерных средних; У — ось зависимой переменной (ось «многомерных индексов» гемиритмов)

средние «составы» более близкими. Это объясняется особенностями условий, при которых формировалась мамская толща — аспидная формация, флишoidная субформация (Хаин, 1964), когда изменчивость литофациального состава осадков и особенно их мощностей имела место не только в поперечном, но и параллельном направлениях древней береговой линии (Сидоренко, Лулева, 1961). Несмотря на это, можно уверенно констатировать, что в опорных разрезах синхронизированы одни и те же стратиграфические уровни. Это хорошо подтверждается результатами, полученными с использованием двух совершенно различных методов.

Рассмотрение других статистических параметров, полученных в результате многомерного (множественного) регрессионного анализа, приводит также к ряду интересных выводов.

Казалось бы близость значений статистик s_i и s_j (табл. 4) указывает на неэффективность линейной функции для распознавания многомерных объектов, так как s_j фактически не уменьшает рассеивания по сравнению с обычным стандартным отклонением s_i . Однако в нашем случае (при значительном сходстве разрезов) это объясняется тем, что величина $1 - R^2$, выражающая необъясненную долю изменчивости зависимой переменной за счет факторов, которые здесь не рассматриваются, весьма существенна

(Езекиэл, Фокс, 1966; Лукомский, 1961). С другой стороны, величины рассматриваемых коэффициентов множественной детерминации R^2 (табл. 4), определяющие математически установленную долю изменчивости (в синхронизированных разрезах в целом), которая обязана влиянию только 13 изученных факторов (признаков), в первом варианте оценки и семи — во втором, показывают, что за счет литолого-фациального состава э.р. и п.э.р. и их мощностей, а также мощностей целых седиментационных макроритмов эта изменчивость объясняется лишь на 13%; при исключении мощностей э.р. и п.э.р. — на 6%. Такие расхождения в коррелируемых разрезах с геологической точки зрения могут быть признаны не существенными. Очевидно, увеличение в этом случае величины R^2 (Езекиэл, Фокс, 1966; Лукомский, 1961) сопряжено с необходимостью увеличения количества независимых факторов, вводимых в линейную функцию распознавания. Однако для стратиграфических сопоставлений в рассматриваемом геологическом районе это уже не имеет решающего значения. Таким образом, описанный выше набор использованных признаков можно считать вполне достаточным для надежного распознавания разрезов.

Для выяснения доли изменчивости, вносимой каждой из независимых переменных в зависимую переменную, соответствующую многомерному вектору — среднему «составу», была также использована линейная интерполяционная функция. Вычисленные стандартизованные коэффициенты регрессии (табл. 5) показали, что установленная доля изменчивости зависимой переменной для оцениваемых разрезов определяется, в основном, вариациями таких независимых переменных, как мощности I и II э.р., менее — IIIа п.э.р. (признаки 7, 8, 9 в табл. 1 и 5). Несколько меньшее влияние оказывает изменение характера переслаивания, про-

Таблица 4

Систематические оценки, полученные методом многомерной (множественной) регрессии

Вариант оценки	Разрез, №	Зависимая переменная (условное числовое значение для каждого гемпритма)	Стандартное отклонение от средней для зависимости переменной (s_i)	Обобщенное стандартное отклонение от линии регрессии (s_y)	Коэффициент множественной корреляции (R)	Коэффициент множественной детерминации (R^2)
А	1	1	0,50	0,46	0,36	0,13
	2	2				
Б	1	1	0,49	0,48	0,25	0,06
	2	2				

Таблица 5

Стандартизированные коэффициенты регрессии (β)

Вариант оценки	Номера признаков гемиритмов в табл. 1					
	1	2	3	4	5	6
А	0,044	0,169	-0,016	-0,032	-0,198	-0,059
Б	0,080	0,132	-0,007	-0,035	-0,164	-0,028

Таблица 5 (окончание)

Вариант оценки	Номера признаков гемиритмов в табл. 1						
	7	8	9	10	11	12	13
А	-0,275	-0,234	0,132	-0,068	-0,046	0,070	0,038
Б	—	—	—	—	—	—	0,081

исходящее за счет появления в разрезах таких осадков, как глиноземистые (различные слюдястые бездистеновые гнейсы и сланцы) — IVa п.э.р. и алевро-глинистые — II э. р. (признаки 2 и 5). Таким образом, наибольшее варьирование в значениях мощностей и в характере переслаивания парапород для синхронизированного стратиграфического интервала происходит, в основном, за счет относительно наиболее мелководных, терригенных литофаций осадков. Но заметная часть установленной доли изменчивости приходится на признак 5 (относительно глубоководные глиноземистые осадки — IVa п. э. р.). Вероятно, это в большей мере можно объяснить различиями в степени метаморфизма в разных участках толщи (в условиях некоторых метаморфических зон дистен становится неустойчивым и исчезает), чем литофациальной изменчивостью осадков в процессе их накопления (Великославинский и др., 1963).

Коэффициенты β , на целый порядок меньшие, чем вышеприведенные, получены для таких признаков, значения которых наиболее стабильны. К ним относятся мощности э. р. и п. э. р., представленных осадками карбонатной и глиноземистой литофаций (признаки 10, 11, 12), а также мощности целых макроритмов (см. табл. 1 и 5).

Очень незначительно на установленную долю изменчивости влияет появление в параллельных разрезах таких парапород, как кристаллические известняки, т. е. III в п. э. р., и особенно высокоглиноземистые (дистенсодержащие) гнейсы и сланцы — IV в п. э. р. (признаки 4, 6). Эти парапороды при стратиграфических сопоставлениях могут служить наиболее надежными маркерами.

Таким образом, при стратиграфических сопоставлениях разрезов, удаленных более, чем на 10—15 км, в толщах, аналогичных мамской, в первую очередь необходимо изучать и учитывать характер чередования э.р. и п. э.р. (типы, классы, отряды и виды седиментационных гемиритмов; Леонтьев, 1968), общую мощность каждого гемирита и в значительной меньшей степени мощности их отдельных элементов и подэлементов (см. табл. 1).

В заключение необходимо отметить, что оценка достоверности проведенных стратиграфических сопоставлений с применением многомерных статистических моделей является не только эффективной и убедительной, но и совершенно необходимой для таких сложных геологических образований, как мамская толща.

ЛИТЕРАТУРА

- Алешин С. М., Карпов И. К. 1970. Химический состав пелитовых пород как функция регионального метаморфизма. — В сб. «Математические методы в петрологии и геохимии». М., «Наука».
- Вассоевич Н. Б. 1948. Флиш и методика его изучения. Л.— М., Гостонтехиздат.
- Великославинский Д. А., Казаков А. Н., Соколов Ю. М. 1963. Мамский комплекс Северо-Байкальского нагорья. — Труды Лаборатории геологии докембрия АН СССР, вып. 17.
- Другов Г. М., Карпов И. К., Леонтьев Г. И. 1968. Изменение химического состава пелитовых пород Мамского района при региональном метаморфизме. — В сб. «Вопросы геологии, петрологии и металлогении метаморфических комплексов Востока СССР». Владивосток.
- Завалишин М. А., Львова Н. А. 1954. Стратиграфия и геологическое строение северо-восточной части Мамского района. — Труды Гипронеислуда, вып. 1 (3), М., Промстройиздат.
- Езекиэл М., Фокс К. 1966. Методы анализа корреляций и регрессий линейных и криволинейных. М., «Статистика».
- Карпов И. К., Другов Г. М. 1966. О метаморфической зональности вмещающих пород Мамского пегматитового поля. — Изв. АН СССР, серия геол., № 5.
- Леонтьев Г. И. 1965. Стратиграфические сопоставления деталей разрезов ритмичнослоистых осадков докембрия методом графической коннексии (на примере мамской кристаллической толщи). — В сб. «Материалы конференции молодых научных сотрудников». Ин-т земной коры СО АН СССР. Иркутск.
- Леонтьев Г. И., Завалишин М. А., Чесноков В. Н. 1967. К вопросу о применении метода графической коннексии при стратиграфических сопоставлениях ритмичнослоистых осадков мамской кристаллической толщи. — В сб. «Проблемы изучения геологии докембрия». Л., «Наука».
- Леонтьев Г. И. 1968. Статистический анализ ритмичной слоистости древних метаморфизованных толщ. — В сб. «Вопросы геологии, петрологии и металлогении метаморфических комплексов Востока СССР». Владивосток.
- Лукомский Я. И. 1961. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. М., Госстатиздат.
- Родионов Д. А. 1964. К вопросу о статистическом сравнении составов пород. — Геохимия, № 4.
- Сидоренко А. В., Лунова О. И. 1961. К вопросу о литологическом изучении метаморфических толщ. М.—Л., Изд-во АН СССР.
- Таевский В. М., Таевская Э. К. 1961. Новые данные о стратиграфии мамской кристаллической полосы. — Материалы по геологии и полезным ископаемым Иркутской области. Вып. 1 (XXVIII). Иркутск.
- Хаин В. Е. 1964. Общая геотектоника. М., «Недра».

**РАСПОЗНАВАНИЕ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ,
ПРИНАДЛЕЖАЩИХ К НЕСКОЛЬКИМ КЛАССАМ,
ПО ОДНОЙ ФУНКЦИИ**

Допустим, что в генеральной совокупности R априори различаются α классов

$$v = \{v_1, v_2, \dots, v_\alpha\},$$

где v_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) — некоторый конкретный класс из v . При этом сделаем также априорное предположение, что различие всех классов можно выразить количественной мерой таким образом, что, например, числа y_i и y_{i+2} , соответствующие классам v_i и v_{i+2} , так же как y_i и y_{i-2} , различаются больше чем y_i и y_{i+1} . Справедливость такого предположения подтверждает опыт. Если мы различаем предметы, то их различие всегда можно выразить какой-то мерой схожести, если даже физическое содержание ее остается пока неизвестным.

Исходя из общих соображений, мы попытались разработать эмпирический метод построения функции для одновременного распознавания нескольких классов. Предположим, что из генеральной совокупности R сделана выборка в виде матрицы наблюдений X_0 , имеющей следующую структуру:

$$X_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 & 1 & x_{11} & \dots & x_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^0 & 1 & x_{1, n_1} & \dots & x_{p, n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_2^0 & 1 & x_{1, n_1+1} & \dots & x_{p, n_1+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_2^0 & 1 & x_{1, n_1+n_2} & \dots & x_{p, n_1+n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_3^0 & 1 & x_{1, n_1+n_2+1} & \dots & x_{p, n_1+n_2+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_\alpha^0 & 1 & x_{1, n_1+\dots+n_\alpha} & \dots & x_{p, n_1+\dots+n_\alpha} \end{pmatrix}$$

Обозначим первый столбец матрицы X_0 через Y^0 , а через X остальную часть матрицы X_0 .

Y^0 — это вектор зависимых наблюдений; p — размерность вектора независимых наблюдений величины X_j ($j = 1, 2, \dots, N$); X_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) — подматрицы наблюдений, соответствующие

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & \dots & \dots & x_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1, n_1} & \dots & \dots & \dots & x_{p, n_1} \\ 1 & x_{1, n_1+1} & \dots & \dots & \dots & x_{p, n_1+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1, n_1+n_2} & \dots & \dots & \dots & x_{p, n_1+n_2} \\ 1 & x_{1, n_1+n_2+1} & \dots & \dots & \dots & x_{p, n_1+n_2+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1, n_1+\dots+n_\alpha} & \dots & \dots & \dots & x_{p, n_1+\dots+n_\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_\alpha \end{pmatrix}$$

различным классам объектов v_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$). Размерность X_i равна $(p + 1) \cdot n_i$, причем $n_i > p$ и $n_1 + n_2 + \dots + n_\alpha = N$, где N — общее число наблюдений. Пусть теперь мы располагаем функцией распознавания, линейной относительно компонентов вектора наблюдений величины X_j :

$$f(y) = \theta_0 + \theta_1 x_{1,j} + \dots + \theta_p x_{p,j}, \quad (1)$$

где $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p)$ — эмпирические коэффициенты, которые определены по выборке X_0 методом наименьших квадратов

$$\theta = (X X^*)^{-1} X^* Y. \quad (2)$$

Здесь звездочкой обозначается транспонирование.

Процедура распознавания по функции (1) выглядит следующим образом. Находим значения $f(y)$ для всех X_j по (1), обозначив их вектором Y ,

$$Y = X \theta^*. \quad (3)$$

В соответствии со структурой матрицы X вектор Y будет иметь вид $Y^* = (y_1, y_2, \dots, y_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_2}, y_{n_2+1}, y_{n_2+2}, \dots, y_{n_3}, y_{n_3+1}, \dots, y_{n_\alpha}) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_\alpha)$.

Распределение значений Y , соответствующих классам v_i , т. е. компонент векторов Y_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$), обозначим через $g(y_i)$. Чтобы определить, к какому классу принадлежат новые наблюдения из R , необходимо по (1) определить значения $f(y)$, которые попадают в одно из распределений $g(y_i)$. Если последние не перекрываются, возможна безошибочная диагностика по одному наблюдению. В общем случае распределения $g(y_i)$ будут перекрываться, и распознавание будет иметь ошибку. Поэтому, чтобы увеличить точность диагностики, следует использовать более чем одно наблюдение из данного класса. Оценка необходимого количества наблюдений для распознавания с принятой доверительной вероятностью определяется следующим образом.

Обозначим $\bar{y}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} y_i$, $\bar{y}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} y_i$, ..., $\bar{y}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{i=n_{\alpha-1}+1}^{n_\alpha} y_i$ и,

соответственно, средние квадратичные отклонения для $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_\alpha$ через $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_\alpha$. Совершенно очевидно, что распознавание будет иметь смысл лишь в том случае, если между \bar{y}_i существуют статистически значимые различия. Границы между средними \bar{y}_i определим из условия равенства на этих границах доверительной вероятности β для обоих смежных средних \bar{y}_i , которые определяются по t -распределению при условии $n_i = n_{i+1}$ или $n_i > 30$ и $n_{i+1} > 30$, при этом

$$t_{\beta, i, i+1} = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1}}{\bar{S}_i + \bar{S}_{i+1}}. \quad (4)$$

По $t_{\beta, i, i+1}$ находим доверительные интервалы для \bar{y}_i и \bar{y}_{i+1} , используя соответственно величины $t_{\beta, i, i+1} \cdot \bar{S}_i$ и $t_{\beta, i, i+1} \cdot \bar{S}_{i+1}$. Тогда число наблюдений q_i , необходимых для диагностики класса v_i , из которого взяты эти наблюдения, можно рассчитать по известной формуле числа измерений для определения среднего с ошибкой ϵ при 95% доверительной вероятности, когда известна оценка дисперсии

$$q_i = \frac{1,96^2 \cdot S_i^2}{\epsilon_i^2}. \quad (5)$$

Здесь S_i^2 оценка дисперсии для y_i , а ϵ_i — ошибка определения среднего, которую мы принимаем равной половине величины двустороннего доверительного интервала для \bar{y}_i . В общем получается ряд значений для q_i . Большее из этого ряда значение может служить оценкой максимального числа наблюдений для определения классов v_i из R по функции (1).

В практической ситуации мы обычно располагаем матрицей наблюдений X , однако значения вектора зависимых наблюдений нам неизвестны. Как показали наши численные эксперименты, в такой ситуации в качестве вектора Y^0 можно взять вектор $b^0 (b_1^0, b_2^0, \dots, b_\alpha^0)$, компоненты которого представляют последовательность целых чисел, таких что $b_1^0 - b_2^0 = b_2^0 - b_3^0 = \dots = b_{\alpha-1}^0 - b_\alpha^0$, т. е. каждое b_j отличается от b_{j+1}^0 и b_{j-1}^0 на одно и то же постоянное число h . Иными словами, не располагая никакой другой информацией, кроме той, что классы v_i различаются между собой, мы предполагаем, что мера различия для двух любых смежных классов в v постоянна. Предполагаем, что каждому v_i соответствует одно из b_j^0 , но неизвестно какое именно. Поэтому при нахождении коэффициентов θ функции распознавания методом наименьших квадратов будем искать такую перестановку компонентов

вектора b^0 , чтобы она давала минимум выражения

$$\delta = \|X\theta - B^0\|.$$

Общее число таких перестановок будет очевидно равно $\alpha!$ Численное решение для не слишком больших α можно получить на ЭВМ. Перебор можно сократить, если сначала найти решение для нескольких классов, например трех, а затем экстраполировать его на все α .

В качестве иллюстрации практического применения предложенного метода ниже рассматривается пример построения функции распознавания глин различного минералогического состава по химическим анализам.

Матрица наблюдений X_0 , составленная из результатов 140 химических анализов глинистых пород, делится на три подматрицы, соответствующие трем классам ($\alpha = 3$) глин: преимущественно каолинитовые глины (53 анализа), преимущественно монтмориллонитовые глины (52 анализа) и глины, преобладающим компонентом которых являются гидрослюды (35 анализов). Все химические анализы брались из различных литературных источников, опубликованных в Советском Союзе и за рубежом.

Линейная функция распознавания строилась на основе девятимерного вектора X_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 9$), где x_1 — содержание Al_2O_3 , выраженное в весовых процентах, x_2 — SiO_2 , x_3 — TiO_2 , x_4 — Fe_2O_3 , x_5 — FeO , x_6 — CaO , x_7 — MgO , x_8 — K_2O , x_9 — Na_2O .

Для получения оптимального варианта функции решение системы уравнений, составленных по выборке X_0 , осуществлялось шесть раз при различных перестановках подматриц. Наилучший вариант решения был выбран по наиболее высокому коэффициенту множественной корреляции (табл. 1, перестановка 5). Значимость различия средних ($\bar{y}_1 = 1,207$, $\bar{y}_2 = 2,042$, $\bar{y}_3 = 2,760$), определенных по функции:

$$f(y) = 2,96 - 0,074 Al_2O_3 + 0,019 SiO_2 - 0,184 TiO_2 + 0,0012 Fe_2O_3 - 0,0354 FeO + 0,0463 CaO + 0,0684 MgO + 0,00208 K_2O + 0,028 Na_2O \quad (6)$$

оказалась довольно высокой (табл. 2). Сравнение полученных по (4) значений величины t с табличными, соответствующими уровню значимости 99,9%, показывает, что различия средних во всех случаях значимы.

По рассчитанным значениям $t_{i,\beta}$ и \bar{S}_i определялись доверительные интервалы для средних y_i и y_{i+1} . В результате сделанных вычислений были получены следующие интервалы для \bar{y}_i . Каолинитовые глины: $0,453 \leq \bar{y}_1 \leq 1,664$; гидрослюдистые глины: $1,664 \leq \bar{y}_2 \leq 2,383$ и монтмориллонитовые глины: $2,383 \leq \bar{y}_3 \leq 3,514$.

Таблица 1

Значения R и \bar{S}_i при различных перестановках подматриц

Перестановки подматриц (классов глин)	R	\bar{S}_i	Перестановки подматриц (классов глин)	R	\bar{S}_i
1 — каолинитовые	0,87	0,38	1 — гидрослюдистые	0,87	0,38
2 — монтмориллонитовые			2 — монтмориллонитовые		
3 — гидрослюдистые			3 — каолинитовые		
1 — монтмориллонитовые	0,88	0,41	1 — каолинитовые	0,88	0,40
2 — гидрослюдистые			2 — гидрослюдистые		
3 — каолинитовые			3 — монтмориллонитовые		
1 — гидрослюдистые	0,84	0,42	1 — монтмориллонитовые	0,84	0,42
2 — каолинитовые			2 — каолинитовые		
3 — монтмориллонитовые			3 — гидрослюдистые		

Чтобы решить вопрос о практической целесообразности применения функции (6) распознавания минералогических типов глин, по уравнению (5) определялось необходимое для диагностики каждого класса количество химических анализов, причем наибольшее значение ($N = 5$) было принято как рекомендуемое. Вместе с тем, следует отметить, что при использовании функции (6) для разграничения только двух классов количество анализов можно сократить. Так, например, если требуется отнести глину либо к каолинитовому, либо к монтмориллонитовому типу достаточен один химический анализ, а для отличия гидрослюдистых глин от каолинитовых необходимо три анализа.

Таблица 2

Вычисленные значения величины t для различных пар средних

	\bar{y}_1	\bar{y}_2	\bar{y}_3
\bar{y}_1	—	8,637	15,16
\bar{y}_2	8,637	—	6,431
\bar{y}_3	15,16	6,431	—

Таким образом, найденная функция вполне пригодна для решения практических задач при геологических исследованиях.

В заключение следует отметить, что предложенный метод может применяться, во-первых, при распознавании геологических объектов, во-вторых, при их классификации, в третьих, при установлении эволюционной последовательности классов, а также при стратификации и сопоставлении немых толщ (см. статью Г. И. Лентьева в данном сборнике).

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $\varphi = \varphi(x)$ — функция, описывающая изучаемое явление, о которой известно, что она принимает значения из некоторого множества F , когда ее аргумент принимает значения из множества X , априорные же сведения о параметрах и (или) форме этой функции неполны.

Через $f = f(x)$ обозначим результаты наблюдений изучаемого явления, зависящие от $\varphi(x)$ и от действия каких-то неполностью известных (случайных) факторов, которые могут меняться в пространственно-временном континууме. Ограничимся рассмотрением случаев, когда значения f принадлежат тому же множеству F , что и значения φ .

При названных условиях точное суждение о функции $\varphi(x)$ по значениям $f(x)$ невозможно, и встает задача о приближенном представлении ее в виде какой-то функции $\varphi^* = \varphi^*(x)$, по возможности наиболее близкой, в определенном смысле, к функции $\varphi = \varphi(x)$ и принимающей значения из того же множества F . Функции φ и φ^* будем называть, соответственно, аппроксимируемой и аппроксимирующей. Значения $f(x)$ являются оценками значений функции $\varphi(x)$, по которым производится аппроксимация.

Вопросам аппроксимации посвящена довольно обширная литература, однако практика требует продолжения таких исследований. В частности, как известно, широко применяется метод наименьших квадратов, но часто встает вопрос о выборе оптимального порядка строящейся при этом параболы или более сложного полинома. Распространенным методом такого выбора является оценка значимости каждого из рассматриваемых членов полинома по статистическим критериям согласия (Худсон, 1967). Однако при этом остается неуверенность в том, что совокупность каких-то других, не рассмотренных, возможных членов также является значимой. Кроме того, использование критериев согласия пока связано с известными трудностями (не всегда оправданными допущениями о типах распределения значений f относительно φ и др.). Поэтому ведется поиск иного подхода. В частности, в работе (Демидович, 1967) предлагается принимать порядок аппроксимирующей параболы наименьшим из тех, при которых среднее отклонение значений f от φ^* сравнительно резко падает по сравнению со случаями парабол меньшего порядка. При этом приходится пользоваться субъективным представлением о том, какое изменение падения указанного отклонения следует считать достаточно резким (и почему). Очевидна желательность продолжения исследований в этом направлении. Кроме того, практика поставила ряд других вопросов, в частности, о таком выборе типа функ-

ций φ^* , чтобы по ним можно было получить наибольшую информацию о типе неизвестной аппроксимируемой функции φ .

Использование критерия близости (сходства) или различия функций означает введение понятия расстояния между ними, т. е., согласно существующей терминологии, функциональное пространство, к которому принадлежат аппроксимируемая и аппроксимирующие функции, в рассматриваемых случаях является метрическим.

Предположим, что аппроксимирующая функция выбирается из некоторой совокупности $\{\varphi_i^*\}$, причем только одна функция φ_j^* из этой совокупности обладает каким-то признаком, который известен для φ . Тогда при отсутствии других сведений о функции φ аппроксимация ее функцией φ_j^* удовлетворяет принципу максимального правдоподобия. Как сказано в статье этого же автора «К теории поиска оптимальных решений» в данном сборнике, такой выбор аппроксимирующей функции наиболее информативен.

Если же никакая функция из совокупности $\{\varphi_i^*\}$ в метрическом функциональном пространстве не совпадает в точности с аппроксимируемой функцией по рассматриваемому признаку, то наиболее информативным будет выбор той функции φ_j^* , отличие которой от функции φ по этому признаку является наименьшим. В таком случае также можно говорить, что функция φ_j^* удовлетворяет принципу максимального правдоподобия. Это положение является основой для делаемых ниже выводов.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда заведомо $\varphi = \text{const}$ и известно множество $\{f_k\}_{k=1}^n$ значений исходных данных, соответствующих этому значению φ . Такой случай может быть, например, при измерениях, когда φ — измеряемая величина; а $\{f_k\}$ — совокупность результатов многократных измерений.

Пусть $n_-(\varphi)$ — сумма числа значений f_k , удовлетворяющих неравенству $f_k < \varphi$, и половины числа значений $f_k = \varphi$; $n_+(\varphi)$ — сумма числа значений f_k , удовлетворяющих неравенству $f_k > \varphi$, и половины числа значений $f_k = \varphi$ (т. е. случай $f_k = \varphi$ относится наполовину к случаям $f_k < \varphi$ и наполовину — к случаям $f_k > \varphi$; $n_-(\varphi) + n_+(\varphi) = n$).

При отсутствии сведений о преимущественном направлении отклонений значений f_k от φ (или после исключения известных отклонений) вероятности явлений $f_k < \varphi$ и $f_k > \varphi$ равны. Следовательно, для любого φ наиболее вероятно такое распределение значений f_k , при котором $n_-(\varphi) = n_+(\varphi)$. Каждая из других совокупностей $\{f_k\}$ тем менее вероятна, чем больше соответствующая ей величина $|n_-(\varphi) - n_+(\varphi)|$, характеризующая различие $n_-(\varphi)$ и $n_+(\varphi)$. Согласно принципу максимального правдоподобия, это означает, что в качестве оценки величины φ следует при-

нять такое значение φ^* , для которого величина $|n_-(\varphi^*) - n_+(\varphi^*)|$ минимальна.

Поскольку, при прочих равных условиях, математическое ожидание разности $n_-(\varphi^*) - n_+(\varphi^*)$ прямопропорционально числу n , то для сравнения значений φ^* в разных случаях удобно оперировать величиной

$$\xi = \frac{n_-(\varphi^*) - n_+(\varphi^*)}{n}. \quad (1)$$

Тогда, согласно сказанному, наилучшей оценкой для φ является значение φ^* , для которого величина $|\xi|$ минимальна.

Значение φ^* , для которого $|\xi| = 0$ (т. е. $n_-(\varphi^*) = n_+(\varphi^*)$), называется средним, в отличие от различных средних — среднего арифметического, среднего геометрического и др.

Согласно сказанному, в упоминавшейся выше статье при $n \rightarrow \infty$, оценка φ^* , основанная на принципе максимального правдоподобия, может только улучшаться. Поскольку при этом она сходится к медианному значению (f_{me}), то $f_{me} = \varphi$, и лучшей оценкой для φ является эффективная оценка медианного значения. При отсутствии сведений о форме распределения значений f , в том числе о его асимметрии, такой оценкой, как указывалось, является то значение φ^* , для которого величина $|\xi|$ минимальна. При наличии же дополнительной информации о форме распределения значений f метод максимального правдоподобия дает возможность (как показано ниже) получить оценку, статистически более близкую к медиане, т. е. имеющую, соответственно, более высокую информативность.

При симметричных законах распределения медиана, как известно, совпадает с математическим ожиданием. Несимметричные законы можно свести к симметричным с помощью соответствующих взаимно-однозначных симметризирующих функций, или операторов, которые мы будем обозначать буквой u . Так, если значения f распределяются логнормально, то по симметричному нормальному закону распределяются значения $\log f$, т. е. $u(f) = \log f$.

Если $u(f)_{me}$ — медианная величина значений f (f), то $u(f)_{me} = u(f_{me})$. Поэтому, обозначая через M оператор математического ожидания, можем написать:

$$u(f_{me}) = M[u(f)] = u(\varphi). \quad (2)$$

Эффективной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое:

$$\overline{u(f)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(f_k). \quad (3)$$

(Здесь и далее черта сверху означает вычисление среднего арифметического из значений находящейся под ней величины).

Эта оценка эффективнее срединного значения $u(f)$, т. е. при фиксированном n величина $\overline{u(f)}$ в среднем меньше отклоняется от $M[u(f)]$, чем срединное значение $u(f)$. Поэтому, подставляя в равенства (2) эффективные оценки вместо неизвестных точных величин, получаем:

$$u(f_{me}^*) = \overline{u(f)} = u(\varphi^*), \quad (4)$$

где f_{me}^* — оценка медианных значений f , φ^* — оценка значения φ . Отсюда

$$\varphi^* = f_{me}^* = u^{-1}[\overline{u(f)}], \quad (5)$$

где u^{-1} — функция, обратная функции u (такая, что $u^{-1}[u(f)] = f$). В частности, при логнормальном распределении значений f относительно φ в качестве оценки φ^* следует брать антилогарифм среднего арифметического из логарифмов f , т. е. тогда оптимальное значение φ^* есть среднее геометрическое из значений f .

Пусть $\sigma(u(f) - u(\varphi))$ и $\sigma(u(f) - u(\varphi^*))$ — средние квадратические отклонения значений $u(f)$, соответственно, от $u(\varphi)$ и от $u(\varphi^*)$.

В общем случае равенства (4) означают, что в качестве оценки для φ должно быть взято такое значение φ^* , чтобы отличие $u(\varphi^*)$ от $\overline{u(f)}$ было минимальным. Согласно известным положениям математической статистики, это удобно выразить требованием минимизации величины $\sigma[u(f) - u(\varphi^*)]$, определяющей расстояние в соответствующем метрическом пространстве.

Учитывая, что $\sigma[u(f) - u(\varphi)]$ — величина постоянная для заданной совокупности $\{f_k\}$ и не зависит от выбора значения φ^* , последнее требование можно заменить также удобным для дальнейших сравнений требованием минимизации величины

$$\zeta = \sigma^* - \sigma, \text{ или } \zeta + \sigma = \sigma^* \quad (6)$$

Здесь для краткости принято $\sigma^* = \sigma[u(f) - u(\varphi^*)]$, $\sigma = \sigma[u(f) - u(\varphi)]$.

Величину ζ (или $\zeta + \sigma$) можно назвать критерием аппроксимации первого или второго рода при определении, соответственно, по формулам (1) или (6). При сравнениях нужно пользоваться, разумеется, одной формулой (в зависимости от известности или неизвестности функции u).

Пусть теперь $f = f(x)$ — функция некоторого аргумента x (в общем случае — многомерного). При этом одному значению x сопоставляется не более одного значения $f = f(x)$, являющегося оценкой некоторой функции $\varphi = \varphi(x)$ для того же значения аргумента. Однако указываемое значение $f(x)$ может быть вычислено, в свою очередь, по многим значениям так, как это было описано выше для величины $\varphi^*(x)$.

Теперь под $\varphi^* = \varphi^*(x)$ будем понимать аппроксимирующую функцию, построение которой ведется с учетом значений $f = f(x)$ во всем заданном интервале значений x .

Соответственно представлениям функционального анализа, в приведенных выше рассуждениях можно представить φ , φ^* , f как точки в функциональном пространстве и применить критерий ζ для аппроксимации. Однако здесь этот критерий оказывается заведомо недостаточно информативным для многих целей: с его помощью из некоторого класса функций выделяются без различия все функции, близкие к срединным (медианным) для заданного множества $\{f\}$. Между тем, при одной и той же совокупности значений $f(x)$ такие функции могут быть весьма разнообразны. В частности, любое заданное на плоскости множество точек $[x, f, (x)]$ можно разделить прямой, составляющей произвольный угол с осью OX (или другими линиями, сколь угодно отличающимися от прямых) на равные по числу точек совокупности.

На выбор аппроксимирующей функции могут быть наложены определенные условия. Например, может быть известен класс, к которому принадлежит аппроксимируемая функция $\varphi(x)$, и тогда $\varphi^*(x)$ выбирается из того же класса. Возможно также введение требований достаточной простоты вычислений и др.

А л г о р и т м а п п р о к с и м а ц и и п е р в о г о р а н г а. Так назовем алгоритм аппроксимации, когда задан тип (форма) функции $\varphi^*(x)$ и неизвестны лишь значения ее параметров.

Пусть для конечной совокупности точек $\{x_i\}_{i=1}^n$ ($x_i > x_{i-1}$) известны значения $f_i = f(x_i)$.

Для аппроксимации одного значения φ выше использовалось соотношение чисел n_+ и n_- для всей совокупности $\{f_i\}$ в целом. Теперь, когда $f = f(x)$, естественно рассмотреть возможность использования смены явлений $f - \varphi > 0$ и $f - \varphi < 0$ при переходе от одной точки к другой в области возможных значений x . Этот переход может осуществляться каким-либо наперед заданным образом, в частности в одномерном случае — вдоль оси OX , в одну сторону. Рассмотрением такого случая мы и ограничимся, поскольку он обобщается очевидным образом и на многомерный вариант.

Пусть $n_c(\varphi)$ — число случаев, когда разность $f(x_i) - \varphi(x_i)$ имеет тот же знак, что и разность $f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})$ (т. е. $f(x_i)$ и $f(x_{i-1})$ находятся по одну сторону от функции $\varphi(x)$); $n_p(\varphi)$ — число случаев, когда указанные разности имеют разные знаки (т. е. $f(x_i)$ и $f(x_{i-1})$ располагаются по разные стороны от функции $\varphi(x)$). Аналогично определим $n_c(\varphi^*)$ и $n_p(\varphi^*)$ для аппроксимирующей функции.

Совпадение каких-либо функций в некоторой точке можно рассматривать как их пересечение в этой точке, т. е. каждый случай $f(x_i) = \varphi(x_i)$ увеличивает на единицу величину $n_p(\varphi)$ независимо от знака разности $f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})$. Если же $f(x_i) \neq \varphi(x_i)$, но $f(x_{i-1}) = \varphi(x_{i-1})$, то увеличивается $n_c(\varphi)$, независимо от знака

разности $f(x_i) - \varphi(x_i)$ (так как после пересечения функций f и φ в точке x_{i-1} такое значение $f(x_i)$ обязательно находится по ту же сторону от $\varphi(x)$, на которую перешла функция $f(x)$ при указанном пересечении).

Функция $\varphi^*(x)$ строится по совокупности значений $\{f(x_i)\}$ и затем заменяет ее для поставленных целей. Для минимизации потерь информации при такой замене параметры функции $\varphi^*(x)$ должны быть подобраны так, чтобы отклонение значений $f(x)$ от $\varphi^*(x)$ было минимальным в определенном смысле.

При прочих равных условиях отклонение функции $\varphi^*(x)$ от значений $f_i = f(x_i)$ тем больше, чем более многочисленные группы точек (x_i, f_i) находятся по какую-либо сторону от функции $\varphi^*(x)$. Уклонение уменьшается, если функция $\varphi^*(x)$ пересекает такие группы, проходя между их точками (или через точки). Следовательно, аналогично сказанному выше о величине ζ , в качестве меры уклонения можно принять разность $n_c(\varphi^*) - n_p(\varphi^*)$, деленную на число пар, по которым проводится подсчет n_c и n_p :

$$z(\varphi^*) = \frac{n_c(\varphi^*) - n_p(\varphi^*)}{n - 1}. \quad (7)$$

Для случаев, когда известна симметризирующая функция u , введем величину $\sigma = \sigma[u(f) - u(\varphi)]$ — среднее квадратическое отклонение величин $u[f(x)]$ от соответствующих им значений $u[\varphi(x)]$ и аналогично σ^* — среднее квадратическое отклонение величин $u[f(x)]$ от соответствующих им значений $u[\varphi^*(x)]$.

В случае неравнозначных значений $u(f)$ будем полагать, что при вычислении σ и σ^* они сведены к равнозначным. Если, например, $u[f(x)]$ есть среднее арифметическое из K_f независимых исходных значений, то, согласно теории погрешностей, при вычислениях σ и σ^* величине отклонения $u[f(x)]$ от $u[\varphi(x)]$ или $u[\varphi^*(x)]$ следует придать статистический вес K_f .

Величина σ^* соответствует распространенному критерию среднеквадратического приближения. Симметризирующая функция введена нами в дополнение к обычным положениям из соображений, аналогичных приведенным в предыдущем пункте: при несимметричном распределении одинаковые отклонения значений f в разные стороны от φ неравноценны.

Таким образом, величина σ^* может использоваться как мера уклонения функции $\varphi^*(x)$ от значений f . Для удобства дальнейших теоретических выкладок введем также величину

$$z[u(\varphi^*)] = \sigma^* - \sigma, \quad (8)$$

минимизация которой влечет минимизацию величины σ^* , и наоборот, поскольку величина σ не зависит от φ^* и постоянна для заданной совокупности $\{f_i\}$. Выражение (8) удобно для общего рассмотрения мер уклонения функции φ^* от значений f : оно принимает отрицательные и положительные значения аналогично выражению (7).

Подобно величине ζ , параметр z , определяемый формулами (7) или (8), будем называть критерием аппроксимации соответственно первого или второго рода. При любом из этих определений для аппроксимации параметры функции $\varphi^*(x)$ следует подбирать таким образом, чтобы величина z была минимальной. Это минимальное значение z будем обозначать z_m , подразумевая, что в случаях сравнений разных аппроксимирующих функций оно определяется одной формулой.

Заметим, что параметр аппроксимации второго рода может быть применен как при конечной, так и при бесконечной совокупности значений f , в частности, когда $f(x)$ — некоторая непрерывная функция (тогда σ и σ^* определяются известными операторами с интегрированием). Параметр аппроксимации первого рода также может быть изменен для применения в случаях бесконечного числа точек f , но это требует дополнительных рассуждений, и мы сейчас не будем останавливаться на таком усложнении.

Минимизация величины z влечет минимизацию величины ζ . В частности, это непосредственно следует, в соответствующем случае, из теории метода наименьших квадратов. Минимизация же величины ζ не обязательно сопровождается минимизацией величины z . Это отражает более высокую информативность последнего критерия.

Аналогично сравнению формул (1) и (6), можно показать также, что критерий аппроксимации, определяемый формулой (8), информативнее определяемого формулой (7).

А л г о р и т м а п п р о к с и м а ц и и в т о р о г о р а н г а. Так назовем алгоритм аппроксимации, когда требуется найти не только параметры аппроксимирующей функции $\varphi^*(x)$, но и ее форму при задании лишь класса $\{\varphi_{(i)}^*\}$, к которому принадлежит эта функция. Подразумевается, что форма выбранной функции φ^* должна быть по возможности наиболее близкой, в определенном смысле, к форме аппроксимируемой функции f .

Пусть класс $\{\varphi_{(i)}^*\}$ состоит из функций, объединенных некоторым признаком, но различающихся по гладкости. При этом будем полагать, что гладкость увеличивается с ростом i . Например, функция $\varphi_{(1)}^*(x)$ может быть результатом сглаживания совокупности значений $f(x)$ усреднением по скользящему окну определенных размеров, функция $\varphi_{(2)}^*(x)$ — результатом усреднения значений $\varphi_{(1)}^*(x)$ по такому же окну (или, что то же самое, — результатом двукратного сглаживания значений $f(x)$). Вообще под $\varphi_{(i)}^*(x)$ можно понимать результат i -го сглаживания, причем $\varphi_{(0)}^*(x) = f(x)$.

В одномерном случае использования метода наименьших квадратов примем $\varphi_{(i)}^*(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{(n-i)} a_j x^j$ — парабола (простой полином) порядка $(n-i)$. При $i=n$ она становится предельно гладкой, превращаясь в прямую $\varphi_{(n)}^*(x) = a_0$, параллельную оси OX .

Согласно алгоритму аппроксимации первого ранга, в случае выбора любой из функций $\varphi_{(i)}^*(x)$ ее параметры должны быть подобраны так, чтобы соответствующее ей значение $z(\varphi_{(i)}^*)$ было минимальным из возможных. Обозначим его z_{mi} . Тогда можно ограничиться выбором аппроксимирующей функции из класса $\{\varphi_{(i)}^*(x)\}$, где у каждой функции параметры уже подобраны так, что соответствующая ей величина $z(\varphi_{(i)}^*)$ равна z_{mi} .

Рассмотрим вначале случай, когда значения $f(x)$ известны в отдельных точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и взаимно независимы (или же сведения о их зависимости отсутствуют). Тогда положение значений $f(x)$ относительно функции $\varphi(x)$ (по одну или другую сторону от нее) является для исследователя чисто случайным, т. е. значение $f(x_i)$ априори равновероятно может оказаться по любую сторону от $\varphi(x_i)$, независимо от знака разности $f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})$. Следовательно, в этом случае разность $n_c(\varphi) - n_p(\varphi)$ принимает нулевое значение с большей вероятностью, чем любое другое из возможных, т. е. априори $z(\varphi) = 0$. Тогда, согласно принципу максимального правдоподобия, в качестве оптимальной для аппроксимации следует выбрать функцию $\varphi_{(i)}^*(x)$, для которой отличие $z(\varphi^*)$ от нуля минимально, по сравнению с другими функциями заданного класса. Но, как было сказано, рассматриваются только величины $z(\varphi^*) = z_m(\varphi^*)$, т. е. оптимальная аппроксимирующая функция $\varphi_{(i)}^*$ имеет минимальную величину:

$$|z_{mi}| = \frac{|n_c(\varphi_i^*) - n_p(\varphi_i^*)|}{n - 1}. \quad (9)$$

Заметим, что такой критерий выбора аппроксимирующей функции согласуется с интуитивными представлениями. Действительно, проведя какую-либо кривую «от руки» по экспериментальным точкам, мы стремимся приблизить ее к этим точкам, т. е. минимизируем $z(\varphi^*)$. Но среди всех возможных кривых мы выбираем не наиболее сложную, которая прошла бы через все точки (т. е. имеющую большое по абсолютной величине отрицательное значение z_m), а более гладкую, учитывая, что локальные отклонения отдельных точек, вероятно, случайны, вызваны ошибками и флуктуациями. В то же время проводимая кривая не должна быть слишком гладкой (с большим положительным значением z_m): мы изгибаем ее к достаточно большим группам точек. Таким образом, интуитивно накладываются ограничения на абсолютную величину z_m . Теперь неопределенные субъективные представления заменяются более строгим количественным критерием.

На основании предварительных исследований (например, корреляционного анализа) могут быть получены сведения о частной корреляции между значениями $f(x_i)$ и $f(x_{i-1})$ — не включающей зависимость обеих этих величин от $\varphi(x)$, или об ожидаемой корреляции знаков разностей $f(x_i) - \varphi(x_i)$ и $f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})$. Тогда в качестве оптимального значения разности $n_c(\varphi_i^*) - n_p(\varphi_i^*)$

следует выбрать соответствующее значение, возможно, отличное от нуля, в частности, положительная автокорреляция повышает число n_c (φ). Мы не будем останавливаться на этом усложнении, полагая далее соблюдающимися те условия, при которых оптимальной является разность $n_c(\varphi_i^*) - n_p(\varphi_i^*) = 0$.

При необходимости последнему условию можно удовлетворить, выбирая в совокупность $\{f_i\}$ только точки, удаленные друг от друга на расстояние не меньше радиуса автокорреляции, или применив специальные преобразования. Предположим, например, что следует аппроксимировать статистическое распределение результатов измерения каких-то величин (для определенности обозначим их через C , как принято обозначать концентрации химических элементов в геохимических пробах). При измерениях принято приписывать каждому результату значение выбираемой некоторым образом середины интервала дискретности. Так, при равномерной шкале записей выражение $C = 3,5\%$ означает лишь принадлежность величины C к интервалу значений от 3,45 до 3,55%, но не отражает действительного положения ее в этом интервале.

Пусть C_i — правая граница i -го интервала дискретности, $N(C \leq C_i)$ — число значений C , не превышающих C_i , $N(C_i < C \leq C_{i+1})$ — число значений C , удовлетворяющих указанным в скобках неравенствам. Тогда совокупность значений $C \leq C_{i+1}$ включает совокупность значений $C \leq C_i$, т. е. величины $N(C \leq C_{i+1})$ и $N(C \leq C_i)$ взаимно коррелированы. Величины же $N(C_{i-1} < C \leq C_i)$ и $N(C_i < C \leq C_{i+1})$ приближенно можно считать взаимно независимыми (на них наложено лишь ограничение общей суммы величин C). Поделим все значения N на n и полученные частные (являющиеся оценками вероятностей) обозначим буквой v с соответствующим аргументом, т. е. $v(C_{i-1} < C \leq C_i) = 1/nN(C_{i-1} < C \leq C_i)$.

Пусть $P^*(C \leq C_i)$ — функция, аппроксимирующая интегральную кривую изучаемого распределения; $P^*(C_{i-1} < C \leq C_i) = P^*(C \leq C_i) - P^*(C \leq C_{i-1})$; $n_c(P_i^*)$ и $n_p(P_i^*)$ — числа случаев, когда разности $v(C_{i-1} < C \leq C_i) - P^*(C_{i-1} < C \leq C_i)$ и $v(C_i < C \leq C_{i+1}) - P^*(C_i < C \leq C_{i+1})$ имеют, соответственно, совпадающие или разные знаки. Подбирая функцию $P^*(C \leq C_i)$ так, чтобы определенные указанным образом величины n_c и n_p удовлетворяли описанному выше алгоритму, получим то, что требовалось найти.

Заметим, что распространенная аппроксимация дифференциальных кривых распределения непосредственно по частотам попаданий значений изучаемых величин в определенные интервалы суммирования, построение гистограмм и так называемых полигонов приводит неизбежно к получению оценок, усредненных по соответствующим интервалам. При этом возможность уменьшения ширины интервалов суммирования ограничена по соображениям точности. Получение же дифференциальной кривой распределения

дифференцированием функции P^* ($C \leq C_i$), найденной указанным образом, освобождает от таких затруднений.

Предположим, что известны функция u и величина σ . Такое положение может быть, например, когда f — результаты измерений, а σ — оценка средней квадратической погрешности или природных флуктуаций значений u (f). Тогда критерий аппроксимации можно определить одинаково при взаимно зависимых и независимых величинах u [$f(x)$] — $u[\varphi(x)]$.

Действительно, заданная величина σ в любом из этих случаев — наиболее приемлемое среднеквадратическое отклонение значений u [$f(x)$] от $u[\varphi(x)]$ при всех x . Следовательно, на основании принципа максимального правдоподобия, в качестве оптимальной аппроксимирующей функции должна быть выбрана такая, у которой величина $\sigma^* = \sigma_i^*$ наиболее близка к σ . Или, что то же самое, в реальных условиях в качестве оптимальной для аппроксимации должна выбираться функция с минимальной величиной:

$$|z_{mi}| = |\sigma_i^* - \sigma|. \quad (10)$$

Величина z_{mi} минимальна при $i = 0$, поскольку $\varphi_{(0)}^*(x)$ проходит через все значения f , то $n_c = 0$, $n_p = n - 1$, $\sigma^* = 0$, т. е., согласно формулам (7) и (8), при критерии аппроксимации первого и второго рода имеем, соответственно, $z_{m0} = -1$ и $z_{m0} = -\sigma$. С увеличением i величина z_{mi} монотонно растет, переходя через нуль. Величина $|z_{mi}|$ при этом проходит единственный минимум, что позволяет использовать известные экономные методы поиска экстремума. В простейшем случае производится перебор функций φ_i^* , начиная от заведомо малых (или больших) значений i в сторону их увеличения (соответственно уменьшения) до перехода z_{mi} через нуль.

