

А. БЕРРОТ
В. ХОФМАНН

**КОСМИЧЕСКАЯ
ГЕОДЕЗИЯ**

KOSMISCHE GEODÄSIE

VON

Professor Dr.-Ing. Alfred Berroth

Stuttgart

Professor Dr.-Ing. Walter Hofmann

Direktor des Geodätischen Instituts
der Universität Bonn

VERLAG G. BRAUN, KARLSRUHE

1 9 6 0

528.629

А. БЕРРОТ и В. ХОФМАНН

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО

В. В. ПОДОБЕДА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

П. И. БАКУЛИНА

544

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963



АННОТАЦИЯ

Книга Беррота и Хофманна является первой монографией по теории и практике наблюдений Луны, искусственных спутников Земли и солнечных затмений для целей астрономии и геодезии.

Первая часть посвящена теории солнечных затмений, а также определению параллакса и либраций Луны. Затем описаны современные инструменты и методы наблюдения солнечных затмений, покрытий звезд Луной и определения положений Луны среди звезд с применением к определению долгот и расстояний между пунктами земной поверхности. Книга завершается описанием методов наблюдения искусственных спутников и их обработки для определения фигуры Земли.

Книга рассчитана на геодезистов и астрономов. Она также может быть использована в качестве учебного пособия студентами указанных специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	13
Предисловие	15
ГЛАВА I. Постановка задачи	23
§ 1. Геодезические применения наблюдений Луны и искусственных спутников Земли	23
§ 2. Наблюдения и искомые неизвестные	26
§ 3. Принципиальное различие методов, использующих покрытия звезд, солнечные затмения и измерения положения Луны относительно звезд	30
ГЛАВА II. Основные положения теории затмений	37
§ 1. Бесселевы элементы затмения	37
1. Направление a , d оси тени	38
2. Координаты Луны и Солнца в системе фундаментальной плоскости	39
3. Размеры конуса тени	40
§ 2. Постоянные затмения, зависящие от пункта наблюдения	42
1. Координаты пункта наблюдения	42
2. Положение наблюдателя относительно оси тени и условия контактов	44
§ 3. Учет астрономической рефракции при покрытиях и солнечных затмениях	46
§ 4. Вычисление моментов и позиционного угла контактов для заданного пункта	48
§ 5. Максимальная фаза и середина полного затмения для заданного пункта	49
§ 6. Сферическое расстояние между центрами светил и его позиционный угол	51
ГЛАВА III. Параллакс Луны и его влияние на координаты	57
§ 1. Идея использования параллакса для решения геодезических задач	57
§ 2. Зависимость параллакса от зенитного расстояния светила	58
§ 3. Параллакс по прямому восхождению и склонению (геоцентрическое положение считается известным)	62
§ 4. Влияние параллакса на другие координатные системы	65

§ 5. Формулы для параллакса в экваториальной и горизонтальной системах, если даны топоцентрические координаты	66
§ 6. Зависимость видимого радиуса Луны от места наблюдения	67
§ 7. Суточные колебания параллакса Луны на различных широтах	68
§ 8. Формулы параллакса из «Высшей геодезии» Гельмерта	70
1. Влияние параллакса на часовой угол и на склонение	70
2. Влияние параллакса на азимут и на зенитное расстояние	72
§ 9. Динамический параллакс	74
ГЛАВА IV. Луна как объект наблюдений	78
§ 1. Общие замечания о виде края Луны, каким он представляется с Земли	78
§ 2. Некоторые замечания о либрации Луны	80
§ 3. Различные системы координат на Луне	82
1. Селеноцентрические координаты	82
2. Позиционный угол и расстояние	82
3. Селенографические координаты	83
4. Координаты P и D лунной карты Хайна	84
§ 4. Вычисление топоцентрических либраций, в особенности для станций наблюдения затмения с использованием данных предвычислений	84
§ 5. Линия края Луны по карте Хайна	87
1. Снятие профиля с карты [6]	87
2. Вычисление координат Хайна для точек лунного края	89
3. Пример	91
§ 6. Дифференциальная либрация	92
§ 7. Определение центра, среднего радиуса Луны и неровностей ее края по фотографиям	93
§ 8. Атлас лунных профилей Парижской обсерватории	99
Пример использования Атласа [15]	101
§ 9. Электронная машина для развертки лунных профилей на Морской обсерватории в Вашингтоне [16—18]	102
§ 10. Кинематический краевой метод Бонсдорфа	104
1. Определение лунных профилей из кинематографических снимков солнечного затмения	104
2. Теория метода Бонсдорфа	105
3. Сравнение различных методов определения профилей края Луны	107
ГЛАВА V. Шкала времени и астрономические ежегодники	111
§ 1. Неравномерность вращения Земли	111
§ 2. Флуктуации в движении Луны	114
§ 3. Определение равномерной шкалы времени	118
§ 4. Улучшенная эфемериды Луны	121
§ 5. Данные, приводимые в астрономических Ежегодниках для предвычисления солнечных затмений	124

1. Содержание астрономических Ежегодников	124
2. Данные астрономических Ежегодников для предвычисления солнечных затмений	125
3. Предвычисления по элементам, задаваемым по эфемеридному времени	127
ГЛАВА VI. Покрытия звезд	130
§ 1. Введение	130
§ 2. Данные для приближенного предвычисления покрытия	131
§ 3. Предвычисление покрытия звезды с использованием фундаментальной плоскости Бесселя	133
1. Координаты в фундаментальной плоскости	133
2. Расстояние σ	136
3. Пример вычисления свободного члена $\Delta\sigma$	137
4. Более точное предвычисление момента контакта	138
5. Соотношения между позиционными углами	140
ГЛАВА VII. Предвычисление условий наблюдения	142
§ 1. Предварительные вычисления для наблюдения солнечного затмения в геодезических целях	142
1. Элементы затмения	143
2. Фигура тени на поверхности Земли, принимаемой за эллипсоид	145
§ 2. Формулы для вспомогательного графического построения	148
§ 3. Различные системы кривых хода затмения на земной поверхности для предвычисления внутри ограниченной области	150
1. Изохроны на эллипсоиде	150
2. Изофазы на эллипсоиде (линии одинаковой фазы затмения)	153
3. Изогоны на эллипсоиде (линии равного позиционного угла)	153
§ 4. Сопоставление данных предвычисления	156
1. Общие положения	156
2. Местные условия	159
ГЛАВА VIII. Улучшение эфемерид	162
§ 1. Требования к точности эфемерид Луны и Солнца для времени затмения	162
§ 2. Краткий обзор метода Зундмана	163
§ 3. Дифференциальные уравнения движения Луны вокруг Земли и их численное интегрирование	164
1. «Наблюденные» координаты Луны	164
2. Теоретические уравнения движения	165
3. Привязка по методу особых возмущений Энке	168
4. Численное интегрирование	170
§ 4. Пример вычислений для Луны	173
§ 5. Движение Солнца вокруг центра тяжести G системы Земля—Луна и обратное преобразование этого движения по отношению к Земле	178
1. Наблюденные координаты точки G	178

2. Теоретические уравнения движения для G	179
3. Численное интегрирование	180
4. Вывод окончательных координат Солнца	180
§ 6. Пример вычислений для Солнца	182

ГЛАВА IX. Кинематографический метод наблюдения серпов при солнечных затмениях для определения моментов контактов 187

§ 1. Общие положения	187
§ 2. Технические подробности регистрации	190
§ 3. Теоретические основы применения изображений серпов	193
1. Объект измерения	193
2. Использование изображения серпа по измерениям на небесной сфере	195
3. Использование изображений серпа по измерениям в фундаментальной плоскости	196
§ 4. Вывод расстояния и позиционного угла по киноснимкам серпа	201
Добавление	204
§ 5. Предвычисление и сравнение с наблюдением	205
1. Сопоставление предсказанных значений для солнечного затмения 20 мая 1947 г.	209
2. Сравнение результатов обработки пленки (наблюдений) с предвычислением	209
§ 6. Результаты наблюдения и их связь с неизвестными при использовании середины полной фазы	210
1. Строгий способ с привязкой к центральной линии затмения на поверхности Земли	210
2. Графическая обработка в общей плоскости проекции	214
3. Вывод момента середины полной фазы из наблюдаемых расстояний	216
§ 7. Измерение ширины серпа	219
§ 8. Точность наблюдения солнечных затмений для геодезических целей	221
1. Точность измерения расстояния m	221
2. Точность измерения позиционного угла M	222
3. Средние ошибки неизвестных	222
§ 9. Геодезические результаты по наблюдениям солнечного затмения	224
§ 10. Фотографирование тени с самолета	227

ГЛАВА X. Определение относительного положения Солнца и Луны по вращению солнечного серпа 229

§ 1. Метод наблюдения и техника съемки	229
§ 2. Теоретическое соотношение для вращения серпа	231
1. Соотношения на сфере	231
2. Соотношения на фундаментальной плоскости	234
§ 3. Особые обстоятельства при выборе места наблюдения	235
§ 4. Использование вращения серпа с учетом профиля лунного края	240

§ 5. Составление уравнений ошибок для позиционных углов	243
1. Теоретический позиционный угол M	243
2. Вычисление теоретического эффекта края	244
§ 6. Точность и сравнение результатов	251
ГЛАВА XI. Определение моментов контактов затмения фотометрическим методом	254
§ 1. Введение	254
§ 2. Фотоэлектрические измерения интенсивности света	256
1. Регистрация с внефокальным фотометром	256
2. Одновременная регистрация двумя фотометрами с большим и малым полем зрения	261
3. Одновременная регистрация двумя фотометрами с одинаковым полем зрения	263
§ 3. Измерение почернений	264
1. Метод следов почернений	264
2. Фотометрия изображений серпов	266
§ 4. Геометрические соображения для решения фотометрической задачи	268
ГЛАВА XII. Определение моментов контактов и изучение профиля лунного края спектрофотометрическим методом	272
§ 1. Введение	272
§ 2. Решение спектрофотометрической задачи	276
1. Неизвестные спектрофотометрической задачи	276
2. Определение фотометрических высот	277
3. Измерение почернения с помощью микроденситометра [3]	279
§ 3. Относительное движение Солнца и Луны во время затмения	280
§ 4. Фотометрическое определение центра Луны и среднего уровня лунной поверхности	283
§ 5. Спектрофотометрическое определение высот лунного края	286
§ 6. Точность спектрофотометрического метода и геодезические выводы	288
1. Точность	288
2. Геодезические выводы	290
ГЛАВА XIII. Использование покрытий звезд для геодезических целей. Наблюдение покрытия звезды в постоянном позиционном угле	292
§ 1. Принцип использования	292
§ 2. Фотоэлектрическое наблюдение покрытий	294
§ 3. Теория специального наблюдения покрытий звезд по О'Кифу	293
1. Общий обзор	298
2. Теория	298
3. Система координат	299
4. Составление уравнений ошибок для расстояний	301
5. Введение динамического параллакса Луны	303

§ 4. Предвычисление изогоны	305
1. Американский метод (О'Кифа)	306
2. Японский метод (Хироэ)	307
3. Область применения	309
§ 5. Пример наблюдений покрытия звезды в постоянном позиционном угле	309
§ 6. Геодезические засечки с помощью покрытий звезд (метод теней)	315
1. Общее описание метода	315
2. Числовой пример геодезической связи двух разделенных морем триангуляций	317
ГЛАВА XIV. Универсальный параллактический метод. Измерение положения Луны среди звезд	
§ 1. Введение	320
§ 2. Изменение лунного параллакса, обусловленное изменениями геодезических переменных	323
1. Геодезический дифференциал параллакса по прямому восхождению	324
2. Геодезический дифференциал параллакса по склонению	326
3. Упрощение формул	327
§ 3. Астрономические дифференциалы лунного параллакса	328
§ 4. Результаты наблюдений лунных положений	333
1. Покрытие звезд	333
2. Фотографирование	335
§ 5. Измерение положения Луны среди звезд в период МГГ	337
§ 6. Определение геоцентрических координат по методу Марковица	341
1. Общая обработка	341
2. Специальная обработка	345
§ 7. Сравнение универсального метода и метода теней Бесселя	347
ГЛАВА XV. Близземной искусственный спутник с точки зрения геодезии	
§ 1. О неравенствах в движении спутников вследствие возмущений от масс Земли	351
1. Поле тяготения	351
2. Уравнения движения	354
§ 2. Изменения в законах Кеплера для близземного спутника вследствие учета моментов инерции	356
1. Изменения первого закона Кеплера	357
2. Изменения второго закона Кеплера	359
3. Изменения третьего закона Кеплера	360
§ 3. Следующие неравенства движения спутников	
1. Астрономическая и геодезическая скорость спутника	361
2. Прецессия узлов мгновенной орбиты	363
3. Вращение оси эллипса в плоскости орбиты	364
§ 4. Дальнейшая разработка теории движения спутника по Бреннеру (1959)	365

§ 5. Оптические наблюдательные методы	367
1. Тригонометрические методы	367
2. Камера Бекер-Нанн для оптических наблюдений спутников	369
§ 6. Радиометрические наблюдения спутников	372
1. Измерения эффекта Допплера	372
2. Примеры использования доплеровских кривых	375
3. Другие радиометоды наблюдений спутника	378
4. Радиолокационные измерения Луны	379
§ 7. Полученные результаты и геодезические выводы	382
1. Сжатие Земли	382
2. Трехосность	383
3. Несимметрия северного и южного полушарий	384
4. Главный момент инерции Земли	384
ГЛАВА XVI. Некоторые геометрические методы прошлого, сохранившие актуальность до настоящего времени	390
§ 1. Обзор старых методов	390
§ 2. Графические методы	393
§ 3. Метод Гаусса	395
1. Прямоугольные координаты	397
2. Расстояние между центрами светил в плоскости проекции при определенных фазах	400
§ 4. Сферически-тригонометрическая обработка	403

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Беррота и Хофманна является первым опытом систематического изложения всех аспектов теории и методики наблюдения Луны для решения астрометрических и геодезических задач, а также использование в этих же целях искусственных спутников Земли.

Основная астрометрическая задача, решаемая по наблюдениям положений Луны, — определение эфемеридного времени, — послужила толчком к тому, что в последнее десятилетие начали развиваться фотографические наблюдения Луны. Усовершенствование методики этих наблюдений позволило повысить точность получаемых результатов и сделало их пригодными для решения геодезических задач, теоретическая основа которых была известна уже давно.

Серьезные перспективы открываются для решения этих задач в связи с запусками искусственных спутников Земли, которые находятся от Земли на расстояниях меньших, чем Луна, и позволяют получить более ценные с практической точки зрения результаты. Решение астрометрических и геодезических задач имеет важное значение для будущего, поскольку они тесно переплетаются с изучением неравномерности вращения Земли и с многочисленными проблемами геофизики и небесной механики.

Книга написана на высоком научном уровне. Однако авторы, составляя ее на основании большого литературного материала, освещают отдельные вопросы с разной степенью полноты и точности, и поэтому книга имеет неоднородный характер изложения. Большую ценность имеют библиографические данные, приведенные в конце каждой главы. К сожалению, в этих данных полностью отсутствуют работы советских ученых: А. А. Михайлова, А. А. Яковкина, Х. И. Поттера, А. А. Нефедьева, Ш. Т. Хабибулина и др.

При редактировании книги мы не сочли возможным ввести полную унификацию буквенных обозначений для облегчения сверки с оригинальными статьями в случае их недостаточно полного изложения в данной книге. Мы сохранили также описание структуры *Астрономического Ежегодника* на примере *Nautical Almanac*, поскольку он в важнейших своих разделах идентичен *Астрономическому Ежегоднику СССР*.

П. И. Бакулин

2 ноября 1962 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на то что рассматриваемый материал по большей части имеет астрономический характер, эта книга по праву получила название *геодезия*, ибо поставленные авторами цели имеют преимущественно геодезический характер. Выбранное для характеристики прилагательное *космическая* означает, что рассматриваемые геодезические зависимости выводятся только из взаимного расположения небесных тел или их движения. Поэтому много места отведено давно известным геометрическим методам, согласно которым астрономические координаты небесных тел, в особенности Луны, приводятся путем специальных наблюдений в измеримые соотношения с геодезическими координатами пункта наблюдения. Измеренные параллаксы небесных тел позволяют определить геоцентрические координаты земных наблюдательных станций, а следовательно, и истинные расстояния от центра Земли, что в конце концов позволяет вывести, при достаточном числе таких целесообразно расположенных станций, фигуру и размеры Земли. Для этой цели можно использовать и многочисленные измерения положений Луны относительно звезд по методу Марковица, которые впервые были проведены по большой программе во время Международного геофизического года 1957—1958 гг. Геодезическое использование солнечных затмений и покрытий звезд Луной осуществляется на тех же геометрических основах, только специально приспособленных к решению данной задачи.

Давно известные в принципе методы лунных параллаксов в своей основе могут применяться и к искусственным спутникам Земли. Они получили практическое значение для геодезии лишь в последнее время, после того как наблюдательная техника обогатилась новыми физическими вспомогательными средствами, которые позволили достичь требуемой необычайно

высокой точности измерений. Упомянутые методы пригодны и для создания однородной мировой системы географических координат путем геодезического перебрасывания «моста» через океаны.

В последнее время анализ движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) открывает перспективный путь для аппроксимации фигуры Земли в целом путем разложения радиуса-вектора по сферическим функциям. Этот по самому своему существу динамический метод исходит из гравитационного потенциала и позволяет установить на основе теоретических уравнений движения зависимость между наблюдаемыми возмущениями орбиты спутника и коэффициентами разложения потенциала. Последние входят также и в выражения изменений земного радиуса, происходящих от перераспределения масс. При этом зональные сферические функции 2-го и 4-го порядков определяются из прецессии узла и вращения линии апсид орбит спутников. Зональные члены 3-го и 5-го порядков могут быть выведены из периодических возмущений эксцентриситета и наклона орбиты. Член нулевого порядка (средний радиус Земли) получается, как показано в гл. XV, из радарных измерений расстояния до Луны. Динамический метод спутников имеет то преимущество перед земными гравитационными методами, что здесь приходится иметь дело с чисто внешней задачей. При этом аномалии общего земного гравитационного поля проявляются в возмущениях орбит лишь интегрально.

Рассматриваемый предмет может поэтому считаться также составной частью Астрономической геодезии, или еще шире — Физической геодезии. Однако до настоящего времени в учебниках и справочниках ему отводилось очень мало места. Авторы следили за рассеянными в международной литературе публикациями с 1945 г. и считали большим недостатком отсутствие сводки этого интересного материала в виде отдельной книги. Настоящая работа восполняет этот пробел. Списки разнообразной литературы, служившей нам источником, помещены в конце каждой главы.

Книга написана геодезистами и в первую очередь для геодезистов, которые найдут здесь в новом изложении хорошо известные им принципы. В настоящее время ни один наблюдательный

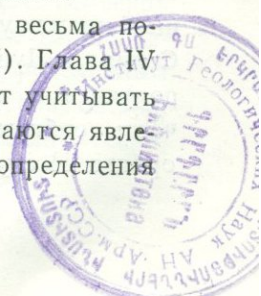
метод не может претендовать на свободу от систематических ошибок, и так как эти ошибки могут быть обнаружены лишь впоследствии сравнением различных методов, то нельзя отказаться от изложения ни одного из них.

В качестве введения сделаем еще следующие указания относительно разделов книги.

Сравнительно много места отведено проекционным методам, так как последние особенно важны для геодезистов вследствие их геометрического характера. Подробное обсуждение теории солнечных затмений и покрытий звезд является также необходимым, потому что здесь применим целый ряд методов наблюдений, дающих возможность и отдельным лицам принять участие собственными наблюдениями в проведении подобных работ. Напротив, в методе спутников, находящемся в начальной стадии развития, должны быть изложены лишь основы и приведены результаты, считающиеся уверенными (гл. XV).

Бесселева теория затмений помещена после общего обзора (гл. I) в начале книги (гл. II). Краткое историческое описание геометрических методов предвычисления затмений дано лишь в конце (гл. XVI), поскольку оно отчасти основывается на предшествующих определениях и выводах. Это историческое исследование ограничивается некоторыми геометрическими рассуждениями, не потерявшими своего значения и в настоящее время. Основой современной теории затмений является классическая работа Ф. Бесселя «Анализ затмений», про которую Шовенэ — автор фундаментального справочника по астрономии — говорит, что она единственная в своем роде в научной литературе. Бесселева теория будет изложена здесь в общих чертах. Мы отказались от объяснения целого ряда второстепенных вопросов, как, например, от описания общего хода затмения или определения границ видимости, поскольку общие сведения о ходе солнечного затмения можно найти в учебниках и справочниках, а подробности — в астрономических Ежегодниках.

Выводы различных формул параллакса даются весьма подробно из-за их фундаментального значения (гл. III). Глава IV посвящена особым обстоятельствам, которые следует учитывать при наблюдениях Луны. Здесь подробно рассматриваются явления либрации и различные методы наблюдения и определения



края Луны и ее оптического центра при данной фазе либрации.

Для введения геометрических соотношений между положениями движущегося небесного тела и пунктом наблюдения, участвующим во вращении Земли, нужен однородный масштаб времени. Осложнения геометрической задачи, вызываемые неравномерностью вращения Земли, можно устранить введением эмпирически определяемого равномерного эфемеридного времени. Поэтому необходимо было остановиться и на астрономической проблеме времени (гл. V). В связи с этим даются сведения о содержании астрономических Ежегодников, причем отмечаются изменения, внесенные в них с 1960 г. Приведенные в этой книге числовые примеры, естественно, основаны на Ежегодниках до 1960 г., в которых лунная эфемерида и Бесселевы элементы затмений даны по всемирному времени.

Главы VI и VII могут рассматриваться как переход от общей теории к практическим применениям. Читатель должен ознакомиться с числовым примером обработки простого покрытия (гл. VI) с помощью теории Бесселя прежде, чем мы перейдем к другим специальным ее применениям. Данные для предвычисления солнечного затмения в заданном пункте, являющиеся основой для геодезически целесообразного и уверенного наблюдения, приводятся в гл. VII с соответствующими формулами. Графики и таблицы содержат важнейшие дифференциальные изменения предвычисленных данных для случая, когда положение предполагаемого пункта наблюдения должно быть незначительно изменено.

Ввиду того что в некоторых случаях для предвычисления желательна большая относительная точность, выходящая за последний знак эфемерид, в гл. VIII излагается способ Зундмана в том виде, в каком он был применен Хирвоненом для улучшения эфемерид при геодезической обработке солнечного затмения 1947 г. В этом способе для решения поставленной задачи были использованы гравитационные воздействия за ограниченный промежуток времени всех масс, влияющих на движение Солнца и Луны. Интегрирование уравнений движения позволяет получить с весьма высокой относительной точностью малую часть орбиты, которая затем привязывается к эфемеридной орбите. Несмотря на то что с 1960 г. лунные эфемериды даются

в Ежегодниках с одним лишним знаком, авторы не отказались от изложения этого интересного в теоретическом отношении способа, так как он имеет много общего с другими методами, применяемыми в геодезии. После достаточного освещения теоретических предпосылок можно перейти к методической разработке их практического применения.

В методах солнечных затмений и покрытий звезд геодезическая задача состоит в сущности в том, чтобы установить связь между наблюдаемым всемирным временем явления (внутреннего касания краев Солнца и Луны или соответственно начала и конца покрытия звезды Луной) и геодезическими координатами пункта наблюдения. Затем из разностей данных наблюдения и предвычисления после исключения некоторых неизвестных надо получить поправки к исходным геодезическим данным. В соответствии с этим геодезия рассматривает не столько абсолютную, сколько в первую очередь относительную задачу, которая опирается на наблюдения в двух или нескольких пунктах. Это обстоятельство дает возможность исключить как целый ряд побочных поправок, так и часть систематических ошибок.

Излагаемые в гл. IX—XII методы использования солнечных затмений отличаются друг от друга только техникой наблюдений, применяемой для регистрации моментов контактов. Наблюдения Солнца имеют то преимущество, что они позволяют связать его край с краем Луны в течение некоторого промежутка времени до и после контакта. Вследствие этого местные неправильности лунного края влияют не так сильно. Наблюдения заключаются или в фокальной киносъемке солнечного серпа, или в измерении интенсивности света. Для наблюдений кинематографическим методом можно избрать пункт наблюдения вблизи центральной линии затмения (контактный метод, гл. IX) или недалеко от полосы полного затмения. В последнем случае, по Аткинсону, наблюдается быстрое вращение солнечного серпа (гл. X). Геометрическое измерение многочисленных изображений серпа дает в обоих случаях относящиеся к определенным моментам времени относительные положения центров светил, а затем и ориентированное направление для определения геодезических координат пункта.

Фотометрические методы носят более физический характер. При простейшем их применении регистрируется весь световой поток, идущий как непосредственно от солнечного серпа, так и от фона неба; этот поток выражается в функции времени. По кривой интенсивности светового потока можно вывести моменты начала и конца полной фазы (гл. XI). При спектрографическом методе Линдблада и Кристенсона (гл. XII) получается ряд снимков спектра вспышки, появляющегося на короткое время перед исчезновением и после появления солнечного серпа. Фотометрия непрерывной части спектра, произведенная для определенной длины волны, дает при известных условиях более точное значение моментов контактов, чем упомянутые выше методы, и позволяет получить, кроме того, профиль лунного края.

При наблюдениях покрытий звезд вместо субъективных отметок моментов времени теперь используют объективную регистрацию идущего от звезды светового потока при помощи фотоэлектрического умножителя, установленного на телескопе. При этом момент исчезновения звезды за темным лунным краем отмечается с большой точностью по обрыву потока фотонов, падающего на катод. Эту наблюдательную технику выгодно применять по О'Кифу на двух далеко отстоящих друг от друга станциях, выбранных так, что покрытие какой-либо определенной звезды происходит для обоих пунктов наблюдения по возможности одним и тем же местом лунного края. Таким образом, при относительных определениях можно исключить влияние рельефа лунного края. Это перспективное для геодезических целей усовершенствование метода наблюдений покрытий звезд мы подробно рассмотрим в гл. XIII.

Параллактический универсальный метод Марковица (гл. XIV), в котором положение Луны, зависящее от места наблюдения, получается фотографическим путем — привязкой ее к окружающим звездам, ко времени работы над этой книгой был известен авторам лишь в общих чертах из статей, опубликованных для подготовки наблюдений по плану МГГ. Так как к этому времени еще не было теории Марковица, авторы применили к этой проблеме выведенные в гл. III общие формулы параллакса. При печатании книги оказалось возможным принять во внимание подробное теоретическое исследование Марковица (гл. XIV, § 6).

Его формулы, в прямоугольных геоцентрических координатах, отличаются от выведенных авторами лишь с формальной точки зрения и в некоторых частностях. Результаты наблюдений, произведенных в течение МГГ, пока еще не опубликованы.

Лунные методы могут рассматриваться как обобщенная форма высотной триангуляции. Они отличаются от подобных же земных методов тем, что вследствие большой удаленности Луны треугольники получаются узкими, и тем, что приходится отказываться от одновременности наблюдений. Вместо этого надо привязываться или к небесным явлениям (покрытия звезд, солнечно-лунные контакты), или непосредственно к фотографиям неба и соответствующим отметкам всемирного времени. При использовании искусственных спутников Земли благоприятные условия наблюдения, соответствующие земной высотной триангуляции, могут быть достигнуты, если удастся снабдить спутник устройством, посылающим ряд световых вспышек. Разработка инструментальных средств для космической триангуляции с помощью спутников находится еще в стадии поисков, поэтому в гл. XV рассматривается преимущественно динамический метод, который уже дал замечательные результаты.

Универсальный параллактический метод Марковица и метод спутников требуют значительных средств и организации в мировом масштабе. Остальные способы допускают сотрудничество и в меньших масштабах.

Мы не можем привести здесь имена всех ученых, заслуги которых в разработке этих методов были особенно велики. Упомянем лишь, что И. А. Эйлер, сын знаменитого математика Л. Эйлера, рассмотрел в Трудах Мюнхенской академии наук возможность вывода уравнения меридианного эллипса из наблюдений Луны на одном и том же меридиане. Он указывал также, что наблюдения небесного тела, менее удаленного от Земли, чем Луна, дали бы существенно лучшие результаты.

Чтобы облегчить обращение к важнейшим оригинальным работам, в формулах сохранены обозначения оригинала; поэтому система обозначений не одинакова для всех глав. Примененные знаки в каждом случае пояснены, поэтому не следует опасаться недоразумений. Ссылки на литературу, которая помещена в конце каждой главы, даны в тексте числами в квадратных скобках:

ссылки в круглых скобках относятся к рисункам и формулам.

Авторы сердечно благодарят за оказанную им помощь Астрономический вычислительный институт в Гейдельберге, Морскую обсерваторию США и Военную картографическую службу в Вашингтоне, Финский геодезический институт в Хельсинки и Университетскую обсерваторию в Бонне, которые, снабжая нас книгами и специальными публикациями, существенно ускорили нашу работу. Геодезическому институту Высшей технической школы в Дармштадте и Боннскому университету мы обязаны благодарностью за работу по перепечатке рукописи и за выполнение, черчение и размножение рисунков при подготовке рукописи к печати. Профессор д-р Ф. Пондолач и д-р Ледерле из Астрономического вычислительного института в Гейдельберге проявили большой интерес к нашей работе и много способствовали ее удачному окончанию своими многочисленными советами и дружеским просмотром рукописи. Д-р инженер Цече и инженер Зандманн из Геодезического института Боннского университета интенсивно поддерживали нас во время работы над книгой и проявляли ценную инициативу. Особо следует благодарить д-ра Цече за его консультации по вопросам электронной измерительной техники.

Решающей была финансовая поддержка Немецкого научного общества, которому авторы также выражают свою благодарность.

Авторы благодарят также издательство Г. Браун (Карлсруэ) за вдумчивое отношение к их пожеланиям и за заботливое оформление книги.

Новизна и трудность материала не позволяют авторам надеяться, что им удалось полностью избежать недоразумений и ошибок. Поэтому они будут приветствовать, если читатели этого труда обратят их внимание на все замеченные недостатки.

Штутгарт и Бонн. Апрель 1960 г.

А. Беррот, В. Хофманн

ГЛАВА I

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

§ 1. Геодезические применения наблюдений Луны и искусственных спутников Земли

Еще задолго до того как были запущены первые искусственные спутники Земли, астрономы и геодезисты имели возможность изучать фигуру Земли по наблюдениям ее естественного спутника — Луны. Для этого существовали два пути, которые в принципе были известны давно, а ныне применяются и к искусственным спутникам Земли. Первый путь чисто *геометрический* и основан на измерении параллактического смещения, которое испытывает Луна, если ее наблюдения производятся из разных точек Земли. Второй путь носит *динамический* характер и основывается на силах тяготения.

Если из наблюдений получены координаты центра Луны на небесной сфере и, кроме того, известны геоцентрические координаты Луны на орбите для момента наблюдения, то тем самым в пространстве задано направление, которое может служить для определения положения пункта наблюдения на Земле в геоцентрической системе координат. В простейшем случае с уклонениями полученной прямой линии поступают как при обычной для геодезистов задаче выравнивания. Наблюденные координаты Луны получают либо из непосредственных измерений положения Луны относительно окружающих звезд, либо косвенным путем из наблюдений покрытий звезд и солнечных затмений, когда определяется не только момент видимого прикосновения к краю Луны, но и позиционный угол места касания. Этот метод можно назвать *космическим методом*, ибо геодезические определения основываются на взятых из Ежегодника координатах Луны, Солнца или на координатах звезд, использованных для привязки, и тем самым метод опирается на движение небесных тел.

Практическая реализация простого геометрического принципа встречается с рядом трудностей. Во-первых, геодезические определения на земной поверхности составляют лишь часть общей задачи определения положения, а другая часть этой задачи относится к небесным телам, геоцентрические координаты и

параллаксы которых не известны с достаточной точностью. Это осложняет задачу тем больше, чем большая точность результатов требуется.

Во-вторых, в основе исследований лежит расстояние до Луны, выраженное в экваториальных радиусах Земли, и ошибка этой величины войдет как неизвестный масштабный множитель в координаты пункта наблюдения. Этот масштабный множитель можно определить, если произвести измерение параллактического смещения из двух достаточно удаленных друг от друга пунктов, связанных триангуляцией.

В-третьих, наблюдения должны сопровождаться очень точно производимыми определениями времени, а последние осложняются наличием неравномерности вращения Земли. И, наконец, в-четвертых, при наблюдениях Луны приходится визировать не на центр, а на край диска Луны, форма которого изучена недостаточно хорошо. Поэтому наблюдения следует организовывать так, чтобы неизвестные общей задачи выводились из многочисленных уравнений невязок, полученных, по возможности, различными способами. Некоторые неизвестные, при малых промежутках времени, можно заменить их теоретическими значениями, и тогда получаются существенные упрощения.

Параллактический метод дает *абсолютные значения* геодезических координат в геоцентрической системе, ибо выведенные по параллаксам направления относятся к центру тяжести Земли и к оси ее вращения, в то время как другие известные методы, пренебрегающие аномалиями силы тяжести, дают лишь относительные значения. Геоцентрическая система координат может быть связана с эллипсоидом вращения, центр которого совмещен с центром тяжести Земли, а малая ось совпадает с осью вращения. Следовательно, для геодезического положения пункта получаются абсолютные значения геоцентрической широты и долготы, а также абсолютные высоты.

При использовании параллакса Луны получаемые направления *не зависят* от направления отвесной линии и ускорения силы тяжести. Поэтому отпадает проблема, которая связана с полем тяжести Земли особенно при протяженных геодезических измерениях. Возможность получить этим путем абсолютные координаты точек физической земной поверхности позволяет создать единую мировую геодезическую мистему, что имеет большое практическое значение.

Идея получения координат пункта наблюдения и отсюда фигуры Земли из наблюдений положений Луны на небосводе встречается впервые в трудах Мюнхенской академии наук в 1768 г. Иоганн Альберт Эйлер (1734—1800), сын знаменитого Леонарда Эйлера, рассмотрел возможность получения из наблюдений Луны на одном меридиане уравнения меридианного эллипса.

Позднее Гельмерт [1] и Ламберт [2] критически исследовали вопрос применения наблюдений Луны в геодезических целях.

Однако практическая реализация этих идей не могла быть начата из-за недостаточной точности наблюдений и измерительной техники. Так продолжалось двести лет, пока Марковиц не применил параллактические методы к наблюдениям Луны в том самом геофизическом году, который принес нам и искусственные спутники. Даже методы, применяющиеся при наблюдениях солнечных затмений и покрытий звезд Луной, впервые смогли дать нужную для геодезических целей высокую точность лишь при новых вспомогательных средствах. Банахевич [3] и Кордилевский впервые достигли этой точности во время полного солнечного затмения 1927 г. при помощи кинематографирования узких солнечных серпов, которое производилось в точно регистрируемые моменты незадолго до и немного спустя полной фазы затмения. При наблюдениях покрытий звезд Луной точной и объективной регистрации моментов покрытий недавно достиг О'Киф [4] с помощью фотоэлемента.

В то время как из параллактического метода можно получить геометрическое положение для определенного пункта земной поверхности, динамический метод дает только общий вывод о фигуре Земли в целом. Мы знаем, что отклонение в распределении внутренних масс Земли от сферической симметрии находит свое выражение в характере поля тяготения. Определение коэффициентов разложения потенциала позволяет представить фигуру Земли в виде уровенного сфероида. Для этого могут служить измерения силы тяжести на земной поверхности; с другой стороны, по наблюдаемым возмущениям в движениях Луны или искусственного спутника можно сделать вывод о силовой функции Земли. Математические основы для этого дает небесная механика.

Еще Лаплас объяснил сжатием Земли эмпирический член возмущения эклиптической долготы Луны, открытый Тобиасом Майером в 1767 г. Он также нашел соответствующий член возмущения и в широте Луны, который наблюдается точнее, что позволило ему гордо заявить, что астрономы теперь могут, не покидая обсерватории, определить сжатие Земли.

Для применения динамического метода *искусственные спутники* более удобны, чем Луна. Благодаря своей близости к Земле и малой массе их движение почти полностью определяется полем тяготения Земли, в то время как движение Луны очень сильно зависит от Солнца и больших планет. ИСЗ удобнее еще и потому, что дают более обильный материал, поскольку за промежуток времени, в который Луна делает один оборот, для наблюдений доступны многие сотни оборотов искусственных спутников. Напротив, применение геометрических методов

к искусственным спутникам, когда они должны служить «маркерами» для определения направлений, в настоящее время еще затруднено из-за большой угловой скорости спутников и отсутствия необходимой наблюдательной и измерительной техники.

Поэтому, хотя оба метода могут быть в принципе использованы как для искусственных спутников, так и для Луны, исключительно широкие возможности открываются только в случае применения динамического метода к искусственным спутникам. Мы приведем в гл. XV особенности наблюдения искусственных спутников и их обработки, а сейчас перейдем к параллактическому методу и его использованию для Луны.

§ 2. Наблюдения и искомые неизвестные

Если положение Луны измерено относительно окружающих звезд непосредственно, то из этих наблюдений можно получить два уравнения ошибок. Последние принимают простой вид, если пункт наблюдения представлен прямоугольными геоцентрическими координатами x, y, z [5]. Уравнения решают тем же дифференциальным методом, который обычно применяется в геодезии при определении тригонометрических пунктов и в котором, исходя из приближенных значений x_0, y_0, z_0 , вычисляя прямое восхождение и склонение Луны. Сравнение вычисленных координат Луны с наблюдаемыми дает свободные члены l_α и l_δ уравнений ошибок, которые служат для определения неизвестных $\Delta x, \Delta y, \Delta z$:

$$v_\alpha = -l_\alpha + a_1 \Delta x + a_2 \Delta y,$$

$$v_\delta = -l_\delta + b_1 \Delta x + b_2 \Delta y + b_3 \Delta z.$$

Для определения геодезического положения было бы достаточно двух наблюдений, произведенных в различное время одной и той же ночи. Однако в уравнения приходится вводить еще и другие неизвестные (поправку момента времени, поправки элементов лунной орбиты), о чем будет подробно рассказано в гл. XIV.

В противоположность этому прямому подходу к проблеме, при использовании солнечных затмений и покрытий звезд взаимное расположение пункта наблюдения и небесного светила определяется на проекционной плоскости. Благодаря этому той части вычислений, которая связана с движением небесных тел, возможно придать вид, не зависящий от положения наблюдателя, и предвычислить некоторые данные для каждого пункта наблюдения. Мы рассмотрим этот метод подробнее на примере покрытия звезд; со времен Бесселя [6] он лежит в основе теории затмений.

Явление исчезновения или появления звезды на краю лунного диска можно описать, построив тень, которую отбрасывает на Землю Луна от света звезды. Тень Луны будет перемещаться по земной поверхности, которая вследствие вращения Земли движется в том же направлении, но медленнее, чем лунная тень. Когда край тени находит на какую-либо точку земной поверхности, то там наступает покрытие; оно окончится, если противоположный край тени сойдет с этого места.

Движение тени относительно наблюдателя лучше всего представить на плоскости, которая проходит через центр Земли перпендикулярно прямой, соединяющей центр Луны и звезду. В этой фундаментальной плоскости Бесселя, перпендикулярной к оси теневого цилиндра, изображаются Луна и пункт наблюдения в ортогональной проекции. Положение фундаментальной плоскости относительно Земли определяется прямым восхождением и склонением покрываемой звезды.

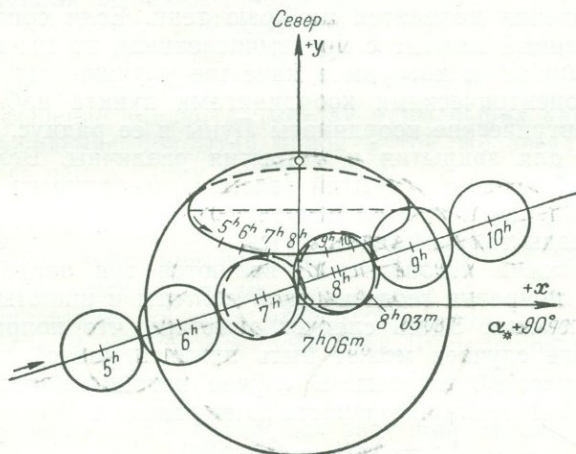


Рис. 1. Покрытие звезды.

Луна и место наблюдения в проекции на фундаментальную плоскость (по Ламберту).

На рис. 1, который мы заимствуем из обзора Ламберта [7], видно как перемещается тень Луны по Земле. Движение тени на рисунке почти прямолинейно. Отмеченные моменты по всемирному времени суть моменты геоцентрических соединений звезды с центром Луны. Деления на географической параллели, помеченные также по всемирному времени, показывают, где находится в этот момент наблюдатель с координатами места φ и λ .

Из графического построения можно определить момент, когда наблюдатель попадает в теневой цилиндр и когда он из-

него выйдет. Естественно, что такое графическое определение слишком неточно. Для аналогичного аналитического расчета проекции центра Луны и пункта наблюдения представляются на фундаментальной плоскости как функции времени. Чтобы вычислить наступление покрытия звезды, определяют момент по всемирному времени, когда расстояние пункта наблюдения от центра Луны на фундаментальной плоскости будет равно радиусу Луны, который в долях экваториального радиуса Земли составляет 0,2725.

Пример, изображенный на рис. 1, дает при вычислении моменты $7^{\text{h}}05^{\text{m}},6$ всемирного времени для закрытия и $8^{\text{h}}03^{\text{m}},3$ для открытия. Эти моменты, как видно, не зависят от направления отвесной линии в пункте наблюдения. Определяющим является расположение пункта относительно центра массы Земли.

В простейшем случае задача наблюдения покрытий звезд состоит в отметке момента всемирного времени, в который точка наблюдения находится на краю тени. Если сопоставить этот наблюдаемый момент с предвычисленным, то мы получим уравнение ошибок, в котором в качестве улучшаемых величин наряду с геоцентрическими координатами пункта наблюдения входят геоцентрические координаты Луны и ее радиус. Уравнения ошибок для закрытия и открытия различны. Вследствие трудности наблюдения открытий (элемент внезапности) до сих пор из наблюдений покрытий используют уравнения только для закрытия звезды темным краем Луны.

Геодезическими неизвестными являются три поправки $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, ΔN , т. е. поправки геодезической долготы и широты, а также высоты пункта. Здесь следует заметить, что поправка $\Delta\varphi$ в большинстве случаев может быть принята равной поправке $\Delta\varphi'$ геоцентрической широты. В случае необходимости можно учесть при вычислении их разность из выражения

$$\Delta\varphi' = \Delta\varphi(1 - e^2 \cos 2\varphi).$$

Поскольку определенная геодезическим путем высота места наблюдения H может быть с помощью вычислений отнесена к уровню моря, то в качестве неизвестной поправки высоты ΔN имеем превышение геоида над референц-эллипсоидом. Как известно, она заключена в пределах 100 м и в данном методе учитывается тем, что вместо радиуса-вектора эллипсоида ρ вводят геоцентрическое расстояние $\rho + \Delta N$. Различием направлений ρ и ΔN можно пренебречь.