При использовании критерия аппроксимации второго рода вместо величин σ и σ^* можно использовать любые другие, однозначно связанные с ними. В частности, бывает удобной относительно просто вычисляющаяся оценка среднего абсолютного отклонения

$$|\bar{\Delta}| = |\overline{|\Delta(u)|} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u[f(x_i)] - u[\varphi(x_i)]| \text{ и, соответ-$$

$$\text{венно, } |\bar{\Delta}|^* = |\overline{|\Delta(u)|}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u[f(x_i)] - u[\varphi^*(x_i)]|. \text{ При нор-}$$

мальном распределении значений u , согласно известным соотношениям статистических моментов, $|\bar{\Delta}| = \sqrt{2/\pi} \cdot \sigma \approx 0,8\sigma$.

Пр и м е р. В таблице указаны координаты x_i точек отбора геохимических проб и концентрации C_i свинца в них. (По техническим причинам расстояния указаны в условных единицах 0,43 усл. ед. = 10 м, а концентрации — в десяти тысячных долях процента; далее указание единиц измерения для краткости опускается).

Т а б л и ц а
Выбор аппроксимирующей параболы *

x_i (усл. ед.)	C_i (10^{-4} %)	$\lg C_i$	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$y_3(x_i)$	$y_4(x_i)$
0,43	150	2,176	2,534	2,082	2,127	2,178
0,86	250	2,398	2,549	2,549	2,504	2,385
1,29	600	2,778	2,564	2,836	2,791	2,807
1,72	1200	3,079	2,579	2,941	2,941	3,043
2,15	800	2,903	2,594	2,866	2,911	2,927
2,58	350	2,544	2,609	2,609	2,654	2,535
3,0	150	2,176	2,623	2,172	2,126	2,177
$ \bar{\Delta} , \bar{\Delta} ^*$		0,04960	0,29221	0,07830	0,06757	0,01647

$$y_1(x) = 2,52 + 0,0348x;$$

$$y_2(x) = 1,434 + 1,724x - 0,492x^2;$$

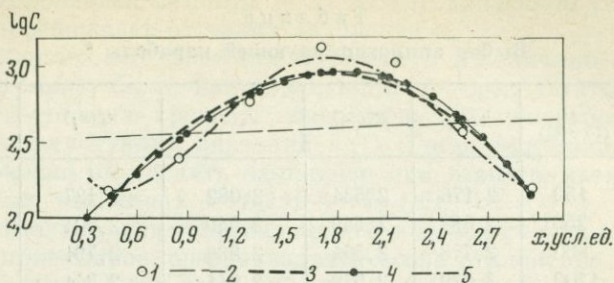
$$y_3(x) = 1,70 + 1,003x - 0,00063x^2 - 0,0956x^3;$$

$$y_4(x) = 2,827 - 3,149x + 4,667x^2 - 2,112x^3 + 0,294x^4.$$

* Вычисления произведены Л. С. Виль.

Специальными исследованиями установлено, что ошибки измерения концентраций примененным методом спектрального анализа распределяются приближенно логарифмически нормально. Согласно результатам контрольного отбора проб, средняя абсолютная ошибка логарифмов концентрации $|\bar{\Delta}| = 0,04960$.

По геоморфологическим условиям, рассматриваемый ореол относится к типу, описанному в работе Р. И. Дубова (1964). Графики логарифмов концентраций в ореолах этого типа имеют вид, близкий к параболам. Поэтому аппроксимирующая кривая $y = \lg C^*$ ищется для логарифмов концентраций в классе парабол. В связи с заданием класса и известностью величины $|\bar{\Delta}|$, следует применить алгоритм аппроксимации второго ранга с критерием второго рода. Для нахождения возможных аппроксимирующих кривых применен метод наименьших квадратов, обеспечивающий минимизацию величины z . Под таблицей записаны найденные параболы от первого до четвертого порядков. В столбцах 4—7 приведены соответствующие этим параболам значения $y = \lg C^*$ в точках отбора проб, внизу указаны вычисленные по этим значениям величины $|\bar{\Delta}|^*$. Как видим, ближайшее к $|\bar{\Delta}|$ значение $|\bar{\Delta}|^*$ (равное 0,06757) найдено для параболы третьего порядка (y_3). Это означает, что она имеет наименьшее значение $|z_m|$ и оптимальна для аппроксимации. Вычисления велись в порядке увеличения сложности, т. е. начиная с параболы первого порядка, и



Р и с. 1. Аппроксимация параболой распределения концентраций свинца по профилю, пересекающему остаточный геохимический ореол

1 — точки, полученные по экспериментальным данным $\lg C_i$; 2 — 5 — аппроксимирующие параболы порядка 1—4

были прекращены после оценки $|\bar{\Delta}|^*$ для параболы четвертого порядка: если для парабол y_1, y_2, y_3 , оказывается $|\bar{\Delta}|^* > |\bar{\Delta}|$, то для y_4 получаем $|\bar{\Delta}|^* < |\bar{\Delta}|$, т. е. при переходе от y_3 к y_4 величина $z_{mi} = |\bar{\Delta}|_i^* - |\bar{\Delta}|$ меняет знак, а $|z_{mi}|$ переходит через минимум. По величинам y_3 находим концентрации: $C^*(x) = 10^{y_3(x)}$. Полученные кривые y_i показаны на рис. 1.

Применение критерия аппроксимации первого рода здесь явно менее информативно, давая сравнительно большую неоднозначность решения. Действительно, кривая y_3 в четырех случаях проходит между соседними точками $(x, C(x))$, отображающими фактические данные (первой и второй, третьей и четвертой, пятой и шестой, шестой и седьмой, если считать их слева направо); в двух случаях соседние точки $(x, C(x))$ находятся по одну сторону от нее (вторая и третья, четвертая и пятая), т. е. $n_p = 4, n_c = 2$. Формула (9) дает здесь $|z_{mi}| = 1/3$. Но такое же значение $|z_{mi}|$ имеют кривые y_1 (для нее $n_p = 2, n_c = 4$) и y_2 ($n_p = 4, n_c = 2$). Только кривая y_4 имеет существенно большую величину $|z_{mi}|$ (для нее $n_p = 6, n_c = 0, |z_{mi}| = 1$).

Алгоритм аппроксимации третьего ранга. Так назовем алгоритм аппроксимации, когда необходимо найти не только параметры и форму аппроксимирующей функции из некоторого класса, но требуется выбрать и сам класс.

Предположим вначале, что аппроксимирующую функцию φ^* можно выбрать из двух классов: $X_1 = \{\varphi_{1(i)}^*\}$ и $X_2 = \{\varphi_{2(i)}^*\}$. Причем с увеличением i гладкость функций в каждом из этих классов в отдельности возрастает, будучи определенной одинаковым образом для обоих классов. В частности, эти классы могут содержать функции, получаемые усреднением значений x по скользящему окну, отличаясь по форме окна, при этом в обоих классах i — номер (кратность) усреднения. Если и $\varphi_{1(i)}^*$, и $\varphi_{2(i)}^*$ — обобщенные полиномы разного вида, то с увеличением i уменьшаются порядок и число параметров полиномов.

Пусть функции $\varphi_{1(i)}^*$ и $\varphi_{2(i)}^*$ имеют одинаковую гладкость, больше гладкости функции φ . Предположим, что $\varphi_{1(i)}^*$ отличается от φ меньше, чем $\varphi_{2(i)}^*$. Тогда величина z_m ($\varphi_{1(i)}^*$) ближе к оптимальному значению 0, чем величина z_m ($\varphi_{2(i)}^*$). В частном случае, если $\varphi_{1(i)}^* = \varphi$ (т. е. если функция φ принадлежит классу X_1), то $z_m(\varphi_{1(i)}^*) = 0$.

Как указывалось, чем меньше гладкость функции φ^* , тем меньше $z_m(\varphi^*)$. Поэтому при достаточном уменьшении гладкости среди функций класса X_2 обязательно найдется такая функция $\varphi_{2(j)}^*$, для которой $z_m(\varphi_{2(j)}^*) \leq 0$. Но переход величины z_{mj} через ноль здесь произойдет только при меньшем номере j , чем в классе X_1 или, что то же самое, при меньшей гладкости. Если же изъять из классов X_1 и X_2 те функции с одинаковой гладкостью, превышающей гладкость функции φ , с которых мы начали последнее рассуждение, то свойства выбираемой для аппроксимации функции не изменятся. Следовательно, не ограничиваясь предположением, сделанным вначале для удобства доказательства, можно сформулировать общее заключение.

В качестве класса, содержащего функцию, более близкую к функции φ , следует принять класс, для которого переход величины z_{mi} через ноль (или достижение минимума величиной $|z_{mi}|$) происходит при большей гладкости.

Согласно алгоритму аппроксимации второго ранга, функция φ^* из указанного класса, у которой величина $|z_m|$ минимальна по сравнению с другими функциями этого же класса, и должна быть выбрана в качестве оптимальной для аппроксимации.

Закономерности, на которых основан алгоритм аппроксимации третьего ранга, можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть $\varphi(x) = a \cdot \exp(-\lambda x)$, где a и λ — некоторые константы. Предположим, что случайные отклонения наблюдаемых значений $f(x)$ от $\varphi(x)$ в среднем невелики и делается попытка аппроксимировать экспоненциальную функцию φ функцией φ^* , составленной из $n - 1 - i$ отрезков прямых вида $y_l = A_l + B_l x$ ($l = 1, 2, \dots, n - 1 - i$), где A_l, B_l — некоторые константы, которые могут различаться для разных l . Тогда, очевидно, что при двух параметрах аппроксимируемой функции число параметров аппроксимирующей функции может быть большим. Оно тем больше, чем меньше отличие f от φ , т. е. чем меньше скрыт характер функции φ случайными отклонениями от нее значений f . Аналогичное очевидно и для случая аппроксимации прямой отрезками экспонент. Если же экспоненту аппроксимировать экспонентами, а прямую — прямыми, то вероятное число параметров в φ^* будет тем меньше (снижаясь до 2), чем меньше отличие значений f от φ .

Пусть в точках ξ некоторого пространства Ξ задана функция $\Phi = \Phi(\xi)$, на которую действует оператор F_0 , отображающий

множество значений $\{\Phi(\xi)\}$ в пространство значений функции $\varphi(x)$, где x — точки некоторого пространства X :

$$\varphi(x) = F_0\{\Phi(\xi)\}. \quad (11)$$

Например, при изучении процессов образования гипергенных геохимических ореолов можно представить: Ξ — пространство, занимаемое коренными горными породами; $\Phi(\xi)$ — концентрация рудообразующего элемента в точке ξ этих пород; F_0 — оператор, отображающий гипергенные процессы, $\varphi(x)$ — концентрации рудообразующего элемента в гипергенном ореоле рудного тела. Если Φ и F_0 заданы, а требуется найти φ , то решение уравнения (11) является прямой задачей. Если же известны оценки функции $\varphi(x)$, т. е. значения $\varphi^*(x)$, а требуется найти оценки для F_0 и $\Phi(\xi)$, то такая задача называется обратной. Обозначая через F оценку для F_0 и через $\Phi^* = \Phi^*(\xi)$ — оценку для $\Phi(\xi)$, вместо равенства (11) можно написать выражение, которым фактически приходится пользоваться:

$$\varphi^*(x) = F\{\Phi^*(\xi)\}. \quad (12)$$

Как известно, существенным вариациям Φ и F_0 при довольно распространенных условиях могут соответствовать сколь угодно малые вариации функции φ . Тогда обратная задача называется некорректно поставленной (по Адамару). При наличии существенных шумов в таких случаях одним и тем же значениям исходных данных (f) могут соответствовать разные F_0 и Φ , т. е. тогда решение обратной задачи в принципе неоднозначно. Полное устранение этой неоднозначности без дополнительных исходных данных невозможно. Решение остается неоднозначным в отношении Φ даже в случае, когда оператор F_0 известен (именно этим случаем обычно ограничиваются в настоящее время, когда говорят о решении некорректно поставленной обратной задачи).

Кроме неустойчивой неоднозначности, выражающей неизбежную ошибку решения обратной задачи в соответствии со свойствами функций φ , Φ , оператора F_0 и шумами, имеется еще устраняемое затруднение, выразившееся ранее, до разработки специальных приемов, в неустойчивости решения. А. Н. Тихоновым (1963, 1967 и др.) был найден алгоритм решения обратной задачи, выражающейся интегральным уравнением Фредгольма первого рода с известным ядром (в наших обозначениях это означает обусловленность F_0). Им показано, что для нахождения удовлетворительного, устойчивого, решения обратной задачи на искомую функцию должно быть наложено ограничение гладкости снизу. Это достигается с помощью специального приема регуляризации.

Рядом исследователей (Иванов, 1962; Лаврентьев, 1962, 1965) в решение обратной задачи внесен существенный вклад. Все же имеется необходимость в продолжении таких исследований. К настоящему времени не преодолены полностью затруднения в выборе оптимального параметра регуляризации в разнообразных

ситуациях. Очевидна также желательность получения объективных сведений об операторе F_0 непосредственно из исходных данных $\{f\}$ и уточнения представлений о типе Φ (при упомянутом методе регуляризации с помощью вариационного анализа находятся лишь значения функции Φ).

Изложенные выше положения об аппроксимации позволяют сделать некоторый шаг в указанном направлении. Они дают возможность решать обратную задачу, поставленную корректно или некорректно, по одному принципу при довольно широком круге классов $\{F_i\}$ и $\{\Phi_j^*\}$ операторов и функций конкретного вида. Заметим, что практически всегда такие классы известны или могут быть с каким-то приближением заменены известными классами, применяемыми для аппроксимации (например, классом парабол, ортогональных многочленов и т. п.). Например, формула (12) определяет функцию φ^* через F и Φ^* , следовательно, выбирая F из некоторого класса $\{F_i\}$ и Φ^* — из класса $\{\Phi_j^*\}$ можно найти всевозможные комбинации (F_i, Φ_j^*) , приемлемость которых в качестве решений обратной задачи определяется тем, насколько соответствующие им функции φ^* (если они существуют) удовлетворяют приведенным выше алгоритмам аппроксимации при заданных исходных данных $\{f\}$.

Поиск комбинации (F_i, Φ_j^*) , соответствующей определенной функции φ^* , можно производить как до, так и после выбора оптимальной аппроксимирующей функции. При этом равенство между $\varphi^*(x)$ и $F\{\Phi^*(\xi)\}$ может быть неточным. Выбираемые комбинации (F_i, Φ_j^*) можно рассматривать как аппроксимирующие комбинацию (F_0, Φ) , а оптимальную функцию φ^* — как исходные данные для аппроксимации. Это позволяет применить алгоритмы аппроксимации для выбора оптимальной комбинации (F_i, Φ_j^*) . Заметим, в частности, что если равенство $\varphi^*(x) = F_i\{\Phi_j^*(\xi)\}$ справедливо более чем для одного значения i , то, согласно алгоритму аппроксимации третьего ранга, следует выбрать, при прочих равных условиях, ту комбинацию (F_i, Φ_j^*) , которая содержит наименьшее число параметров. Это не устраняет принципиальной неоднозначности решения обратной задачи, но в среднем минимизирует ошибки. Найденные значения $\Phi^*(\xi)$ можно вновь рассматривать как исходные и искать предполагаемые функцию и оператор, композиция которых дала эти значения, и т. д. Такой переход можно назвать увеличением глубины решения обратной задачи.

При практическом применении описанного общего решения обратной задачи могут быть полезны следующие положения. При заведомо определенном операторе F вся информация, заключенная в значениях φ^* , используется для выбора функции Φ^* . Тогда информативность функции Φ^* максимальна и равна информативности функции φ^* (предполагается, что не используется никакая другая информация). В остальных случаях информатив-

ность функции Φ^* может быть меньше. Следовательно, вообще информативность функции Φ^* не выше информативности функции φ^* , будучи меньше ее на величину, требующуюся для построения F . Чем менее гладка функция, тем, при прочих равных условиях, больше информации требуется для ее построения с заданной точностью. Поэтому сказанное означает, что гладкость функции Φ^* при оптимальном ее подборе равна гладкости функции φ^* , если информация, заключенная в последней, полностью расходуется на построение Φ^* . В противном случае гладкость функции Φ^* увеличивается соответственно снижению ее информативности.

В частности, если функции φ^* и Φ^* являются заведомо параболой, то при заданном операторе F парабола Φ^* должна иметь тот же порядок, какой имеет φ^* . Поскольку парабола с L независимыми параметрами (имеющая порядок $L - 1$) полностью определяется L точками, то это значит, что по функции φ^* и оператору F мы должны в таком случае задать параболу Φ^* таким приемом, который эквивалентен требованию прохождения ее также через L определенных точек. Подчеркнем, что по функции φ^* с L независимыми параметрами, соответственно ее информативности, нельзя найти однозначно более чем L независимых параметров функции Φ^* . Поэтому при выборе Φ^* с большим числом параметров не хватает тех связей, которые необходимо на них наложить для однозначного вычисления.

В результате функция Φ^* , имеющая больше L параметров, удовлетворяет L наложенным связям при разных значениях параметров. Или, что то же самое, в зависимости от схемы вычислений (в том числе очередности операций) при одних и тех же исходных данных найденные значения Φ^* могут оказаться различными. Это и есть неустойчивость решения. В связи с появлением при этом случайных отклонений (в зависимости от выбора значений параметров), согласно алгоритмам аппроксимации, полученное решение Φ^* заведомо хуже для аппроксимации Φ , чем имеющее L параметров.

Устранение неустойчивости решения потребовало упоминавшегося ограничения гладкости Φ^* снизу. Однако согласно алгоритмам аппроксимации, чрезмерная гладкость также ухудшает решение. Выбор же числа параметров в Φ^* (и F) соответственно числу параметров в φ^* является единообразным приемом нахождения оптимальной гладкости. Заметим, что этот прием можно использовать в совокупности с поиском значений Φ^* методами вариационного исчисления, что, вероятно, позволит сочетать достоинства описанного способа и более ранних упоминавшихся выше разработок.

В ряде случаев вычисление координат точек, через которые должна пройти функция Φ^* , производится путем решения системы линейных уравнений с подстановкой в них значений φ^* . Сказанное выше определяет число уравнений в таких системах. Пре-

вышение этого числа без увеличения числа искомым значений Φ^* (т. е. числа точек, задающих Φ^*) означает включение в систему взаимно зависимых уравнений. Одновременное же увеличение числа неизвестных приводит, согласно изложенному выше, к неустойчивости решения, поскольку означает завышение числа параметров в Φ^* (или занижение гладкости).

П р и м е р. По геологическим данным, показанным на рис. 1, график отображает геохимический ореол такого типа, который при решении прямой задачи описывается формулой (Дубов, 1964):

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_D^2}\right) \cdot d\xi, \quad (13)$$

где $C(\xi)$ — концентрации в исходном поле (до разрушения и диффузионного рассеяния рудного материала); $\sigma_D = \sqrt{2Dt}$ — параметр диффузионного рассеяния, D — коэффициент диффузии, t — время формирования ореола.

В действительности наблюдаются не значения $C(x)$, а показанные на рис. 1 результаты наложения на них шумов. Найдем по этим результатам оценки функции $C(\xi)$ и параметра σ_D , от которого зависит ядро уравнения (13). Соответственно формуле (12), вместо выражения (13) для решения обратной задачи следует записать:

$$C^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D^*} \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2(\sigma_D^*)^2}\right) \cdot d\xi, \quad (14)$$

где $C^*(x) = 10^{u_x}$ — функция, аппроксимирующая распределение концентраций в ореоле согласно данным, приведенным в таблице; σ_D^* — искомая оценка параметра оператора диффузионного рассеяния [форма этого оператора принята известной, соответственно выражению (13)]; $C^*(\xi)$ — искомая оценка распределения концентраций в коренных породах.

Пользуясь найденными правилами и известным приближенным представлением интеграла в виде конечной суммы (на отрезке, где подынтегральная функция существенно отлична от нуля), интегральное уравнение (14) приближенно представим системой из L алгебраических уравнений, соответственно числу параметров в аппроксимирующей функции $C^*(x_i)$:

$$C^*(x_i) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}\sigma_D^*} \sum_{j=1}^L C^*(\xi_j) \cdot \exp\left(-\frac{(x_i - \xi_j)^2}{2(\sigma_D^*)^2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (15)$$

где h — длина отрезков оси OX , на которые разбивается область численного интегрирования, x_i — центры этих отрезков (область численного интегрирования ограничивается той частью оси OX , где значения $C^*(x_i)$ существенно отличны от нуля).

Система (15) из L уравнений содержит $L + 1$ неизвестных: L значений $C^*(\xi_j)$ и параметр σ_D . Последний можно найти благодаря ограничениям. Если задаться истинным значением $\sigma_D = \sigma$, то при отсутствии других ошибок решение системы (15) должно дать такую функцию $C^*(\xi)$, которая асимптотически стремится к фоновым значениям (согласно известному решению прямой задачи). В данном случае фоновые значения концентраций заведомо близки к нулю. Если же задать $\sigma_D > \sigma$, то функция $C^*(\xi)$ принимает значения ниже фоновых в тех точках, где она должна быть выше их. В данном случае это отрицательные концентрации, что физически недопустимо. Поэтому оптимальное значение параметра σ_D находится как максимальное из тех, при которых функция $C^*(\xi)$, находящаяся из системы (15), положительна всюду в области определения. Вычисленные при этом значении σ_D величины $C^*(\xi_j)$ и есть искомые L значений функции $C^*(\xi_j)$. Таким образом, параметр σ_D находится за счет дополнительной информации о поле значений $C(\xi)$, и число точек, в которых могут быть найдены взаимно независимые значения функции $C^*(\xi)$, должно быть равно числу параметров в функции $C^*(x)$, т. е. четырем. Следовательно, и для числа взаимно независимых уравнений в системе (15) получаем $L = 4$.

В качестве области интегрирования возьмем интервал $(0; 3,43)$; $h = 3,43/4 = 0,86$; $x_1 = \xi_1 = 0,43$; $x_2 = \xi_2 = 1,29$; $x_3 = \xi_3 = 2,15$; $x_4 = \xi_4 = 3,0$. Величины $C^*(x_i)$ берутся как антилогарифмы значений $y_3(x_i)$, указанных в столбце 6 таблицы: $C^*(x_1) = 134,0$; $C^*(x_2) = 618,0$; $C^*(x_3) = 814,7$; $C^*(x_4) = 133,7$. Подставляя эти величины в уравнения (15) при разных σ_D , находим, что все получаемые значения $C^*(\xi)$ положительны при $\sigma_D \leq 0,43$. Дальнейшее же увеличение σ_D на 0,1 уже приводит к появлению в решении отрицательных значений $C^*(\xi)$. Поэтому указанная величина $\sigma_D = 0,43$ принята как приближенно равная параметру σ_D ; при этом получены значения $C^*(\xi_1) = 81,5$; $C^*(\xi_2) = 637,0$; $C^*(\xi_3) = 928,5$; $C^*(\xi_4) = 41,8$.

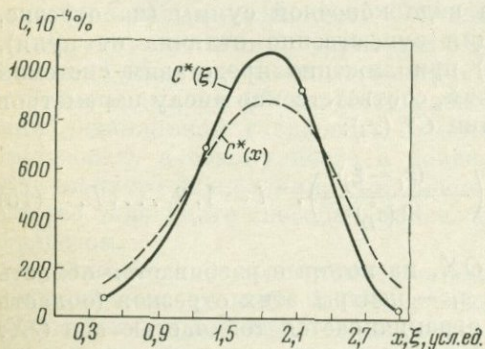


Рис. 2. Кривые C^*_x и C^*_ξ для фактических данных, показанных на рис. 1

Согласно результатам опробования ряда свинцовых месторождений, распределение свинца в коренных породах может быть приближенно описано изменением логарифмов концентраций по параболе (кривая $\log C$ всюду оказывалась ближе к параболе, чем кривая C). Можно показать, что это согласуется и с некоторыми решениями прямой задачи. Поэтому для первого приближения полагаем, что функция $\lg C^*(\xi)$ является параболой третьего порядка (Y_3), принимающей в точках ξ_i значения $\lg C^*(\xi_i)$. Составляя соответствующие четыре уравнения, находим коэффициенты этой параболы $\lg C^*(\xi) = Y_3 = 1,440 + 2,226 \cdot \xi + 2,790 \cdot \xi^2 - 0,207 \cdot \xi^3$. Беря антилогарифм от Y_3 , получаем искомую кривую $C^*(\xi)$, показанную на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

- Демидович В. В. 1967. Восстановление функции и ее производных по экспериментальной информации. — В сб. «Вычислительные методы и программирование». VIII. М., Изд-во МГУ.
- Дубов Р. И. 1964. Концентрации химических элементов в ореолах рассеяния. — Геол. и геоф., № 12.
- Иванов В. К. 1962. Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи теории потенциала. — Докл. АН СССР, т. 142, № 5.
- Лаврентьев М. М. 1962. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск, Изд-во СО АН СССР.
- Лаврентьев М. М. 1965. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений. — Докл. АН СССР, т. 160, № 1.
- Тихонов А. Н. 1963. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. — Докл. АН СССР, т. 151, № 3.
- Тихонов А. Н. 1967. О некорректно поставленных задачах. — В сб. «Вычислительные методы и программирование». VIII. М., Изд-во МГУ.
- Худсон Д. 1967. Статистика для физиков. М., «Мир».

С. И. ШЕРМАН

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ЗИЯНИЯ РАЗРЫВОВ В ЗЕМНОЙ КОРЕ ПРИБАЙКАЛЬЯ

Вопрос о глубине проникновения и о существовании в глубинных частях земной коры открытых разрывов весьма дискуссионен. Некоторые сейсмологи считают, что глубина проникновения разрывов соизмерима с максимальной глубиной расположения гипоцентров землетрясений и составляет примерно 700 км от поверхности Земли. Что представляют собой эти зоны, остается далеко не ясным. Совершенно очевидно, что это не могут быть открытые трещины, но вполне обоснованно можно утверждать, что строение названных зон существенно отличается от прилегающих территорий.

В самом общем приближении можно говорить о том, что глубинные разломы земной коры по падению изменяют свою физическую сущность. В верхней, приповерхностной зоне преобладает серия открытых разрывов с самой разнообразной величиной зияния; в нижней — открытые и хорошо фиксируемые закрытые трещины переходят в зоны скольжения и трансляции. Резкую границу между названными зонами провести нельзя. Кроме того, в зависимости от геологического строения местности глубина залегания этой границы будет колебаться.

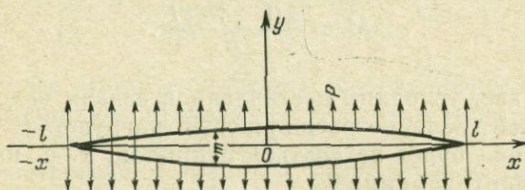
Автор попытался на примере Прибайкалья выяснить зависимость величины зияния открытых разрывов от их длины и прочностных свойств горных пород и этим подготовить почву для решения вопроса о глубине проникновения открытых трещин в земной коре рассматриваемой территории.

В. В. Белоусов (1966), опираясь на данные Р. Аффена и А. Джессопа (Uffen, Jessop, 1963), пришел к заключению, что до глубины в 40 км допустимо образование зияющих трещин. В. В. Белоусов не исключает возможности проникновения открытых трещин и на несколько большие глубины. Но проникновение трещины на ту или иную глубину или ее зарождение еще не определяет масштабы проявления ряда геологических процессов, таких как подъем магмы или гидротермальных растворов. Для осуществления этих процессов необходимо достаточно длительное существование разрыва. Более того, серьезное значение имеет не только глубина проникновения, но и величина зияния разрыва.

Разрыв в земной коре после своего возникновения может оставаться в виде открытой трещины либо при сохранении неизменным вызвавшего его образование поля напряжений, либо при частом изменении этого поля, которое ведет к перемещениям вдоль плоскостей разрыва, или, наконец, при выполнении полости разрыва каким-то веществом, создающим определенное внутреннее давление в полости разрыва (см. ниже). По мнению Е. Н. Люстиха (1961), существование разрыва может поддерживаться в земной коре периодическим подъемом по нему масс горячего вещества. Разлом в таком случае превращается в канал, заполненный веществом с более низкой, чем окружающие породы, вязкостью. Одновременно со всеми названными причинами существование открытой трещины на глубине необходимо рассматривать как следствие определенного соотношения напряжения и прочности горных пород. Последнее особенно важно для молодых разрывов, полость которых продолжительное время остается открытой или заполняется высоко подвижными гидротермальными растворами, собственное внутреннее давление которых на стенки трещины относительно невелико.

Рассмотрим общие условия существования открытой трещины в земной коре. Известно, что естественные трещины в горных породах из-за малого в целом для Земли периода релаксации долго

существовать не могут. В то же время, если рассматривать непосредственно земную кору, то из-за большой вязкости коры, приближающейся к порядку 10^{26} пз, в ней могут сохраняться разрывы определенной длины и зияния. При названной величине вязкости и достаточно высокой скорости деформации материал, слагающий земную кору, можно считать упругим. Сохранению в материале упругих свойств способствует и небольшое литостатическое давление горных пород, величина которого в пределах коры не превышает 10—12 кбар. Поскольку трещины в естественных природных условиях имеют чаще всего довольно сложную форму, мы будем рассматривать идеализированный случай,



Р и с. 1. Схема деформация горных пород с одиночной трещиной (по Ю. П. Желтову, 1966)

когда трещина образована двумя поверхностями с бесконечно большим радиусом кривизны. Третье измерение трещины примем бесконечно малым, и, таким образом, будем рассматривать решение задачи в плоскости.

Чисто физически задача сводится к рассмотрению деформации горных пород вокруг одиночной трещины, расположенной в упругой плоскости (Мухелишвили, 1966). Расчет проводится согласно теории хрупкого разрушения с допущением, что тело сохраняет свойство линейной упругости вплоть до разрушения. Может ли эта теория быть применима для горных пород, слагающих земную кору, поскольку последние, хотя и в незначительной степени, обладают пластичностью, особенно в стадию, предшествующую разрушению? Рассматривая теорию хрупкого разрушения, Ирвин (Irwin, 1948), Орован (Orowan, 1952), Г. И. Баренблатт и др. (1966) показали, что существование пластической области малых размеров и ее сосредоточение в непосредственной близости к поверхности трещин коренным образом не меняет законов квази-хрупкого разрушения. Названные исследования позволяют использовать теорию хрупкого разрушения и при рассмотрении поставленного вопроса.

Ю. П. Желтовым (1966) показано, что если на контур трещины действует в направлении, перпендикулярном простиранию трещины, постоянная нагрузка P , расширяющая трещину, то легко найти величину раскрытия стенок трещины m (рис. 1):

$$m = \frac{2(1 - \gamma^2)Pl}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}, \quad (1)$$

где P — расширяющая нагрузка, действующая на трещину; l — половина длины трещины; E — модуль Юнга; γ — коэффициент Пуассона.

Полное раскрытие трещина будет иметь (Желтов, 1966) при $x = 0$:

$$m = \frac{2(1 - \gamma^2)Pl}{E}. \quad (2)$$

Поскольку m характеризует изменение параметра в положительную сторону роста y , полное максимальное раскрытие трещины будет равно:

$$M = \frac{4(1 - \gamma^2)Pl}{E}. \quad (3)$$

В конкретных условиях поставленной задачи надо определить то минимальное значение расширяющей нагрузки P на трещину, при котором она будет оставаться открытой, т. е. иметь определенную величину зияния:

$$P = \frac{EM}{4l(1 - \gamma^2)}. \quad (4)$$

Для определения параметров E и γ (Гутенберг, 1963) воспользуемся зависимостью между отношением распространения скорости упругих волн в земной коре и константами упругости горных пород:

$$E = \rho \frac{3V_p^2 - 4V_s^2}{\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2 - 1}; \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2 - 1} \right], \quad (6)$$

где ρ — плотность среды; V_p — скорость распространения продольных волн; V_s — скорость распространения поперечных волн.

Таким образом, используя приведенные формулы, рассчитаем оптимальные оценки зияния открытых разрывов в Прибайкалье, принимая во внимание конкретную геологическую обстановку.

Мощность земной коры в Прибайкалье, по данным С. И. Голенецкого (1961, 1965), определена в пределах ≈ 40 км. По его же данным, скорость распространения в земной коре Прибайкалья продольных волн колеблется около 6,1 км/сек; поперечных — 3,51 ÷ 3,56 км/сек. Промежуточные границы раздела до глубины 40 км отбиваются с большим трудом и с малой степенью достоверности. Поэтому для дальнейших расчетов примем однослойную модель строения коры. Все Прибайкалье главным образом сложено гнейсами, гранито-гнейсами, мигматитами и мрамором.

рами, т. е. породами преимущественно высокой стадии метаморфизма. Примем среднюю плотность этих пород $\rho = 2,75 \text{ г/см}^3$.

Исходя из равенств (5) и (6) нетрудно определить усредненные упругие константы для земной коры Прибайкалья, допуская изотропное строение слагающего земную кору материала:

$$E = \frac{3(6,1 \cdot 10^3)^2 - 4(3,53 \cdot 10^3)^2}{\left(\frac{6,1}{3,53}\right)^2 - 1} = 8,5558 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2;$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{6,1}{3,53}\right)^2 - 1} \right] = 0,2485.$$

Известно, что амплитуда зияния трещин в земной коре может колебаться в широких пределах от долей миллиметра до десятков сантиметров. Однако при зиянии, меньшем или равном 0,01 см, трещины практически становятся закрытыми и даже не всегда легко различимы невооруженным глазом. Примем наименьшую величину зияния для открытых разрывов равной 0,01 см и определим для условий Прибайкалья при заданной полудлине разрыва l минимально допустимое значение расширяющей нагрузки P , ниже которой разрывы начинают практически смыкаться. Параллельно найдем для заданных полудлин разрывов значение необходимой расширяющей нагрузки P для сохранения в условиях давлений земных недр трещин с определенным зиянием.

Расчеты проведены по уравнению (4) для значений M , последовательно равных 0,01; 0,1; 1,0; 2,0; 3,0; 5,0; 10,0 и 50,0 см, при изменении полудлины разрыва от 50 м до 100 км (табл. 1). Как видно из табл. 1, величина расширяющей нагрузки колеблется от 1 атм до 2000 000 атм. В земной коре возможны широкие пределы колебаний давлений, но они безграничны. А. Аффен и А. Джессоп (Uffen, Jessop, 1963) показали, что возможные максимальные отклонения при сжатии и растяжении не могут превышать 8—10 кбар для глубин до 40 км. Аналогичный порядок величин изменения всестороннего давления на глубинах в 50—60 км приводится и М. В. Гзовским (1963). Сопоставляя эти данные с приведенными табличными величинами, необходимо исключить из реального обсуждения как раз те данные, где значение расширяющей нагрузки превышает 20 000 атм, т. е. сумму литостатического давления горных пород Прибайкалья (табл. 2) и возможное ее максимальное увеличение.

Анализ и сопоставление величин табл. 1 и 2 суммированы на графике рис. 2, который построен в билогарифмическом масштабе. Кривая 1 показывает оптимальные границы зияния открытых разрывов, давление внутри которых поддерживается либо связью с магматическим очагом, либо тектоническими силами. Длительное существование таких разрывов как открытых трещин невозможно.

Таблица 1

Величина расширяющей нагрузки P для разрывов различной протяженности
и амплитуды зияния в Прибайкалье

$l, м$	$M = 0,01 см$	$M = 0,1 см$	$M = 1,0 см$	$M = 2,0 см$	$M = 3,0 см$	$M = 5,0 см$	$M = 10,0 см$	$M = 20,0 см$	$M = 50,0 см$
	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$	$P, тыс. атм$
50,0	0,5093	5,093	50,93	401,86	115,28	254,65	509,3	1018,6	2546,5
100,0	0,2546	2,546	25,46	50,92	76,38	127,30	254,6	509,2	1273,0
150,0	0,1698	1,698	16,98	33,96	50,94	84,90	169,8	339,6	849,0
200,0	0,1273	1,273	12,73	25,46	38,19	63,65	127,3	254,6	636,5
300,0	0,0849	0,849	8,49	16,98	25,46	42,44	84,9	169,8	424,4
500,0	0,0509	0,509	5,09	10,19	15,28	25,46	50,9	101,9	254,6
750,0	0,0339	0,339	3,40	6,79	10,18	16,98	34,0	67,9	169,8
1000,0	0,0255	0,255	2,55	5,92	7,64	12,73	25,5	59,2	127,3
5000,0	0,005	0,051	0,51	1,02	1,53	2,55	5,1	10,2	25,5
10000,0	0,003	0,025	0,25	0,50	0,75	1,27	2,5	5,0	12,7
15000,0	0,002	0,017	0,17	0,34	0,51	0,85	1,7	3,4	8,5
20000,0	0,001	0,013	0,13	0,26	0,39	0,65	1,3	2,6	6,5
50000,0	$\leq 0,001$	$\leq 0,005$	0,05	0,10	0,15	0,25	0,5	1,0	2,5
100000,0	$\leq 0,001$	$\leq 0,002$	0,02	0,05	0,08	0,13	0,3	0,5	1,3

Примечание. Объяснение линий см. в тексте.

Таблица 2

Величина литостатического давления в земной
коре Прибайкалья

$$(\rho = 2,75 \text{ г/см}^3)$$

Глубина, км	Давление, тыс. атм	Глубина, км	Давление, тыс. атм	Глубина, км	Давление, тыс. атм
0,05	0,014	2,0	0,55	20,0	5,50
0,1	0,028	3,0	0,82	25,0	6,88
0,5	0,14	5,0	1,38	30,0	8,25
1,0	0,28	10,0	2,75	35,0	9,62
1,5	0,42	15,0	4,12	40,0	11,00

Кривая II ограничивает оптимальные условия существования открытых разрывов, для поддержания зияния которых расширяющая нагрузка не превышает 5 тыс. атм. Такое внутреннее давление может создать столб жидкости, например, с плотностью $1,0 \text{ г/см}^3$ и высотой до 50 км. Учитывая более высокую плотность движущихся в земной коре гидротермальных растворов, можно с большой степенью вероятности говорить о реальных условиях для существования в земной коре Прибайкалья, особенно в ее верхней части, открытых разрывов, по которым происходит постоянное движение растворов. Соотношение между полудлиной таких разрывов и их мощностью хорошо видно из графика.

Нарушение по какой-либо причине гидростатического давления жидкости может привести для разрывов одной и той же длины к уменьшению зияния или даже к полному смыканию их.

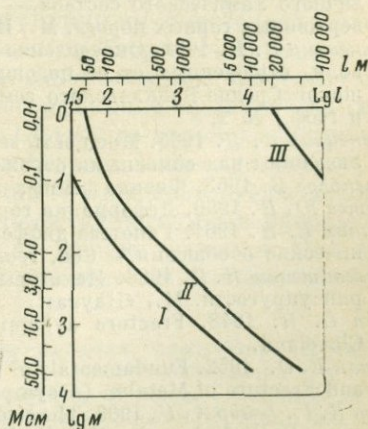
Наконец, кривая III показывает оптимальную величину зияния для «пустых» разрывов. Как видно, практически это «волосные»

Р и с. 2. График зависимости полудлины открытых разрывов и их зияния при различном характере заполнения

I — открытые, не выходящие на поверхность разрывы, связанные с магматическим очагом;

II — открытые разрывы с движущимися гидротермальными растворами или водоносные;

III — открытые разрывы



трещины, длина которых должна превышать 20—40 км. Реальное существование таких сплошных трещин трудно представить.

Каждая из кривых графика построена по верхним пределам цифр, соответственно ограниченных на табл. 1 пунктирной, сплошной и двойной линиями. К примеру, приведенные расчеты показывают, если при землетрясении образуется или раскрывается трещина длиной в 1 км ($l = 500$ м), то, невзирая на видимое ее влияние на поверхности, можно утверждать, что после снятия напряжений она очень быстро сомкнется на глубине и станет практически закрытой ($M < 0,01$ см). В случае же заполнения ее, например водой, она также сомкнется, но до величины, не превышающей 0,1 см, и с таким влиянием сможет сохраниться при стабилизации поля напряжений продолжительное время.

Таким образом, установленная зависимость между полудлиной разрывов в Прибайкалье и их влиянием позволяет оценивать реальное значение и влияние названных структур на течение ряда геологических процессов.

В заключение автор считает необходимым акцентировать внимание читателя на том, что в статье рассмотрена проблема только с одной стороны. Расчеты базируются на усредненных прочностных константах горных пород. Многообразие природных процессов несомненно приведет к усложнению условий существования открытых разрывов. Однако полученные зависимости позволяют реально оценивать порядок возможных колебаний затронутых в статье параметров длин трещин и их влияния.

ЛИТЕРАТУРА

- Баренблатт Г. И., Каландия А. И., Манджavidзе Г. Ф. 1966. Краткий обзор некоторых работ последнего времени.— В кн.: Н. И. Мухелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости». М., «Наука».
- Белоусов В. В. 1966. Земная кора и верхняя мантия материков. М., «Наука».
- Гзовский М. В. 1963. Тектонофизика и проблемы происхождения магм различного химического состава.— В сб. «Проблемы магмы и генезиса изверженных горных пород». М., Изд-во АН СССР.
- Голенецкий С. И. 1961. Определение мощности земной коры по наблюдениям волн, отраженных от ее подошвы и глубины залегания очагов афтершоков Средне-Байкальского землетрясения 29 августа 1959 г. — Геол. и геоф., № 2.
- Голенецкий С. И. 1965. Мощность земной коры на среднем Байкале по наблюдениям над обменными отраженными волнами.— Геол. и геоф., № 5.
- Гутенберг Б. 1963. Физика земных недр. М., ИЛ.
- Желтов Ю. П. 1966. Деформации горных пород. М., «Недра».
- Люстих Е. Н. 1961. Гипотеза дифференциации земной оболочки и геотектонические обобщения.— Сов. геол., № 6.
- Мухелишвили Н. И. 1966. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука».
- Irwin G. R. 1948. Fracture dynamics.— In: «Fracturing of Metals», ASM, Cleveland.
- Orowan E. O. 1952. Fundamentals of brittle behavior of metals.— In: «Fatigue and Fracture of Metals». (A symposium, 1950). London, Wiley.
- Uffen R. I., Jessop A. U. 1963. The stress release hypothesis of magma formation.— Bull. Volcanol., Napoli, XXVI.

К ВОПРОСУ ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ПАЛЕОВУЛКАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ТЕРРИТОРИИ СИБИРИ

Для оценки тепловой энергии вулканических процессов применяется уравнение

$$\varepsilon_{th} = V \cdot \delta (T \cdot \alpha + \beta) I,$$

где ε_{th} — тепловая энергия извержения; V — объем извергнутого материала; δ — плотность извергнутого материала; T — температура извергаемого материала; α — удельная теплота плавления лав; β — скрытая теплоемкость (тепло, затрачиваемое на кристаллизацию лавы и на другие процессы, происходящие внутри системы, — полиморфные превращения и т. д.); I — эквивалентная работа тепла.

Это уравнение предложено Хедервари (Hedervari, 1963) для оценки тепловой энергии современных вулканических извержений. Расчетами Йокоямы (Yokoyama, 1956, 1957), а также Б. Г. Поляка (1966), Г. С. Горшкова (Горшков, Богоявленская, 1965), Е. К. Мархинина (1967) и других исследователей показано, что тепловая энергия — основной вид энергии современных извержений, превосходящий в десятки, сотни и тысячи раз все остальные виды энергии, выделяющейся в той или иной форме в момент действия вулканов. Поэтому установление количества тепловой энергии позволяет определить общий порядок энергии вулканических извержений.

И. В. Лучицкий (1966) показал, что приведенное выше уравнение может быть применимо для оценки вулканической энергии, освобожденной в процессе развития вулканизма в древних вулканических областях. На примере палеозойского вулканизма юга Сибири и Восточного Казахстана Лучицким определена область применения этого уравнения при палеоэнергетических реконструкциях и показана возможность использования энергетической оценки для целей сравнения и классификации вулканических областей по их энергонасыщенности. Основным параметром при этих расчетах, который должен быть определен возможно точнее, является объем продуктов извержений¹. Этот показатель вычисляется по средней суммарной мощности вулканитов в разрезе того или иного региона и по площади их распространения. Определение объема продуктов извержений для древних вулканических об-

¹ Остальные параметры, принятые при расчетах, следующие (Лучицкий, 1966): $\alpha = 0,25$ кал/град (для $T = 800^\circ \text{C}$ — лавовые извержения); $\alpha = 0,20$ кал/град (для $T = 300^\circ \text{C}$ — пирокласты), $\beta = 50$ кал/г, $I = 4,1855 \cdot 10^7$ эрг, $T = 1000^\circ \text{C}$ — для лав и $T = 500^\circ \text{C}$ — для эксплозий. Средняя плотность пород, принятая нами, равна 2,5.

ластей производится по площадям их современного распространения, что явно ведет к занижению первичного объема извергнутого материала и, естественно, к определению минимальных значений тепловой энергии извержений. Из этого следует, что наиболее объективным показателем, более приемлемым для целей сравнения различных палеовулканических областей, является плотность энергии, представляющая собой количество энергии, приходящееся на единицу площади, на которой проявились вулканические извержения (Луцицкий, 1966):

$$P_{\varepsilon} = \frac{P_{th}}{S},$$

где P_{ε} — плотность тепловой энергии; P_{th} — тепловая энергия; S — площадь распространения вулканического материала.

Применив расчетные формулы И. Йокоямы, П. Хедервари и И. В. Луцицкого, автор попытался вычислить тепловую энергию отдельных вулканических извержений для среднепротерозойского прибайкальского вулканического пояса (Хренов и др., 1966; Бухаров, 1970) и сопоставить суммарный энергетический эффект среднепротерозойского вулканизма Прибайкалья с энергетическими оценками девонского вулканизма Сибири, мезозойского вулканизма Забайкалья и Сибирской платформы, мезозой-кайнозойского вулканизма Охотско-Чукотского вулканического пояса и других вулканических областей (см. табл.).

В Прибайкальском вулканическом поясе известны относительно хорошо сохранившиеся палеовулканические постройки, которые могут быть отнесены к группе полигенных смешанных вулканов (по классификации А. Ритмана, 1964) или к группе стратовулканов (по терминологии В. И. Влодавца, 1954).

Расчет тепловой энергии, освобожденной при одноактном извержении одного из среднепротерозойских палеовулканов Прибайкалья — палеовулкана Тонгодинского, — расположенного в южной части Байкальского хребта, дал величину $\varepsilon_{th} = 0,17 \cdot 10^{28}$ эрг. Расчет произведен по одноактному извержению игнимбритов и туфолов, имеющих в разрезе мощность 325 м и распространенных в современном эрозионном срезе на площади в 172 км^2 ($V = 56 \text{ км}^3$). Как видим, тепловая энергия извержения этого докембрийского вулкана, вычисленная по минимальному известному объему выброшенного материала, почти вдвое выше энергии самого мощного из известных исторических извержений вулкана Тамбора¹ в 1815 г., тепловая энергия которого равна $0,96 \cdot 10^{27}$ эрг (Влодавец, 1966).

Полученные результаты свидетельствуют об огромной интенсивности вулканического процесса в докембрии Прибайкалья и об общем снижении энергии вулканических процессов от среднего протерозоя к более поздним периодам.

¹ По оценке П. Хедервари, тепловая энергия, освободившаяся при извержении вулкана Тамбора в 1815 г., равна $0,144 \cdot 10^{28}$ эрг.

Т а б л и ц а

Расчет тепловой энергии, освободившейся при вулканической деятельности в различных областях Сибири и Дальнего Востока

Вулканическая область	Мощность разреза вулканитов, в км	Площадь распространения, км ²	Объем извергнутого материала, км ³	Тепловая энергия, эрг	Плотность энергии, эрг/км ²
Среднепротерозойский Прибайкальский вулканический пояс (Бухаров, 1970)	5,0	3200	$1,6 \cdot 10^4$	$0,9 \cdot 10^{30}$	$0,3 \cdot 10^{27}$
Девон юга Сибири (Лучицкий, 1966)	—	—	—	$0,37 \cdot 10^{31}$	$0,75 \cdot 10^{26}$
Пермь, триас Сибирской платформы (Домышев, 1968)	—	680 000	$3,6 \cdot 10^5$	$1,12 \cdot 10^{31}$	$0,16 \cdot 10^{26}$
Юра, мел Западного Забайкалья (по данным Ю. В. Комарова)	7,0	10 000	$0,7 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^{30}$	$0,2 \cdot 10^{27}$
Мел — третичный вулканизм Охотского пояса (Устиев, 1963)	6,5	183 000	$1,2 \cdot 10^6$	$3,7 \cdot 10^{31}$	$0,2 \cdot 10^{27}$
Четвертичный вулканизм Камчатки (Мархинин, 1967, Поляк, 1966)	—	92 000	$0,7 \cdot 10^{5*}$	$2,2 \cdot 10^{31}$	$0,2 \cdot 10^{26}$

* Масса извергнутого материала, по Е. К. Мархинину, равна $1,77 \cdot 10^{20}$ г.

В заключение следует отметить, что в настоящее время делают лишь первые попытки изучения роли энергетического эффекта геологических процессов. Дальнейшая работа в этом направлении позволит выявить более глубокие термоэнергетические различия отдельных геотектонических структур земной коры.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Бухаров А. А. 1970. Докембрийский Северо-Байкальский вулканический пояс и некоторые особенности его развития. — В сб. «Петрология и структурный анализ кристаллических образований». Л., «Наука».
- Владеев В. И. 1954. О вулканологической терминологии. — Бюлл. вулканолог. станции на Камчатке, № 21.
- Владеев В. И. 1966. Вулканическая деятельность на земле в историческое время. — В сб. «Современный вулканизм», т. 1. М., «Наука».
- Горшков Г. С., Богоявленская Г. Е. 1965. Вулкан Безымянный и особенности его последнего извержения (1955—1963 гг.). М., «Наука».
- Домышев В. Р. 1968. Особенности строения и тектонические условия формирования раннемезозойской вулканогенной толщи в юго-восточной части Тунгусской синеклизы. — Автореф. канд. дисс. Иркутск.
- Лучицкий И. В. 1966. Палеовулканологические реконструкции и некоторые вопросы палеоэнергетики. — В сб. «Сравнительная палеовулканология

среднего и верхнего палеозоя юга Сибири и Восточного Казахстана» Новосибирск, Сибирское отделение изд-ва «Наука».

- Маршинин Е. К. 1967. Роль вулканизма в формировании земной коры. М., «Наука».
- Поляк Б. Г. 1966. Геотермические особенности области современного вулканизма. М., «Наука».
- Ритман А. 1964. Вулканы и их деятельность. М., «Мир».
- Устинов Е. К. 1963. Охотский структурный пояс и проблемы вулкано-плутонических формаций.— В сб. «Проблемы магмы и генезиса изверженных пород». М., Изд-во АН СССР.
- Хренов П. М., Комаров Ю. В., Бухаров А. А., Гордиенко И. В., Киселев А. И., Лобанов М. П. 1966. Вулканические пояса юга Восточной Сибири и их рудоносность.— В сб. «Вопросы генезиса и закономерности размещения эндогенных месторождений». М., «Наука».
- Hedervari P. 1963. On the energy and magnitude of volcanic eruptions.— Bull. Volkanol., XXV. Napoli.
- Jokoymata J. 1956. Energetics in active volcanoes. 1st Paper.— Bull. of the Earthquake Research Inst., vol. 34. Tokyo.
- Jokoymata J. 1957. Energetics in active volcanoes. 2nd and 3rd Papers.— Bull. of the Earthquake Research Inst., vol. 35, Tokyo.

В. А. ЛЮПО, Е. К. ВАСИЛЬЕВ

РЕГРЕССИОННО-ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ИЗОМОРФНОГО СОСТАВА ГРАНАТОВ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА РАЗМЕРЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЯЧЕЙКИ

В предыдущем сообщении с таким же названием (Васильева и др., 1970) нами описано исследование связи между параметром элементарной ячейки гранатов a и содержанием x в них различных минералов: альмандина, пиропа, спессартина, гроссуляра, андрадита и уваровита. Уравнение связи было получено в результате регрессионно-дисперсионного анализа. Обработке подвергалось 460 результатов анализов, полученных частично одним из авторов, а частично заимствованных из литературы (Васильев, 1969).

Исследования связей между параметрами элементарной ячейки гранатов и содержанием их конечных членов проводились и ранее (Гневушев и др., 1956; Гиллер, 1962; Юников и др., 1961; Bertaut, Forrat, 1957; McConnell, 1966), но во всех работах были получены уравнения регрессии, отличные друг от друга числовыми коэффициентами, хотя их авторы утверждали, что полученные ими формулы удовлетворительно описывают анализируемую связь.

Нами найдено уравнение регрессии в виде полинома:

$$a = A_0 + \sum_{j=1}^p x_j + \sum_{k=p+1}^{2p} A_k x_k^2 + \sum_{n=2p+1}^{3p} A_n x_n^3 + \sum_{r \neq s} A_{rs} x_r x_s,$$

где p — количество влияющих на изучаемое явление факторов. В нашем случае $p = 7$ (к шести компонентам добавлен остаток, представляющий содержание прочих конечных членов гранатов).

Из семи изученных факторов наиболее значимыми оказались только пять. Это — содержания альмандина, пиропа, спессартина, андрадита и гроссуляра.

Для определения значимости отдельных факторов нами использовались корреляционный и регрессионно-дисперсионный анализы, методика которых ранее описана более подробно (Васильева и др., 1970).

Уравнение регрессии отыскивалось в виде $a = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3$, где x — содержание определенного минерала в молекулярных процентах, после чего были рассчитаны коэффициенты корреляции (r), значимости всей регрессии в целом (F_R) и отдельных ее компонентов. В нашем случае регрессия существенна, если коэффициент значимости больше, чем 7, 0; существенность же соответствующего фактора проявляется тогда, когда коэффициент значимости больше 3,0.

Подробное описание расчета коэффициента значимости можно найти в целом ряде руководств по математической статистике (Урбах, 1964). Результаты корреляционного анализа представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты корреляционного анализа связей между параметром элементарной ячейки и содержанием конечных членов

Конечный член	Коэффициент корреляции, r	Коэффициент значимости регрессии, F_R	Вид правой части уравнения $a = A_1 + A_2x + A_3x^2$	Коэффициенты значимости отдельных компонентов (слагаемых уравнения)		
				A_1	A_2x	A_3x^2
Альмандин	0,75	139	$11,870 - 1,405x + 1,370x^2$	$6 \cdot 10^6$	159	93
Андрадит	0,86	316	$11,547 - 1,160x - 0,716x^2$	$2 \cdot 10^7$	162	44
Гроссуляр	0,63	69	$11,591 + 1,993x^2 - 1,898x^3$	$1 \cdot 10^7$	56	35
Пироп	0,68	91	$11,803 - 1,289x + 1,309x^2$	$7 \cdot 10^6$	96	54
Спессартин	0,08	—	$11,069 - 0,087x$	—	—	—
Уваровит	0,03	—	$11,618 - 0,911x$	—	—	—

Незначимыми факторами оказались содержания спессартина и уваровита. Незначимым оказался и последний фактор — содержание остатка, который был отброшен. При расчете уравнения многофакторной регрессии необходимо учитывать возможность увеличения значимости отдельного фактора, который «в чистом виде» незначим. Только в том случае, когда этот фактор и в сочетании с остальными несуществен, его можно отбросить. Именно такой случай наблюдался для уваровита.

Остальные пять факторов записывались в виде полинома с 26 членами. Окончательный вид уравнения уже приводился (Василь-

Таблица 2

Оставшиеся в уравнении регрессии члены (+) при различных объемах анализируемых подвыборок

Номер подвыборки	Объем подвыборки	Номер члена уравнения регрессии										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	460 (вся выборка)	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
2	120	+	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+
3	144	+	-	-	-	+	-	-	+	+	+	+
4	120	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-
5	72	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+

Примечание. 3 и 4 подвыборки пересекаются.

ева и др., 1970). Это уравнение построено по всей имеющейся у нас совокупности вариантов.

Для изучения вопроса, почему разные авторы получили различные уравнения регрессии, нами составлялись случайным образом подвыборки, и для них строились уравнения регрессии. В табл. 2 приведены результаты этих исследований. Значком «+» отмечены значимые слагаемые уравнения регрессии, значком «-» те, значимость которых несущественна.

Интересно отметить, что для отдельной подвыборки полученное уравнение регрессии справедливо. Для оставшейся же части это уравнение приводит к ненормальному распределению невязок. Проверка распределения невязок осуществлялась с помощью критерия Пирсона (хи-квадрат). Проведенные нами расчеты показали, что $\chi^2 = 10,78$. Табличные значения χ^2 для уровней значимости 0,001; 0,01 и 0,05 соответственно равны 33,9; 40,3; 48,3 (Урбах, 1964). На этом основании эмпирическое распределение можно считать нормальным.

Выборочная оценка дисперсии распределения невязок $S = 0,0132$. Следовательно, по уравнению регрессии параметр элементарной ячейки гранатов в зависимости от содержания различных конечных членов рассчитывается с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 0,04 Å с вероятностью 99,6%.

ЛИТЕРАТУРА

- Васильев Е. К. 1969. Применение корреляционного анализа при изучении изоморфизма в оливинах и гранатах. М., «Наука».
- Васильева Н. Н., Лиопо В. Л., Васильев Е. К. 1970. Регрессионно-дисперсионный анализ изоморфного состава гранатов и его влияние на размеры элементарной ячейки.— В сб. «Математические методы в петрологии и геохимии». М., «Наука».
- Гиллер Я. Л. 1962. К рентгеновской диагностике гранатов.— В сб. «Рентгенография минерального сырья», вып. 1. М., Гостеолтехиздат.

Номер члена уравнения регрессии

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-
+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-
-	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-
-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-
+	-	-	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-

Гневушев М. А., Калинин А. И., Михеев В. И., Смирнов Г. И. 1956. Изменение размеров ячейки гранатов в зависимости от состава.— Зап. Всес. мин. об-ва, ч. 85, вып. 4.

Урбах В. Ю. 1964. Биометрические методы. М., «Наука».

Юников Б. А., Овчинников Л. Н., Меттих Л. И. 1961. О возможности определения состава граната гроссуляр-андрадитового ряда по параметру элементарной ячейки.— Труды Горно-геол. ин-та УФ АН СССР, вып. 56 (Минералогический сб. № 5). Свердловск.

Bertaut F., Forrat F. 1957. Etude des Parameters des Grenats.— Compt. rend. Acad. Sci., 244, No. 1. Paris.

McConnell D. 1966. Propertes physiques des grenats. Calcul de la demension de la maille unite a parameter de la composition chimique.— Bull. soc. franç. mineral. et cristallogr. 89, No. 1. Paris.

Г. М. ДРУГОВ

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ СОСТАВА И СВОЙСТВ МУСКОВИТА

Общие тенденции изменения физических свойств мусковита от содержания отдельных петрогенных компонентов отмечаются многими исследователями (Белянкина и др., 1958; Дир и др., 1966; Лашев, 1948), однако существование какой-либо четкой (прямой или обратной) зависимости не выявлено. С этой точки зрения изучение связи физических свойств мусковита с его химическим составом представляет определенный интерес. Изменения химического состава мусковита, очевидно, происходят под влиянием эволюции физико-химических условий среды его генезиса и существования, и некоторые физические свойства мусковита, достаточно «жестко» связанные с его химическим составом, могли бы служить указателем физико-химической обстановки формирования этого минерала.

В настоящей работе представлены результаты изучения зависимости оптических свойств (блеска, прозрачности, угла оптических осей), пробивной напряженности, твердости, удельного веса от химического состава мусковитов. В качестве исходных данных нами использовались физико-химические определения, взятые из литературных источников, и химические анализы мусковита, отобранного автором из мамских пегматитов.

Уравнение множественной регрессии, связывающее физическое свойство мусковита, и влияющие факторы в случае линейной

связи будут иметь следующий вид: $y = \sum_{i=1}^n c_i x_i \pm S_y$, где y —

количественное значение физического свойства мусковита; x_i — вектор химического состава мусковита, компонентами которого являются весовые проценты петрогенных компонентов; C_i — эмпирические коэффициенты; S_y — среднее квадратическое отклонение от линии регрессии (стандартная ошибка оценки y).

В системе исходных данных каждому химическому анализу соответствует коррелируемое физическое свойство. Уравнение связи находится путем решения системы линейных уравнений методом наименьших квадратов. На БЭСМ-2М были получены уравнения регрессии по исходным данным Белянкиной (Белянкина и др., 1958; табл. 2 и 13) для удельного веса, твердости, пробивной напряженности, прозрачности, блеска с десятью петрогенными компонентами (SiO_2 , TiO_2 , Al_2O_3 , Fe_2O_3 , FeO , MgO , MnO , CaO , Na_2O , K_2O) в 35 химических анализах. Кроме того, вычислены уравнения множественной регрессии, в которых в качестве дополнительных независимых переменных вводились физические параметры. Стандартизованные β -коэффициенты (факторы в сравнимых единицах), значения множественных коэффициентов корреляции (R), стандартной ошибки оценки (S_y), оценки квадратического отклонения зависимой переменной, основанной на средней (S_1), значения H -числа, характеризующего устойчивость системы линейных алгебраических уравнений приводятся в табл. 1.

H -число (число Ланцоша) находится из соотношения $H = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}}}$, где α_{\max} и α_{\min} — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы (Алешин и др., 1968).

Как видно из табл. 1, в уравнениях регрессии состав — свойство (1), (5), (8), (12), (13) S_y близки к S_1 , что указывает на неэффективность уравнений: необъясненная изменчивость сокращается весьма незначительно. Квадраты коэффициентов множественной корреляции (коэффициенты множественной детерминации), характеризующие долю вариации зависимой переменной под влиянием изучаемых факторов, показывают, что химический состав мусковита определяет изменчивость удельного веса, пробивной напряженности твердости только на 30%, прозрачности на 21% и блеска на 44% (табл. 1). Очевидно, большая доля изменчивости

свойств мусковита определяется другими факторами, не учтенными в этих уравнениях. Введение в уравнения регрессии физических параметров в качестве новых независимых переменных дает более удовлетворительные результаты. Как видно из табл. 1, изменчивость физических свойств коррелируемых с увеличенным количеством независимых переменных объясняется уравнениями регрессии на 50%, стандартная ошибка оценки при этом значительно сокращается (приблизительно на 50%). Дальнейшее увеличение числа переменных (m), вследствие малого объема выборки ($n = 35$) порождает плохую обусловленность системы решаемых линейных алгебраических уравнений: при $m > 14$ число N превышает 500, и оценки статистических параметров становятся неопределенными. Поэтому количество переменных в определяемых нами уравнениях связи не превышает 13 (число N в этом случае немалого отличается от 100).

При определении влияния физических параметров на коррелируемое свойство нами вводились последовательно два физических параметра из имеющихся четырех (пробивной напряженности, твердости, удельного веса, прозрачности). Такой метод позволяет получить интересующие нас оценки статистических параметров, не увеличивая числа переменных более 13. Применение нескольких вариантов множественной регрессии позволяет объективно оценивать влияние отдельных факторов по их β -коэффициентам. Очевидно, что с увеличением тесноты множественной корреляции при допустимой обусловленности системы линейных уравнений улучшается надежность статистических оценок (в том числе β -коэффициентов).

Вариации β -коэффициентов при $R > 0,6$ незначительны, как это видно из табл. 1, и не искажают общей ситуации сравнительных значений отдельных факторов. При $R < 0,6$ оценки стандартизованных коэффициентов в одноименных уравнениях регрессии значительно изменяются, причем ранговый порядок независимых переменных становится менее определенным. Так, в уравнении (1) при $m = 11$ и $R = 0,54$ отмечается значительное влияние FeO ($\beta = 0,405$) и незначительное — K_2O ($\beta = 0,169$) на коррелируемый фактор. С увеличением m до 13 в уравнениях регрессии (2), (3), (4) величина R превышает 0,6, и сравнительное влияние FeO становится незначительным ($\beta = 0,112$), а оценка сравнительного значения K_2O ($\beta = 0,5$) увеличивается более чем в 3 раза. Таким образом, надежные оценки сравнительных значений независимых переменных следует ожидать при $R > 0,6$. Оценки стандартизованных коэффициентов регрессии показывают, что изменчивость пробивной напряженности определяется главным образом положительным влиянием компонентов Al_2O_3 , Fe_2O_3 , K_2O , в меньшей степени — CaO , Na_2O , TiO_2 и отрицательным влиянием физических свойств мусковита (твердости и удельного веса); изменчивость твердости — положительным влиянием Al_2O_3 , Fe_2O_3 , K_2O и отрицательным — пробивной напряженности и удельного веса;

Таблица 1

Стандартизованные коэффициенты и основные параметры уравнений множественной регрессии некоторых физических свойств мусковита от его химического состава

Физическое свойство, коррелируемое с химическим составом	Стандартизованные коэффициенты (β)								
	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	M	MnO	CaO	Na ₂ O
Пробивная напря- женность, <i>кг/мм</i> (толщина 0,15 мм)	0,03	0,158	0,407	0,423	0,405	0,048	0,275	0,063	0,316
	0,278	0,25	1,251	1,01	0,24	0,154	0,207	0,417	0,448
	0,164	0,224	0,879	0,794	0,176	0,09	0,249	0,3	0,358
	0,203	0,284	0,883	0,958	0,112	0,067	0,195	0,382	0,313
Твердость, <i>кг/мм</i>	0,295	0,156	0,825	0,679	-0,472	0,036	-0,07	0,468	0,062
	0,332	0,253	0,9	0,817	-0,284	0,013	0,047	0,486	0,193
	0,321	0,281	1,076	1,06	-0,268	0,063	0,051	0,557	0,21
Удельный вес, <i>г/см³</i>	0,038	0,156	0,077	0,625	-0,01	-0,0003	-0,074	0,024	-0,012
	-0,203	0,084	0,496	0,677	-0,187	0,098	0,07	0,128	0,21
	-0,001	0,12	0,278	0,742	-0,113	0,076	-0,137	0,258	-0,111
Прозрачность, %	-0,2	-0,108	0,45	0,377	0,141	0,242	0,054	0,007	0,048
	-0,125	-0,114	0,669	0,368	0,045	0,254	0,089	0,066	0,116
Блеск, %	-0,279	-0,01	-0,193	0,272	0,361	-0,27	-0,3	-0,008	-0,035
	-0,229	0,022	-0,254	0,258	0,312	-0,317	-0,323	-0,031	-0,052
	-0,258	0,029	-0,39	0,3	0,386	-0,335	-0,275	-0,143	-0,023

Таблица 1 (окончание)

Физическое свойство, коррелируемое с химическим составом	Стандартизованные коэффициенты (β)					R	R ²	S _y	S ₁	H	Уравне- ние, №
	K ₂ O	Пробивная напря- женность	Твер- дость	Удельный вес	Прозрач- ность						
Пробивная напря- женность, <i>кг/мм</i> (толщина 0,15 <i>мм</i>)	0,169					0,54	0,3	2,2	2,62	89	(1)
	0,742		-0,579			0,69	0,48	1,89	2,62	108	(2)
	0,55		-0,494		-0,097	0,705	0,5	1,86	2,62	102	(3)
	0,533		-0,553	-0,255		0,731	0,54	1,79	2,62	101	(4)
Твердость, <i>кг/мм</i>	0,751					0,53	0,29	1,01	1,19	89	(5)
	0,817	-0,483			0,182	0,713	0,51	0,836	1,19	102	(6)
	0,803	-0,573		-0,222		0,719	0,52	0,83	1,19	97	(7)
Удельный вес, <i>г/см³</i>	-0,009					0,57	0,33	0,024	0,036	89	(8)
	-0,289	-0,365			-0,382	0,564	0,32	0,029	0,036	102	(9)
	-0,176		-0,0001		-0,315	0,637	0,41	0,027	0,036	102	(10)
Прозрачность, %	-0,2		0,296	-0,337	-	0,603	0,36	9,68	12,14	101	(11)
	-0,091					0,458	0,21	10,79	12,14	89	(12)
Блеск, %	-0,418					0,66	0,44	7,1	9,49	89	(13)
	-0,37		-0,085		0,190	0,684	0,47	6,93	9,49	102	(14)
	-0,383			0,287	0,261	0,715	0,55	6,63	9,49	100	(15)

Таблица 2

Результаты химических анализов и замеров угла оптических осей мусковитов из мамских слюдоносных пегматитов
(коллекция Б. Е. Карского, Г. П. Луговского, А. И. Толстого)

Проба, №	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O	H ₂ O	Σ	H ₂ O	Оптические свойства (-2V)	
													λ = 578	λ = 436
223	44,92	0,64	34,01	1,05	1,10	1,06	0,06	0,71	10,24	6,08	99,87	1,92	38,6	37,00
12	44,22	0,56	35,52	1,17	1,00	1,50	0,56	0,38	10,48	4,96	100,85	1,74	38,3	36,9
241	43,64	0,69	34,33	0,97	1,00	0,84	0,36	0,44	10,29	6,34	98,90	2,06	37,5	36,0
242	43,66	0,68	34,01	0,96	0,88	0,95	0,30	0,42	10,30	6,42	98,58	1,78	38,9	37,4
24	45,04	0,78	33,38	1,13	1,11	1,30	0,39	0,35	9,94	5,30	98,72	1,73	37,00	36,0
224	44,66	0,79	34,40	1,20	0,97	1,24	0,50	0,07	9,20	5,96	98,99	2,18	36,9	35,4
114	44,97	0,45	33,89	1,03	1,01	1,33	0,34	0,56	9,92	5,08	98,28	1,42	39,0	37,4
5	43,71	0,55	34,56	0,99	1,16	1,21	0,23	0,59	9,83	5,35	98,63	1,12	37,9	36,5
5-а	44,35	0,55	34,59	0,95	1,13	1,09	0,14	1,00	9,69	5,29	98,78	1,31	37,0	36,0
4	43,84	0,54	34,06	0,98	1,09	1,38	0,14	0,55	9,65	5,35	97,58	1,24	37,7	36,3
102	45,77	0,60	34,34	1,04	1,31	1,29	0,93	0,32	9,74	5,29	100,63	0,84	39,5	38,1
106	44,21	0,69	34,75	1,14	1,20	1,57	0,61	0,39	9,79	5,14	99,15	1,44	39,1	37,7
19	44,50	0,68	33,76	1,28	0,99	1,65	0,55	0,37	10,47	5,15	99,4	1,95	38,3	36,8
206	44,26	0,56	32,81	2,02	0,45	1,39	0,30	0,49	10,17	6,22	98,67	1,97	38,5	36,9
7	44,18	0,67	35,39	1,07	0,96	1,67	0,23	0,49	9,81	5,06	99,53	1,00	37,1	35,3
238	44,18	0,52	33,57	0,96	0,94	1,07	0,28	0,41	10,44	6,44	98,81	1,90	38,8	37,5
13	44,80	0,64	34,77	1,07	1,26	1,68	0,25	0,88	9,49	4,88	99,62	0,78	37,2	35,8
239	44,18	0,77	33,39	0,66	1,06	1,45	0,80	0,35	10,43	6,54	99,63	1,96	37,3	35,7

Таблица 2 (окончание)

Проба, №	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O	H ₂ O	Σ	H ₂ O	Оптические свойства (-2V)	
													λ = 578	λ = 436
240	43,87	0,74	33,22	1,12	1,08	1,32	0,78	0,30	10,40	6,42	99,25	1,99	39,0	37,6
122	42,05	0,62	33,35	1,06	0,83	1,56	1,11	0,55	10,17	5,26	98,02	1,46	37,5	36,0
217	44,48	0,60	32,32	1,05	0,99	1,54	0,38	0,84	9,73	6,08	98,01	2,14	39,5	38,1
218	44,18	0,55	33,86	0,99	0,92	1,67	0,34	0,57	10,08	5,91	99,07	2,06	39,5	38,2
213	44,86	0,76	33,58	0,92	0,61	1,57	0,46	0,54	9,75	6,55	99,6	2,07	38,0	36,2
210	44,27	0,55	33,14	1,37	0,59	1,59	0,22	0,48	10,01	6,20	98,42	2,00	38,3	37,0
202	44,80	0,50	32,39	2,45	0,47	1,41	0,38	0,46	9,44	6,17	98,47	1,80	39,3	37,8
123	44,79	0,53	34,52	1,11	1,00	1,42	0,10	0,26	10,37	4,98	100,65	1,57	39,1	38,3
27	44,50	0,84	35,39	0,79	1,47	1,51	0,23	1,08	9,52	5,0	100,33	0,98	32,8	31,8
134	43,91	0,93	32,69	1,38	1,04	1,51	0,25	0,04	10,17	5,39	97,31	1,72	34,8	33,6
235	44,04	0,66	32,91	0,97	1,00	1,39	0,44	0,53	10,25	6,57	98,76	2,06	37,8	36,3
10	44,09	0,85	35,84	1,05	1,17	1,40	0,21	0,71	9,67	5,11	100,50	0,99	35,9	33,9
105	44,33	0,50	35,26	1,07	1,09	1,18	0,45	0,42	9,47	5,26	99,03	1,56	40,1	38,7
225	43,79	0,51	33,52	1,75	1,17	0,75	0,46	0,52	10,22	6,35	99,04	1,95	40,0	38,7
226	44,12	0,30	33,53	1,89	1,19	0,64	0,68	0,48	10,34	5,89	99,06	1,74	41,9	40,6

Примечание. Место взятия пробы: 223 — Луговка; 12, 241, 242 — Колотовка; 24 — Б. Северный; 224 — Н. Луговка; 111, 5, 5-а, 4, 102, 106 — М. Северный; 19 — Согдиондон; 206 — Чуя; 7 — М. Северный; 238, 13, 239, 240 — Колотовка; 122 — М. Северный; 217, 218 — Кочекта; 213, 210 — Чуя; 202 — Слюдянка; 123 — М. Северный; 27, 134 — Б. Северный; 235, 10, 105 — Колотовка; 225, 226 — В. Северный.

Таблица 3

Эмпирические коэффициенты и основные параметры уравнений множественной регрессии угла оптических осей ($-2V$) от химического состава мусковита

Коррелируемое оптическое свойство	Уравнение, №	Тип коэффициента	Коэффициенты уравнения					
			SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	MgO
$-2V$ ($\lambda = 578$)	(16)	β	0,172	-0,74	-0,085	-0,066	-0,09	-0,134
	(17)	b	0,457	-9,23	-0,153	-0,296	-0,67	-0,816
$-2V$ ($\lambda = 436$)	(18)	β	0,197	-0,65	-0,013	-0,092	-0,13	-0,268
	(19)	b	0,552	-8,49	-0,085	-0,024	-0,43	-1,013

изменчивость удельного веса — в основном положительным влиянием Fe₂O₃; изменчивость прозрачности — положительным влиянием Al₂O₃, Fe₂O₃, твердости и отрицательным — удельного веса. Изменчивость блеска, в отличие от других физических свойств, характеризуется приблизительно одинаковым влиянием компонентов Al₂O₃, Fe₂O₃, MgO, K₂O, MnO, SiO₂. Таким образом, доля изменчивости, объясненная уравнениями регрессии рассматриваемых физических свойств мусковита, определяется главным образом вариациями компонентов Al₂O₃, Fe₂O₃, K₂O и некоторых физических параметров. Характерно относительно небольшое влияние SiO₂, FeO, MgO на коррелируемые физические свойства.

Как показывает статистический анализ, физические свойства мусковита определяются не только его химическим составом, но и другими факторами, из которых большое значение, вероятно, имеют твердые и газовой-жидкие микровключения, косвенно учитываемые твердостью в уравнениях (2)–(4), (11) и пробивной напряженностью (табл. 1, уравнения, 6, 7, 9).

При изучении зависимости оптических свойств (угла оптических осей) от химического состава мусковита нами использовались оптико-химические данные для мусковита из коллекции Б. Е. Карского, Г. П. Луговского, А. И. Толстого, представленные в табл. 2. Замеры углов оптических осей ($2V$) проведены ими в 1955 г. методом Е. С. Федорова и В. В. Никитина (Кузнецов, 1949) с использованием монохроматических светофильтров с длинами волн (λ) 578 $m\mu$ и 436 $m\mu$. Чтобы исключить влияние микровключений, производилось 3–4 определения $2V$ в различных частях кристалла, из которых учитывалось среднее значение для пробы на химический анализ. Для замеров выбирались пластинки толщиной около 0,17 мм из наиболее ровных частей кристаллов.

На БЭСМ-2М были определены уравнения связи угла оптических осей ($-2V$) с химическим составом мусковита (табл. 3).

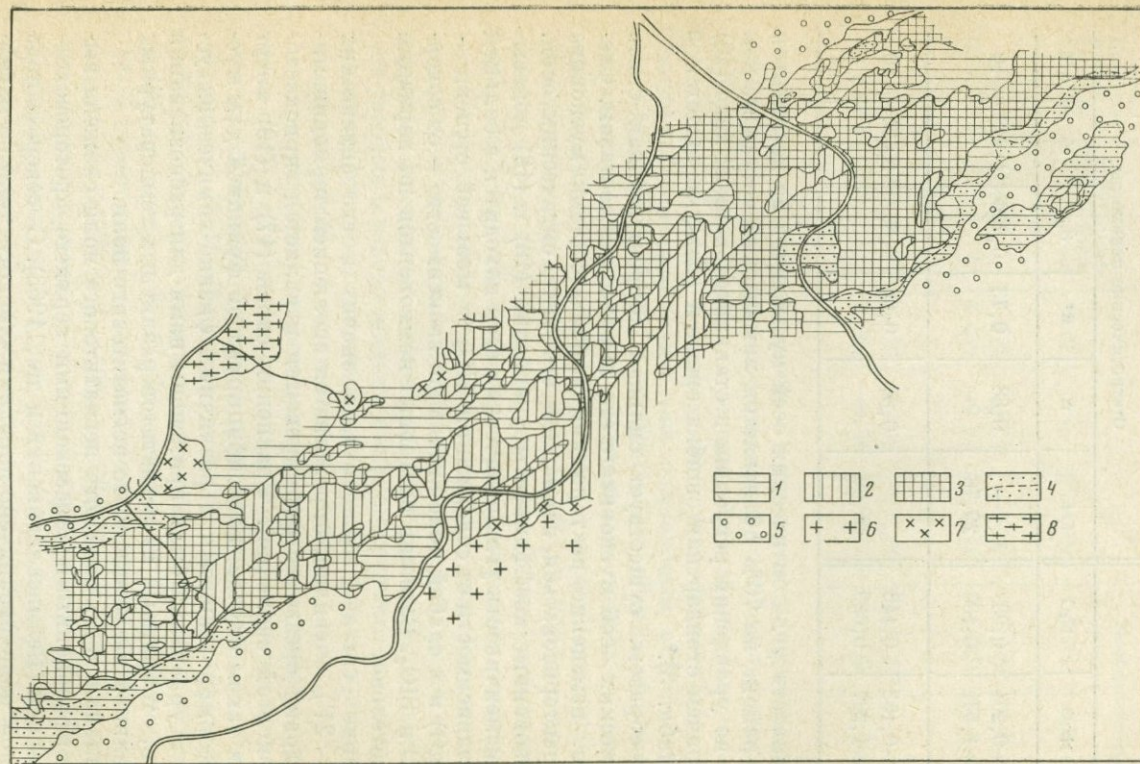
регрессии			Статистические параметры					
CaO	Na ₂ O	K ₂ O	b ₀	R	R ²	S _y	S ₁	H
0,23 1,57	-0,204 -1,531	0,03 0,136	— 29,78	0,88	0,73	0,766	1,612	10
0,198 1,717	-0,153 -1,207	0,146 0,689	15,59	0,86	0,69	0,86	1,695	10

Изменчивость угла оптических осей мусковитов из пегматитов Мамского района на 70% объясняется химическим составом, как это видно из уравнений регрессии в стандартизованном виде (16) и (18). Причем стандартная ошибка средней (S_1) уменьшается в два раза (табл. 3).

Таким образом, существует сильная корреляционная связь угла оптических осей мусковита с его химическим составом. Следовательно, изменение вектора химического состава мусковита может характеризоваться вариацией его угла оптических осей. Стандартизованные коэффициенты уравнений (16) и (18) показывают, что изменчивость угла оптических осей находится в сильной обратной зависимости от содержания TiO₂ (в меньшей степени — Na₂O и MgO) и в слабой положительной зависимости — от содержания CaO и SiO₂. Влияние остальных компонентов на вариации $2V$ незначительно.

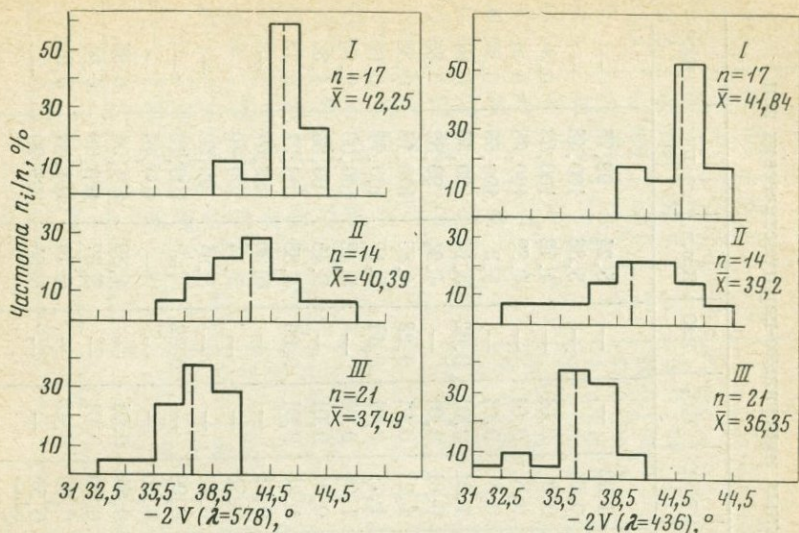
Изменение состава мусковита, а значит и его оптических свойств ($-2V$), очевидно, определяется эволюцией термодинамических условий среды его формирования и является приспособлением к этой эволюции. Уравнения связи (17) и (19) могут служить, в таком случае, классифицирующей функцией для мусковитов, формировавшихся в различных физико-химических условиях. Эти уравнения были применены нами для распознавания мусковитов, отобранных из пегматитов различных температурных зон центральной части мамского пегматитового поля.

Центральная часть мамского пегматитового поля сложена высокометаморфизованными образованиями верхнего протерозоя — мамской серией (Великославинский и др., 1963). С северо-запада пегматитовое поле ограничено породами чуйского тектоно-магматического комплекса, с юго-востока — синорогенными гнейсогранитами и гранитами мамского комплекса и посторогенными гранитоидами конкудеро-мамаканского комплекса (рис. 1). Отдель-



Р и с. 1. Схема распределения минеральных ассоциаций в пегматитах центральной части мамского пегматитового поля

Минеральные ассоциации пегматитов: 1 — микроклин + плагиоклаз + мусковит + кварц; 2 — микроклин + плагиоклаз + биотит + кварц; 3 — микроклин + плагиоклаз + биотит + мусковит + кварц; 4 — микроклин + плагиоклаз + зеленый мусковит + кварц; 5 — зона кварцевых жил (беспегматитовая); 6 — порфировидные граниты конкудеро-мамананского комплекса; 7 — граниты и гранито-гнейсы мамско-оронского комплекса; 8 — граниты, гранито-гнейсы и мигматиты чуйского комплекса



Р и с. 2. Гистограммы распределения углов оптических осей мусковита ($-2V$) для $\lambda = 578$ и $\lambda = 436$, рассчитанных по уравнениям (17) и (19) в табл. 3

I, II, III — зоны минеральных ассоциаций пегматитов мамского пегматитового поля (см. табл. 5), n — количество химических анализов мусковита, \bar{X} — среднеарифметическое расчетное ($-2V$)

ные выходы гнейсо-гранитов встречаются внутри площади пегматитового поля. Образование гнейсо-гранитов, гранитов и пегматитов мамского комплекса сингенетично региональному метаморфизму (позднекаледонскому или раннегерцинскому). По данным исследований пегматитового поля в его центральной части устойчиво встречаются следующие минеральные ассоциации пегматитов: 1 — микроклин + плагиоклаз + зеленый мусковит + кварц; 2 — микроклин + плагиоклаз + мусковит + кварц; 3 — микроклин + плагиоклаз + биотит + мусковит + кварц; 4 — микроклин + плагиоклаз + биотит + кварц (рис. 1). Минеральная зональность пегматитового поля хорошо сопоставляется с метаморфической зональностью вмещающих пород (Другов, 1965; Карпов, Другов, 1966; Другов, Леонтьев, 1968). Последовательная смена зон жильных образований: кварцевых жил (беспегматитовая зона) — пегматитов с зеленым мусковитом — пегматитов с обычным (коричневатым) мусковитом (без биотита) — пегматитов с мусковитом и биотитом — пегматитов с биотитом (без мусковита) — соответствует прогрессивной сменяемости метаморфических зон от эпидиот-амфиболитовой фации до высокотемпературных субфаций амфиболитовой фации.

При расчете значений $-2V$ (совокупного вектора состава мусковита) по уравнениям связи (17) и (19) нами использовались 54 химических анализа мусковитов, отобранных автором из пегматитов различных минеральных ассоциаций (табл. 4).

Таблица 4

Результаты химических анализов мусковитов из пегматитов различных минерально-парагенетических зон мамского пегматитового поля

Анализ, №	SiO ₂	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	TiO ₂	MnO	FeO	Fe ₂ O ₃	K ₂ O	Na ₂ O	P ₂ O ₅	BaO	П.п.п.	Σ	H ₂ O
1	46,12	35,53	0,05	0,36	0,16	—	1,0	1,17	9,1	1,02	—	—	5,24	99,75	—
2	46,32	34,10	0,33	0,56	0,11	—	1,3	1,64	9,6	0,64	—	—	5,88	100,48	—
3	45,97	34,36	—	0,47	0,12	0,03	1,41	1,33	11,2	0,8	0,01	—	4,72	100,42	0,9
4	45,59	35,03	0,05	0,97	0,14	0,02	0,65	1,62	11,18	0,8	0,01	—	4,89	100,95	0,81
5	44,93	35,47	—	0,78	0,19	0,01	0,54	1,49	11,1	0,8	0,01	—	5,3	100,63	0,87
6	45,44	35,02	0,18	0,56	0,08	0,03	0,65	1,15	9,24	1,21	0,01	0,62	5,14	99,36	0,81
7	45,53	33,75	0,06	0,64	0,42	0,04	1,34	1,41	10,34	0,81	0,01	—	4,94	99,32	0,85
8	44,64	36,84	0,12	0,39	0,42	0,03	0,47	1,92	9,99	1,27	0,01	0,23	4,83	100,18	0,38
9	44,98	36,67	0,18	0,81	0,06	0,02	0,40	1,09	10,01	1,21	0,01	0,11	5,17	100,74	0,66
10	45,72	34,96	—	0,51	0,22	0,02	0,65	1,24	10,11	1,06	0,06	—	5,48	100,03	0,94
11	44,62	35,02	0,12	0,34	0,15	0,10	1,23	1,88	10,03	0,81	0,01	—	5,48	99,84	1,34
12	45,09	35,13	0,3	0,43	0,06	0,11	1,77	1,28	9,79	1,26	0,01	0,06	4,88	100,27	0,75
13	44,12	33,53	0,68	0,64	0,3	—	1,19	1,89	10,34	0,48	—	—	6,50	99,67	—
14	46,65	33,69	0,05	0,68	0,18	0,18	1,15	1,55	9,36	0,76	—	—	5,44	99,69	—
15	44,95	34,34	0,05	0,79	0,3	0,05	1,44	1,68	9,60	0,76	—	—	5,54	99,50	—
16	44,6	36,77	0,30	0,09	0,05	—	0,35	0,53	9,86	0,90	—	0,02	—	100,18	—
17	44,54	37,54	0,38	0,57	—	—	0,58	0,62	10,23	0,80	—	—	—	100,16	—
18	45,34	32,44	0,05	1,72	0,28	0,02	1,70	1,70	12,11	0,80	0,01	—	4,89	101,06	0,95
19	44,94	35,38	0,05	0,85	0,16	0,01	0,72	1,50	11,20	0,80	0,01	—	5,37	100,99	0,91
20	45,35	33,36	1,02	1,02	0,05	—	1,48	1,60	11,20	0,80	0,42	—	4,74	101,04	0,92
21	44,29	31,34	0,05	1,55	0,50	—	3,38	2,93	9,80	<u>0,50</u>	—	—	5,56	99,90	—

Таблица 4 (продолжение)

Анализ, №	SiO ₂	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	TiO ₂	MnO	FeO	Fe ₂ O ₃	K ₂ O	Na ₂ O	P ₂ O ₅	BaO	П.п.п.	Σ	H ₂ O
22	45,45	33,13	0,22	1,95	0,64	—	1,22	1,81	9,80	0,64	—	0,36	4,96	100,18	—
23	44,38	32,52	0,33	1,07	0,40	—	2,16	1,87	9,80	0,60	—	—	6,98	100,11	—
24	46,57	32,70	0,30	0,64	0,16	0,04	1,62	2,10	10,47	0,80	0,01	0,11	4,57	100,11	0,19
25	45,18	33,73	0,18	0,56	0,15	0,06	1,76	2,47	10,67	0,80	0,01	—	4,83	100,42	0,65
26	43,7	31,96	0,06	1,30	0,55	0,07	2,14	3,87	10,06	0,65	0,01	—	5,30	99,71	1,15
27	45,55	31,92	0,36	1,89	0,39	0,05	1,58	2,14	10,37	0,65	0,01	0,70	4,40	101,20	0,36
28	45,94	33,49	—	0,86	0,28	0,03	1,31	1,62	10,52	0,72	0,01	—	4,82	99,64	0,53
29	45,74	33,52	0,18	0,99	0,56	0,02	1,22	1,88	11,29	0,65	0,01	0,02	4,58	100,78	0,46
30	45,39	32,77	—	0,99	0,36	—	2,09	1,93	9,60	0,60	—	—	5,58	99,31	—
31	46,12	33,53	0,05	1,51	0,30	0,01	0,72	0,92	10,70	0,80	—	0,02	4,72	99,75	—
32	45,20	33,72	0,12	1,03	0,76	0,02	1,33	2,08	10,66	0,80	0,01	—	4,87	100,63	0,63
33	45,41	33,49	0,06	1,33	0,75	0,01	1,15	1,34	10,47	0,52	0,01	0,39	4,52	99,45	0,29
34	44,82	33,50	0,10	1,51	0,68	0,01	2,00	0,78	11,18	0,65	0,01	—	4,89	99,81	0,98
35	45,49	32,56	0,24	1,51	0,58	0,01	1,30	1,21	11,22	0,80	0,02	—	5,53	99,47	1,09
36	44,21	33,08	0,18	1,00	0,48	0,05	3,81	1,32	9,90	0,73	0,01	0,03	4,47	99,30	0,87
37	46,50	33,53	0,01	1,55	0,75	0,03	1,26	1,26	11,35	0,65	0,01	—	4,42	101,01	0,29
38	45,55	33,96	0,12	1,04	0,66	0,05	1,05	1,82	10,67	0,80	0,01	—	4,77	101,20	0,71
39	46,04	32,04	0,10	1,10	0,57	0,01	1,66	1,79	11,21	0,70	0,03	—	5,07	100,32	1,19
40	44,97	33,12	0,10	1,72	0,69	0,01	1,27	1,33	11,21	0,69	0,01	—	5,24	100,36	1,03
41	43,71	31,72	0,20	0,99	0,42	0,03	1,02	1,76	10,79	0,72	0,02	—	7,12	101,00	1,84
42	45,25	33,52	0,05	1,39	0,64	—	1,44	1,64	9,80	0,68	—	—	5,08	99,49	—
43	44,87	33,00	0,11	2,11	0,81	—	1,65	1,84	9,90	0,68	—	0,47	4,96	100,40	—

Т а б л и ц а 4 (окончание)

Анализ, №	SiO ₂	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	TiO ₂	MnO	FeO	Fe ₂ O ₃	K ₂ O	Na ₂ O	P ₂ O ₅	BaO	П.п.п.	Σ	H ₂ O
44	44,98	33,85	—	1,39	0,51	—	1,00	2,27	9,90	0,80	—	—	5,84	100,54	—
45	44,15	31,03	0,39	2,19	0,64	—	2,76	1,75	9,60	0,64	—	—	6,58	99,73	—
46	45,70	33,64	0,22	1,87	0,47	—	1,22	1,69	10,00	0,64	—	—	4,68	100,13	—
47	44,91	33,23	—	1,71	1,08	—	1,30	1,46	9,60	0,64	—	0,30	5,16	99,39	—
48	45,50	34,49	—	1,15	0,53	—	1,00	1,68	9,90	0,68	—	—	5,26	100,19	—
49	45,50	33,62	0,06	1,08	0,59	0,04	1,09	1,20	10,45	0,72	0,01	—	4,98	99,38	0,77
50	44,45	32,67	0,37	0,93	0,47	0,02	1,45	2,62	11,24	0,73	0,01	—	5,10	100,06	1,27
51	45,14	33,57	—	1,34	0,55	0,02	1,45	1,54	10,52	0,72	—	0,17	5,30	100,34	—
52	45,58	33,45	0,12	1,20	0,48	0,03	1,41	1,87	11,16	0,85	0,01	—	4,57	100,75	—

П р и м е ч а н и е. Анализы произведены в Центральной химико-технологической лаборатории Иркутского геологического управления. Аналитики Е. М. Гладких, М. А. Барановская, М. Г. Елисейкина, А. Г. Кузменкова.