Поправки видимого прямого восхождения и склонения Луны ($\Delta\alpha$, $\Delta\delta$), поправка ее среднего радиуса (Δk , в долях экваториального радиуса Земли) и поправка ее среднего экваториального горизонтального параллакса (ΔP_0) являются важнейшими астрономическими неизвестными, которые влияют на положение

тени, Поскольку отношение суточного параллакса $R_k P_0$ достаточно точно известно из теории Луны, можно определять только одну поправку ΔP_0 . Отсюда, с некоторой степенью полноты, уравнение ошибок наблюдения всемирного времени T покрытия звезды может быть записано следующим образом:

$$\Delta T^{[s]} = a \Delta \lambda^{[']}] + b \Delta \varphi^{[']}] + c \Delta \alpha_{\zeta}^{['']} + \\ + d \Delta \delta_{\zeta}^{['']} + e \Delta P_0^{['']} + f \Delta k^{[10^{-4} a]} + g \Delta H^{[км]}.$$

Размерность неизвестных приведена в прямых скобках и выбрана так, что средняя величина коэффициентов близка к единице. Поскольку расстояние до Луны содержит округленно 60 земных радиусов, то $1''$ в координатах Луны соответствует изменению в географических координатах пункта наблюдения, почти точно равное $1'$. Отсюда и вытекают те высокие требования к точности наблюдения, если из приведенных выше уравнений ошибок выводятся поправки геодезического положения. Ошибки положения наблюдаемой звезды могут быть определены независимо и поэтому не входят в уравнение ошибок.

Поправки $\Delta \alpha_{\zeta}$ и $\Delta \delta_{\zeta}$ медленно изменяются со временем. Полное решение задачи по методу наименьших квадратов требует наблюдения покрытия одной и той же звезды в данную ночь более чем в одном пункте Земли. Число геодезических неизвестных сильно сокращается, если хотя бы часть пунктов наблюдений связана общей триангуляцией. Уравнения еще более упрощаются, если поправки $\Delta \alpha_{\zeta}$ и $\Delta \delta_{\zeta}$ определены другими астрономическими методами.

Все сказанное до этого относилось к совершенно круглому диску Луны. В действительности край Луны неровен, и это вносит большую трудность в указанную проблему, так как при покрытиях звезд участвуют разные точки лунного края. На результаты наблюдений солнечных затмений неровности лунного диска влияют меньше, так как соприкосновение краев наблюдается на большем участке лунного края и этим достигается некоторая компенсация неправильностей. Но полного исключения ошибок нет и в этом случае, так как ограниченный солнечным серпом край Луны может располагаться в среднем ниже или выше, т. е. быть систематически смещенным. В случае привязки положения Луны к звездам на фотографиях стремятся преодолеть эту трудность тем, что середину диска Луны получают из точных измерений многочисленных точек на периферии Луны. В этой связи О'Киф [8] развил специальную программу наблюдений покрытий звезд, весьма перспективную, поскольку она позволяет достаточно хорошо исключить влияние неправильностей края. Для этого вдоль полосы тени выбирают два или более пунктов наблюдения таким образом, чтобы

покрываемая звезда для этих пунктов исчезала точно за одним и тем же местом края Луны. Тогда в разности свободных членов соответствующих уравнений ошибок выпадают как неизвестный данный радиус Луны, так и ошибки, вызываемые неточным знанием положения Луны и звезд.

Трудности, связанные с рельефом края Луны, будут преодолеваются легче, когда появятся большие таблицы профилей лунного края, создаваемые Парижской обсерваторией и Морской обсерваторией США. Эти таблицы будут скоро закончены.

§ 3. Принципиальное различие методов, использующих покрытия звезд, солнечные затмения и измерения положения Луны относительно звезд

Рассмотрим сначала, в чем состоит различие между методами, использующими наблюдения покрытий звезд Луной и наблюдения солнечных затмений. Вместо направления на звезду, задаваемого ее видимым прямым восхождением и склонением, в случае использования солнечных затмений в роли оси тени выступает направление, проходящее через центры Луны и Солнца. Это направление вычисляется по координатам Солнца и Луны, приведенным в Ежегодниках, и задается его часовым углом для Гринвича и склонением для определенного момента времени (гл. II). В противоположность методу покрытия звезд вместо одного теневого цилиндра от поперечного сечения Луны здесь вводятся два теневых конуса: *конус полутени*, образованный общими внутренними касательными, и *конус тени*, образованный общими внешними касательными. (см. рис. 4).

Конуса тени и полутени перемещаются по земной поверхности, как и цилиндрическая тень при покрытиях звезд, с запада на восток. Когда поверхность конуса полутени в первый раз коснется пункта наблюдения (начало затмения), там будет видно первое соприкосновение краев Солнца и Луны (1-й контакт); когда к пункту наблюдения приблизится поверхность конуса тени, то будет наблюдаться внутреннее соприкосновение краев (2-й контакт, начало полной фазы). Затем следуют внутреннее и внешнее соприкосновения краев (3-й и 4-й контакты), когда края тени и полутени покидают пункт наблюдения.

Метод Бесселя описывает ход затмения в координатной системе, ориентированной по оси тени. Бессель писал в своем «Анализе затмений» [6, стр. 370] следующее: «Анализ исходит из уравнения, выражающего то условие, что когда видно внешнее или внутреннее соприкосновение краев, глаз должен находиться в одной из двух касающихся обоим светилам поверхностей. Это уравнение есть уравнение прямого конуса; прямоугольная си-

система координат вводится параллельно его оси, чтобы достичь большей простоты».

Аналитическое построение теории солнечных затмений несколько более сложно, чем теория покрытий звезд Луной. В то время как при цилиндрической тени, образованной светом от звезды, расстояние пункта наблюдения от фундаментальной плоскости Бесселя не имело значения, при конусе тени положение наблюдателя относительно края тени зависит от его расстояния до вершины конуса. Поэтому пункт наблюдения необходимо задавать тремя прямоугольными координатами ξ , η , ζ в системе фундаментальной плоскости Бесселя (начало координат — в центре Земли, ось z параллельна оси тени, плоскость xy — фундаментальная плоскость). Положение пункта наблюдения относительно конуса тени может затем рассматриваться в плоскости, параллельной фундаментальной и отстоящей от нее на переменное (в основном вследствие вращения Земли) расстояние, равное координате пункта наблюдения ζ . Расстояние конуса тени от фундаментальной плоскости также переменное. Поэтому радиус теневого круга во время затмения не постоянен и существенно зависит от места наблюдения. Вследствие видимого движения Солнца фундаментальная плоскость постоянно меняет свое положение не только относительно пункта наблюдения, но и относительно звезд.

Диаметр полутени на Земле почти равен удвоенному поперечнику Луны; диаметр тени, напротив, исчезающе мал и близок к нулю. При этом, в зависимости от расстояний Солнца и Луны, вершина конуса тени может лежать или над или под поверхностью Земли. Полное затмение Солнца наступает только в последнем случае. В первом случае, когда вершина тени лежит над земной поверхностью и видимый диаметр Луны меньше видимого диаметра Солнца, наблюдается кольцеобразное солнечное затмение. Последние также могут быть использованы для геодезических целей (например, затмение 1948 г. в Японии и Бирме [9]).

Во время солнечного затмения можно фиксировать взаимные расположения краев Солнца и Луны, как в моменты незадолго до, так и после контактов. Это можно сделать фотографическим (гл. IX) или фотометрическим путем (гл. XI и XII). При этом за время в несколько секунд или минут можно получить большое количество наблюдений. При кинематографических съемках солнечного серпа, кроме момента контакта, можно получить еще угловое расстояние между центрами Солнца и Луны, а также позиционный угол точки соприкосновения их краев. Если наблюденное угловое расстояние центров светил и его позиционный угол (идентичный с позиционным углом точки соприкосновения краев) перенести на плоскость, параллельную

фундаментальной и проходящую через пункт наблюдения, то, как мы увидим в дальнейшем, это будет расстоянием точки пересечения оси тени от пункта наблюдения и его позиционным углом. Этим определится положение наблюдателя относительно оси тени.

При внешнем соприкосновении дисков Луны и Солнца позиционный угол точки соприкосновения измеряется очень точно. Однако эта точность иллюзорна вследствие того, что радиус полутеневого круга, соответствующий угловому расстоянию между центрами в момент внешнего контакта, очень велик, а именно близок к диаметру Луны в метрах. Позиционный угол внутренней точки соприкосновения измеряется с несколько меньшей точностью, но при этом радиус теневого круга очень мал.

Позиционный угол точки соприкосновения звезды с краем Луны до сих пор не может быть использован для решения поставленной проблемы. Вследствие большого радиуса тени (0,27 радиуса Земли) очень трудно достичь высокой точности определения позиционного угла, необходимой для определения геодезического положения. Покрытия звезд дают поэтому одно лишь расстояние пункта наблюдения от оси тени, которое и используется.

Наблюдения солнечного затмения, кроме одного уравнения ошибок, получаемого из расстояния, дают еще и второе уравнение для позиционного угла внутреннего контакта. Вместо теневого цилиндра, как в случае покрытия звезд, в качестве ориентированного направления здесь служит ось тени, которая может быть определена из наблюдения обоих контактов, что вполне достаточно для фиксации пункта наблюдения. Координаты одного пункта, определенные из таких наблюдений, отягощены систематическими ошибками (главным образом вследствие ошибок положения Луны). Координаты же двух пунктов, определенные одинаковым образом во время одного и того же затмения, позволяют произвести *измерение геодезического базиса* (например, через океан); при этом систематические ошибки будут значительно уменьшены.

Следует еще упомянуть, что в качестве дополнительных неизвестных из наблюдения солнечного затмения могут быть определены поправки координат Солнца, которые изменяются со временем и поэтому не могут быть определены впоследствии. В большинстве случаев ограничиваются тем, что в качестве неизвестных в уравнения вводят разности координат Солнца и Луны.

Все три рассматриваемых метода существенно различаются характером наблюдений. При покрытиях звезд и во время солнечных затмений наблюдается соприкосновение краев, в то время как в третьем методе на фотографическом негативе, по-

лученном с помощью камеры Марковица (гл. XIV), определяется положение центра Луны относительно окружающих звезд.

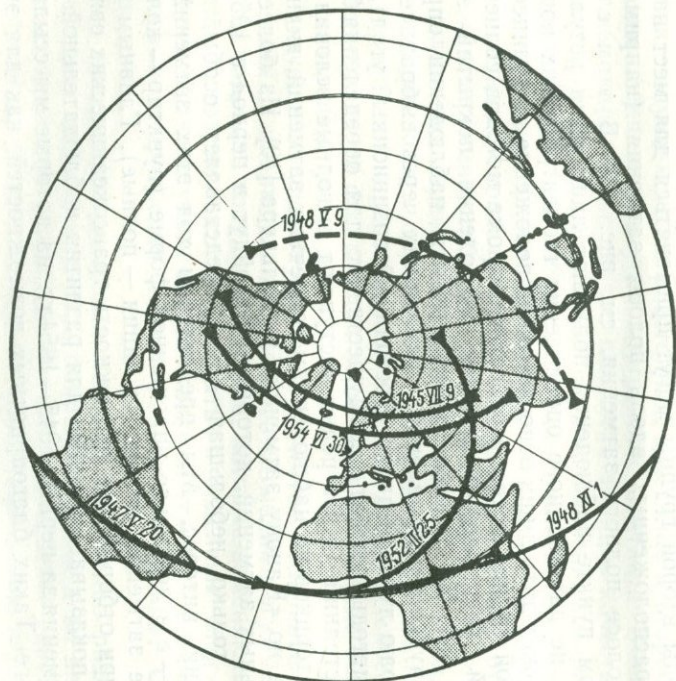
Однако измерение положения Луны относительно звезд можно рассматривать как своего рода покрытие. Действительно, если рассматривать топоцентрические координаты центра Луны для момента фотографирования в данном пункте наблюдения как место фиктивной звезды, то в момент наблюдения происходит как бы «покрытие» центром Луны этой фиктивной звезды. Такое представление следует ввести, чтобы использовать теорию затмений по Бесселю.

Марковиц [5], исходя из практического использования, делит геометрические методы на две группы: 1) методы постоянных мест наблюдения и 2) методы наблюдения вдоль полосы затмения.

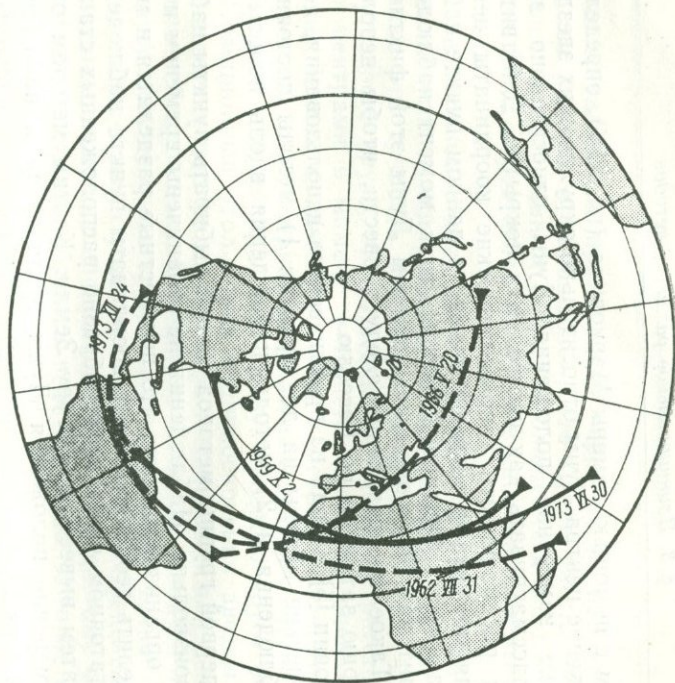
Для первой группы методов можно выбирать пункты наблюдений произвольно. Наблюдения не ограничены временем и могут быть организованы так, что неизвестные разделятся и можно определить геоцентрические координаты пункта наблюдения. При достаточном числе целесообразно расположенных станций можно затем вывести и фигуру Земли. К этим методам относятся измерение положения Луны среди звезд и наблюдения покрытий звезд.

Методы второй группы могут применяться для мест наблюдения, расположенных вдоль полосы затмения (например, в узкой полосе полного затмения, см. рис. 47). В этом случае в каждом пункте наблюдения получают лишь один результат, который не дает полного определения геоцентрических координат и может дать лишь относительное положение на эллипсоиде. Ко второй группе методов относятся, кроме методов солнечных затмений, специальные методы наблюдения покрытий звезд О'Кифа (гл. XIII), при которых пункты наблюдений определяются пучком направлений, проходящих через выбранное место на краю лунного диска (постоянный позиционный угол).

Эти методы служат преимущественно для определения больших расстояний. Сколь редко наступают выгодные условия для связи материков по наблюдениям солнечных затмений, видно из рисунков по «Канону затмений» Опольцера [10]. Из более ста центральных затмений, которые произойдут в период с 1955 до 2030 гг., только небольшая часть представляет особый геодезический интерес. Мы представили ход этих затмений на рис. 2,а — г в несколько упрощенной форме (пунктир — кольцеобразные затмения, сплошные линии — полные). Главным критерием при отборе была возможность транскеанических связей. Рис. 2,а показывает важные для развития наблюдательной техники затмения за период 1945—1954 гг., на которые мы ссылаемся в книге. Таких благоприятных возможностей, как для этого

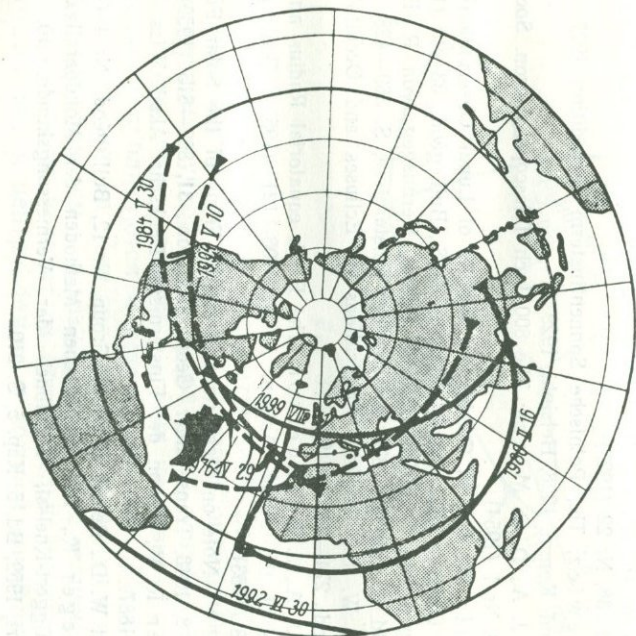


а 1945—1954;

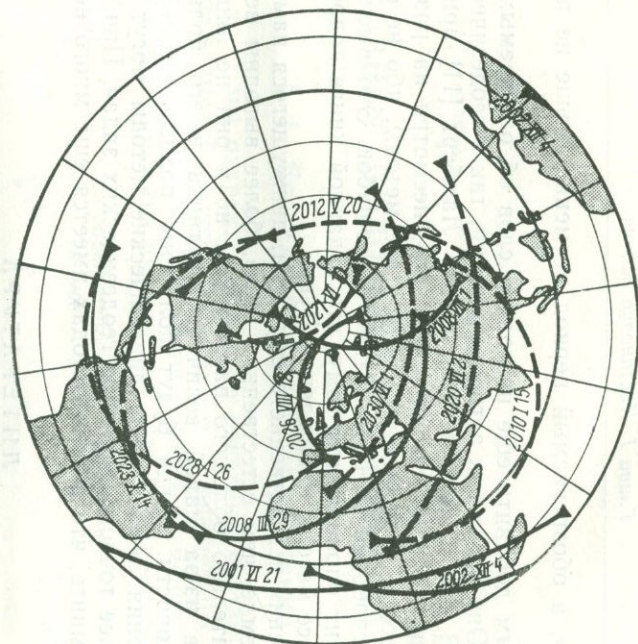


б 1959—1973

Рис. 2 (а, б). Центральные линии некоторых солнечных затмений за период 1945—1973 гг. (по Опольцеру).



в 1976—1999



з 2001—2030

Рис. 2 (в, г). Центральные линии некоторых солнечных затмений за период 1976—2030 гг. (по Олпольцеру).

десятилетия, в обозреваемый период времени больше не представится.

Мы хотим добавить еще несколько слов об ожидаемых результатах. Они носят как астрономический, так и геодезический характер. В своем критическом обзоре Ламберт [11] пришел к заключению, что на сегодняшний день, несмотря на различную значимость, должны применяться все методы, ибо не один из них не свободен от систематических ошибок. Это высказывание служит оправданием тому, что в данной книге подробно изложены все методы наблюдения Луны.

Наблюдения искусственного спутника, движущегося намного ближе к Земле, чем естественная Луна, более выгодны вследствие значительно большего параллакса; но и они не лишены недостатков из-за малой величины спутника и его большой угловой скорости. Когда будут получены полные сведения о поле тяготения Земли, тогда динамические методы могут привести к более точному решению геодезических задач. При этом следует помнить, что в этих методах имеется еще много неработанного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Helmert F. R., Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Teil II, Leipzig, 1884, S. 451—459.
2. Lambert W. D., The Figure of the Earth and the Parallax of the Moon, *Astron. J.*, 38, Nr 22 (1928).
3. Banachiewicz, Th., Polnische Sonnenfinsterni sexpedition 1927, *Verh. Balt. Geod. Komm.* 1928, Helsinki, 1929.
4. O'Keefe, J. A., D. D. Mears: The 800 Inch Telescope, *Astron. Soc. Canada*, 48, Nr 1 (1954).
5. Markowitz W., Use in Geodesy of Results of Lunar Observations and eventual Observations of artificial Satellite S., *Bull. géod.*, 33—40 (1958).
6. Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel, Herausgeg von R. Engelmann, Bd. 3, Leipzig, 1876, Analyse der Finsternisse, S. 369—428.
7. Lambert W. D., Geodetic Applications of Eclipses and Occultations, *Bull. géod.*, 274—292 (1949).
8. O'Keefe J. A., J. P. Anderson, The Earth equatorial Radius and the Distance of the Moon, *Astron. J.*, 57, 108—121 (1952); *Bull. géod.*, 218—248 (1953).
9. Panay T. N., Note on Measurements of the Films of the Solar Eclipse, May 9—8, 1948, *Trans. Amer. Geophys. Union.*, 31, 809—815 (1950).
10. Oppolzer R. V., Kanon der Finsternisse, *Denkschr. Akad. Wiss. Wien*, Bd. 52, 1887.
11. Lambert W. D., Report of Study Group, Nr 12, *Bull. géod.*, Nr 4 (1956).
12. Ledersteger K., Die geodätischen Methoden der Mondparallaxe, In *Jordan-Eggert-Kneissl, Handbuch der Vermessungskunde*, 10. Aufl., Stuttgart, 1959, Bd. 5, Kap. 5, S. 210.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЗАТМЕНИЙ

§ 1. Бесселевы элементы затмения

В гл. I мы охарактеризовали в основных чертах Бесселеву теорию затмений. Теперь остановимся на важнейших формулах, применяемых для предвычисления условий затмения в заданном месте и для обработки наблюдений. Эти формулы выведены для

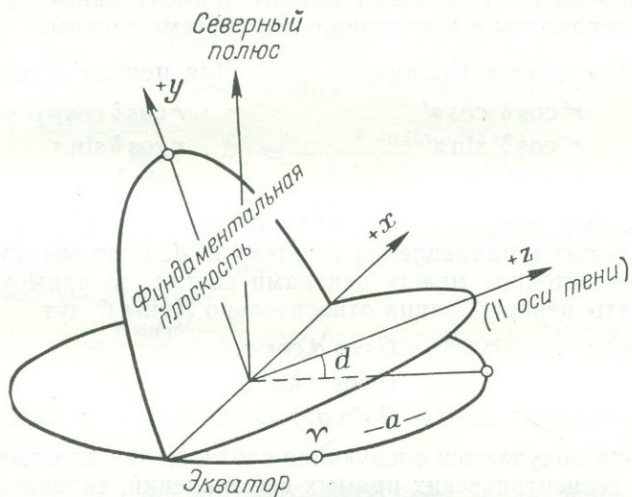


Рис. 3.

полного солнечного затмения, но они пригодны также и для кольцеобразного затмения. Покрытие звезд рассматривается как предельный случай. Те величины, которые определяют мгновенное положение лунной тени относительно центра Земли, называются Бесселевыми элементами. Они не зависят от места наблюдения и публикуются в астрономических Ежегодниках на несколько лет вперед. Для облегчения понимания и общей взаимосвязи мы приведем основные выводы этих величин.

Теория Бесселя исходит из прямоугольной системы координат, отнесенной к центру Земли, в которой плоскость x, y , так

называемая фундаментальная плоскость, перпендикулярна линии, соединяющей центры Солнца и Луны, а следовательно, и к оси конуса тени. Ось z , таким образом, параллельна оси тени; ее положительное направление указывает на Луну (рис. 3). За ось x принимается пересечение фундаментальной плоскости с плоскостью экватора; ее направление к востоку считается положительным. Ось y лежит в меридиане направления тени и положительна к северу.

Ориентировка координатной системы определяется прямым восхождением a и склонением d точки, определяемой на небесной сфере направлением оси тени, параллельной оси z . В последние годы Ежегодники дают вместо прямого восхождения a часовой угол направления тени μ для меридиана Гринвича.

1. Направление a, d оси тени

Пусть в рассматриваемый момент прямоугольные геоцентрические координаты в экваториальной системе таковы:

Для центра Солнца

$$r' \cos \delta' \cos \alpha'$$

$$r' \cos \delta' \sin \alpha'$$

$$r' \sin \delta'$$

Для центра Луны

$$r \cos \delta \cos \alpha$$

$$r \cos \delta \sin \alpha$$

$$r \sin \delta$$

В системе, перенесенной параллельно в центр Луны, центр Солнца лежит в направлении оси тени a, d . Если мы обозначим через G расстояние между центрами светил, то прямоугольные координаты центра Солнца относительно Луны будут

$$G \cos d \cos a,$$

$$G \cos d \sin a,$$

$$G \sin d.$$

Отсюда получаются следующие соотношения для вычисления a и d из геоцентрических прямых восхождений, склонений и расстояний до Солнца и Луны:

$$G \cos d \cos a = r' \cos \delta' \cos \alpha' - r \cos \delta \cos \alpha,$$

$$G \cos d \sin a = r' \cos \delta' \sin \alpha' - r \cos \delta \sin \alpha, \quad (2.1)$$

$$G \sin a = r' \sin \delta' - r \sin \delta.$$

Так как во время затмения a и d мало отличаются от α' и δ' , можно вывести удобные для практики формулы для разностей $a - \alpha'$ и $d - \delta'$. Для этого преобразуем (2.1):

$$G \cos d \cos (a - \alpha') = r' \cos \delta' - r \cos \delta \cos (a - \alpha'),$$

$$G \cos d \sin (a - \alpha') = -r \cos \delta \sin (a - \alpha'), \quad (2.2)$$

$$G \sin d = r' \sin \delta' - r \sin \delta.$$

Из двух первых уравнений (2.2) следует после сокращений

$$b = \frac{r}{r'} \quad \text{и} \quad b' = b \frac{\cos \delta}{\cos \delta'}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{tg}(a - a') = - \frac{b' \sin(\alpha - \alpha')}{1 - b' \cos(\alpha - \alpha')}.$$

Во многих случаях достаточно приближенное выражение

$$a - a' = \frac{b'}{1 - b'} \sin(\alpha' - \alpha) \cdot 206\,265, \quad (2.4)$$

ошибка которого во время затмения не превышает $0''{,}04$ и тем меньше, чем ближе к истинному полдню момент наблюдения.

Обозначив $G/r' = g$, используем первое и третье уравнения (2.2) для вычисления d в следующей форме:

$$g \cos d = \frac{\cos \delta' - b \cos \delta \cos(\alpha - \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha')}, \quad (2.5)$$

$$g \sin d = \sin \delta' - b \sin \delta.$$

Положив

$$\cos(\alpha - \alpha') = \cos(\alpha - \alpha') = 1$$

и помножив как обычно на $\sin \delta'$ и $\cos \delta'$, получаем с ошибкой не более $0''{,}09$

$$\operatorname{tg}(d - \delta') \approx - \frac{b \sin(\delta - \delta')}{1 - b \cos(\delta - \delta')}. \quad (2.6)$$

Подобным же образом из (2.5) путем разложения в ряд и отбрасывания членов, которые ко времени затмения уже не влияют на 3-й десятичный знак секунды дуги, получаем следующую рабочую формулу:

$$d - \delta' = \frac{b \sin(\delta' - \delta)}{1 - b} \cdot 206\,265 - \sin \delta \cos \delta' \frac{b(\alpha - \alpha')^2}{2 \cdot 206\,265}. \quad (2.7)$$

2. Координаты Луны и Солнца в системе фундаментальной плоскости

В момент T , для которого вычислено направление a , d оси тени, а геоцентрические координаты r , α , δ Луны взяты из Ежегодника, прямоугольные координаты Луны в системе фундаментальной плоскости даются следующими формулами:

$$x_{\zeta} = r \cos \delta \sin(\alpha - a),$$

$$y_{\zeta} = r [\sin \delta \cos d - \cos \delta \sin d \cos(\alpha - a)], \quad (2.8)$$

$$z_{\zeta} = r [\sin \delta \sin d + \cos \delta \cos d \cos(\alpha - a)].$$

При вычислении затмений принято все линейные величины выражать в единицах экваториального радиуса Земли. Экваториальный радиус связан с расстоянием до Луны соотношением

$a : r = \sin P_{\zeta}$; горизонтальный экваториальный параллакс P_{ζ} берется из Ежегодника. Следовательно,

$$r = \frac{1}{\sin P_{\zeta}}.$$

Для Солнца координаты x , y такие же, как и для Луны; это координаты точки пересечения оси тени с фундаментальной плоскостью. При вычислении координат пункта наблюдения изменения величин x и y со временем играют большую роль. Они

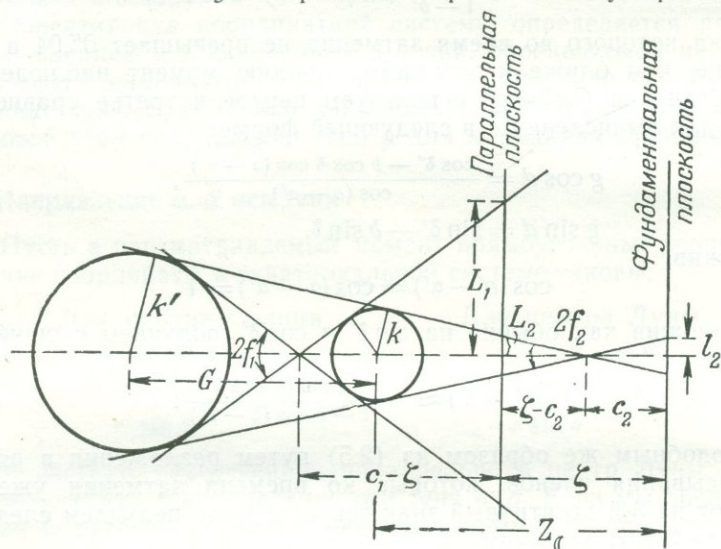


Рис. 4. Конусы тени и полутени.

получаются дифференцированием формул (2.8) или численным дифференцированием. Изменения x и y также принадлежат к элементам затмения и могут быть взяты (для интервала времени в 1 мин) из Ежегодников.

3. Размеры конуса тени

На рис. 4 приняты следующие обозначения:

- k' , k — радиус Солнца и Луны соответственно,
- G — расстояние от Солнца до Луны,
- c_1 , c_2 — расстояния вершин конуса полутени и тени от фундаментальной плоскости,
- f_1 , f_2 — углы при вершинах конусов полутени и тени.
- l_1 , l_2 — радиусы кругов полутени и тени на фундаментальной плоскости,
- L_1 , L_2 — радиусы кругов полутени и тени на параллельной ей плоскости в пункте наблюдения.

Индекс 1 относится к полутени, индекс 2 — к тени:

$$\sin f_1 = \frac{k' + k}{G}, \quad \sin f_2 = \frac{k' - k}{G}; \quad (2.9)$$

$$c_1 = z_{\zeta} + \frac{k}{\sin f_1}, \quad c_2 = z_{\zeta} - \frac{k}{\sin f_2}; \quad (2.10)$$

$$l = c \operatorname{tg} f, \quad l_1 = z_{\zeta} \operatorname{tg} f_1 + \frac{k}{\cos f_1}, \quad l_2 = z_{\zeta} \operatorname{tg} f_2 - \frac{k}{\cos f_2}. \quad (2.11)$$

Мы вводим также радиусы полутени и тени и в параллельной плоскости, хотя они и не принадлежат к Бесселевым элементам вследствие их зависимости от ζ — расстояния пункта наблюдения от фундаментальной плоскости

$$L_1 = l_1 - \zeta \operatorname{tg} f_1, \quad L_2 = l_2 - \zeta \operatorname{tg} f_2. \quad (2.12)$$

Таблица 1

а) Конусы тени и полутени (ось, радиусы и образующие углы)

Вс. вр.	μ	$\lg \sin d$	$\lg \cos d$	l_1	l_2
12 ^h 20 ^m	4°08'40",1	9,595 300	9,963 404	0,540 042	—0,0058 454
30	6 38 39,7	294	405	61	58 267
40	9 08 39,3	287	406	79	58 087
50	11 38 38,9	280	408	96	57 914
13 00	14 08 38,5	273	409	113	57 747
10	16 38 38,1	267	410	129	57 587
20	19 08 37,8	261	411	144	57 433

$$\operatorname{tg} f_1 = 0,004 599$$

$$\operatorname{tg} f_2 = 0,004 576$$

б) Сечение оси тени фундаментальной плоскостью и изменения в минуту

Вс. вр. 1)	x	y	Вс. вр. 1)	$\lg x'$	$\lg y'$
12 ^h 20 ^m	—0,014 185	+0,623 369	10 ^h 0 ^m	7,96 493	7,16 567п
30	+0,078 045	0,608 566	11 0	493	16 766
40	0,170 273	0,593 752	12 0	490	16 957
50	0,262 498	0,578 927	13 0	483	17 145
13 00	0,354 719	0,564 092	14 0	472	17 327
10	0,446 938	0,549 246	15 0	457	17 505
20	+0,539 153	+0,534 389	16 0	440	17 670п

$$\mu' = +0,00436314 \text{ рад/мин}$$

1) С 1960 г. бесселевы элементы, как и эфемериды Солнца и Луны, даются в эфемеридном времени. Об учете разности между эфемеридным временем и всемирным временем используемым при наблюдениях, см. гл. IV.

При полном солнечном затмении L_2 всегда отрицательно, так как образующие конуса тени в этом случае пересекаются ниже поверхности земли и $c_2 - \zeta < 0$.

В таблице 1 (стр. 41) мы даем в качестве примера элементы Бесселя для полного солнечного затмения 30 июня 1954 г. Значения взяты из *Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch* за 1954 г.

Вследствие быстрого изменения x и y при средней скорости тени около 1000 м/сек геодезические определения требуют весьма точного перевода эфемеридного времени во всемирное

§ 2. Постоянные затмения, зависящие от пункта наблюдения

1. Координаты пункта наблюдения

Прямоугольные координаты ξ , η , ζ пункта наблюдения в системе фундаментальной плоскости получаются непосредственно из формул преобразования (2.8), если заменить в их правой части геоцентрические координаты Луны соответствующими величинами для пункта наблюдения, т. е. расстояние до Луны заменить геоцентрическим расстоянием пункта ρ , склонение δ — геоцентрической широтой φ' ; разность прямых восхождений $(\alpha - a)$ — местным часовым углом h оси тени. В результате получатся следующие уравнения, в которых экваториальный радиус Земли принят за единицу длины:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \varphi' \sin h, \\ \eta &= \rho (\sin \varphi' \cos d - \cos \varphi' \sin d \cos h), \\ \zeta &= \rho (\sin \varphi' \sin d - \cos \varphi' \cos d \cos h).\end{aligned}\quad (2.13)$$

При исследовании, излагаемых в настоящей книге, применялись бесселевы элементы затмения, данные еще по всемирному времени. Поэтому здесь

$$h = \mu - \lambda \quad (\text{до 1959 г. включительно})$$

— разность между гринвичским часовым углом оси тени и геоцентрической долготой пункта наблюдения λ , считаемой положительной к западу. С 1960 г. элементы солнечных затмений публикуются Ежегодниками в эфемеридном времени. Гринвичский часовой угол оси тени μ отсчитывается от «эфемеридного меридиана», который проходит на 1,0027 ΔT восточнее географического меридиана Гринвича ($\lambda = 0$). Поэтому в координатную систему, ориентированную по эфемеридному времени, пункт наблюдения вводится теперь с

$$h = \mu - \lambda - 1,0027 \Delta T.$$

В гл. V мы подробнее остановимся на разности времен ΔT .

Для практического применения формул (2.13) φ' и ρ выражают через широту φ и эксцентриситет земного эллипсоида ($e^2 = 2\alpha - \alpha^2$; $\alpha = 1/297$). Для этого делают следующую подстановку:

$$\begin{aligned}\rho \sin \varphi' &= s \sin \varphi, \\ \rho \cos \varphi' &= c \cos \varphi,\end{aligned}\quad (2.14)$$

где вспомогательные величины s и c (см. [1]) представляются следующими выражениями:

$$s = \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.15)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}\xi &= c \cos \varphi \sin h, \\ \eta &= s \sin \varphi \cos d - c \cos \varphi \sin d \cos h, \\ \zeta &= s \sin \varphi \sin d + c \cos \varphi \cos d \cos h.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Таблицы натуральных значений s и c (с шестью знаками, через 1°) приводятся в *Astronomical Ephemeris* [2]. Для учета высоты пункта наблюдения H ее следует прибавить к натуральным значениям s и c , выразив в единицах большой полуоси земного эллипсоида.

Таблица из *Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch* [3] (по 1957), которая дана в конце главы, содержит логарифмы s и c с семью десятичными знаками. Высота пункта наблюдения может быть учтена в этом случае по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\lg(\rho \sin \varphi') &= \lg \sin \varphi + \lg s + f \cdot H, \\ \lg(\rho \cos \varphi') &= \lg \cos \varphi + \lg c + g \cdot H.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Здесь высота H выражена в метрах; коэффициенты f и g (в единицах седьмого десятичного знака) взяты из приведенной ниже таблицы, заимствованной нами из *Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch*.

Таблица 2

φ	f	g	φ	f	g
$\pm 0^\circ$	0,6855	0,6809	$\pm 40^\circ$	0,6845	0,6799
10	0,6854	0,6808	50	0,6841	0,6795
20	0,6852	0,6806	60	0,6838	0,6792
30	0,6849	0,6803	70	0,6835	0,6789
± 40	0,6845	0,6799	± 80	0,6833	0,6787

Высота пункта наблюдения над эллипсоидом складывается из непосредственно измеряемой высоты над уровнем моря и косвенно определяемого отклонения геоида от эллипсоида. К этой высоте добавляется еще поправка Δh , которая учитывает влияние астрономической рефракции (см. § 3). Числовой пример вычисления координат пункта дан в § 5 гл. IX.

Изменения ξ , η , ζ со временем зависят преимущественно от вращения Земли и в меньшей степени — от изменения прямого восхождения перемещающейся в пространстве оси тени. Изменения склонения оси тени за небольшой промежуток времени столь малы, что ими можно пренебречь. Дифференцируя (2.16), получаем

$$\begin{aligned}\xi' &= \mu' c \cos \varphi \cos h, \\ \eta' &= \mu' \xi \sin d, \\ \zeta' &= -\mu' \xi \cos d.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Для часового угла μ как разности звездного времени θ и прямого восхождения оси тени a имеем

$$\mu' = \frac{d\theta}{dt} - \frac{da}{dt}.$$

За 1 мин изменение будет равно

$$\mu' = 0,004375 - \frac{da}{dt}.$$

При полном солнечном затмении 1954 г. было $\frac{da}{dt} = 11 \cdot 10^{-6}$ и соответственно данным *Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch* за 1954 г.

$$\begin{aligned}\xi' &= [7,6398 - 10] c \cos \varphi \cos h, \\ \eta' &= [7,6398 - 10] \xi \sin d, \\ \zeta' &= [7,6398 - 10] \xi \cos d.\end{aligned}$$

2. Положение наблюдателя относительно оси тени и условия контактов

В момент, когда наблюдается внешний или внутренний контакт краев Солнца и Луны, пункт наблюдения находится на поверхности одного из конусов (полутени или тени). Необходимым условием для этого является

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = L^2,\tag{2.19}$$

где для L согласно (2.12) при 1-м и 4-м контактах следует брать значение L_1 , а при 2-м и 3-м контактах — значение L_2 . Уравнение (2.19) дает возможность заранее вычислить моменты

контактов, если координаты оси тени и пункта наблюдения даны в функции времени (см. § 4).

Условием того, что пункт наблюдения лежит на оси конуса тени, а тем самым на центральной линии затмения, является

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = 0 \quad \text{или} \quad x = \xi, \quad y = \eta.$$

Для каждого другого момента времени фаза определяется тем, что положение оси тени относительно пункта наблюдения в фундаментальной плоскости (или в параллельной ей плоскости) выражается через полярные координаты m, M . Угол направления M отсчитывается положительным от севера ($+y$) к востоку ($+x$) до прямой, соединяющей пункт наблюдения с осью тени. Следовательно, имеют место следующие соотношения:

$$m \sin M = x - \xi; \quad m \cos M = y - \eta, \quad (2.20)$$

$$m^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad (2.21)$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{x - \xi}{y - \eta}. \quad (2.22)$$

При обработке наблюдений, в особенности для измерения полученных фотографическим путем солнечных серпов (гл. IX), весьма существенно учитывать, что угол направления M на небе является позиционным углом центров светил (который отсчитывается также от севера через восток, но против часовой стрелки) и что отношение сферического расстояния d центров Солнца и Луны к расстоянию m практически постоянно в течение короткого времени наблюдения. В § 6 мы подробнее остановимся на этих соотношениях, позволяющих перенести на фундаментальную плоскость результаты наблюдений для дальнейшей численной обработки.

Если величины x', y', ξ', η' вычислены для момента T , то из соотношений

$$\begin{aligned} n \sin N &= x' - \xi', \\ n \cos N &= y' - \eta' \end{aligned} \quad (2.23)$$

получаем вектор скорости n, N — движения тени относительно пункта наблюдения (в фундаментальной или параллельной ей плоскости). Величина n выражается в долях земного радиуса, угол направления N считается положительным от севера к востоку.

Вектор скорости на поверхности Земли находится с учетом наклона плоскости горизонта к фундаментальной плоскости. Он может быть найден и непосредственно из движения тени по поверхности Земли, когда точки пересечения оси тени с эллипсоидом (центральная линия), как это и бывает в большинстве случаев, вычислены заранее приблизительно через минутные интервалы (ср. гл. VII, стр. 146).

При обработке кинокадров с изображениями солнечного серпа, следующих один за другим через доли секунды, практически поступают так: величины x , y , z , а отсюда и m , M , n , N строго вычисляются для равноотстоящих моментов времени (например, через минутные интервалы), а затем интерполируются на каждый момент наблюдения.

§ 3. Учет астрономической рефракции при покрытиях и солнечных затмениях

Предположение, что наблюдатель при регистрации контакта солнечного и лунного краев или покрытия звезды находится на поверхности круглого конуса или цилиндра, является не вполне строгим из-за рефракции. Световой луч, идущий от Солнца или

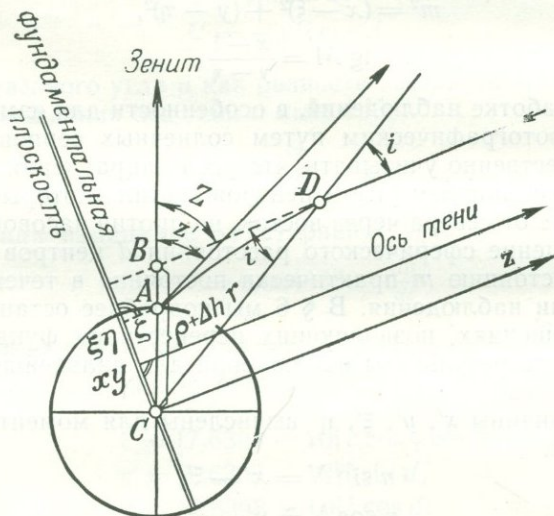


Рис. 5. Рефракция при солнечном затмении и покрытии звезды.

звезды, касается Луны и в точке D (рис. 5) входит в земную атмосферу; здесь вследствие преломления он все более и более поворачивается к центру Земли. В точке A луч попадает на земную поверхность, где и наблюдается контакт. Без влияния рефракции контакт наблюдался бы в точке B , где продолжение прямолинейного пути света встречает вертикаль точки A . Влияние рефракции учитывается тем, что в вычислениях вводится высота пункта наблюдения, увеличенная на $AB = \Delta h$.

Для вывода поправки за высоту Δh исходят из того, что для любой точки пути светового луча произведение $n \cdot r \cdot \sin i$ по-

стоянно; здесь n — показатель преломления воздуха в соответствующей точке, r — расстояние от центра Земли, а i — зенитное расстояние светового луча. Применяв это условие к особым точкам D ($n = 1$) и A ($n = n_0$, $r = \rho$, $i = Z'$), получим

$$r \sin i = \rho n_0 \sin Z'.$$

Из треугольника CBD имеем

$$r \sin i = (\rho + \Delta h) \sin Z,$$

откуда

$$1 + \frac{\Delta h}{\rho} = n_0 \frac{\sin Z'}{\sin Z}. \quad (2.24)$$

Положив

$$Z' = Z - \Delta Z,$$

имеем

$$\frac{\Delta h}{\rho} = (n_0 - 1) - \frac{\Delta Z}{3438} \operatorname{ctg} Z. \quad (2.25)$$

Для n_0 берется среднее значение. Де Балль [4] полагает $n_0 = 1,00029162$. Величина ΔZ берется из таблиц рефракции. С этими данными вычислены значения следующей таблицы, дающей представление о величине поправок Δh за высоту.