Места взятия проб мусковита: 1,2—правый борт долины р. Тахтыган (среднее течение); 3—верховья рч. Мохового (правый приток р. Ч. Олонгро); 4,5—правый борт долины р. Чуя около устья р. Ч. Олонгро; (6—9)—водораздел река Ч. Довгокит и М. Довгокит; 10—правый борт долины р. Ч. Довгокит (верхнее течение); 11—правый борт долины р. Ч. Довгокит (среднее течение); 12—водораздел между реками Ч. Довгокит и М. Довгокит; 13—коллекция Б. Е. Карского; 14—верховье р. Дивукан; 15—водораздел между реками Дивукан и Тахтыган (в верхнем течении); 16, 17—коллекция Н. В. Петровской (Б. Северный); 19—левый борт долины ручья Оленьего (левый приток р. Ч. Олонгро); 20—левый борт долины р. Ч. Олонгро (среднее течение); 21—левый борт долины р. Тахтыган (верхнее течение); 22—левый борт долины р. Тахтыган (нижнее течение); 23—устье ручья Каменистого (левый приток р. Тахтыган); 24—левый борт р. Ч. Довгокит (верхнее течение); 25—верховье р. Ч. Довгокит; 26, 28—водораздел между реками Ч. Довгокит и М. Довгокит; 27—левый борт долины р. Ч. Довгокит; 29, 30—левый борт

ручья Каменистого вблизи устья; 31—устье р. Ч. Олонгро; 32—правый борт долины р. Ч. Довгокит (верхнее течение); 33—водораздел между реками Ч. Довгокит и Ч. Олонгро (среднее течение); 34—правый борт долины р. Согдиондон (нижнее течение); 35—водораздел между реками Ч. Довгокит и Ч. Олонгро (нижнее течение); 36—водораздел между реками Ч. Довгокит и Довгокиткан (среднее течение); 37—правый борт долины р. Ч. Довгокит (среднее течение); 38—левый борт долины р. Ч. Довгокит (верхнее течение); 39—правый борт долины р. Ч. Олонгро (верхнее течение); 40—водораздел между реками Ч. Олонгро и Согдиондон (верхнее течение); 41—правый борт долины р. Ч. Олонгро (верхнее течение); 42—правый борт долины ручья Каменистого (среднее течение); 43—водораздел между ручьями Каменистым и Б. Северным; 44—левый борт долины р. Колотовки (верхнее течение); 45, 46—левый борт долины р. Тахтыган (нижнее течение); 47—водораздел между ручьями Каменистым и Б. Северным; 48—около устья р. Б. Северной; 49—левый борт долины р. Ч. Довгокит (верховье); 50—левый борт долины р. Ч. Олонгро (среднее течение); 51—водораздел между реками Ч. Олонгро и Ч. Довгокит (среднее течение); 52—правый борт долины р. Ч. Довгокит (верхнее течение).

Таблица 5

Распределение химических анализов мусковита по зонам минеральных ассоциаций пегматитов и средние значения — $2V$, рассчитанные по уравнениям регрессии (17) и (19) в табл. 3

Зона минеральной ассоциации пегматитов (на рис. 2)	Количество химических анализов мусковита	Минеральная ассоциация пегматитов	Расчетные среднеарифметические значения — $2V$	
			$\lambda = 578$	$\lambda = 436$
I	17	Микроклин + плагиоклаз + зеленый мусковит + кварц	$42,85 \pm 0,33$	$41,84 \pm 0,33$
II	14	Микроклин + плагиоклаз + мусковит + кварц	$40,39 \pm 0,36$	$39,21 \pm 0,72$
III	23	Микроклин + плагиоклаз + биотит + мусковит + кварц	$37,91 \pm 0,28$	$36,35 \pm 0,42$

Распределения расчетных величин — $2V$ мусковита по зонам пегматитов различных минеральных ассоциаций иллюстрируются гистограммами на рис. 2.

Сравнение средних расчетных величин для мусковитов из пегматитов различных зон (значения средних представлены в табл. 5 и на рис. 2) с помощью t -критерия показывает статистически существенное различие этих средних при уровне значимости 0,05: $t_{I-II} = 3,0$; $t_{II-III} = 4,5$ (критическое значение t для уровня значимости 0,05 равно 2,03).

Изменение состава одного минерала зависит не только от PT -условий среды минералообразования, но и в значительной степени от химического состава сравниваемых пород. Поэтому сравнение мусковитов из различных температурных зон производилось нами для пегматитов со смешанным составом по полевым шпатам. Закономерное уменьшение расчетного угла оптических осей (вектора химического состава мусковита) в прогрессивном ряду температурных зон (см. рис. 2) указывает на направленность изменения химического состава мусковита. Такое изменение состава мусковита хорошо коррелируется со средними относительными температурами образования пегматитов, оцененными нами методом Барта (Дир и др., 1966) по химическим анализам сосуществующих плагиоклаза и микроклина: для I зоны $t_{cp} = 470^\circ$ (35 пар химических анализов сосуществующих плагиоклаза и микроклина); для II зоны $t_{cp} = 510^\circ$ (35 пар химических анализов); для III зоны $t_{cp} = 540^\circ$ (95 пар химических анализов).

Полученное на БЭСМ-2М уравнение регрессии представляет собой линейную интерполяционную функцию между тремя значениями температур трех минерально парагенетических зон пегма-

титов: $t = 333, 94 + 4,089 \text{ SiO}_2 + 59, 021 \text{ TiO}_2 - 2,628 \text{ Al}_2\text{O}_3 +$
 $+ 7, 254 \text{ Fe}_2\text{O}_3 - 0,771 \text{ FeO} + 16, 85 \text{ MgO} - 98,95 \text{ MnO} + 2,886$
 $\text{CaO} + 4,28 \text{ Na}_2\text{O} + 2,61 \text{ K}_2\text{O}$; $S_y = 17,1$; $S_1 = 29, 78$; $R = 0,82$.

Таким образом, существует высокая корреляционная связь ($R^2 = 0,67$) средних температур образования пегматитов с химическим составом мусковита, а следовательно, и с углом оптических осей (парный коэффициент корреляции между t и $-2V$ равен $0,72$). Вектор химического состава мусковита ($-2V$), таким образом, является своеобразным геологическим термометром, характеризующим температурные условия формирования мусковита при относительно постоянном составе среды минералообразования.

ЛИТЕРАТУРА

- Алешин С. М., Карпов И. К., Кашик С. А. 1968. Значение обусловленности уравнений множественной регрессии при решении практических задач в геологии и геохимии. — В сб. «Применение математических методов в геологии». Алма-Ата.
- Белянкина Е. Д., Гурьева Э. Я., Игнатова М. Д., Петров В. П., Толстихина К. И. 1958. Генезис и типизация промышленного мусковита. М., Изд-во АН СССР.
- Великославинский Д. А., Казаков А. Н., Соколов Ю. М. 1963. Мамский комплекс Северо-Байкальского нагорья. М. — Л., Изд-во АН СССР.
- Дир У. А., Хауи Р. А., Зусман Дж. 1966. Породообразующие минералы. Том 3. М., «Мир».
- Другов Г. М. 1965. О связи минерально-парагенетической зональности жильных образований с региональным метаморфизмом. — В сб. «Материалы конференции молодых научных сотрудников». Иркутск, Ин-т земной коры СО АН СССР.
- Другов Г. М., Леонтьев Г. И. 1968. О зависимости минерального состава мамских пегматитов от литологии и степени метаморфизма вмещающих пород. — В сб. «Вопросы геологии Прибайкалья и Забайкалья», вып. 3 (5). Чита.
- Карпов И. К. и Другов Г. М. 1966. О метаморфической зональности вмещающих пород мамского пегматитового поля. — Изв. АН СССР, серия геол., № 5.
- Кузнецов Е. А., 1949. Краткий курс метода Федорова в петрографии. М., Изд-во МГУ.
- Лашев Е. К. 1948. Слюда. М., Промстройиздат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭПИЦЕНТРОВ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ НА ЭВМ

Прямолинейные эпицентралы

Метод прямолинейных эпицентралей — азимутальный метод, — определяющий положение эпицентра по направлениям на него из разных пунктов, используемый при интерпретации наблюдений над близкими землетрясениями.

Графическая модификация метода прямолинейных эпицентралей подробно изложена в статье А. А. Трескова (1964) и на протяжении ряда лет использовалась как основной способ определения эпицентров землетрясений Прибайкалья. Однако графическое определение эпицентра по пересечениям прямолинейных эпицентралей, несмотря на высокую точность построений и наглядность решения, обладает и существенными недостатками. Во-первых, невозможно построение всех эпицентралей при землетрясениях, записанных многими станциями. Во-вторых, исключается возможность использования так называемых зависимых эпицентралей, дающих тождественные пересечения. Кроме того, погрешности наблюдений несколько изменяют направление эпицентралей. При достаточно высоком уровне наблюдений эти изменения незначительны, и эпицентралы, образующие большие углы, дают, как правило, хорошо согласующиеся пересечения, но по мере изменения угла между эпицентралами погрешности в их ориентировке сказываются все больше и больше, чем вызывается значительный разброс точек пересечений. Если же только ориентироваться на эпицентралы, пересекающиеся под большими углами, то ограничивается объем используемой информации.

В настоящей статье излагается аналитический вариант определения эпицентра с помощью прямолинейных эпицентралей, позволяющий использовать наиболее полно информацию, содержащуюся в результатах наблюдений.

Возможность аналитического решения задачи об эпицентре определяется тем, что прямолинейные эпицентралы отвечают линейным уравнениям:

$$A_i x + y + B_i = 0, \quad (1)$$

где x и y — координаты эпицентра, и задача сводится к решению этой системы уравнений, коэффициенты которых, определяемые через наблюдаемые моменты вступлений, осложнены погрешностями.

Взаимность точек и прямых и решающая прямая

Если уравнение (1) определяет прямые, пересекающиеся в одной точке (пучок прямых), то все они будут удовлетворять равенствам

$$A_i x_0 + y_0 + B_i = 0,$$

где x_0 и y_0 — координаты центра пучка. Отсюда следует линейная зависимость между A и B , в связи с чем в плоскости коэффициентов точки, определяемые координатами A_i, B_i , будут лежать на одной прямой. Этим определяется взаимность точек и прямых.

Совокупности прямых, пересекающихся в одной точке, соответствует совокупность точек, лежащих на одной прямой.

Какие бы две точки — 1 и 2 — на этой прямой мы ни взяли, рассматривая их координаты как коэффициенты линейных уравнений $A_1x + y + B_1 = 0$ и $A_2x + y + B_2 = 0$ и решая последние, мы всегда получим одни и те же значения x и y , отвечающие центру пучка прямых. Поэтому прямую в координатах A и B будем называть решающей прямой. Если в качестве точек 1 и 2 примем точки ее пересечения с осями, то $A_1 = a, B_1 = 0, A_2 = 0, B_2 = b$, а неизвестные определяются формулами:

$$x = \frac{b}{a}; \quad y = -b. \quad (2)$$

В действительности коэффициенты уравнения (1), определяемые из наблюдений, содержат погрешности, и отвечающие им точки не будут строго лежать на прямой. Поэтому решение задачи сводится к возможно более точному восстановлению решающей прямой по эмпирически определенным точкам.

Средняя точка и средняя прямая

Если все точки лежат на прямой $A = a + mb$, то на этой же прямой лежит и «средняя точка», координаты которой

$$\bar{A} = \frac{\Sigma A_i}{n}; \quad \bar{B} = \frac{\Sigma B_i}{n}.$$

Действительно, по условию $A_i = a + mB_i$ и, после суммирования, $\Sigma A_i = na + m\Sigma B_i$ или $\frac{\Sigma A_i}{n} = a + m \frac{\Sigma B_i}{n}$, чем и доказывается высказанное выше утверждение.

Если координаты точек искажены погрешностями, то истинная средняя точка определится координатами:

$$\frac{\Sigma (A_i + \delta A_i)}{n} = \frac{\Sigma A_i}{n} + \frac{\Sigma \delta A_i}{n}; \quad \frac{\Sigma (B_i + \delta B_i)}{n} = \frac{\Sigma B_i}{n} + \frac{\Sigma \delta B_i}{n}.$$

При несистематическом характере погрешностей их суммирование приведет к существенной компенсации погрешностей противоположных знаков, а остающиеся погрешности уменьшатся в n раз, при делении на число уравнений, поэтому при возрастании n

$$\frac{\Sigma \delta A_i}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{\Sigma \delta B_i}{n} \rightarrow 0, \\ \frac{\Sigma (A_i + \delta A_i)}{n} \rightarrow \frac{\Sigma A_i}{n}, \quad \frac{\Sigma (B_i + \delta B_i)}{n} \rightarrow \frac{\Sigma B_i}{n},$$

т. е. средняя точка, определенная по эмпирическим данным, стремится к совмещению с истинной средней точкой, лежащей на истинной решающей прямой. На основе имеющейся информации мы не можем получить ничего более достоверного, чем положение средней точки, поэтому приближенную решающую прямую нужно проводить через эту точку.

Разделим точки данного комплекса на две группы: группу из K точек, для которой $B_k < \bar{B}$, и группу из L точек, для которой $B_l > \bar{B}$, и проведем прямую через средние точки этих боковых групп. Пусть уравнение искомой прямой будет $A = a + mb$; в таком случае параметры a и m определяются из уравнений:

$$\frac{\Sigma A_k}{K} = a + m \frac{\Sigma B_k}{K}; \quad \frac{\Sigma A_l}{L} = a + m \frac{\Sigma B_l}{L}.$$

Записав эти равенства в форме

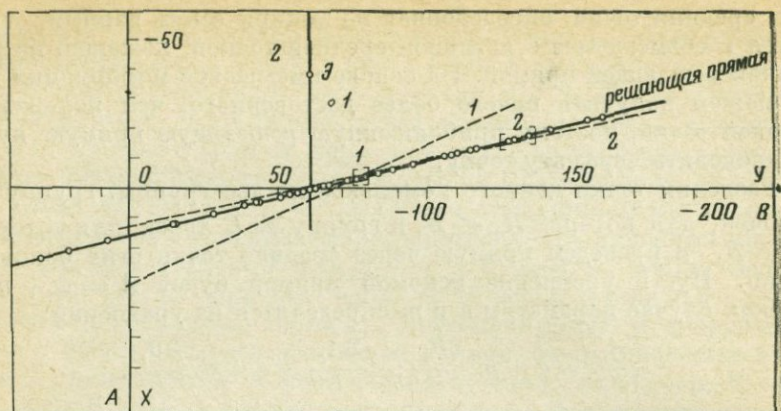
$$\Sigma A_k = Ka + m \Sigma B_k; \quad \Sigma A_l = La + m \Sigma B_l$$

и суммируя, получим

$$\Sigma A_k + \Sigma A_l = (K + L)a + m \Sigma (B_k + B_l),$$

но $\Sigma A_k + \Sigma A_l = \Sigma A_i$ для всего комплекса из n точек и $\Sigma B_k + \Sigma B_l = \Sigma B_i$, а так как $K + L = n$, то $\frac{\Sigma A_i}{n} = a + m \frac{\Sigma B_i}{n}$, следовательно, прямая, проходящая через боковые средние точки, проходит и через общую среднюю точку. Так как $K < n$ и $L < n$, то боковые средние точки определяются менее точно, чем общая средняя, но по мере возрастания числа точек в боковых группах и боковые средние точки стремятся к совмещению с истинной решающей прямой. Мы видели, что приближенную решающую прямую нужно проводить через среднюю точку, и, в связи с вышеизложенным, приходим к выводу, что оптимальной приближенной решающей прямой является «средняя прямая», проходящая через боковые средние точки.

На рис. 1 изображены точки, отвечающие эпицентрам Южнобайкальского землетрясения 30 августа 1966 г. и построенная по ним средняя прямая. Как видим, линейность в расположении точек выдержана на весьма высоком уровне, что обеспечивает и высокую точность определения эпицентра. В этом мы ниже убедимся. Но и при Южнобайкальском землетрясении имеются эпицентралы, пересечения которых существенно не согласуются с эпицентром, определяемым по решающей (средней) прямой. Действительно, прямая, проведенная через две точки в плоскости коэффициентов, определяет координаты x и y точки пересечения двух соответствующих эпицентралей в плоскости неизвестных, а таких прямых (часть которых изображена на рис. 1 пунктиром), несогласующихся с решающей прямой, существует довольно много. Заметим, что эпицентралям, дающим пересечения, не согласующиеся с фак-



Р и с. 1. Средняя решающая прямая и отвечающий ей эпицентр (э) и решающие прямые по группам точек 1 и 2 (пунктир) и соответствующие им эпицентры

тическим эпицентром, соответствуют близко расположенные точки, что говорит о малом различии в направлениях соответствующих эпицентральных. Эпицентраль, отвечающие далеко отстоящим точкам, пересекаются под большими углами и с большей уверенностью определяют эпицентр своим пересечением; вместе с тем далеко отстоящие точки имеют и больший «вес» при определении решающей прямой. Из этого следует, что «вес» пары эпицентральных, при определении эпицентра их пересечением, характеризуется расстоянием между соответствующими им точками в плоскости (A, B).

Переход от определения эпицентра по пересечению эпицентральных в плоскости переменных к определению по решающей прямой в плоскости коэффициентов обеспечивает использование всех эпицентральных.

Особого рассмотрения требуют так называемые зависимые эпицентраль. Допустим, что в определении эпицентра участвуют станции 1, 2, 3, 4, 5. Построив эпицентраль (1, 2, 3, 4) и (2, 3, 4, 5), определим точку их пересечения. Наряду с этими эпицентралями, по наблюдениям тех же станций можно построить и другие, например (1, 2, 4, 5). Однако при определении эпицентра пересечением эпицентральных такие дополнительные построения не имеют смысла, так как эпицентраль (1, 2, 4, 5) пройдет через точку пересечения двух первых, поскольку эта точка согласована с наблюдениями всех пяти станций.

Точки пересечения зависимых эпицентральных в плоскости (x, y) совпадают, но точки, отвечающие им в плоскости (A, B), различны. В том случае, если пересечения зависимых эпицентральных хорошо согласуются с эпицентром, линейное расположение отвечающих им в плоскости (A, B) точек будет соответствовать решающей прямой, чем дополнительно подчеркивается надежность определяемого эпицентра; если же точки, отвечающие зависимым эпицент-

ралям, не лежат на решающей прямой, то это указывает на существование несогласованностей, которые необходимо учитывать, стремясь к возможной полноте использования информации, в частности при использовании для определения эпизцентра описанной ниже программы.

Композиции

Выше уже отмечалось, что общая средняя точка наиболее близка к истинной решающей прямой, иначе говоря, отражает информацию, содержащуюся в исходных уравнениях, с наибольшей достоверностью. Поэтому будем считать общую среднюю точку принадлежащей истинной решающей прямой, а в таком случае погрешности неизвестных x и y , определенных по средней прямой, будут обусловлены поворотом последней около общей средней точки, вызванным фактическим, нам неизвестным, распределением погрешностей координат точек заданного комплекса.

Если бы существовала возможность такого перехода от исходного комплекса точек к другому, при котором изменяется распределение погрешностей координат между точками K и L групп, вызывающее изменение ориентировки средней прямой, но общая средняя точка, наиболее достоверно отражающая информацию, остается неизменной, то, используя большое число таких преобразований, можно было бы получить соответствующие им решения и принять за окончательные значения неизвестных их средние значения.

Такая возможность, как показал А. А. Тресков, существует и реализуется с помощью композиций — преобразований комплексов точек, сохраняющих среднюю точку и преобразующих исходный линейный комплекс точек в другие точки, лежащие на той же прямой.

Существует множество композиций, из которых мы рассмотрим следующие:

1. Двойная композиция — преобразование, при котором каждая точка исходного комплекса используется дважды, комбинируясь с другими, а координаты точек нового комплекса определяются средними значениями координат соответствующей пары точек. Число точек при этой композиции не изменяется.

2. Двусторонняя композиция — преобразование, при котором каждая точка группы K комбинируется с каждой точкой группы L , причем координаты точек нового комплекса определяются формулами:

$$A_{kl} = \frac{KA_k + LA_l}{K + L}; \quad B_{kl} = \frac{KB_k + LB_l}{K + L}.$$

В результате рассмотренной композиции происходит существенное перераспределение погрешностей точек K и L групп, чем вызывается поворот средней прямой.

3. P — композиция, с помощью которой комплекс из n точек преобразуется в комплекс из $K + 1$ точки, причем K точек остаются неизменными, а группа из остальных $(n - K)$ точек заменяется одной, координаты которой определяются формулами:

$$A_p = \frac{K+1}{n} \sum A_i - \sum A_i; \quad B_p = \frac{K+1}{n} \sum B_i - \sum B_i.$$

4. Композиция приведения к 10 точкам. Пусть исходный комплекс состоит из $n = 9K + r$ точек. Заменяя K точек каждой группы одной с координатами, средними для группы, а остающиеся r точек — одной с координатами A_2 и B_2 , имеем для последних значения:

$$A_r = 10\bar{A} - \sum \bar{A}_i; \quad B_r = 10\bar{B} - \sum \bar{B}_i,$$

или после преобразования:

$$A_r = \frac{\sum A_i + (K-r)\bar{A}}{K}, \quad B_r = \frac{\sum B_i + (K-r)\bar{B}}{K},$$

где \bar{A} и \bar{B} — средние значения координат исходного комплекса, а \bar{A}_i и \bar{B}_i — средние значения координат в группах из K точек.

Доказательства, что все рассмотренные преобразования удовлетворяют требованиям, предъявляемым к композициям, мы опускаем для краткости изложения. Суть метода композиций определяется переходом от одной прямой, отвечающей совокупности исходных уравнений, к комплексу прямых, соответствующих различным распределениям погрешностей в координатах точек комплексов, получаемых из данного. При двух переменных (A , B) значения одной из них (B) можно считать истинными, а смещения точек с истинной решающей прямой отнести за счет погрешностей второй координаты (A).

Рассмотрим пример, показывающий эффективность метода композиций. В плоскости коэффициентов была проведена прямая, отсекающая на осях отрезки $a = 13$ и $b = 26$, что соответствует $x = \frac{b}{a} = 2$ и $y = -b = -26$, и затем точки были нанесены так, чтобы сумма погрешностей $\sum \delta A_i$ равнялась нулю и погрешности δA_i не были бы закономерно связаны с изменением координаты B .

В табл. 1 приведены значения коэффициентов A_i , B_i десяти линейных уравнений.

Применением к исходному комплексу P -композиций получено $C_{10}^8 = 45$ комплексов из девяти точек. Каждый из этих 45 комплексов многократно подвергался двойной композиции (по схеме, указанной ниже), в результате чего получены 55 комплексов из девяти точек, каждый из которых преобразовывался двусторонней

Таблица 1

Коэффициент	Номер уравнения, i										Среднее
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A	12	10	11	9	8	9	6	7	4	4	8,0
B	4	5	6	7	8	9	12	14	16	19	10,0

композицией. После этого определялись отвечающие средней прямой значения x и y и средние значения неизвестных по всем 55 вариантам. За окончательные решения приняты средние значения неизвестных по 45 вариантам, отвечающим P -композициям.

Для указанной системы из 10 несовместных уравнений (табл. 1) по этой схеме получены следующие значения неизвестных: $x = 2,01$; $y = -26,10$.

Решение по средней прямой, построенной для комплекса точек, отвечающих исходным несовместным уравнениям, приводит к значениям неизвестных $x = 1,91$ и $y = -25,28$, а используя метод наименьших квадратов, найдем $x = 1,74$ и $y = -23,88$.

Как видим, решение методом композиций дает значения неизвестных с очень высокой точностью, тогда как метод наименьших квадратов приводит, в данном случае, к наименее качественным результатам. Очень близкие к истинным осредненные значения неизвестных, полученные методом композиций, говорят о том, что повороты средней прямой относительно истинной решающей прямой имеют случайный характер.

Программа

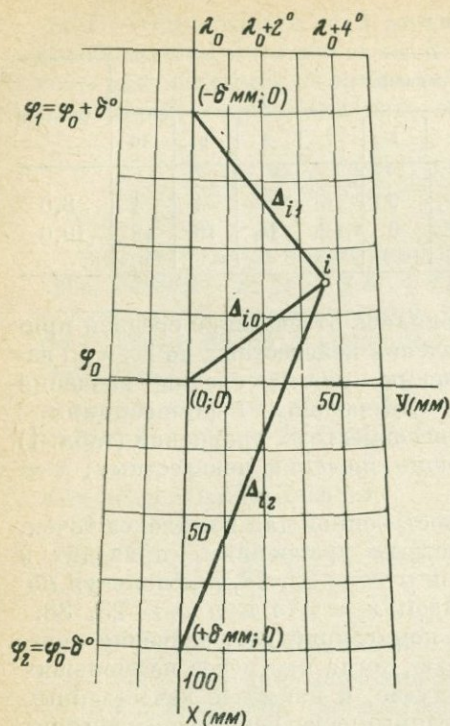
Задача об определении координат эпицентра близкого землетрясения была решена методом прямолинейных эпицентральных на ЭВМ (БЭСМ-2) и отлажена на материалах приборкальской сети станций. Вся задача подразделяется на три части.

Первая часть (блоки 1, 2) включает расчет параметров прямолинейных эпицентральных и оценку координат эпицентра землетрясения по средней решающей прямой (A, B).

Расчет параметров прямолинейных эпицентральных осуществляется на плоском планшете в прямоугольной системе координат (x, y), что требует соответствующей подготовки исходного материала, т. е. перевода географических координат станций в декартовы координаты плоского планшета. Это осуществляется во втором блоке.

По формулам сферической тригонометрии рассчитываем базисные расстояния Δ_{ij} :

$$\cos \Delta_{ij} = \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j), \quad (j = 0, 1, 2),$$



Р и с. 2. Положение опорных точек и станций (i) в декартовой и географической системах координат

где φ_i, λ_i — географические координаты i -й станции, а φ_j, λ_j — координаты опорных точек: $\varphi_1 = \varphi_0 + \delta^\circ, \varphi_2 = \varphi_0 - \delta^\circ, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$.

По формулам $\arcsin \sqrt{1 - \cos^2 \Delta_{ij}}$ вычисляем Δ_{ij} в радианах, а затем, используя масштаб, получаем Δ_{ij} в миллиметрах соответствующего планшета.

С другой стороны, $\Delta_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, где (x_j, y_j) — декартовы координаты опорных точек, которые в соответствии с рис. 2 будут $x_1 = -b, y_1 = 0, x_2 = +\delta, y_2 = 0, x_0 = y_0 = 0, (x_i, y_i)$ — искомые декартовы координаты станций.

Учтя сказанное выше, найдем

$$x_i = \frac{\Delta_{i1}^2 - \Delta_{i2}^2}{4\delta} \quad \text{и} \quad y_i = \sqrt{\Delta_{i0}^2 - x_i^2},$$

где $\delta = 4 \times 22,252 \text{ мм/град}$ — величина базиса в миллиметре планшета.

Блок 3 — формирование четырех команд сравнения для блока 8 с учетом соответствующего δt_{\min} ограничения, налагаемого на разности близких моментов.

Блок 4 — подготовка счетчиков и сумматоров для расчета параметров прямолинейных эпицентралей.

Блок 5 — осуществляется перебор всех возможных сочетаний по четыре из числа m станций. Перебор производится последовательно с учетом соответствующих ограничений — для разностей моментов ($\delta t_{ik} > \delta t_{\min}$), для расстояний между станциями ($\Delta_{ik} \leq \Delta_{\max}$) и их взаимного линейного расположения, которое контролируется блоком 5.

В ходе подбора очередной четверки станций определяется ряд промежуточных параметров: $t_2 - t_1 = t_{21}, t_3 - t_2 = t_{32}$ и т. д. и их произведения: $t_{21}, t_{32}, t_{43}, t_{31}, t_{32} t_{43}, t_{21} t_{31} t_{41}, t_{41} t_{42} t_{43}$.

Блок 6 — расчет параметров прямолинейных эпицентралей. Из уравнения прямолинейной эпицентрали

$$A\Delta_1^2 - B\Delta_2^2 + C\Delta_3^2 - D\Delta_4^2 = 0,$$

где

$$A = (a) = \frac{1}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_4 - t_1)}; \quad B = (b) = \frac{1}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)};$$

$$C = (c) = \frac{1}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_3)}; \quad D = (d) = \frac{1}{(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)};$$

$$\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 = x_i^2 + y_i^2 - 2(x_i x + y_i y) + x^2 + y^2,$$

где x_i, y_i — координаты i -й станции, а x, y — координаты эпицентра, получим:

$$\begin{aligned} a\Delta_1^2 - b\Delta_2^2 + c\Delta_3^2 - d\Delta_4^2 &= (a - b + c - d)(x^2 + y^2) + a(x_1^2 + y_1^2) - \\ &- b(x_2^2 + y_2^2) + c(x_3^2 + y_3^2) - d(x_4^2 + y_4^2) - 2[a(x_1 x + y_1 y) - \\ &- b(x_2 x + y_2 y) + c(x_3 x + y_3 y) - d(x_4 x + y_4 y)] = 0. \quad 2(ax_1 - bx_2 + \\ &+ cx_3 - dx_4)x + 2(ay_1 - by_2 + cy_3 - dy_4)y = a(x_1^2 + y_1^2) - \\ &- b(x_2^2 + y_2^2) + c(x_3^2 + y_3^2) - d(x_4^2 + y_4^2), \end{aligned}$$

или $\alpha x + \beta y = \gamma$,

где $\alpha = (ax_1 - bx_2 + cx_3 - dy_4)$, $\beta = (ay_1 - by_2 + cy_3 - dy_4)$,

$$\gamma = \frac{1}{2} a(x_1^2 + y_1^2) - b(x_2^2 + y_2^2) + c(x_3^2 + y_3^2) - d(x_4^2 + y_4^2).$$

Приведем уравнение к виду $(\alpha/\beta)x + y = \gamma/\beta$ и, полагая $\frac{\alpha}{\beta} = A$, $\frac{\gamma}{\beta} = B$, получим уравнение прямолинейной эпицентрали в форме $Ax + y = B$.

Блок 7. Полученная информация накапливается в массивах (A_i) и (B_i) и в сумматорах ΣA_i и ΣB_i . Если общее число уравнений ограничивается верхним пределом $n = 60$ (можно, конечно, использовать и большее число эпицентралей), то в этом случае набор дальнейших четверок станций прекращается.

Блок 8 — блок четырех команд сравнения последовательно перебираемых моментов вступления одноименных волн на станциях, начиная с 4-го и кончая 1-м моментом. Выход с этого блока означает, что мы уже перебрали все допустимые ограничения сочетания по четыре из имеющегося числа станций.

Блок 9 — вычисляем и выдаем на печать параметры осредненной эпицентрали: $\bar{A}\bar{B}$ и Δx (отрезок, отсекаемый ею на оси x).

Блок 10 — предварительная оценка координат эпицентра землетрясения, осуществляемая способом двух «средних».

Вычисляем сумму $\sum_K B_i$, где все $B_i < \bar{B}$, и $\sum_K A_i$ для всех A_i , соответствующих выбранным B_i . Вычисляем:

$$\bar{A}_K = \frac{\sum_K A_i}{K} \quad \text{и} \quad \bar{B}_K = \frac{\sum_K B_i}{K}$$

(фактически в нашем распоряжении параметры двух осредненных эпицентралей

$$\bar{A}x + y = \bar{B}, \quad \bar{A}_Kx + y = \bar{B}_K).$$

Вычисляем координаты эпицентра:

$$x = \frac{\bar{B} - \bar{B}_K}{\bar{A} - \bar{A}_K}; \quad y = \bar{B} - \bar{A}x = \bar{B} - \bar{A} \frac{\bar{B} - \bar{B}_K}{\bar{A} - \bar{A}_K},$$

и выдаем на печать параметры $\bar{A}_K, \bar{B}_K, K, x, y$.

Блок 11. Упорядочение параметров эпицентралей (A_i, B_i) по возрастанию параметра B_i , печать упорядоченных массивов

$$B_1 < B_2 < B_3 < \dots < B_i < \dots < B_n \\ A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n.$$

Блок 12. Так как массив параметров B упорядочен, то по характеру распределения A_i -х параметров можно оценить качество исходного материала. Для этого рассчитываем отклонения точек δA_i от средней решающей прямой (A, B) в плоскости коэффициентов по следующим формулам $\delta A_i = K(B_i - \bar{B}) + (\bar{A} - A_i)$, где $K = \frac{\bar{A}_K - \bar{A}}{\bar{B}_K - \bar{B}}$, и выдаем на печать массив δA_i .

Вторая часть задачи включает расчет расстояний Δ_i от каждой станции до эпицентра землетрясения по формуле

$$\Delta_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}.$$

Для станций с $\Delta > 80$ км рассчитывается средняя прямая (t, Δ) и вычисляется скорость распространения волн $V = \frac{\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_K}{\bar{t} - \bar{t}_K}$ и момент очага $t_0 = \bar{t} - \frac{\bar{\Delta}}{V}$ (гиперболический годограф).

Рассчитываем среднее квадратичное уклонение расстояний станций до эпицентра от расстояний, соответствующих годографу:

$$\sqrt{\frac{\sum (\delta \Delta_i)^2}{m}} = \delta \bar{\Delta}.$$

Блок 13. Если $\delta \Delta$ превышает 10 км, т. е. оценка точности в определении координат эпицентра выходит за класс «б», мы осуществляем переход к композициям (третья часть задачи).

Предварительно оцениваем плотность точек с параметрами (A_i, B_i) по всему интервалу $(B_1; B_n)$ в плоскости коэффициентов (A, B) . Если наблюдается значительная неравномерность в распределении точек по интервалу, что, несомненно, сказывается на

качестве массива (δA), мы отсеиваем наиболее удаленные точки. После этого осуществляем переход к s точкам.

Если $n = (s - 1)K + r$, где K и r — целые числа, то параметры $(s - 1)$ точки получаем осреднением параметров по K точек в каждой группе

$\bar{A}'_l = \frac{\sum_{i=1}^K A_i}{K}$, $\bar{B}'_l = \frac{\sum_{i=1}^K B_i}{K}$, а параметры s — точки получаем по формулам:

$$A_s = s\bar{A} - \sum_{l=1}^{s-1} \bar{A}'_l; \quad B_s = s\bar{B} - \sum_{l=1}^{s-1} \bar{B}'_l;$$

$$(l = 1, \dots, s - 1),$$

или, преобразовав эти выражения, запишем их в виде:

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^r A_i + (K - r)\bar{A}}{K}; \quad B_s = \frac{\sum_{i=1}^r B_i + (K - r)\bar{B}}{K}.$$

Группу из r точек берем в районе средней точки для того, чтобы s — точка лежала вблизи середины комплекса новых точек. Переходим к 10 точкам следующим образом. Вычисляем параметры K и r из уравнения $n = 9K + r$. Первые пять точек и точки, отвечающие $i = 7, 8, 9, 10$, формируем последовательно, осредняя параметры A_i и B_i по группе из K точек:

$$\bar{A}'_1 = \frac{\sum_{i=1}^K A_i}{1/K}; \quad \bar{B}'_1 = \frac{\sum_{i=1}^K B_i}{1/K}; \quad (1)$$

$$\bar{A}'_2 = \frac{\sum_{i=1}^{2K} A_i}{K+1/K}; \quad \bar{B}'_2 = \frac{\sum_{i=1}^{2K} B_i}{K+1/K}; \quad (2)$$

.....

$$\bar{A}'_6 = \frac{\sum_{i=1}^{5K+r} A_i + (K - r)\bar{A}}{5K+1/K}; \quad \bar{B}'_6 = \frac{\sum_{i=1}^{5K+r} B_i + (K - r)\bar{B}}{5K+1/K} \quad (6)$$

.....

$$\bar{A}'_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{9K+r} A_i}{8K+r+1/K}; \quad \bar{B}'_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{9K+r} B_i}{8K+r+1/K}. \quad (10)$$

Третья часть. После получения комплекса из 10 точек подвергаем его преобразованию в комплекс из девяти точек с помощью P -композиции в $C_{10}^8 = 45$ вариантах. Каждый из них преобразуем двойной композицией, в результате чего полу-

чается 55 новых комплексов из девяти точек. Эти 55 вариантов находятся в соответствии со следующей схемой:

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (1)
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 8 (1)
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9 (1)
 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9 (1)
 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 9, 8 (1)

 1, 2, 3, 4, 6, 5, 7, 8, 9 (1)

 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (1)

 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (2)

 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 9 (2)

При двойных композициях комбинируются рядом стоящие точки каждой строки схемы, число таких комбинаций равно 55. Каждый из этих комплексов подвергается двусторонней композиции и определяются (по средней прямой) x и y и средние их значения по всем 55 вариантам.

За окончательные значения неизвестных принимаются средние по 45 вариантам, отвечающим P -композициям, и средние квадратичные отклонения 45 частных решений от их среднего.

Пересчитываем годограф (вторая часть задачи) при новом уточненном значении координат эпицентра ($x_э$, $y_э$) и выходим на блок 14, где осуществляется переход от декартовых координат эпицентра к его географическим координатам ($\varphi_э$, $\lambda_э$).

Блок 14. Переход от $x_э$, $y_э$ к $\varphi_э$, $\lambda_э$ осуществляется по следующим формулам:

$$\sin \varphi_э = \frac{\cos \Delta_{э2} \cos \varphi_1 - \cos \Delta_{э1} \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2},$$

где $\Delta_{э1}$ и $\Delta_{э2}$ — расстояния от эпицентра до опорных точек, полученные по формулам

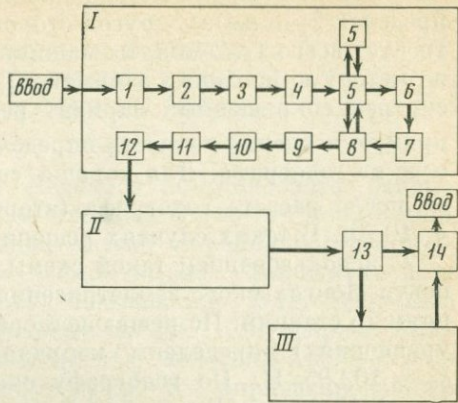
$$\Delta_{э1} = \sqrt{(x_э - x_1)^2 + (y_э - y_1)^2};$$

$$\Delta_{э2} = \sqrt{(x_э - x_2)^2 + (y_э - y_2)^2}$$

и переведенные в радианы, а φ_1 и φ_2 — широты опорных точек на нулевом меридиане.

Затем от $\sin \varphi_э$ переходим к $\varphi_э$ через $\arcsin(\sin \varphi_э)$. Долготу эпицентра определяем по формуле:

$$\cos \Delta \lambda_э = \frac{\cos \Delta_{э2} - \sin \varphi_2 \sin \varphi_э}{\cos \varphi_2 \cos \varphi_э}.$$



Р и с. 3. Блок-схема программы
 I, II, III — части задачи; 1 ÷
 ÷ 14 — блоки программы

Через $\arcsin \sqrt{1 - \cos^2 \Delta \lambda_0}$ переходим к $\Delta \lambda_0$ и вычисляем λ_0 , учитывая знак координаты y . Если $y_0 > 0$, то $\lambda_0 = \lambda_0 + \Delta \lambda_0$, если $y < 0$, $\lambda_0 = \lambda_0 - \Delta \lambda_0$.

Вышеприведенные формулы для φ_0 и λ_0 легко выводятся из двух уравнений, определяющих расстояния до опорных точек:

$$\cos \Delta_{01} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda; \quad (1)$$

$$\cos \Delta_{02} = \sin \varphi_2 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda. \quad (2)$$

Умножив (1) на $\cos \varphi_2$, а (2) на $\cos \varphi_1$ и вычтя (2) из (1), получим выражение для $\sin \varphi_0$:

$$\sin \varphi_0 = \frac{\cos \Delta_{02} \cos \varphi_1 - \cos \Delta_{01} \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2},$$

перейдя к φ_0 и вычислив $\cos \varphi_0$, подставим его значение в любое из двух уравнений и вычислим $\cos \Delta \lambda_0$ по формуле:

$$\cos \Delta \lambda_0 = \frac{\cos \Delta_{02} - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 \cos \varphi_0}.$$

После печати полученных географических координат эпицентра (φ_0 , λ_0) автоматически вводятся данные для следующего землетрясения и восстанавливаются нужные для работы части программы. Блок-схема программы показана на рис. 3.

Результаты обработки сейсмических наблюдений

Для оценки фактической применимости метода определения эпицентра близкого землетрясения были обработаны наблюдения сейсмических станций Института земной коры за 1,5 месяца, причем обнаружилось, что решение по средней прямой (по совокупности всех рассчитанных эпицентралей) только незначительно от

личается от решения методом композиций (смещения эпицентра в пределах 2—3 км). С другой стороны, решение по средней прямой требует всего 1—2 минуты машинного времени, тогда как расчеты по методу композиций занимают 7—8 минут. Поэтому был предусмотрен сокращенный вариант решения, использующий среднюю прямую и оценку точности определения эпицентра $\bar{\delta\Delta}$, определяемую из годографа. Для хорошо согласованных данных мы имеем после расчета годографа (вторая часть), как правило, $\bar{\delta\Delta} < 10$ км. В таких случаях решение задачи завершается.

С использованием такой схемы по фазе P был определен эпицентр Монгольского землетрясения 5 января 1967 г. по наблюдениям 15 станций. По решающей средней прямой (при 60 линейных уравнениях) определены координаты эпицентра $\varphi_0 = 48,07$ N, $\lambda_0 = 102,95$ E. По годографу скорость распространения волны $V = 8,15$ км/сек. Разности $\delta\Delta_i$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Станция	Δ (км)	$\delta\Delta$	Станция	Δ (км)	$\delta\Delta$
Закаменск	258	—6,5	Тырган	575	—8,2
Улан-Батор	306	—4,9	Эрзин	616	—1,6
Кяхта	361	—6,5	Алыгджер	702	9,8
Шимки	404	0,8	У-Элегест	744	—4,1
Туран	406	3,3	Жигалово	767	—5,7
Монды	424	0,8	Баргузин	775	0,8
Иркутск	477	8,2	Чадан	879	9,8
Кабанск	516	4,1			

Среднее квадратичное этих уклонений составляет 6 км, что отвечает классу точности «б». Если учесть, что эпицентральное расстояние до ближайшей станции составляет 260 км и что расположение станций одностороннее, нужно признать указанную точность весьма высокой.

В тех случаях, когда $\delta\Delta > 10$ км, мы уточняем положение эпицентра с помощью композиций.

ЛИТЕРАТУРА

Тресков А. А. 1964. Интерпретация наблюдений над близкими землетрясениями.— В сб. «Вопросы сейсмичности Сибири» (Труды Ин-та земной коры СО АН СССР, вып. 18). Новосибирск.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НИКЕЛЯ И КОБАЛЬТА В ПИРИТАХ И ВМЕЩАЮЩИХ ПОРОДАХ ЛЕНСКОГО ЗОЛОТОНОСНОГО РАЙОНА

Характерной особенностью Ленского золотоносного района является широкое развитие в представленных на его территории осадочно-метаморфических толщах частой вкрапленности и прожилкоподобных скоплений кристаллов пирита. Пиритизированные породы обычно отличаются повышенной золотоносностью и содержат золотоносные кварцевые жилы. Как впервые было отмечено еще В. А. Обручевым (1961), золотоносные россыпи района пространственно приурочены к пиритизированным толщам.

По своим морфолого-генетическим особенностям пириты подразделяются на несколько групп, подробная характеристика которых приводится в работах различных исследователей (Обручев, 1961; Другов, 1958; Салоп, 1967; Шер, 1960, 1966; Шер, Демченко, 1962; Шер, Кондратенко, 1962; Буряк, 1963, 1967). В настоящей статье рассматриваются результаты изучения пиритов, развитых в пределах двух основных золоторудных полей района: Артемовском и Сухоложском.

В Артемовском рудном поле исследовались пириты, широко развитые в пределах Догалдынской антиклинальной структуры и сформированные в процессе гидротермального метаморфизма, обусловившего развитие золотоносных кварцевых жил¹. Пириты слагают рассеянную вкрапленность и редко прожилкоподобные скопления во вмещающих кварцевые жилы песчаниках и алевролитах догалдынской свиты верхнепротерозойской (синийской) патомской серии.

Наиболее интенсивная вкрапленность рассматриваемого пирита тяготеет к зальбандам кварцевых жил и прожилков. По мере удаления от них она обычно постепенно ослабевает и на значительном расстоянии слабо проявлена. Гидротермально измененные и пиритизированные песчаники в отличие от неизмененных разностей осветлены и характеризуются повышенным развитием магнезиально-железистых карбонатов (Шер, 1966; Шер, Кондратенко, 1962).

Судя по данным химических анализов, приведенным С. Д. Шером (1966), в процессе пиритизации пород в них не происходит заметного изменения суммарного содержания железа, магния и кальция, но отмечается значительный привнос углекислоты и эквивалентный вынос кремнезема, идущего на образование кварцевых жил. Содержание золота в пиритизированных песчаниках и

¹ Процесс, относимый С. Д. Шером (1966) к [лиственитизации.

алевролитах этого участка обычно незначительное и не превышает десятых долей грамма на тонну.

На Сухоложском рудном поле изучалась пиритовая минерализация, развитая в пределах Сухоложской антиклинальной структуры, сложенной филлитовидными алевролитами верхнепротерозойской (синийской) хомолхинской свиты. Пирит развит здесь значительно более интенсивно, слагая частые вкрапленники кристаллов кубической формы, а также прожилки и линзовидные скопления. Содержание золота в пиритизированных породах значительно более высокое.

В пространственном и, вероятно, в генетическом отношении эта пиритовая минерализация, в отличие от рассматриваемой пиритовой минерализации Артемовского рудного поля, менее тесно связана с образованием золото кварцевых жил и в основной массе предшествует им во времени¹ (Буряк, 1963). Осветление вмещающих осадочных пород в связи с развитием данных сульфидов практически не устанавливается, а участки с повышенной сульфидной минерализацией этого типа ведут себя независимо относительно кварцевых жил.

Не устанавливается также закономерного увеличения интенсивности этой пиритовой вкрапленности по мере приближения к кварцевым жилам.

По имеющимся результатам ранее выполненных различными исследователями полуколичественных спектральных анализов в обеих группах пирита отмечалось наличие незначительных количеств никеля и кобальта. В своих исследованиях по данным количественных спектральных определений мы попытались установить различие в содержании этих элементов-примесей для указанных групп и тем самым проверить правомерность выделения самих групп и более обоснованно судить об условиях их образования.

Методика проведенных работ заключалась в следующем. Из керн скважин на всю мощность минерализованных зон через 5 ÷ ÷ 10 м отбирались образцы размером примерно (3 ÷ 6) × (5 ÷ 3) см, из которых для анализа выбирались отдельно пирит и вмещающая порода. При этом, если пирит был крупно- или среднекристаллическим, то он непосредственно выколачивался из породы и затем отдельно дробился до фракции 1 мм. В случае развития пирита в виде тонкой вкрапленности дробился весь образец до этих размеров. Затем для отделения пирита от породы издробленный материал отмывался в бромформе, промывался спиртом, расситовывался по фракциям и передавался минералогу для отбора навески на анализ. Отбор навески пирита и породы производился под бинокулярной лупой при 16 ÷ 32-кратном увеличении из фракций (1 ÷ 0,5) мм или (0,5 ÷ 0,25) мм в зависимости от размеров вкрап-

¹ В данном случае не рассматривается «жилный» пирит и другие сульфиды, непосредственно связанные с образованием кварцевых жил.