Таблица 3

Поправки высоты за рефракцию (в метрах)

Z	ΔZ	Δh	Z	ΔZ	Δh
70°	2'37"	91	75°	3'31"	106
71	2 45	92	76	3 46	112
72	2 55	94	77	4 04	119
73	3 06	97	78	4 24	127
74	3 18	101	79	4 47	135
75	3 31	106	80	5 15	145

$$n_0 = 1,00029162; \quad \Delta Z = \text{средняя рефракция } Z' - Z.$$

Так как согласно уравнению (2.13) ζ весьма близко к $\cos Z$, то в (2.25) можно также ввести ζ в качестве аргумента. Шовенэ [5] дает таблицу поправок за масштаб $\lg\left(1 + \frac{\Delta h}{\rho}\right)$, который следует ввести для учета рефракции в логарифмы ξ , η и ζ . Она составлена по аргументу $\lg \zeta$ для Бесселевых значений ΔZ и для $n_0 = 1,0002800$. Для наглядности данные этой таблицы приведены на рис. 6 в виде графика.

При наблюдениях покрытий и солнечных затмений с электронными приборами рефракция должна учитываться по возмож-

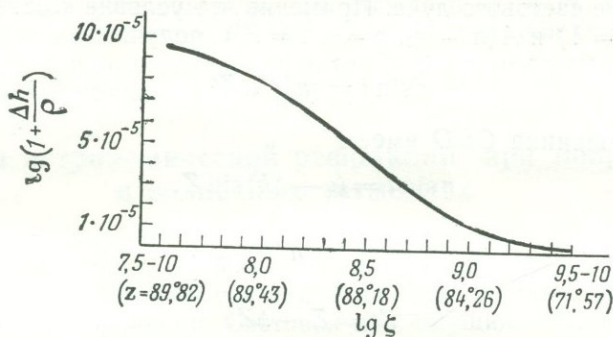


Рис. 6. Поправка масштаба за астрономическую рефракцию; $n_0 = 1,0002800$ (по Шовенэ).

ности всегда, при наблюдениях обычными средствами — лишь в том случае, если высота менее 30° .

§ 4. Вычисление моментов и позиционного угла контактов для заданного пункта

При наблюдении контакта расстояние пункта наблюдения от оси тени равно радиусу L одной из двух окружностей, по которым плоскость, проходящая через этот пункт и параллельная фундаментальной плоскости, пересекает конус полутени или тени. Для момента контакта T и позиционного угла Q точки контакта имеем уравнения

$$\begin{aligned} L \sin Q &= x - \xi, \\ L \cos Q &= y - \eta, \\ L &= l - \zeta \operatorname{tg} f. \end{aligned} \quad (2.26)$$

С помощью мало отличающегося от T приближенного значения T_0 и соотношения $T = T_0 + \tau$ можно найти T последовательными приближениями, если пренебречь незначительным изменением L за короткий интервал τ ; с помощью вычисленных согласно § 1 и 2 величин x' , y' , ξ' , η' имеем

$$\begin{aligned} L \sin Q &= (x - \xi) + (x' - \xi') \tau, \\ L \cos Q &= (y - \eta) + (y' - \eta') \tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь x , y , ξ , η вычисляются для момента T_0 ; для этого же момента времени величины m , M , n , N удовлетворяют следую-

щим уравнениям

$$\begin{aligned} m \sin M &= x - \xi, & n \sin N &= x' - \xi', \\ m \cos M &= y - \eta, & n \cos N &= y' - \eta'. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тогда из (2.27) получим

$$\begin{aligned} L \sin Q &= m \sin M + n \sin N \cdot \tau, \\ L \cos Q &= m \cos M + n \cos N \cdot \tau. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Умножая первое из уравнений (2.29) на $\cos N$, а второе на $\sin N$ и затем соответственно на $\sin N$ и $\cos N$, получаем вычитанием, или соответственно сложением, следующие соотношения, где для краткости положено $Q - N = \psi$:

$$\begin{aligned} L \sin \psi &= m \sin(M - N), \\ L \cos \psi &= m \cos(M - N) + n\tau; \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\sin \psi = \frac{m}{L} \sin(M - N), \quad (2.31)$$

$$\tau = -\frac{m}{n} \cos(M - N) + \frac{L}{n} \cos \psi, \quad (2.32)$$

$$Q = N + \psi. \quad (2.33)$$

Учитывая (2.31), уравнение для τ можно записать в виде

$$\tau = \frac{m \sin(M - N - \psi)}{n \sin \psi}. \quad (2.34)$$

Последняя формула удобна во многих случаях; однако для малых значений ψ она неточна, и тогда следует использовать формулу (2.32). Часто применяется «американский» метод вычисления. Если пользоваться таблицами из *American Ephemeris*, то для величин, не зависящих от пункта наблюдения, этот метод несколько удобнее, чем вычисление по Бесселю. *American Ephemeris* дает в приложении пример подобного вычисления [6]. Если вычисление производилось в эфемеридном времени, то результат по всемирному времени получается вычитанием из вычисленных моментов контактов поправки ΔT (ср. гл. V, § 5, разд. 3).

§ 5. Максимальная фаза и середина полного затмения для заданного пункта

Затмение достигает максимальной фазы в данном пункте, когда последний глубже всего погрузился в тень, т. е. когда его расстояние от края тени $L - m$ принимает наибольшее значение. Для этого момента времени

$$\frac{d(L - m)}{dt} = 0, \quad (2.35)$$

Из (2.21) имеем

$$m \frac{dm}{dt} = (x - \xi)(x' - \xi') + (y - \eta)(y' - \eta') \quad (2.36)$$

и, принимая во внимание (2.20),

$$\frac{dm}{dt} = (x' - \xi') \sin M + (y' - \eta') \cos M. \quad (2.37)$$

Из (2.12) получаем

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dl}{dt} - \operatorname{tg} f \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d \operatorname{tg} f}{dt}.$$

Так как $\operatorname{tg} f$ не изменяется заметным образом во время затмения, третий член в правой части можно отбросить. Тогда, если обозначить позиционный угол максимальной фазы через Q ,

$$\frac{d(L - m)}{dt} = l' - \zeta' \operatorname{tg} f - (x' - \xi') \sin Q - (y' - \eta') \cos Q = 0. \quad (2.38)$$

Как можно видеть из таблицы элементов затмения, приведенной в качестве примера в § 1, изменения радиуса круга тени много меньше изменений x и y . При решении уравнения (2.38) методом итерации, когда входящие в уравнение величины вычисляются в непосредственной близости от искомого момента времени, можно, не задумываясь, положить равными нулю два первых члена в правой части. Тогда условие наступления максимальной фазы принимает следующую простую формулу:

$$(x' - \xi') \sin Q + (y' - \eta') \cos Q = 0, \quad (2.39)$$

или, вводя N согласно (2.23),

$$\cos(Q - N) = 0.$$

Это выражение означает, что в момент наибольшей фазы направление от пункта наблюдения к оси тени перпендикулярно к направлению относительного движения тени. Искомый момент

$$T_{\max} = T + \tau_{\max}$$

находится из величин M , N , m , n , вычисленных для момента T путем последовательных приближений так же, как это было показано в § 4 для момента контактов. Нужно лишь положить во втором уравнении (2.30)

$$\cos \psi = \cos(Q - N) = 0;$$

тогда

$$\tau_{\max} = -\frac{m}{n} \cos(M - N). \quad (2.40)$$

Если заменить L в (2.30) переменной величиной Δ , из этих уравнений непосредственно получается момент минимума Δ ,

а именно

$$\Delta^2 = m^2 \sin^2(M - N) + [m \cos(M - N) + n\tau_{\max}]^2.$$

Поскольку N можно считать практически постоянным, правая часть будет минимальной, когда 2-й член будет равен нулю. Отсюда получается выражение для τ_{\max} , как в (2.40).

Моментом середины полной фазы считается среднее арифметическое из моментов 3-го и 4-го контактов

$$T_c = \frac{1}{2}(T_2 + T_3).$$

Если вычислить момент максимальной фазы по (2.40) из действительных для середины полной фазы значений M , N , m , n , то разность

$$T_{\max} - T_c = -\frac{m}{n} \cos(M - N)_{T=T_c}.$$

При малом промежутке времени между 2-м и 3-м контактами эта разность достигает лишь нескольких сотых секунды. Поэтому в большинстве случаев не делают разницы между максимальной фазой и серединой полной фазы.

§ 6. Сферическое расстояние между центрами светил и его позиционный угол

В заключение остановимся еще на одной особенности метода Бесселя, который имеет значение при использовании наблюдений солнечного затмения.

Существует простая связь между наблюдаемыми величинами, выражающими относительное положение центров Солнца и Луны с топоцентрической точки зрения наблюдателя, и величинами, дающими положение оси тени в фундаментальной плоскости по отношению к пункту наблюдения. Рис. 7 поясняет эту взаимосвязь для системы углов и расстояний. Пусть для данного момента

C — центр Земли,

A — пункт наблюдения,

A_1 — его проекция на фундаментальную плоскость,

\odot , \ominus — истинное место Солнца и Луны в пространстве,

S' , M' — проекции центров Солнца и Луны из A на сферу с центром в A_1 ,

Z' — изображение на сфере бесконечно удаленной точки оси тени,

P' — изображение северного полюса,

F_1F — след оси тени на фундаментальной плоскости и на параллельной плоскости, проходящей через A .

Центры Солнца и Луны проектируются от A на большой круг, содержащий подвижную точку Z' оси тени. В плоскости этого большого круга лежат ось тени и пункт наблюдения. Поэтому угол $NA_1F_1 = M$ в фундаментальной плоскости равен углу $P'Z'S'(M')$ на сфере, а следовательно, равен и позиционному углу центра Луны, отсчитываемому от севера по отношению к Z' .

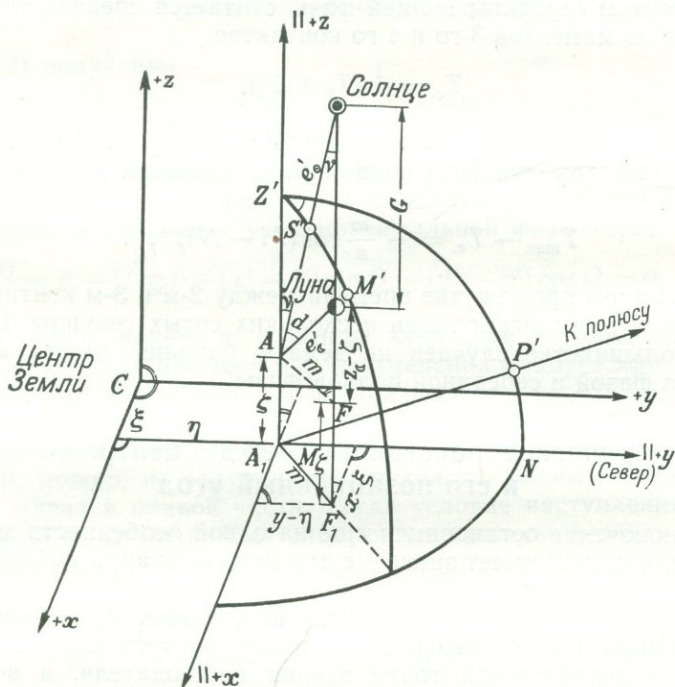


Рис. 7. Расстояние между центрами Луны и Солнца и его позиционный угол на сфере и в проекции на фундаментальную плоскость.

Во время затмения Z' лежит в непосредственной близости от S' . Из треугольника $A \odot C$ находим для угла ν между направлениями на Z' и на S'

$$\sin \nu = \sin d \frac{e' \zeta}{G} \approx \frac{\sin d}{400}. \quad (2.41)$$

Таким образом Z' лежит на дуге, проходящей через S' и M' на расстоянии от S' , равном лишь $1/400$ расстояния $d = M'S'$. Поэтому за время затмения схождение меридианов Z' и S' можно пренебречь. По этой же причине отнесенный к северу позиционный угол дуги $S'M'$ идентичен углу M в фундаментальной плоскости.

Таблица 1

Вспомогательные величины для вычисления геоцентрических координат места на Земле¹⁾

φ	$\lg s$	$\lg c$	φ	$\lg s$	$\lg c$
$\pm 0^\circ$	9,997 0705	0,000 0000	20°	9,997 2413	0,000 1708
	5	4		168	168
1	997 0710	000 0004	21	997 2581	000 1876
	13	14		174	174
2	997 0723	000 0018	22	997 2755	000 2050
	22	22		180	180
3	997 0745	000 0040	23	997 2935	000 2230
	31	31		187	186
4	997 0776	000 0071	24	997 3122	000 2416
	40	40		192	193
5	9,997 0816	0,000 0111	25	9,997 3314	0,000 2609
	49	49		198	198
6	997 0865	000 0160	26	997 3512	000 2807
	57	57		204	204
7	997 0922	000 0217	27	997 3716	000 3011
	66	66		209	209
8	997 0988	000 0283	28	997 3925	000 3220
	75	74		214	214
9	997 1063	000 0357	29	997 4139	000 3434
	83	83		219	219
10	9,997 1146	0,000 0440	30	9,997 4358	0,000 3653
	91	91		223	223
11	997 1237	000 0531	31	997 4581	000 3876
	99	100		227	227
12	997 1336	000 0631	32	997 4808	000 4103
	108	108		232	232
13	997 1444	000 0739	33	997 5040	000 4335
	116	116		235	235
14	997 1560	000 0855	34	997 5275	000 4570
	123	123		238	238
15	9,997 1683	0,000 0978	35	9,997 5513	0,000 4808
	131	131		242	241
16	997 1814	000 1109	36	997 5755	000 5049
	139	139		24	244
17	997 1953	000 1248	37	997 5999	000 5293
	147	146		246	247
18	997 2100	000 1394	38	997 6245	000 5540
	153	154		249	249
19	997 2253	000 1548	39	997 6494	000 5789
	160	160		251	251
			40	9,997 6745	0,000 6040

¹⁾ Взято из Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch, изд-во Г. Браун, Карлсруэ.

Продолжение табл. 4

φ	$\lg s$	$\lg c$	φ	$\lg s$	$\lg c$
$\pm 40^\circ$	9,997 6745	0,000 6040	60°	9,998 1681	0,001 0976
	252	252		220	220
41	997 6997	000 6292	61	998 1901	001 1196
	254	254		215	215
42	997 7251	000 6546	62	998 2116	001 1411
	255	255		210	209
43	997 7506	000 6801	63	998 2326	001 1620
	255	255		204	205
44	997 7761	000 7056	64	998 2530	001 1825
	255	255		199	199
45	9,997 8016	0,000 7311	65	9,998 2729	0,001 2024
	256	256		194	193
46	997 8272	000 7567	66	998 2923	001 2217
	255	255		187	188
47	997 8527	000 7822	67	998 3110	001 2405
	255	255		181	181
48	997 8782	000 8077	68	998 3291	001 2586
	254	254		175	175
49	997 9036	000 8331	69	998 3466	001 2761
	253	252		168	168
50	9,997 9289	0,000 8583	70	9,998 3634	0,001 2929
	251	251		161	161
51	997 9540	000 8834	71	998 3795	001 3090
	249	250		155	154
52	997 9789	000 9084	72	998 3950	001 3244
	247	247		147	147
53	998 0036	000 9331	73	998 4097	001 3391
	245	245		139	140
54	998 0281	000 9576	74	998 4236	001 3531
	242	242		132	132
55	9,998 0523	0,000 9818	75	9,998 4368	0,001 3663
	239	239		125	124
56	998 0762	001 0057	76	998 4493	001 3787
	235	235		116	117
57	998 0997	001 0292	77	998 4609	001 3904
	232	232		108	108
58	998 1229	001 0524	78	998 4717	001 4012
	228	228		101	100
59	998 1457	001 0752	79	998 4818	001 4112
	224	224		92	92
			80	9,998 4910	0,001 4204

$$\rho \sin \varphi' = s \sin \varphi$$

$$s \cos \varphi' = c \cos \varphi$$

скости. На небосводе этот угол отсчитывается по часовой стрелке, в любом случае от севера к востоку.

Так как при контакте дуга, соединяющая центры светил, также проходит через точку контакта, угол $M = Q$ является также и позиционным углом точки контакта, когда все три точки (центры Луны и Солнца и точка контакта) лежат по одну сторону от Z' .

При внутренних контактах полного солнечного затмения точки контакта и центр Луны лежат по разные стороны от Z' . Если бы радиус L_2 круга тени был положительной величиной, то позиционный угол Q точки контакта отличался бы на 180° от позиционного угла центра Луны. Но поскольку для полного солнечного затмения L_2 отрицательно, то Q согласно уравнению (2.26) есть во всех случаях позиционный угол точки контакта.

Из рис. 7 имеем для m

$$m = e'_\odot \sin \nu,$$

и, используя уравнение (2.41),

$$m = \sin d \frac{e'_\zeta e'_\odot}{G}. \quad (2.42)$$

При серповидной фазе отношение d/m практически постоянно. Положив $G = e'_\odot - e'_\zeta$, имеем

$$d = Km, \quad (2.43)$$

$$K \approx \frac{1}{e'_\zeta} - \frac{1}{e'_\odot}. \quad (2.44)$$

Вместо топоцентрических расстояний лучше ввести горизонтальный экваториальный параллакс (2.45) или расстояния от фундаментальной плоскости (2.46). Тогда из (2.44) или с помощью рис. 7

$$K \approx \sin P_\zeta (1 + \zeta \sin P_\zeta) - \sin P_\odot. \quad (2.45)$$

или

$$K \approx (z_\zeta - \zeta) \frac{z_\odot}{z_\odot - z_\zeta}. \quad (2.46)$$

В дальнейшем мы используем эти соотношения (гл. IX и X) для перенесения наблюдаемых величин на фундаментальную плоскость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III, 1, Stuttgart, 1939, S. 465.
2. The Astronomical Ephemeris 1960, London, 1958, Tafel VII, S. 246.
3. Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch, Herausgeg. vom Astronomischen Recheninstitut Heidelberg, Karlsruhe, 1950—1957.
4. De Ball, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Leipzig, 1912.
5. Chauvenet W., Manual of spherical and practical Astronomy, Bd. 1, London, 1885, S. 517.
6. The American Ephemeris 1947, Washington, 1945, S. 612—613 u. a.

ПАРАЛЛАКС ЛУНЫ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА КООРДИНАТЫ

§ 1. Идея использования параллакса для решения геодезических задач

Поскольку радиус Земли не пренебрежимо мал по сравнению с расстояниями в солнечной системе, то направления, под которыми некоторое тело этой системы видно из двух пунктов земной поверхности, непараллельны. Если взять с поверхности Земли направление на какую-либо точку небесной сферы, связанную с неподвижными звездами, то это направление вследствие вращения Земли будет перемещаться в пространстве параллельно самому себе. Для достаточно же близких объектов направления на них изменяются в зависимости от места наблюдения и фазы вращения Земли (часового угла). Это явление называется поэтому *суточным параллаксом*. В случае звезд имеет значение лишь *годовой параллакс*, вызываемый движением Земли по ее орбите.

Чтобы можно было сравнивать между собой наблюдаемые направления на небесные тела (*топоцентрические направления*), их приводят с помощью вычислений к координатной системе, не зависящей от суточного вращения, центр которой выбран в центре Земли, а оси сохраняют свое направление в пространстве. Направления на небесные тела в этой системе определяют их геоцентрические положения. Приводимые в Ежегодниках эфемериды Солнца, Луны и планет дают геоцентрические положения; они определяют направления, под которыми эти небесные тела были бы видны из центра Земли.

В соответствии с изложенным выше под суточным параллаксом понимают различие между топоцентрическим и соответствующим ему геоцентрическим направлениями. Безотносительно к какой-либо координатной системе это есть угол, под которым видно расстояние от пункта наблюдения до центра Земли. Этот угол может достигать в случае Луны величины более 1° (до $61'32''$), а в случае Солнца только $8'',9$.

Для наблюдателей, находящихся на двух противоположных точках земной поверхности, параллактическое смещение Луны относительно звезд может доходить до 2° , т. е. почти до четырех диаметров Луны. Параллакс Луны столь значителен, что для его определения необходимо с достаточной точностью знать расстояние пункта наблюдения до центра Земли (его геоцентриче-

ские координаты) или, в случае известного расстояния до Луны, высоту над принятым референц-эллипсоидом.

Параллаксы, выводимые только из направлений и расстояний, называются *тригонометрическими*. С другой стороны, по соотношениям, получаемым из закона тяготения, можно определить расстояние Луны от Земли в единицах экваториального радиуса Земли точнее, чем это возможно в настоящее время тригонометрическим путем. При этом надо иметь в виду, что эти так называемые *динамические параллаксы* (ср. § 9) относятся к центру тяжести системы обоих тел. Вытекающая отсюда возможность для геодезии состоит в решении обычной задачи косвенного измерения расстояний, поскольку дело идет об определении неизвестного базиса на Земле из известного расстояния до Луны путем предельно точного измерения параллактического угла. Поэтому в случае широкой наблюдательной программы необходимо точное знание движения Луны, и тем самым геодезическая проблема тесно связывается с важнейшей задачей небесной механики.

В этой главе мы сначала познакомим с формулами вычисления параллакса, которые применяются в астрономии при переходе от топоцентрических координат к геоцентрическим и обратно. Для этого должно быть известно положение пункта наблюдения относительно центра Земли. Оно задается обычно астрономическими долготой и широтой и высотой над уровнем моря. Строго говоря, эти величины должны быть перенесены на эллипсоид, однозначно определенный относительно тела Земли. В большинстве случаев, вследствие того что отклонения отвесной линии и превышения над геоидом неизвестны, астрономические координаты приводятся к земному эллипсоиду неисправленными. Это вполне допустимо, если речь идет не о Луне или объектах, еще более близких к Земле.

Здесь и в дальнейшем мы будем исходить из того, что положение наблюдателя дано относительно некоторого определенного эллипсоида вращения, центр которого совпадает с центром Земли, а ось — с осью вращения Земли. В одной из последующих глав параллакс будет представлен как функция известных элементов орбиты Луны и неизвестных геоцентрических координат пункта наблюдения, с тем чтобы из наблюденных параллаксов Луны определить эти неизвестные координаты.

§ 2. Зависимость параллакса от зенитного расстояния светила

Мы определили параллакс как угол, под которым виден с небесного тела геоцентрический радиус-вектор точки наблюдения $OC = \rho$. Если рассматривать шарообразную Землю, то парал-

лактическое изменение направления будет всегда происходить в вертикальной плоскости светила, и параллакс влияет в этом случае только на его зенитное расстояние. Если же рассматривать Землю как сфероид, то линия, проведенная из центра Земли к точке наблюдения, при своем продолжении пересечет небесную сферу в точке Z' , которую называют геоцентрическим зенитом и которая, вообще говоря, не совпадает с точкой, определяемой отвесной линией и называемой астрономическим зенитом.

Для эллипсоида вращения (рис. 8) точкой Z указано направление отвесной линии, которое совпадает с нормалью к эллипсоиду при отсутствии уклонения отвеса. В этом случае Z и Z' расположены в одной меридиональной плоскости. Угол $Z'CA = \varphi'$ называют геоцентрической широтой места O . Геоцентрические долготы определяются плоскостями, которые проходят через земную ось и заданную точку на земной поверхности. Одна из этих плоскостей (гринвичская) служит нуль-пунктом для счета долгот. Третьей координатой является геоцентрический радиус-вектор ρ . Так устанавливается координатная система, независимая от направления отвесной линии.

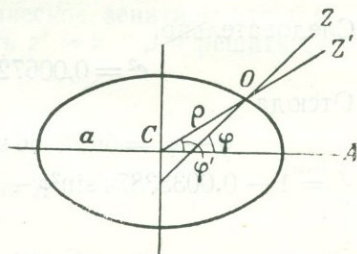


Рис. 8.

Поскольку параллактические смещения происходят в плоскостях, содержащих геоцентрический зенит, целесообразно при вычислениях исходить из этого обстоятельства. Если геодезические координаты места наблюдения на эллипсоиде известны, то переход к геоцентрическим координатам может быть сделан по следующим формулам [1]:

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - m}{1 + m} \operatorname{tg} \varphi,$$

где

$$m = \frac{e^2}{2 - e^2};$$

$$\rho = a \sqrt{\frac{1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

или, разлагая в степенной ряд,

$$(\varphi - \varphi')'' = 206\,265 \left(m \sin 2\varphi - \frac{m^2}{2} \sin 4\varphi + \frac{m^3}{3} \sin 6\varphi - \dots \right). \quad (3.1)$$

$$\rho = a \left[1 - \frac{1}{2} e^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} e^4 \left(\frac{5}{2} - 3e^2 \right) \sin^4 \varphi - \frac{13}{16} e^6 \sin^6 \varphi + \text{чл. } e^8 \dots \right]. \quad (3.2)$$

Для разности широт из (3.1) следует

$$\Delta\varphi' = \Delta\varphi(1 - e^2 \cos 2\varphi) + \text{чл. } e^4.$$

В астрономических справочниках $\varphi - \varphi'$ и $\lg(\rho/a)$ табулируются по аргументу φ [2]. Разность $\varphi - \varphi'$ достигает наибольшего значения $11',5$ при $\varphi = 45^\circ$. На эту величину геоцентрический зенит максимально отходит от зенита, определяемого нормалью к эллипсоиду. Для международного эллипсоида принимается

$$a = 6\,378\,388 \text{ м}; \quad \frac{a-b}{a} = 1 : 297.$$

Следовательно,

$$e^2 = 0,00672267; \quad m = 0,00337267.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi' &= 695'', 66 \sin 2\varphi - 1'', 17 \sin 4\varphi + \text{чл. } e^6; \\ \frac{\rho}{a} &= 1 - 0,00333874 \sin^2\varphi - 0,00002802 \sin^4\varphi - \\ &\quad - 0,00000025 \sin^6\varphi + \text{чл. } e^8. \end{aligned}$$

Если пункт наблюдения лежит на высоте H метров над эллипсоидом, то его геоцентрическое расстояние с достаточной точностью равно $\rho + H$, а его геоцентрическая широта

$$\varphi' + \Delta\varphi = \varphi' + \frac{H}{\rho} \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi'. \quad (3.3)$$

Принимая, как обычно, экваториальный радиус Земли за единицу масштаба для радиуса-вектора пункта наблюдения, можно ввести в уравнение (3.2) отношение H/a (H и a выражены в метрах). Вместо того чтобы вычислять каждый раз ρ и φ' , во многих случаях можно пользоваться формулами (2.14) и вычисленными по ним таблицами (гл. II, § 2).

Из рис. 9 видно, что топоцентрическое зенитное расстояние z' всегда больше, чем соответствующее ему геоцентрическое зенитное расстояние. Для разности p имеется соотношение (отнесенное к геоцентрическому зениту)

$$\sin p = \sin(z' - z) = \frac{\rho}{\Delta} \sin z'.$$

При $z' = 90^\circ$ параллакс достигает для данного места наблюдения наибольшего значения ρ/Δ , которое называется горизонтальным параллаксом. Максимальное значение параллакса получается на экваторе, при $\rho = a$ и $z' = 90^\circ$. Величина $\sin P = a/\Delta$ называется поэтому экваториальным горизонтальным па-

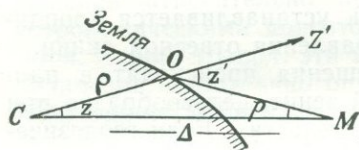


Рис. 9.

раллаксом. Она вытекает из теории Луны и равна обратной величине расстояния до этого светила, выраженного в экваториальных радиусах Земли.

Запишем на будущее:

$$\frac{\rho}{\Delta} = \frac{\rho}{a} \frac{a}{\Delta} = \frac{\rho}{a} \sin P, \quad (3.4)$$

$$\sin p = \frac{\rho}{a} \sin P \sin z'. \quad (3.5)$$

Чтобы выразить ρ через геоцентрическое зенитное расстояние, в правую часть следует подставить $z' = z + p$ и решить относительно p . Тогда получим

$$\operatorname{tg} p = \frac{\frac{\rho}{a} \sin P \sin z}{1 - \frac{\rho}{a} \sin P \cos z}. \quad (3.6)$$

В уравнении (3.4) можно выразить $\sin P$ через постоянную часть

$$\sin P_0 = \frac{a}{\Delta_0}$$

и сходящийся ряд с периодическими членами. В этом выражении Δ_0 обозначает среднее расстояние Луны от Земли. *Постоянная экваториального горизонтального параллакса* для Луны составляет по Ньюкомбу $3422''{,}63$, по Броуну $3422''{,}70$ и по новым определениям [3] $3422''{,}571$. Определение постоянной P_0 издавна пользовалось особым интересом у астрономов. При этом в прошлом чаще всего использовались покрытия звезд и микрометрические измерения расстояний Луны от соседних звезд. В дальнейшем эти методы несколько устарели. Поэтому часто используют разность склонений, полученных на двух обсерваториях с малой разностью долгот, но с большой разностью широт (например Гринвич — Кейптаун). Метод наблюдения солнечных затмений по сравнению с предыдущим методом не давал хороших результатов, ввиду отсутствующей тогда возможности накопления наблюдений кинематографическим путем.

Вывод строгих формул для учета параллакса мы дадим сначала в прямоугольной системе координат, а затем перейдем к экваториальной системе прямых восхождений и склонений. Переход к соответствующим формулам в горизонтальной системе координат (азимут и зенитное расстояние) и в системе эклиптической долготы и широты не вызовет тогда никаких затруднений.

§ 3. Параллакс по прямому восхождению и склонению (геоцентрическое положение считается известным)

Следуя учебнику сферической астрономии Ф. Брюннова, обозначим через α , δ , Δ геоцентрические и через α' , δ' , Δ' топоцентрические значения прямых восхождений, склонений и расстояний до центра лунного диска. Зададим в центре Земли прямоугольную систему координат, ось z которой направлена по земной оси, ось x — в точку весеннего равноденствия, а ось y — в точку экватора с прямым восхождением $+90^\circ$. Параллельным переносом получим в пункте наблюдения вторую систему координат x' , y' , z' , начало которой задается в первой системе геоцентрическими координатами пункта наблюдения. Кроме того, обозначим геоцентрический радиус-вектор через ρ , геоцентрическую широту — φ' и звездное время — θ ; последние могут рассматриваться как склонение и прямое восхождение геоцентрического зенита. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha, & x' &= \Delta' \cos \delta' \cos \alpha', & x - x' &= \rho \cos \varphi' \cos \theta, \\ y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha, & y' &= \Delta' \cos \delta' \sin \alpha', & y - y' &= \rho \cos \varphi' \sin \theta, \\ z &= \Delta \sin \delta, & z' &= \Delta' \sin \delta', & z - z' &= \rho \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Отсюда следуют три уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' &= \Delta \cos \delta \cos \alpha - \rho \cos \varphi' \cos \theta, \\ \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' &= \Delta \cos \delta \sin \alpha - \rho \cos \varphi' \sin \theta, \\ \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta - \rho \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Умножим первое из уравнений (3.7) на $\sin \alpha$, второе на $\cos \alpha$ и, вычитая, получим

$$\Delta' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) = -\rho \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha). \quad (3.8)$$

Аналогично, умножая первое уравнение (3.7) на $\cos \alpha$, второе на $\sin \alpha$ и складывая, получим

$$\Delta' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) = \Delta \cos \delta - \rho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha). \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) получим выражение для параллакса p_α по прямому восхождению

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = -\frac{k_\alpha \sin(\theta - \alpha)}{1 - k_\alpha \cos(\theta - \alpha)} = \operatorname{tg} p_\alpha, \quad (3.10)$$

где

$$k_\alpha = \frac{\rho \cos \varphi'}{\Delta \cos \delta}.$$

Принимая во внимание (3.4), имеем

$$k_{\alpha} = \frac{\rho}{a} \sin P \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta}. \quad (3.11)$$

Для вывода параллакса по склонению положим

$$\cos(\alpha' - \alpha) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2}.$$

Из (3.9), привлекая третье уравнение (3.7), получим

$$\begin{aligned} \Delta' \cos \delta' &= \Delta \cos \delta - \rho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha) + 2\Delta' \cos \delta' \sin^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2}, \\ \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta - \rho \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для дальнейшего преобразования этих уравнений введем вспомогательные углы β и γ

$$\begin{aligned} \beta \cos \gamma &= \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha) - 2 \frac{\Delta'}{\rho} \cos \delta' \sin^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2}, \\ \beta \sin \gamma &= \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Тогда из (3.12) имеем

$$\begin{aligned} \Delta' \cos \delta' &= \Delta \cos \delta - \rho \beta \cos \gamma, \\ \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta - \rho \beta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Умножая соответственно на $\sin \delta$ и $\cos \delta$, получаем из уравнений (3.14)

$$\begin{aligned} \Delta' \sin(\delta' - \delta) &= -\rho \beta \sin(\gamma - \delta), \\ \Delta' \cos(\delta' - \delta) &= \Delta - \rho \beta \cos(\gamma - \delta). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отсюда параллакс по склонению:

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = -\frac{k_{\delta} \sin(\gamma - \delta)}{1 - k_{\delta} \cos(\gamma - \delta)} = \operatorname{tg} P_{(\delta)}, \quad (3.16)$$

где

$$k_{\delta} = \frac{\rho}{\Delta} \beta.$$

Согласно (3.4) и второму уравнению (3.13), можно написать

$$k_{\delta} = \frac{\rho}{a} \sin P \cdot \beta = \frac{\rho}{a} \sin P \frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma}. \quad (3.17)$$

Обе основные формулы для P_{α} и P_{δ} представляются, таким образом, в одинаковом виде. Полезность этого будет показана в дальнейшем. Формулы строги и содержат как геодезические, так и астрономические переменные.

Преобразование вспомогательных углов. Уравнения (3.13) можно привести к форме, более удобной для вычисления β и γ . Для этого преобразуем уравнение (3.8)

$$\begin{aligned} -2 \frac{\Delta'}{\rho} \cos \delta' \sin^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= - \frac{\Delta' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\rho \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} = \\ &= \frac{\cos \varphi' \sin(\theta - \alpha) \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3.13), получим

$$\beta \cos \gamma = \frac{\cos \varphi' \cos(\theta - \alpha) \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} + \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha) \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}.$$

Уравнения (3.13) примут вследствие этого следующий вид:

$$\beta \cos \gamma = \frac{\cos \varphi' \cos\left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}, \quad (3.18)$$

$$\beta \sin \gamma = \sin \varphi'.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right)}, \quad (3.19)$$

$$\beta = \frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma}, \quad (3.20)$$

$$\beta^2 = \sin^2 \varphi' + \frac{\cos^2 \varphi' \cos^2\left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2}}. \quad (3.21)$$

Отношение топоцентрического расстояния к геоцентрическому Δ'/Δ получим путем сложения уравнений (3.14), умноженных соответственно на $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$,

$$\begin{aligned} \Delta' \sin(\gamma - \delta') &= \Delta \sin(\gamma - \delta), \\ \frac{\Delta'}{\Delta} &= \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin(\gamma - \delta')}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

§ 4. Влияние параллакса на другие координатные системы

Выведенные в предыдущем параграфе формулы легко применить к другим координатным системам. Для этого достаточно выразить координаты геоцентрического зенита в новой системе и подставить вместо α и δ соответствующие им новые координаты, принимая во внимание направление их возрастания.

1. Для перехода к *экваториальной системе* часового угла и склонения нужно заменить θ нулем, а α на $-t$. Окончательные формулы содержат часовой угол в виде $\theta - \alpha = t$. В результате имеем

$$\operatorname{tg} p_t = \operatorname{tg}(t' - t) = \frac{k_t \sin t}{1 - k_t \cos t} = -\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha), \quad (3.23)$$

где

$$k_t = \frac{\rho}{a} \frac{\sin P \cos \varphi'}{\cos \delta} = k_\alpha.$$

Для p_δ формулы остаются без изменений.

$$\operatorname{tg} p_\delta = \frac{k_\delta \sin(\delta - \gamma)}{1 - k_\delta \cos(\delta - \gamma)},$$

$$k_\delta = \frac{\rho}{a} \frac{\sin P \sin \varphi'}{\sin \gamma}.$$

Вспомогательный угол γ получается теперь по формуле:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{t' - t}{2}}{\cos \frac{t' + t}{2}}. \quad (3.24)$$

2. В *горизонтальной системе* координат, если принимать земную поверхность за сфероид, на место φ' подставляется высота геоцентрического зенита над горизонтом, равная $90^\circ - (\varphi - \varphi')$, на место t ставится азимут A и на место δ — дополнение зенитного расстояния $90^\circ - z$. Для параллакса в азимуте и в зенитном расстоянии имеем

$$\operatorname{tg}(A' - A) = \frac{k_A \sin A}{1 - k_A \cos A}; \quad k_A = \frac{\rho}{a} \frac{\sin P \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z},$$

$$\operatorname{tg}(z' - z) = \frac{k_z \sin(z - \gamma_z)}{1 - k_z \cos(z - \gamma_z)}; \quad k_z = \frac{\rho}{a} \frac{\sin P \cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma_z},$$

где γ_z — новый вспомогательный угол

$$\operatorname{tg} \gamma_z = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') \cos \frac{A' + A}{2}}{\cos \frac{A' - A}{2}}$$

В случае γ_2 целесообразно отступить от строгой аналогии, и поэтому в качестве угла, соответствующего вспомогательному углу γ , используют его дополнение до 90° .

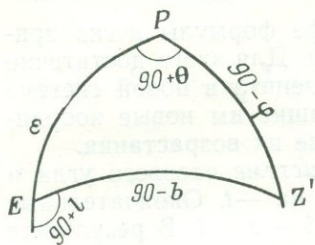


Рис. 10.

Для $\varphi = \varphi'$ вместо ранее выведенного уравнения (3.6) получается

$$\operatorname{tg}(z' - z) = \operatorname{tg} p.$$

3. В *эклиптической системе* координат имеем для долготы λ и широты β полную аналогию с формулами (3.10), (3.11), (3.16), (3.17) и (3.19) — (3.22) для α и δ заменой θ и φ' , определяющих место геоцентрического зенита, соответствующими эклиптическими долготой l и широтой b . Если обозначить через ϵ наклон эклиптики (рис. 10), то

$$\begin{aligned} \sin b &= \cos \epsilon \sin \varphi' - \sin \epsilon \cos \varphi' \sin \theta, \\ \cos l \cos b &= \cos \theta \cos \varphi'. \end{aligned}$$

§ 5. Формулы для параллакса в экваториальной и горизонтальной системах, если даны топоцентрические координаты

Умножив первые два уравнения (3.7) соответственно на $\sin \alpha'$ и $\cos \alpha'$ и сложив их, получим

$$\sin(\alpha' - \alpha) = \frac{\rho}{a} \sin P \frac{\cos \varphi' \sin(\alpha' - \theta)}{\cos \delta}; \quad (3.25a)$$

отсюда

$$\sin(t' - t) = \frac{\rho}{a} \sin P \frac{\cos \varphi' \sin t'}{\cos \delta}. \quad (3.25b)$$

Таким же образом из (3.14) умножением соответственно на $\sin \delta'$ и $\cos \delta'$ получим

$$\sin(\delta' - \delta) = \beta \frac{\rho}{a} \sin P \sin(\delta' - \gamma) = \frac{\rho}{a} \sin P \frac{\sin \varphi' \sin(\delta' - \gamma)}{\sin \gamma}. \quad (3.26)$$

Как и раньше

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{t' - t}{2}}{\cos \frac{t' + t}{2}}.$$

Переход к другим координатным системам может быть произведен аналогично тому, как это было сделано в § 4. Поэтому мы ограничимся выводом формул только для азимута и зенит-

ного расстояния. Для этой цели заменим t на A , δ на $90^\circ - z$, φ' на $90^\circ - (\varphi - \varphi')$ и γ на $90^\circ - \gamma_z$. Тогда

$$\sin(A' - A) = \frac{\rho}{a} \sin P \frac{\sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{\sin z}, \quad (3.27)$$

$$\sin(z' - z) = \frac{\rho}{a} \sin P \frac{\cos(\varphi - \varphi') \sin(z' - \gamma_z)}{\cos \gamma_z}; \quad (3.28)$$

и как раньше

$$\operatorname{tg} \gamma_z = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') \cos \frac{A' + A}{2}}{\cos \frac{A' - A}{2}}.$$

В знаменатели формул (3.25) и (3.27) при вычислениях вместо наблюдаемых значений подставляют геоцентрические значения. Этого приближения для γ и γ_z , а следовательно и для ρ_δ и ρ_z , в большинстве случаев вполне достаточно. При втором приближении получают более точные значения $\alpha' - \alpha$ и $A' - A$.

§ 6. Зависимость видимого радиуса Луны от места наблюдения

Из рис. 11 имеем

$$MT = MT' = \Delta \sin R = \Delta' \sin R',$$

$$MF = \Delta' \sin z' = \Delta \sin z,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \frac{\sin R'}{\sin R} &= \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin z'}{\sin z}, \\ \frac{\sin R'}{\sin R} &= \frac{\sin z \cos(z' - z) + \cos z \sin(z' - z)}{\sin z}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Заменим по уравнению (3.5) величину $\sin(z' - z) = \sin p = \frac{\rho}{a} \sin P \sin z'$ на

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \cos(z' - z) + \frac{\rho}{a} \cos z \sin P \frac{\sin z'}{\sin z},$$

и, используя (3.29), получим

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\cos(z' - z)}{1 - \cos z \frac{\rho}{a} \sin P}. \quad (3.30)$$

Без потери точности вместо отношения синусов можно написать R'/R . Если пренебречь величинами высшего порядка относительно ожидаемого изменения радиуса, то из (3.30), заменяя

$\cos(z' - z) \approx 1$, получим соотношение

$$\frac{R' - R}{R} \approx \cos z \frac{\rho}{a} \sin P.$$

Таким образом, в первом приближении изменение видимого радиуса Луны равно дифференциальному изменению горизонтального параллакса по высоте для центра и края Луны. Оно достигает наибольшего значения $18''$ в геоцентрическом зените.

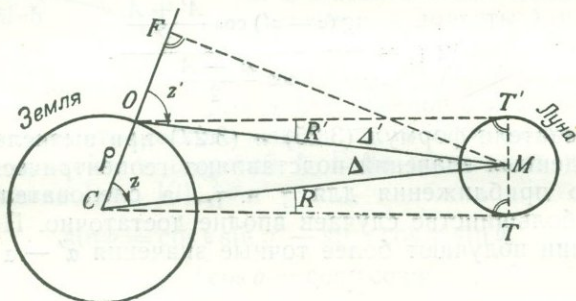


Рис. 11.

В экваториальных координатах из (3.29) и (3.22) получим

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin(\gamma - \delta)}, \quad (3.31)$$

или, если разложить в ряд с наибольшей ошибкой в $0'',0001$,

$$R' - R = R \frac{\delta' - \delta}{206265} \left[\operatorname{ctg}(\delta - \gamma) - \frac{1}{2} \frac{\delta' - \delta}{206265} \right].$$

§ 7. Суточные колебания параллакса Луны на различных широтах

С малой погрешностью, заметной только для Луны, можно записать уравнения (3.10) и (3.16) в более простой форме:

$$\alpha' - \alpha = - \frac{\sin P \cos \varphi' \sin t}{\cos \delta},$$

$$\delta' - \delta = - \sin P \sin \varphi' \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin \gamma}$$

и после исключения вспомогательного угла γ заменой $\operatorname{ctg} \gamma \approx \cos \varphi' \cos t$

$$\delta' - \delta = - \sin P \sin \varphi' \cos \delta + \sin P \cos \varphi' \sin \delta \cos t = p_{\delta I} + p_{\delta II}.$$

Поскольку склонение Луны в течение одного дня меняется мало и, в частности, $\cos \delta$ незначительно отличается от единицы, то

топоцентрические места Луны, согласно этим уравнениям, располагаются достаточно близко по эллипсу. Центр этого эллипса для северных широт лежит к югу от геоцентрического места на $\sin P \sin \varphi' \cos \delta$, а его полуоси равны $\sin P \cos \varphi'$ (с востока на запад) и $\sin P \cos \varphi' \sin \delta$. Легко показать, что параллактические углы ρ_{δ_I} , $\rho_{\delta_{II}}$ и ρ_{α} соответствуют проекциям радиуса Земли на круг склонения Луны ($\rho \sin \varphi'$, $\rho \cos \varphi' \cos t$, $\rho \cos \varphi' \sin t$).

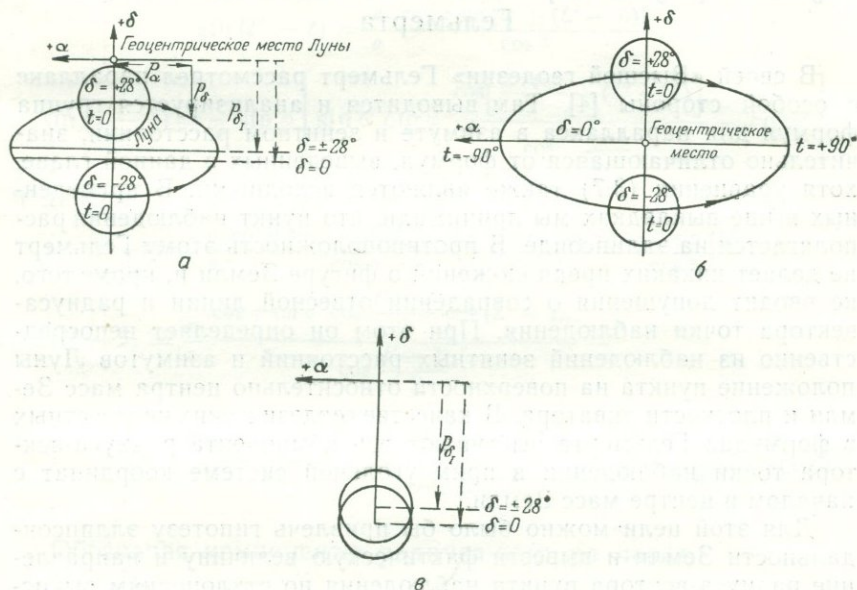


Рис. 12. Суточный период в параллаксе Луны на различных широтах.

Для геодезических целей, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, эти соотношения имеют большое значение. Поэтому для наглядности мы даем в масштабе радиуса Луны эллипсы периодического движения видимого места Луны для некоторых северных широт (рис. 12). Эллипсы соответствуют среднему суточному склонению.

Восточно-западная амплитуда параллактического смещения для данного пункта наблюдения постоянна; напротив, северо-южная амплитуда непрерывно меняется с $\sin \delta$. Кроме того, в небольших пределах меняется расстояние центра эллипса от геоцентрического места Луны.

При $\delta = 0$ эллипс вырождается в большую ось, а при переходе к отрицательным склонениям направление обращения видимого места Луны по эллипсу изменяется на обратное. На полюсе суточный период исчезает совсем.

Перемещение пункта наблюдения параллельно земной оси влияет лишь на составляющую параллакса по склонению p_{δ_1} , не зависящую от часового угла. Гельмерт впервые указал на трудности, возникающие при одновременном определении положения Луны и геоцентрических координат пункта наблюдения.

§ 8. Формулы параллакса из «Высшей геодезии» Гельмерта

В своей «Высшей геодезии» Гельмерт рассмотрел параллакс с особой стороны [4]. Там выводится и анализируется группа формул для параллакса в азимуте и зенитном расстоянии, значительно отличающаяся от формул, выведенных в данной главе, хотя уравнения (3.7) также являются исходными. В приведенных выше выкладках мы принимали, что пункт наблюдения располагается на эллипсоиде. В противоположность этому Гельмерт не делает никаких предположений о фигуре Земли и, кроме того, не вводит допущения о совпадении отвесной линии и радиуса-вектора точки наблюдения. При этом он определяет непосредственно из наблюдений зенитных расстояний и азимутов Луны положение пункта на поверхности относительно центра масс Земли и плоскости экватора. В качестве геодезических неизвестных в формулах Гельмерта выступают три компонента радиуса-вектора точки наблюдения в прямоугольной системе координат с началом в центре масс Земли.

Для этой цели можно было бы привлечь гипотезу эллипсоидальности Земли и вывести фактическую величину и направление радиуса-вектора пункта наблюдения по отклонениям вычисленных в этом предположении параллаксов от наблюдаемых. Этот путь, выгодный в практическом отношении, будет нами в дальнейшем описан при изложении дифференциального метода (гл. XIV). Формулы Гельмерта имеют все же то преимущество, что они ясно показывают некоторые соотношения, важные для практического применения.

1. Влияние параллакса на часовой угол и на склонение

Сравним результаты, полученные Гельмертом на основании более общих положений, с изложенными нами. Прежде всего рассмотрим вывод Гельмертом [5] формул для параллакса в часовом угле и по склонению, которые легко приводятся к уравнениям (3.25) и (3.26). Согласно Гельмерту, обозначим геоцентрические широту и долготу через φ и L , астрономические широту и долготу через B' и L' , радиус-вектор пункта наблюдения через r и расстояние до Луны через e . В координатной системе, опреде-

ляемой направлением отвесной линии, осью Земли и ее экватором, пункт наблюдения задается геоцентрической широтой φ , разностью долгот $L - L'$, отсчитываемых к западу, и, наконец, расстоянием r . Необходимо в (3.25а) заменить α на $-t$, θ на $-(L - L')$ и $\frac{\rho}{a} \sin P$ на $\frac{r}{e}$, чтобы освободиться от ограничивающего допущения, что отвесная линия пересекает земную ось. Тогда

$$\sin(t' - t) = \frac{r}{e} \frac{\cos \varphi \sin [t' + (L' - L)]}{\cos \delta},$$

$$\sin(\delta' - \delta) = \frac{r}{e} \sin \varphi \left[\sin \delta' \operatorname{ctg} \varphi \frac{\cos \left[\frac{t' + t}{2} + (L' - L) \right]}{\cos \frac{t' - t}{2}} - \cos \delta' \right]$$

и далее

$$\sin(t' - t) = \frac{r}{e} \frac{\cos \varphi \sin t' \cos(L' - L)}{\cos \delta} + \frac{r}{e} \frac{\cos \varphi \cos t' \sin(L' - L)}{\cos \delta},$$

$$\begin{aligned} \sin(\delta' - \delta) &= \frac{r}{e} \frac{\cos \varphi \sin \delta' \cos \frac{t' + t}{2} \cos(L' - L)}{\cos \frac{t' - t}{2}} - \\ &\quad - \frac{r}{e} \frac{\cos \varphi \sin \delta' \sin \frac{t' + t}{2} \sin(L' - L)}{\cos \frac{t' - t}{2}} - \frac{r}{e} \sin \varphi \cos \delta'. \end{aligned}$$

Обозначая компоненты радиуса-вектора через

$$R = r \cos \varphi \cos(L' - L), \quad Q = r \cos \varphi \sin(L' - L), \quad P = r \sin \varphi,$$

получаем в соответствии с Гельмертом

$$\sin(t' - t) = \frac{R}{e} \frac{\sin t'}{\cos \delta} + \frac{Q}{e} \frac{\cos t'}{\cos \delta}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \sin(\delta' - \delta) &= \frac{R}{e} \frac{\cos \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \sin \delta' - \frac{Q}{e} \frac{\sin \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \sin \delta' - \frac{P}{e} \cos \delta'. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ради полноты выведем также формулу для отношения расстояний. Она может быть получена из (3.14) путем умножения на $\cos \delta'$ и $\sin \delta'$, с последующим сложением, в следующем виде:

$$\frac{e'}{e} = \cos(\delta' - \delta) - \frac{r}{e} \frac{\cos(\gamma - \delta') \sin \varphi}{\sin \gamma}.$$

Делая преобразования как и выше, это отношение можно записать так:

$$\frac{e'}{e} = \cos(\delta' - \delta) - \frac{R}{e} \frac{\cos \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \cos \delta' + \\ + \frac{Q}{e} \frac{\sin \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \cos \delta' - \frac{P}{e} \sin \delta'. \quad (3.34)$$

2. Влияние параллакса на азимут и на зенитное расстояние

Нам предстоит получить в общем виде систему уравнений, которая строго и полно описывала бы в проекциях явление параллакса. Чтобы получить уравнения для азимута и зенитного расстояния, лежащие в основе рассуждений Гельмерта, заменим в (3.32) и (3.33) t на α , δ на $90^\circ - z$ и представим R , Q и P соответствующими проекциями в горизонтальной системе координат, которая приблизительно устанавливается азимутом α и зенитным расстоянием ζ геоцентрического зенита. Однако для геодезических целей выгоднее выразить изменяющиеся с местом наблюдения различия между направлениями отвесной линии и радиуса-вектора через разности геоцентрических и астрономических долгот и широт подобно тому, как поступают с отклонениями отвеса. Поэтому Гельмерт выразил северо-южную, восточно-западную и вертикальную компоненты через направления, которые определяют оба зенита в экваториальной системе. Из сферического треугольника, образованного этими двумя точками и полюсом, вытекают соотношения, которые для удобства подстановки в (3.32) и (3.33) мы представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} R &= S - q \sin B', \\ Q &= Q, \\ P &= C - q \cos B'. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для сокращения использованы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S &= r \sin(B' - \varphi), \quad Q = r \cos \varphi \sin(L' - L), \\ C &= r \cos(B' - \varphi), \quad q = 2r \cos \varphi \sin^2 \frac{L' - L}{2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Преобразованные строгие формулы здесь не приводятся. Опуская всегда малую величину q и пренебрегая в коэффициентах параллаксом по азимуту, получаем по аналогии с (3.32) и (3.33) следующие выражения, которые содержат дифференциалы, пред-

ставляющие улучшения часового угла и склонения лунных эфемерид:

$$(z' - z^0)'' = 206265 \left[C \frac{\sin z'}{e} - S \frac{\cos z'}{e} \cos a' + Q \frac{\cos z'}{e} \sin a' + \frac{1}{6} C^3 \frac{\sin^3 z'}{e^3} \right] - d\delta \cos p + dt \cos \delta \sin p, \quad (3.37)$$

$$(a' - a^0)'' = 206265 \left[S \frac{\sin a'}{e \sin z} + Q \frac{\cos a'}{e \sin z} + d\delta \frac{\sin p}{\sin z} + dt \cos \delta \frac{\cos p}{\sin z} \right], \quad (3.38)$$

где a^0 и z^0 — вычисленные по лунным таблицам геоцентрические значения, p — параллактический угол; член с C^3 получается из разложения $\sin(z' - z^0)$ в ряд, причем член с C превышает все остальные. Ошибки вследствие упрощения формул доходят вблизи зенита до $0''{,}01$ ($z > 2^\circ$).

Гельмерт показал, что представление параллакса в экваториальной системе, кроме следствий, обстоятельно изложенных в предыдущих параграфах, дает лучшую возможность для решения поставленной задачи.

Наблюдения прямых восхождений и склонений не позволяют установить зависимость между компонентами радиуса Земли, в то время как эта связь может быть получена из наблюдений параллакса по азимуту и по зенитному расстоянию. Это достигается тригонометрическими преобразованиями предшествующих уравнений, причем множители $r \sin \varphi$ и $r \cos \varphi$, содержащиеся в членах с C и S' , отделяются и принимаются за неизвестные. Используя вытекающие из треугольника зенит — полюс — Луна соотношения, получаем для параллакса уравнения Гельмерта в окончательной форме:

$$(z' - z^0)'' = 206265 \left[\frac{r \cos \varphi}{e} (\sin p' \sin t' - \cos p' \cos t' \sin \delta') + \frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta' \cos p' + \frac{Q}{e} \cos z' \sin a' + \frac{1}{6} \frac{C^3}{e^3} \sin^3 z' \right] - d\delta \cos p + dt \cos \delta \sin p, \quad (3.39)$$

$$(a' - a^0)'' = 206265 \left[\frac{r \cos \varphi}{e} \frac{\sin B' \sin a'}{\sin z} - \frac{r \sin \varphi}{e} \frac{\cos \delta' \sin p'}{\sin z} + \frac{Q \cos a'}{e \sin z} \right] + d\delta \frac{\sin p}{\sin z} + dt \cos \delta \frac{\cos p}{\sin z}. \quad (3.40)$$

Как это следует и из предыдущего, величина $\frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta$ в обоих уравнениях связана с одним и тем же множителем $d\delta$. Различие p и p' вследствие параллакса не играет роли. Гельмерт

заканчивает свои исследования заключением, что из наблюдений, произведенных на одном пункте в течение одного дня, можно определить лишь величины $\frac{r \cos \varphi}{e}$, $\left(\frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta - d\delta\right)$, $\frac{Q}{e}$ и dt , по которым можно получить $L' - L$, но не r и φ .

Из методических соображений мы подробно рассмотрели формулы Гельмерта для параллакса по азимуту и по зенитному расстоянию, поскольку визуальные наблюдения зенитных расстояний до настоящего времени еще используются для параллактических определений.

§ 9. Динамический параллакс

Трудности, возникающие при непосредственном определении параллакса Луны тригонометрическим путем (т. е. путем измерения направлений), привели к тому, что еще с времен Лапласа параллакс Луны многократно определялся на основании закона тяготения. Требуемые для этого данные (ускорение силы тяжести на земной поверхности, период обращения Луны и т. д.) известны столь точно, что получаемый динамический параллакс имеет до сих пор преимущество по сравнению с тригонометрическим параллаксом, выводимым из обширных рядов наблюдений положений Луны. Следует отметить одно тонкое отличие получаемых параллаксов: в первом случае параллакс определяется как обратная величина расстояния от Земли до центра тяжести Луны, а в последнем — до геометрической середины ее диска, что, вероятно, не является одним и тем же. Точное значение разности этих параллаксов до настоящего времени неизвестно.

Мы хотим здесь наглядно показать в сильно упрощенном виде существующие зависимости, причем частично будем следовать изложению Гельмерта [6]. На однородной шарообразной Земле с массой M и радиусом a ускорение силы тяжести на уровне моря равно

$$g = \frac{Mk^2}{a^2}. \quad (3.41)$$

Взаимное притяжение Земли и Луны (масса Луны равна m) должно быть равно для кругообразной орбиты Луны с радиусом r центробежному ускорению, соответствующему угловой скорости n_{ζ} в движении Луны и взятому с обратным знаком, так что

$$\frac{(M + m)k^2}{r^2} = rn_{\zeta}^2. \quad (3.42)$$

Если выразить расстояние до Луны r через экваториальный горизонтальный параллакс P и экваториальный радиус a

$$\frac{a}{r} = \sin P \quad \text{или} \quad r = \frac{a}{\sin P}, \quad (3.43)$$

то, исключая k^2 с помощью (3.41), можно получить в первом приближении

$$\sin^3 P = \frac{n_{\zeta}^2 a}{g \left(1 + \frac{m}{M}\right)}. \quad (3.44)$$

Чтобы достичь достаточного для практических целей приближения, следует подставить для ускорения силы тяжести g_a вместо (3.41) выражение

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2} (1 + \epsilon - \delta), \quad (3.45)$$

которое относится к уровенному сфероиду, мало отличающемуся от эллипсоида вращения. При этом δ обозначает так называемое гравитационное сжатие, а ϵ — отношение центробежной силы к силе тяжести для экватора [7].

Уравнение (3.42) сохраняет справедливость и для эллиптической орбиты Луны, только под r следует понимать большую полуось орбиты, а под n — среднюю угловую скорость. Вследствие значительного гравитационного влияния Солнца движение Луны вокруг Земли может быть представлено аналитически лишь сложными периодическими функциями. Если учесть существующие трудности, то для принимаемого здесь приближения достаточно уменьшить взаимное притяжение Земли и Луны в гравитационном поле Солнца на $1/2 rn_e^2$ в среднем за один оборот Луны. Гельмерт (см. [6], стр. 462) дает этому наглядную геометрическую интерпретацию. Эффект этот принимался во внимание еще Ньютоном. Остальные возмущающие члены здесь рассматривать не следует. Тогда, подставляя в уравнение (3.42), имеем

$$\frac{(M+m)k^2}{r^2} = rn_{\zeta}^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_e}{n_{\zeta}}\right)^2\right] \quad (3.46)$$

или, объединяя с (3.43) и (3.45),

$$\sin^3 P = \frac{an_{\zeta}^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_e}{n_{\zeta}}\right)^2\right] (1 + \epsilon - \delta)}{g_a \left(1 + \frac{m}{M}\right)}. \quad (3.47)$$

Этот вывод, несмотря на то, что он получен на основании грубой теории, вполне достаточен в пределах точности, задаваемой непосредственными наблюдениями направлений. Гельмерт разложил среднюю величину

$$G = g_a \left(1 + \frac{\delta}{3}\right)$$

по сферическим функциям и применил теорию Клеро в форме

$$b = \frac{5}{2}c - a.$$

Его вывод отличается от уравнений (3.47) чисто формально.

Исходя из полной формулы для g_a , можно уточнить уравнение (3.47), принимая во внимание члены высших порядков.

По Гельмерту (см. [7], стр. 83), имеем

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2} \left(1 + c - b + cb - \frac{1}{4}c^2 - \frac{8}{7}ab + \frac{2}{7}b_4 \right). \quad (3.48)$$

Полагая здесь $b_4 = \frac{a}{2}(a + 2b)$, что, как известно, указывает на одинаковое сжатие уровня сфероидов 4-го порядка до членов 6-го порядка [8] с эллипсоидом вращения, и исключая величину b с помощью расширенной теоремы Клеро, получим

$$\sin^3 P = \frac{an_{\zeta}^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_e}{n_{\zeta}} \right)^2 \right]}{g_a \left(1 + \frac{m}{M} \right) (1 - a) \left[1 + \frac{3}{2}c \left(1 + \frac{2}{7}a \right) \right]}. \quad (3.49)$$

Эта формула приводится в литературе с несколько другими обозначениями, в частности Ламбертом [9], как исходная формула для изучения фигуры Земли и параллакса Луны. Более точная по сравнению с уравнением (3.47) формула, приведенная у А. Беррота в *Zeitschrift für Vermessungswesen* (1949), получается, если принять $b_4 = 0$.

Из величин, стоящих в правой части (3.49), величины n_{ζ} и n_e известны очень точно. Величина c также может считаться точно известной, в то время как экваториальный радиус a , ускорение силы тяжести на экваторе g_a , сжатие a и отношение массы Луны к массе Земли $\mu = m/M$ следует считать подлежащими улучшению.

Дифференцируя уравнение (3.49), получим зависимость между поправками этих величин и соответствующей поправкой параллакса Луны ΔP . Членом с ca можно при этом пренебречь. Логарифмируя, получим

$$3 \operatorname{ctg} P \cdot \Delta P = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta g_a}{g_a} - \frac{\Delta \mu}{1 + \mu} + \frac{\Delta a}{1 - a}.$$

Поскольку $\mu = m/M$ и $a = 1/n$ представляются дробями с числителем, равным единице, целесообразно получать поправки их знаменателей $\Delta \left(\frac{1}{\mu} \right)$ и Δn .

$$\text{Заменяя } \Delta \mu = - \Delta \left(\frac{1}{\mu} \right) \mu^2 \text{ и } \Delta a = - \frac{\Delta n}{n^2},$$

имеем

$$\Delta P = \frac{\operatorname{tg} P}{3a} \Delta a - \frac{\operatorname{tg} P}{3g_a} \Delta g_a + \frac{\operatorname{tg} P}{3 \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right)} \Delta \left(\frac{1}{\mu} \right) - \frac{\operatorname{tg} P}{3n(n-1)} \Delta n. \quad (3.50)$$

Эта формула для дифференциального динамического параллакса будет использована нами в дальнейшем (см. гл. XIII и XIV).

ЛИТЕРАТУРА

1. Helmert F. R., Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Teil I, Leipzig, 1880, S. 60.
2. Chauvenet W., Manual of spherical and practical Astronomy, Bd. 2, London, 1900, Tafel III (mit Bessels Abplattung 1:299, 15).
3. Strohmeier W., Die astronomisch-geodätischen Konstanten, Sterne, 103, 1950.
4. Helmert F. R., Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Teil II, Leipzig, 1884, S. 451—459.
5. Helmert F. R., a. a. O., Teil II, S. 457, Fussnote.
6. Helmert F. R., a. a. O., Teil II, S. 460—465.
7. Helmert F. R., a. a. O., Teil II, S. 83.
8. Baeschlin C. F., Lehrbuch der Geodäsie, Zürich, 1948, S. 455.
9. Lambert W. D., The Figure of the Earth and the Parallax of the Moon, Astron. J., 22 (1928).

ГЛАВА IV

ЛУНА КАК ОБЪЕКТ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 1. Общие замечания о виде края Луны, каким он представляется с Земли

Для наблюдателя, находящегося на Земле, видимый профиль лунного края изменяется медленно и непрерывно. Причиной этого изменения является движение Луны вокруг Земли и вращение обоих небесных тел. Кроме того, вид лунного края зависит от географического положения пункта наблюдения на Земле. Эти изменения лунного края, а соответственно и центра видимого

Таблица 5

Колебания лунного края

Селенографическая широта		Восточный край. Среднее превышение по Брауэру	
+61°6	до +90°0	+0,11"	= +0,20 км
+49,5	+61,6	+0,05	+0,09
+42,1	+49,5	-0,07	-0,13
+35,4	+42,1	-0,36	-0,66
+28,0	+35,4	-0,47	-0,87
+21,7	+28,0	-0,16	-0,30
+16,3	+21,7	-0,16	-0,30
+9,8	+16,3	-0,06	-0,11
+5,2	+9,8	+0,07	+0,13
-1,2	+5,2	+0,24	+0,44
-1,2	-5,7	+0,20	+0,37
-5,7	-11,5	+0,02	+0,04
-11,5	-16,9	-0,53	-0,98
-16,9	-23,0	-0,76	-1,41
-23,0	-28,4	-0,50	-0,92
-28,4	-34,8	+0,15	+0,28
-34,8	-42,8	+0,35	+0,65
-42,8	-51,3	0,00	0,00
-51,3	-60,5	+0,07	+0,13
-60,5	-90,0	-0,06	-0,11

лунного диска, объединяются понятием *либрация* (лат. «колебание»). Важнейшие сведения об этом явлении даны в § 2 этой главы.

Для точного знания формы мгновенного лунного края, что особенно необходимо для рассматриваемых здесь геодезических методов, ценную помощь оказывают отдельные крупномасштабные фотографии Луны; но сами по себе они еще не являются достаточной основой, так как часто бывают искажены рефракционными аномалиями и фотографическими эффектами и поэтому в деталях неуверенны. От подобных систематических и случайных ошибок можно избавиться только путем охвата рядом фотографических наблюдений Луны больших интервалов времени. Можно указать, например, на наблюдения, проводимые Хайном (Карта лунного края), Парижской обсерваторией (Атлас лунных профилей) и Морской обсерваторией США (профили).

Ценным дополнением к фотографическим наблюдениям служат проводимые фотоэлектрические измерения почернения с автоматическим картированием профиля (Ваттс и Адамс) и спектрофотометрические измерения расстояния отдельных точек лунного края от края фотосферы Солнца при затмениях (Линдبلاد и Кристенсон).

Приведем точность, с которой может быть определено положение одной отдельной точки края согласно скудной литературе по этому вопросу:

Фотографические пластинки	$\pm 0'',24$ (с рефракцией)
Топографическая карта	
Хайна	$\pm 0'',25$ (по Линдбладу $\pm 0'',21$)
Профили из „Атласа лунных профилей“	$\pm 0'',05$ — $\pm 0'',1$
Фотоэлектрический измерительный прибор Ваттса (метод почернения)	$\pm 0'',07$ (внешняя точность)
Спектрофотометрический метод	$\pm 0'',06$
Кинематический метод Бонсдорфа	$\pm 0'',10$

Возвышенности и впадины лунной поверхности лежат по Хайну (в зоне края) в пределах от $-2'',6$ и до $+2'',4$ (~ 4 — 5 км). Еще менее выяснены *средние возвышения* лунного края над некоторой средней сферической поверхностью и под ней. В табл. 5, взятой из книги Юри [1], перечислены крупнейшие неровности края Луны.

Во всех учебниках указывается, что *сжатие* Луны весьма мало. Исследования Джеффриса (1937) показали, что оно меньше 1:1000. Но это не значит, что Луна почти шарообразна.

Хопманн [2] получил из вычислений, что фигура Луны представляет собой 3-осный эллипсоид, большая ось которого, повернутая к Земле, на 9 км больше средней и на 14 км больше малой оси. Однако эти результаты больше не подтверждались. По исследованиям Бёме [3], Иллигнера [4] и др. центр тяжести Луны, по-видимому, лежит примерно на 1 км южнее центра фигуры Луны, если глядеть на нее с Земли.

§ 2. Некоторые замечания о либрации Луны

Отождествление точек лунного края требует знания фазы либрации. Основой для вычисления либрации являются три правила Доминико Кассини (1625—1712), верность которых подтверждена наблюдениями, продолжающимися сотни лет [5]:

1. Восходящий узел лунного экватора совпадает на эклиптике с нисходящим узлом лунной орбиты (рис. 13).

2. Наклонение лунного экватора к эклиптике постоянно ($J = 1^{\circ}32'$, Хайн).

3. Угловая скорость вращения осей равна среднему сидерическому движению Луны по ее орбите.

Вектор MP , направленный вдоль оси вращения Луны, вектор, перпендикулярный к плоскости лунной орбиты ML , и вектор MP ,

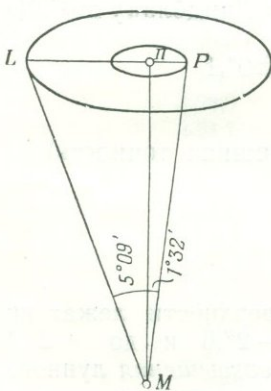


Рис. 13.

Рис. 14.

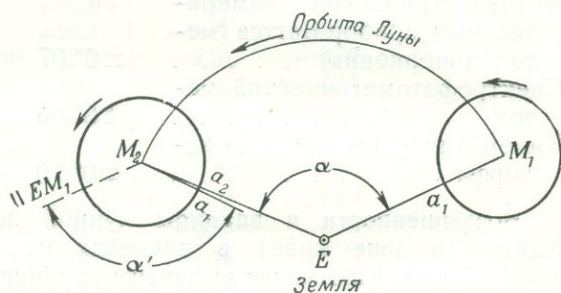


Рис. 15.

перпендикулярный к плоскости эклиптики, лежат поэтому всегда в одной плоскости (рис. 14), и два упомянутых первыми вектора описывают вокруг MP круговой конус за $18\frac{2}{3}$ года.

В то время, как вращение по существу своему есть процесс равномерный, движение Луны по орбите происходит с переменной угловой скоростью. Поэтому увеличение долготы Луны в ее орбите ($\angle M_1EM_2 = \alpha$ на рис. 15) будет то больше, то меньше, чем соответствующий равномерно увеличивающийся угол вращения α' . Поэтому точка a_1 лунной поверхности, которую земной наблюдатель видит где-нибудь в M_1 , в середине лунного диска, за время одного обращения Луны будет казаться ему временами справа, временами слева от середины диска.

Наклонение лунного экватора к плоскости лунной орбиты ($6^\circ 41'$) имеет следствием еще одно колебание видимого центра диска, которое отражается главным образом на (селенографических) широтах. Показанные на рис. 16 полярные шапки в соответственных крайних положениях невидимы. Вследствие малого



Рис. 16.

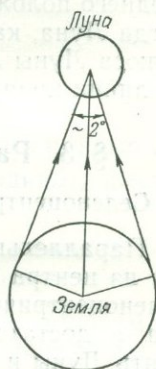


Рис. 17.

наклоения лунного экватора, с одной стороны, и равенства периодов вращения и обращения, с другой, в центр видимого диска могут попасть только точки узко ограниченной области на поверхности Луны. Эти качания поверхности Луны вокруг видимого центра ее диска, называемые *либрацией*, особенно заметны прежде всего тем, что краевые области периодически исчезают и вновь появляются, так что профиль видимого лунного края подвергается постоянному изменению.

Сюда входит еще одна, так называемая параллактическая либрация, зависящая от места наблюдения. Вращение Земли вызывает для крайних положений пункта наблюдения смещение центра лунного диска и его краев приблизительно на 2° (центральный угол при Луне, рис. 17).

Вышеперечисленные явления обозначаются термином *оптическая либрация*, так как здесь речь идет не о действительных качаниях тела Луны. Существует также и истинная или *физическая либрация*; она значительно меньше первой и обусловлена тем, что наклонная к эклиптике ось не строго шарообразной Луны колеблется как маятник под действием притяжения Земли.

Для численного представления либрации применяется *селенографическая* система координат, аналогичная географической системе на Земле (см. § 3). В соответствии с этим различают *либрацию по долготе* и *либрацию по широте*. Для полного описания необходимо еще знать позиционный угол S лунной оси относительно направления на северный полюс. Данные физической либрации могут быть взяты из Ежегодника. Вследствие либрации $3/7$ лунной поверхности видны всегда, $3/7$ никогда не видны, а остальная часть ($1/7$) видна временами. Либрация достигает максимального значения по широте около 14° и по долготе 16° ; таким образом, центр лунного диска не может отклоняться от среднего положения более, чем на 11° . При солнечных затмениях, когда Луна, как известно, находится вблизи узла своей орбиты, полюса Луны лежат, согласно первому правилу Кассини, почти на линии края (ср. гл. IX, стр. 200).

§ 3. Различные системы координат на Луне

1. Селеноцентрические координаты

Параллельный перенос системы эклиптических широт и долгот из центра Земли в центр Луны позволяет получить систему селеноцентрических широт и долгот. Так как центр лунного диска с достаточной точностью лежит на прямой, соединяющей центр Луны и пункт наблюдения на Земле, то точка лунной поверхности, лежащая в середине лунного диска, имеет те же селеноцентрические координаты L и B , что и земной наблюдатель. Эти координаты находятся в простой зависимости с широтой и долготой Луны в *топоцентрической* эклиптической системе $\lambda'_\zeta, \beta'_\zeta$

$$L = \lambda'_\zeta \pm 180^\circ, \quad B = -\beta'_\zeta. \quad (4.1)$$

Соответствующим образом может быть определена система селеноцентрических прямых восхождений и склонений. Подобные координаты неудобны для отождествления точек лунной поверхности; для этого требуется система, тесно связанная с Луной.

2. Позиционный угол и расстояние

Положение точки T на лунной поверхности (рис. 18) относительно центра лунного диска M определяется расстоянием σ и его позиционным углом π , отсчитываемым от северного направления круга склонений, проходящего через M . Связанный с σ центральный лунный угол ϑ выражается согласно рис. 19 следующим образом:

$$\sin(\vartheta + \sigma) = \sin \sigma \frac{CE}{CT} = \frac{\sin \sigma}{\sin R_\zeta}. \quad (4.2)$$

Тем самым совершается переход к сферической системе координат (π, θ) , полюс которой обращен к Земле. Она служит мгновенной системой при наблюдениях и в особенности при

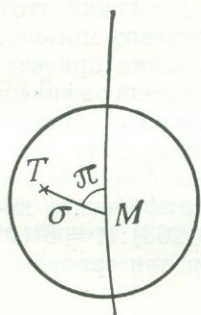


Рис. 18.

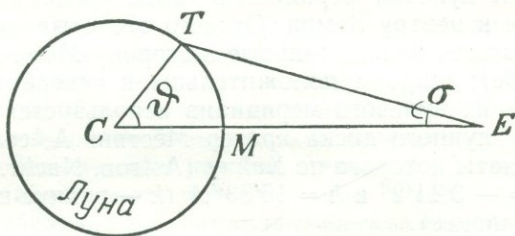


Рис. 19.

определении формы края ($\theta = 90^\circ - R'_C$). Затем с помощью либраций устанавливается связь с системой координат, жестко связанной с Луной.

3. Селенографические координаты

Эти координаты, подобно географическим координатам на Земле, определяются лунным экватором и некоторым выделенным лунным меридианом. Однако последний не определяется выбором приметной точки лунной поверхности, а устанавливается в связи с вращением Луны следующим образом. Пусть на рис. 20 M — селеноцентрическое место наблюдателя (и, соответственно, точка лунной поверхности, которую он видит как центр лунного диска), AA и YE соответственно линии пересечения с небесной сферой плоскости лунного экватора и плоскости, параллельной эклиптике, P и Π — полюсы этих плоскостей. Угол L при Π есть селеноцентрическая долгота M .

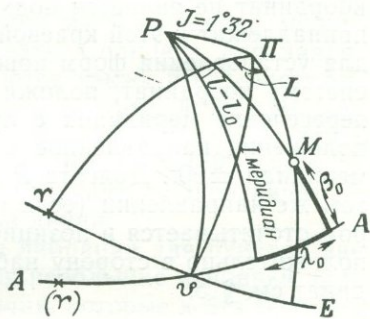


Рис. 20.

Сначала представим себе экваториальную систему на Луне, не участвующую в ее вращении, нуль-пунктом которой является точка Y , перенесенная на лунный экватор на расстояние, равное долготе узла. Точка M и пока еще не установленный I меридиан пусть имеют в этой системе долготы l и l_0 соответственно.

Если мы примем за нулевой меридиан для селенографической системы ($\lambda = 0$) тот, для которого l_0 в момент t_0 равна средней селенографической долготе Земли, то вследствие равномерности скорости вращения и среднего сидерического движения это соотношение будет справедливо и для любого другого момента t . Этот нулевой меридиан в своем среднем положении ориентирован к центру Земли. От него отсчитываются селенографические долготы, положительные в сторону Моря Кризисов (к западу на небе); широты положительны к северному краю. Для установления нулевого меридиана используется также близкий к центру лунного диска кратер Мёстинг А, селенографические координаты которого по Хайну (Astron. Nachr., 199, 263): $\lambda = 5^\circ 10' 7''$, $\beta = -3^\circ 11' 2''$ и $h = 15' 33''{,}4$ (h — радиус-вектор при среднем параллаксе).

Селенографические координаты λ_0 и β_0 видимого центра диска Луны, которые также обозначают как либрацию по долготе l , так и либрацию по широте b , имеют вследствие такого выбора главного меридиана чисто периодический характер. Формулы для вычисления либрации приведены в учебниках (см. [4] из гл. II). Геоцентрические значения либрации даются в American Ephemeris с суточным интервалом.

4. Координаты P и D лунной карты Хайна

Для картографического представления зоны лунного края градусная сетка только что рассмотренных селенографических координат не является подходящей основой, так как ее полюсы принадлежат к этой краевой зоне. Поэтому Хайн [6] использовал для установления форм поверхности в своей карте сферическую систему координат, положительным полюсом которой является пересечение меридиана с лунным экватором, в своем среднем положении направленное к Земле. Основным кругом является меридиан $\pm 90^\circ$. Долгота P отсчитывается по меридиану $\pm 90^\circ$ в том же направлении (если глядеть с северного полюса), в котором отсчитывается и позиционный угол; широта D отсчитывается положительно в сторону наблюдателя. О вычислении этих координат см. § 5.

§ 4. Вычисление топоцентрических либраций, в особенности для станций наблюдения затмения с использованием данных предвычислений

Для вычисления топоцентрических либраций l , b и позиционного угла C лунной оси имеются следующие возможности.

1. Непосредственное вычисление по формулам и таблицам¹⁾. Прежде всего нужно вычислить геоцентрический параллакс Луны

¹⁾ Ср. American Ephemeris, 1960, S. 519.

в эклиптической широте и долготе. С помощью топоцентрических широт и долгот Луны находятся топоцентрические оптические либрации l , b и C из формул, коэффициенты которых табулированы в American Ephemeris. Табулированные геоцентрические значения физической либрации могут прибавляться без поправок.

2. *Вычисление дополнительных параллактических поправок к табулированным геоцентрическим либрациям.* American Ephemeris дают геоцентрические значения оптической либрации l_0 , b_0 , C_0 через сутки и таким же образом—весьма малые величины физической либрации (l_0 и b_0 обозначены там как селенографические широта и долгота Земли). Как показал Аткинсон [7], топоцентрические либрации проще всего получают из геоцентрических значений, если прибавить к ним параллактические поправки. Ниже приводятся формулы, связь которых с лунным параллаксом очевидна без дальнейших пояснений ($\alpha - \alpha'$, $\delta - \delta'$ —геоцентрические параллаксы Луны по прямому восхождению и склонению):

$$\begin{aligned} l - l_0 &= (\alpha'_\zeta - \alpha_\zeta) \cos \delta_\zeta \cos C_0 - (\delta'_\zeta - \delta_\zeta) \sin C_0, \\ b - b_0 &= -(\alpha'_\zeta - \alpha_\zeta) \cos \delta_\zeta \sin C_0 - (\delta'_\zeta - \delta_\zeta) \cos C_0, \\ C - C_0 &= (l - l_0) \sin b_0 + (\alpha'_\zeta - \alpha_\zeta) \sin \delta_\zeta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интерполирование геоцентрических либраций необходимо производить со вторыми разностями.

3. *Специальные формулы Мэррея для солнечных затмений* [8]. Путем линейного интерполирования из Ежегодника можно получить селенографические координаты Солнца ¹⁾ для заданного момента. Одновременно получают также и селенографические координаты пункта наблюдения, который в этот момент находится на оси тени, а значит и на центральной линии затмения; для этого нужно лишь изменить долготу на $\pm 180^\circ$, а широту взять с противоположным знаком. Это и будут топоцентрические либрации для пунктов на центральной линии.

Чтобы получить топоцентрические либрации для пунктов вне центральной линии, необходимо найти небольшие поправки. Они вычисляются с помощью тех же величин, которые и без того требуются для предвычисления обстоятельств солнечного затмения. Мы даем наиболее простую формулу для их вычисления.

Пусть l'_0 , b'_0 —топоцентрические либрации для пункта, лежащего на центральной линии; тогда для пункта, близкого к центральной линии затмения

$$l = l'_0 + \Delta l', \quad b = b'_0 + \Delta b'.$$

¹⁾ American Ephemeris дают дополнение селенографической долготы до 90° (соответственно до 450°).

Поправки $\Delta l'$ и $\Delta b'$ получаются из формул затмения (гл. II) следующим образом.

Обозначим на рис. 21 A — центр Луны, OA — ось тени, O' — пункт наблюдения, расположенный по соседству с центральной линией. Содержащая точку O' плоскость, параллельная фундаментальной плоскости, пересекает ось тени в точке B . Для O'

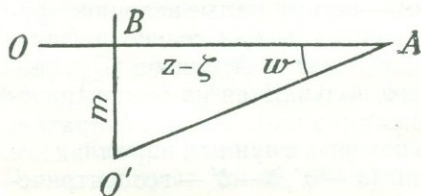


Рис. 21.

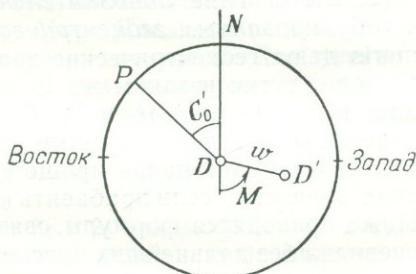


Рис. 22.

справедливы известные соотношения на фундаментальной плоскости

$$x - \xi = m \sin M, \quad y - \eta = m \cos M. \quad (4.4)$$

Угол ω , на который поворачивается видимый центр лунного диска при переходе от оси тени в точку O' , равен (см. рис. 21)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{m}{z - \zeta}. \quad (4.5)$$

Так как ω — малый угол, а $z - \zeta$ лишь незначительно отличается от геоцентрического расстояния до Луны, т. е. $z - \zeta \approx \operatorname{cosec} P_{\zeta}$, то можно написать вместо (4.5)

$$\omega \approx m P_{\zeta}. \quad (4.6)$$

Рис. 22 представляет собой топоцентрический вид Луны, как его воспринимает наблюдатель на оси тени, например в O . P есть северный полюс Луны; N — направление на северный полюс; C_0 — топоцентрический позиционный угол лунной оси, отсчитываемый от оси тени; D и D' — видимые центры лунного диска для наблюдателей, находящихся соответственно в O и O' . Позиционный угол дуги DD' относительно северного полюса неба отличается от угла направления M расстояния m (фундаментальная плоскость) на 180° , поскольку его вершина лежит в центре Луны (ср. гл. II, § 6). Отсюда можно выразить параллактическое смещение DD' через его компоненты, связанные с селено-

графической системой Луны, и найти поправки либраций по широте и долготе:

$$\begin{aligned}\Delta l' &= + w \sin(M - C'_0), \\ \Delta b' &= - w \cos(M - C'_0).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Из уравнений (4.4), (4.6) и (4.7) получаем

$$\begin{aligned}\Delta l' &= + P_{\zeta} [(x - \xi) \cos C'_0 - (y - \eta) \sin C'_0], \\ \Delta b' &= - P_{\zeta} [(x - \xi) \sin C'_0 + (y - \eta) \cos C'_0].\end{aligned}\quad (4.8)$$

Если при подготовке к наблюдениям данного солнечного затмения таблицы для C'_0 не были вычислены, это может быть сделано по общей формуле оптической либрации лунной оси, которая для рассматриваемого здесь особого случая принимает следующую простую форму:

$$\sin C'_0 = - \sin i \cos(G - \mu - \Omega'), \quad (4.9)$$

где G — гринвичское звездное время,

μ — гринвичский часовой угол Луны (топоцентрический), равный здесь гринвичскому часовому углу оси тени, табулируется в качестве элемента затмения через интервалы 10 мин,

i, Ω' — средние элементы лунного экватора, табулированные через 10-суточные интервалы.

Пункт наблюдения входит в C'_0 согласно уравнению (4.9) только через топоцентрическое прямое восхождение Луны $G - \mu$. При переходе от оси тени к близрасположенному пункту наблюдения $O'(\xi, \eta)$ топоцентрическое прямое восхождение меняется на

$$\Delta \alpha = - w \sin M \sec d = - P_{\zeta} (x - \xi) \sec d, \quad (4.10)$$

где d — склонение оси тени.

Дифференцируя уравнение (4.9) по $G - \mu$ и подставляя из уравнения (4.10), получаем поправку $\Delta C'_0$, а затем и топоцентрический позиционный угол в точке O' :

$$\begin{aligned}\Delta C'_0 &= - P_{\zeta} (x - \xi) \sec d \operatorname{tg}(G - \mu - \Omega') \operatorname{tg} C'_0, \\ C &= C'_0 + \Delta C' .\end{aligned}$$

§ 5. Линия края Луны по карте Хайна

1. Снятие профиля с карты [6]

Основываясь на большом числе фотографий полной Луны в различных фазах либрации ($f = 3,6$ м, диаметр изображения Луны 3,3 см), Хайн опубликовал топографическую карту лунного каря с изогипсами через $0'',2$ (~ 372 м). Охваченная картой

область Луны приблизительно симметрична относительно меридиана $\pm 90^\circ$ (большой круг $D = 0$). Ширина области ($-10^\circ < D < +10^\circ$) достаточна при всех фазах либрации. На рис. 23 показана часть этой карты.

Для того чтобы получить профиль лунного края по карте Хайна для нужного момента всемирного времени, следует прежде всего установить нормальную линию края, по которой исходящий от наблюдателя конус лучей касается шаровидной Луны.