ленности пирита и характера срастания его с породой. При тонкой вкрапленности пирита материал отбирался только из фракции (0,5 + 0,25) мм, а при необходимости после дополнительного дробления из более мелких фракций. Для обеспечения необходимой чистоты материал пробы просматривался под биноклем не менее двух раз и, кроме того, систематически отдавался на дополнительный контроль. Во всех случаях при отборе пирита исключались все его зерна с видимыми при указанных увеличениях включениями вмещающих пород или других минералов. Соответственно при отборе на анализ материала вмещающих пород исключались все обломки пород с видимыми включениями пирита, других сульфидов или явно новообразованных «жилльных» минералов (прожилков кварца, карбонатов и пр.).

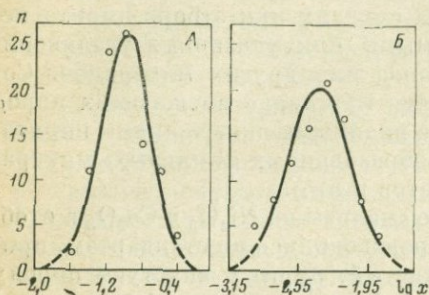
Количественные спектральные анализы на Ni_2O_3 и Co_2O_3 в отобранных пробах пирита и пород производились по стандартам, приготовленным путем введения в «чистый» пирит и «пустую» породу окислов определяемых элементов. «За чистый» пирит и «пустую» породу мы принимали такие, в которых содержания Ni_2O_3 и Co_2O_3 были ниже чувствительности определения. Перед анализом пробы и стандарты смешивались в отношении 2:1 с рабочей смесью, состоящей из семи частей серы, двух частей фтористого натрия и одной части угольного порошка. В рабочую смесь было введено 0,04% хлористого палладия, который использовался в качестве элемента сравнения при анализе пород. При анализе пиритов элементом сравнения служило железо пирита. Для регистрации спектров применялся спектрограф КСА-1, для возбуждения спектров — дуговой генератор ДГ-2, сила тока 18 ÷ 20 а.

Правильность анализов контролировалась по стандартному образцу 25⁶ Лаборатории стандартных образцов при Уральском научно-исследовательском институте черных металлов. Средняя квадратичная ошибка для обоих элементов и различных интервалов содержаний составляла 5—18%.

В общей сложности выполнено более 500 количественных определений содержания никеля и кобальта в пиритах и во вмещающих их в различной степени минерализованных породах. Результаты проверки закона распределения содержаний никеля в пиритах и во вмещающих породах, проведенной по методике, рекомендованной А. К. Митропольским (1964), Д. А. Родионовым (1964), Бондаренко (1967) и другими исследователями, позволили установить, что в обоих случаях содержания подчинены логнормальному закону распределения (табл. 1,2; см. рис.). В связи с этим оценка значимости различий средних содержаний производилась по формуле, предложенной Д. А. Родионовым (1964) для коэффициента t при пятипроцентном уровне значимости. Различия считались значимыми, если вычисленные значения были не ниже табличных.

Оценка значимости различий дисперсий производилась по критерию Фишера также при пятипроцентном уровне значимости с учетом логнормального закона распределения.

Сопоставление полученных данных позволило установить следующее. Содержания никеля и кобальта в пиритах как Артемовского, так и Сухоложского рудного поля находятся между собой в прямой четко выраженной корреляционной зависимости, что хорошо видно из приведенных значений коэффициентов корреляции. Это дает основание считать, что и содержания кобальта подчинены



Графики распределения содержания никеля в пирите (А) и во вмещающих породах (Б). Артемовское рудное поле. Сплошной линией показана теоретическая кривая логнормального распределения; точки нанесены по фактическим данным

логнормальному закону распределения. Наиболее сильно корреляционная зависимость выражена для Артемовского рудного поля, где коэффициент корреляции оказался равным $+0,52$, что более чем в два раза превышает минимальные (при данном числе степеней свободы) табличные значения.

Отношения среднегеометрических содержаний никеля и кобальта в пиритах и породах непостоянны и изменяются в значительных пределах — от 1,03 до 3,2 (см. табл. 3,4), причем высокие значения отношений характерны для пород, а низкие — для пиритов. В то же время абсолютные значения содержаний Ni и Co

Таблица 1

Результаты проверки гипотезы о логнормальном распределении окиси никеля в пирите

Граница интервала, %	Средние значения из логарифмов границ интервалов	Фактические частоты, n_i	Теоретические частоты, N_i	$\frac{(n_i - N_i)^2}{N_i}$
0,02—0,031	—1,6	2	2,83	0,24
0,032—0,05	—1,4	11	9,8	0,15
0,051—0,079	—1,2	24	20,48	0,61
0,08—0,126	—1,0	25	25,8	0,02
0,127—0,199	—0,8	14	19,58	1,59
0,200—0,316	—0,6	11	8,97	0,46
0,317—0,50	—0,4	4	2,4	0,93

Примечание. $n = 91$; $\chi^2_{расч} = 4,00$; $\chi^2_{табл.} = 9,5$ при четырех степенях свободы.

намного выше в пиритах, чем в породах. Все это, очевидно, указывает на различие функций распределения данных элементов в пиритах и во вмещающих их породах, т. е. на существенно отличные в геологическом отношении условия их накопления.

Значения среднегеометрических содержаний и величины дисперсий кобальта в пиритах обоих участков существенно не отличаются между собой, что указывает на близость функций распределения, т. е. на однотипность геологических условий его накопления. В то же время законы распределения никеля существенно различны как по величине средних содержаний, так и по значению дисперсий. В конечном итоге это, видимо, и обуславливает различие в значениях отношения $N_i : S_0$ для этих двух групп пиритов и, тем самым, подтверждает правомерность выделения самих групп.

Существенные различия между выделяемыми группами пиритов устанавливаются при рассмотрении характера зависимости между содержаниями никеля в пиритах и вмещающих их породах раздельно по группам.

Для Артемовского рудного поля намечается обратная корреляционная зависимость между содержанием Ni_2O_3 в пирите и породе. Причем вычисленное значение коэффициента корреляции оказалось практически значимым. Данное положение весьма важно и может быть обусловлено мобилизацией (заимствованием) никеля пирита из пород в процессе их гидротермальной проработки. Об этом свидетельствуют и более высокие содержания никеля и кобальта в породах, не подверженных воздействию гидротермальных растворов и не содержащих рассматриваемый пирит (см. табл. 3).

Таблица 2

Результаты проверки гипотезы о логнормальном распределении окиси никеля в породе

Граница интервала, %	Средние значения из логарифмов границ интервалов	Фактические частоты, n_i	Теоретические частоты, N_i	$\frac{(n_i - N_i)^2}{N_i}$
0,001 — 0,0014	—2,925	5	2,67	1,33
0,0015 — 0,002	—2,775	8	7,13	0,11
0,0021 — 0,0028	—2,625	12	13,89	0,26
0,0029 — 0,004	—2,475	16	19,5	0,63
0,0041 — 0,0056	—2,325	21	19,95	0,06
0,0057 — 0,0079	—2,175	17	14,83	0,32
0,0080 — 0,0110	—2,025	8	7,97	0,01
0,012 — 0,016	—1,875	4	3,13	0,24

Примечание. $n = 91$; $\chi^2_{расч} = 3,66$; $\chi^2_{табл} = 11,3$ при пяти степенях свободы.

Таблица 3
 Статистические параметры распределения окислов никеля и кобальта в пиритах
 и вмещающих их породах Артемовского рудного поля (Доголдынский участок)

Порода	Элемент	n	R	\bar{x}	$S_{lg x}^2$	$r_{lg x}$	$\frac{r_{xNi}}{r_{xCo}}$	
Пирит без вмещающей породы	Co_2O_3	91	0,01—0,269	0,055	0,06	-0,198	} $\frac{+0,52}{0,205}$	1,8
	Ni_2O_3	91	0,024—0,468	0,10	0,08			
Вмещающие гидротермально измененные алевролиты и песчаники (пирит удален)	Ni_2O_3	91	0,001—0,016	0,0042	0,08	} $\frac{0,205}{(0,173)}$	} $\frac{+0,66}{0,205}$	3,2
	Co_2O_3	91	0,0006—0,0085	0,0013	0,16			
Интенсивно гидротермально измененные вмещающие песчаники (пирит удален)	Ni_2O_3	29	0,0013—0,0140	0,0025	0,053			2,8
	Co_2O_3	29	0,0006—0,0056	0,0009	0,065			
Гидротермально неизмененные вмещающие песчаники	Ni_2O_3	28	0,0013—0,0180	0,0092	0,043			3,0
	Co_2O_3	28	0,0006—0,0058	0,0031	0,079			
Гидротермально измененные пиритизированные песчаники (с пиритом)	Ni_2O_3	28	0,0042—0,0130	0,0069	0,013			2,8
	Co_2O_3	28	0,0014—0,0051	0,0025	0,028			
Гидротермально измененные пиритизированные песчаники и алевролиты	Ni_2O_3	40	0,0006—0,0135	0,0059	0,011			2,5
	Co_2O_3	40	0,0006—0,0063	0,0024	0,056			

Примечание. n — количество проанализированных проб, R — разброс содержаний, \bar{x} — среднее геометрическое значение содержаний, $S_{lg x}^2$ — дисперсия логарифмов содержаний, $r_{lg x}$ — коэф-

фициент корреляции логарифмов содержаний (числитель — вычисленные значения, знаменатель — табличные при $p = 0,05$, в скобках указано табличное значение при $p = 0,1$).

Таблица 4

Статистические параметры распределения Ni_2O_3 и Co_2O_3 в пиритах и во вмещающих их породах Сухоложского месторождения

Порода	Элемент	n	R	\bar{x}	σ_{lgx}^2	η_{lgx}	r_{lgx}	$\frac{\bar{x}_{Ni}}{\bar{x}_{Co}}$
Пирит	Co_2O_3	65	0,012	0,060	0,065			1,03
	Ni_2O_3		0,195					
Вмещающие филлитовидные алевролиты	Ni_2O_3	61	0,0006	0,001	0,046		0,250	1,431
	Co_2O_3		0,0046					
Интенсивно пиритизированные филлитовидные алевролиты (с пиритом)	Ni_2O_3	31	0,0006	0,0046	0,092			2,70
	Co_2O_3		0,0260					
Слабо минерализованные вмещающие филлитовидные алевролиты (пирит удален)	Ni_2O_3	22	0,0006	0,0009	0,030			1,121
	Co_2O_3		0,0017					
Интенсивно пиритизированные филлитовые алевролиты (пирит удален)	Ni_2O_3	39	0,0006	0,0011	0,031			1,57*
	Co_2O_3		0,0024					
Вмещающие филлитовидные алевролиты из контакта с сульфидными прожилками	Ni_2O_3	8	0,0025	0,0056	0,059			2,95
	Co_2O_3		0,0130					

* Значения требуют дополнительной проверки ввиду крайне низких содержаний (на пределе чувствительности) Co_2O_3 в породах.

П р и м е ч а н и е. Условные обозначения граф см. в табл. 3.

Таблица 4 (окончание)

Порода	Элемент	n	R	μ	S_{lgx}^2	r_{lgx}	r_{lgx}	$\frac{\bar{x}_{Ni}}{\bar{x}_{Co}}$
Эти же породы на удалении 1,5—2,0 м и более от сульфидных прожилков	Ni ₂ O ₃	7	0,0006	0,0035	0,19			2,65
			0,0120					
	Co ₂ O ₃		0,0006	0,0013	0,45			
			0,0045					

Ясно выраженное осветление пород в процессе пиритизации, отсутствие при этом, судя по результатам химических анализов, привноса или выноса железа, магния, а также значимых изменений в содержании серы, подтверждает возможность заимствования никеля пиритов из вмещающих пород в процессе их гидротермального метаморфизма. Следует отметить, что содержания никеля и кобальта (\bar{x}) в пиритизированных песчаниках и алевролитах Артемовского участка оказались более низкими, а значения дисперсии более высокими, чем в неизмененных разностях этих пород (см. табл. 3).

Следовательно, можно говорить, что в процессе пиритизации не только не происходил дополнительный привнос этих элементов, а, наоборот, отмечался вынос. Вероятно, часть никеля и кобальта выносились метаморфизующими растворами из пород в процессе их обработки в более верхние горизонты или рудные тела.

На Сухоложском месторождении выявлены иные закономерности. Содержания никеля и кобальта в породах и в пиритах не связаны между собой обратной корреляционной зависимостью (см. табл. 4). Более того, намечается положительная, хотя и очень слабо выраженная, статистически незначимая, зависимость между содержанием этих элементов. Существенным является то, что содержания никеля и кобальта в породах проявляют тенденцию к увеличению по мере приближения к сульфидным прожилкам или усилению в породах вкрапленности пирита.

Резюмируя все вышеизложенное, можно заключить, что приведенные данные относительно характера распределения никеля и кобальта подтверждают правомерность разделения пиритов на две отличные группы. Устанавливается логнормальный закон распределения этих элементов. Достаточно обоснованно можно предположить, что для рассмотренных пиритов Артемовского рудного поля основным источником никеля и кобальта, как и железа, вероятнее всего, являлись сами вмещающие породы.

- *Бондаренко В. Н.* 1967. Статистические методы изучения вулканогенных комплексов. М., «Недра».
- Буряк В. А.* 1963. О взаимоотношении кварцевых жил и прожилковокрапленной сульфидной минерализации гольца Высочайшего (Ленский золотоносный район).— Труды Вост.-Сиб. геол. ин-та, вып. 13. Иркутск.
- Буряк В. А.* 1937. О генезисе сульфидной минерализации Ленского золотоносного района.— Геол. и геоф., № 1.
- Другов С. И.* 1958. Ленский золотоносный район.— В сб. «Труды первого совещания по металлогении Западного Забайкалья». Иркутск.
- *Митропольский А. К.* 1961. Техника статистических вычислений. М., Физматгиз.
- Обручев В. А.* 1961. Избранные труды, т. 3. М., Изд-во АН СССР.
- *Родионов Д. А.* 1964. Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах. М., «Наука».
- Салоп Л. И.* 1967. Геология Байкальской горной области, т. II. М., «Недра».
- *Шарапов И. П.* 1965. Применение математической статистики в геологии. М., «Недра».
- Шер С. Д.* 1960. Сульфидная минерализация древних слоистых толщ бассейна р. Бодайбо.— Труды ЦНИГРИ, вып. 30.
- Шер С. Д.* 1966. Околорудные изменения, сопутствующие золотокварцевым жилам в Ленском золотоносном районе.— В сб. «Метасоматические изменения боковых пород и их роль в рудообразовании». М., «Недра».
- Шер С. Д., Кондратенко А. К.* 1962. О метаморфических преобразованиях пород южной части Ленского золотоносного района.— Труды ЦНИГРИ, вып. 48.
- *Шер С. Д., Демченко А. В.* 1962. О значении исследований формы метакристаллов пирита для поисков золоторудных месторождений в Ленском районе.— В сб. «Геология рудных месторождений», № 4.

Ю. М. УЧАКИН

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА [РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
РЕДКИХ ЩЕЛОЧЕЙ] В ПЕГМАТИТАХ
ОДНОГО ИЗ РАЙОНОВ ВОСТОЧНОЙ СИБИРИ

Закономерности поведения редких щелочей—лития, рубидия, цезия, играющих весьма существенную роль в геохимическом эволюции пегматитового процесса,—особенно четко выявляются при изучении распределения этих элементов в калиевых полевых шпатах и слюдах (Боровик-Романова и Соседко, 1957; Тейлор, Хейер, 1963; Ставров, 1963). Применение методов теории вероятностей и математической статистики создает возможность объективной оценки и проверки количественных данных, используемых для обоснования тех или иных геохимических выводов. Нами были статистически исследованы геохимические особенности поведения редких щелочей и калия в микроклинах и мусковитах из различных пегматитов нескольких рядом расположенных полей одного из районов Восточной Сибири. Более или менее подробная характеристика

Таблица 1

Основные черты главных минералогических типов пегматитов района

Тип пегматита	Классификационное соотношение основных минералов	Содержание основных минералов			
		Олигоклаз — Ol	Микроклин — Mi	Кварц — Q	Альбит — Ab
I. Микроклин-плагноклазовый	$Ol \geq Mi$ Sp нет	20—30	15—25	35—45	До 1
II. Микроклиновый	$Mi \geq Ol$ Sp нет	5—10	25—35	30—40	10—20
III. Сподумен-микроклиновый	$Mi \geq Sp$ Ol нет	—	20—25	25—35	15—30

пегматитов района, а также описание методики отбора, обработки и анализа проб уже приводились в предыдущих публикациях (Учакин и др., 1962; Шиманский, Учакин, 1963; Учакин, Шиманский, 1968), отметим лишь вкратце, что пегматиты изученных полей генетически связаны с биотитовыми гранитами среднепротерозойского возраста и залегают среди слабо- и среднетаморфизованных протерозойских пород — различных, главным образом биотитовых и андалузито-биотитовых, сланцев и амфиболитов. По минералогическому составу, характеру оруденения и ряду других свойств (табл. 1) пегматиты района разделяются нами на три типа: I тип — микроклин-плагноклазовые; II тип — микроклиновые; III тип — сподумен-микроклиновые. В пространственном размещении различных пегматитов наблюдается так называемая «региональная зональность», выражающаяся в том, что в пределах каждого поля пегматиты различных типов слагают отдельные закономерно сменяющие друг друга зоны — ближе к гранитам располагаются пегматиты I типа, затем идет зона развития пегматитов II типа и на наиболее удаленном от материнского очага фланге поля размещается зона пегматитов III типа, наиболее сложных по составу и строению (Учакин, 1959).

Из различных пегматитов изученных полей было отобрано и проанализировано количественным спектральным методом на рубидий, цезий, литий и калий 173 мономинеральные пробы микроклина и 77 проб мусковита (чувствительность метода: 0,001% — Rb, Cs; 0,0005% — Li; лаборатория ИЗК СО АН СССР, аналитики Т. И. Пауллер, А. И. Кузнецова, К. Ф. Дмитриева). Поскольку содержания элементов в отдельных пробах представляют собой, по сути дела, непрерывные случайные величины, могущие принимать любое (но в некоторых пределах) заранее неизвестное значение,

(в %)			Характерные акцессорные минералы	Преобладающие структуры и текстуры
Мушкет — Му	Турмалин — Тг	Прочие		
2—5	3—8	1—3	Биотит, гранат, ортит, апатит, циркон	Гранитная, графическая, пегматоидная
5—10	1—3	1—3	Апатит, гранат, сфен, циркон, флюорит, пирит	Пегматоидная, блоковая, участковая
3—5	до 1	1—3	Апатит, пурпурит, сиклерит, леллингит, рубеллит, полихромные Тг, лепидолит	Пегматоидная, блоковая, директивная, участковая, массивная, полосчатая

полученные аналитические данные были подвергнуты статистической обработке, целью которой было решение таких специфических для «математической геологии» (Вистелиус, 1963) и, вместе с тем, практически важных задач, как определение вероятностных законов распределения концентраций в различных объектах и проверка обоснованности утверждения о равенстве или отличии средних содержаний, дисперсий и функций распределения компонентов в сравниваемых совокупностях.

Установление вероятностных законов распределения концентраций и определение их параметров

Выяснение закономерностей распределения содержаний элементов в горных породах и минералах является одной из основных проблем геохимии. В последнее время в печати появился ряд работ, в которых делается попытка подойти к изучению этого вопроса с позиций теории вероятностей (Ahrens, 1954, 1957; Miller, Goldberg, 1955; Родионов, 1961, 1963, 1964; Аренс, 1964). По мнению Д. А. Родионова (1961), вид распределения элемента в породе обуславливается числом минералов, содержащих элемент, и их количественными соотношениями; логарифмически нормальный и нормальный виды являются предельными крайними, между ними может наблюдаться бесчисленное множество промежуточных видов, представляющих собой композицию того или иного числа логнормальных распределений. Функция распределения, как подчеркивает Д. А. Родионов (1964), является наиболее полной и исчерпывающей характеристикой совокупности значений содержания изучаемого компонента, ибо она однозначно определяет эту совокупность, указывает вероятность наблюдения содержания в

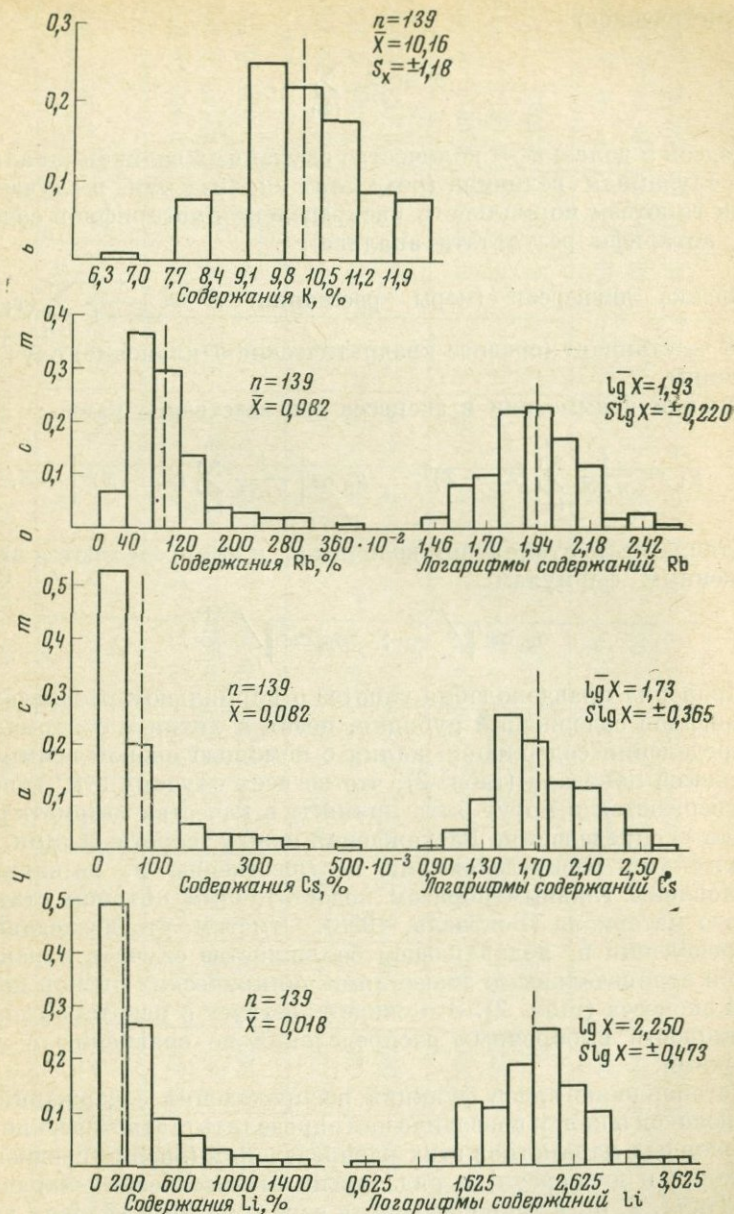
пределах любого заданного интервала значений, дает среднее содержание компонента в породе и характеризует неравномерность распределения содержания этого компонента. Так как содержания компонентов представляют собой конечные результаты процесса формирования пород, то вид функции их распределения может указывать на тот или иной комплекс условий в процессе формирования. В. П. Куц и В. С. Мищенко (1963) также считают, что функция распределения, помимо количественной, дает важную качественную характеристику содержаний, указывая на характер размещения элемента по минералам, на первичное или вторичное происхождение минерала и т. д.

Особенности распределения содержаний элементов в различных пегматитах отражают, очевидно, специфику формирования этих пегматитов. Поскольку характер распределения содержаний элементов однозначно определяется функцией распределения содержаний, сравнение характера распределения содержаний равносильно сравнению функций распределения, и задача сводится к определению этих функций и их сопоставлению.

Предварительное определение вида функции распределения производилось с помощью построения и анализа гистограмм. Было установлено, что гистограммы распределения содержаний рубидия, цезия и лития в микроклинах и мусковитах отличаются ясно выраженной положительной асимметрией, тогда как гистограммы распределения логарифмов содержаний этих элементов (как и содержаний К) примерно равносторонни и симметричны (рис. 4). Исходя из этого, было высказано предположение о нормальном распределении содержаний К и о логарифмически нормальном законе распределения редких щелочей в исследованных минералах.

Однако, поскольку гистограммы не дают твердого ответа на вопрос о виде функции распределения (как это было, в частности, показано Миллером и Гольдбергом при ревизии данных Аренса; Miller, Goldberg, 1955), выбранные с их помощью рабочие нулевые гипотезы о соответствии наблюдаемого (эмпирического) распределения теоретической (нормальной или логнормальной) модели распределения проверялись с помощью статистических критериев согласия. Для этого был использован рекомендуемый Д. А. Родионовым (1964) метод моментов, обоснование которого можно найти у Г. Крамера (1948). Проверка заключалась в рассмотрении частных от деления статистической оценки асимметрии распределения g_1 на ее стандартное отклонение σ_{g_1} , при данном числе n наблюдений, и статистической оценки эксцесса g_2 на соответствующее стандартное отклонение σ_{g_2} . В случае, если $|g_1/\sigma_{g_1}| \leq 3$, $|g_2/\sigma_{g_2}| \leq 3$, то принималась гипотеза о нормальном распределении. Если же хоть одно из отношений превышало 3, то гипотеза о нормальном распределении отвергалась.

Вычисления проводились по следующим формулам: статистическая оценка среднего значения случайных величин (их среднее



Р и с. 1. Гистограммы распределения содержания калия, рубидия, цезия, лития и логарифмов содержаний рубидия, цезия, лития в микроклинах из пегматитов III типа (в нижней левой гистограмме значения содержаний лития должны быть умножены на 10^{-4})

арифметическое)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где (здесь и далее) n — количество случайных величин (анализов); x_i — случайная величина (результат анализа или, в случае проверки гипотезы нормального распределения логарифмов содержаний, логарифм результата анализа).

$$\text{Оценка дисперсии (меры рассеяния)} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

где S — стандарт (среднее квадратическое отклонение) случайной величины.

Оценки асимметрии и эксцесса соответственно равны:

$$g_1 = \frac{1}{n \cdot S^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3; \quad g_2 = \left[\frac{1}{n \cdot S^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \right] - 3.$$

Стандартные отклонения величин g_1 и g_2 определяются по приближенным формулам:

$$\sigma_{g_1} \simeq \sqrt{\frac{6}{n}}; \quad \sigma_{g_2} \simeq \sqrt{\frac{24}{n}}.$$

Проверка правдоподобия гипотез о нормальном распределении логарифмов содержаний рубидия, цезия и лития и о нормальном распределении содержаний калия с помощью оценок асимметрии и эксцесса показала (табл. 2), что во всех случаях эти гипотезы не отвергаются и могут быть приняты в качестве математической модели распределения. Расхождения между теоретическими и эмпирическими распределениями несущественны и, по-видимому, обусловлены главным образом недостаточным объемом статистического материала (Вентцель, 1958). Отметим, что исследованные распределения в подавляющем большинстве случаев характеризуются отрицательными значениями эмпирических оценок показателей эксцесса (табл. 2). Это свидетельствует о некоторой плосковершинности выборочных распределений по сравнению с теоретическими.

Установление видов функций распределения содержаний редких щелочей и калия позволило нам определить статистические оценки основных параметров этих распределений (оценки среднего содержания и дисперсии) и ряд других статистических характеристик (табл. 2, 3), а также выяснить вероятностные условия применения статистических критериев. Как известно, в случае логнормального распределения статистической оценкой среднего содержания следует считать среднее геометрическое содержаний (\bar{x}), представляющее собой антилогарифм среднего арифметического логарифмов содержаний ($\overline{\lg x}$), а при нормальном распределении —

Таблица 2

Результаты проверки гипотез о нормальном распределении логарифмов содержаний Rb, Cs, Li и содержаний К в микроклинах из пегматитов различного типа

Элемент	Тип пегматита	n	\bar{x}	$\overline{\lg x}$	\tilde{x}	$S_{\lg x}^2$	$S_{\lg x}$	g_1	g_2	σ_{g_1}	σ_{g_2}	g_1/σ_{g_1}	g_2/σ_{g_2}	v, %	Доверительные границы для \tilde{x}
Рубидий	I	14	0,144	$\bar{1},147$	0,140	0,004	0,063	+0,46	-2,73	0,66	1,32	0,7	2,1	9,5	0,152—0,129
	II	20	0,366	$\bar{1},529$	0,338	0,030	0,173	+0,16	-0,94	0,55	1,10	0,3	0,8	26,8	0,407—0,280
	III	139	0,982	$\bar{1},930$	0,851	0,048	0,220	+0,33	+0,32	0,21	0,42	1,5	0,8	34,2	0,925—0,783
Цезий	I	14	0,008	$\bar{3},634$	0,004	0,226	0,475	-1,50	-2,92	0,66	1,32	2,3	2,2	82,6	0,008—0,002
	II	20	0,023	$\bar{2},237$	0,017	0,139	0,370	+0,74	-0,28	0,55	1,10	1,3	0,2	61,4	0,026—0,012
	III	139	0,082	$\bar{2},730$	0,054	0,133	0,365	+0,52	-0,46	0,21	0,42	2,6	1,2	59,8	0,062—0,047
Литий ³	I	14	0,0012	$\bar{4},856$	0,0007	0,335	0,579	-0,65	-1,36	0,66	1,32	1,0	1,0	107,8	0,0016—0,0003
	II	20	0,0023	$\bar{4},961$	0,0009	0,502	0,710	-0,22	-1,37	0,55	1,10	0,4	1,3	147,5	0,0019—0,0004
	III	139	0,0291	$\bar{2},250$	0,0178	0,224	0,473	-0,38	+0,63	0,21	0,42	1,9	1,6	82,1	0,0213—0,0149
Калий	I	14	10,01	—	—	1,463*	1,210*	-0,76	-0,73	0,66	1,32	1,16	0,56	12,1	10,70—9,32**
	II	20	10,03	—	—	1,677	1,296	-0,06	-1,61	0,55	1,10	0,41	1,46	12,9	10,64—9,42
	III	139	10,16	—	—	1,400	1,180	-0,10	-0,60	0,21	0,42	0,50	1,50	11,6	10,36—9,94

* Для калия приведены значения S_{x^2} и S_{x^3} .

* Доверительные границы построены для \tilde{x} .

среднее арифметическое (\bar{x}). Кроме оценок средних содержаний и дисперсий в табл. 2, 3 приведены также величины стандартных отклонений (S), коэффициенты вариаций (v) и границы достоверности (доверительные границы) для \bar{x} и \bar{x} .

Коэффициент вариации, характеризующий разброс результатов относительно среднего, определялся по формуле:

$$v = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad \text{или в случае логнормального распределения}$$

$$v = \sqrt{10^{2 \lg x} - 1}.$$

Доверительные границы строились на основе распределения критерия Стьюдента и имеют вид $\bar{x} \pm t_q \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Величина t_q (допустимое значение критерия Стьюдента) определялась по таблицам (см., например, Шарапов, 1965; прилож. 15). При этом был принят обычный при геохимических исследованиях пятипроцентный уровень значимости ($t_{5\%}$), означающий, что истинное среднее лежит в пределах вычисленных границ с 95% вероятности. В случае логнормального распределения рассчитывались доверительные границы для $\lg \bar{x}$, переход от которых к границам для \bar{x} осуществлялся путем обычного потенцирования.

Особо следует указать, что, хотя гипотеза о соответствии логнормальной модели эмпирическим распределениям содержаний K не проверялась, можно предполагать, что для них эта гипотеза отвергаться не будет. Основанием для такого утверждения служит то, что распределения содержаний K обладают весьма малыми оценками коэффициента вариации ($v < 13\%$), а при таком значении v разница между нормальным и логнормальным распределениями является незначительной. Известно (Хальд, 1956), что при небольших значениях среднего квадратического отклонения функция $y = \lg x$ в определенном интервале линейна. В этом случае и $\lg x$ и x могут рассматриваться как нормально распределенные. Принято считать, что как $\lg x$, так и x распределены нормально, если величина $C_x = \frac{S_x}{\bar{x}} < \frac{1}{3}$ (Хальд, 1956). Опыт показывает (Бондаренко, 1967), что если не отвергается гипотеза о нормальном распределении содержаний, то при $v < 15\%$ не будет отвергаться и гипотеза о согласии логнормальной модели с эмпирическими данными. В нашем случае величина C_x , равная $0,01 v$, не превышает $0,129$ (табл. 2), что подтверждает нормальный закон распределения как переменной величины x (содержания K), так и ее функции (логарифмы содержаний K). Как справедливо подчеркивает В. Н. Бондаренко (1967), из множества математических моделей, не противоречащих эмпирическим данным, для практической деятельности и статистической обработки этих данных следует выбирать наиболее простую в употреблении, поэтому нами была принята модель нормального распределения содержаний K .

Таблица 3

Статистические характеристики распределения содержаний рубидия, цезия и лития в микроклинах и мусковитах из различных пегматитов

Выборка	n	\bar{x}	$lg \bar{x}$	λ	$S_{lg x}^2$	$S_{lg x}$	v, %
Rb из микроклинов пегматитов III типа, поле 1	29	0,944	$\bar{1},957$	0,906	0,016	0,126	19,5
То же, поле 2	69	0,857	$\bar{1},889$	0,774	0,038	0,192	30,2
» » » 3	41	1,219	$\bar{1},993$	0,984	0,085	0,284	46,7
То же для Cs, поле 1	29	0,065	$\bar{2},691$	0,049	0,126	0,355	58,0
» » » » » 2	69	0,056	$\bar{2},660$	0,046	0,083	0,288	45,8
» » » » » 3	41	0,128	$\bar{2},924$	0,084	0,178	0,422	71,2
То же для Li, поле 1	29	0,0293	$\bar{2},223$	0,0167	0,218	0,467	80,9
» » » » » 2	69	0,0335	$\bar{2},283$	0,0192	0,275	0,524	94,1
» » » » » 3	41	0,0222	$\bar{2},203$	0,0160	0,128	0,358	58,5
Rb из мусковитов пегматитов I типа	7	0,417	$\bar{1},496$	0,313	0,111	0,333	54,0
То же II типа	10	1,367	0,033	1,079	0,081	0,283	45,3
» » III типа	60	1,418	0,111	1,290	0,042	0,204	31,8
Rb из мусковитов пегматитов III типа, поле 2	39	1,448	0,137	1,370	0,023	0,153	23,4
То же, поле 3	21	1,361	0,063	1,155	0,076	0,275	43,6
Cs из мусковитов пегматитов I типа	7	0,029	$\bar{3},722$	0,005	0,063	1,030	325,0
То же II типа	10	0,104	$\bar{2},475$	0,030	0,718	0,847	205,4
» » III типа	60	0,051	$\bar{2},425$	0,027	0,157	0,396	65,9
Cs из мусковитов пегматитов III типа, поле 2	39	0,030	$\bar{2},314$	0,021	0,106	0,326	52,6
То же, поле 3	21	0,089	$\bar{2},631$	0,043	0,345	0,587	110,2
Li из мусковитов пегматитов I типа	2	0,052	$\bar{2},712$	0,052	0,135	0,367	60,4
То же II типа	6	0,020	$\bar{2},248$	0,018	0,047	0,217	33,8
» » III типа	56	0,042	$\bar{2},609$	0,041	0,024	0,156	24,1
Li из мусковитов пегматитов III типа, поле 2	39	0,047	$\bar{2},648$	0,044	0,023	0,151	23,2
То же, поле 3	17	0,034	$\bar{2},512$	0,032	0,013	0,014	17,3

Геохимические исследования особенностей распределения элементов не следует, очевидно, ограничивать внешним описанием наблюдаемых видов распределения. Нужно пытаться найти причины, в силу которых распределение приобретает ту или иную форму. Наблюдаемое в нашем случае различие между видами распре-

деления редких щелочей и калия объясняется, очевидно, разными условиями накопления этих элементов в минерале. Калий, который в кристаллической решетке микроклина (или мусковита) является «элементом-хозяином», распределяется по нормальному закону, а «элементы-гости» — Rb, Cs и Li, которые входят в кристаллическую решетку микроклина (или мусковита) преимущественно на поздних этапах его кристаллизации в виде изоморфных примесей, — распределяются логнормально. Поскольку нормальное распределение в общем случае представляет собой математическую модель процесса с независимыми приращениями, то, основываясь на необходимом и достаточном условии возникновения нормального распределения, можно предположить независимость количества калия, переходящего из жидкой фазы в кристаллическую, от содержания его в последней. С другой стороны, известно, что одним из очень важных теоретических условий возникновения логнормального распределения является так называемое «требование пропорциональности эффекта». Еще в 1903 году Кептейн показал, что если случайная величина x_i изменяется пропорционально произведению интенсивности причины η_i на значение величины, достигнутое к моменту действия причины, т. е. $x_i = \eta_i \sum_{k=1}^{i-1} x_k$, то распределение $\lg x_i$ будет подчинено нормальному закону (Хальд, 1956). Исходя из этого, логнормальный тип распределения редких щелочей объясняется, возможно, тем, что при переходе этих элементов в кристаллическую фазу на количество переходящего в твердую фазу элемента существенно влияет количество его, выделившееся перед этим.

Сравнение средних содержаний, дисперсий и функций распределения содержаний

Сопоставление средних содержаний в различных породах является, как известно, основой многих геохимических выводов. Поэтому статистическая проверка обоснованности утверждения о неравенстве (или равенстве) средних содержаний заслуживает особого внимания. Однако, как подчеркивает Д. А. Родионов (1964), утверждение о том, что распределение содержаний какого-либо элемента в одной породе равно распределению содержаний этого элемента в другой породе, является более сильным утверждением, чем утверждение о равенстве средних содержаний (ибо две случайные величины, распределенные логнормально, но с разными параметрами, могут обладать равными средними значениями). Решение задачи в сильной форме дает более полную информацию о содержаниях компонента в сравниваемых объектах, чем решение задачи о равенстве средних.

Средние содержания редких щелочей (\bar{x}) и калия (\bar{x}) в микроклинах и мусковитах из различных пегматитов, сгруппированных

Таблица 4

Средние содержания редких щелочей (\bar{x}) и калия (\bar{x}) и величины отношений K/Rb и Rb/Cs в микроклинах и мусковитах из различных пегматитов

Выборка	n_1	n_2	Rb	Cs	Li	K	K/Rb	Rb/Cs
Микроклины из пегматитов I типа	14	14	0,140	0,004	0,0007	10,01	71,5	35,0
То же II типа	20	20	0,338	0,017	0,0009	10,03	27,4	19,9
» » III типа	139	139	0,851	0,054	0,0178	10,16	12,0	15,8
Микроклины из пегматитов III типа, поле 1	29	29	0,906	0,049	0,0167	9,78	10,8	18,5
То же, поле 2	69	69	0,774	0,046	0,0192	9,90	12,8	16,8
» » » 3	41	41	0,984	0,084	0,0160	10,82	10,9	11,7
Мусковиты из пегматитов I типа	7	2	0,313	0,005	0,052	9,2	29,4	62,6
Мусковиты из пегматитов II типа	10	6	1,079	0,030	0,018	7,9	7,3	36,0
Мусковиты из пегматитов III типа	60	56	1,290	0,027	0,041	8,6	6,7	47,8
Мусковиты из пегматитов III типа, поле 2	39	39	1,370	0,021	0,044	8,7	6,4	65,2
То же, поле 3	21	21	1,155	0,043	0,032	8,4	7,3	26,9

Примечание. n_1 — число проб для Rb и Cs, n_2 — для Li и K.

по отдельным типам и полям, а также вычисленные на их основе величины отношений калия к рубидию и рубидия к цезию приведены в табл. 4. Для того чтобы судить о близости или различии сравниваемых групп пегматитов по содержаниям редких щелочей и характеру их распределения в микроклинах и мусковитах, нами произведено сопоставление функций распределения этих элементов в различных пегматитах. Статистическое решение этой задачи заключается в проверке нулевой гипотезы о равенстве функций распределения. А поскольку функция распределения как в случае нормального, так и логнормального распределения определяется двумя параметрами, то проверка гипотезы о равенстве функций равносильна проверке двух гипотез о попарном равенстве параметров распределения — средних содержаний и дисперсий (при этом гипотеза о равенстве функций не отвергается только в том случае, если не отвергаются обе гипотезы о равенстве параметров).

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий проводилась нами при помощи критерия Фишера, заключающегося в нахождении отношения

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \text{при } S_1^2 > S_2^2 \quad \text{или} \quad F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad \text{при } S_2^2 > S_1^2.$$

Полученное значение F сравнивалось с допустимым значением (F_q, f_1, f_2), протабулированным при уровне значимости $q = 5\%$ и $f = n - 1$ степенях свободы (Шарапов, 1965; прилож. 24). Гипотеза отвергалась, если вычисленное значение $F > F_q, f_1, f_2$. Если же F меньше табличного, то дисперсии считались однородными, а их различие незначимым. В этом случае проверка гипотезы о равенстве средних содержаний производилась с помощью критерия Стьюдента, основанного на рассмотрении отношения:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Для величины t имеются таблицы допустимых значений при заданном уровне значимости q в зависимости от числа степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$ (Шарапов, 1965, приложение 15).

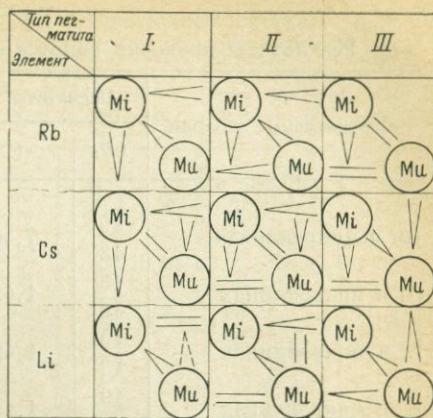
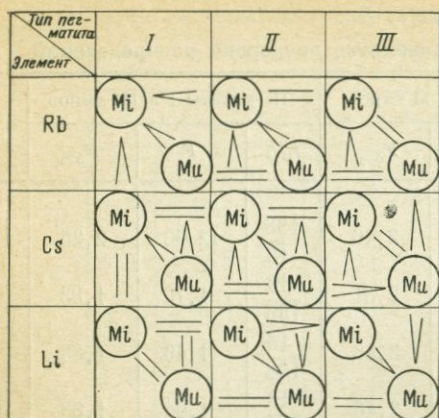
В случае когда распределение логнормальное и по критерию Фишера гипотеза об однородности логарифмических дисперсий отвергается, отношение t вычисляется по следующей, предложенной Д. А. Родионовым (1964), формуле:

$$t = \frac{\lg \bar{x}_1 - \lg \bar{x}_2 + 1,153 (S_1^2 - S_2^2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} + 2,65 \left(\frac{S_1^4}{n_1 - 1} + \frac{S_2^4}{n_2 - 1} \right)}}$$

Если рассчитанное значение t меньше табличного, то гипотеза о равенстве средних принималась как непротиворечащая эмпирическим данным, если же $t > t_q$, то расхождением между средними пренебрегать нельзя, и подтвердившейся считалась противоположная гипотеза — о неравенстве средних.

Результаты проверки гипотез о равенстве дисперсий приведены в табл. 5, 6 и схематически изображены на рис. 2; результаты проверки гипотез о равенстве средних содержаний — в табл. 7, 8 и на рис. 3; сводные же результаты попарной проверки этих двух гипотез, представляющие собой, таким образом, результаты проверки гипотезы о равенстве функций распределения, представлены в табл. 9 и на схеме (рис. 4).

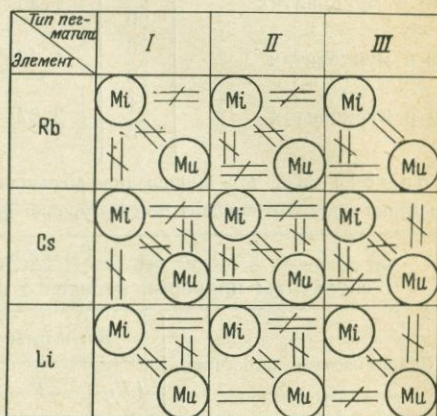
Анализируя перечисленные выше результаты статистических исследований (табл. 4—9), можно прежде всего сделать следующий вывод: типы пегматитов, выделенные по минералогическому составу и отличающиеся по положению в пределах поля, четко различаются и по характеру распределения и содержанию редких щелочей в микроклинах, причем содержания этих щелочей изменяются закономерно, последовательно возрастая от безрудных высокотемпературных пегматитов первого типа к низкотемпературным редкометальным пегматитам третьего типа, то есть по мере удаления от материнских гранитов.



Р и с. 2. Схема соотношения дисперсий распределения логарифмов содержаний редких щелочей в микроклинах (Mi) и мусковитах (Mu) из пегматитов разного типа (см. табл. 5, 6)

Р и с. 3. Схема соотношения средних содержаний редких щелочей в микроклинах (Mi) и мусковитах (Mu) из пегматитов разного типа (см. табл. 7, 8)

Р и с. 4. Схема соотношений функций распределения редких щелочей в микроклинах (Mi) и мусковитах (Mu) из пегматитов разного типа (табл. 9)



Содержание калия в микроклинах из пегматитов разного типа остается более или менее постоянным, величина же отношения калия к рубидию закономерно уменьшается от пегматитов первого типа к третьему (см. табл. 4). Соответственно несколько уменьшается и величина отношения рубидия к цезию, что свидетельствует о более быстром росте содержаний цезия в микроклинах по сравнению с рубидием.

Лишь при проверке гипотезы о равенстве средних содержаний лития в микроклинах из пегматитов I и II типов (см. табл. 7), т. е. в одном случае из 9 рассмотренных, различие между пегматитами двух разных типов оказалось несущественным (табл. 9).

В мусковитах из пегматитов разного типа отмеченные выше особенности выражены менее четко, что, по-видимому, объясняется образованием мусковита в стадию метасоматического замещения. Следует также иметь в виду возможную неоднородность проб (из-за трудности диагностирования различных генераций мусковита).

Таблица 5

Результаты проверки гипотез о равенстве дисперсий распределений

Сравниваемые выборки	Пегматиты I и II типов			Пегматиты I и III типов		
	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$
Rb в микроклинах	$\frac{19}{13}$	7,50	2,46	$\frac{138}{13}$	12,00	2,25
Cs в микроклинах	$\frac{13}{19}$	1,62	2,31	$\frac{13}{138}$	1,70	1,83
Li в микроклинах	$\frac{19}{13}$	1,49	2,46	$\frac{13}{138}$	1,49	1,83
K в микроклинах	$\frac{19}{13}$	1,15	2,46	$\frac{13}{138}$	1,04	1,83
Rb в мусковитах	$\frac{6}{9}$	1,36	3,37	$\frac{6}{59}$	2,64	2,18
Cs в мусковитах	$\frac{6}{9}$	1,47	3,37	$\frac{6}{59}$	6,78	2,18
Li в мусковитах	$\frac{1}{5}$	2,87	6,61	$\frac{1}{55}$	5,62	4,00

Примечание. F — вычисленное значение критерия Фишера; $F_{5\%}$ — допустимое значение критерия Фишера при 5% уровне значимости и f_1/f_2 степенях свободы.