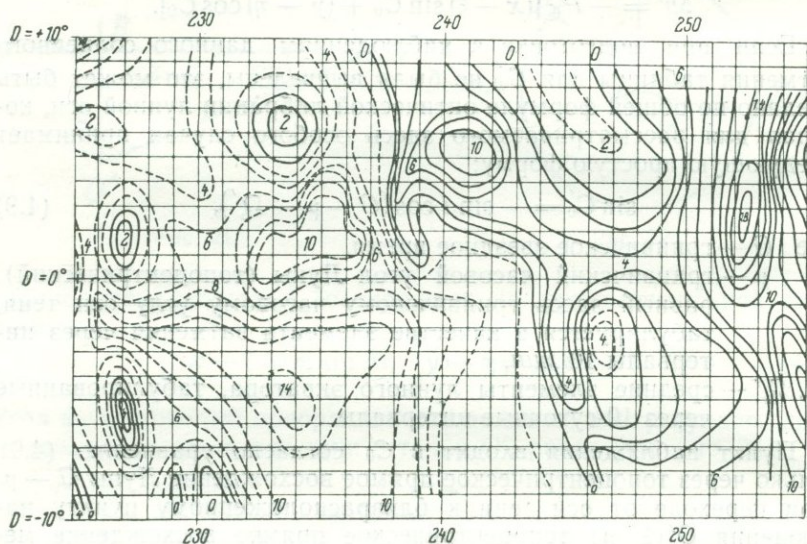


Рис. 23. Часть карты лунного края Хайна.

Угол P от 225° до 255° ; расстояние между горизонталями $0''{,}2$ (глубины даны пунктиром).

Как поясняется в следующем разделе, определенные в § 3 координаты Хайна P и D этих точек края могут быть вычислены для каждого позиционного угла, отнесенного к видимой середине лунного диска. При этом следует исходить из круглых значений часового угла. Интервал выбирается в зависимости от задачи; обычно достаточно 5° или 10° . Линия, соединяющая нанесенные на карту Хайна координаты P , D , представляет собой нормальную, т. е. соответствующую шарообразной форме, границу видимой части лунной поверхности (рис. 24).

Профиль лунного края, каким его видит наблюдатель, находится следующим образом: вдоль нанесенной на карту нормальной линии края определяются все высоты и наносятся на профиль. При этом следует учесть перспективный эффект кривизны, происходящий оттого, что на видимый профиль отчасти влияет

также и рельеф мест, расположенных впереди и сзади нормальной линии края. Для этого находят максимум величины

$$h_{\sigma} - R'_{\zeta}(1 - \cos \sigma) = h_{\sigma} - \frac{R'_{\zeta} \sigma^2}{2 \cdot 206265^2} \quad (4.11)$$

для каждого позиционного угла. Здесь h_{σ} означает высоту точки

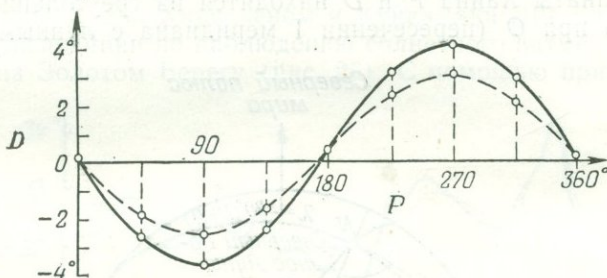


Рис. 24. Нормальная линия края для обеих станций финской экспедиции по наблюдению солнечного затмения 20 мая 1947 г. (пунктир — Бразилия, сплошная линия — Золотой Берег).

Луны на угловом расстоянии σ от нормального края, R'_{ζ} — радиус Луны в секундах и $R'_{\zeta}(1 - \cos \sigma)$ — перспективное искажение.

2. Вычисление координат Хайна для точек лунного края

Для точки края R , высота которой берется с карты Хайна, следует прежде всего вычислить селенографические координаты (долготу λ и лунное полярное расстояние $p = 90^\circ - \beta$). Пусть точка края R определяется относительно видимого центра Луны M позиционным углом τ , отсчитываемым от направления на северный полюс мира (рис. 25) и известным из наблюдений или из предвычислений (например, из покрытий звезд). Сферическому расстоянию RM на поверхности Луны соответствует $90^\circ - R'_{\zeta}$. Для перехода к селенографическим координатам используют селенографическую широту и долготу видимого центра Луны $M(b, l)$, а также позиционный угол C лунного меридиана, проходящего через M , относительно направления на север (топоцентрические либрации).

В сферическом треугольнике RNM (рис. 25) имеем при N (северный полюс Луны) угол $l - \lambda$, при M — угол $\Pi = \pi - C$. Далее, $MN = 90^\circ - b$ и $RM = 90^\circ - R'_{\zeta}$ (дополнение к видимому лунному радиусу). Отсюда получаются следующие уравнения для

селенографических координат λ и p точки края:

$$\begin{aligned}\sin p \sin (l - \lambda) &= \cos R'_C \sin \Pi, \\ \sin p \cos (l - \lambda) &= \sin R'_C \cos b - \cos R'_C \sin b \cos \Pi, \\ \cos p &= \sin R'_C \sin b + \cos R'_C \cos b \cos \Pi.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Координаты Хайна P и D находятся из треугольника RNO , имеющего при O (пересечении I меридиана с лунным эквато-

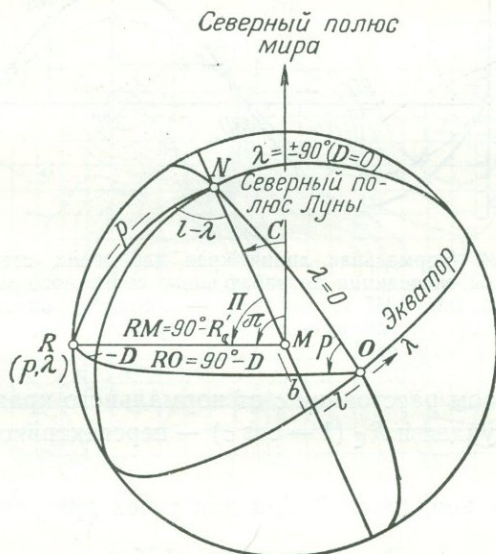


Рис. 25. Чертеж для вычисления координат P и D Хайна.

ром) угол p и при N угол λ . Стороны его: $NR = p$, $RO = 90^\circ - D$ и $ON = 90^\circ$. По известным формулам тригонометрии имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} P &= -\operatorname{tg} p \sin \lambda, \\ \sin D &= \sin p \cos \lambda.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Вместо того чтобы вычислять затем селенографические координаты p , λ точек края, можно выбрать и прямой путь, как это сделал Стржалковский [9] для затмения 1947 г. При этом исходят из топоцентрических координат α'_C , δ'_C и из видимого радиуса R'_C . По формулам Банахевича (Bull. Acad. Pologni, 1929, Tables sélénographiques) получают непосредственно для ряда топоцентрических позиционных углов координаты Хайна P и D точек

нормальной линии края. После нанесения этой линии края на карту Луны получают профили края для момента затмения, аналогично тому, как было описано вначале.

3. Пример

В качестве примера приводим два лунных профиля, полученные по карте Хайна Хирвоненом и Куккамьяки [10] для станций финской экспедиции по наблюдению солнечного затмения в Бразилии и на Золотом Берегу (рис. 26). С помощью приведенных

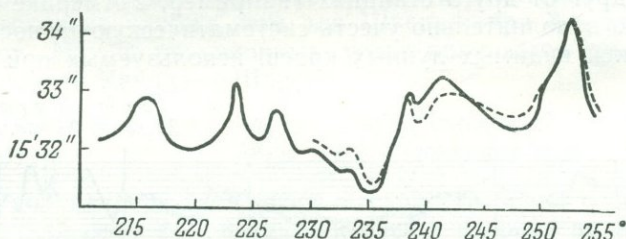


Рис. 26. Профиль лунного края (часть) 20 мая 1947 г. 3-й контакт; Бразилия (сплошная линия) и Золотой Берег (пунктир).

в § 4 формул (параллактические поправки) и используя основные значения геоцентрической либрации для момента наблюдения, публикуемые в American Ephemeris, получаем следующие выведенные значения топоцентрической либрации.

Таблица 6

Топоцентрические либрации

	Либрация по долготе			Либрация по широте			Позиционный угол C		
	оптич.	физич.	l	оптич.	физич.	b	оптич.	физич.	C
<i>Бразилия</i>									
2-й контакт	-2°,839	-0°,018	-2°,86	+0°,128	+0°,024	+0°,15	348°,811	-0°,019	348°,79
3-й »	-2,848	-0,018	-2,87	+0,118	+0,024	+0,14	348,820	-0,019	348,80
<i>Золотой берег</i>									
2-й контакт	-3,965	-0,018	-3,95	+0,112	+0,024	+0,14	348,843	-0,019	348,82
3-й »	-3,978	-0,018	-3,96	+0,109	+0,024	+0,13	348,853	-0,019	348,83

Фазы либрации отличаются друг от друга на обеих станциях примерно на $1,^{\circ}1$; при среднем радиусе Луны 1738 км это составляет свыше 30 км. Поэтому мы получаем для одного и того же солнечного затмения два совершенно различных профиля Луны,

С полученными выше значениями вычисляются по уравнениям (4.12) и (4.13) координаты P и D нормальной линии края для возрастающих позиционных углов (см. рис. 24). С помощью величин P и D с карты Хайна снимаются профили видимого лунного края; часть профиля 3-го контакта показана на рис. 26 (сплошная линия — Бразилия, пунктирная — Золотой Берг).

§ 6. Дифференциальная либрация

При наблюдении солнечного затмения на двух далеко отстоящих друг от друга станциях (например, в Америке и Европе) нужно дополнительно учесть систематическую разность средних уровней видимых лунных краев, используемых при выводе

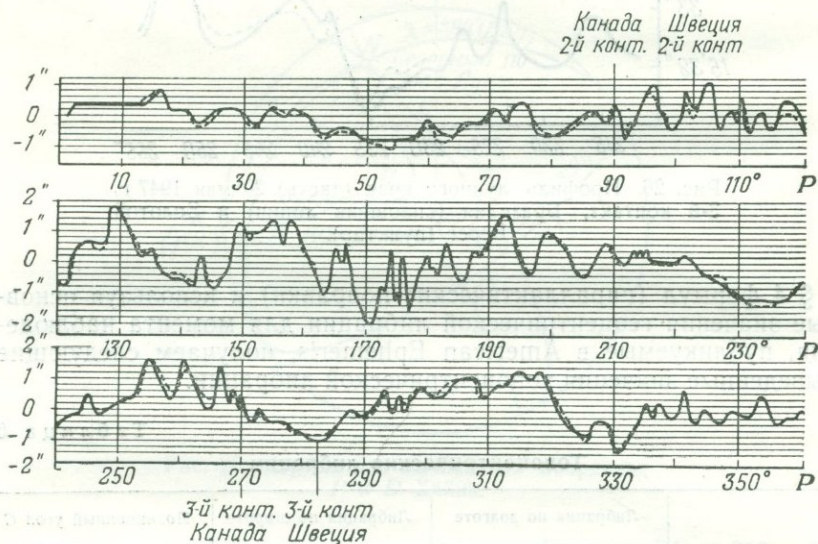


Рис. 27. Дифференциальная топоцентрическая либрация при наблюдениях полного солнечного затмения 1954 г. (сплошная линия — Швеция, пунктир — Канада).

относительного положения центров светил. Влияние таких систематических различий средней окружности лунного края на наблюдаемые моменты контактов впервые было доказано Кристенсоном [11] для солнечного затмения 1954 г. Это явление названо Кристенсоном *дифференциальной либрацией*.

Если при 2-м и 3-м контактах основываться только на моментах этих контактов, выведенных из видимых профилей края, то высокая точность измерений практически утрачивается вследствие систематической разности средних уровней. При методах

кинематографической фокальной съемки (гл. IX) и измерения интенсивности света (гл. XI) выявление этой дифференциальной либрации связано с большими трудностями¹⁾. Напротив, при спектрофотометрическом методе (гл. XII) можно исключить дифференциальные различия уровней лунного края привязкой к фотосферному горизонту Солнца.

На рис. 27 показаны профили лунного края для станций в Канаде и Швеции, которые были сняты во время полного солнечного затмения 1954 г. с карты Хайна для 2-го и 3-го контактов с помощью топоцентрических либраций (пунктир — Канада). Мы видим, что средний уровень при 2-м контакте лежит для Канады несколько глубже, чем для Швеции; при 3-м контакте — наоборот. Из 72 позиционных углов получается средняя разность уровней Канада — Швеция.

Для 2-го контакта	$\Delta h_2 = +0",075$ (позиционный угол $60-132^\circ$)
» 3-го »	$\Delta h_3 = -0",050$ (позиционный угол $240-312^\circ$)

При топоцентрической угловой скорости Луны относительно Солнца $0",45 \text{ сек}^{-1}$ 2-й контакт казался в Швеции происшедшим на $0,17 \text{ сек}$ раньше относительно среднего уровня Луны, положенного в основу наблюдений 2-го контакта в Канаде. Точно так же и 3-й контакт произошел в Швеции слишком рано по сравнению с Канадой, именно на $0,11 \text{ сек}$. Таким образом, дифференциальная либрация искажает среднее из моментов контактов на величину $0,14 \text{ сек}$. Если пренебречь этим эффектом, то расстояние Швеция — Канада получилось бы на

$$0,14 \cdot 0,45 \cdot 384 \cdot 10^6 / 206265 = 117 \text{ м}$$

больше, что недопустимо для геодезических целей.

§ 7. Определение центра среднего радиуса Луны и неровностей ее края по фотографиям

Эта задача подробно разработана с методической и практической стороны в основных работах Хайна [6]. Мы же разберем здесь лишь некоторые новейшие методы, в особенности фотографирование серпа при солнечных затмениях, и обсудим ряд важнейших частных вопросов.

Показанные на рис. 28 серпы получены на пластинках $16 \times 16 \text{ см}$ во время солнечного затмения на Стокгольмской обсерватории [12] с помощью рефрактора с фокусным расстоянием

¹⁾ Определение удовлетворительной относительной плоскости для неровностей лунного края является одним из пунктов программы Комиссии движения и фигуры Луны Международного астрономического союза (Draft Report Dublin, 1954 г.).

4,2 м, так что диаметр Луны составляет около 4 см (относительное отверстие объектива 1:50, продолжительность экспозиции с темным фильтром 0,25 сек). Пластинка перемещалась в соответствии с суточным движением, моменты экспозиции регистрировались на хронографе.

Снимки измерялись на полярно-координатной машине Гертера. Для каждого серпа на эмульсию наносился вспомогательный центр C_p и измерялось расстояние r точек края от этой



Рис. 28. Фотографии серпа, полученные Е. Бергстрандом во время экспедиции Стокгольмской обсерватории по наблюдению солнечного затмения 1945 г.

На каждой пластинке, как правило, получалось 4 снимка с интервалом 80 сек.

метки через градус. Направление на север для каждого серпа определялось двумя способами: по направлению хорды, соединяющей концы серпа, и по направлению видимого движения.

Измеренные радиусы r должны быть исправлены:

а) за несовпадение центра Луны с оптическим центром пластинки,

б) за дифференциальную рефракцию,

в) за преломление в стеклянном фильтре, расположенном непосредственно перед пластинкой,

г) за отклонение определяемого центра Луны от принятого на пластинке центра C_p (поправка за эксцентриситет).

Первой из этих поправок можно пренебречь, так как максимальное отклонение центра Луны от оптического центра из-за гидирования пластинкой не превышает 20 мм.

Дифференциальная рефракция вызывает необходимость внести поправку в радиусы, которые следовало бы отсчитывать от

истинного центра Луны; однако последний обычно лишь незначительно отличается от вспомогательной метки C_p . Поправка всегда положительна; она зависит от зенитного расстояния z_{\odot} центра Солнца и от центрального угла α_r точки края, считаемого от зенита. Эту поправку можно взять из таблиц (например, из таблиц рефракции де Балля, Лейпциг, 1936).

Таблица 7

Пример дифференциальной рефракции
(по Кристенсону, 1951)

α_r	$\Delta r, \text{мм}$	
0° 180°	+0,0148	$z_{\odot} = 52^{\circ}31'$ $1'' = 0,0205 \text{мм}$
10 170	145	
20 160	136	
30 150	125	
40 140	109	
50 130	93	
60 120	78	
70 110	66	
80 100	58	
90 90	+0,0055	

Поправка за фильтр получается по формуле

$$\Delta r = \frac{\delta}{F} \left(1 - \frac{1}{n}\right) (r + \Delta \cos \psi), \quad (4.14)$$

где δ — толщина фильтра, F — фокусное расстояние, n — показатель преломления ($\sim 3/2$), Δ — расстояние оптического центра от центра Луны на пластинке, ψ — разность направлений между r и Δ .

Поправка за эксцентриситет есть геометрическая редукция от метки, принятой за центр, к истинному центру Луны C ; она вычисляется по способу наименьших квадратов. Положенные в основу уравнений ошибки отношения показаны на рис. 29.

Введем обозначения:

- R — определяемый средний видимый радиус,
- R_0 — приближенное значение R ,
- d — $C_p C$,
- φ — угол, образованный прямой $C_p C$ с направлением на север N и отсчитываемый к востоку,
- r, p — полярные координаты точки Луны, отсчитываемые от C_p и направления на север,
- h — избыток R (высота края).

За неизвестные примем:

$$\left. \begin{aligned} x &= d \cos \varphi \\ y &= d \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{координаты центра,}$$

$$z = R - R_0 \text{ радиус.}$$

Отсюда получается следующее уравнение ошибок:

$$h = -l + x \cos p + y \sin p + z, \quad (4.15)$$

где

$$l = r - R_0 + \frac{d^2}{2R_0} \sin^2 \vartheta \text{ (свободный член).}$$

Высоты края h в предыдущем уравнении суть улучшения радиуса r и поэтому должны вводиться как топографические высоты с обратным знаком. Небольшой поправочный член при l

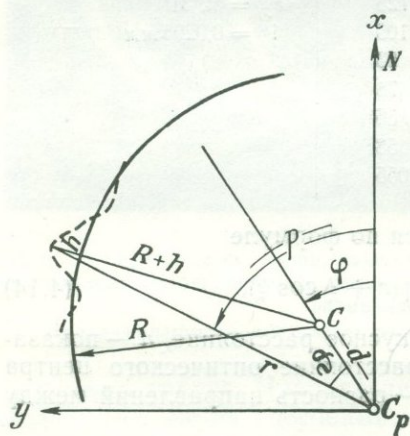


Рис. 29. Редукция к истинному центру Луны.

предполагает знание направления C_pC . Так как этот член 2-го порядка, то достаточно определить направление C_pC из предварительного решения небольшого числа уравнений. Подобное определение редукции за эксцентриситет производилось еще Хайном [6].

Рис. 30 показывает один и тот же участок рельефа Луны, каким он выглядит для одного и того же пункта наблюдения и одного и того же момента времени по карте Хайна (вверху) и по двум последовательным снимкам, полученным описанным выше методом Стокгольмской обсерваторией (внизу) [12]. Каждая из этих пластинок содержит несколько серпов и дает при измерении через градус несколько сот уравнений ошибок. По разностям обеих пластинок можно судить о средней ошибке окончательной высоты. В основных чертах совпадение удовлетворительно; однако изредка встречаются более ощутимые разности.

По мнению шведских специалистов, следует отдать предпочтение способу Хайна, поскольку он основывается на большом числе снимков, полученных в разное время; при случайном же фотографировании солнечного затмения сильно действуют атмо-

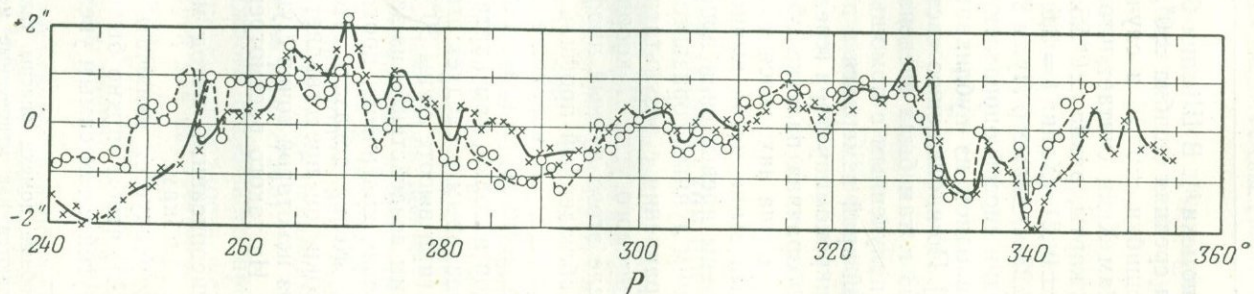
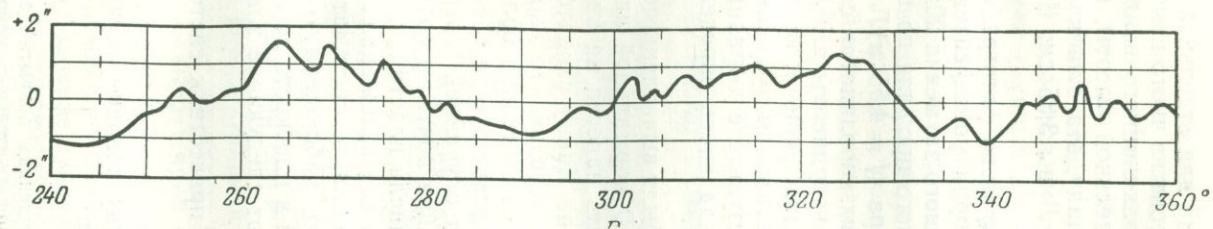


Рис. 30. Сравнение профиля края по Хайну (вверху) и по новым фотографиям (внизу).

сферные помехи¹⁾. В Швеции была получена для отдельной высоты края средняя ошибка $\pm 0'',24$. Она состоит из чисто измерительной ошибки $\pm 0'',16$ и случайного рефракционного влияния $\pm 0'',18$. Сам Хайн считает, что ошибка отдельной высоты, взятой с его карты, равна $\pm 0'',25$. По Линдбладу, эта ошибка составляет $\pm 0'',21$ (Хайн: $f = 3,6$ м, диаметр Луны 3,35 см; Швеция: $f = 4,23$ м, диаметр Луны 3,94 см).

Еще один способ определения лунного края по фотографиям изложен в одной из публикаций обсерватории университета в Киото [13]. По наблюдению частного солнечного затмения 20 февраля 1953 г. там была введена часть лунного профиля по пластинкам, полученным с помощью рефрактора ($f = 4,55$ м).

Лунный край измерялся в прямоугольных координатах с помощью микрокомпаратора (средняя ошибка координаты $\pm 0'',06$), причем прозрачная палетка обеспечивала наведение через градус. Центр серпа находился по хордам; в остальном применялся изложенный выше метод вычислений. В результате выравнивания получены превышения профиля края над вновь определенным средним лунным горизонтом.

Для сравнения с результатами Хайна были вычислены через 10° позиционного угла Π координаты P и D нормальной линии края. После этого лунный профиль мог быть нанесен на карты Хайна. Наблюденный профиль и профиль по Хайну сходятся в общем хорошо, но новейшие наблюдения (среднее только из четырех пластинок) показывают в деталях значительно больше изгибов гор и долин, чем карта Хайна²⁾. Однако это не следует считать реальным и следует отнести за счет случайной игры рефракции (при высоте Луны 30°). Карты Хайна почти не подвержены таким воздействиям из-за большого числа пластинок.

Банахевич критически проанализировал все изложенные методы [14]. Желая доказать, что могут возникнуть систематические ошибки, он представляет себе Землю, наблюдаемую как светило из некоторой точки Луны, лежащей в плоскости земного экватора. Из такого рассмотрения вытекают следующие заключения.

1. Вышеописанный метод может легко привести к систематическим ошибкам.

2. Рекомендуются включать в измерения кратеры (например, Мэстинг А), чтобы можно было связать одну половину лунного края с другой и тем самым увеличить базис.

¹⁾ Подобные помехи опасны также при наблюдениях покрытий звезд; они проявляются как мгновенные местные или продолжительные районные рефракционные аномалии, могущие достигать $1''$ (Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 87, 506, 1927).

²⁾ Из-за затруднений при репродукции рисунок не воспроизводится. (Прим. авт.)

3. Следовало бы фотографировать весь диск Луны при кольцеобразных затмениях, чтобы определить край Луны при помощи края Солнца.

Методы, подобные изображению края Земли, видимого из заданной точки Луны (может быть из кратера Мёстинг А), могут оказаться весьма плодотворными для решения обратной задачи (лунный край с Земли) после учета взаимного движения обоих тел. Тогда мы будем в состоянии проверить результат до мельчайших подробностей через хорошо известный рельеф Земли и выявить, таким образом, источники ошибок. Это можно применить также и к случаю покрытия Солнца Землей, видимого с Луны (т. е. солнечного затмения, видимого с Луны). Подобный метод, менее общий, был применен О'Кифом и Андерсоном для либрации Луны в применении к покрытиям звезд; причем либрация рассматривалась не с Земли, а со звезды, что вносит дополнительные упрощения.

§ 8. Атлас лунных профилей Парижской обсерватории

Этот атлас содержит 144 лунных профиля (72 западного края и 72 — восточного) и основывается более чем на 2000 пластинках, полученных Леви и Пюизье в 1894—1909 гг. на большом экваториале Парижской обсерватории. Диаметр изображения Луны на этих снимках равен 17 см против 3,3 см у Хайна.

Во введении к этому атласу можно найти подробные сведения об изображениях лунного края и их расположении¹⁾. На рис. 31 мы даем часть одной из таблиц атласа. Знаки слева обозначают «идеальные либрации» (*librations idéales*) в обычном смысле, а значки справа — «реальные либрации» (*librations réelles*), соответствующие наблюдениям и отягощенные физической либрацией (основанной на предположении, что $f = 0,60$ и $l = 1,^{\circ} 523$; P' обозначает топоцентрический параллакс в момент наблюдения ($\sin P' = a/\epsilon_{\tau}$, или $P' = P'_{\zeta}/0,27245$).

Горизонтальная ось для каждого отдельного профиля обозначает принятую среднюю лунную поверхность, вертикальная ось — высоту края в секундах дуги для наблюдателя, находящегося на среднем расстоянии Земля — Луна ($P_m = 0^{\circ},9507$). Этот средний лунный уровень получен как окружность, наилучшим образом проведенная по 40 точкам, равномерно распределенным по половине лунного края.

Этот относительный круг представлен на изображенных профилях почти прямой линией. Такие относительные круги все

¹⁾ Описание метода, примененного при фотографировании профилей, можно также найти у Th. Weimer, *Recherches Sélénographiques* (Bull. astron., 17, 271, 1954).

должны относиться к одному и тому же селеноиду. Однако это маловероятно, так как каждый круг получался независимо. Профили атласа могут быть использованы и в том случае, если пришлось бы изменить относительный круг. Относительно среднего лунного уровня см. § 6.

Чтобы получить ординаты для топоцентрического параллакса момента наблюдения, следует умножить табличные ординаты на

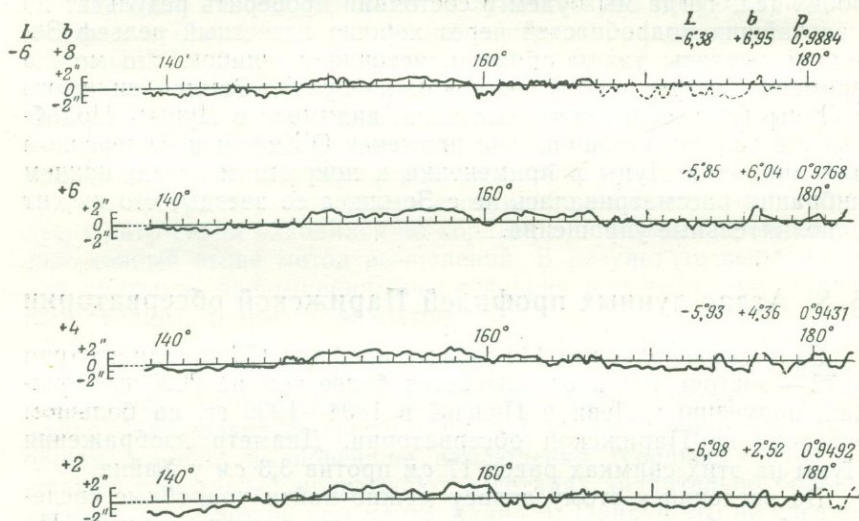


Рис. 31. Лунные профили из Парижского «Атласа лунных профилей» (уменьшено).

P'/P_m ; $P_m = 0^{\circ},9507$ — средний горизонтальный экваториальный параллакс Луны. Мы заимствуем из введения к атласу еще следующие указания.

Если ограничиться точностью $0^{\circ},1$, то можно принять для средних широт вместо формул (4.3) следующие формулы:

$$l - l_0 = \alpha'_\zeta - \alpha_\zeta, \quad b - b_0 = -(\delta'_\zeta - \delta_\zeta). \quad (4.16)$$

Для экваториальной области Луны сильное изменение либрации по широте также почти не влияет на вид лунного края. Поэтому следует выбрать профиль, ближе всего подходящий к либрации по широте, и затем проинтерполировать только по либрации в долготу. Для полярной области имеет место обратное явление. В промежуточных областях профили следует интерполировать по либрациям как в широте, так и в долготу.

Профили атласа значительно точнее, чем нарисованные на карте Хайна; они содержат видимый лунный профиль, и если

они доступны, то должны быть предпочтены для солнечных затмений и покрытий звезд. Вычислительная работа при их использовании, как показывает следующий пример, минимальна.

Пример использования Атласа [15]

Либрация и поправка края для покрытия звезды

Закрытие α Sco в Париже 1954 г., февраль 26

$$\lambda = 0^{\text{h}}9^{\text{m}},3 \quad \varphi = 48^{\circ}50',2$$

Из *Connaissance Temps* и *American Ephemeris* берутся следующие данные (геоцентрические):

$$\text{Всемирное время } 2^{\text{h}}37^{\text{m}},3 \quad \alpha_{\odot} = 16^{\text{h}}24^{\text{m}}15^{\text{s}} \quad l_0 = -5^{\circ},93$$

$$\text{Местное звездное время } 13^{\text{h}}8^{\text{m}},3 \quad \delta_{\odot} = -25^{\circ}17'52'' \quad b_0 = +4^{\circ},75$$

$$\begin{aligned} \text{Часовой угол на} \\ \text{меридиане Парижа} - 3^{\text{h}}15^{\text{m}},9 \quad P_{\odot} = 55'13'',77 \quad C_0 = +10^{\circ},39 \\ R_{\odot} = 15'02'',90 \end{aligned}$$

Позиционный угол точки закрытия (топоцентрический) 164°
Отсюда параллаксы

$$\alpha'_{\odot} - \alpha_{\odot} = +2^{\text{m}}0^{\text{s}},1 = +0^{\circ},50$$

$$\delta'_{\odot} - \delta_{\odot} = -48',5 = -0^{\circ},81$$

Топоцентрический параллакс Луны $P'_{\odot} = +0^{\circ},920$

Из формул или таблиц

$$l - l_0 = +0^{\circ}59; \quad b - b_0 = +0^{\circ},71;$$

$$C - C_0 = -0^{\circ},18.$$

Либрации

$$l = -5^{\circ},34; \quad b = +5^{\circ},46; \quad C = +10^{\circ},21.$$

Позиционный угол $\Pi = 164^{\circ} - 10^{\circ},21 = 153^{\circ},8$ (отнесенный к оси Луны)

$$\frac{P'}{P_m} = \frac{0,920}{0,9507} = 0,969.$$

<i>Поправка края</i>		Ординаты табличные
Профиль $l = -6^\circ$, $b = +4^\circ$ для позицион- ного угла . . .	153°,8	$\eta = +1'',1$
$l = -6^\circ$, $b = +6^\circ$ для позицион- ного угла . . .	153°,8	$\eta = +1,0$
		$\eta = +1,05$
Среднее (вместо интерполяции) $+1,05$		
С учетом редукции за удаленность искомая поправка края		
$\eta_1 = 1'',05 \cdot 0,969 = 1'',02.$		

§ 9. Электронная машина для развертки лунных профилей на Морской обсерватории в Вашингтоне [16—18]

С 1932 г. на станциях Йельской и Колумбийской обсерваторий, а с 1945 г. также и на Морской обсерватории получались крупномасштабные фотографии Луны. С помощью особо сконструированной электронной машины (рис. 32) в настоящее время производится развертка лунных профилей по этим фотографиям.

Предполагается составить топографическую карту, воспроизводящую поверхность краевой зоны Луны. До 1955 г. были измерены 700 пластинок для получения краевых профилей. Полученные профили и полученная по ним топографическая карта, вместе с подробностями, касающимися метода, должны быть опубликованы к Международному геофизическому году.

Судя по тому, что известно в настоящее время об этом приборе, пластинка центрируется на горизонтальном столике (рис. 32), который вращается от маленького мотора вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 3° в минуту. В непосредственной близости от лунного края установлен вертикально измерительный микроскоп, который может передвигаться другим мотором в радиальном направлении. С помощью фотоэлектрического умножителя и следящей системы мотор управляется так, что при вращении пластинки через микроскоп проходит постоянное количество света, и таким образом последний автоматически следует вдоль границы лунного края.

В первый из трех электронных умножителей (рис. 32, наверху) свет попадает из узкой щели, установленной поперек лунного края. Ширина этой щели $1''$ и длина $10''$. Второй электронный умножитель получает свет от двух более коротких щелей, расположенных в непосредственной близости от края, с его внутренней и внешней стороны. Разность интенсивностей полученных

световых гоков управляет положением микроскопа. При помощи третьего умножителя измеряется плотность почернения участка поверхности вблизи изображаемого края для исключения местных колебаний в яркости края, которые иначе могли бы исказить профиль в радиальном направлении.

Регистрирующее перо следует за движением микроскопа, второе перо регистрирует интенсивность потока третьего фотоумножителя, третье перо чертит прямую линию на бумаге для учета

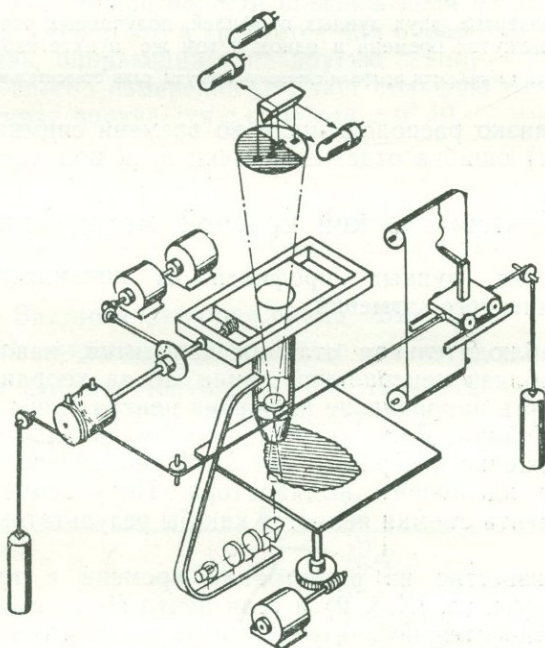


Рис. 32. Схема действия машины для развертки лунного края.

случайных изменений в положении бумаги. Границы поворота держателя пластинки — 180° . Каждый профиль приходится также и в обратном направлении для обнаружения случайных механических или электрических нарушений в работе прибора.

Лунный профиль, нарисованный первым пером, должен еще быть исправлен за ошибки винтов, эксцентриситет пластинки и дифференциальную рефракцию. Горизонтальный масштаб профилей в оригинале (1,6 дюйма) соответствует 1° позиционного угла, вертикальный масштаб (0,65 дюйма) соответствует $1''$ на лунном крае.

Два лунных профиля, изображенные на рис. 33, выведены по двум снимкам, полученным в одном пункте с интервалом в

несколько минут. Кривые для наглядности слегка повернуты одна относительно другой. Из сравнения профилей, полученных

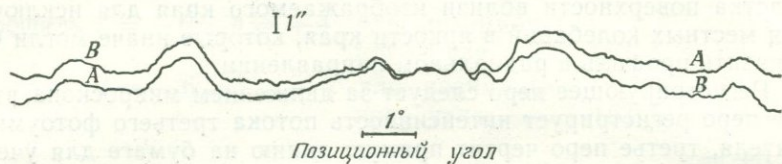


Рис. 33. Развертка двух лунных профилей, полученных через небольшой промежуток времени в одном и том же пункте наблюдения.

Для большей наглядности профили слегка повернуты один относительно другого.

по таким близко расположенным во времени снимкам, средняя (внутренняя) ошибка отдельной точки края получается $\pm 0'',07$.

§ 10. Кинематический крайевой метод Бонсдорфа

1. Определение лунных профилей из кинематографических снимков солнечного затмения

Если наблюдательная станция находится, как это всегда и бывает, вблизи центральной линии, то за координатную ось можно принять направление движения центра Луны относительно центра Солнца. Для измерений в этом направлении относительное движение центров может быть уподоблено измерительному винту идеального компаратора. Получаемое всемирное время t момента съемки является как бы результатом этих измерений.

Если t известно из регистрации времени с точностью до $\pm 0,003$ сек (см. гл. IX, § 2) и если центр Луны имеет скорость $0'',5 \text{ сек}^{-1}$ относительно центра Солнца, то это означает, что относительная точность измеренного среднего в этом радиальном направлении равна $\pm 0'',0015$. Эта величина может быть отнесена и к определению высоты любой точки края по изображениям, следующим одно за другим через $1/24$ сек внутри всей области измерений, равной ~ 20 сек. Однако следует учесть еще многочисленные влияния других ошибок, так что окончательная точность составляет всего $\pm 0'',1$.

На каждом снимке полученный круговой край Солнца неоднократно пересекает край Луны вследствие неровностей последнего. Это имеем место на концах серпов дважды на каждой отдельной горе, так что серпы вблизи их острий распадаются на отдельные «жемчужины» (так называемые «четки Бейли»). В следующих за этим снимках край Солнца пересекает уже соседние точки этих неровностей. Таким образом, большая часть лунного края постепенно как бы обшаривается краем Солнца.

Из измерений с помощью этого идеального измерительного винта можно получить высоты. При этом необходимо использовать видимое движение Луны в секунду времени в единицах 4-го десятичного знака единицы дуги.

Другая координата точки пересечения лунного края краем Солнца должна измеряться обычным путем на компараторе. Она дает позиционный угол S при центре Луны, точность которого может быть небольшой.

Имея S и h , можно нанести профиль края и графически выровнять его; именно это и требуется для обработки наблюдений, а не профиль, опирающийся на другую основу. Оказалось, что этот новый способ измерения [19] дает большую точность, и высота точки края получается с ошибкой $\pm 0'',10$.

2. Теория метода Бонсдорфа

Во время солнечного затмения 1945 г. для наблюдательной станции P были приняты в качестве наилучшего приближения следующие значения:

Видимый радиус Солнца $BD = R'$ $943'',91$

Средний видимый радиус Луны $AC = R$ $959'',56$

На рис. 34 сделано допущение, что пункт наблюдения лежит в точности на центральной линии. Пусть в момент t наблюдатель видит центр Солнца в точке B , а центр Луны в точке A .

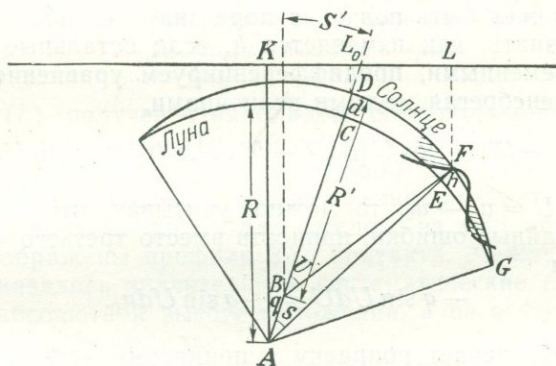


Рис. 34. К пояснению кинематического метода Бонсдорфа.

Пусть при 2-м и 3-м контактах (всемирное время $t_{02} = 14^{\text{h}}02^{\text{m}}44^{\text{s}},20$ и $t_{03} = 14^{\text{h}}03^{\text{m}}51^{\text{s}},30$) точка C среднего лунного края совпадает с точкой D солнечного края. Для того чтобы привести t_{02} и t_{03} в согласие с наблюдениями, позже нужно будет учесть поправки dt_0 и $d(R - R')$.

Приняв скорость центра Луны относительно края Солнца $v = 0'',4721 \text{ сек}^{-1}$, из рис. 34 получим для определения высоты h любой точки лунного края, перерезанной солнечным краем

$$\begin{aligned} DC &= d = v(t - t_0), \\ BA &= q = R - R' + d, \\ h + R &= (R'^2 + q^2 + 2qR' \cos U)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Пусть L и L_0 суть выраженные в секундах дуги и полученные с помощью измерений на компараторе расстояния перерезанной краем Солнца точки F и центра серпа D от края Солнца. Расстояния L и L_0 отсчитываются в принятом для измерений направлении движения микроскопа KL (причем впоследствии L_0 должно быть исправлено на поправку ΔL_0). Тогда угол S (позиционный угол точки F относительно AD) может быть выведен из уравнений

$$\begin{aligned} \sin(U + S') &= \frac{L - L_0}{R'} + \sin S', \\ \sin(U - S') &= \frac{q}{R + h} \sin U. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь угол S' — обычно малый наклон введенной координатной оси к оси серпа UD , который может быть измерен и знание которого не требует особой точности. Затем для каждой точки пересечения может быть получена пара значений hS .

Чтобы узнать, как изменяется h , если остальные величины считать переменными, продифференцируем уравнение (4.17) и получим, пренебрегая малыми величинами,

$$dh = -d(R - R') + \cos U [d(R - R') - v dt_0] - q \sin U dU. \quad (4.19)$$

Поскольку $U = u_h - u_0$, то можно, учитывая, что в u_h входят только случайные ошибки, написать вместо третьего члена правой стороны

$$-q \sin U dU = +q \sin U du_0. \quad (4.20)$$

Здесь du_0 обозначает поправку к принятому направлению оси серпа, которая прежде могла быть получена лишь предварительно из величины L_0 . Таким образом, в dh входят, в сущности, три переменные, которые хотя и дают представление о взаимосвязях, но не могут быть разделены при наблюдениях на одной станции, так как за все солнечное затмение, наблюдаемое в одном и том же пункте, каждое dh входит только один раз. Как будет показано в следующем разделе, при некоторых особых условиях можно осуществить разделение переменных,

3. Сравнение различных методов определения профилей края Луны

Бонсдорф [19] сравнил между собой результаты почти одновременных наблюдений одного и того же лунного профиля с центральным углом 60° , произведенных двумя различными методами, в двух пунктах Земли, отстоящих друг от друга на 100 км. Затем он сравнил их с третьим профилем, выведенным по карте Хайна, и пришел к интересным заключениям.

Первый профиль (*B*) на рис. 35 выведен Бонсдорфом из кинематографических фокальных снимков по его способу. Второй

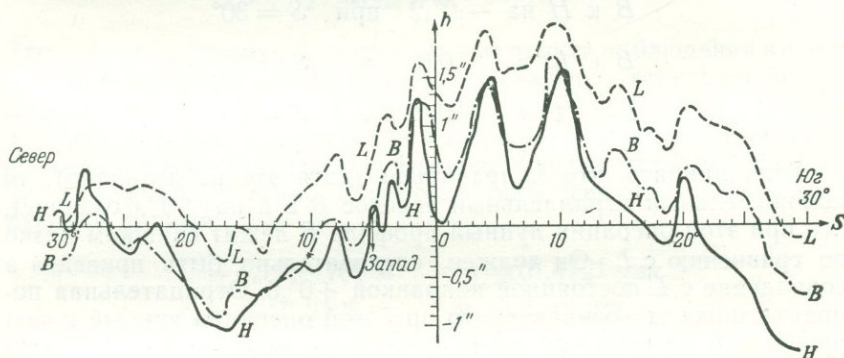


Рис. 35. Сравнение методов профилей для затмения 1945 г., 3-й контакт.

B — Бонсдорф, *L* — Линдبلاد, *H* — Хайн.

профиль (*L*) получен Линдبلادом спектрально-фотографическим методом (гл. XII). Третий профиль (*H*) получен для пункта *B* из карты Хайна по соответствующим данным.

Поскольку наблюдались оба внутренних контакта (2-й и 3-й), речь идет о трех профилях для каждого из этих контактов. На рис. 35 изображены профили 3-го контакта. Между тремя профилями оказались значительные систематические различия, но только в абсолютной высоте положения, а не в форме кривых, которая в общем совпадает¹⁾.

Можно попробовать без всякого вычисления, «на глаз», найти систематические разности трех профилей:

¹⁾ Станция *L* расположена в 100 км от *B*. Это значит, во-первых, для нее затмение наступает на 1^m46^s раньше, и, во-вторых, имеются разности из-за либрации и проекции. Было бы ошибкой предполагать, что в методе Бонсдорфа вследствие малого масштаба изображений глубины долин получились недостаточно отчетливо и поэтому вышли слишком малыми, как это кажется в сравнении с Хайном и Линдبلادом.

а) согласующим параллельным перемещением в направлении h

$$B \text{ к } H = -0'',2,$$

$$B \text{ к } L = +0,6,$$

$$L \text{ к } H = -0,8;$$

б) согласующими поворотами вокруг нуль-пункта координатной системы южного конца к востоку (северного конца к западу)

$$B \text{ к } H \text{ на } -0'',2 \text{ при } S = 30^\circ$$

$$B \text{ к } L \text{ » } 0,0 \text{ » } S = 30$$

$$L \text{ к } H \text{ » } -0,2 \text{ » } S = 30$$

Если принять, что L правильно (хотя это не доказано), то положительный параллельный перенос B в L на $+0'',6$ означает, что при этой операции лунный профиль B лежит слишком низко по сравнению с L . Он должен, следовательно, быть приведен в совпадение с L постоянной поправкой $+0'',6$. Отрицательная поправка поворота означает, что при этой операции южный конец профиля B лежит слишком глубоко по сравнению с L и должен быть приведен в совпадение с L поворотом по часовой стрелке.

Бонсдорф строго сравнивает три профиля при каждом контакте по формуле

$$\Delta h + v = x + yS + zh, \quad (4.21)$$

чтобы привести их к совпадению в отношении систематических разностей. Он определяет коэффициенты x , y , z из наблюдаемых разностей Δh . Здесь zh обозначает малую эмпирическую поправку масштаба по вертикали.

Результаты сравнения:

1. Среднее арифметическое средних высот x профилей 2-го и 3-го контактов над принятым лунным горизонтом дает поправку $\Delta(R - R')$ в разность радиусов Солнца и Луны. Если считать R' безошибочным, то отсюда можно получить поправку среднего радиуса Луны.

2. Полуразность высот x 2-го и 3-го контактов дает поправку Δt_0 принятого момента середины полной фазы и отсюда же побочно поправку Δl положения наблюдательной станции в направлении центральной линии.

3. Среднее арифметическое поворотов профилей 2-го и 3-го контактов дает поправку позиционного угла середины серпа и

побочно поправку Δq положения станции в направлении, перпендикулярном центральной линии.

$$\Delta(R - R') = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \text{ (в секундах дуги),}$$

$$\Delta t_0 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3) \text{ (в секундах дуги)} = \frac{1}{2v}(x_2 - x_3) \text{ (в сек), (4.22)}$$

$$\Delta l = \frac{E}{2 \cdot 206265}(x_2 - x_3) \text{ (в м),}$$

$$\Delta q = \frac{E}{2 \cdot 206265}(y_2 + y_3) \text{ (в м).}$$

Здесь E — расстояние лунного края от пункта наблюдения в средний момент наблюдений, который достаточно хорошо известен из теории.

Кроме сравнения наблюдений с предвычислениями, Бонсдорф произвел еще на геодезической основе (по расстояниям) сравнение положения станции B относительно станции L . Имея следующие данные:

$$E = 4,125 \cdot 10^8 \text{ м} \quad v = 0'',4721 \text{ сек}^{-1}$$

$$x_2 = +0'',2128 \quad y_2 = -0'',298$$

$$x_3 = +0'',5830 \quad y_3 = -0'',134$$

он получает

$$\Delta(R - R') = +0'',398 \pm 0'',011 \quad \Delta l_B = -370 \text{ м} \pm 23 \text{ м (примерно NW)}$$

$$\Delta t_0 = -0'',185 \pm 0'',011 \quad \Delta q_B = -434 \text{ м} \pm 106 \text{ м} (\sim \text{NO})$$

$$= -0^s,392 \pm 0^s,024$$

Из работы Бонсдорфа можно сделать вывод, что каждый метод обладает своими собственными систематическими ошибками. При относительном сравнении одним и тем же способом эти ошибки в каждом методе в большей части исключаются; однако до настоящего времени степень этого исключения все еще неясна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Urey H. C., The Planets, London, 1952, S. 24.
2. Норманн J., Über die gravimetrische und astronomische Bestimmung von Lotabweichungen und ihre Auswirkung auf trigonometrische Netze, Veröff. Inst. f. Erdmessung, Nr 12, Bamberg, 1950, S. 100.
3. Вöhme S., Bearbeitung der Aufnahmen von F. Hayn zur Ortsbestimmung des Mondes, Astron. Nachr., 256, 356 (1953).

4. Illigner H., Bestimmung des Mondhalbmessers und Mondortes aus 17 Plejadenbedeckungen unter Berücksichtigung des Haynschen Mondprofils. *Astron. Nachr.*, **253**, 293 (1934).
5. Ball L. de, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Leipzig, 1912.
6. Hayn Fr., Selenographische Koordinaten III. und IV. Abh. *Sächs. Akad. Wiss.*, **30** (1907), **33** (1914).
7. Atkinson R. d'E., The Computation of topocentric Librations, *Month. Not.*, **III**, S. 448 (1951).
8. Murray C. A., Topocentric Librations for an Eclipse Station, *Month. Not.*, **114**, 676—679 (1954).
9. Strzalkowski A., The Determination of the Irregularities of the Moon's Limb. *Acta, Astron.*, Reihe C, Bd. 5, Krakau, 1952, S. 12—15.
10. Kukkamäki T. J., Hirvonen R., The Finish Solar Eclipse Expeditions 1947, *Veröff. Finn. Geod. Inst.*, Nr 44, Helsinki, 1954, S. 39.
11. Kristenson H., The Lunar Contours at the Solar Eclipse of 1954, June 30. *Ark. Astron.*, 411—416 (1954).
12. Kristenson H., Spectrophotometric Determinations of Contact at Total Eclipses of the Sun, *Obs. Ann. Stockholm*, **17**, Nr 1 (1951).
13. Fujinami S., Ina T., Kawai S., On the Profile of the Moon's Silhouette, *Astron. Soc. Japan*, **6**, Nr 2, 67—75 (1954).
14. Banachiewicz Th., Sur la détermination du profil de la lune, *Acta Astron. Reihe C*, Bd. 5, Krakau, 1952, S. 29—32.
15. Weimer Th., Occultations d'étoiles et profils lunaires, *Bull. géod.*, 37—46 (1954).
16. Watts C. B., Adams A. N., Photographic and photoelektric Technique for Mapping the marginal Zone of the Moon, *Astron. J.*, Nr 1183, 82—83.
17. Watts C. B., Draft Report Dublin, 1955.
18. Watts C. B., Sky and Telescope, April 1950.
19. BONDSDORFF I., Determination of the inner Contact Moments from the 1945 Solar Eclipse Pictures, Aus dem Nachlass bearbeitet und mitgeteilt von R A Hirvonen, *Veröff. Finn. Geod. Inst.*, Nr 46, Helsinki, 1955, S. 201—208.

ШКАЛА ВРЕМЕНИ И АСТРОНОМИЧЕСКИЕ
ЕЖЕГОДНИКИ

§ 1. Неравномерность вращения Земли

Измерение времени до последних десятилетий основывалось на предположении о равномерности вращения Земли вокруг ее оси. Однако анализ длительных рядов астрономических наблюдений показал, что, кроме доказанных с помощью кварцевых часов короткопериодических колебаний, существуют также вековые и неправильные изменения в скорости вращения Земли. Поэтому среднее солнечное время, получаемое из наблюдений прохождения звезд через меридиан, не является равномерным временем.

С другой стороны, существует время, по своей сути равномерное, которое лежит как независимое переменное в основе вычисления эфемерид по законам ньютоновской механики. Отклонение полученного из наблюдений среднего солнечного времени от равномерно текущего эфемеридного времени проявляет себя в согласно наступающих различиях между наблюдаемыми и вычисленными положениями тел солнечной системы. Эти различия могут быть использованы для определения эмпирическим путем поправки времени ΔT , для перехода от среднего солнечного времени к эфемеридному. Этот эмпирически полученный равномерный масштаб времени служит в астрономии эквивалентом теоретического инерциального времени, которое непосредственно не может быть связано со средним солнечным временем.

Определение поправки времени ΔT относится к астрономическим задачам методов, изложенных в этой книге. Одновременно эти определения образуют существенную предпосылку для надежного вывода наиболее интересующих геодезических неизвестных. Учитывая геодезические цели, необходимо ближе познакомиться с астрономической проблемой времени (§ 1—3). Фундаментальное рассмотрение этого предмета можно найти в работе Гондолача [1], где приведен обширный указатель литературы (до 1952 г.), относящийся к этой проблеме¹⁾.

¹⁾ См. также книгу: Munk W., Macdonald G., The rotation of the Earth, Lnd.—N. Y., Cambridge Univ. Press, 1960 (готовится русский перевод). — Прим. ред.

Для наглядной интерпретации неравномерности вращения Земли вращающуюся Землю рассматривают как ошибочно идущие часы и используют понятия, употребляемые в технике измерения времени. Правильно идущими часами считают такие часы, которые показывают эфемеридное время. Поправка времени ΔT , которую следует прибавить к даваемому Землей-часами среднему солнечному времени, чтобы получить эфемеридное время, может быть рассмотрена как *ход часов*. При отрицательном

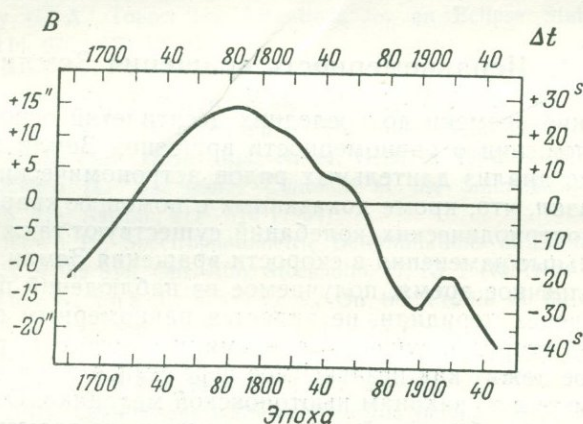


Рис. 36. Флуктуации и соответствующие поправки моментов по Спенсер-Джонсу [2].

ходе Земля-часы идут вперед (например, 1900: $\Delta T = -4$ сек); при положительном ходе отстают (например, 1950: $\Delta T = +29$ сек).

Таким образом, суточный ход Земли-часов показывает, на сколько за 24 часа она отстает в своем вращении (положительный ход) или насколько уходит вперед (отрицательный ход). С обратным знаком суточный ход дает поправку, которая переводит наблюдаемую по Земле-часам продолжительность суток в равномерную продолжительность суток эфемеридного времени.

Наблюдаемые неравномерности масштаба времени обычно подразделяют на три категории.

а) *Вековое замедление вращения Земли*, установленное астрономическим путем в исторический промежуток времени. Продолжительность суток увеличивается за 100 лет на $0,00164$ сек вследствие приливного трения, которое связано с значительным расходом энергии на берегах замкнутых морей. Через 100 лет это приводит к изменению поправок Земли-часов на $0,00082 \cdot 100 \cdot 365 = +30$ сек.

б) *Неправильные колебания*, которые выявляются по так называемым «флуктуациям» в движениях Луны, Солнца и планет из астрономических наблюдений (см. § 2).

Флуктуации показаны на рис. 36. На левой шкале приведены неправильные колебания B (в секундах дуги) средней долготы Луны [2]; правая шкала позволяет определить соответствующие поправки времени $\Delta t = 1,82144 B$ относительно равномерно замедляющегося вращения Земли. Рис. 37 показывает изменение

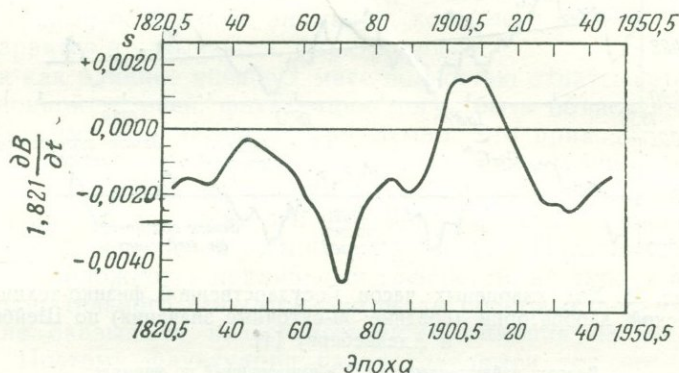


Рис. 37. Изменение продолжительности суток вследствие флуктуаций по Гондолачу [1].

продолжительности суток за период с 1820 по 1850 гг., полученное дифференцированием средних годовых величин, снятых с рис. 36. Величины на рис. 37 суть превышения некоторой средней продолжительности суток, которые получаются после учета равномерно замедляющегося вращения Земли.

Максимальные суточные хода (1871: $-0,005$ сек; 1907: $+0,002$ сек) сами по себе незначительны. Однако, поскольку неправильность хода сохраняет в течение большого промежутка времени одинаковый знак, это вызывает значительное изменение поправки часов (например, на рис. 36 для 1785: $+27$ сек; 1944: -36 сек). Поправка часов в -36 сек соответствует отклонениям в долготах Луны и Солнца соответственно на $+19",8$ и $+1",5$. С помощью современных кварцевых часов флуктуации определяться не могут, ибо постоянство хода этих часов не может быть гарантировано для достаточно продолжительного периода времени. Напротив, это ожидается от атомных часов — новых часов, уже построенных в последнее время во многих странах.

Физические процессы, которые являются причиной появления флуктуаций, еще не ясны. По исследованиям Спенсер-Джонса [3] неправильные колебания вращения Земли вызываются пере-

мещающейся в ядре Земли материей, которая путем электромагнитных взаимодействий связана с мантией Земли и вследствие ее электрической проводимости может быть привлечена также для объяснения вековых вариаций земного магнетизма.

в) *Колебания с годичным периодом.* Эти колебания были установлены главным образом с помощью кварцевых часов [4].

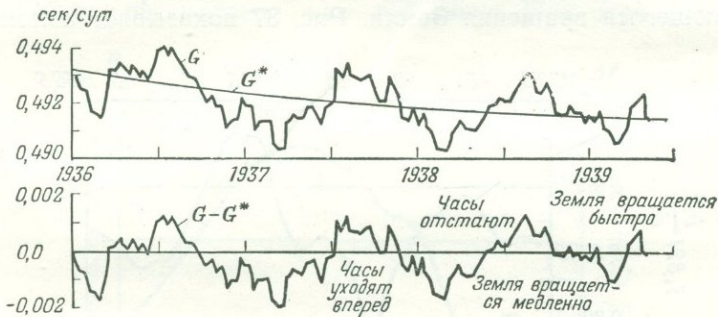


Рис. 38. Ход кварцевых часов Государственной физико-технической лаборатории (средние 30-суточные значения) по Шейбе и Адельсбергу [4].

Вверху: наблюдаемый ход G и выравненный по формуле

$$G^* = G + at + bt^2.$$

Внизу: ход $G - G^*$, приписываемый колебаниям скорости вращения Земли.

Если исключить из общего хода кварцевых часов параболическое его изменение, называемое старением, то наряду с неправильными изменениями хода (порядка $\pm 0,0003$ сек/сутки) останутся еще изменения годового периода и менее выраженные — полугодичного; амплитуда годового периода заключена между 0,001 и 0,002 сек, а экстремумы приходятся на март и август месяцы (рис. 38).

Мицц и Мунк в [5] привели доказательство того, что общее воздействие ветров (с годичным периодом) и приливы в твердой Земле (с полугодичным периодом) могут вызывать изменения продолжительности суток порядка нескольких тысячных секунды времени. Изменение давления воздуха, циркуляции в океанах, подъем и опускание верхних слоев Земли, таяние льдов могут играть при этом лишь незначительную роль.

§ 2. Флуктуации в движении Луны

Положения Луны на небе, полученные в результате непрерывных наблюдений в течение столетий (с помощью обработки наблюдения затмений они могут быть прослежены в далекое

прошлое), можно сравнить с положениями, вычисленными по гравитационной теории с учетом влияния всех масс солнечной системы. Разница между теорией и наблюдениями может быть объяснена вековым замедлением вращения Земли, которое является следствием приливного трения и которое, со своей стороны, вызывает изменение элементов орбиты Луны. Оба эти эффекта, проявляющие себя в видимом вековом ускорении движения Луны, нельзя разделить по наблюдениям одной Луны. Анализ движения Луны показывает, кроме того, еще достаточно значительные остаточные аномалии, которые носят беспорядочный характер и называются *флуктуациями*.

Так как влияние внешних масс полностью охватывается гравитационной теорией, флуктуации могут быть объяснены лишь неизвестными причинами внутри Земли. Это приводит к предположению, что отдельные части массы Земли меняют свое положение в теле Земли и что связанные с этим изменения момента инерции относительно оси вращения являются причиной неправильных изменений земного вращения. Поскольку здесь, в противоположность приливному трению, не наступает изменения вращательного импульса Земли, то подобные перемещения масс не оказывают непосредственного влияния на движение Луны. Поэтому флуктуации рассматриваются как проявление одних неправильностей вращения Земли.

Связь среднего солнечного времени, основывающегося на вращении Земли, и равномерного эфемеридного времени можно получить из наблюдений движения небесных тел. Луна для таких определений является наиболее выгодным объектом, поскольку благодаря ее быстрому движению по небу с наибольшей отчетливостью выявляются отклонения от равномерного масштаба времени. Поскольку вековое замедление вращения Земли вызывает реальные изменения элементов орбиты Луны, обусловленные законом сохранения момента количества движения, то точный результат возможно получить лишь путем привлечения более далеких небесных тел.

Многолетние наблюдения Солнца и планет Меркурия и Венеры, движения которых известны очень точно, показывают, что и у этих небесных тел существуют отклонения от эфемерид, вычисленных на основании закона тяготения и притом такого же характера, как и у Луны; только эти отклонения в соответствии с более медленным движением этих светил имеют меньшую величину. Различие между наблюдениями и теорией может быть разложено на вековую составляющую (замедление вращения Земли) и на неправильную часть, в которой проявляются флуктуации. В настоящее время можно с уверенностью заключить, что наблюдаемые у этих светил отклонения от теории в основном являются следствием изменения вращения Земли.

Для уклонения средней долготы Луны от теории де Ситтер [6] в 1927 г. вывел из анализа обширного наблюдательного материала следующее выражение:

$$\Delta L_{\zeta} = L_{н.} - L_{т.} = -3'',09 + 2'',52T + 5'',22T^2 + B, \quad (5.1)$$

где B (в секундах дуги) обозначает неправильные флуктуации в наблюдаемой средней долготы $L_{н.}$; T — время в юлианских столетиях (по 36 325 средних солнечных суток) от 1800,0. Теоретическая долгота $L_{т.}$ была взята из броуновских таблиц Луны (см. § 4), причем для получения чисто теоретической долготы из таблиц был исключен учтенный в них эмпирический член

$$L_{т.} = \text{Табл. значение} - 10'',71 \sin(140^\circ, 0T + 100^\circ, 7) \quad (T \text{ от } 1800,0).$$

В уравнении (5.1) первые два члена (поправка нуль-пункта и среднего движения) введены для возможно более лучшего согласования вычисленных долгот с современными наблюдениями; они не имеют поэтому теоретического значения. Член с T^2 представляет вековое ускорение движения Луны. Его нельзя отождествлять с вековым замедлением вращения Земли, потому что в нем содержится также и реальное изменение движения Луны, которое компенсирует уменьшение вращательного импульса Земли из-за приливного трения в соответствии с законом сохранения момента количества движения в системе Земля — Луна. Главное значение уравнения (5.1) следует усматривать в том, что оно определяет флуктуации B — неправильные колебания наблюдаемой средней долготы Луны и тем самым дает основу для вычисления соответствующей поправки времени (§ 3).

Если из уравнения (5.1) получены флуктуации B , то они могут быть использованы для определения аналогичным путем вековых ускорений Солнца, Меркурия и Венеры. Эти ускорения, в отличие от векового ускорения Луны, могут рассматриваться как отражение замедления вращения Земли. Для уклонений средних долгот этих небесных тел имеют место следующие выражения [2]:

$$\begin{aligned} \Delta L_{\odot} &= a + bT + cT^2 + \frac{n_{\odot}}{n_{\zeta}} B, \\ \Delta L_M &= a_M + b_M T + \frac{n_M}{n_{\odot}} cT^2 + \frac{n_M}{n_{\zeta}} B, \\ \Delta L_V &= a_V + b_V T + \frac{n_V}{n_{\odot}} cT^2 + \frac{n_V}{n_{\zeta}} B. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Значения поправок средней долготы Солнца (ΔL_{\odot}), Меркурия (ΔL_M) и Венеры (ΔL_V) Спенсер-Джонс нашел из сравнения многолетних наблюдений с теорией Ньюкомба. Написанные по

аналогии выражений (5.2) исходят из предположения, что полученные из наблюдения Луны флуктуации B должны проявлять себя и в долготах Солнца, Меркурия и Венеры, причем эффект проявляется в уменьшенном виде в отношении среднего движения n упомянутых светил к среднему движению Луны n_{ζ} . Вековые ускорения этих небесных тел (члены с T^2 , чистое отражение замедления вращения Земли) должны относиться как их средние движения. Однако по вышеупомянутым причинам для Луны этого не получается и поэтому коэффициент c не может быть принят равным $5'',22 \frac{n_{\odot}}{n_{\zeta}}$. Коэффициенты первых двух членов представляют поправки нуля-пункта долготы и среднего движения. Они служат для согласования теоретических долгот и новых наблюдений и не выражают никаких реальных изменений в движениях.

По исключении коэффициентов a и b Спенсер-Джонс путем выравнивания нашел для векового ускорения Солнца:

$$c = +1'',23 \pm 0'',06.$$

После подстановки найденных выравниванием коэффициентов в уравнения (5.2) флуктуации B могут быть вычислены отдельно для Солнца, Меркурия и Венеры из остаточных уклонений долгот. Полученные ряды значений хорошо согласуются как между собой, так и с флуктуациями B , выведенными из наблюдений Луны по уравнению (5.1). Поэтому не может быть сомнения в земной причине происхождения флуктуаций.

Поправка к средней долготе Солнца таблиц Ньюкомба, согласующая теорию и наблюдения, была найдена Спенсер-Джонсом в виде

$$\Delta L_{\odot} = +1'',00 + 2'',97T + 1'',23T^2 + 0,074804B'', \quad (5.3)$$

$$\frac{n_{\odot}}{n_{\zeta}} = 0,074804$$

(T в юлианских столетиях от 1900, январь 0,5 всемирного времени).

Поправка долготы ΔL_{\odot} объясняется не только несовершенством теории Солнца Ньюкомба. Главным образом она вызывается тем, что в основе наблюдений лежит неравномерное среднее солнечное время, в то время как теоретические долготы вычислены относительно равномерного времени (эфемеридного). Уравнение (5.3) дает возможность согласовать обе шкалы времени между собой. Для этого используются флуктуации B , определенные по (5.1) из анализа движения Луны. Вековое же ускорение (член с T^2) получается из анализа движения Солнца по исключении из него флуктуаций B , выведенных по Луне.

Из методов, применяемых для определения флуктуаций, на первом месте стоят покрытия звезд (гл. VI). Наряду с ними в настоящее время используются лунные камеры Марковица — современная аппаратура для производства наблюдений, необходимых для решения той же задачи (гл. XIV). Чтобы дать представление о численных значениях, которые лежат в основе рис. 36, приведем небольшую часть таблицы сопоставления некоторых величин, составленную Гондолачем [1]. Для определения флуктуаций уравнение (5.1) может быть записано в следующем виде:

$$B = \Delta L_{\zeta} - 4'',65 - 12'',96T - 5'',22T^2 \quad (5.4)$$

(ΔL_{ζ} — наблюдаемая минус теоретическая долгота; T считается от 1900,0).

Таблица 8

Вычисление флуктуаций B

Эпоха	Наблюдение минус теория ΔL_{ζ}	Поправка по уравнению (5.4) (де Ситтер)	Флуктуации B	Источник для ΔL_{ζ}
1940,5	-8'',73	-10'',76	-19'',49	Брауэр и Ваттс, <i>Astron. J.</i> , 52, 174 (по покрытиям звезд)
41,5	-8,62	-10,93	-19,55	
42,5	-9,02	-11,10	-20,12	
43,5	-8,86	-11,28	-20,14	
1944,5	-9,09	-11,45	-20,54	Nautical Almanac Office, <i>Astron. J.</i> , 53—57 (то же)
45,5	-9,39	-11,63	-21,02	
46,5	-9,45	-11,81	-21,26	
47,5	-9,37	-11,98	-21,35	
1948,5	-9,52	-12,16	-21,68	

§ 3. Определение равномерной шкалы времени

Среднее солнечное время является основной шкалой времени при регистрации моментов всех астрономических наблюдений. Оно основывается на вращении Земли и выводится по истинному звездному времени, получаемому из астрономических наблюдений.

Переход к среднему звездному времени производится путем учета нутации по прямому восхождению. Местное среднее солнечное время получается по среднему звездному времени из соотношения:

$$\text{Ср. солнечн. вр.} = \text{Ср. звезд. вр.} - \alpha \text{ ср. Солнца} - 12^{\text{h}}$$

Всемирное время есть среднее солнечное время на меридиане Гринвича. Вследствие изменения вращения Земли оно под-

вержено вековым, периодическим и неправильным изменениям (§ 1). Учет последних особенно труден, поскольку их величины необходимо непрерывно определять заново. Если перечисленные изменения исключить путем соответствующих поправок, то в принципе получаем эмпирическим путем из среднего солнечного времени равномерную шкалу времени — так называемое эфемеридное время.

Эфемеридное время есть мера времени фиктивного равномерного вращения Земли, которую необходимо каждый раз заново выводить из неравномерного реального вращения в тесной связи с астрономическими наблюдениями, поскольку до настоящего времени шкалы времен двух далеко отстоящих друг от друга эпох не могут быть точно увязаны без применения астрономических методов. Основная трудность заключается в том, что эфемеридное время не может быть получено при проведении любых наблюдений, а может быть определено лишь впоследствии. Флуктуации B нельзя экстраполировать и обычно проходит несколько лет, прежде чем их величины станут известны из анализа движения Луны.

В астрономической практике используются обе шкалы времени. Среднее солнечное время употребляется при наблюдениях, а эфемеридное время — для планетных теорий. Поправка ΔT , которая позволяет перейти от одной шкалы времени к другой, определяется из наблюдений Луны, Солнца и подходящих планет на основе принципа, что разности между наблюдаемыми и вычисленными положениями, возникающие вследствие неравномерности вращения Земли, должны исчезнуть для каждой прошлой эпохи. Случайные разности вследствие ошибок наблюдения не опасны, если их держать в достаточно малых пределах.

В зависимости от того, какое время рассматривается — среднее солнечное для наблюдений или эфемеридное для теории планет, — оно задается несколько по-разному. Для эфемеридного времени долготу Солнца для данного момента принимают равной величине, приведенной в таблицах Ньюкомба (чистая гравитационная теория). Если задано среднее солнечное время, то, чтобы получить соответствующую долготу Солнца, необходимо в таблицы Ньюкомба ввести поправку (5.3), выведенную Спенсер-Джонсом

$$\Delta L_{\odot}'' = +1'',00 + 2'',97T + 1'',23T^2 + 0,074804B''.$$

Эти два времени, характеризующиеся одинаковыми величинами, различаются на разность ΔT

$$\Delta T = \text{Эфемеридное время} - \text{Всемирное время}. \quad (5.5)$$

Вследствие разности времен ΔT средняя долгота Солнца изменяется согласно изложенному выше на ΔL_{\odot} . Поскольку

средняя долгота Солнца увеличивается на $1''$ за 24,349480 сек, то согласно уравнению (5.5) разность времен

$$\Delta T^s = 24,349480 \Delta L_{\odot}''$$

или

$$\Delta T^s = 24^s,349 + 72^s,318T + 29^s,950T^2 + 1,82144B'' \quad (5.6)$$

(T в юлианских столетиях от 1900, январь 0,5 всемирного времени).

Уравнения (5.5) и (5.6) дают определение эфемеридного времени (Парижская конференция 1950 г.). Постоянный член приводит в совпадение начало счета эфемеридных суток и средних солнечных суток для момента вблизи 1900. Член с T так устанавливает длину эфемеридных суток, что она становится равной средней величине средних солнечных суток за период, охватываемый использованными наблюдениями. Член с T^2 компенсирует замедление вращения Земли вследствие приливного трения; член с B — неправильные изменения в скорости вращения, которые (предположительно) вызываются перемещением масс внутри Земли.

Для примера приведем таблицу разностей времен ΔT (пятая колонка), вычисленных по уравнению (5.6) со значениями B из табл. 8. Для сравнения приведены величины ΔT из American Ephemeris (1960), полученные на основании новых сглаженных значений величины B по Брауэру [7].

Таблица 9

Поправка времени ΔT (эфемеридное минус всемирное)

Эпоха	B (по табл. 8)	$a + bT + cT^2$ (ур-ние 5.6)	$1,82144 B$	ΔT	ΔT по Amer. Eph. 1960
1940,5	-19,49''	+58,55	-35,50	+23,05	+24,30
41,5	-19,55	+59,52	-35,61	+23,91	+24,71
42,5	-20,12	+60,49	-36,65	+23,84	+25,15
43,5	-20,14	+61,47	-36,68	+24,79	+25,61
1944,5	-20,54	+62,46	-37,41	+25,05	+26,08
45,5	-21,02	+63,45	-38,29	+25,16	+26,57
46,5	-21,26	+64,45	-38,72	+25,73	+27,08
47,5	-21,35	+65,46	-38,89	+26,57	+27,61
1948,5	-21,68	+66,47	-39,49	+26,98	+28,15

Эфемериды, опирающиеся на закон тяготения, выражают положения небесных тел в функции времени, которое, являясь независимой переменной, по своей сущности равномерно (эфемеридное время). Момент по эфемеридному времени означает та-

кое значение аргумента, для которого наблюденное положение совпадает с эфемеридным. Шкала времени в этом случае устанавливается из обратного соотношения, т. е. время выражается функцией положения и может быть этим путем определено эмпирически (см. гл. XIV, стр. 345—346).

§ 4. Улучшенная эфемерида Луны

При использовании Луны в качестве триангуляционной марки для определения геодезического положения на Земле основой для связи выбранных пунктов являются более или менее растянутые во времени наблюдения лунной орбиты. Поэтому наряду с обеспечением шкалы времени и развитием наблюдательной техники, обладающей достаточной производительностью, нужно особое внимание обратить на то, чтобы теория давала координаты Луны с той высокой точностью, которая необходима для решения поставленной задачи.

Публикуемые в астрономических Ежегодниках геоцентрические координаты Луны вычисляются с 1923 г. на основе броуновской теории движения Луны, которая с удивительной точностью математически воспроизводит этот в высшей степени сложный процесс. Теория Броуна представляет координаты Луны (долготу, широту и параллакс) в виде тригонометрических рядов как функции времени и принимает во внимание все гравитационные воздействия (Солнца, планеты, Земли, больших планет). Речь идет о более чем 1650 тригонометрических членах, коэффициенты которых даются с точностью $0'',001$ для долготы и широты и с точностью $0'',0001$ для параллакса. Сравнение с текущими наблюдениями показывает столь высокую точность теории Броуна, что в будущем эмпирически определенные коэффициенты могут получить только незначительные поправки [8]. Для облегчения вычислений Броун опубликовал в 1919 г. обширные таблицы объемом 650 страниц, которые были получены путем некоторого упрощения строгой теории. Это было вполне допустимо для того уровня наблюдательной техники. По этим таблицам Nautical Almanac Office до сих пор вычисляет эфемериду Луны до $0'',01$ с последующим округлением для склонения до $0'',1$ и для прямого восхождения до $0^s,01$ (до 1959 г.). Однако и с применением этих таблиц при вычислительных средствах того времени работа по расчету была достаточно трудоемкой, так что опытный вычислитель, предвычисляя положения Луны для каждых полусуток только-только успевал во время закончить вычисления [9].

В 1946 г. была создана электронная вычислительная машина SSEG и Эккерт [9] решил проверить с ее помощью точность броуновских таблиц, а также изыскать новые возможности для

прямого вычисления эфемериды Луны по формулам броуновской теории. Были вычислены 60 положений Луны через полусуточные интервалы времени (с 24 апреля по 24 мая 1948 г.) и сравнены с данными из астрономических Ежегодников.

Ожидалось, что вследствие накопления ошибок округления разности между вычислениями и таблицами Броуна достигнут порядка $0'',1$ и будут носить случайный характер. Однако они показали резко выраженный систематический ход с амплитудой $0'',1$ в долготе и $0'',15$ в широте.

Вулард в обстоятельном исследовании [10] выяснил причину этих систематических отклонений таблиц Броуна от строгой теории. В большей части они оказались обусловлены приближениями и упрощениями, введенными Броуном для упрощения формы таблиц и облегчения пользования ими. Эти разности не выходили за пределы точности наблюдения тех лет. Только в разностях широты была обнаружена часть, не учтенная при составлении таблиц.

Как видно по этим разностям, таблицы Броуна имеют легко устранимый недостаток. В таблицы включен эмпирический периодический член вида

$$+ 10''71 \sin(240^\circ,7 + 140^\circ,0T),$$

(где T отсчитывается в юлианских столетиях от 1900,0). Он был введен Броуном для объяснения флуктуаций средней долготы Луны, чтобы таким путем достичь возможно большей точности в предвычислении положения Луны. Однако эта цель не была достигнута. Много раз было показано, что вызываемые неправильными изменениями вращения Земли отклонения наблюдений от теории не могут быть представлены подобным выражением. Чтобы получить по таблицам среднюю долготу Луны, соответствующую гравитационной теории, необходимо ввести непериодический эмпирический член.

При современном состоянии наблюдательной техники нельзя пренебрегать упомянутыми выше систематическими отклонениями порядка $0'',1$, которые получены путем сравнения эфемерид, взятых по таблицам Броуна и вычисленных непосредственно по формулам броуновской теории. Важная роль, которую играет Луна для определения точного времени и в особенности для решения геодезической проблемы, требует точных ее эфемерид. В связи с этим Международный астрономический союз на ассамблее в Риме (1952 г.) постановил, что начиная с 1960 г. во всех астрономических Ежегодниках эфемериды Луны должны публиковаться с точностью до $0^s,001$ по прямому восхождению и до $0'',01$ по склонению, причем эфемериды должны базироваться на значениях долготы, широты и горизонтального параллакса, вычисленных непосредственно по тригонометрическим рядам

броуновской теории. По данным специального тома «Improved Lunar Ephemeris» [11] могут быть получены новые лунные эфемериды для прошлых лет (1952—1959).

American Ephemeris (Вашингтон) и Astronomical Ephemeris (Лондон) с января 1960 г. дают видимую широту и долготу Луны с точностью до $0'',01$ и горизонтальный параллакс с точностью до $0'',001$, отнесенные к истинному равноденствию. Долгота содержит дополнительный член в виде

$$+ 0'',018 \cos(l - 2D) + 0'',007 \cos 2D,$$

поскольку броуновская теория не полностью учитывает абберацию и, кроме того, короткопериодические члены нутации. По этим данным с истинным значением наклона эклиптики вычислены через 12-часовые интервалы прямое восхождение Луны с точностью $0^s,001$ и склонение с точностью $0'',01$. Эти видимые геоцентрические координаты отнесены к истинному экватору, истинной эклиптике и центру тяжести Луны. По этим величинам простым интерполированием получены прямые восхождения и склонения для каждого часового интервала, которые с точностью до единицы последнего знака ($0^s,001$ и соответственно $0'',01$) совпадают с фундаментальными данными теории.

Шкалой времени для новых лунных эфемерид служит эфемеридное время, определенное на основании солнечных таблиц Ньюкомба. Связь его с всемирным временем дается уравнениями (5.5) и (5.6). Чтобы применить эту шкалу времени для лунных эфемерид, пришлось исправить соответствующей поправкой долготу Луны, вычисленную по броуновской теории.

Наблюденная средняя долгота Луны L в момент T по всемирному времени, согласно уравнению (5.4), равна

$$L = L_{\text{б.}} + 4'',65 + 12'',96T + 5'',22T^2 + B'' \quad (5.7)$$

($L_{\text{б.}}$ без эмпирического члена; T от 1900,0). Чтобы привести лунную эфемериду к шкале времени солнечной эфемериды, нужно вычесть из уравнения (5.7) величину ΔL_t , на которую изменяется средняя долгота Луны за интервал времени $\Delta T = \text{E.T.} - \text{U.T.}$. Величина ΔL_t может быть выражена в секундах дуги, если уравнение (5.6) разделить на 1,82144

$$\Delta L_t = 13'',37 + 39'',70T + 16'',44T^2 + B'', \quad (5.8)$$

откуда

$$L = L_{\text{б.}} - 8'',72 - 26'',74T - 11'',22T^2. \quad (5.9)$$

Этой поправкой к броуновской теории (T в юлианских столетиях от 1900, январь 0,5) лунная эфемерида приводится к шкале времени, устанавливаемой солнечной эфемеридой.

Ввиду этого новая лунная эфемерида может быть использована для определения поправки времени ΔT . Если видимое геоцентрическое положение Луны получено из наблюдений для момента по всемирному времени, то, интерполируя соответствующее этому положению эфемеридное время, можно получить поправку ΔT . Величины ΔT , получаемые из длительных рядов наблюдений (средние по нескольким неделям или месяцам), могут служить для определения флуктуаций B [12]; именно согласно (5.6) имеем

$$1,821B'' = \Delta T^s - 24^s,349 - 72^s,318T - 29^s,950T^2.$$

При решении геодезических задач следует помнить, что новая и, вообще говоря, высокоточная лунная эфемерида пригодна не во всех случаях. В силу этих обстоятельств и при новой эфемериде, как и в прошлом, приходится улучшать относительную точность эфемерид на малом отрезке орбиты методами численного учета возмущений. В гл. VIII в сжатом виде будет изложен метод Зундмана, который позволяет произвести улучшение эфемериды внутри небольшого интервала времени.

§ 5. Данные, приводимые в астрономических Ежегодниках для предвычисления солнечных затмений

1. Содержание астрономических Ежегодников

К астрономическим Ежегодникам предъявляются различные требования. С одной стороны, они должны давать эфемериды небесных тел, чтобы можно было производить текущее сравнение теории с наблюдениями для вывода улучшения астрономических постоянных (масс и элементов орбит) и для установления шкалы времени. С другой стороны, астрономические Ежегодники служат для практических целей навигации и геодезии. Кроме того, с давних пор астрономические Ежегодники дают предвычисления астрономических явлений, в особенности заведений, и данные для подготовки их наблюдений на месте.

С 1960 г. в астрономических Ежегодниках произошли некоторые изменения. Американский и английский Ежегодники, выходявшие до 1959 г. под названиями "The American Ephemeris" и "The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris", с 1960 г. имеют одинаковое содержание. Все данные, используемые в астрономии и геодезии, впредь даются в двух томах. Содержание первого тома составляют данные для Солнца, Луны и планет; второй том содержит координаты звезд.

Первый том составляется совместно институтами теоретической астрономии Англии (Н. М. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory) и США (Nautical Almanac Office, United

State Naval Observatory). Он издается в обеих странах при совершенно одинаковом содержании под разными названиями. Английское издание называется *The Astronomical Ephemeris*, а американское — *The American Ephemeris*.

Содержание первого тома (Солнце, Луна, Планеты): Календарные даты; Положения Солнца, Луны, планет; Всемирное и звездное время; Эфемерида Солнца; Эфемерида Луны (видимые прямые восхождения и склонения для каждого часа и, кроме того, на один знак больше, чем давалось прежде); Эфемериды больших планет и малых планет: Цереры, Паллады, Юноны, Весты; Редукционные величины для перевода среднего места на видимое; Средние координаты для начала года 1078 ярких звезд; Данные о солнечных и лунных затмениях; Эфемериды для физических наблюдений Солнца, Луны, Марса, Юпитера, Сатурна; Эфемериды спутников Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна; Восход и заход Солнца, сумерки; Восход и заход Луны; Координаты и названия обсерваторий; Вспомогательные таблицы. Геоцентрические элементы и местные предвычисления покрытий звезд, как и местные данные для солнечных затмений, в этом издании не приводятся.

Второй том носит название «*Apparent Places of Fundamental Stars*» и издается Астрономическим вычислительным институтом в Гейдельберге. Этот том является результатом совместной работы Астрономического вычислительного института в Гейдельберге и Бюро долгот в Париже. Его содержание идентично предыдущим изданиям, вышедшим с 1941 г. Он содержит видимые места избранных 1535 фундаментальных звезд. Для звезд от экватора до склонения $\pm 81^\circ$ координаты даются через десять суток с точностью до $0^s,001$ и $0'',01$; для звезд со склонением больше 81° — через одни сутки с точностью до $0^s,01$ и $0'',01$. Следует отметить, что редукционные величины, необходимые для вычисления видимых мест других звезд, содержатся в первом томе Ежегодника.

Из основных астрономических Ежегодников упомянем также Астрономический Ежегодник СССР (Ленинград), *Connaissance des Temps* (Париж), *Almanaque Náutico* (Сан-Фернандо) и *Japanese Ephemeris* (Токио). *Astronomisch-Geodätische Jahrbuch* (Гейдельберг) и *Berliner Astronomische Jahrbuch* (Берлин) прекратили свое существование.

2. Данные астрономических Ежегодников для предвычисления солнечных затмений

В качестве «элементов затмения» даются:

Эфемеридное время (до 1960 г. — всемирное время) соединения Солнца и Луны по прямому восхождению до $0^s,01$,

Прямые восхождения Солнца и Луны и их часовые изменения для этого момента до $0^s,001$.

Склонения Солнца и Луны и их часовые изменения для момента соединения до $0'',01$.

Экваториальные горизонтальные параллаксы (до $0'',01$) и истинные радиусы Солнца и Луны в момент соединения (до $0'',1$).