Таблица 6

Результаты проверки гипотез о равенстве дисперсий распределений

Сравниваемые выборки	Пегматиты I типа			Пегматиты II типа		
	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$
Cs и Rb в микроклинах	$\frac{13}{13}$	56,50	2,60	$\frac{19}{19}$	4,60	2,16
Li и Cs в микроклинах	$\frac{13}{13}$	1,48	2,60	$\frac{19}{19}$	3,60	2,16
Cs и Rb в мусковитах	$\frac{6}{6}$	9,60	4,28	$\frac{9}{9}$	8,80	3,18
Li и Rb в мусковитах	$\frac{1}{6}$	1,22	5,99	$\frac{9}{5}$	1,72	4,77
Rb в микроклинах и мусковитах	$\frac{6}{13}$	27,75	2,92	$\frac{9}{19}$	2,70	2,42
Cs в микроклинах и мусковитах	$\frac{6}{13}$	4,60	2,92	$\frac{9}{19}$	5,20	2,42
Li в микроклинах и мусковитах	$\frac{13}{1}$	2,48	244,0	$\frac{19}{5}$	10,68	4,56

Примечание. Объяснение латинских букв см. в табл. 5.

логарифмов содержаний редких щелочей и содержаний калия

Пегматиты II и III типов			Пегматиты III типа, поля 1 и 2			Пегматиты III типа, поля 1 и 3			Пегматиты III типа, поля 2 и 3		
f_1/f_2	F	$F_{5\%}$	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$
$\frac{138}{19}$	1,60	1,93	$\frac{68}{28}$	2,37	1,77	$\frac{40}{28}$	5,31	1,82	$\frac{40}{68}$	2,24	1,50
$\frac{19}{138}$	1,04	1,75	$\frac{28}{68}$	1,52	1,65	$\frac{40}{28}$	1,41	1,82	$\frac{40}{68}$	2,14	1,50
$\frac{19}{138}$	2,24	1,75	$\frac{68}{28}$	1,26	1,77	$\frac{28}{40}$	1,70	1,75	$\frac{68}{40}$	2,15	1,64
$\frac{19}{138}$	1,19	1,75	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\frac{9}{59}$	1,93	2,09	—	—	—	—	—	—	$\frac{20}{38}$	3,30	1,84
$\frac{9}{59}$	4,57	2,09	—	—	—	—	—	—	$\frac{20}{38}$	3,25	1,84
$\frac{5}{55}$	1,96	2,37	—	—	—	—	—	—	$\frac{38}{16}$	1,77	2,15

логарифмов содержаний редких щелочей в микроклинах и мусковитах

Пегматиты III типа			Пегматиты III типа, поле 2			Пегматиты III типа, поле 3		
f_1/f_2	F	$F_{5\%}$	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$	f_1/f_2	F	$F_{5\%}$
$\frac{138}{138}$	2,70	1,35	—	—	—	—	—	—
$\frac{138}{138}$	1,68	1,35	—	—	—	—	—	—
$\frac{59}{59}$	3,70	1,54	—	—	—	—	—	—
$\frac{59}{55}$	1,83	1,55	—	—	—	—	—	—
$\frac{138}{59}$	1,14	1,47	$\frac{68}{38}$	1,65	1,64	$\frac{40}{20}$	1,12	1,99
$\frac{59}{138}$	1,18	1,43	$\frac{38}{68}$	1,27	1,59	$\frac{20}{40}$	1,93	1,84
$\frac{138}{55}$	9,33	1,46	$\frac{68}{38}$	11,90	1,64	$\frac{40}{16}$	9,80	2,15

Таблица 7

Результаты проверки гипотез о равенстве средних содержаний редких щелочей и калия

Минерал	Элемент	Пегматиты I и II типов			Пегматиты I и III типов			Пегматиты II и III типов		
		<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}	<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}	<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}
Микроклин	Rb	32	10,70	2,04	151	132,4	1,98	157	9,32	1,98
	Cs	32	4,71	2,04	151	10,95	1,98	157	5,54	1,98
	Li	32	0,48	2,04	151	8,71	1,98	157	8,06	1,98
	K	32	0,04	2,04	151	0,45	1,98	157	0,42	1,98
Мусковит	Rb	15	3,04	2,13	65	3,19	2,00	68	0,83	2,00
	Cs	15	1,59	2,13	65	2,16	2,00	68	1,57	2,00
	Li	6	1,69	2,45	56	0,69	2,00	60	3,98	2,00

Примечание. *t* — вычисленное значение критерия Стьюдента или Родинона. *t*_{5%} — допустимое значение критерия Стьюдента или Родинона при 5% уровне значимости и *f* степенях свободы.

Результаты проверки гипотезы о равенстве функций распределения содержаний редких щелочей в мусковитах из пегматитов разного типа показывают (табл. 9), что в трех случаях (из девяти) эта гипотеза должна быть принята, в двух — отвергается только из-за существенной разницы в дисперсиях и лишь в 4 случаях должна быть отвергнута из-за существенной разницы в средних содержаниях. Заметим, что если нулевая гипотеза отвергается только из-за существенных расхождений в величине дисперсий, то это, по-видимому, зависит главным образом от различных условий формирования, а не от различий в составе исходного вещества.

Мусковиты из пегматитов II типа значимо отличаются от мусковитов из пегматитов I типа только по содержанию рубидия, а от мусковитов из пегматитов III типа по содержанию лития и по дисперсии содержаний цезия (см. табл. 5, 7, 9).

При сравнении содержаний редких щелочей в мусковитах с содержаниями в микроклинах из тех же пегматитов (см. табл. 6, 8, 9) видно, что только в одном случае из 9 (рубидий в мусковитах и микроклинах из пегматитов III типа) функции распределения содержаний могут быть признаны равными. В мусковитах средние содержания рубидия (в пегматитах I и II типов) и лития (во всех типах) выше, чем в соответствующих микроклинах, а средние содержания цезия или равны (I и II типы) при разных дисперсиях, или же меньше, чем в микроклинах (III тип). Повышенные концентрации редких щелочей в мусковитах обусловлены, очевидно, как высоким содержанием этих элементов в метасоматирующих растворах, так и большой кристаллохимической емкостью мусковита.

Отметим также, что в микроклинах из всех трех типов пегматитов постоянно наблюдается соотношение содержаний: $Rb > Cs >$

Пегматиты III типа, поля 1 и 2			Пегматиты III типа, поля 1 и 3			Пегматиты III типа, поля 2 и 3		
<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}	<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}	<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}
96	2,69	2,00	68	2,06	2,00	108	2,83	2,00
96	0,42	2,00	68	2,50	2,00	108	4,20	2,00
96	0,56	2,00	68	0,19	2,00	108	2,38	2,00
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	58	1,86	2,00
—	—	—	—	—	—	58	3,14	2,00
—	—	—	—	—	—	54	3,78	2,01

$> \text{Li}$; в мусковитах же сохраняется только левая часть этого неравенства ($\text{Rb} > \text{Cs}$), что же касается содержаний лития, то в мусковитах из пегматитов I и III типов они больше, чем содержания цезия, а во втором типе равны (при разных дисперсиях, табл. 6, 8, 9).

Кроме сравнения между собой различных типов пегматитов по характеру распределения и содержанию редких щелочей в микроклинах, было произведено аналогичное сравнение пегматитов III типа между тремя отдельными полями (поля 2 и 3 были сопостав-

Таблица 8

Результаты проверки гипотез о равенстве средних содержаний редких щелочей в микроклинах и мусковитах

Сравниваемые выборки	Пегматиты I типа			Пегматиты II типа			Пегматиты III типа		
	<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}	<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}	<i>f</i>	<i>t</i>	<i>t</i> _{5%}
Cs и Rb в микроклинах	26	11,7	2,06	38	3,2	2,03	276	33,3	1,97
Li и Cs в микроклинах	26	3,9	2,06	38	7,1	2,03	276	9,4	1,97
Cs и Rb в мусковитах	12	5,7	2,18	18	5,2	2,10	118	25,7	1,98
Li и Cs в мусковитах	7	2,1	2,37	14	0,8	2,15	114	4,9	1,98
Rb в микроклинах и мусковитах	19	2,7	2,09	28	4,4	2,05	197	1,3	1,98
Cs в микроклинах и мусковитах	19	0,2	2,09	28	0,8	2,05	197	5,1	1,98
Li в микроклинах и мусковитах	14	6,1	2,15	24	12,6	2,06	193	9,9	1,98

Примечание. Объяснение латинских букв см. в табл. 7.

Таблица 9

Результаты проверки гипотез о равенстве функций распределения

№ п. п.	Сравниваемые выборки	Соотношение	
		дисперс- ное	среднее
1	Rb	≠	≠
2	Cs	=	≠
3	Li	=	=
4	Rb	≠	≠
5	Cs	=	≠
6	Li	=	≠
7	Rb	=	≠
8	Cs	=	≠
9	Li	≠	≠
10	Rb	≠	≠
11	Cs	=	=
12	Li	=	=
13	Rb	≠	≠
14	Cs	=	≠
15	Li	=	=
16	Rb	≠	≠
17	Cs	≠	≠
18	Li	≠	≠
19	Rb	=	≠
20	Cs	≠	≠
21	Li	=	=
22	Rb	≠	≠
23	Cs	≠	≠
24	Li	≠	=
25	Rb	=	=
26	Cs	≠	=
27	Li	=	≠
28	Rb	≠	=
29	Cs	≠	≠
30	Li	=	≠
31	Rb и Cs в микроклинах из пегматитов I типа	≠	≠
32	» » » » II »	≠	≠
33	» » » » III »	≠	≠
34	Cs и Li в микроклинах из пегматитов I типа	=	≠
35	» » » » II »	≠	≠
36	» » » » III »	≠	≠
37	Rb и Cs в мусковитах из пегматитов I типа	=	≠
38	» » » » II »	≠	≠
39	» » » » III »	≠	≠

Таблица 9 (окончание)

№ п. п.	Сравниваемые выборки	Соотношение	
		дисперс- ное	среднее
40	Cs и Li в мусковитах из пегматитов I типа	=	=*
41	» » » » II »	≠	=
42	» » » » III »	≠	≠
43	Rb в микроклинах и мусковитах из пегматитов I типа	≠	≠
44	То же II типа	≠	≠
45	» III типа	=	=
46	Cs в микроклинах и мусковитах из пегматитов I типа	≠	=
47	То же II типа	≠	=
48	» III типа	=	≠
49	Li в микроклинах и мусковитах из пегматитов I типа	=	≠
50	То же II типа	≠	≠
51	» III типа	≠	≠

* ≠ при $q = 10\%$.

лены и по мусковитам). Сравнение функций распределения содержаний (табл. 9) показало, что наиболее существенно различаются по содержанию и характеру распределения редких щелочей в микроклинах пегматиты полей 2 и 3.

Пегматиты же поля 1 в этом отношении оказались более близкими к пегматитам поля 2 (отличаются только по рубидию), а не поля 3, хотя с последними они наиболее схожи по минеральному составу и особенностям внутреннего строения.

Все три поля значимо отличаются по характеру распределения и величине средних содержаний рубидия в микроклинах. Наиболее высокое содержание рубидия характерно для микроклинов поля 3. От микроклинов поля 2 эти микроклины отличаются также более высоким содержанием цезия и более низким — лития (см. табл. 5, 7, 9). Интересно, что и мусковиты поля № 3 содержат больше цезия, чем мусковиты поля № 2 (функции распределения содержаний лития у них равны, а для рубидия значимая разница наблюдается только в дисперсиях; см. табл. 5, 7, 9).

Отмеченные выше различия между отдельными полями объясняются, по-видимому, различными исходными содержаниями редких щелочей в материнских гранитах.

Рассматривая результаты статистического сравнения параметров распределения, следует остановиться на возможной интерпре-

тации сравнения дисперсий. Если в двух совокупностях равны центры распределения (то есть не отвергается гипотеза о равенстве средних содержаний), то существенное расхождение дисперсий свидетельствует о различной степени рассеяния значений вокруг центра. «Если, согласно известному предположению, — указывает В. Н. Бондаренко (1967), — средние достаточно верно отражают содержание данного элемента в исходной магме, то дисперсия может быть использована в качестве характеристики степени дифференциации исходного материала относительно рассматриваемого компонента». Основываясь на указанном свойстве дисперсии можно, например, утверждать, что в процессе образования мусковитов поля 3 исходное вещество испытывало существенно большую дифференциацию, чем в процессе формирования мусковитов поля 2. Это следует из существенно большей дисперсии содержания рубидия при равных средних для мусковитов этих двух полей (см. табл. 5, 7, 9) и хорошо согласуется с существующими представлениями о формировании пегматитов поля 2 в относительно более спокойной тектонической обстановке.

Количественное сравнение дисперсий возможно и при существенно различающихся центрах распределения.

Л. Аренс (Ahrens, 1966), опираясь в основном на опубликованные нами ранее (Учакин и др., 1962; Шиманский и Учакин, 1962) данные о содержании и характере распределения редких щелочей в микроклинах из восточносаянских пегматитов, рассмотрел вопрос о соотношении дисперсий геохимически связанной пары элементов рубидий—цезий. Проведя количественное сравнение дисперсий рубидия и цезия в микроклинах из саянских пегматитов (с помощью построения диаграмм накопленных частот и реконструированных равноплощадных диаграмм распределения частот)¹, Л. Аренс пришел к заключению, что в общем случае, когда имеется катион главного элемента-хозяина и ряд близких по заряду, радиусу и другим кристаллохимическим свойствам катионов малых (рассеянных) элементов-гостей, «дисперсия концентраций малых элементов-гостей стремится к увеличению с ростом расхождения между радиусами катионов элемента-хозяина и элементов-гостей» (Ahrens, 1966). По мнению Аренса, это отношение дисперсий отражает, по-видимому, тот факт, что изменения температуры, давления и скорости кристаллизации тем чувствительнее влияют на замещение катиона-хозяина катионом-гостем, чем больше эти катионы отличаются по ионному радиусу друг от друга.

Изучение соотношения дисперсий геохимически связанных элементов в различных минералах или породах из одного района (или в одном минерале или породе из разных районов) может способст-

¹ При этом Аренсом были, в частности, подтверждены опубликованные нами ранее выводы о том, что рубидий и цезий в исследованных микроклинах распределены по логнормальному закону и что дисперсия концентраций цезия больше дисперсии концентраций рубидия.

вывать, как подчеркивает Аренс, решению некоторых петрогенетических проблем.

Поскольку в настоящее время мы располагаем гораздо более обширными и представительными данными о характере распределения редких щелочей в микроклинах, чем те, которые были нами ранее опубликованы и использованы Аренсом для вывода о соотношении дисперсий рубидия и цезия, и поскольку в нашем распоряжении имеются также аналогичные сведения по мусковитам из тех же пегматитов, представляется интересным, во-первых, проверить правильность утверждения Аренса для микроклинов (на новом материале и другим методом), во-вторых, проверить справедливость этого утверждения и для мусковитов и, в-третьих, сопоставить соотношения дисперсий в этих минералах между собой.

Статистическая оценка значимости наблюдаемых расхождений в дисперсиях (табл. 6) показывает, что для всех типов пегматитов, как для микроклинов, так и для мусковитов, остается неизменным соотношение дисперсий $S_{Cs}^2 > S_{Rb}^2$ (см. рис. 2). Таким образом, результаты наших исследований подтверждают вывод Аренса о том, что разница в дисперсиях рубидия и цезия обусловлена разницей их ионных радиусов (r_i цезия больше r_i рубидия)¹.

Заметим, что в микроклинах общее соотношение дисперсий редких щелочей имеет, как правило, вид $S_{Rb}^2 < S_{Cs}^2 < S_{Li}^2$, а в мусковитах — $S_{Rb}^2 < S_{Cs}^2 > S_{Li}^2$, т. е. соотношение дисперсий обратно соотношению содержаний (см. табл. 6). Интересно также отметить, что при переходе от одного типа пегматита к другому (см. рис. 2) существенных изменений дисперсий редких щелочей, как правило, не наблюдается. В мусковитах существенное различие в дисперсиях отмечается лишь в одном случае (из шести) — между дисперсиями цезия в пегматитах II и III типов, а в микроклинах — в двух случаях (между дисперсиями рубидия в пегматитах I и II типов и между дисперсиями лития в пегматитах II и III типов).

При сравнении дисперсий содержаний редких щелочей в микроклинах с дисперсиями этих же элементов в мусковитах (см. табл. 6 и рис. 2) видно, что рубидий и цезий в мусковитах обладают, как правило, большей дисперсией, чем в микроклинах, тогда как для лития характерно обратное соотношение. Эта особенность поведения редких щелочей обусловлена, очевидно, различными условиями вхождения этих элементов в кристаллические решетки слюды и полевого шпата. В общем случае более высокая дисперсия содержаний элемента-примеси (микроэлемента) в данном минерале (например, цезия в мусковите) по сравнению со значением этой величины в другом минерале той же изверженной породы (например,

¹ Имея в виду, что ион цезия обладает самым большим из элементов периодической системы ионным радиусом, следует напомнить указание А. Е. Ферсманна (1960), что «ионы, обладающие слишком большими (или слишком малыми) радиусами, обладают и повышенной способностью к миграции и перераспределению (при прочих равных условиях)».

в микроклине из тех же пегматитов) свидетельствует, по всей вероятности, о том, что вхождение этого элемента в кристаллическую решетку первого минерала осуществляется при более широком диапазоне условий, чем в кристаллическую решетку второго минерала.

Заканчивая рассмотрение особенностей распределения содержаний редких щелочей и калия в полевых шпатах из различных пегматитов района, следует особо указать на возможность практического использования ряда полученных результатов для геохимической индикации редкометалльных пегматитов.

Из приведенных выше данных о содержании редких щелочей и величине отношений калия к рубидию и рубидия к цезию в микроклинах из пегматитов разного типа (безрудных и редкометалльных) видно, что по этим данным можно судить о перспективах редкометалльной минерализации в пегматитах (т. е. микроклин является геохимическим минералом-индикатором). Как показывает опыт наших работ, метод геохимической индикации при поисках редкометалльных пегматитов может успешно применяться как для выявления региональной зональности пегматитовых полей при мелкокомасштабных поисково-съёмочных работах, так и для разбраковки отдельных пегматитовых тел при более детальных исследованиях.

В заключение следует подчеркнуть, что установленные выше закономерности поведения редких щелочей (и индикаторных отношений) в микроклинах из пегматитов различного типа аналогичны закономерностям изменения этих величин в различных, последовательно развивающихся фазах гранитных интрузивных комплексов. Это подтверждает теоретическое положение А. И. Гинзбурга (1960) о том, что «геохимическая эволюция пегматитового процесса является естественным продолжением эволюции гранитных интрузивных комплексов» и объективно свидетельствует об образовании пегматитов района из остаточных гранитных расплавов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Аренс Л. Х. 1964. Распределение элементов в изверженных породах. Сб. «Химия земной коры», т. 2. М., Изд-во АН СССР.
- Бондаренко В. Н. 1967. Статистические методы изучения вулканогенных комплексов. М., «Недра».
- Боровик-Романова Т. Ф. и Соседко А. Ф. 1957. Содержание редких щелочей в минералах из пегматитовых жил Кольского полуострова по спектральным анализам.— Геохимия, № 5.
- Вентцель Е. С. 1958. Теория вероятностей. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит.
- Вистелиус А. Б. 1963. Проблемы математической геологии.— Геол. и геоф., № 7.
- Гинзбург А. И. 1960. Геохимические особенности пегматитового процесса.— В сб. «Минералогия и генезис пегматитов». М., Изд-во АН СССР.
- Крамер Г. 1948. Математические методы статистики. М., ИЛ.
- Куч В. П., Мищенко В. С. 1963. Функции распределения содержаний лития, рубидия и их некоторых минералов-носителей в гранитах Каменных Могил и Екатериновки (Приазовье).— Геохимия, № 12.

- Родионов Д. А.* 1961. О виде функций распределения содержаний минералов в изверженных горных породах.— Труды ИМГРЭ, вып. 6.
- Родионов Д. А.* 1963. Применение математической статистики для обоснования некоторых петрографических и геохимических выводов.— Сов. геол., № 1.
- Родионов Д. А.* 1964. Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах. М., «Наука».
- Ставров О. Д.* 1963. Основные черты геохимии лития, рубидия, цезия в процессе становления гранитных интрузивов и связанных с ними пегматитов.— В сб. «Геология месторождений редких элементов», вып. 21. М., Госгеолтехиздат.
- Тейлор С. Р., Хейер К. С.* 1963. Петрологическое значение изменения содержания элементов-примесей в щелочных полевых шпатах.— Труды XXI сессии Международного геол. конгресса. Вып. II. Тектоника и петрография. М., ИЛ.
- Учакин Ю. М.* 1959. К вопросу о региональной зональности пегматитов.— Труды Вост.-Сиб. геол. ин-та, вып. 2. Иркутск.
- Учакин Ю. М., Шиманский А. А., Пауллер Т. И.* 1962. Содержание редких щелочей в полевых шпатах из пегматитов Саяна.— Геохимия, № 8.
- Учакин Ю. М., Шиманский А. А.* 1968. Некоторые геохимические особенности поведения калия и рубидия в пегматитах Восточного Саяна.— В сб. «Материалы по геологии и геофизике Сибирской платформы» (Труды Вост.-Сиб. НИИГГиМС, вып. 1). Иркутск. Вост.-Сиб. кн. изд-во.
- Ферсман А. Е.* 1960. Избранные труды, т. VI. М., Изд-во АН СССР.
- Хальд А.* 1956. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ.
- Шарапов И. П.* 1965. Применение математической статистики в геологии. М., «Недра».
- Шиманский А. А., Учакин Ю. М.* 1962. О характере распределения щелочей в микроклинах из пегматитов Восточного Саяна. — Геохимия, № 9.
- Шиманский А. А., Учакин Ю. М.* 1963. Геохимическая индикация редкометалльных пегматитов.— Изв. ВУЗов, серия геология и разведка, № 8.
- Ahrens L. H.* 1954. The longnormal distribution of the elements.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, v. 5, No 2.
- Ahrens L. H.* 1957. Lognormal-type distribution.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, v. 11, No 4.
- Ahrens L. H.* 1966. Notes on the Rb — Cs dispersion relationship, with particular reference to pegmatitic microclines from the Sayan Mountains, U.S.S.R.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, v. 30, N 1.
- Miller R. L., Goldberg. E. D.* 1955. The normal distribution in geochemistry.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, v. 8, No 1—2.

Р. И. ДУБОВ

О ЗАВИСИМОСТИ ГЕОХИМИЧЕСКОГО ОПРОБОВАНИЯ РЫХЛЫХ ПОРОД ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА ПО ФРАКЦИЯМ

Обозначим, для краткости, через \mathfrak{M} химический элемент или соединение, распределение которого изучается.

При наиболее распространенных сейчас геохимических исследованиях — так называемых металлотметрических съемках — необходимо судить о распределении \mathfrak{M} в верхнем горизонте рыхлых пород по результатам опробования определенного (находящегося на

заданной глубине) горизонта рыхлых образований. При этом в пробы берется лишь мелкая фракция, обычно меньше 1 мм. Поэтому необходимо учитывать возможности обогащения или обеднения такой фракции элементом \mathfrak{M} в результате гипергенных процессов перераспределения вещества.

Рассмотрим случай, когда рыхлые образования являются остаточными (элювием — делювием).

Пусть C_h и C_d — концентрации \mathfrak{M} , соответственно, в верхнем горизонте коренных пород и в опробуемой фракции на горизонте опробования. Обозначим:

$$Q_h = \int_{S_h} C_h \cdot dS_h, \quad Q_d = \int_{S_d} C_d \cdot dS_d, \quad (1)$$

где S_h — горизонт (площадь) коренных пород, из которых образовались опробуемые рыхлые породы горизонта опробования S_d ;

$$k_{hd} = Q_h/Q_d \quad (\text{или } k_{dh} = Q_d/Q_h = 1/k_{hd}) \quad (2)$$

— коэффициент перераспределения.

При не слишком большой мощности рыхлых образований приближенно можно считать, что коренные породы на горизонте S_h были такими же, какими их можно наблюдать теперь непосредственно под рыхлыми образованиями, и мы будем отождествлять их. Это принято по необходимости и на основании теоретических и фактических предпосылок (Соловов, 1959). На основании тех же соображений принято считать коэффициент k_{hd} приближенно постоянным для всех точек интерпретируемой аномалии (на фиксированном горизонте опробования). Величина k_{hd} в изучаемом районе может быть оценена по результатам предварительных исследований уже вскрытых рудных тел и их ореолов или по аналогии с другими районами (Соловов, 1959). Ориентировочное представление о ней может быть получено и в изучаемом районе до вскрытия рудных тел, путем сопоставления результатов опробования рыхлых образований и выходов коренных пород (по статистически определяемому при этом отношению Q_h/Q_d в целом для некоторого участка, без выделения конкретных рудных тел и их ореолов). Способ был предложен автором данной работы и проверен на практике совместно с другими исследователями. Его детальное описание и полученные результаты приведены в статьях (Дубов, Фурсов, 1966; Найгебауэр, 1966). В этих работах показано, что величина k_{hd} для части элементов может быть принята почти постоянной в разных условиях. Для других элементов она зависит определенным образом от геологической обстановки. Для ряда условий пока не найдено четких закономерностей, и требуется оценка этой величины отдельно в каждом конкретном случае. В частности, для меди коэффициент k_{hd} обычно близок к 1, для вольфрама он может быть в несколько (порядка 2—5) раз больше на гранитах и меньше (порядка 0,3—0,4) — на породах песчанико-слан-

цевой толщи и т. д. Это зависит от свойств руд и вмещающих их пород. В частности, при разрушении гранитов происходит каолинизация полевых шпатов, и образующийся глинистый материал составляет значительную долю мелкой фракции, в то время как из кварц-вольфрамитовых жил образуются преимущественно более крупные обломки (Дубов, 1957; Дубов, Квятковский, 1961).

Различие между C_d и C_h определяется указанным перераспределением \mathcal{M} по фракциям рыхлых образований процессами макропереноса (в частности, диффузионного рассеяния). На основании вышеизложенного влияние перераспределения можно исключить, умножая C_d на k_{hd} . Поэтому при интерпретации ореолов следует оперировать величинами

$$C = k_{hd} \cdot C_d. \quad (3)$$

Оценка такой поправки необходима для расчета параметров рудных тел по их ореолам (Дубов, 1964).

Гораздо сложнее учесть гипергенное перераспределение \mathcal{M} по фракциям рыхлых пород в аллохтонных образованиях.

В частности, на вогнутых склонах в связи с выполаживанием их книзу скорость водных потоков уменьшается, а с нею падает и движущая сила. В результате этого материал, приносимый с верхних частей склонов, выпадает из потоков, образуя шлейфы. При этом рыхлый материал, образовавшийся и принесенный позднее, выпадает над принесенными ранее. Естественно поэтому, что по распределению \mathcal{M} шлейфы ближе к аллювиальным потокам, чем к остаточным элювиально-делювиальным ореолам диффузионного типа, образующимся на выпуклых и плоских склонах¹. Форма шлейфов, как и аллювиальных потоков, определяется руслами водотоков и практически не зависит от формы выходов рудных тел. То же самое можно сказать о пролювиальных и коллювиальных потоках.

Однако все эти потоки несут информацию о продуктивности площади, с которой в них собирается материал. В частности, для аллювиальных потоков принято считать, что концентрация \mathcal{M} в некоторой точке r потока (т. е. $C(r)$) пропорциональна и обычно приблизительно равна средней концентрации на площади водосбора $S(r)$, с которой поступает материал в эту точку (Соловов, 1959):

$$C_r = \frac{k}{S(r)} \int_{S(r)} C(\rho) \cdot dS, \quad (4)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

¹ С течением времени, по мере развития склона, его форма может меняться. Тогда остаточные ореолы рудных тел могут перекрываться шлейфами (обратное невозможно, т. к. аллохтон не может перекрываться автохтоном). Зависимость процессов образования ореолов от формы склонов впервые проанализировал А. П. Соловов (1959).

Величина $k \cdot \int C(\rho) \cdot dS$ есть продуктивность площади $S(r)$.

Поэтому, зная $C(r)$, можно вычислить $S(r)$:

$$Q_S = S(r) \cdot C(r). \quad (5)$$

Это представление сыграло большую роль в развитии поисков месторождений по аллювиальным потокам.

В то же время обратим внимание на желательность учета здесь перераспределения \mathfrak{M} по фракциям, более сложного, чем в случае элювиально-делювиальных ореолов.

Действительно: при движении рыхлого материала в потоке происходит истирание частиц и поступление со склонов в поток нового, еще не истертого материала. Поэтому по мере удаления от месторождения наиболее обогащенная элементом \mathfrak{M} фракция потока уменьшает свой средний диаметр, и вначале она может относительно мало попадать в пробу, отбираемую из мелкой фракции, а потом ее доля повышается. Следовательно, максимум концентрации \mathfrak{M} в пробах может сдвигаться вниз по потоку от того места, где в действительности поступление рудного материала в поток максимумно.

Второе осложнение связано с неодинаковой средней скоростью частиц рыхлого материала в водном потоке. Найдем выражение для оценки этого нарушения. Для простоты будем полагать (как это обычно делается на практике), что в поперечном сечении поток однороден. Кроме того, вначале будем считать, что в пробы отбирается весь материал потока (без обычной преимущественности выборки каких-либо фракций) и что скорость частиц в потоке $U = U(\delta)$ зависит только от их диаметра.

Пусть dS — мысленно выделенная площадка в некотором поперечном сечении потока около точки r ; $dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2)$ — доля объема материала аллювия, находящегося в частицах с диаметром из интервала $(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2)$, в пробе, отобранной около точки r .

Статистическое распределение по диаметрам частиц, пересекающих площадку, в каждый момент времени такое же, как в пробе. Следовательно, доля площадки, пересекаемая частицами с диаметром из интервала $(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2)$, равна $dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2)$. За время dt через площадку пройдет объем такого материала, равный $U(\delta) \cdot dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2) \cdot dS \cdot dt$. Общий объем

материала, проходящий за время dt через dS , равен $\int_{\delta} U(\delta) \times dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2) \cdot dS \cdot dt$, где интегрирование производится по всем возможным значениям δ . Следовательно, в общем объеме материала, переносимого потоком через площадку dS , материал с диаметром частиц из интервала $(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2)$ составляет долю

$$dP(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2) = \frac{U(\delta) \cdot dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2)}{\int_{\delta} U(\delta) \cdot dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2)}. \quad (6)$$

В знаменателе этого выражения стоит общее количество q материала, переносимое потоком через единичную площадку поперечного сечения. Поэтому выражение (6) можно записать также в виде:

$$dP(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2) = \frac{U(\delta)}{q} \cdot dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2). \quad (7)$$

Пусть C_δ — концентрация \mathcal{M} во фракции с диаметром частиц δ . Тогда, умножая равенство (7) на C_δ и интегрируя по δ от 0 до ∞ , получим среднюю концентрацию \mathcal{M} во всем материале, переносимом потоком через поперечное сечение:

$$\begin{aligned} C(r) &= \int_0^\infty C_\delta \cdot dP(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2) = \\ &= \frac{1}{q} \int_0^\infty U(\delta) \cdot C_\delta \cdot dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2). \end{aligned} \quad (8)$$

При использовании формулы (4) предполагается, что поток является приближенно стационарным, т. е. через определенное сечение потока проходит за время dt такое количество материала, какое поступает за это время в поток выше рассматриваемого сечения. При этом под $C(r)$ понимается концентрация \mathcal{M} именно в этом материале, т. е. величина, определяемая, согласно изложенному, формулой (8). Концентрация же в отобранной пробе определяется выражением

$$C^*(r) = \int_0^\infty C_\delta dP^*(\delta - d\delta/2; \delta + d\delta/2) \quad (9)$$

(это — средневзвешенное значение из концентраций \mathcal{M} в различных фракциях пробы). Из сравнения выражений (8) и (9) видно, что величины $C^*(r)$ и $C(r)$ могут сильно различаться за счет различия величины $U(\delta)$ для разных фракций. Действительно, величина $U(\delta)$ может отличаться для разных δ в любое число раз: очень крупные обломки практически неподвижны, т. е. для них $U(\delta) \approx 0$, а тонкая взвесь частиц движется со скоростью воды. Поэтому доля мелкой фракции в пробе меньше, чем в действительности в потоке. Если в пробу отбирается только относительно мелкая фракция, то такое различие меньше. Однако даже простое наблюдение за потоком и движением воды с тонкой взвесью и перемещением частиц с диаметром порядка 1 мм показывает, что и здесь обычны различия скоростей в десятки раз. Согласно формуле (7), это нарушает в соответствующее число раз и соотношение фракций с разными диаметрами δ_1 и δ_2 в пробе по сравнению с их действительным соотношением в потоке:

$$\frac{P^*(\delta_1 - d\delta/2; \delta_1 + d\delta/2)}{P^*(\delta_2 - d\delta/2; \delta_2 + d\delta/2)} = \frac{U(\delta_2)}{U(\delta_1)} \cdot \frac{P(\delta_1 - d\delta/2; \delta_1 + d\delta/2)}{P(\delta_2 - d\delta/2; \delta_2 + d\delta/2)}. \quad (10)$$

Следовательно, традиционное использование величины $C^*(r)$ вместо $C(r)$ в формулах (4) и (5) может приводить к большим ошибкам. Этим частично можно объяснить отклонения оценок Q_s , получаемых при традиционных расчетах, от фактических значений. Для дальнейшего повышения эффективности геохимических поисков по аллювиальным потокам необходимо использование поправок, вытекающих из формулы (7), что требует проведения специальных исследований.

Заметим, что распределению \mathcal{M} по фракциям рыхлых образований уделялось довольно много внимания (Соловов, 1959; Дубов, 1957; Дубов, Квятковский, 1961; Крицук, Квятковский, 1966; Дубов, Фурсов, 1966, и др.), но теоретический анализ вскрытых явлений не делался, в связи с чем описанные источники искажений оказались неизученными.

Вопрос о поправках на гипергенные изменения в различных природных условиях должен войти, очевидно, в науку о геохимических ландшафтах, успешно изучающую эти условия (Перельман, 1955), но пока ограничивающуюся незначительными выводами.

ЛИТЕРАТУРА

- Дубов Р. И. 1957. Результаты опытных металлометрических работ в Забайкалье.— В сб. «Геохимические поиски рудных месторождений в СССР» (Труды Первого Всесоюзного совещания по геохимическим методам поисков рудных месторождений). М., Госгеолтехиздат.
- Дубов Р. И. 1964. Концентрации химических элементов в ореолах рассеяния.— Геол. и геоф., № 12.
- Дубов Р. И., Квятковский Е. М. 1961. Распределение вольфрама во вторичных ореолах рассеяния.— Зап. Ленингр. горн. ин-та, т. XXXIX, вып. 2. М., Госгортехиздат.
- Дубов Р. И., Фурсов В. З. 1966. Соотношение между параметрами статистического распределения химических элементов в коренных горных породах и мелкой фракции элювия — делювия.— В сб. «Математические методы геохимических исследований». М., «Наука».
- Крицук И. Н., Квятковский Е. М. 1966. Распределение металлов в различных классах и фракциях делювиальных ореолов месторождений Восточного Забайкалья.— Зап. Ленингр. горн. ин-та, т. LI, вып. 2. (Геохимические и радиоактивные методы поисков и разведки полезных ископаемых). Л., «Наука».
- Найзбауэр В. А. 1966. Соотношение средних концентраций химических элементов в коренных породах и элювии — делювии.— Сб. «Геология и полезные ископаемые Забайкалья». (Тезисы докладов 5-й геологической конференции.) Чита.
- Перельман А. И. 1955. Очерки геохимии ландшафта. М., Географгиз.
- Соловов А. П. 1959. Основы теории и практики металлометрических съемок. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР.

**К МЕТОДИКЕ КОМПЛЕКСНОЙ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ПОИСКОВ**

Общеизвестно, что ежегодно фонд легко открываемых месторождений сокращается. Это обстоятельство непосредственно сказывается на снижении значимости поисковых методов и определенности их результатов. В особенности это касается поисков слепых рудных тел. Специфика их, в первую очередь, заключается в том, что в процессе поисков выявляются не руды, а их признаки и условия, благоприятные для локализации оруденения. Другая особенность поисков слепых рудных тел — это то обстоятельство, что они представляют собой операцию технико-экономическую, так как реализуются путем дорогостоящих и трудоемких работ. Перечисленные особенности поисков в настоящее время обуславливают возрастание роли процесса интерпретации поисковой информации. Совершенствование интерпретации идет в основном по двум направлениям: за счет комплексности и путем количественного выражения поисковых признаков и комплексных аномалий.

Предлагаемый нами вариант комплексной количественной интерпретации основан на типизации геологоструктурных условий зон минерализации и на единой системе измерения разнообразной поисковой информации. Он разработан на примере Комсомольского оловорудного района.

Комсомольский оловорудный район находится в зоне мезозойской складчатости и представляет собой наложенный прогиб с вулканитами, сформированный в процессе позднемеловой тектоно-магматической активизации (Радкевич и др., 1967). Прогиб заложен на консолидированных терригенных осадках юрского возраста, претерпевших раннемеловую фазу складчатости. Заложению его предшествовало сводовое поднятие и образование пограничных разломов, по которым происходило последующее опускание центральной части свода. На границе раннего и позднего мела в прогибе и главным образом в узких зонах пограничных грабен-синклиналей накапливалась толща грубообломочных пород типа континентальной молассы, перемежающихся с пирокластами риолитового состава. Магматические процессы начала позднего мела завершились формированием экструзий кварцевых порфиров и интрузий биотитовых гранитов. Последние расположены вдоль западной границы района. После незначительного перерыва в прогибе происходило накопление пирокластических продуктов андезитового состава. Андезитовый вулканизм также завершился образованием экструзий и становлением интрузий диорит-гранодиоритового состава. С последними парагенетически связано оловянное и полиметаллическое оруденение.

Путем тщательного анализа истории геологического развития и неотектонических движений в районе были выделены палеоуровни и рудоконтролирующие поверхности, которые явились основой расчленения района на типы площадей по геологоструктурной позиции рудных зон и степени их сохранности от эрозии (см. табл.). Анализ поисковых признаков производился дифференцированно для каждого типа площадей. Он производился на основе представлений о соотношениях между поисковыми методами, вскрываемыми в своей области всеобщий закон рассеяния и миграции вещества, а также о характере самого отношения признака к руде. Исходя из этого, вся поисковая информация разделена нами на три группы.

I группа. Указатели среды, благоприятной для рудоотложения и условий, способствующих сохранению рудных тел от последующей эрозии. Это — так называемые геологические предпосылки (геологоструктурные, геоморфологические, литологические и т. п.). Учет отмеченных факторов в значительной мере реализован типизацией площадей.

II группа. Прямые указатели имевшего место гидротермального процесса и его особенностей. К этой группе отнесены минералого-геохимические в первичном поле рассеяния и некоторые геофизические признаки — признаки, основанные на закономерностях изменения вещественного состава гидротермально измененных пород, соотношения между элементами в минерализованных породах и рудах, особенности первичных литохимических ореолов, аномалии поляризуемости, магнитометрические аномалии над рудными телами с повышенным количеством пирротина, отрицательные магнитометрические аномалии над зонами пропилитизации в средних эффузивах и т. п. Глубинность поисковых методов этой группы может превышать мощность геохимического ландшафта.

III группа. Признаки, основанные на взаимодействии находящихся в недрах руд с факторами современного рассеяния. В группу включены признаки, выявляемые геохимическими методами поисков во вторичном поле рассеяния по потокам и ореолам рассеяния, гидрохимическим и геофизическим методом естественного поля. Глубинность перечисленных методов не превышает мощности геохимического ландшафта, за исключением гидрохимического метода по искусственным водопунтам.

Важнейшим условием комплексной интерпретации результатов поисков является единая система измерения поисковых признаков. Ввиду того, что поисковый комплекс охватывает все сферы обращения элементов в природе, система измерения поисковых признаков должна базироваться на законе, имеющем всеобщий характер. Упомянутым свойством обладает статистическая теория информации К. Шеннона, вскрывающая такие особенности дискретных событий, как степень их упорядоченности (Файнштейн, 1960).

Количество информации, получаемое в исходе опыта, зависит от степени первоначальной неопределенности его, и чем эта неопределенность больше, тем больше информации, в среднем, несет исход опыта. При анализе случайных событий наименьшее количество информации несет исход опыта, который априори наиболее вероятен.

Для случая опробования, учитывая вероятности встречи фонового и аномального значений, справедливо утверждение, что по мере того, как среди нормального фонового поля будут появляться аномалии и будет увеличиваться их интенсивность, количество информации в исходе опробования будет возрастать.

Под единицей информации «бит» понимается отрицательное значение двоичного логарифма вероятности решения дилеммы при равновероятном «да» и «нет», т. е. — $\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)$. Отсюда количество информации (I), получаемое в исходе опыта, есть двоичный логарифм числа последовательных дилемм, однозначно определяющих данный исход.

Если распределение вероятностей исходов опыта известно, то может быть подсчитана средняя информация, доставляемая одним опытом:

$$I = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i, \quad (1)$$

p_i — вероятность i -го исхода из общего числа n возможных; суммарная вероятность всех исходов ($\sum p_i$) равна 1.

Формула К. Шеннона может быть преобразована в более удобную для целей данной работы формулу. Во-первых, двоичные логарифмы заменяются десятичными. Во-вторых, формула (1) позволяет вычислить лишь средневзвешенное количество информации, приходящееся на одну пробу, характеризующую некоторую совокупность, например рудное поле в целом. Однако для практических целей важно определить количество информации в конкретной точке. В связи с этим для подсчета количества информации в точке пользовались формулой:

$$I = - 3,32 \sum_{i=1}^n \lg p_i. \quad (2)$$

Математически такое преобразование равносильно допущению равновероятности установленного в данной точке значения признака всему множеству (n) значений признака.

Оценкой вероятности обнаружения классов значений признаков являются их частоты встречаемости. Поэтому первым этапом количественного анализа является составление таблиц частот встречаемости классов значений признака, т. е. выяснение структуры выборки. Затем определяется количество информации в каждой точке и строятся схемы (каждая — в виде кальки-наклад-

ки), показывающие распределение по точкам опробования, т. е. по площади, количества информации по каждому признаку, и калька-накладка суммарной информации. Структура выборки выясняется дифференцированно для различных типов площадей. Помимо прямых признаков можно учитывать те из косвенных, для которых установлена корреляция с одним из прямых признаков или непосредственно с оруденением.

Особенностью предлагаемой методики оценки является то обстоятельство, что она позволяет количественно выражать такие важные поисковые признаки, как вещественный состав минерализованных пород и другие не поддающиеся измерению показатели.

В Комсомольском районе на одном из участков для оценки минерализованных зон и аномалий нами использовались следующие признаки: а) типы минерализованных пород; б) вещественный состав минерализованных пород; в) концентрация олова в минерализованных породах, а для площадей 1 типа (см. табл.), кроме того, концентрации свинца; г) концентрация олова во вторичных ореолах и потоках рассеяния и свинца для площадей 1 типа; д) концентрация олова в подземных и поверхностных водах. Глубинность комплексной оценки не менее мощности геохимического ландшафта.

На упомянутом участке распределение количества информации подчинено нормальному закону. Между количеством информации и концентрацией олова в коренных породах в среднем на вертикальном интервале, равном мощности ландшафта, установлена тесная корреляционная связь. Коэффициент корреляции равен $+0,94 \pm 0,04$.

Составленное уравнение регрессии позволяет производить количественную оценку в аналогичных условиях для других участков в Комсомольском рудном районе.

В результате анализа поисковых признаков составлена сводная таблица (см. табл.). В ней сведены все необходимые данные для оценки по предлагаемой методике.

В заключение выскажем соображения о возможностях применения предлагаемой методики оценки.

1. При мелко- и среднемасштабном геологическом картировании и поисках, когда среди многочисленных и малоинтенсивных аномалий необходимо выделить наиболее перспективные участки. Большое количество проб при таких исследованиях позволяет выяснить структуру выборки и достаточно надежно оценить вероятность встречи классов значений признаков. Расчет информативности в этом случае должен быть не моноэлементным, а по сериям парагенных элементов для рудной формации в целом.

2. При детальных поисковых работах наподобие того, как было разобрано для Комсомольского рудного района.

3. При оценочных работах на конкретных локальных участках, перспективных на обнаружение слепых рудных тел. При этом особо важно наметить перечень поисковых индикаторов. В этом

Т а б л и ц а

Поисковые признаки для площадей различного типа

Тип площади	Характеристика степени эрозионного среза	Вмещающие породы	Рудоконтролирующие поверхности и контакты	Вещественный состав зон		Геохимический фон, %						Аномальные значения ($n \cdot 10^{-3}$)									
				Гидротермально измененные и жильные породы	Встречаемость (P_1)	Коренные породы			Рыхлый покров		Воды		Коренные породы		Рыхлый покров		Воды				
						Олово	Свинец	Цинк	Олово	Свинец	Олово	Цинк	В единичной пробе		Вероятность обнаружения отдельных значений		Олово		Олово, $мкг/л$		
													Олово	Свинец	Олово	Свинец	в единичной пробе	вероятность отдельных значений		в единичной пробе	вероятность
Встречаемость зон минерализации ($\Delta S = 0,15 \times 0,1 км^2$)	Олово	Свинец	Цинк	Олово	Свинец	Олово	Цинк	Олово	Свинец	Олово	Свинец	Олово	Свинец	Олово	Свинец	Олово	Свинец				
I	Очень слабый: все рудные тела слепые	Верхняя часть разреза амутской свиты; преобладают андезитовые порфириды	Подошва порфиритовой пачки и разрывные нарушения северо-западного простирания. Неблагоприятно: район стратовулканов	Пропилит Жильный кварц	1,0 0,04	0,19	$0,43 \times 10^{-3}$	1×10^{-3}	$7,6 \times 10^{-3}$	$1,4 \times 10^{-5}$	$0,4 \times 10^{-3}$	Ниже предела чувствительности	36 $мкг/л$	$\frac{10}{3,2}$	$\frac{300}{80}$	10—0,39 30—0,12 50—0,01 60—0,004	300—0,42 500—0,27 1000—0,20	$0,9 \times 10^{-3}$	0,5—0,07 2—0,03 1—0,012 3—0,007	0,3	0,043
II	Слабый: эрозией вскрыта часть рудных тел	Нижняя часть разреза амутской свиты: преобладают туфы дацитовых порфиридов	Кровля и подошва пирокластической пачки, разрывные нарушения северо-западного простирания. Неблагоприятно: район стратовулканов	Пропилит Монокварцевый метасоматит Турмалиновый метасоматит Кварц	1,0 0,17 0,27 0,80	0,16	$0,4 \times 10^{-3}$	$2,1 \times 10^{-3}$	10×10^{-3}	$3,3 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{-3}$	То же	63 $мкг/л$	$\frac{60}{20}$	$\frac{300}{70}$	60—0,36 100—0,25 200—0,17	300—0,23 500—0,14 1000—0,07	$3,3 \times 10^{-3}$	3—0,036 6—0,019 10—0,01 30—0,004	0,3	0,063
III	Умеренный: все рудные тела вскрыты эрозией	Конгломераты и туфы кварцевых порфиридов (хольдяминская свита)	Подошва и кровля свиты, границы крупных ритмопачек	Кварц-серицитовый метасоматит Турмалиновый метасоматит Кварц	1,0 0,66 0,28	0,2	$0,5 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-3}$	Не опр.	Не опр.	Не опр.	Не опр.	Не определялись							
IV	Интенсивный: эрозией вскрыты наиболее продуктивные части	Терригенные осадочные породы юрского возраста	Разрывные нарушения субширотного направления	Кварц-серицитовый метасоматит Монокварцевый метасоматит Турмалиновый метасоматит Кварц	1,0 0,55 1,0 0,44	0,11	$0,8 \times 10^{-3}$	$1,4 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$	$0,4 \times 10^{-3}$	$0,4 \times 10^{-3}$	» »	» »	$\frac{60}{30}$	$\frac{300}{32}$	80—0,35 100—0,24 200—0,15 300—0,10 400—0,08	—	—	—	0,3	0,11
V	Весьма интенсивный: эрозией уничтожена большая часть рудных тел	Гранитоиды повышенной основности (крупные массивы)		Кварц-серицитовый метасоматит Монокварцевый метасоматит Турмалиновый метасоматит Кварц	0,61 0,53 1,0 0,4	0,13	$0,7 \times 10^{-3}$	8×10^{-3}	8×10^{-3}	$0,3 \times 10^{-3}$	$0,3 \times 10^{-3}$		30 $мкг/л$	—	—	—	—	—	—	—	—

случае комплексная оценка должна производиться на основе анализа совокупности признаков и их информативности по зонам геохимического ландшафта, в сфере которых происходит формирование поискового признака. Детальность изучения при этом позволяет учитывать признаки, несущие богатую смысловую информацию, которая при обычной методике, как правило, не учитывается.