В основу истинного радиуса Солнца в данных для солнечных затмений положена величина $15' 59'',63$ на расстоянии, равном 1 астрономической единице, без учета иррадиации (по Ауверсу, *Astron. Nachr*, **3068**, 367, 1891). В солнечной эфемериде радиус Солнца приводится с учетом иррадиации. Он основан на величине $16' 01'',18$ для расстояния, равного 1 а. е. Для лунного радиуса в данных для солнечных затмений используется величина

$$\sin R'_\zeta = 0,272274 \sin P_\zeta,$$

где P_ζ — экваториальный горизонтальный параллакс Луны. Этой величине соответствует (на среднем удалении) радиус Луны $15' 31'',87$, в то время как в лунной эфемериде за основу принимается значение радиуса (на среднем расстоянии) $15' 32'',58$, полученное Ньюкомбом (без поправки на иррадиацию).

На основе этих элементов затмения вычислены и приведены следующие данные, отнесенные к международному эллипсоиду:

а) Эфемеридное время и место (φ , λ) для начала и конца солнечного затмения (первое и соответственно последнее соприкосновение поверхности Земли с конусом полутени).

б) Эфемеридное время и место начала и конца центрального затмения (первое и соответственно последнее соприкосновение поверхности Земли с осью конуса тени).

в) Эфемеридное время и место центрального затмения в истинный полдень (прохождение оси тени через земную ось, при котором для некоторого места на земной поверхности центральное затмение наступает в полдень).

Кроме того, приводится мировая карта солнечного затмения, которая дает представление об общем его ходе. На ней обозначены границы видимости, центральная линия затмения и кривые, с которых можно снять приближенно время начала, середины и конца затмения для данного места.

Для полных и кольцеобразных солнечных затмений, кроме того, приводится таблица географических координат для пунктов центральной линии через интервалы 5 мин. Таблица содержит также продолжительность полной фазы и высоту Солнца над горизонтом для этих пунктов.

Все данные для солнечных и лунных затмений даются с 1960 г. для моментов по эфемеридному времени. В соответствии с этим даваемые для хода затмения географические дол-

готы мест считаются от так называемого эфемеридного меридиана, который лежит на $1,002738 \Delta T$ к востоку от Гринвичского. Если известна поправка ΔT (для момента наблюдения она известна только приближенно), то можно все моменты привести к всемирному времени вычитанием этой поправки. Долготы и часовые углы, отнесенные к Гринвичскому меридиану, получаются вычитанием $1,0027 \Delta T$ из приведенных в Ежегоднике величин.

Бесселевы элементы приведены для интервала 10 мин (с 1960 г. по аргументу эфемеридного времени), а именно: координаты x и y для центра тени на фундаментальной плоскости, радиусы круга тени и полутени (в единицах большой полуоси международного эллипсоида) и синус и косинус склонения оси тени. Все эти величины даются с шестым десятичным знаком. Часовой угол оси тени дается до $0^{\circ},1$, его часовое изменение с шестью значащими цифрами. Затем можно найти тангенсы углов раствора конусов тени и полутени (до шестого знака).

Для примера в гл. II и IX приведены числовые величины (в несколько сокращенном виде). В гл. VII будет рассказано о более полной информации, которая публикуется в виде таблиц и графиков в специальных изданиях астрономических институтов. Все данные, приводимые в этой книге, основываются на всемирном времени, поскольку примеры берутся для наблюдений до 1960 г.

3. Предвычисления по элементам, задаваемым по эфемеридному времени

Введение эфемеридного времени формально не внесло никаких изменений в вычисление эфемерид. Табличные величины получаются такими же. Нужно лишь принимать во внимание, что в настоящее время аргументом является эфемеридное время, а не всемирное.

Совсем по-другому обстоит дело с величинами, данными по эфемеридному времени и связанными с вращением Земли (например, часовой угол и географическая долгота). Эфемеридное время неудобно для вычисления часового угла, ибо зависимость часового угла от вращения Земли требует знания поправки ΔT .

Для более легкого вычисления приведенных, которые зависят от часового угла и географической долготы, введен так называемый эфемеридный меридиан. Он лежит на $1,002738 \Delta T$ к востоку от меридиана Гринвича и занимает в пространстве положение, которое имел бы нулевой меридиан, если бы Земля вращалась с постоянной угловой скоростью. Если отнести географическое положение и часовой угол к эфемеридному меридиану

(для этих величин вводятся обозначения «эфемеридная долгота» и «эфемеридный часовой угол»), то нужно предвычислять все явления, зависящие от вращения Земли в эфемеридном времени (например, моменты фаз солнечного затмения). Вычисленные формально то же самое, как и при употреблении всемирного времени и географических долгот.

Если элементы даны для эфемеридного времени, то при предвычислении солнечного затмения нужно часовой угол h оси тени

$$h = \mu - \lambda - 1,0027 \Delta T, \quad (5.10)$$

а также μ привести на эфемеридный меридиан. В заключение следует вычесть ΔT из вычисленных моментов фаз, чтобы получить данные в удобном для наблюдения всемирном времени.

Здесь возникает некоторая трудность, поскольку ΔT для времени наблюдения точно не известна. Она будет известна, как это неоднократно указывалось выше, лишь спустя некоторое время. Поэтому в уравнение (5.10) нужно ввести приближенную величину ΔT , что требует в последующем ревизии вычисления после уточнения величины поправки ΔT . При этом нет необходимости полностью повторять вычисления. Можно применить те же самые дифференциальные формулы, которые были выведены для вычисления основных данных для близлежащего пункта ($\varphi + \Delta\varphi$, $\lambda + \Delta\lambda$, $H + \Delta H$) по данным для пункта с координатами (φ , λ , H) и по изменениям координат $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, ΔH . Эти формулы приводятся, например, в *Astronomical Ephemeris*, 1960, стр. 513—514.

Если известна окончательная поправка $\Delta T + \Delta T'$, то предвычисленную величину эфемеридной долготы нужно исправить на $\Delta\lambda = 1,0027\Delta T'$. Если ввести эту величину в дифференциальные формулы, в которых $\Delta\varphi$ и ΔH положены равными нулю, то получим поправки к предвычисленным моментам фаз по эфемеридному времени. Для получения моментов фаз по всемирному времени необходимо из улучшенных моментов по эфемеридному времени исключить $\Delta T + \Delta T'$. Вместо этого можно улучшенные моменты фаз привести на всемирное время с приближенной поправкой и затем вычесть из них уточненную поправку $\Delta T'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Condolatsch F., Erdrotation, Mondbewegung und das Zeitproblem der Astronomie, Veröff. Astronom. Recheninst. Heidelberg, Nr. 5, Karlsruhe, 1953.
2. Spencer Jones H., The Rotation of the Earth, and the Secular Accelerations of the Sun, Moon and Planets. *Mon. Not.*, **99**, 541—558 (1939).
3. Spencer Jones H., The Rotation of the Earth, *Handbuch der Physik*, Bd. 47, 1956.

4. Scheibe A., Adelsberger U., Die Gangleistungen der PTR-Quarzuhren und die jährliche Schwankung der astronomischen Tageslänge, Z. Physik., 127, 416—418 (1950). Über die Phase des Standes der Erde, Z. Physik., 129, 233—245 (1951).
5. Mintz Y., Munk W., The Effect of Winds and bodily Tides on the Annual Variation in the Length of Day, Mon. Not. Geophys. Suppl., 6, 566—578 (1954).
6. Sitter W. de, On the Secular Accelerations and the Fluctuations of the Longitudes of the Moon, the Sun, Mercury and Venus. Bull. Astron. Inst. Netherlands, 4, 21—38 (1927).
7. Brouwer D., A Study of the Changes in the Rate of Rotation of the Earth. Astron. J., 57, 125—146 (1952).
8. Brown E. W., Tables of the Motion of the Moon, Yale University Press, New Haven, 1919.
9. Eckert W. J., Rebecca Jones, Clark H. K., Construction of the Lunar Ephemeris, Abgedruckt im Anhang zu Improved Lunar Ephemeris, Washington, 1954.
10. Woolard E. W., Comparison of the Tabular Coordinates of the Moon with Coordinates computed directly from the theoretical Expressions, for selected Dates in April — May 1948, Abgedruckt im Anhang zu Improved Lunar Ephemeris, Washington, 1954.
11. Improved Lunar Ephemeris 1952—1959, a joint Supplement to the American Ephemeris and the British Nautical Almanac, Washington, 1954.
12. Clemence G. M., On the System of Astronomical Constants, Astron. J., 53, 169—179 (1948).

ГЛАВА VI

ПОКРЫТИЯ ЗВЕЗД

§ 1. Введение

В этой главе мы рассмотрим методику наблюдения покрытий звезд Луной с помощью простых средств (труба с небольшим увеличением или теодолит, хронометр или хронограф). В результате измерений в этом случае получается только момент покрытия (или появления) звезды у лунного края (с точностью $0,1—0,01$ сек). Необходимые редукции, в особенности учет рельефа лунного края, производятся при этом обычно не самим наблюдателем, а каким-либо центральным учреждением.

Подобные наблюдения представляют прежде всего большой интерес для астрономии, так как из них получаются точные положения Луны, служащие для вывода эфемеридного времени (поправка ΔT). Поэтому в астрономических изданиях ежегодно публикуются данные, с помощью которых можно заранее вычислить для любого места Земли приближенные моменты доступных наблюдению покрытий (§ 2). Поскольку покрытия пригодны и для геодезических целей, то эти данные могут успешно использоваться и для этого. Они являются готовой программой наблюдений, содержащей звезды до $7^m,5$.

В зависимости от того, будет ли покрытие звезды использовано для определения положения Луны по заданным положениям звезды и наблюдателя или для вывода геоцентрических координат пункта наблюдения по заданным положениям на небе звезды и Луны, — требования, предъявляемые к точности, естественно, совершенно различны. Так, например, ошибка $\pm 0,1$ сек в наблюдаемом моменте покрытия при средней угловой скорости движения Луны, равной $0'',5 \text{ сек}^{-1}$, вызывает в получаемом положении Луны ошибку, равную всего $0'',05$ (не считая влияния рельефа лунного края и ошибок положения звезды). Напротив, при геодезическом определении земного пункта угловая ошибка наблюдаемого положения Луны входит с коэффициентом 60, который соответствует расстоянию до Луны в земных радиусах. Следовательно, ошибке $0'',05$ в положении Луны соответствует ошибка $\sim 3''$ в геодезическом положении,

Поэтому наблюдения покрытий звезд в первую очередь ценны для контроля движения Луны. Необходимая для геодезических целей более высокая точность достигается лишь накоплением большого числа наблюдений на каждой станции. По предложению Ламберта [1], число наблюдений можно было бы увеличить, если не ограничивать программу наблюдений только теми звездами, для которых имеются предвычисления, и систематически использовать все видимые в трубу звезды, встречающиеся на пути Луны. Если точные координаты этих звезд неизвестны, последние можно рекомендовать для фотографических наблюдений обсерваториям, занимающимся получением звездных каталогов.

Для определения геодезического положения в настоящее время практическое значение имеет только специальный метод наблюдения покрытий, разработанный О'Кифом; он заключается в объективном наблюдении момента покрытия при помощи электронной аппаратуры, причем влияние неправильностей лунного края может быть исключено специальной организацией наблюдений. Этому методу мы посвятим главу XIII; здесь же рассмотрим покрытия звезд в общем виде и покажем на числовом примере последовательность вычислений по Бесселевой теории затмений. Сначала приведем сведения о том, какие данные можно взять из астрономических изданий для подготовки наблюдений.

§ 2. Данные для приближенного предвычисления покрытия

Согласно выводам гл. V, непрерывные ряды точных наблюдений положения Луны используются для надежного определения флуктуаций B , необходимых для получения однородного масштаба времени. Для этой же цели особенно пригодны покрытия звезд, поскольку здесь даже со скромными инструментами могут быть получены хорошие результаты. Кроме того, в осуществлении наблюдений, кроме обсерваторий, может принимать участие и большой круг любителей астрономии. Еще в 1927 г. Броун в статье [2] призывал к увеличению числа наблюдений покрытий звезд. Для осуществления этого плана было организовано предвычисление покрытий и разработан однородный метод наблюдений для многих центральных станций.

В American Ephemeris до 1959 г. давались Бесселевы элементы всех наблюдаемых на Земле в течение года покрытий звезд до $7^m,5$. Там публиковались: всемирное время геоцентрического соединения звезды и Луны по прямому восхождению, гринвичский геоцентрический часовой угол H звезды и Луны

в момент T (H считается положительным к западу), ордината y оси цилиндра тени в Бесселевой фундаментальной плоскости для момента T (абсцисса оси тени в момент T равна нулю); часовые изменения x' и y' координат оси тени (ориентировка системы координат та же, что и в гл. II, ось z направлена на звезду).

Для того чтобы избавить наблюдателя от дальнейшей вычислительной подготовки (вычисление местных моментов исчезновения и появления по Бесселевым элементам), Nautical Almanac Office в Лондоне ежегодно предвычисляет примерно для 70 пунктов, распределенных по всей Земле (так называемых основных пунктов), видимые там покрытия звезд до $7^m,5$ для благоприятных условий наблюдения (исключаются покрытия, близкие к полнолунию, касательное прикосновение, покрытия при малой высоте звезды над горизонтом и слишком большой высоте Солнца). Там публикуются: приближенный момент всемирного времени, позиционный угол контакта (отсчитываемый от северной точки диска Луны к востоку) и значения двух коэффициентов a и b , с помощью которых для места с координатами (φ, λ) на расстоянии до 300 км от основного пункта (φ_0, λ_0) находится дифференциальное изменение времени контакта, зависящее от разности географических положений

$$\Delta t = a \Delta \lambda + b \Delta \varphi. \quad (6.1)$$

Δt получается в минутах времени (точность 0,1 мин), если $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ и $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$ выражены в градусах (точность $0^\circ,01$; λ положительна к западу). Отсюда по (6.1) получаются приближенные местные моменты контактов (см. ниже пример), так что практически всякое предвычисление для целей наблюдения отпадает.

Предвычисление производится для основных пунктов с помощью разработанной в Nautical Almanac Office «окультационной машины», позволяющей проследить ход каждого покрытия на земном глобусе, если заданы Бесселевы элементы. Машина дает заключение о возможности наблюдения в рассматриваемом пункте и одновременно выдает в первом приближении моменты закрытия и открытия [3].

Предвычисленные для основных пунктов данные публиковались до 1959 г. в Nautical Almanac и в астрономических Ежегодниках других стран. Кроме того, там же давались видимые места покрываемых звезд, так что наблюдатель мог сам произвести ту часть редукции, которая зависит от координат пункта наблюдения, и переслать эти исправленные результаты наблюдений в Nautical Almanac Office для дальнейшей централизованной обработки. Гондолач в своей работе [4] дает исчерпывающее и ясное описание редукции наблюдений покрытий звезд.

В 1960 г., в связи с новой организацией эфемеридной службы, было внесено изменение и в организацию наблюдений покрытий звезд. Отныне бесселевы элементы покрытий в Вашингтоне не вычисляются и в American Ephemeris не публикуются. Издаваемые в Англии Astronomical Ephemeris также не содержат более данных, касающихся покрытий. Вся работа по предвычислению и обработке покрытий сосредоточена теперь в английском Nautical Almanac Office в Херстмонсо. Этот институт обладает в настоящее время большой вычислительной установкой, позволяющей легко произвести вычисление (с автоматическим контролем) всех редукций покрытий для надежного вывода численных значений флукуаций. На этом основании видимые прямые восхождения и склонения покрываемых звезд для момента наблюдения более не публикуются.

В заключение мы приводим пример вычисления приближенного момента наступления покрытия, взятый из работы Гондолача [4], в которой приводятся данные ближайших к основным пунктам мест наблюдения с разностями координат $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$.

§ 3. Предвычисление покрытия звезды с использованием фундаментальной плоскости Бесселя

1. Координаты в фундаментальной плоскости

Покрытие звезды Луной может рассматриваться как частный случай солнечного затмения. В этом случае звезда играет роль центра Солнца, расстояние до которого при этом принимается равным бесконечности, так что параллакс и радиус должны быть приравнены нулю. Оба конуса тени и полутени превращаются в этом случае в цилиндр, а точка на небесной сфере, в которую направлена ось тени (линия, соединяющая Луну и звезду), имеет при этом вместо координат d , a координаты δ_* , α_* покрываемой звезды. В полной аналогии с формулами солнечного затмения (2.8) Луна имеет в момент T в фундаментальной плоскости следующие координаты (y отсчитывается к северу):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta_{\zeta} \sin (\alpha_{\zeta} - \alpha_*), \\ y &= r [\sin \delta_{\zeta} \cos \delta_* - \cos \delta_{\zeta} \sin \delta_* \cos (\alpha_{\zeta} - \alpha_*)], \\ z &= r [\sin \delta_{\zeta} \sin \delta_* + \cos \delta_{\zeta} \cos \delta_* \cos (\alpha_{\zeta} - \alpha_*)], \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $r = \operatorname{cosec} P_{\zeta}$. Геоцентрические координаты Луны α_{ζ} , δ_{ζ} и ее экваториальный горизонтальный параллакс интерполируются из лунной эфемериды. Если в основу вычисления положено все-

мирное время, то в таблицы, даваемые в эфемеридном времени, следует входить с аргументом $T + \Delta T$ (T — всемирное время). Основой для вычисления видимых мест звезд с 1941 г. служит «Catalogue of 3539 Zodiacal Stars for the Equinox 1950,0, by A. James Robertson (New Zodiacal Catalogue (ZC), Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol. X, Part II). Этот каталог основан на системе FK3.

Вычисление момента покрытия звезды 44 Piscium для Иены,
1950, янв. 23 λ φ

Место наблюдения Иена (университетская обсерватория)	—0 ^h 46 ^m 20 ^s ,2	50°55'36"
Основной пункт Берлин-Бабельсберг (обсерватория)	—0 52 25,5	52 24 24
Основной пункт Франкфурт (университетская обсерватория)	—0 34 36,3	50 07 00

Аргументы	Данные для пунктов		Источник
	Берлин-Бабельсберг	Франкфурт	
$\Delta\lambda$	+1°,52	—2°,93	} Astron.-Geodät. Jahrbuch, 1950, 285—287
$\Delta\varphi$	—1,48	+0,81	
a	—0 ^m ,8	—0 ^m ,9	
b	+0,8	+1,1	
Вс. вр. для основного пункта	16 ^h 55 ^m ,1	16 ^h 49 ^m ,0	
$a \Delta\lambda$	—1,2	+2,6	
$b \Delta\varphi$	—1,2	+0,9	[4], табл. 7
Вс. вр. для Иены	16 ^h 52 ^m ,7	16 ^h 52 ^m ,5	
Веса (по расстояниям)	4	3	
Вс. вр. (осредненное)	16 ^h 52 ^m ,6		

Начало покрытия наблюдалось в Иене в 16^h52^m34^s, 9 вс. вр.

Прямоугольные координаты пункта наблюдения в системе фундаментальной плоскости получаются соответствующим образом из уравнений (2.13)

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \varphi' \sin h, \\ \eta &= \rho \sin \varphi' \cos \delta_* - \rho \cos \varphi' \sin \delta_* \cos h, \\ \zeta &= \rho \sin \varphi' \sin \delta_* + \rho \cos \varphi' \cos \delta_* \cos h.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Если вычисления производятся по всемирному времени, то местный часовой угол относится к геоцентрическому меридиану, и тогда

$$h = \mu_* - \lambda,$$

где долгота пункта наблюдения λ как обычно считается положительной к западу, а

$$\mu_* = \mu_0 + t_s$$

обозначает гринвичский часовой угол звезды в момент T . Гринвичский часовой угол μ_0 в 0^h всемирного времени получается вычитанием прямого восхождения α_* из звездного времени в 0^h всемирного времени, которое берется из эфемериды Солнца в любом Ежегоднике. Соответствующий моменту T момент звездного времени $t_s = 1,0027379 T$ находится по таблице «Перевод среднего времени в звездное». Тогда

$$h = \mu_0 + t_s - \lambda, \quad (6.4)$$

Для вычисления $\rho \sin \varphi'$ и $\rho \cos \varphi'$ (с учетом высоты станции над уровнем моря) могут быть применены уравнения (2.17) и таблицы вспомогательных величин s, c, f, g , помещенные в гл. II.

При вычислении покрытий звезд часто вводится в качестве единицы длины вместо экваториального радиуса Земли a радиус Луны k , причем в основу положено следующее значение среднего лунного радиуса в единицах земного экваториального радиуса: $k = 0,2724953$ (о выборе численного значения см. [6] стр. 62). В этом случае для ξ и η используются вместо (6.3) следующие формулы:

$$\xi = \frac{\rho \cos \varphi' \sin h}{k},$$

$$\eta = \frac{\rho \sin \varphi' \cos \delta_*}{k} - \frac{\rho \cos \varphi' \cos h}{k} \sin \delta_*. \quad (6.5)$$

Множитель при $\sin \delta_*$ во втором члене формулы для η , как и выражение для ξ , зависит для данного места наблюдения только от часового угла. Если использовать следующие формулы:

$$Q = \frac{\rho \cos \varphi' \cos h}{k}, \quad (6.6)$$

$$\eta_1 = \frac{\rho \sin \varphi'}{k} \cos \delta_*, \quad (6.7)$$

$$\eta_2 = Q \sin \delta_*, \quad (6.8)$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2, \quad (6.9)$$

то при большой программе наблюдений в данном пункте вычисления упрощаются, поскольку ξ и Q могут быть протабулированы по аргументу h (с интервалом 1^m). Для координат точки пересечения оси тени с фундаментальной плоскостью вместо

(6.2) имеем следующие формулы, где единицей является средний радиус Луны

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \delta_{\zeta} \sin (\alpha_{\zeta} - \alpha_*)}{k \sin P_{\zeta}}, \\ y &= \frac{\sin \delta_{\zeta} \cos \delta_* - \cos \delta_{\zeta} \sin \delta_* \cos (\alpha_{\zeta} - \alpha_*)}{k \sin P_{\zeta}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

2. Расстояние σ

Если вычислять по приведенным выше формулам координаты x , y , ξ , η для момента всемирного времени T , в который наблюдался контакт (исчезновения или появления), то основное уравнение Бесселя

$$\sigma = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = 1,$$

вообще говоря, строго не выполняется. Расхождение (в единицах лунного радиуса)

$$\Delta\sigma = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - 1 \quad (6.11)$$

обусловлено малыми ошибками в вычислении исходных данных (геоцентрического положения наблюдателя, положения звезд, координат и параллакса Луны, отклонения Δk радиуса Луны для точки покрытия от среднего значения k) и ошибкой наблюдения (измерения времени). Величина $\Delta\sigma$, которую, собственно, следует рассматривать как результат наблюдений, может служить свободным членом уравнения ошибок, содержащего в правой части в качестве неизвестных поправки к вышеупомянутым геодезическим и астрономическим величинам. Уравнение ошибок в этом виде проще, чем приведенное в гл. I (стр. 29). В дальнейшем в гл. XIII мы используем в принципе аналогичное уравнение со свободным членом ΔT .

Для вывода точных координат Луны угловое расстояние на сфере

$$(\Delta\sigma)'' = 206265 k \sin P_{\zeta} \Delta\sigma \quad (6.12)$$

раскладывается на компоненты ΔL и ΔB (поправка эклиптической долготы и широты Луны), окончательные значения которых определяются выравниванием результатов многочисленных наблюдений. Из поправок средней долготы Луны получаются флукутации B , а затем поправка времени ΔT (ср. гл. V). Все это является специальной задачей астрономии, на которой мы не будем останавливаться. За дальнейшими подробностями отсылаем читателя к работе Гондолача [4].

3. Пример вычисления свободного члена $\Delta\sigma$

Из ряда обработанных покрытий звезд, опубликованного Геодезическим институтом в Потсдаме [6], мы выбрали наблюдаемое там 22 марта 1956 г. покрытие звезды α Сирги, для которого по эфемериде Луны (с предварительной поправкой долготы Луны, равной $-3''$) было вычислено по наблюдаемому моменту покрытия значение $\Delta\sigma = -1'',0$ [6].

Инструментом для наблюдения служил рефрактор с отверстием 54 мм на параллактической установке. С помощью клавиши момент покрытия регистрировался с точностью 0,01 сек на хронографе, принимавшем также и секундные контакты от кварцевых часов, контролируемых Службой времени Геодезического института. На том же регистрирующем приборе наблюдатель определял с помощью искусственной звезды личную ошибку, которая оказалась запаздыванием на $+0^s,24 \pm 0^s,013$.

В Improved Lunar Ephemeris [7] имеются более точные координаты Луны; поэтому мы приняли их за основу при вычислении $\Delta\sigma$. Видимые координаты α и δ , а также параллакс Луны были взяты для эфемеридного времени $T + \Delta T$, где T — всемирное время наблюдения.

Место наблюдения: Потсдам, Геодезический институт, башня Гельмерга

$\varphi = +52^\circ 22' 54'',8$, $\lambda = -0^h 52^m 16^s,11$; высота над уровнем моря $H = 91$ м.

Звезда: α Сирги (FK 3 № 337), $m = 4^m,3$.

Видимые координаты (с учетом короткопериодических членов нутации):

$$\alpha_{\times} = 8^h 56^m 07^s,582, \quad \delta_{\times} = +12^\circ 01' 30'',91.$$

Наблюденный момент покрытия T : 22 марта 1956 г. $18^h 12^m 50^s,05$ вс. вр.

Поправка времени ΔT (предварительное значение для 1956 г., по American Ephemeris, 1960): $+32^s$.

Соответствующее эфемеридное время: $18^h 13^m 22^s,05$.

Из Improved Lunar Ephemeris (интерполированием со вторыми разностями) находим

$$\alpha_{\zeta} = 8^h 54^m 5^s,317; \quad \delta_{\zeta} = +12^\circ 50' 13'',38; \quad P_{\zeta} = 59' 25'',301.$$

Координаты оси тени

Из уравнений (6.10) при

$$k = 0,2724953, \quad \alpha_{\zeta} - \alpha_{\times} = -2^m 2^s,265 = -30' 33'',98$$

получаем

$$x = -1,84061; \quad y = +3,00988.$$

Координаты пункта наблюдения

Звездное время			
в 0 ^h вс. вр.	11 ^h 57 ^m 52 ^s ,943	lg c	0,0009177
α_x	8 56 7,582	+ gH	62
μ_0	3 ^h 1 ^m 45 ^s ,361	lg cos φ	9,7856114
t_s	18 15 49,58	lg ρ cos φ'	9,7865353
— λ	0 52 16,11		
		и соответственно	
h	22 ^h 9 ^m 51 ^s ,05	lg ρ sin φ'	9,8967725
	= — 27° 32' 14",2		

Влияние рефракции (гл. II, § 3) можно не учитывать (зенитное расстояние $\approx 45^\circ$). Из уравнений (6.5) получаем

$$\xi = -1,03782, \quad \eta = +2,41524.$$

Расстояние σ

$$x - \xi = -0,80279; \quad y - \eta = +0,59464; \quad \sigma = 0,999033.$$

Из уравнений (6.10) и (6.11) имеем

$$\begin{aligned} \text{в единицах среднего лунного радиуса } \Delta\sigma &= -0,000967, \\ \text{в секундах дуги } \Delta\sigma &= -0'',94. \end{aligned}$$

Из значений позиционного угла ($P = 126^\circ 5$) и либраций получаются (гл. IV, § 5) для точки контакта координаты Хайна: $P = 111^\circ,2$, $D = +3^\circ,2$. Карта Луны Хайна показывает в этом месте впадину в $0'',7$, так что наблюденное расхождение $\Delta\sigma = -0'',9$ может быть, в сущности, объяснено как неправильностями лунного края, так и личной ошибкой наблюдателя ($0^s,24 \leq 0'',1$).

4. Более точное предвычисление момента контакта

Для составления уравнения ошибок в виде, упоминаемом в дальнейшем (уравнение (13.25)), достаточно знать величину $\Delta\sigma$. Однако для наглядного представления хода вычислений мы применим формулы для солнечного затмения, выведенные в гл. II, § 4, к более простому случаю покрытия звезды и предвычислим момент контакта, который получается на основе данных для вхождения звезды за круговой лунный край с радиусом $k = 0,2724953$. Для этого мы должны в уравнения (2.30) — (2.34) ввести постоянную величину k вместо зависящего от места наблюдения радиуса тени L .

Относительная скорость тени (n, N) получается по уравнению (2.28) из изменения координат x, y, ξ, η , отнесенных к 1 мин

как к единице времени. Если бесселевы элементы не вычислены, x' и y' могут быть получены дифференцированием уравнений (6.10). Параллакс за этот короткий промежуток времени считается постоянным. Находим

$$\begin{aligned} x' &= x \frac{\operatorname{ctg}(\alpha_{\zeta} - \alpha_{*})(\Delta\alpha_{\zeta})'' - \operatorname{tg} \delta_{\zeta}(\Delta\delta_{\zeta})''}{206265}, \\ y' &\approx \frac{\cos(\delta_{\zeta} - \delta_{*})(\Delta\delta_{\zeta})''}{k \sin P_{\zeta} 206265} + x \frac{\sin \delta_{*}(\Delta\alpha_{\zeta})''}{206265}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Для ξ' и η' получаем из (6.5)

$$\xi' = \frac{c \cos \varphi \cos h}{k} \frac{d\theta}{dt}, \quad \eta' = \xi \sin \delta_{*} \frac{d\theta}{dt}, \quad (6.14)$$

причем $d\theta/dt = +0,0043753$ рад/мин означает изменение звездного времени в единицу времени. Из лунной эфемериды берутся для $T = 18^{\text{h}}13^{\text{m}}$ (с учетом разностей высших порядков) мгновенные изменения

$$\Delta\delta_{\zeta} = -11'',243 \text{ мин}^{-1}, \quad \Delta\alpha_{\zeta} = +34'',747 \text{ мин}^{-1},$$

откуда немедленно получаем

$$\begin{array}{r} x' = +0,034847 \\ \xi' = +0,008709 \\ \hline x' - \xi' = +0,026138 \end{array} \quad \begin{array}{r} y' = -0,011637 \\ \eta' = -0,000946 \\ \hline y' - \eta' = -0,010691 \end{array}$$

и по уравнению (2.28)

$$n = 0,028241, \quad N = 112^{\circ}14'45''$$

(n за 1 мин в единицах среднего лунного радиуса). Расстояние m было найдено в предыдущем разделе равным

$$m = \sigma = 0,999033.$$

Направляющий угол M расстояния по уравнению (2.28) равен

$$M = \operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{y - \eta} = 306^{\circ}31'42''.$$

Эти значения вычислены для времени наблюдения $T = 18^{\text{h}}12^{\text{m}}50^{\text{s}},05$ всемирного времени, которое может служить первым приближением для искомого момента контакта. Предвычисленный момент контакта $T + \tau$ получается по аналогии с (2.29) — (2.34) из

$$\tau = -\frac{\sigma}{n} \cos(M - N) + \frac{k}{n} \cos \psi,$$

причем

$$\sin \psi = \frac{\sigma}{k} \sin(M - N).$$

Получаем

$$\psi = 194^{\circ} 16' 09'',$$

$$\tau = -0^{\text{m}}.0353 = -2^{\text{s}}.12.$$

Предвычисленный момент, с хорошим приближением, будет

$$T_{\text{пр.}} = 18^{\text{h}} 12^{\text{m}} 47^{\text{s}}.93 \text{ в. вр.}$$

Позиционный угол (от направления из звезды к северу и через восток на центр Луны) равен

$$M = N + \psi = 306^{\circ} 30',9.$$

Затем вычисление повторяется: лунные координаты интерполируются на полученный выше момент контакта и по ним еще раз вычисляются с соответствующим часовым углом координаты x, y, ξ, η . Ранее с $\sigma = 0,999982$ основное уравнение Бесселя было удовлетворено почти точно, поэтому здесь также достигнут предел точности вычисления в седьмом знаке логарифма. Более точное вычисление изменило бы предвычисленные моменты контактов лишь на несколько сотых секунды. Мы предвидели это, ибо при составлении уравнений ошибок исходили не из расхождения ΔT между наблюдаемым и предвычисленным моментами, а из соответствующего расхождения $\Delta \sigma$ в расстояниях.

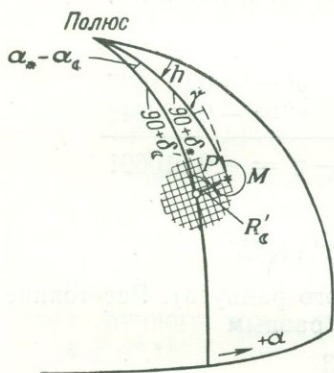


Рис. 39.

5. Соотношения между позиционными углами

Вычисленный по уравнению (2.28) направляющий угол M расстояния σ (фундаментальная плоскость) выйдет на небе как позиционный угол дуги «звезда — центр Луны» с вершиной в звезде; это получается немедленно из соответствующих рассуждений для солнечного затмения (гл. II, § 6), если на место центра Солнца поставить звезду. Для наблюдения и его обработки (учет рельефа лунного края) желательно знать топоцентрический позиционный угол P точки контакта, взятый относительно центра Луны; угол P отличается от M вследствие сближения меридианов не точно на 180° . Из рис. 39, где γ есть сближение меридианов, имеем

$$P = M \pm 180^{\circ} - \gamma,$$

$$\gamma = \Delta \alpha \sin \delta_*$$

При покрытии в момент контакта

$$\Delta\alpha = \alpha_{*} - \alpha'_{\zeta} = -R'_{\zeta} \sin M \sec \delta'_{\zeta}.$$

Без заметной ошибки можно положить $\delta'_{\zeta} = \delta_{*}$. Тогда между позиционными углами P и M имеет место соотношение

$$P = M \pm 180^{\circ} + R'_{\zeta} \sin M \operatorname{tg} \delta_{*}. \quad (6.15)$$

Поправка за сближение меридианов не превосходит $10'$ и поэтому ее нужно учитывать лишь при более точных исходных данных. Пока позиционный угол точки касания края не может быть измерен с соответствующей точностью, мы вынуждены полагать $P = M \pm 180^{\circ}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lambert W. D., Geodetic Applications of Eclipses and Occultations, Bull. géod., 274—292 (1949).
2. Brown E. W., Request for more Observations of Occultations, Astron. J., 37, 99—100 (1927).
3. The Prediction and Reduction of Occultations, Supplement to the Nautical Almanac for 1938, London, 1937.
4. Gondolatsch F., Erdrotation, Mondbewegung und das Zeitproblem der Astronomie, Veröff. Astronom. Recheninst. Heidelberg, Nr. 5, Karlsruhe, 1953.
5. Comrie L. J., The Reduction of Lunar Occultations, Astron. J., 46, 61—67 (1937).
6. Krüger H., Reduzierte Sternbedeckungen durch den Mond 1954 Nov. bis 1957 April, Astron. Nachr., 284, Nr. 4 (1958).
7. Improved Lunar Ephemeris 1952—1959, a joint Supplement to the American Ephemeris and the British Nautical Almanac, Washington, 1954.

ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НАБЛЮДЕНИЯ

§ 1. Предварительные вычисления для наблюдения солнечного затмения в геодезических целях

Вычисления общих предварительных данных, относящиеся к ходу солнечного затмения на поверхности Земли, всегда производятся астрономами в астрономических институтах. Эти дан-

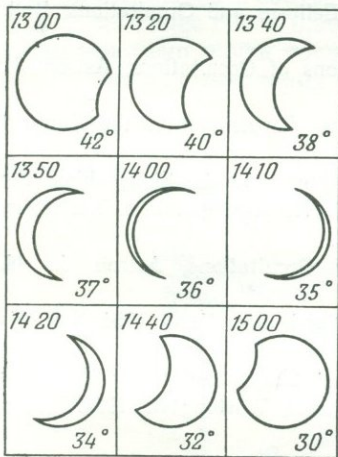


Рис. 40. Фазы развития полного солнечного затмения в Финляндии 1945 г.; $\varphi = 63^{\circ},9$; $\lambda = -22^{\circ},9$.

Вверху налево: всемирное время в часах и минутах;
внизу направо: высота Солнца.

ные публикуются заранее в астрономических Ежегодниках. Можно отметить главнейшие из этих Ежегодников: Астрономический ежегодник СССР (Ленинград), The American Ephemeris (Вашингтон), The Astronomical Ephemeris (Лондон, до 1959 г. издавался под названием Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris, с 1960 г. идентичен с American Ephemeris), Connaissance des Temps (Париж). Относительно данных, содержащихся в American Ephemeris, см. гл. V, § 5. Кроме того, каждое государство выпускает для специальных целей многочисленные Ежегодники и институтские издания

Помимо прочих сведений, необходимых широкому кругу естественных наук, эти специальные Ежегодники и издания содержат основные местные числовые данные для солнечных затмений, по которым геодезисты и физики могут произвести первоначальную установку инструментов.

Существует много методов наблюдения солнечных затмений, и в каждом из них возможны различные вариации. Наблюдатель должен быть поэтому ознакомлен с основными данными, приводимыми для зоны полного затмения в изданиях астрономических институтов. В этой главе будут затронуты некоторые теоретические и практические вопросы, которые должны помочь

наблюдателю выбрать для используемого им метода благоприятное время, наивыгоднейшее место и оборудование, подходящее наилучшим образом. Для этого он должен уметь произвести в небольшом объеме еще и дополнительные вычисления.

Поскольку лунные и солнечные координаты для момента затмения, равно как и геодезические координаты пункта наблюдения, известны не со всей требуемой точностью, необходимо во время наблюдений определять малые поправки к величинам, предвычисленным по Ежегоднику, и учитывать эти поправки в программе наблюдений. Для облегчения таких уточнений существуют вспомогательные таблицы и графики.

Рис. 40 показывает изменение фаз полного солнечного затмения 1945 г. для одного пункта наблюдения в Финляндии.

1. Элементы затмения

а) Основные положения

Грёнстранд (Стокгольмская обсерватория) предвычислял условия для многих солнечных затмений [1, 2] и использовал приведенные ниже рабочие формулы, важнейшие из которых были получены в гл. II. Чтобы эти формулы стали ясны, достаточно обратиться к любому учебнику сферической астрономии, поэтому полного их вывода не дается. В этой главе применены обозначения Грёнстранда для более удобного сравнения с оригиналом.

Геоцентрические координаты Солнца и Луны берутся из Ежегодника, если не требуется точных вычислений для моментов наблюдения (см. гл. VIII). Если π_{\odot} — экваториальный горизонтальный параллакс Луны и R — расстояние Земли от Солнца (выраженное в единицах среднего расстояния), то отношение геоцентрических расстояний Луны и Солнца в данный момент времени задается формулой

$$b = \frac{\sin 8''{,}80}{R \sin \pi_{\odot}}. \quad (7.1)$$

Геоцентрическое расстояние до Луны (выраженное в экваториальных радиусах Земли) равно

$$r = \frac{1}{\sin \pi_{\odot}}. \quad (7.2)$$

б) Направление оси конуса тени

Прямое восхождение, склонение и часовой угол в Гринвиче

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{\odot} - \frac{b}{1-b} \cos \delta_{\odot} \sec \delta_{\odot} \cdot (\alpha_{\odot} - \alpha_{\circ}), \\ d &= \delta_{\odot} - \frac{b}{1-b} (\delta_{\odot} - \delta_{\circ}) - \frac{b}{4} \sin 1'' \sin (\delta_{\odot} + \delta_{\circ}) \cdot (\alpha_{\odot} - \alpha_{\circ})^2, \\ \mu &= \theta - a. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Формулы для a и d соответствуют уравнениям (2.4) и (2.7); они надежно обеспечивают точность $0'',01$.

в) Фундаментальная плоскость

Прямоугольные координаты Луны

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta_{\odot} \sin (\alpha_{\odot} - a), \\y &= r [\sin \delta_{\odot} \cos d - \cos \delta_{\odot} \sin d \cos (\alpha_{\odot} - a)], \\z &= r [\sin \delta_{\odot} \sin d + \cos \delta_{\odot} \cos d \cos (\alpha_{\odot} - a)].\end{aligned}\quad (7.4)$$

Угол раствора конуса полутени и тени

$$\operatorname{tg} f_1 = \frac{0,00466407}{R(1-b)}; \quad \operatorname{tg} f_2 = \frac{0,00464083}{R(1-b)}. \quad (7.5)$$

Радиус круга полутени и тени

$$\begin{aligned}l_1 &= z \operatorname{tg} f_1 + 0,272277, \\l_2 &= z \operatorname{tg} f_2 - 0,272277.\end{aligned}\quad (7.6)$$

Прямоугольные координаты места наблюдения (в связи с введением эфемеридного времени вместо $\mu - \lambda$ после 1960 г. следует подставить $\mu - \lambda - 1,00270 \Delta T$, см. гл. V)

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \varphi' \sin (\mu - \lambda) \quad (\lambda > 0 \text{ к западу}), \\ \eta &= \rho \sin \varphi' \cos d - \rho \cos \varphi' \sin d \cos (\mu - \lambda), \\ \zeta &= \rho \sin \varphi' \sin d + \rho \cos \varphi' \cos d \cos (\mu - \lambda).\end{aligned}\quad (7.7)$$

Угол направления и расстояние

$$m^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad (7.8a)$$

$$\begin{aligned}m \sin M &= x - \xi, \\ m \cos M &= y - \eta.\end{aligned}\quad (7.8б)$$

M идентично позиционному углу точки контакта, считаемому в восточном направлении от северного полюса Солнца к востоку. Переход к позиционному углу V , отсчитываемому аналогичным образом от вертекса, производится посредством параллактического угла γ

$$\sin \gamma = \cos \varphi \sin (\mu - \lambda) \sec h_{\odot} \quad (7.9)$$

(h_{\odot} — высота Солнца). Несколько менее точна формула

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\xi}{\eta}, \quad (7.10)$$

которая строга лишь для точки (a, d) оси конуса тени (ошибка может достигать $0,2^{\circ}$);

$$V = M - \gamma. \quad (7.11)$$

2. Фигура тени на поверхности Земли, принимаемой за эллипсоид

Кривую двойкой кривизны, образованную пересечением конуса тени земной поверхностью, называют теневым овалом. Огибающая теневых овалов образует северную и южную границу, а точки касания с Землей образующих боковой поверхности конуса тени образуют восточную и западную границу затмения (см. рис. 47).

Мгновенная граница тени на поверхности Земли (теневой овал) задается пятью основными уравнениями Бесселя (7.7) и (7.8). Если принять во внимание, что для начала и конца полного затмения можно положить

$$m = l_2 - \zeta \operatorname{tg} f_2$$

и что величины $x, y, \mu, d, l_2, \operatorname{tg} f_2$ даны для момента T , то в пяти уравнениях имеем шесть переменных, зависящих от координат пункта наблюдения: координаты ξ, η, ζ в системе фундаментальной плоскости, геоцентрическую широту φ' , местный часовой угол $\mu - \lambda$ и позиционный угол M точки контакта. Каждому значению M соответствует точка на границе тени; придавая величине M ряд дискретных значений, по пяти уравнениям можно вычислить координаты φ' и λ точки на границе тени (а также и φ) для ряда пунктов.

При этом возникает затруднение, поскольку в уравнения входит зависящий от φ' геоцентрический радиус ρ . Эту трудность можно преодолеть, решая уравнения последовательными приближениями; за первое приближение принимается $\rho = 1$. Простое преобразование, введенное Бесселем (см. книгу Шовенэ [5], гл. II, стр. 457 и далее), которое мы здесь не приводим, дает возможность ограничиться одним приближением. Это преобразование используется в формулах, применяемых Комри [3], Грёнстрандом [1] и другими авторами, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем (например, формулы (7.12) и (7.13)).

Вместо вычисления фигуры тени по пунктам исходят из положения, что конус тени имеет в сечении с земной поверхностью вид эллипса, центр которого лежит на центральной линии затмения. Пункты центральной линии находят из уравнений Бесселя, которые для этого случая ($m = 0$; $\xi = x$; $\eta = y$) сильно упрощаются.