ЛИТЕРАТУРА

- Радкевич Е. А., Коростелев П. Г., Кокорин А. М., Рябов В. К., Степанова М. В. и др. 1967. Минерализованные зоны Комсомольского района. М., «Наука».
- Файнштейн А. 1960. Основы теории информации. М., ИЛ.

А. И. ЧЕРНЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ КИНЕТИКИ ТВЕРДОФАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

Удобной формой записи уравнений, способных описать различные случаи протекания изотермических твердофазных процессов, является дифференциальное уравнение Ерофеева—Белькевича (Белькевич, 1956)

$$\frac{d\alpha}{(1-\alpha)^s} = Kt^{n-1} dt, \quad (1)$$

где α — степень превращения вещества, t — время, n — порядок реакции, s — константа, физический смысл которой пока не выяснен, однако введение ее в уравнение оправдано результатами обработки экспериментальных данных (Белькевич, 1956; Ерофеев, Протащик, 1956; Черненко, 1970), K — константа скорости реакции, причем, согласно теории абсолютных скоростей реакций (Глесстон и др., 1948),

$$K = \kappa \frac{k}{h} T \exp\left(-\frac{\Delta H^\ddagger}{RT} + \frac{\Delta S^\ddagger}{R}\right), \quad (2)$$

где κ — трансмиссионный коэффициент, k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, ΔH^\ddagger и ΔS^\ddagger — соответственно изменение энтальпии и энтропии при образовании активированных комплексов из исходных веществ, R — универсальная газовая постоянная и T — температура в градусах по абсолютной шкале.

Разработанный Б. В. Ерофеевым и В. А. Протащиком (1956) метод определения параметров в уравнении (1) оказался недостаточно корректным, так как он не учитывает инерционность разогрева образца до заданной температуры.

Неизотермический метод определения энергии активации, предложенный Б. М. Моисеевым (1963), ограничивается частным случаем, когда в уравнении (1) $n = 1$ и $s = 1$. В этой, а также в работах (Coats, Redfern 1964; Horowitz, Metzger, 1963), посвященных обработке неизотермических экспериментальных данных, предэкспоненциальный множитель в уравнении (2) принимается независимым от температуры. В работах (Coats, Redfern, 1964; Horowitz, Metzger, 1963) изложены методы, предназначенные для определения как энергии активации, так и порядка реакции из экспериментальных данных, характеризующихся постоянством градиента температуры во время опытов ($\frac{dT}{dt} = \text{const}$). Однако эти методы также не являются точными. Так, например, в работе (Horowitz, Metzger, 1963) при установлении уравнений, с помощью которых обрабатываются экспериментальные данные, кроме пренебрежения зависимостью предэкспоненты от температуры в уравнении (2), отбрасываются члены второго и выше порядков малости. В ряде случаев наиболее существенным источником ошибок рассматриваемого метода может явиться неопределенность нахождения точки перегиба на кинетической кривой соответствующей максимуму скорости процесса (Шкарин, 1968). Все эти факты требуют разработки нового метода определения параметров в уравнении (1), свободного от отмеченных недостатков.

Ранее (Черненко, 1970) выполнено интегрирование уравнения (1) с учетом зависимости (2) при $n = 0$ или целому числу для случаев изменения температуры образца во времени:

а) по линейному закону

$$T = \delta t \quad (3)$$

и б) по гиперболическому закону

$$T = t : (\lambda t + \beta), \quad (4)$$

где δ , λ и β — постоянные для конкретного опыта.

Ниже выполнено интегрирование уравнения (1) с учетом зависимости константы скорости от температуры (2) и соотношений (3) и (4) для любых значений n и s (представленных правильной или неправильной дробью, исключая случаи, когда $n = 0$ или целому числу; при этом если n окажется равным нулю или целому числу, то его значение может быть определено с любой степенью приближения к ним).

а) Температура образца изменяется во времени по линейному закону (3).

Уравнение (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется в следующем виде:

$$\frac{dx}{(1-x)^s} = \kappa \delta t^n \exp\left(-\frac{\Delta H^\ddagger}{R\delta t} + \frac{\Delta S^\ddagger}{R}\right). \quad (5)$$

Если в уравнение (5) ввести обозначения

$$\frac{\Delta H^{\neq}}{R} = A \text{ и } \kappa \frac{k}{h} e^{\Delta S^{\neq}/R} = B \quad (6)$$

и новую переменную

$$x = \frac{A}{\delta t},$$

то уравнение (5) примет вид:

$$\frac{d\alpha}{(1-\alpha)^s} = -AB(A:\delta)^n \cdot \frac{e^{-x}}{x^{n+2}} \cdot dx. \quad (7)$$

Учитывая, что $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$,

имеем

$$\frac{d\alpha}{(1-\alpha)^s} = -AB(A:\delta)^n \left[x^{-n-2} - x^{-1-n} + \frac{x^{-n}}{2!} - \frac{x^{1-n}}{3!} + \dots \right] dx. \quad (8)$$

После интегрирования (8) при $n \neq 0$ и целому числу и перехода к прежней переменной t получим:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } s < 1, \text{ то } 1 - (1-\alpha)^{1-s} \\ \text{если } s > 1, \text{ то } (1-\alpha)^{1-s} - 1 \\ \text{если } s = 1, \text{ то } -\ln(1-\alpha) \end{array} \right\} = \\ = M_1 \left[\frac{(A:\delta t)^{-1-n}}{1+n} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(A:\delta t)^{i-n}}{(i+1)!(i-n)!} \right], \quad (9)$$

где

$$M_1 = \begin{cases} (1-s)AB(A:\delta)^n & \text{при } s < 1; \\ (s-1)AB(A:\delta)^n & \text{при } s > 1; \\ AB(A:\delta)^n & \text{при } s = 1. \end{cases}$$

б) Температура образца изменяется во времени по гиперболическому закону.

Уравнение (1) с учетом соотношений (2) и (4) и обозначений (6) примет вид

$$\frac{d\alpha}{(1-\alpha)^s} = B e^{-\lambda A} \cdot \frac{t^n}{\lambda t + \beta} \cdot e^{-\beta A:t} dt. \quad (10)$$

Введем новую переменную

$$y = \beta A:t,$$

тогда

$$\frac{d\alpha}{(1-\alpha)^s} = -AB(\beta A)^n e^{-\lambda A} \frac{e^{-y}}{y^{n+1}(\lambda A + y)} \cdot dy. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots \text{ и}$$

$$\left(1 + \frac{y}{\lambda A}\right)^{-1} = 1 - \frac{y}{\lambda A} + \left(\frac{y}{\lambda A}\right)^2 - \left(\frac{y}{\lambda A}\right)^3 + \dots$$

при условии $\frac{y}{\lambda A} = \frac{\beta}{\lambda t} < 1$, которое может быть реализовано соответствующим подбором термического режима и выбором начальной точки на обрабатываемой кинетической кривой, уравнение (11) переписывается в следующем виде

$$\frac{d\alpha}{(1-\alpha)^s} = -AB(\beta A)^n e^{-\lambda A} \times \left\{ \frac{\left(1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots\right) \frac{1}{\lambda A} \left[1 - \frac{y}{\lambda A} + \left(\frac{y}{\lambda A}\right)^2 - \left(\frac{y}{\lambda A}\right)^3 + \dots\right]}{y^{n+1}} \right\} dy. \quad (12)$$

После интегрирования уравнения (12) и перехода к прежней переменной t получим:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } s < 1, \text{ то } 1 - (1 - \alpha)^{1-s} \\ \text{если } s > 1, \text{ то } (1 - \alpha)^{1-s} - 1 \\ \text{если } s = 1, \text{ то } -\ln(1 - \alpha) \end{array} \right\} =$$

$$= M_2 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} (\lambda A)^{-j} \left[\frac{(\beta A: t)^{j-1-n}}{n+1-j} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\beta A: t)^{j+i-n}}{(i+1)!(j+i-n)} \right] \right\},$$

где

$$M_2 = \begin{cases} (1-s)AB(\beta A)^n e^{-\lambda A} & \text{при } s < 1, \\ (s-1)AB(\beta A)^n e^{-\lambda A} & \text{при } s > 1, \\ AB(\beta A)^n e^{-\lambda A} & \text{при } s = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Если несколько лет тому назад обрабатывать экспериментальные данные по уравнениям (9) и (13) не представлялось возможным из-за чрезмерно больших затрат времени на вычислительные операции, то теперь привлечение вычислительной техники снимает эти трудности и позволяет получать более правильные сведения о кинетических параметрах твердофазных процессов. В настоящее время составляется и отлаживается программа для быстродействующей электронной счетной машины БЭСМ-4 с целью определения параметров в уравнениях (9) и (13) по экспериментальным данным, полученным в режимах, удовлетворяющих соотношениям (3) и (4). Результаты обработки экспериментальных данных по этой программе будут сообщены отдельно.

- Белькевич П. И. 1956. Обзор топокинетических уравнений и их применимости к кинетике термического распада твердых веществ.— В сборнике научных работ Института химии АН БССР, № 5 (1). Минск.
- Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. 1948. Теория абсолютных скоростей реакций. М., ИЛ.
- Ерофеев Б. В., Протаицк В. А. 1956. Кинетика термического разложения карбоната магния и величина поверхности твердого продукта MgO.— В Сборнике научных работ Института химии АН БССР, № 5 (1). Минск.
- Моисеев Б. М. 1963. Неизотермическое определение кинетических параметров мономолекулярной реакции.— Ж. физ. химии, т. 37, № 3.
- Черненко А. И. 1970. Интегрирование дифференциальных уравнений неизотермических твердофазных процессов.— В сб. «Математические методы в петрологии и геохимии». М., «Наука».
- Шкарин А. В. 1968. Изучение процессов приготовления окисных катализаторов на основе оксалатов металлов. Автореферат диссертации. М.
- Coats A. W., Redfern J. P. 1964. Kinetic parameters from thermogravimetric data. Nature, v. 201, N 4914. London.
- Horowitz H. H., Metzger G. 1963. A new analysis of thermogravimetric traces. Analytical Chemistry, v. 35, N 10.

Ю. П. ТРОШИН, В. Д. КОЗЛОВ

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЕСТИЛЛЯЦИИ
МАГМАТИЧЕСКОГО РАСПЛАВА НА ПРИМЕРЕ ФОРМИРОВАНИЯ
ВЕРХНЕУНДИНСКОГО ГРАНИТНОГО БАТОЛИТА
(Восточное Забайкалье)**

Развитие теории поведения компонентов при направленной кристаллизации расплавов (Doerner, Hoskins, 1925; Хлопин, 1938; McFee, 1947; Neumann, 1948, Holland, Kulp, 1949; Wager, Mitchell, 1951; Санделл, Голдич, 1952; Harris, 1954; Neumann, Mead, Vitaliano, 1957; Storm, Holland, 1957; Рябчиков, 1965; McIntire, 1965; Трошин, Белов, Петрова, 1966, и другие) сделало теоретически возможным почти непрерывный контроль распределения вещества между твердой фазой, жидкой фазой и газообразным дистиллятом в промежуточные моменты процесса застывания магматических расплавов.

Напомним исходные положения теории поведения микрокомпонентов при направленной кристаллизации. Эта теория развилась на основе химических законов распределения, открытых Раулем и Генри, Берглю, Юнгфлейшем и Нернстом. Согласно второму началу термодинамики в таких процессах, как кристаллизация силикатных расплавов, микрокомпоненты стремятся равномерно распределиться между жидкой и твердой фазами. В случае идеально равновесной кристаллизации значение химического потенциала микрокомпонента непрерывно выравнивается во всем объеме каждой фазы, и во всех фазах оно равно; в частности, в нашем случае химический потенциал микрокомпонента в твердой фазе μ_T равен химическому потенциалу его в расплаве μ_P .

Согласно известным соотношениям

$$\mu_T = \mu_{0T} + RT \ln c_T$$

$$\mu_P = \mu_{0P} + RT \ln c_P,$$

где c_T и c_P — концентрация микрокомпонента в твердой фазе и в расплаве.

Поскольку $\mu_T = \mu_P$, постольку

$$\frac{c_T}{c_P} = e^{-\frac{\mu_{0T} - \mu_{0P}}{RT}} = K_T. \quad (1)$$

Это соотношение называется законом распределения. Коэффициент распределения K_T постоянен при постоянстве термодинамических условий кристаллизации (температуры, давления и состава фаз).

В геологических условиях при кристаллизации вязких кислот магматических расплавов равновесное распределение микрокомпонента осуществляется только между кристаллизующейся поверхностью гранитоида и соприкасающимся с этой поверхностью слоем расплава (возможно, довольно узким), а, безусловно, не между всем объемом породы и расплава. В этом случае закон распределения приложим только к распределению микрокомпонента в отмеченной узкой пограничной зоне гранитоид — расплав. Дж. А. Бартон, Р. С. Прим и У. П. Сликтер (1955) показали, что в описанной ситуации микрокомпонент распределяется в твер-

дой фазе так, как если бы равновесие $\frac{c_T}{c_P} = K_T$ осуществлялось в процессе кристаллизации между кристаллизующейся поверхностью твердой фазы и всем объемом расплава, но с другим значением K_T . Это кажущееся значение коэффициента распределения называется эффективным в отличие от истинного значения коэффициента распределения. Если равновесие осуществляется между поверхностью твердой фазы и всем объемом расплава в процессе кристаллизации, то поведение микрокомпонента в твердой фазе при направленной кристаллизации описывается уравнением (McFee, 1947):

$$c_T = c_{0P} K_T \left(1 - \frac{M_T}{M}\right)^{K_T - 1} \quad (2)$$

при постоянном значении K_T и уравнением (Рябчиков, 1965):

$$c_T = c_{0P} K_T \exp \int_0^{\frac{M_T}{M}} \frac{1 - K_T}{1 - \frac{M_T}{M}} d \left(\frac{M_T}{M} \right) \quad (3)$$

при переменном значении K_T .

Здесь $c_{ор}$ — начальная концентрация микрокомпонента в расплаве; M_T — общая масса твердой фазы; M — общая масса системы.

Величина $\frac{M_T}{M}$ при кристаллизации (без дистилляции) изменяется от 0 до 1 и носит название степени закристаллизованности. Для решения последнего уравнения необходимо знать зависимость

$$K_T \text{ от } \frac{M_T}{M}.$$

Применение закона распределения для анализа поведения микрокомпонента при фракционной кристаллизации предполагает, что все минеральные фазы выделяются из расплава в постоянных пропорциях. В этом случае все кристаллические фазы, взятые вместе, ведут себя в отношении микрокомпонента, как одна фаза с коэффициентом распределения, равным сумме коэффициентов распределения для отдельных фаз, умноженных на величины, показывающие, в каких пропорциях эти фазы выделяются из расплава.

Микрокомпонентами мы называем «такие компоненты, концентрации которых во всех фазах рассматриваемой системы настолько низки, что их изменения не влияют на активность всех других составляющих системы» (Рябчиков, 1965). Многими исследователями, в частности занимающимися геотермометрией силикатных систем, закон распределения применяется и для анализа поведения макрокомпонентов.

Анализ природных объектов позволяет определять эффективное, а не истинное значение коэффициента распределения, так как дифференциация вещества в природе определяется именно эффективным значением K_T . Оно всегда ближе к 1 по сравнению с истинным значением.

Внешний геохимический критерий начала дистилляции

Процесс кристаллизации гранитоидной магмы при ее остывании на средних глубинах сопровождается накоплением растворимых и летучих компонентов в остаточном расплаве. При достижении предела растворимости летучих начинается процесс ретроградной фракционной дистилляции расплава. Легколетучие компоненты последовательно переходят в дистиллят, в различной степени обедняя расплав и твердую фазу при продолжающейся кристаллизации.

На распределение труднолетучих компонентов между расплавом и твердой фазой дистилляция практически не влияет.

Нередко в гипабиссальных гранитных интрузивах наблюдается обогащение апикальных частей редкими и летучими компонентами. Это принято объяснять миграцией летучих соединений в верхние горизонты интрузии. Однако то же самое распределение летучих компонентов (уменьшение концентраций от апикальных частей к внутренним) будет наблюдаться, если предположить

начало дестилляции в гипабиссальных условиях уже в самом начале кристаллизации, что вполне естественно (Таусон, 1967; Таусон, Козлов, Кузьмин, 1968). При этом магматический газ, захватывая летучие компоненты и обедняя расплав, может как уходить из камеры по трещинам, так и оттесняться вместе с остаточным расплавом внутрь (или куда угодно) без всякой миграции к внешним краевым частям интрузии. Термодинамически такое поведение компонентов записывается посредством эффективных коэффициентов распределения компонента между расплавом, с одной стороны, и твердой фазой и дестиллятом, с другой стороны.

$$K = r_T \frac{c_T}{c_P} + r_D \frac{c_D}{c_P} = r_T K_T + r_D K_D. \quad (4)$$

Здесь c_P , c_T и c_D — концентрации компонента соответственно в расплаве; в части твердой фазы, находящейся в равновесии с расплавом; в части дестиллята, находящейся в равновесии с расплавом (если дестиллят не покидает магматическую камеру, то c_D — концентрация во всем выделившемся дестилляте); r_T и r_D — пропорции, в которых выделяются твердая фаза и дестиллят из расплава ($r_T + r_D = 1$); K_T и K_D — эффективные коэффициенты распределения компонента между твердой фазой и расплавом; между дестиллятом и расплавом; K — эффективный комбинированный коэффициент распределения.

Если компонент растворим, т. е. при кристаллизации слабо переходит в твердую фазу, то естественно, что при кристаллизации он будет накапливаться в расплаве (в уравнении (1) $K_T < 1$). В случае если компонент труднорастворим, при кристаллизации расплав им будет обедняться ($K_T > 1$).

В момент начала ретроградной дестилляции (анализируем уравнение (4)) компонент может проявить себя в обоих случаях как очень легколетучий ($K_D \gg 1$). Тогда, несмотря на низкую величину r_D (согласно Горансону (Coranson, 1931) и более поздним данным для средних глубин $0 \leq r \leq 0,1$), величина K превысит величину K_T и даже для легкорастворимого в расплаве компонента может превысить единицу, особенно при интенсивной дестилляции. В этом случае ($K > 1$) во всех равновесно выделяющихся из расплава фазах концентрация компонента начнет убывать в процессе кристаллизации и дестилляции. Массовая убыль концентраций одновременно многих компонентов в ходе кристаллизации, особенно легкорастворимых, таким образом, может служить внешним геохимическим критерием дестилляции. Это естественно и отмечалось, например, Л. В. Таусоном (1967).

Термодинамический анализ поведения компонентов при кристаллизации и дегазации нами будет дан на примере Верхнеундинского гранитного батолита Восточного Забайкалья.

§ Верхнеундинский гранитоидный батолит верхнепалеозойского возраста (Восточное Забайкалье, Шилка-Аргунское междуречье)

протягивается более чем на 100 км в СВ направлении от верховьев р. Унда на западе до среднего течения р. Газимур на северо-востоке; ширина распространения гранитоидов батолита 30—50 км. На северо-западе и севере гранитоиды батолита связаны постепенными переходами с гранито-гнейсами и гнейсами более древнего газимурского (по данным ВСЕГЕИ) комплекса. В других участках контакт гранитоидов батолита с вмещающими породами газимурского комплекса является тектоническим. С юго-запада и юга батолит перекрывается осадочно-эффузивными толщами мезозоя. В соответствии с признаками А. Баддингтона сложные взаимоотношения гранитоидов батолита с вмещающими древними метаморфизованными гранитоидными породами свидетельствуют о формировании его в мезозоне (батолит средней глубинности).

Среди слагающих батолит гранитоидов выделено несколько разновидностей, главными из которых являются фации дифференциации главной (II) интрузивной фазы батолита: газимурские кварцевые диориты и гранодиориты (II-1), верхнеундинские порфириовидные граниты и гранодиориты (II-2), ононборзинские грубозернистые граниты (II) и лейкократовые граниты (II-4). По акцессорному составу все гранитоиды батолита относятся к сфенортитовому типу.

Газимурские гранодиориты и кварцевые диориты представляют краевую (тоналитовую) фацию батолита; они связаны постепенными переходами как с вмещающими гранито-гнейсами газимурского комплекса, так и с верхнеундинскими гранитоидами. Внешний облик пород фации исключительно однообразен, номенклатурные различия определяются лишь изменениями в количественном соотношении минералов. Структура гипидиоморфная, крупнозернистая.

Верхнеундинские порфириовидные гранодиориты и граниты представляют наиболее распространенную фаціальную разновидность. Они характеризуются гипидиоморфной, крупнозернистой, порфириовидной структурой; последняя обусловлена постоянным присутствием вкрапленников микроклина размером 1×2 см в среднем. Номенклатурные различия пород фации определяются также некоторыми колебаниями в количественных соотношениях минералов.

Ононборзинские граниты слагают сравнительно небольшую площадь в западной части батолита. Судя по отдельным обнаружениям, они связаны с верхнеундинскими гранитоидами зоной постепенного перехода, отличаясь от последних более грубозернистой структурой и несколько более лейкократовым составом.

Лейкократовые граниты образуют несколько отдельных массивов. Лейкократовые граниты массива в верховьях р. Аленуй связаны постепенными переходами с ононборзинскими гранитами. Это дало основание для предположения о существовании в западной части глубинного купола батолита, центральная часть

которого сложена глубинными лейкократовыми гранитами, а периферическая — ононборзинскими гранитами.

Глубинные лейкократовые граниты характеризуются крупнозернистой равномернoзернистой структурой и значительно проявленным процессом автометасоматической калишпатизации.

Остальные известные массивы лейкократовых гранитов (III фаза) прорывают верхнеундинские гранитоиды и представляют, очевидно, поздние лейкократовые дифференциаты батолита, внедрившиеся в его верхние части на заключительной стадии формирования. Краевые зоны таких массивов сложены мелко- или среднезернистыми порфировидными гранитами, центральные части — крупнозернистыми лейкократовыми гранитами, характерной особенностью которых является почти полное отсутствие биотита, интенсивная автометасоматическая калишпатизация и появление среди акцессорных минералов флюорита.

Средний минеральный состав вышеперечисленных фациальных разновидностей гранитоидов батолита приводится в сводной табл. 1.

Таблица 1

Минеральный состав (в вес. % %) и относительная площадная распространенность пород II (главной) и III фаз Верхнеундинского батолита

Фаза	Фациальная разновидность гранитоидов	Плагиоклаз	Калиевый полевой шпат	Кварц	Роговая обманка	Биотит	Сфен	Магнетит	Относительная распространённость
II	1 газимурская	46,7	9,2	22,1	4,9	16,3	0,3	0,5	0,307
	2 верхнеундинская	49,8	17,0	22,6	2,1	6,7	0,4	1,3	0,6192
	3 ононборзинская	47,1	19,6	27,6	0,4	4,1	0,2	1,0	0,0502
	4 лейкократовые глубинные граниты	31,7	30,5	34,6	0,5	2,2	—	0,5	0,01605
III	лейкократовые граниты	30,7	34,4	31,8	0,3	1,9	—	0,9	0,00755

Продолжительность формирования батолита от газимурских гранодиоритов (абсолютный возраст 274—280 миллионов лет) до лейкократовых гранитов III фазы (абсолютный возраст 202 миллиона лет) составляет 80 миллионов лет.

После раскristализации 93% массы Верхнеундинского батолита при переходе к третьей (ононборзинской) фациальной разновидности гранитов главной фазы наблюдается убыль содержания большинства компонентов по сравнению с предыдущей фа-

Таблица 2

Средние геометрические содержания компонентов в гранитоидах Верхнеундинского батолита (верхние строки) и в минералах, использованных при расчетах

(в $\gamma/2$ для компонентов от H_2O до Pb и в % для SiO_2 и последующих компонентов)

Компонент	II (главная) фаза (фация)				III фаза	Минерал, использованный при расчетах
	газимурская	верхнеундинская	оноборзинская	лейкокраповых глубинных гранитов		
H_2O^+	9720	6160	6210	3330	800	Биотит растертый Биотит нерастертый
	27900	26500	41300	27300		
	26950	28850	38800	44400		
CO_2	2400	2150	1570	1670	1320	Биотит
	1390	1700	1840	2300		
F	683	682	418	611	424	»
	3800	6760	6700	11400		
Cl	520	170	130	110	110	»
	2350	1210	1300	1100		
Li	46,52	39,65	26,31	27,11	10,91	»
	230,3	440,0	317,5	789,25		
Rb	115,6	134,3	104,6	151,4	201	»
	590,4	742,9	718,5	900,5		
Be	1,32	1,80	2,08	2,03	3,46	Плаггиоклаз
	1,37	2,50	3,00	3,44		
Sn	5,64	4,26	3,16	3,46	3,42	$\sqrt{c_{\text{биотит}} \cdot c_{\text{плаггиоклаз}}}$
	4,92	5,63	5,02	6,22		
Zn	51,42	44,70	27,11	40,85	18,92	Биотит
	310,6	457,2	407,5	680,0		
Mo	1,33	1,34	0,57	1,01	2,30	»
	3,2	5,9	5,4	6,3		
U	2,34	3,60	2,86	3,38	7,41	Расчет велся, исходя из представления, что $K_T = \text{const}$
Pb	11,77	16,12	16,05	21,15	13,05	То же
SiO_2	58,66	64,84	68,86	71,07	73,94	» »
Al_2O_3	17,42	16,34	14,99	14,32	13,82	» »
K	2,81	3,26	3,25	4,38	3,84	» »
Na	2,66	2,78	2,76	2,75	2,80	» »
Ca	3,92	2,25	1,02	0,85	0,22	» »

Примечание. При обработке анализов на H_2O^+ при расчетах использовались отдельно данные по растертым и нерастертым биотитам. Результаты усреднялись. Для Pb было взято $K_T = \text{const}$ ввиду того, что сумма основных минералов-носителей КПШ и биотита примерно остается постоянной в ходе дифференциации, а содержания Pb в них примерно равны. Для U было взято $K_T = \text{const}$ ввиду неизоморфного нахождения большей части урана в гранитоидах.

циальной разновидностью гранитоидов (табл. 2). Эту убыль содержаний элементов, образующих легколетучие соединения, можно удовлетворительно объяснить началом ретроградной дистилляции. Отмечающаяся убыль некоторых главных петрогенных компонентов, конечно, не связана с дистилляцией и обязана кристаллизационной дифференциации.

Поведение микрокомпонентов при кристаллизации и дистилляции

Рассмотрим уравнение

$$K_T = \frac{c_T}{c_p} = r_1 K_{M_1} + r_2 K_{M_2} + r_3 K_{M_3} + \dots + r_n K_{M_n}, \quad (5)$$

где $K_M = \frac{c_M}{c_p}$.

Здесь $c_{M_1}, c_{M_2}, c_{M_3} \dots c_{M_n}$ — концентрации компонента во всех n минералах части интрузива, находящейся в равновесии с расплавом в рассматриваемый момент.

$r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ — пропорции, в которых минералы выделяются из расплава; $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = 1$. Кристаллизация предполагается анхизтектической. «В пределах глубин, примерно до 20 км, если примем максимальную температуру гранитной магмы 800—1000°, понижение температуры может быть причиной отделения гидротермальных растворов только при эвтектической кристаллизации» (Хитаров и др., 1967).

$K_{M_1}, K_{M_2}, K_{M_3} \dots K_{M_n}$ — частные коэффициенты распределения концентраций компонента между расплавом с концентрацией C_p и всеми минералами.

При формировании гранитоидных батолитов в процессе кристаллизационной дифференциации происходит закономерное изменение соотношения породообразующих минералов: уменьшается количество темноцветных и растет количество светлых минералов. Математически это выражается в изменении значений r_1, r_2, r_3, \dots в уравнении (5). Это приводит к закономерному изменению величины K_T в процессе кристаллизации гранитоидов. Таким образом, величина K_T для большинства микрокомпонентов не может оставаться постоянной в процессе кристаллизационной дифференциации.

Опыт показывает, что весьма близко к истине будет постулирование неизменности коэффициентов распределения микрокомпонентов между расплавом и каждым минералом K_M . Следствием этого должна быть синхронность изменения содержания элементов-примесей во всех минералах при переходе от одной фацальной разновидности гранитоидов к другой, что и имеет место в природе с достаточной для наших целей степенью точности. Например, в работе Л. Н. Овчинникова и Н. Ф. Челищева (1967) рассматривается распределение Rb между микроклином и биотитом. Об-

работав обширные опубликованные данные разных исследователей по девяти гранитным плутонам из самых различных районов, авторы пришли к выводу, что коэффициент распределения Rb между микроклином и биотитом в 6 из 9 случаев лежит в пределах 0,38—0,41; в остальных случаях равен соответственно 0,25; 0,29; 0,45. Ясно, что на протяжении кристаллизации каждого отдельного гранитного массива распределение концентраций Rb между минералами, а следовательно, и между расплавом и каждым отдельным минералом тем более должно оставаться постоянным с достаточно высокой точностью. Одной из основных причин этого является малый температурный интервал, в пределах которого кристаллизуется гранитный расплав в магматической камере. Незначительные колебания значений коэффициентов распределения вызываются изменениями температурного режима.

Рассмотрим на примере Zn изменение величины K_T и связанные с этим последствия.

В процессе кристаллизационной дифференциации Верхнеундинского гранитного батолита количество основных минералов-концентраторов и носителей Zn (биотита и роговой обманки) резко уменьшалось (табл. 1), что, безусловно, влекло за собой изменение величины K_T . Концентрация Zn (c_T) в части гранита, равновесной с расплавом (т. е. на поверхности кристаллизации, соприкасающейся с расплавом), изменялась в этом случае по уравнению (3). Чтобы решить уравнение (3), необходимо найти функциональную связь между величиной K_T и степенью закристаллизованности системы $\frac{M_T}{M}$.

Из двух уравнений:

$$K_T = \frac{c_T}{c_p} \quad \text{и} \quad K_M = \frac{c_M}{c_p}$$

следует:

$$K_T = \frac{c_T}{c_M} K_M.$$

В качестве минерала возьмем основной минерал-концентратор и носитель биотит (табл. 2). Используя данные табл. 2, построим график (рис. 1) зависимости K_T от $\frac{M_T}{M}$. При этом построении учитываем следующие моменты. При постоянном значении в пределах одной фациальной разновидности на основании уравнения (2) среднее геометрическое значение концентрации отвечает значению $\left(\frac{M_T}{M}\right)_{\text{ср.}}$, которое находится из соотношения:

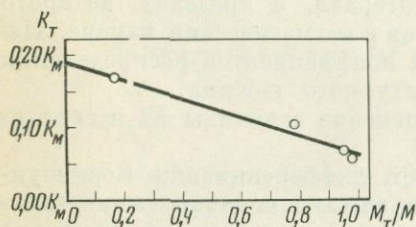
$$\lg \left[1 - \left(\frac{M_T}{M}\right)_a \right] + \lg \left[1 - \left(\frac{M_T}{M}\right)_b \right] = 2 \lg \left[1 - \left(\frac{M_T}{M}\right)_{\text{ср.}} \right],$$

где $\left(\frac{M_T}{M}\right)_a$ и $\left(\frac{M_T}{M}\right)_b$ — граничные значения $\frac{M_T}{M}$ для данной фа-

циальной разновидности. Величины степени закристаллизованности магмы $\frac{M_T}{M}$ оценивались по данным об относительной площадной распространенности каждой фациальной разновидности гранитоидов (см. табл. 1).

Из рис. 1 нетрудно вывести, что зависимость K_T от $\frac{M_T}{M}$ приближенно является линейной:

$$K_T = -0,13K_M \cdot \frac{M_T}{M} + 0,19K_M.$$



Р и с. 1. Вывод зависимости величины K_T от значения степени закристаллизованности для цинка M_T/M

Учитывая, что 1-я и 2-я фациальные разновидности главной фазы батолита формировались при отсутствии дестилляции, величину K_M для биотита находим из тождества

$$\begin{aligned} \frac{K_{T_1}}{c_{T_1}} \exp \int_0^{\left(\frac{M_T}{M}\right)_1} \frac{1 - K_T}{1 - \frac{M_T}{M}} d\left(\frac{M_T}{M}\right) = \\ + \frac{K_{T_2}}{c_{T_2}} \exp \int_0^{\left(\frac{M_T}{M}\right)_2} \frac{1 - K_T}{1 - \frac{M_T}{M}} d\left(\frac{M_T}{M}\right) = c_{0P}. \end{aligned}$$

Здесь c_{T_1} и c_{T_2} — средние геометрические значения содержания Zn в 1-й и 2-й фациях гранитоидов, $\left(\frac{M_T}{M}\right)_1$ и $\left(\frac{M_T}{M}\right)_2$ — отвечающие этим содержаниям степени закристаллизованности батолита, K_{T_1} и K_{T_2} — значения K_T в эти моменты.

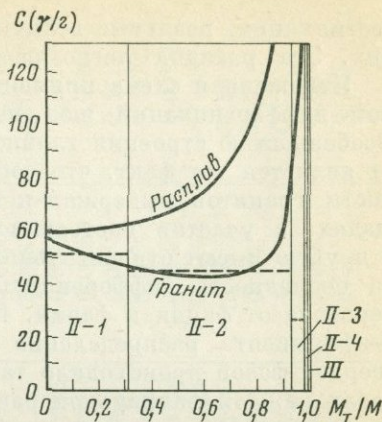
После нахождения величины K_M находится начальная концентрация Zn в расплаве c_{0P} .

Теперь имеются все необходимые данные для решения уравнения (3) и уравнения, описывающего равновесное изменение концентрации Zn в расплаве при переменном K_T :

$$c_P = c_{0P} \exp \int_0^{\frac{M_T}{M}} \frac{1 - K_T}{1 - \frac{M_T}{M}} d\left(\frac{M_T}{M}\right). \quad (6)$$

Рис. 2. Изменение содержания (C) Zn в расплаве и в равновесной с расплавом части гранита при формировании II и III фаз Верхнеундинского батолита (пунктирные линии отвечают среднегеометрическим содержаниям в фациальных разновидностях гранитоидов)

- II — 1 — газимурские кварцевые диориты и гранодиориты,
- II — 2 — верхнеундинские порфириновые граниты и гранодиориты,
- II — 3 — ошонборзинские грубозернистые граниты,
- II — 4 — лейкократовые граниты



На рис. 2 сплошными линиями показано изменение концентраций Zn на поверхности кристаллизации батолита, равновесной с расплавом, и в расплаве, найденное теоретически по уравнениям (3) и (6) и справедливое при условии кристаллизации батолита без дестилляции.

Но, начиная с 3-й фациальной разновидности гранитов, т. е. после раскристаллизации 93% массы батолита, началась дестилляция расплава. Это не могло существенно повлиять на закономерность изменения величины коэффициента распределения Zn между расплавом и гранитом, что видно из рис. 1, но дестилляция привела к потере части цинка расплавом и твердой фазой за счет перехода «потерянного» цинка в дестиллят. На рис. 2 видна разница между теоретически рассчитанной концентрацией Zn в граните при отсутствии дестилляции и реально наблюдаемой концентрацией (пунктирные линии). На основании этих данных не составляет труда рассчитать количество цинка, перешедшее из расплава в магматический дестиллят.

Масса цинка, накопленная в твердой фазе к моменту $\frac{M_T}{M}$, составляет $m_T = \int_0^{\frac{M_T}{M}} c_T d\left(\frac{M_T}{M}\right)$, а масса, находящаяся в расплаве, составляет $m_p = c_p \left(1 - \frac{M_T}{M}\right)$. (Начальная масса расплава принимается за единицу, так что начальная масса Zn в расплаве составляет $m_{0p} = c_{0p} \times 1$). Очевидно, что при кристаллизации в закрытой системе $m_T + m_p = m_{0p}$.

На протяжении формирования 1-й и 2-й фациальных разновидностей гранитоидов главной фазы батолита теоретические и реальные значения m_T и m_p совпадают, и закон сохранения массы в закрытой системе выдерживается. Но, начиная с момента

дистилляции, реальные величины m_T и m_P будут ниже теоретических. Эта разница легко рассчитывается.

Изложенная схема применима, если процесс кристаллизационной дифференциации шел постепенно, непрерывно и плавно. Особенностью строения главной фазы Верхнеундинского батолита является тот факт, что состав каждой фацальной разновидности гранитов выдержан и весьма постоянен на больших площадях, а участки постепенного перехода одной разновидности в другую имеют относительно небольшие размеры, что указывает на неплавность дифференциации, некоторую скачкообразность перехода от фации к фации. В этом случае, очевидно, изменение коэффициента распределения компонентов между расплавом и твердой фазой происходило также скачкообразно, причем в пределах каждой фацальной разновидности он, очевидно, оставался постоянным по величине, имея в виду постоянство состава каждой фации гранитоидов. При такой ситуации расчеты упрощаются, так как не требуется искать зависимости K_T от $\frac{M_T}{M}$, но возникают некоторые иные методические трудности.

Необходимо подчеркнуть, что обе схемы расчета отражают крайние по своей сути процессы: идеально плавной и идеально скачкообразной дифференциации. В природе же наблюдается нечто промежуточное. Нами использовалась вторая схема расчетов.

В табл. 3 приводятся значения количеств Zn и других микрокомпонентов, перешедших в дистиллят к концу формирования 3-й и 4-й фацальных разновидностей гранитоидов главной фазы и к концу формирования III фазы.

Поведение ведущих петрогенных компонентов при кристаллизации и дистилляции

Подобный расчет для ведущих петрогенных компонентов представляет большие трудности ввиду отсутствия или сложности подбора породообразующих минералов, не содержащих этих компонентов в качестве ведущих конститuentов и для которых можно было бы предполагать выполнение закона $K_M = \frac{c_M}{c_P} = \text{const.}$

Однако нет сомнения, что для ведущих компонентов в отличие от большинства микрокомпонентов приближенно соблюдается закон распределения $K_T = \frac{c_T}{c_P}$ на всем протяжении процесса формирования батолита (чем выше концентрация SiO_2 , Al_2O_3 , K_2O и т. д. в расплаве, тем выше содержания их и в формирующейся породе, и наоборот). Поэтому для контроля сохранения массы макрокомпонента можно использовать уравнение (2).

Таблица 3

Дефицит компонентов (в кг на тонну первоначальной массы расплава), обусловленный потерей при дистилляции магмы или поглощением из вмещающей среды (или из дистиллята)

Компо- нент	K_T		Суммарный дефицит компонентов к концу формирования фаций главной и III фаз			Общая поте- ря (в %) к началь- но му содер- жа- нию ком- поне- нта	Дефицит, возникший при форми- ровании III фазы	Дефицит, приходящийся на единицу массы расплава II и III фаз перед дистилляцией	
	прямое определе- ние	определе- ние по дисперсии	II-3	II-3,4	II-3,4; III			$\Pi_{II} = \frac{II-3,4}{0,738}$	$\Pi_{III} = \frac{III}{0,00755}$
H ₂ O	He опр.	He опр.	-0,0545	0,1178	0,1854	2,6	0,0675	1,596	8,94
CO ₂	» »	» »	0,10	0,13	0,16	6,8	0,03	1,764	3,97
F	» »	» »	0,123	0,135	0,155	18,7	0,020	1,832	2,65
Cl	» »	» »	-0,00631	-0,00627	-0,0066	-2,5	-0,00033	-0,085	-0,0437
Li	» »	» »	0,00726	0,00710	0,00844	15,6	0,00134	0,0963	0,1775
Rb	» »	» »	0,00350	0,00354	0,00354	3,1	0	0,048	0
Be	» »	» »	0,000297	0,000307	0,000319	15,8	0,000012	0,00417	0,00159
Sn	» »	» »	0,00020	0,000213	0,000233	4,8	0,00002	0,00289	0,00265
Zn	» »	» »	0,00511	0,00556	0,0064	12,3	0,00084	0,0755	0,1112
Pb	» »	» »	0,000675	0,000676	0,000805	5,4	0,00013	0,00917	0,0172
Mo	» »	» »	0,000283	0,000327	0,000331	20,0	0,0000036	0,00443	0,000477
U	» »	» »	0,000239	0,000254	0,000230	7,7	-0,0000238	0,00344	-0,00315
SiO ₂	0,9573		0,699	0,178	1,118	0,2	-0,060	15,98	-7,95
Al ₂ O ₃	1,0494	1,0656	0,0281	0,0276	-0,0097	0,00	-0,0373	0,374	-4,95
K	0,8869	0,82	0,5485	0,3772	0,4773	1,75	0,0965	5,11	12,78
Na	0,9664	0,87	0,1301	0,1653	0,1726	0,63	0,0073	2,59	0,98
Ca	1,4260	1,2158	-0,0158	-0,0538	-0,033	-0,1	0,0208	-0,73	2,755

Количество макрокомпонента, накопленное твердой фазой к моменту кристаллизации $\frac{M_T}{M}$, составит $m_T = \int_0^{\frac{M_T}{M}} c_T d\left(\frac{M_T}{M}\right) = c_{op} \left[1 - \left(1 - \frac{M_T}{M} \right)^K \right]$, а масса его в расплаве в этот момент будет $m_p = c_p \left(1 - \frac{M_T}{M} \right)$. По закону сохранения массы $m_T + m_p = m_{op}$.

Ниже в качестве примера дается схема расчета сохранности массы SiO_2 в системе.

Итак, предполагается, что до начала дистилляции, т. е. на протяжении времени формирования 1-й и 2-й фазиальных разновидностей гранитоидов главной фазы, кристаллизация шла, как если бы система была закрытой. Зная c_{T_1} , c_{T_2} , $\left(\frac{M_T}{M}\right)_1$ и $\left(\frac{M_T}{M}\right)_2$ (табл. 1 и 2) и используя тождество $\frac{K_T}{c_{T_1}} \left[1 - \left(\frac{M_T}{M}\right)_1 \right]^{K_T-1} =$

$= \frac{K_T}{c_{T_2}} \left[1 - \left(\frac{M_T}{M}\right)_2 \right]^{K_T-1} = \frac{1}{c_{op}}$, можно найти значения величин c_{op}

и K_T (назовем это определение K_T прямым). Для SiO_2 такой расчет дает значение $K_T = 0,9231$. Далее по уравнению (2) устанавливаются теоретические значения c_T в точках $\left(\frac{M_T}{M}\right)_{3,4,5}$. После этого сопоставляются теоретические и реальные (табл. 1) значения c_{T_3} , c_{T_4} и c_{T_5} . На этой основе проводятся все дальнейшие расчеты. Таким образом, была обнаружена нехватка в системе расплав — гранит к концу формирования 3-й фазии гранитов 3,64 кг SiO_2 на одну тонну начальной массы системы; к концу формирования 4-й фазии эта величина возросла до 4,53 кг/т и к концу формирования третьей фазы — до 4,98 кг/т.

Значение $K_T = 0,9231$ является по способу расчета минимально возможным, а значение дефицита SiO_2 поэтому — максимальным. Если предположить, что при формировании 3-й фазии гранитоидов давление летучих было еще небольшим и кремнезем пока еще практически не переходил в магматический дистиллят (согласно диаграмме Кеннеди), то пересчет даст нам максимально возможное значение $K_T = 0,9645$ и минимальное значение дефицита SiO_2 на тонну системы: 3-я фазиация — 0,00 кг/т; 4 фазиация — 0,16 кг/т; III фазиация — 0,30 кг/т.

Строго говоря, величина K_T для SiO_2 изменялась особенно сильно (судя по изменению состава гранитоидов) при переходе от гранодиоритов 1-й фазии к гранитоидам последующих фазий. Нам необходимо знать такое значение K_T , которое было перед самым началом дистилляции. Уже в предыдущем случае мы избавлялись от отрицательного влияния на расчет K_T учета грано-

диоритов 1-й фации. Дальнейшее уточнение можно провести следующим образом.

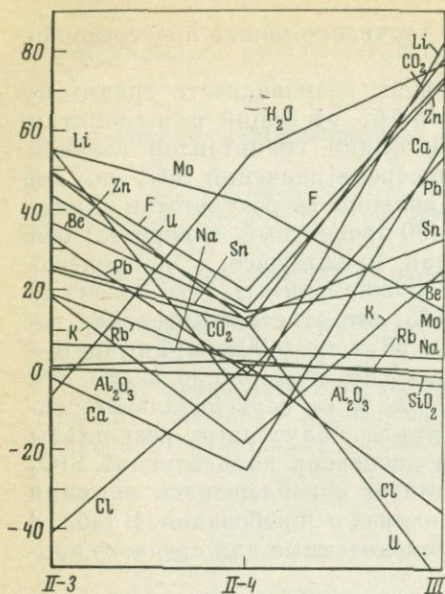
Итак, по составу 2-я фаціальная разновидность гранитоидов главной фазы ближе к гранитам 3-й, 4-й фаций и к гранитам III фазы, чем гранодиориты 1-й фации гранитоидов главной фазы. Оценка величины K_T по дисперсии значений SiO_2 во 2-й фации (Трошин и др., 1966) на основании 14 результатов анализов дает значение $K_T = 0,9678$ (90-процентный доверительный интервал $0,9502 - 0,9751$). Учитывая предыдущее, с 90-процентной доверительной вероятностью можно считать, что значение K_T лежит в пределах $0,9502 - 0,9645$, что отвечает интервалу вероятного дефицита SiO_2 : 3-я фация — $1,58 \text{ кг/т} - 0,00 \text{ кг/т}$; 4-я фация — $2,12 \text{ кг/т} - 0,16 \text{ кг/т}$; III фаза — $2,45 \text{ кг/т} - 0,30 \text{ кг/т}$. Эти величины потерь составляют $0,02 - 0,3\%$ от первоначального содержания SiO_2 в расплаве. Уточнить полученные результаты можно путем более точной оценки дисперсии концентраций SiO_2 на основании большего числа анализов с исключением влияния ошибок, обусловленных техникой анализа и опробования. В табл. 3 приведены цифры дефицита SiO_2 , рассчитанные для среднего значения $K_T = 0,9573$.

Данные дефицита Al_2O_3 , K, Na и Ca получены в целях единообразия на основании использования вычисленного прямым определением значения K_T без каких бы то ни было уточнений и являются завышенными по абсолютной величине. Ориентировочные расчеты типа тех, которые были сделаны для SiO_2 , показывают, что вероятное возможное завышение значений дефицита имеет место не более чем в 2 раза против указанных в таблице 3 значений.

Обсуждение результатов

Проведенный термодинамический анализ поведения компонентов подразумевал, что перед началом кристаллизации магма представляла собой гомогенный расплав. До начала дестилляции в ходе кристаллизации расплава массообмена между вязкой гранитной магмой и вмещающей средой не происходило в сколь-нибудь заметных количествах. Лишь с началом дестилляции и появлением химически активной газообразной фазы стал возможен относительно активный массообмен между расплавом и вмещающей средой.

1. В момент, отвечающий началу потери магматической системой редких, рудных и петрогенных компонентов (до сих пор этот момент мы называли «началом дестилляции» — для краткости), магматическая система поглощала из вмещающей среды, по крайней мере, три компонента: H_2O , Cl и Ca (табл. 3; рис. 3). Это заставляет полагать, что начало перехода компонентов в газовую фазу связано с экстракцией компонентов расплава перегретой паровой фазой водно-хлор-кальциевого состава, возник-



Р и с. 3. Динамика перехода компонентов из расплава в магматический дестиллят (за 100% принята начальная масса компонента в остаточном расплаве перед формированием каждой фазы и III фазы гранитов. Отрицательные значения процентов указывают на относительное количество поглощенного компонента расплавом из десятиллита или из внешней среды)

шей на контакте с магматическим расплавом и имеющей своим источником, вероятно, минерализованные подземные воды глубинной циркуляции, широко распространенные в земной коре до глубин, не меньших 7—8 км, т. е. на которые пробурены самые глубокие скважины; поровые растворы или воды иного происхождения. По этому поводу Н. И. Хитаров, А. А. Кадик и Е. Б. Лебедев

(1967) писали: «Если первоначальная концентрация воды в магме меньше предельной концентрации воды при данных значениях давления на расплав и давления воды во внешней среде, то магма будет поглощать воду, т. е. может наблюдаться диффузионный поток воды из вмещающих пород в магму».

2. Дальнейший ход процесса привел к потере магматической системой не только приобретенной, но и своей собственной магматической воды. Это уже, бесспорно, свидетельствует о дестилляции, хотя процессы экстракции и дестилляции были тесно сопряжены. Основную роль в дестилляте до конца процесса продолжала играть вода не магматического происхождения.

3. Основную массу перешедших в дестиллят компонентов, кроме H_2O , CO_2 и F, составляют SiO_2 , K, Na. Эти данные хорошо отвечают экспериментальным данным Н. И. Хитарова (1958) по экстракции из гранитного расплава водяным паром химических элементов.

4. По мере дальнейшей кристаллизации пород главной фазы переход подавляющего большинства компонентов в дестиллят замедлился в среднем вдвое (калий и литий частично даже обратно перешли в расплав). Это можно объяснить только тем, что дестиллят не покидал магматическую камеру, внутреннее давление росло и растворимость летучих компонентов в магматическом газе стала падать (рис. 3).

5. Рост давления привел к повышению растворимости SiO_2 в газообразном дестилляте. Все это находится в хорошем согласии с экспериментальными данными Кеннеди.

6. Смена поглощения воды и хлора расплавом на выделение этих компонентов свидетельствует о режиме «чистой» дистилляции и о выделении всех летучих компонентов из расплава в газ.

7. Al_2O_3 характеризуется на всем протяжении процесса дистилляции очень низкой летучестью сравнительно с другими компонентами.

8. Переход от II фазы к III знаменуется резким переходом летучих компонентов из расплава в дистиллят. Это связано с резким сбросом давления в момент прорыва кровли и ухода остаточного расплава в верхние горизонты. Дистиллят в этот момент покинул магматическую камеру, а остаточный расплав вскипел в условиях пониженного давления.

9. В момент сброса давления растворимость труднолетучих в газе упала и SiO_2 (в полном соответствии с диаграммой Кеннеди), а также Al_2O_3 перешли обратно в расплав. С таким же успехом падение растворимости могло привести (быть может, и приводило) к образованию кварцевых жил.

10. Из летучих компонентов наименее летучими проявили себя соединения Mo, U, Sn и Be. Образование кварц-касситеритовых и кварц-берилловых жил поэтому, весьма вероятно, происходит в подобных условиях.

11. Снижение интенсивности перехода Na и Cl (Cl переходит даже в расплав) и незначительный рост перехода H_2O в дистиллят III фазы можно объяснить вновь активным взаимодействием магматического расплава III фазы и его дистиллята в верхних горизонтах с глубинными минерализованными водами хлорнатриевого типа.

12. При переходе от II фазы к III изменяются свойства компонентов: растет летучесть CO_2 , F, Pb, Zn, Sn, Li и падает летучесть Mo, U, Be и Rb (рис. 4, 3). Под летучестью (Л) подразумевается отношение массы компонента, перешедшего в дистиллят за время кристаллизации интрузивной фазы, к массе компонента в расплаве перед началом дистилляции расплава этой фазы.

13. Продуктивность магматического расплава III фазы по сравнению со II возросла для H_2O , CO_2 , F, Pb, Zn, Li и упала для Mo, Sn, Be и Rb (рис. 5, см. табл. 3). Под продуктивностью (П) подразумевается отношение массы компонента, перешедшего в дистиллят за время кристаллизации интрузивной фазы к массе расплава этой фазы перед дистилляцией.

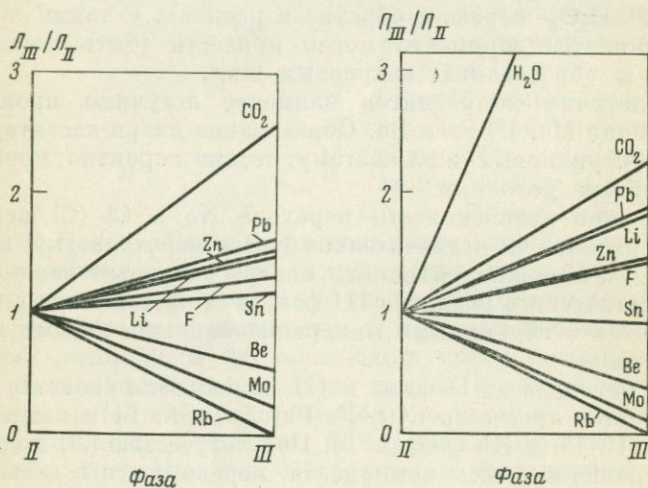
14. Из рудных компонентов (Be, Sn, Zn и Pb) в газовом дистилляте III фазы возросла концентрация каждого «низкотемпературного» элемента по отношению к более «высокотемпературному», возросла также концентрация H_2O по отношению к концентрации CO_2 , а CO_2 по отношению к F (рис. 6).

15. Полученные результаты относительно рудных компонентов, фтора и, возможно CO_2 , позволяют утверждать, что в равновесии между расплавом, дистиллятом и гранитом участвуют перечисленные компоненты лишь магматического происхождения, так

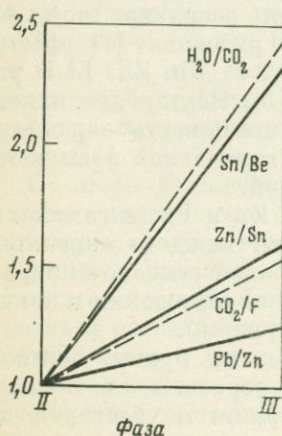
как закономерности их поведения слишком точно отвечают последовательности выделения этих компонентов при эндогенном рудообразовании (ряд Эммонса, Линдгрена и Ньюхауза). Если бы в равновесии участвовали в заметном количестве рудные компоненты вмещающей среды, то однозначной четкой картины мы не получили бы, как это имеет место в отношении H_2O , Cl и некоторых главных петрогенных компонентов.

16. Необходимо отметить резкое увеличение летучести Ca и CO_2 в III фазе сравнительно со II (рис. 3). Это хорошо согласуется с тем, что количество отлагаемого кальцита при эндогенном рудообразовании резко растет к концу процесса.

17. Наши данные по урану, вопреки ряду Эммонса, Линдгрена и Ньюхауза, относящих этот элемент к низкотемпературным, по-



Р и с. 4. Относительное изменение от II фазы к III фазе летучести (I) компонентов преимущественно магматического происхождения



Р и с. 5. Относительное изменение от II фазы к III фазе продуктивности (II) магмы (способности генерировать дистиллят) в отношении ряда компонентов

Р и с. 6. Сравнительное изменение отношений концентраций ряда компонентов в магматическом дистилляте от II фазы к III фазе гранитоидов

казывают, что на этапе магматической дестилляции уран ведет себя как «высокотемпературный» элемент. Дело здесь в том, что на магматическом этапе уран существует и входит в соединения в состоянии U^{4+} . В этом состоянии он дает минерал уранинит. «Уранинит образуется в широком диапазоне температур и давлений от высоких (например, при пегматитовом процессе) до комнатной температуры и атмосферного давления». На гидротермальном этапе « U^{4+} легко окисляется до U^{6+} ; последний образует уранил-ион $(UO_2)^{2+}$, который может комплексоваться (например, с CO_3^{2-}), что приводит к его осаждению и образованию гаммы низкотемпературных ураниловых минералов» (Хейнрих, 1962).

18. Возрастание летучести лития к концу процесса согласуется с очень высокими содержаниями лития, соизмеримыми с содержаниями калия и натрия, нередко наблюдаемыми в газожидких включениях в относительно низкотемпературных гидротермальных минералах.

19. Как вытекает из сопоставления данных табл. 3, масса части дестиллята магматического происхождения не превышала 1,5–2% от массы расплава перед самым началом дестилляции при формировании каждой фазы.

20. Полученные результаты по дефициту компонентов значительно превышают возможные ошибки, связанные с погрешностью разнообразных определений. Средние значения определялись по 10–50 количественным анализам на каждый компонент, так что ошибка определения среднего минимум в 3 раза (\sqrt{n} , где $n = 10-50$) ниже ошибки количественного спектрального и химического анализа, которая в свою очередь не превышает 10–15%, а для петрогенных компонентов 0,5–3% относительных. Относительная ошибка определения площадной распространенности газимурской и верхнеундинской фаций гранитоидов очень мала именно ввиду их относительно широкой распространенности (93% общей площади выхода батолита). Поэтому масса компонентов, сосредоточенная в первых двух разновидностях гранитоидов, определена весьма надежно и равна теоретической. Разница между этой массой и массой, сосредоточенной в последующих фациях дифференциации (суммарный дефицит массы каждого компонента) значительно превышает возможную ошибку определения массы компонентов в последующих фациях дифференциации. Это четко следует, например, из рис. 3, по которому видно, что относительный дефицит порой достигает 50–80%, что несравненно выше погрешности определения массы компонентов, сосредоточенной в поздних фациях дифференциации. Это справедливо и для менее летучих петрогенных компонентов, учитывая относительно очень высокую точность их аналитического определения.

Таким образом, если верны исходные геологические данные и термодинамические принципы анализа (в чем мы не сомневаемся), то надежны и полученные выводы.

Верхнеундинский гранитоидный батолит, сформировавшийся на глубинах 5—6 км, в настоящее время выходит на дневную поверхность, и нам не известны генетически связанные с ним рудные месторождения. Тем не менее, на основании исследования закономерностей распределения элементов в слагающих батолит гранитоидах, мы можем в первом приближении оценить количество каждого рудного компонента магматического происхождения, вынесенного из магмы дистиллятом при становлении батолита, и определить таким образом его «металлогеническую специализацию» и максимально возможные запасы руды, которые могли образоваться при условии, если рудные компоненты отлагались в рудных скоплениях, а не рассеивались в окружающей среде.

ЛИТЕРАТУРА

- Бартон Дж. А., Прим Р. С., Сликтер У. П. 1955. Распределение примесей в кристаллах, выращенных из расплавов. Часть 1. Теория.— В сб.: Германий. М., ИЛ.
- Овчинников Л. Н., Челищев Н. Ф. 1967. О статистико-вероятностной оценке физико-химических условий минералообразования.— Геохимия, № 11.
- Рябчиков И. Д. 1965. Термодинамический анализ поведения малых элементов при кристаллизации силикатных расплавов. М., «Наука».
- Санделл Э. Б., Голдич С. С. 1952. Редкие металлы некоторых американских изверженных пород. — В сб.: Редкие элементы в изверженных горных породах и минералах. М., ИЛ.
- Таусон Л. В. 1967. Факторы геохимической истории редких элементов в гранитном магматическом процессе.— Геохимия, № 11.
- Таусон Л. В., Козлов В. Д., Кузьмин М. И. 1968. Геохимические критерии потенциальной рудоносности гранитоидных интрузий.— В сб.: Проблемы геохимии и космологии. М., «Наука».
- Трошин Ю. П., Белов Б. И., Петрова З. И. 1966. О генетическом смысле коэффициента вариации концентраций редких элементов в интрузивных породах в связи с проблемой металлогенической специализации интрузий.— В сб.: Математические методы геохимических исследований. М., «Наука».
- Хейнрих Э. У. 1962. Минералогия и геология радиоактивного минерального сырья. М., ИЛ.
- Хитаров Н. И. Вопросы петрогенеза в свете экспериментальных данных.— Геохимия, № 6.
- Хитаров Н. И., Кадик А. А., Лебедев Е. Б. 1967. Основные закономерности отделения воды от магматических расплавов гранитного состава.— Геохимия, № 11.
- Хлопин В. Г. 1938. Распределение электролита между твердой кристаллической и жидкой фазами.— Труды Гос. радиового ин-та, 4, М.— Л.
- Doerner H. A., Hoskins W. H. 1925. Co-precipitation of radium and barium sulphates.— J. Amer. Chem. Soc., v. 47, No 3.
- Goranson R. W. 1931. The solubility of water in granite magmas.— Amer. J. Sci., vol. 222 (5th ser., 22), p. 481—502.
- Harris P. G. 1954. The distribution of germanium among coexisting phases of partly glassy rocks.— Geochim. et Cosmochim. Acta, vol. 5, No 4.
- Holland H. D., Kulp J. L. 1949. The distribution of accessory elements in pegmatites. 1. Theory.— Amer. Mineralogist, vol. 34, No 1—2.

- McFee R. K.* 1947. Foreign ion rejection in growth of sodium chloride single crystals from the melt.— *J. Chem. Phys.*, vol. 15, No 12.
- McIntire W. L.* 1963. Trace element partition coefficients — a review of theory and application to geology.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, vol. 27, No 12.
- Neumann H.* 1948. On hydrothermal differentiation.— *Econ. Geol.*, vol. 43, No 2.
- Neumann H., Mead J., Vitaliano C. J.* 1954. Trace elements variation during fractional crystallization as calculated from distribution law.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, vol. 6, No 2—3.
- Storm T. W., Holland H. D.* 1957. The distribution of nickel in Lambertville diabase.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, vol. 11, No 4.
- Wager L. R., Mitchell R. L.* 1951. The distribution of trace — elements during strong fractionation of basic magma — a further study of the Skaergaard intrusion, East Greenland.— *Geochim. et Cosmochim. Acta*, vol. 1, No 3.

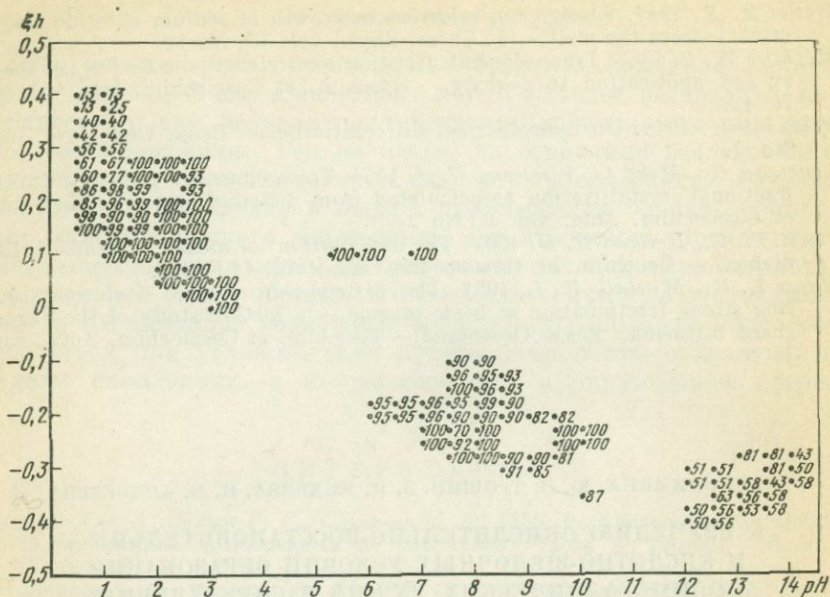
И. Б. КЛИМИНА, Ю. П. ТРОШИН, З. И. МИХЕЕВА, Н. Н. АЛЕКСЕЕВА

**К ИЗУЧЕНИЮ ОКИСЛИТЕЛЬНО-ВОССТАНОВИТЕЛЬНЫХ
И КИСЛОТНО-ЩЕЛОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ
ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ РУД ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ
МИКРОКОЛИЧЕСТВ ОЛОВА МЕЖДУ СУЛЬФИДАМИ СВИНЦА
И ЦИНКА**

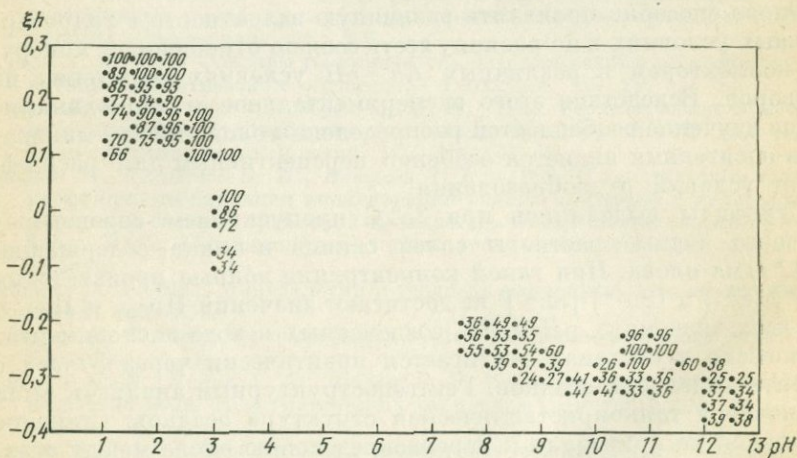
Олово способно проявлять различную валентность в гидротермальных условиях и по-разному вести себя по отношению к минералам-коллекторам в различных $Eh-pH$ условиях осаждения из растворов. Вследствие этого экспериментальное и термодинамическое изучение особенностей распределения олова между минералами-носителями является особенно перспективным для расшифровки условий рудообразования.

Сульфиды выделялись при $25^{\circ}C$ пропусканием сероводорода через водные растворы солей свинца и цинка, содержащие $1 \cdot 10^{-6}$ г/мл олова. При такой концентрации ионные произведения $[Sn^{2+}] \cdot [S^{2-}]$ и $[Sn^{4+}] \cdot [Sn^{2-}]^2$ не достигают значений Pr_{SnS} и Pr_{SnS_2} при всех значениях pH и Eh , создаваемых в ходе эксперимента. Равновесие в системах достигается практически через 3 часа с момента выделения осадков. Рентгеноструктурным анализом была установлена тонкокристаллическая структура осадков. Старение сульфидов не приводило к перераспределению олова между осадком и раствором. Исследование форм нахождения олова в твердой фазе показало, что часть его находится в виде тонкодисперсного собственного сульфида, а часть осажденного олова образует твердый раствор с сульфидом макрокомпонента.

Всего было проведено пятьсот опытов по соосаждению. Результаты эксперимента, усредненные по методу «скользящего окна» (Дубов, 1966), представлены на рис. 1 и 2.



Р и с. 1. Осаждение (в %) олова с ZnS (число около точки — проценты)



Р и с. 2. Осаждение (в %) олова с PbS (число около точки — проценты)

Из рисунков видно, что с ростом щелочности растворов падает количество олова, увлеченного осадками сульфидов, с ростом Eh падает количество олова, соосажденного с ZnS , и растет количество его, увлеченного осадком PbS .

При выделении кристаллических осадков с сильно развитой поверхностью из растворов, содержащих растворенный микрокомпонент, последний лишь в том случае переходит в осадок, если он образует с одним из ионов твердой фазы труднорастворимое или недиссоциирующее в данном растворителе соединение, и заряд микрокомпонента в растворе имеет обратный знак по отношению к заряду поверхности твердой фазы. Кроме этих двух факторов, на количество перешедшего в осадок микрокомпонента оказывает влияние сходство кристаллических структур соответствующих соединений микро- и макрокомпонента (Хлопин, 1957). Олово, увлекаясь осадками ZnS и PbS , образует прочную связь с сульфид-ионами. Поверхность сульфидов несет отрицательный заряд вследствие адсорбции ионов HS^- и S^{2-} . Этим объясняется относительно меньшая степень извлечения олова из раствора в щелочной среде, так как здесь олово находится преимущественно в виде комплексных анионов $HSnO_2^{2-}$, $Sn(OH)_6^{2-}$, SnS_3^{2-} . Изменение количества олова, увлеченного осадками сульфидов, в зависимости от условий осаждения объясняется изменением растворимости сульфидов олова и величины отношения Sn^{4+}/Sn^{2+} с изменением pH и Eh среды.

С целью нахождения полей минимальной растворимости сульфидов олова и выяснения соотношений между ионами Sn^{4+} и Sn^{2+}

в зависимости от pH и Eh среды были выполнены расчеты полей устойчивости оловосодержащих компонентов в водном растворе. Все расчеты проводились по методу, развитому Гаррелсом (1962). Диаграммы полей устойчивости приведены на рис. 3. Область наименьшей раство-

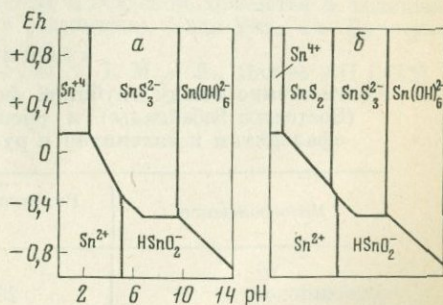
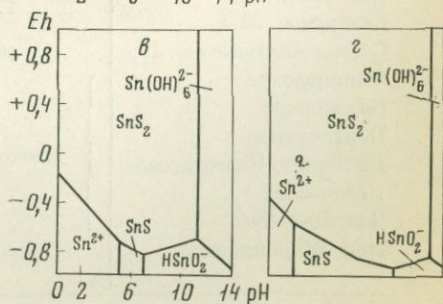


Рис. 3. Поля устойчивости ионов олова в воде при $t = 25^\circ C$, 1 атмосфере общего давления и суммарной активности растворенной серы, равной 10^{-1}
 а — границы полей соответствуют отношению активностей ионов, равному 1;

б, в, г — сумма растворенного олова в равновесии с твердой фазой равна соответственно 10^{-28} , 10^{-14} , 10^{-7}



римости SnS по величине pH совпадает с областью стопроцентного осаждения олова с осадком PbS; область минимальной растворимости SnS₂ совпадает с областью полного извлечения олова из раствора осадком ZnS.

Структура SnS (герценбергита) относится к типу слегка искаженной структуры галенита PbS. Структуру герценбергита имеет тиллит PbSnS₂, образующий непрерывный ряд твердых растворов с герценбергитом. Твердые растворы образуются за счет непрерывного замещения ионов Pb²⁺ ионами Sn²⁺.

В природных условиях Sn⁴⁺ встречается в станнине Cu₂FeSnS₄, где его структурное положение эквивалентно положению цинка в сфалерите. При высоких температурах станнин имеет структуру, полностью аналогичную структуре сфалерита с одинаковыми параметрами элементарной ячейки. Эти минералы образуют довольно широкую область взаимных твердых растворов, распадающихся с понижением температуры.

Эти факты являются доказательством существования изоморфизма между Zn²⁺ и Sn⁴⁺, с одной стороны, и Pb²⁺ и Sn²⁺, с другой. Они свидетельствуют также о том, что в условиях эксперимента с сульфидом цинка соосаждается преимущественно Sn⁴⁺, а с сульфидом свинца — ион Sn²⁺. Экспериментально найденное отчетливое увеличение количества олова, соосажденного с PbS, и уменьшение его количества в осадках ZnS с ростом восстановительного потенциала объясняется ростом активности иона Sn²⁺ и уменьшением активности иона Sn⁴⁺ в том же направлении. В щелочных условиях количество олова, увлеченного осадком PbS, составляет 50—60% от введенного количества его, а осадком ZnS — 20—40%. Это свя-

Таблица

Соотношение между глубиной формирования месторождений (Восточное Забайкалье) и распределением олова между сфалеритом и галенитом в рудах этих месторождений

Месторождение	Глубина формирования (в м)	$\frac{\text{Sn сфалерит}}{\text{Sn галенит}}$
Алгачинское	2000—2500	0,01
Савинское № 5	2000	0,03
Северо-Акатуевское	1000—1200	0,08
Смирновское	} Несколько сот метров	0,33
Кадапнское		1,87
Центральное		0,5
Екатерино-Благодатское		1,0
Ивановское		1,5
Благодатское		2,5
Ново-Широкинское	Близповерхностное	10,0

зано с тем, что отношение $\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}$ в той области лежит в пределах 10^{-12} — 10^{-19} .

Полученные экспериментальные результаты хорошо сопоставляются с распределением олова между сфалеритом и галенитом в гидротермальных месторождениях, образовавшихся на разной глубине. В условиях Земли наиболее окислительные условия существуют на ее поверхности. С глубиной в земной коре резко уменьшается количество свободного кислорода и растет восстановительный потенциал. В таблице приводится ряд свинцово-цинковых месторождений Восточного Забайкалья, сформированных на разных глубинах (Вопросы геологии..., 1963), и средние значения отношений концентраций олова в сфалеритах к концентрации олова в галенитах по большому числу определений. Из этой таблицы видно, что с уменьшением глубины формирования и ростом окислительных условий величина отношения резко растет, что находится в полном согласии с данными нашего опыта.

Дальнейшее экспериментальное изучение рассмотренной системы при высоких температурах должно привести к созданию $pH-Eh$ — меры условий рудообразования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Вопросы геологии и генезиса некоторых свинцово-цинковых месторождений Восточного Забайкалья. 1963. М., Изд-во АН СССР.
- Гаррелс Р. М. 1962. Минеральные равновесия при низких температурах и давлениях. М., ИЛ.
- Дубов Р. И. 1966. Математическая обработка результатов биогеохимических исследований. Сб. «Микроэлементы в сельском хозяйстве и медицине» (тезисы докладов V Всесоюзного совещания). Улан-Удэ, 1-е Бурятское книжное изд-во.
- Хлопин В. Г. 1957. Избранные труды, т. I. М.—Л., Изд-во АН СССР.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>И. В. Белов.</i> Некоторые вопросы математического моделирования процессов минералообразования.	5
<i>Р. И. Дубов.</i> К теории поиска оптимальных решений	14
<i>Г. И. Леонтьев.</i> Применение многомерных статистических моделей для оценки достоверности стратиграфических сопоставлений разрезов	29
<i>А. А. Акимова, И. К. Карпов, С. А. Кашик.</i> Распознавание геологических объектов, принадлежащих к нескольким классам, по одной функции.	40
<i>Р. И. Дубов.</i> Аппроксимация функций и решение обратной задачи	45
<i>С. И. Шерман.</i> Оптимальные оценки зияния разрывов в земной коре Прибайкалья	63
<i>А. А. Бухаров.</i> К вопросу об энергетической оценке палеовулканических процессов на территории Сибири.	71
<i>В. А. Лиопо, Е. К. Васильев.</i> Регрессионно-дисперсионный анализ изоморфного состава гранатов и его влияние на размеры элементарной ячейки	74
✓ <i>Г. М. Другов.</i> О статистической связи состава и свойств мусковита	77
<i>М. Б. Вертлиб.</i> Определение эпицентров землетрясений на ЭВМ	93
<i>В. А. Буряк, Т. П. Волюнец, А. П. Гладких, Т. И. Елизарьева, А. И. Черненко.</i> ✓ Распределение никеля и кобальта в пиритах и вмещающих породах Ленского золотоносного района.	107
✓ <i>Ю. М. Учакин.</i> Статистическая характеристика распределения редких щелочей в пегматитах одного из районов Восточной Сибири	115
	177

Р. И. Дубов.

- ✓ О зависимости геохимического опробования рыхлых пород от распределения вещества по фракциям. 137

Ю. И. Бакулин, А. А. Шиманский.

- ✓ К методике комплексной количественной оценки результатов поисков 143

А. И. Черненко.

- Интегральная форма уравнений кинетики твердофазных процессов, протекающих в неизотермических условиях 147

Ю. П. Трошин, В. Д. Козлов.

- Термодинамический анализ дистилляции магматического расплава на примере формирования Верхнеундинского гранитного батолита (Восточное Забайкалье) 151

✓ *И. Б. Климина, Ю. П. Трошин, Э. И. Михеева, Н. Н. Алексеева.*

- К изучению окислительно-восстановительных и кислотно-щелочных условий образования полиметаллических руд по распределению микроколичеств олова между сульфидами свинца и цинка 171

Некоторые вопросы математического моделирования процессов минералообразования. Белов И. В. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 5—13.

В статье рассматриваются методические вопросы математического моделирования процессов минералообразования. Математические методы по-разному могут применяться к экспериментальному и эмпирическому материалу по минеральным ассоциациям. В качестве первого подхода рассматриваются методы теории вероятностей и математической статистики. Во втором случае математика выступает как аппарат, прилагаемый к модельным минеральным представлениям, подготовленным в других областях знания. В третьем типе приложений математика рассматривается как аксиоматический метод. Библи. 3 назв.

УДК 519.283 + 519.92 : 55

К теории поиска оптимальных решений. Дубов Р. И. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 14—28.

В качестве оптимального решения принимается решение с наибольшей информативностью. Если решение принимается на основании совокупности частных решений, то оно имеет наибольшую информативность, когда частные найдены взаимно независимо. Это требует пересмотра инструктивных положений в геологии, где геохимические, геофизические и другие данные передаются для обобщения после взаимных поправок.

Методы решений сравниваются по вероятностям правильных и неправильных результатов. Это дает алгоритм оценки разных методов и поиска оптимальных совокупностей исходных данных. Используются в геологии методы распознавания образов по соотношениям чисел признаков, характерных для разных образов, имеют ограниченную информативность. Более эффективны методы, основанные на принципе максимального правдоподобия. Библи. 2 назв.

УДК 533.061

Применение многомерных статистических моделей для оценки достоверности стратиграфических сопоставлений разрезов. Леонтьев Г. И. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 29—39.

Изучено два опорных разреза в пределах юго-западной части мамской толщи, осадки которой метаморфизованы в фации альмандиновых амфиболитов. Сопоставление разрезов проведено методом графической коннексии. Ритмограммы при этом строились в номенклатуре литофаций, что значительно повысило распознаваемость последних.

Методами многомерного дисперсионного и регрессионного анализов произведена оценка достоверности проведенной корреляции с использованием многомерного V-критерия в первом случае и многомерных средних — во втором. Результаты, полученные различными методами, оказались непротиворечивыми.

По стандартизованным коэффициентам регрессии определена доля изменчивости, вносимая каждым из рассмотренных факторов (литологический состав, мощности элементов ритма и т. д.) в зависимые переменные, средняя из которых отвечает среднему «составу» каждого из оцениваемых разрезов. Табл. 5. Илл. 2. Библи. 15 назв.

УДК 519.95

Распознавание геологических объектов, принадлежащих к нескольким классам, по одной функции. Акимова А. А., Карпов И. К., Кашик С. А. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 40—44.

Предложен эмпирический метод построения функции распознавания геологических объектов. В отличие от дискриминантного анализа, который позволяет различать не более двух классов, с помощью рассматриваемого в статье метода можно диагностировать по одной функции одновременно несколько классов.

Метод иллюстрируется функцией распознавания глин по химическому составу. $b(y) = 2,96 - 0,074 \text{ Al}_2\text{O}_3 + 0,019 \text{ SiO}_2 - 0,184 \text{ TiO}_2 + 0,0012 \text{ Fe}_2\text{O}_3 - 0,0354 \text{ FeO} + 0,0463 \text{ CaO} + 0,0684 \text{ MgO} + 0,00208 \text{ K}_2\text{O} + 0,028 \text{ Na}_2\text{O}$, где Al_2O_3 , SiO_2 и т. д. — значения окислов в весовых процентах; $b(y) = 0,453 \div \div 1,664$ — каолинитовые глины, от 2,383 до 3,514 — монтмориллонитовые глины, от 1,664 до 2,383 — гидрослюдистые глины. Для отнесения к одному из трех классов глин требуется не более пяти химических анализов. Табл. 2.

Аппроксимация функций и решение обратной задачи. Ду б о в Р. И. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 45—63.

Пусть $f(x_i)$ — известные для n точек x_i значения некоторой функции, содержащей искаженную помехами (шумами) информацией об аппроксимируемой функции $\varphi(x)$; $\varphi^*(x)$ — аппроксимирующая функция, выбираемая для приближенного описания функций $\varphi(x)$. Вводится критерий аппроксимации z , принимающий минимальное значение z_m , когда параметры в функции $\varphi^*(x)$ подобраны так, чтобы среднее отклонение ее от значений $f(x)$ было наименьшим. Среди различных возможных функций $\varphi^*(x)$ определенного класса, различающихся гладкостью, выбирается та, для которой величина z_m является наиболее близкой к предполагаемому значению $z = z(\varphi)$ для функции $\varphi(x)$. Это значение оценивается на основании теории ошибок. Из различных возможных классов функций $\varphi^*(x)$ выбирается тот, в котором выделяемая по названному принципу функция имеет наименьшее число параметров.

Если в качестве $\varphi^*(x)$ рассматриваются различные решения прямой задачи, при различных крайних условиях, то выбор оптимальной функции φ^* означает выбор этих условий, т. е. тогда при аппроксимации решается обратная задача.

Изложенные теоретические положения применены в геохимическом примере. Табл. 1. Илл. 2. Библ. 8 назв.

УДК 551.243 (571.5).001.24 + 51 : 55

Оптимальные оценки зияния разрывов в земной коре Прибайкалья. Ш е р м а н С. И. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 63—70.

Автор исследует возможность существования открытого разрыва на глубине как функцию напряжения и прочности горных пород. С физической точки зрения рассматривается деформация горных пород вокруг одиночной трещины, расположенной в упругой плоскости. Расчет проводится согласно теории хрупкого разрушения с допущением, что тело сохраняет свойство линейной упругости вплоть до разрушения. В статье определены усредненные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона для Прибайкалья и вычислены для условно взятых длин разрывов от 100 метров до 200 км минимально допустимые значения расширяющей нагрузки, при которой могут существовать разрывы с различной величиной зияния. Приводится график зависимости полудлин открытых разрывов и их зияния при различном характере заполнения трещин. Табл. 2. Илл. 2. Библ. 12 назв.

УДК 551.21 : 550.36

К вопросу об энергетической оценке палеовулканических процессов на территории Сибири. Б у х а р о в А. А. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 71—74.

Применение расчетных формул, предложенных И. Йокоямой, П. Хедервари, И. В. Лучицким, позволило вычислить тепловую энергию отдельных вулканических извержений для среднепротерозойского Прибайкальского вулканического пояса и сопоставить суммарный энергетический эффект среднепротерозойского вулканизма Прибайкалья с энергетическими оценками девонского вулканизма Сибири, мезозойского вулканизма Забайкалья, Сибирской платформы, Охотско-Чукотского вулканического пояса и современного вулканизма Камчатки. Расчет тепловой энергии, освобожденной при одноактном извержении одного из среднепротерозойских палеовулканов Прибайкалья дал цифру $0,17 \cdot 10^{28}$ эрг, что почти вдвое превышает тепловой эффект самого мощного из известных исторических извержений вулкана Тамбора в 1815 г., тепловая энергия которого оценивается, по данным В. И. Влодавца, в $0,96 \cdot 10^{27}$ эрг. Сравнение суммарного энергетического эффекта докембрийского вулканизма Прибайкалья с другими вулканическими районами свидетельствует об огромной интенсивности вулканического процесса в докембрии Прибайкалья и об общем снижении энергии вулканических процессов от докембрия к более поздним периодам на территории Сибири и Дальнего Востока. Табл. 1. Библ. 14 назв.

УДК 519.27 + 549.621.9 + 548.32

Регрессионно-дисперсионный анализ изоморфного состава гранатов и его влияние на размеры элементарной ячейки Л и о п о В. А., В а с и л ь е в Е. К. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 74—77.

Анализ ранее найденного уравнения регрессии между параметром элементарной ячейки и содержанием конечных членов в природных гранатах показал, что для рассматриваемой выборки наиболее значимыми являются содержания альмандина, пирропа, андрадита, гроссуляра и спессартина.

По полученному уравнению регрессии параметр элементарной ячейки гранатов в зависимости от содержания различных конечных членов рассчитывается с ошибкой в 0,04 Å с вероятностью 99,6%. Табл. 2. Библ. 8 назв.

УДК 549.623.52

О статистической связи состава и свойств мусковита. Другов Г. М.— В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука» 1973, стр. 77—92.

Изучение регрессии пробивной напряженности, твердости, удельного веса, блеска и прозрачности мусковита с вектором его химического состава (10 петрогенных компонентов) и физическими параметрами показало, что изменчивость каждого из этих свойств определяется не только его химическим составом (главным образом Al_2O_3 , Fe_2O_3 и K_2O), но и другими факторами, учитываемыми в уравнениях множественной регрессии твердостью и пробивной напряженностью. Наиболее сильная корреляционная связь химического состава мусковита отмечалась с его углом оптических осей ($-2V$). Уравнение регрессии ($-2V$) с вектором химического состава мусковита было применено для характеристики изменчивости состава этого минерала из мамских пегматитов различных температурных зон. Статистический анализ рассчитанных значений угла оптических осей по уравнениям регрессии показывает закономерное его уменьшение в прогрессивном ряду температурных зон.

Табл. 5. Илл. 2. Библ. 9 назв.

УДК 550.34

Определение эпицентров землетрясений на ЭВМ. Вертлиб М. Б.— В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 93—106.

В статье рассмотрен аналитический вариант определения эпицентров близких землетрясений с помощью прямолинейных эпицентралей.

Подробно изложена программа решения задачи по определению координат эпицентра на ЭВМ (БЭСМ-2), разработанная и отлаженная автором на материалах Прибайкальской сети станций. Табл. 2. Илл. 3. Библ. 1 назв.

УДК 550.42 : 546.549.324

Распределение никеля и кобальта в пиритах и вмещающих породах Ленского золоторудного района. Бурьяков В. А., Волынец Т. П., Гладких А. П., Елизарьева Т. И., Черненко А. И.— В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 107—115.

Рассматриваются результаты изучения пиритов (более 500 количественных анализов), развитых в пределах двух основных золоторудных полей района — Артемовского и Сухоложского. Пириты образуют рассеянную вкрапленность и прожилкоподобные скопления во вмещающих золоторудные кварцевые жилы песчаниках (Артемовское поле) и алеволитах (Сухоложское поле). На Сухоложском поле пиритовая минерализация в основной массе несколько предшествует образованию жил, хотя генетически и пространственно тесно связана с ними. На Артемовском поле рассматриваемые пириты синхронны или почти одновременны с жилами. Установлено, что в породах и пиритах содержания Ni и Co подчиняются логнормальному закону и между собой имеют положительную корреляционную зависимость. На Артемовском поле между содержаниями Ni и Co в породе и пиритах устанавливается статистически значимая обратная корреляционная связь, что указывает на заимствование этих элементов из пород в процессе пиритизации. На Сухоложском участке, наоборот, намечается положительная, слабо выраженная (статистически незначимая) зависимость между содержаниями этих элементов в породах и пирите, что свидетельствует в пользу привноса этих элементов при рудообразовании. Табл. 4. Илл. 1. Библ. 13 назв.

УДК 519.2 : 550.42 : 546.3.

Статистическая характеристика распределения редких щелочей в пегматитах одного из районов Восточной Сибири. Учкин Ю. М.— В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 115—137.

Статистическая обработка данных количественного спектрального анализа содержаний Rb, Cs, Li и K в микроклинах (173 пробы) и мусковитах (77 проб) из различных пегматитов позволила установить вероятностные законы распределения концентраций, определить их параметры и провести сопоставление средних содержаний, дисперсий и функций распределения содержаний. С помощью оценок асимметрии и эксцесса установлено соответствие эмпирических распределений математическим моделям логнормального (для содержаний Rb, Cs, Li) и

нормального (для содержаний К) распределений. Наблюдаемые различия в видах распределения щелочных элементов объясняются разными условиями их накопления в минерале («элементы-гости» и «элемент-хозяин»). Путем проверки гипотез о равенстве средних, дисперсий и функций распределения выявлены и оценены различия в характере распределения и величине средних содержаний редких щелочей в микроклинах и мусковитах из пегматитов различного типа и отдельных полей. Установленные закономерности проведения редких щелочей объективно свидетельствуют о магматическом генезисе пегматитов района. Табл. 9. Илл. 4. Библ. 25 назв.

УДК 550.84

О зависимости геохимического опробования рыхлых пород от распределения вещества по фракциям. Д у б о в Р. И. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 137—142.

В пробы рыхлых пород отбирается преимущественно мелкая фракция (обычно меньше 1 мм). Она по-разному обогащена или обеднена изучаемым элементом (Э) в зависимости от его свойств, а также от геологической и геоморфологической обстановки. Например, при гипергенном разрушении гранитов происходит каолинизация полевых шпатов, и мелкая фракция состоит в значительной мере из глинистого материала, а из кварц-вольфрамитовых жил образуются преимущественно более крупные обломки.

При переносе рыхлого материала (например, в аллювиальных потоках) относительно крупные частицы, содержащие Э, измельчаются по мере движения и переходят в мелкую фракцию. Поэтому максимальное содержание Э в отбираемой фракции может достигаться ниже места поступления рудного материала в поток. Различие скоростей перемещения частиц в потоке вносит дополнительные существенные осложнения. Поэтому необходимы специальные исследования для внесения поправок в расчеты, делаемые традиционными методами.

Библ. 8 назв.

УДК 550.4 : 51

К методике комплексной количественной оценки результатов поисков. Б а к у л и н Ю. И., Ш и м а н с к и й А. А. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 143—147.

Использование статистической теории информации К. Шеннона позволяет количественно выражать как количественные, так и качественные поисковые признаки и дает возможность проводить комплексную количественную интерпретацию поисковой информации. В статье приводится методика комплексной оценки на примере Комсомольского оловянного района. Табл. 1. Библ. 2 назв.

УДК 541.124/128

Интегральная форма уравнений кинетики твердофазных процессов, протекающих в неизотермических условиях. Черненко А. И. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 147—151.

Выполнено интегрирование уравнения, записанного в форме, предложенной Б. В. Ерофеевым и Б. И. Белькевичем. Рассмотрен случай, когда параметры ε и n в уравнении Ерофеева — Белькевича принимают любые значения, за исключением значений n , равных нулю или целому числу. При этом учтена зависимость предэкспоненциального множителя от температуры в выражении для константы скорости, являющегося основным соотношением теории абсолютных скоростей реакций. Полученные уравнения справедливы для линейного и гиперболического режимов изменения температуры образца во времени и могут быть использованы для обработки кинетических кривых при помощи ЭВМ с целью определения из данных одного опыта параметров ε и n , а также предэкспоненты и энергии активации. Библ. 8 назв.]

УДК 550.42 : 551.22]

Термодинамический анализ дистилляции магматического расплава на примере формирования Верхнеундического гранитного батолита (Восточное Забайкалье). Т р о ш и н Ю. П., К о з л о в В. Д. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 151—171.

Геохимические данные по распределению H_2O , CO_2 , F, Cl, Be, Sn, Mo, U, Rb, Zn, Pb, Li, SiO_2 , Ca, K, Na в фазовых и фациальных разновидностях гранитоидов батолита и в минералах этих гранитоидов используются для нахождения начальной концентрации в расплаве и контроля баланса массы каждого компонента в ходе кристаллизации батолита. Для оценки теоретического изменения концентраций в образующихся гранитоидах и в расплаве используются термодинамические

уравнения. Теоретический ход процесса изменения концентраций сопоставляется с реально наблюдаемыми содержаниями элементов в гранитоидах. Показано, что возникающие различия между теоретически ожидаемыми и реально наблюдаемыми концентрациями после раскristализации 93% начальной массы гранитоидного расплава обязаны потере вещества при ретроградной дистилляции. Последовательность интенсивности перехода компонентов в магматический дистиллят в основном совпадает с последовательностью отложения компонентов, наблюдаемой в природе, от высокотемпературных минералов Be, Sn и Mo к относительно низкотемпературным минералам Zn, Pb, Ca и CO₂. Табл. 3. Илл. 6. Библ. 22 назв.

УДК 550.42

К изучению окислительно-восстановительных и кислотно-щелочных условий образования полиметаллических руд по распределению микроколичеств олова между сульфидами свинца и цинка. Климина И. Б., Трошин Ю. П., Михеева З. И., Алексеева Н. Н. — В сб. Математические модели в геологии и геостатистика. М., «Наука», 1973, стр. 171—175.

Экспериментально изучена зависимость между pH — Eh — условиями среды и количеством олова, увлекаемого осадками ZnS и PbS. Методом, предложенным Р. Гаррелсом, рассчитаны поля устойчивости различных ионов, окислов и сульфидов олова в растворе в зависимости от pH, Eh среды.

Показано, что с падением окислительно-восстановительного потенциала растет количество олова в осадках PbS и падает в осадках ZnS. На процесс соосаждения оказывает влияние pH среды.

Полученные экспериментальные данные хорошо согласуются с характером распределения Sn между галенитом и сфалеритом месторождений, сформированных в различных условиях. Табл. 1. Илл. 3. Библ. 3 назв.

**Математические модели в геологии
и геостатистика**

*Утверждено к печати
Институтом земной коры
Сибирского отделения АН СССР*

Редактор *И. С. Сидоров*
Редактор издательства *Л. В. Миракова*
Технический редактор *Е. Н. Естянова*

Сдано в набор 19/IX 1972 г.
Подписано к печати 16/II 1973 г. Формат 60×90 1/16.
Бумага № 2. Усл. печ. л. 11,9. Уч.-изд. л. 12,6.
Тираж 1600. Тип. зак. 1205. Т-01469.
Цена 1 р. 26 к.

Издательство «Наука», 103717 ГСП,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21.

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

1 p. 26 K.

587