Полуось эллипса тени и ее направление получаются из следующих формул:

Вспомогательные величины (по Бесселю)

$$\rho_1 = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 d}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{\rho_1^2}}, \quad (7.12)$$

где $e^2 = 0,006723$.

Таблица элементов затмения для поверхности Земли (эллипсоида)
(предвычисление для Скандинавии, 1945)

Вс. вр.	Ось тени (центр. линия)		Продолжи- тельность полной фазы	h_{\odot}	A_{\odot}	$a_S, км$	$b_S, км$	A_{ZL}	$v, м/сек$
	λ (от Гр.)	φ							
13 ^h 53 ^m	-12° 53' 31"	+66° 33' 59"	69 ^s ,9	39°,1	49°,9	46,5	29,3	117°,9	875
54	13 55 53	20 33	69,5	38,9	51,5	46,5	29,2	118,6	880
55	14 57 39	6 45	69,1	38,6	53,0	46,6	29,1	119,3	885
56	15 58 50	65 52 34	68,7	38,3	54,6	46,7	29,0	120,0	891
57	16 59 28	38 00	68,2	38,1	56,1	46,8	28,8	120,6	897
58	17 59 34	23 04	67,7	37,8	57,7	46,9	28,7	121,2	903
59	18 59 08	7 45	67,3	37,5	59,2	47,0	28,6	121,8	910
14 0	19 58 12	64 52 04	66,8	37,1	60,6	47,1	28,4	122,4	917
1	20 56 48	36 00	66,3	36,8	62,1	47,2	28,3	123,0	925
2	21 54 56	19 33	65,7	36,5	63,6	47,4	28,1	123,5	933

A_{ZL} — азимут движения тени (центр. линия).

v — скорость тени по поверхности Земли (ср. § 2, ур-ние (7.21)).

Малая полуось в км

$$b_S = 6378 (l_2 - \operatorname{tg} f_2 \cos \beta_0). \quad (7.13)$$

Большая полуось

$$a_S = \frac{b_S}{\sin h_\odot},$$

где высота Солнца получается из соотношения

$$\sin h_\odot = \sin \varphi \sin d + \cos \varphi \cos d \cos (\mu - \lambda). \quad (7.14)$$

Направление большой оси эллипса тени (или, что то же, азимут Солнца) определяется выражением

$$\sin A_\odot = \frac{\cos d \sin (\mu - \lambda)}{\cos h_\odot}. \quad (7.15)$$

Таблица 11

Дифференциальные изменения

(солнечное затмение 30 июня 1954 г.; $\varphi = 59^\circ,8$;
 $\lambda = -7^\circ,1$; $H = 1,1$ км)

а) Моменты середины полной фазы

Вс. вр.	$\Delta\varphi=1'$	$\Delta\lambda=1'$	$\Delta H=1$ км
12 ^h 30 ^m	-0 ^s ,74	-1 ^s ,11	-0 ^s ,07
35	0,94	1,10	-0,02
40	1,11	1,09	+0,03
45	1,27	1,06	0,08
50	1,41	1,03	0,13
55	-1,52	-0,99	+0,18

б) Расстояния от центральной линии

Вс. вр.	$\Delta\varphi=1'$	$\Delta\lambda=1'$	$\Delta H=1$ км
12 ^h 30 ^m	+1,37 км	-0,26 км	+0,61 км
35	1,33	0,30	0,61
40	1,30	0,34	0,62
45	1,26	0,38	0,62
50	1,22	0,42	0,62
55	+1,18	-0,45	+0,63

Результаты оформляются в виде таблицы (см. табл. 10, стр. 146).

При геодезическом применении возникает задача вычисления для заданного пункта (φ, λ, H) моментов контактов и моментов середины полной фазы, а также позиционного угла точек контактов, расстояния места наблюдения от центральной линии и направления этого расстояния в фундаментальной плоскости. Формулы для этих вычислений приводятся в гл. II. В случае небольших изменений координат φ, λ и высоты пункта H , а также координат Луны α, δ вместо перевычисления легче применить дифференциальные формулы. Эти формулы могут быть образованы, например, для момента середины полной фазы или для расстояния места наблюдения от центральной линии и имеют вид, одинаковый с уравнением ошибок:

$$\Delta = c_1 \Delta\varphi + c_2 \Delta\lambda + c_3 \Delta H + c_4 \Delta\alpha + c_5 \Delta\delta + \dots$$

Вместо того чтобы выводить эти формулы, мы даем в табл. 11 (стр. 147) представление об изменении момента середины полной фазы и расстояния от центральной линии в зависимости от изменения координат пункта (по Грёнстранду [2], где можно найти также и сами формулы).

§ 2. Формулы для вспомогательного графического построения

После того как для некоторого момента по формулам (7.13) и (7.15) получены величины и азимут большой оси теневого эллипса, находят северную и южную границы зоны полного затмения из вычислений ряда теневого эллипсов для следующих друг за другом моментов (примерно через 1 минуту).

Граница полной фазы образуется огибающими к этим эллипсам. Координаты φ, λ этих точек касания могут быть вычислены для принятых моментов времени; на небольшом участке границы тени они мало уклоняются от прямых линий, как и центральная линия. Соединив северную точку касания с соответствующей точкой центральной линии (ход которой вычислен астрономами) и далее с южной точкой касания, относящейся к тому же времени T , в результате получим изохрону предвычисленной максимальной фазы затмения, которая в этом случае соответствует середине полной фазы.

Эти изохроны в обычном масштабе карт мало отличаются от прямых линий, однако они отличаются по азимуту от больших осей эллипса. Точно так же можно построить изохроны и для любой другой фазы солнечного затмения, и, в частности, для каждого из четырех контактов.

Приведенные ниже соотношения [1] для момента T выводятся чисто геометрическим путем (рис. 41).

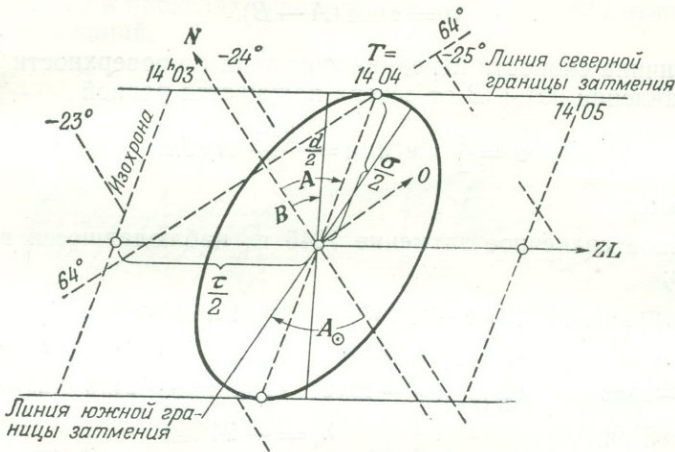


Рис. 41. Соотношения для зоны полного затмения, Финляндия, 1945 г.

Введем обозначения:

R — радиус кривизны эллипса по меридиану в км,

N — поперечный радиус кривизны в км,

A — азимут изохроны максимальной фазы, считаемой от севера на восток (для момента T),

$90^\circ + B$ — азимут центральной линии, считаемой от севера на восток (для момента T),

δ — длина изохроны в км между северной и южной границами зоны полного затмения (для момента T),

τ — расстояние между изохронами для моментов $T + 1^m$ и $T - 1^m$ в км.

φ_C, λ_C — координаты оси тени (для момента T),

φ_n, λ_n — координаты северной точки касания (для момента T),

φ_s, λ_s — координаты южной точки касания (для момента T).

$$\Delta\varphi = \varphi_C(T-1) - \varphi_C(T+1),$$

$$\Delta\lambda = \lambda_C(T-1) - \lambda_C(T+1),$$

$$-\operatorname{tg} A = \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\varphi_n - \varphi_s} \frac{N}{R} \cos \varphi_C, \quad (7.16)$$

$$\sigma = (\varphi_n - \varphi_s) R \sin 1'' \sec A \quad (\text{в км}), \quad (7.17)$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda} \frac{R}{N} \sec \varphi_C, \quad (7.18)$$

$$\tau = \Delta\varphi R \sin 1'' \operatorname{cosec} B \quad (\text{в км}). \quad (7.19)$$

Общая ширина d зоны полной фазы (расстояние по перпендикуляру в км) равна

$$d = \sigma \cos(A - B). \quad (7.20)$$

Величина скорости передвижения тени по поверхности Земли в направлении $90^\circ + B$ от севера получается равной

$$v = \frac{\tau}{2} \text{ км/мин} = \frac{100\tau}{12} \text{ м/сек}. \quad (7.21)$$

Пример

Полное солнечное затмение 1945 г., наблюдавшееся в Финляндии:

$$\begin{array}{lll} T = 14^{\text{h}}04^{\text{m}} \text{ вс. вр.} & T - 1 = 14^{\text{h}}03^{\text{m}} & T + 1 = 14^{\text{h}}05^{\text{m}} \\ \varphi_{C, T} = 63^\circ,75 & \varphi_{C, (T-1)} = 64^\circ,04 & \varphi_{C, (T+1)} = 63^\circ,46 & \Delta\varphi = +0^\circ,58 \\ \lambda_{C, T} = -23,83 & \lambda_{C, (T-1)} = -22,82 & \lambda_{C, (T+1)} = -24,78 & \Delta\lambda = +1^\circ,96 \\ \varphi_n = 63^\circ,99 & & \lambda_n = -24^\circ,50 & \\ \varphi_s = 63^\circ,51 & \varphi_n - \varphi_s = +0^\circ,48 & \lambda_s = -23^\circ,11 & \lambda_n - \lambda_s = -1,48 \\ -\text{tg } A = \frac{-1,48}{0,48} = 0,4423 & A = 54^\circ,3 & \sigma = \frac{0,48}{57,3 \cdot 0,584} \cdot 6378 = 89,5 \text{ км} \\ \text{tg } B = \frac{0,58}{1,96 \cdot 0,4423} & B = 33^\circ,8 & \tau = \frac{0,58}{57,3 \cdot 0,5563} \cdot 6378 = 116 \text{ км} \\ d = 89,5 \cdot 0,937 = 84 \text{ км} & A_0 = 66^\circ,5 & v = 967 \text{ м/сек} \\ & \text{(азимут} & \\ & \text{большой} & \\ & \text{полуоси} & \\ & \text{эллипса)} & \end{array}$$

§ 3. Различные системы кривых хода затмения на земной поверхности для предвычисления внутри ограниченной области

1. Изохроны на эллипсоиде

Изохроны максимальной фазы внутри границ центральной полосы были определены в § 2. Их можно также продолжить за границы полосы, где максимальная фаза отличается по величине от единицы.

В специальных изданиях графически представляются различные изохроны для 1-го и 4-го контактов и для максимума затмения. На рис. 42 мы нанесли продолжительности полной фазы для пунктов на центральной линии (цифры в кружках). Изохроны для 2-го и 3-го контактов легко нанести самим, если вычислить теневые эллипсы согласно § 2. Таким образом, эти изо-

хроны являются эллипсами, лежащими внутри зоны полного затмения. Изохроны 1-го и 4-го контактов, а также середины полной фазы в пределах ограниченной области мало отличаются от прямых линий.

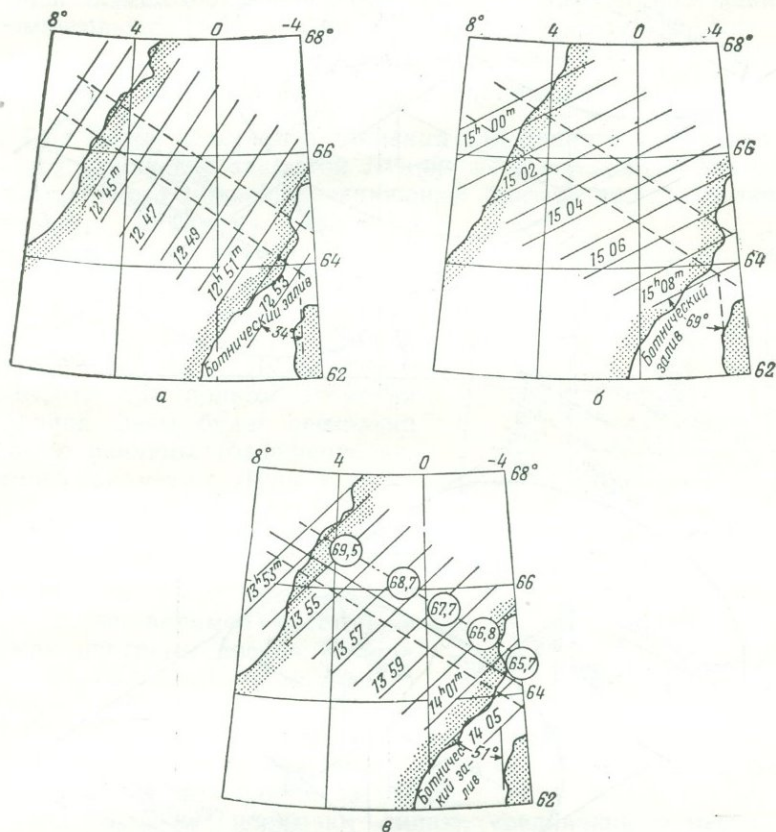
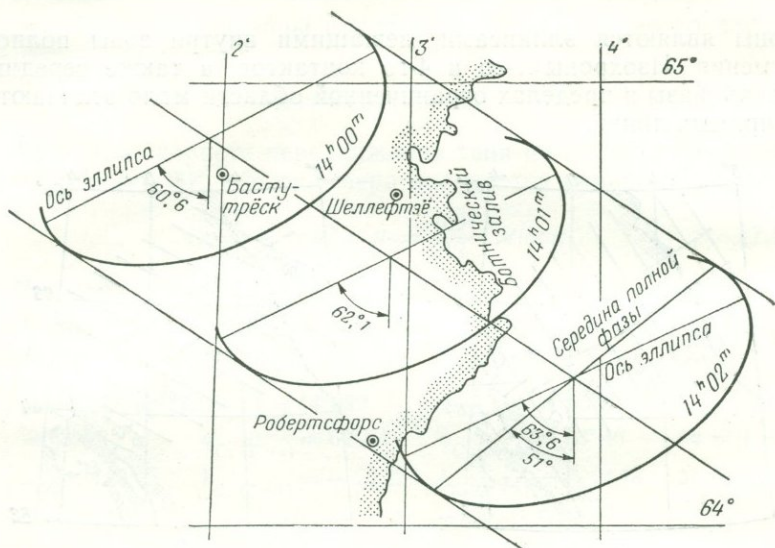


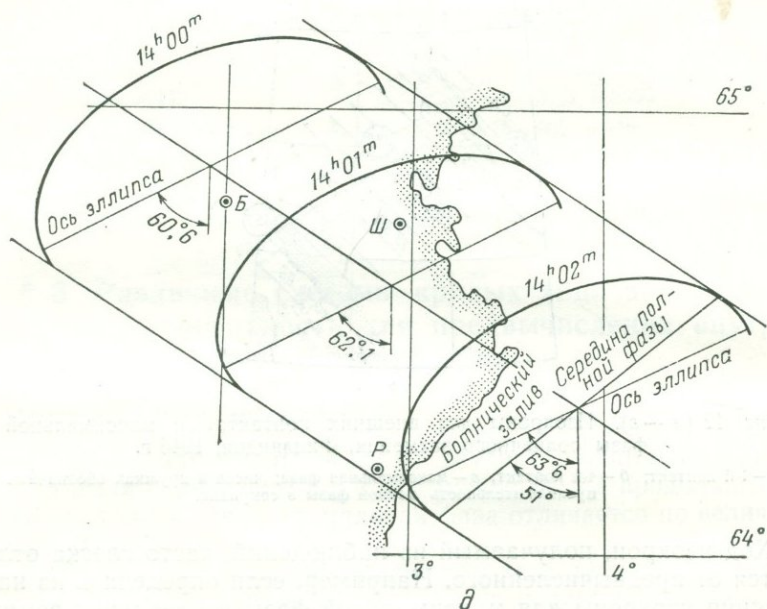
Рис. 42 (а — в). Изохроны для внешних контактов и максимальной фазы солнечного затмения, Финляндия, 1945 г.

а — 1-й контакт; б — 4-й контакт; в — максимальная фаза; числа в кружках обозначают продолжительность полной фазы в секундах.

Ход изохрон, получаемый из наблюдений, часто слегка отличается от предвычисленного. Например, если определять из наблюдения изохроны для максимальной фазы на реальной земной поверхности, то они будут несколько деформированы, с одной стороны, вследствие нелинейного движения Солнца и Луны и, с другой стороны, вследствие различных высот местности. Помимо влияния неправильностей края Луны, кривая наблюден-



г



д

Рис. 42 (г — д). Изохроны для внутренних контактов солнечного затмения, Финляндия, 1945 г.

г — 2-й контакт; д — 3-й контакт. Это солнечное затмение выбрано в качестве примера потому, что оси эллипса тени для него более наклонены к центральной линии, чем в другие года.

ных полных интенсивностей света или спектральных интенсивностей на участках незадолго до 2-го и вскоре после 3-го контактов будет несимметрична даже на эллипсоиде. Поэтому максимальная фаза наступает в момент, когда касательная к наблюдаемой кривой освещенности достигает горизонтального положения в прямоугольной системе координат «освещенность — время».

2. Изофазы на эллипсоиде (линии одинаковой фазы затмения)

Под *фазой солнечного затмения* для данного момента понимается отношение закрытой Луной части солнечного диаметра, определяемого линией, соединяющей центры дисков Солнца и Луны, к видимому диаметру Солнца. Это отношение при 1-м и 4-м контактах равно нулю, следовательно, и фаза затмения в этом случае равна нулю. Когда центры Солнца и Луны совпадают, то при полном затмении величина фазы будет несколько больше единицы (отношение видимого диаметра Луны к видимому диаметру Солнца). Для 2-го и 3-го контактов фаза в точности равна единице. Момент *наибольшей фазы* есть мгновение, когда видимое расстояние между центрами дисков Солнца и Луны достигает минимального значения. Центральные затмения (полные или кольцеобразные), вместо максимальной фазы, характеризуются местом на Земле, где в истинный полдень происходит именно центральное затмение.

Под *изофазой* понимают линию, соединяющую места, где затмение достигает одинаковой максимальной фазы; моменты же наступления данной фазы для разных мест различны. Моменты интерполируют, накладывая листы с изофазами на листы с изохронами для максимума затмения. Рис. 43 показывает через интервалы в $\frac{1}{100}$ видимого диаметра Солнца совокупность изофаз для максимума затмения 1945 г. в Скандинавии.

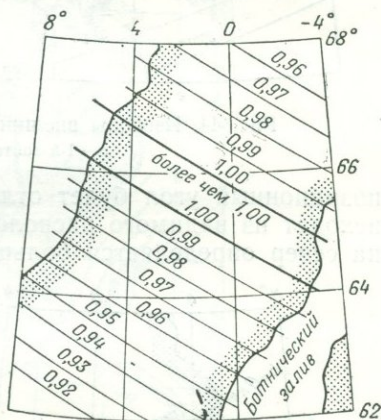


Рис. 43. Изофазы максимума затмения.

3. Изогоны на эллипсоиде (линии равного позиционного угла)

Под предвычисленным позиционным углом для затмения понимают позиционный угол направления из центра Солнца к центру Луны, считаемый по часовой стрелке от северной точки диска

Солнца на восток или от вертекса в том же смысле. (Если рассматривать направление от центра Луны к центру Солнца, его

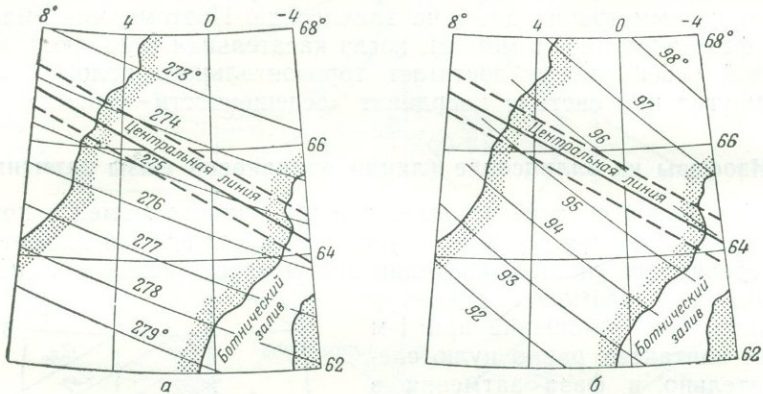


Рис. 44. Изогоны внешних контактов. Финляндия, 1945 г.

а — 1-й контакт; б — 4-й контакт.

позиционный угол будет отличаться почти на 180° .) При этом исходят из видимого расположения обоих светил. Направление на север определяется большим кругом, проходящим через северный полюс мира. Позиционному углу соответствует на бesselовой фундаментальной плоскости угол положения проекции направления от места наблюдения до места пересечения оси тени; он считается по часовой стрелке от направления на север (подобно наблюдаемому позиционному углу).

Наблюдаемый и предвычисленный позиционные углы различаются в общем на небольшую величину вследствие неточности координат светил и координат пункта наблюдения. То же справедливо и для расстояния

между центрами светил, так что должна существовать разница и между предвычисленной и наблюдаемой фазами. Так как центры светил нельзя наблюдать непосредственно, то получают позиционный угол по ориентировке серпа, причем последний должен быть приведен к некоторому среднему профилю Луны.

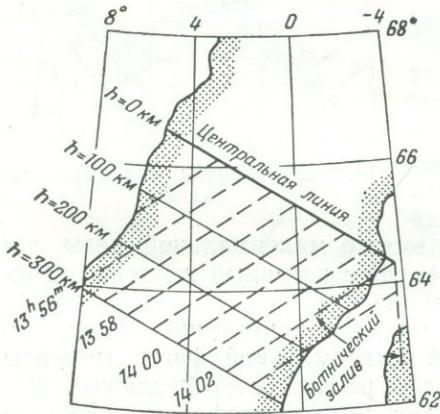


Рис. 45. Изоцентры (одинаковые перемещения центральной линии с высотой места).

При покрытиях звезд позиционный угол в момент покрытия сильно искажается из-за неправильностей края Луны. Если учесть профиль Луны, то получают наблюдаемую изогону, соответствующую покрытию звезды как бы средним краем Луны или ее средней уроченной поверхностью.

Изогоны особенно нужны для покрытий звезд. Они проходят в этом случае через пункты на земной поверхности, для которых

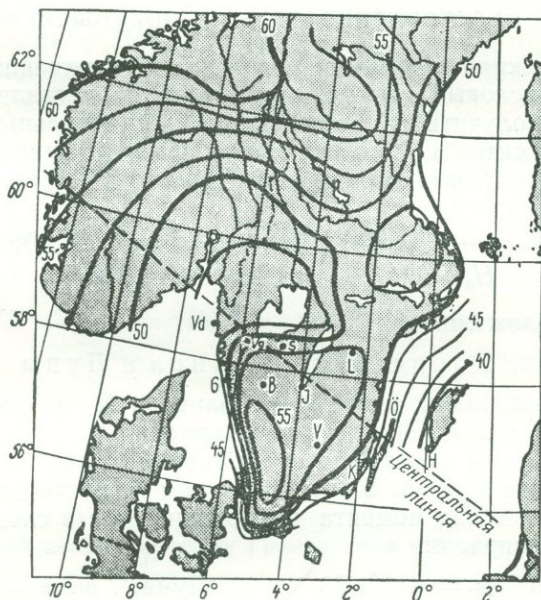


Рис. 46. Изонефы (линии одинаковой средней облачности).

открытие или исчезновение звезды на краю Луны происходит в одном и том же позиционном угле. Это имеет значение для геодезических целей, когда стремятся с целью исключения влияния неправильностей лунного края, чтобы одна и та же звезда наблюдалась на многих станциях на одном месте лунного края (см. гл. XIII). Тогда нужно учитывать лишь топографические особенности земной поверхности и либрацию Луны.

На рис. 44 изображены изогоны для затмения 1945 г. в Скандинавии (1-й и 4-й контакты), которые интерполированы из таблиц предвычисленных позиционных углов, изданных Грэнстрандом [1].

Кроме уже приведенных систем кривых, встречаются в соответствующей литературе еще и следующие.

Изоцентры — линии равных отклонений центральной линии с высотой места. Примененные впервые для организации физических наблюдений на большой высоте, они дают представление о влиянии рельефа земной поверхности (рис. 45).

Изоныфы (греч. $\nu\epsilon\varphi\acute{\epsilon}\lambda\lambda\eta$ — облака). Это — кривые одинаковой средней облачности; они имеют значение при планировании важных и редких наблюдений (рис. 46).

§ 4. Сопоставление данных предвычисления

Ниже в сокращенном виде сопоставлены важнейшие предвычисленные числовые данные, чтобы дать представление о том, что можно получить из Ежегодников и специальных изданий. Пример относится к полному солнечному затмению, 30 июня 1954 г. [2], для пункта наблюдения Дирскар в Норвегии с исходными данными:

$$\lambda_0 = -7^{\circ} 03',30 \text{ (Гр.)}; \quad \varphi_0 = +59^{\circ} 49',90;$$

$$H_0 = 1100 \text{ м над уровнем моря.}$$

1. Общие положения

а) Координаты Солнца и Луны

Значение видимых координат Солнца и Луны, как и радиуса-вектора Земли на орбите и экваториального горизонтального параллакса Луны, основывается на таблицах Солнца Ньюкомба и теории Луны Броуна. В соответствии с точностью этих эфемерид необходимо для момента наблюдений ввести следующие эмпирические поправки:

$$\begin{array}{ll} \text{Солнце: } \Delta\alpha = +0^s,070 & \text{Луна: } \Delta\alpha = -0^s,157 \\ \Delta\delta = -0'',06 & \Delta\delta = -0'',17 \end{array}$$

Затем находят геоцентрические координаты Солнца и Луны по таблицам, которые дают для каждого часа α_{\odot} с точностью до $0^s,001$ и δ_{\odot} до $0'',01$, а также радиус-вектор Земли R в орбите с точностью до 8-го знака (в единицах среднего расстояния). Из соответствующей строки берутся α_{ζ} , δ_{ζ} и экваториальный параллакс P_{ζ} (геоцентрический) с точностью до $0'',001$.

Пример:

$$\begin{array}{ll} 1954, \text{ июнь } 30, 12^{\text{h}} \text{ вс. вр.} & \alpha_{\odot} = 6^{\text{h}}35^{\text{m}}29^{\text{s}},956, \quad \delta_{\odot} = +23^{\circ} 11' 41'',42, \\ & R = 1,01668159; \\ & \alpha_{\zeta} = 6^{\text{h}}34^{\text{m}}38^{\text{s}},787, \quad \delta_{\zeta} = +23^{\circ} 50' 08'',54, \\ & P_{\zeta} = 59' 02'',976. \end{array}$$

Звездное время в средний полдень $\theta = 6^{\text{h}}32^{\text{m}}04^{\text{s}},800$ (члены короткопериодической путаницы учтены).

В качестве отношения истинного радиуса Луны к среднему экваториальному радиусу Земли (международный эллипсоид) принимается величина 0,272274. Экваториальный горизонтальный параллакс Солнца для единицы расстояния равен $P_{\odot} = 8'',790$; ему соответствует видимый радиус Солнца, равный $959'',63$.

Затем ищем всемирное время совпадения прямого восхождения Солнца и Луны и относящиеся к этому моменту геоцентрические элементы затмения (часовые изменения прямого восхождения Солнца и Луны до $0^s,01$, склонения до $0'',1$, а также истинные радиусы Солнца и Луны до $0'',01$ и целый ряд других величин).

б) Бесселевы элементы на фундаментальной плоскости

1954, июнь 30, 12 ^h вс. вр.	$x = -0,198649,$	$y = +0,652938,$
	$x' = +0,00922350,$	$y' = -0,00147170,$
	$\sin d = +0,393834,$	$\cos d = +0,919182,$
	$\mu = 359^{\circ} 08' 40'',8,$	$\mu' = +0,00436314,$
	$l_1 = 0,540001,$	$l_2 = -0,005884,$
	$\operatorname{tg} f_1 = 0,00459875,$	$\operatorname{tg} f_2 = 0,00457587.$

Таблица 12

Ход затмения между Гренландией и Норвегией

Всемирное время	Центральная линия		Продолжит. полной фазы	h_{\odot}	d (ур-ние 7.20)
	λ (от Гр.)	φ			
11 ^h 50 ^m	35° 19',5	62° 20',5	140 ^s ,6	43°,0	148 км
55	30 04,1	62 42,8	144,1	45,0	149
12 00	24 55,4	62 54,0	147,1	46,7	150
05	19 54,7	62 54,8	149,6	48,2	151
10	15 03,3	62 45,9	151,6	49,4	151
15	10 22,2	62 28,0	153,2	50,4	152
20	5 52,4	62 01,8	154,3	51,1	152
25	+1 34,3	61 27,8	154,9	51,6	152
30	-2 31,8	60 46,6	155,0	51,9	152
35	-6 26,3	59 58,8	154,7	51,9	153

h_{\odot} — высота Солнца, d — ширина полосы полного затмения в километрах.

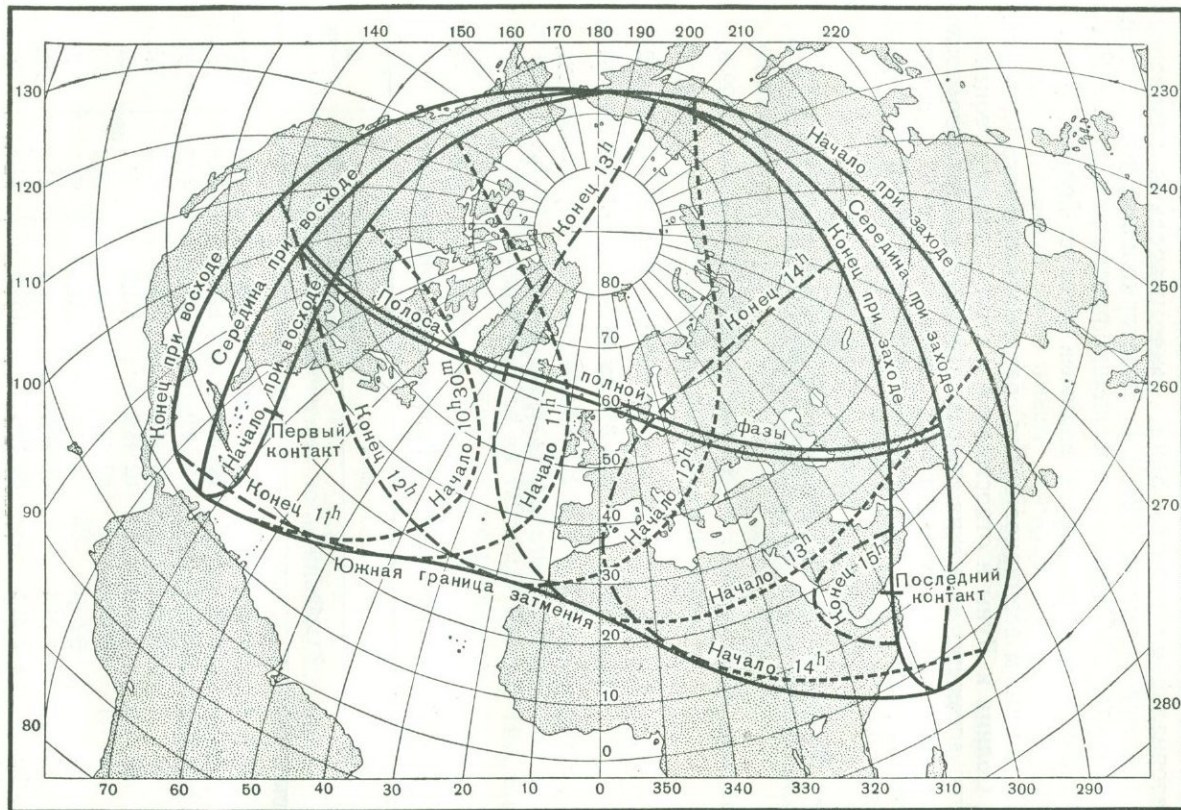


Рис. 47. Мировая карта солнечного затмения 30 июня 1954 г. (из *Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch*, 1954).

Элементы Бесселя даются в Ежегодниках через интервалы в 10 мин. Таблицу для приводимого затмения можно найти в гл. II, § 1. Там же приведены дифференциальные формулы для x и y для учета малых поправок координат Солнца и Луны.

в) Данные для центральной линии на земной поверхности 30 июня 1954 г. (рис. 47)

2. Местные условия

Данные для центральной полосы должны быть в дальнейшем уточнены и вычислены в узких интервалах. Для примера в качестве дополнения приводится табл. 13 для времени между $12^{\text{h}}30^{\text{m}}$ и $12^{\text{h}}35^{\text{m}}$.

Таблица 13

а) Центральная линия

Всемирное время	λ (от Гр.)	φ	h_{\odot}	A_{\odot}
$12^{\text{h}}30^{\text{m}}$	$-2^{\circ}31',85$	$+60^{\circ}46',61$	$51^{\circ},88$	$13^{\circ},74$
31	3 19,66	37,56	51,90	15,33
32	4 07,01	28,25	51,90	16,91
33	4 53,89	18,68	51,90	18,49
34	5 40,31	08,86	51,89	20,06
35	$-6 26,28$	$+59 58,79$	51,86	21,62

A_{\odot} есть азимут Солнца (от S к W) и одновременно большой оси эллипса тени на земной поверхности.

б) Линии границ полосы полного затмения

Всемирное время	Северная граница		Южная граница	
	λ (от Гр.)	φ	λ (от Гр.)	φ
$12^{\text{h}}30^{\text{m}}$	$-2^{\circ}58',49$	$+61^{\circ}25',64$	$-2^{\circ}06',21$	$+60^{\circ}07',58$
31	3 47,61	16,36	2 52,77	59 58,76
32	4 36,22	06,81	3 38,89	49,69
33	5 24,34	60 56,99	4 24,59	40,36
34	6 11,96	46,91	5 09,85	30,78
35	$-6 59,09$	$+60 36,57$	$-5 54,70$	$+59 20,96$

в) Теневой эллипс

Сведения о фигуре тени приведены в § 1 и 2. В качестве примера здесь выбрано затмение 1945 г., поскольку для него ось теневое эллипса была сильно наклонена к центральной линии.

г) Моменты контактов и позиционные углы

Для отдельных стран моменты 1-го и 4-го контактов (до $0^m,1$) и позиционные углы (до $0^\circ,1$) табулируются для относящихся к затмению областей по всем градусам долготы и широты.

Важнейшие данные представлены в виде карт. В специальных изданиях для отдельных пунктов наблюдения приводятся более точные данные.

Таблица 14

Дюрскар (Норвегия, 1954)

	Всемирное время	Позиционный угол	
		P	V
T_0 — середина полной фазы	12 ^h 35 ^m 49 ^s ,3	—	—
1-й контакт	11 21 31,8	282°,5	285°,4
2-й »	12 34 31,8	103,5	91,5
3-й »	12 37 06,5	283,5	271,0
4-й »	13 47 50,4	104,3	80,7

(P отсчитывается от точки севера, V — от вертекса солнечного диска).

д) Остальные величины

Высота Солнца для момента T_0 . . .	51°,84
Видимый радиус Солнца для момента T_0	943'',91
Видимый радиус Луны для момента T_0	977'',63
Движение Луны относительно Солнца при 2-м контакте	0'',4357 сек ⁻¹
при 3-м контакте	0'',4362 сек ⁻¹

Кроме того, в специальных изданиях даются дифференциальные формулы для определения изменений момента полной фазы, расстояния места наблюдения от центральной линии и высоты Солнца, происходящих вследствие малого смещения пункта

наблюдения. Соответствующие изменения моментов 2-го и 3-го контактов и их позиционных углов получаются из специальных таблиц.

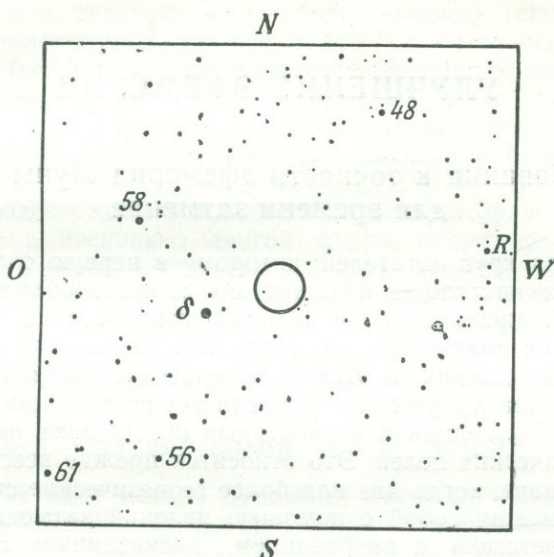


Рис. 48. Звездное небо вокруг затмившегося Солнца; Финляндия, 1945 г., созвездие Близнецов.

В заключение на рис. 48 приводится карта положений Солнца и Луны среди звезд для времени полного затмения в Финляндии в 1945 г. Она имеет интерес для общей ориентировки и для астрофизических целей (наблюдение ярких звезд во время затмения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grönstrand H. O., The total Solar Eclipse of 1945, July 9, Prediction for Finland, Obs. Medd. Abo, Bd. 3, Helsinki, 1944.
2. Grönstrand H. O., The Total Eclipse of the Sun of 1954, June 30, Prediction for Scandinavia, Obs. Ann. Stockholm, 16, Nr. 2 (1950).
3. Comrie L. J., The Computation of total Solar Eclipses, Month. Not., 175—181 (1933).

УЛУЧШЕНИЕ ЭФЕМЕРИД

§ 1. Требования к точности эфемерид Луны и Солнца для времени затмения

Учитывая круг читателей, которому в первую очередь предназначается настоящее издание, мы сочли необходимым дать в § 5 гл. V краткий обзор величин, необходимых для общего предсказания солнечных затмений, которые можно найти в основных Ежегодниках. К этим величинам относятся также координаты Солнца и Луны для момента затмения. Однако точность данных из Ежегодников в некоторых отношениях недостаточна для геодезических целей. Это относится прежде всего к относительной задаче, когда две или более геодезические станции связываются между собой с помощью явлений затмения.

В соответствии с требованием, высказанным Бонсдорфом в 1944 г., моменты контактов солнечного затмения должны определяться для геодезических целей с точностью $\pm 0^{\circ},02$. Это соответствует 20 м в движении тени. Так как топоцентрическое положение Луны изменяется за 1 сек в среднем на $0^{\circ},5$, то положение Луны требуется знать с точностью $\pm 0^{\circ},01$.

Используемые при затмениях астрономические Ежегодники давали до 1959 г. требуемые координаты Луны только до $0^{\circ},1$, хотя первоначальные вычисления (по таблицам Броуна) производились с точностью до $0^{\circ},01$. Для Солнца дело обстояло точно так же. Однако требуемая для геодезических целей более высокая точность необходима не в абсолютном, а лишь в относительном смысле, а именно для разности моментов времени в несколько часов.

Это может быть достигнуто улучшенным в количественном и качественном отношении перевычислением малого отрезка как солнечной, так и лунной орбиты. Найденные малые отрезки затем «вставляются» в уже хорошо обоснованный общий орбитальный ход эфемериды Ежегодника, так что эфемерида как бы «местно» улучшается. После выполнения этих двух процедур (увеличение точности малого отрезка орбиты и увязывание его с общей орбитой) новые координаты Солнца и Луны можно найти интерполированием. В соответствии с заглавием этой главы будем называть их «улучшенными».

Несмотря на то что с 1960 г. положения Луны даются в Ежегодниках с точностью $0^s,001$ по прямому восхождению и $0'',01$ по склонению, не исключено, что и в дальнейшем может возникнуть необходимость перехода к еще более высокой (относительной) точности положений Солнца и Луны. В способе особых покрытий звезд (гл. XIII) также требуется большая точность относительной лунной эфемериды. В каждом подобном случае следует пользоваться методом вычисления, разработанным Зундманом [1] и дополненным Хирвоненом [2], который и будет описан в дальнейшем.

Для геодезистов это знакомая задача, которая часто встречается им в несколько другой форме, например при вставке вновь вычисленной части сети в старую. Эта задача выступает здесь как астрономическая и требует необычной строгости в теоретической и числовой обработке. Метод Зундмана во многих отношениях особенно поучителен для геодезистов; поэтому авторы сочли необходимым дать ему место в этой книге.

§ 2. Краткий обзор метода Зундмана

Основная идея метода Зундмана взята из теории возмущений, разработанной Энке. Подробное изложение этой теории можно найти в руководстве по вычислению орбит комет и планет Оппольцера [3]. Исходя из полных дифференциальных уравнений движения, Зундман выводит возмущения движения Солнцем и Луной. Вычисление при этом основывается на наиболее точных значениях астрономических постоянных.

В дифференциальные уравнения движения Луны вокруг Земли входят в качестве так называемых «прямых» возмущения, обусловленные в отдельности Солнцем, сжатием Земли и планетами Венерой и Юпитером. Они в свою очередь вызывают «косвенные» возмущения. Остальные планеты оказывают лишь пренебрежимо малое влияние. На движение Солнца или (с обратным знаком) на движение центра тяжести системы Земля — Луна вокруг Солнца воздействуют как «прямые» возмущения от всех планет, так и вызванные ими «косвенные» вторичные влияния. Все эти возмущающие действия могут быть получены теоретически, а при достаточно хороших значениях постоянных числовые значения этих возмущений могут быть и вычислены с большой точностью. Таким образом изменение возмущений может быть прослежено внутри интересующего нас сравнительно короткого промежутка времени.

Координаты небесных тел и дифференциальные уравнения движения задаются в прямоугольных компонентах x , y , z . Подобно тому как это принято и в методе Энке, за плоскость xy принимается для Луны плоскость среднего экватора начала года

затмения, а для Солнца — плоскость средней эклиптики, отнесенная к среднему равноденствию начала года. Началом координат является в случае Луны центр Земли, а в случае Солнца — центр последнего.

Из теоретических дифференциальных уравнений возмущений для ограниченного числа суток (до и после затмения) в некотором интервале вычисляются числовые значения возмущающих сил на основе заданных величин астрономических постоянных; затем они вводятся суммарно в компоненты по x , y , z . Косвенные возмущения могут быть получены только методом последовательных приближений, т. е. многократным повторением вычислений. Это основано на том, что «прямые» возмущающие силы немного смещают Луну (а при движении Солнца — центр тяжести системы Земля — Луна) с принятой невозмущенной орбиты; вследствие этого притяжение Земли снова изменяется («косвенное» возмущение). После введения первого приближения этого «косвенного» возмущения орбита Луны вновь изменяется, но на этот раз уже меньше; этот процесс следует повторять до тех пор, пока «косвенное» возмущение не станет неизменным. Сходимость достигается довольно быстро.

На каждой ступени приближения этот малый отрезок лунной орбиты вставляется в броуновскую орбиту (в то время дававшуюся таблицами Броуна с эмпирическими поправками), так что в результате получается броуновская орбита Луны с существенно улучшенным отрезком, симметрично расположенным относительно момента затмения. Опыт показал, что в случае Луны достаточно вычислить методом численного интегрирования улучшенную орбиту для 7 суток (3 дня до и 3 дня после затмения). В случае Солнца вычисления должны быть распространены на 64 суток.

Способ Зундмана будет объяснен ниже в применении к затмению Солнца 20 мая 1947 г. по работе Хирвонена [2], в той мере, которая необходима для ознакомления геодезистов с этим интересным методом. Этот сугубо специальный вопрос изложен в § 3.

§ 3. Дифференциальные уравнения движения Луны вокруг Земли и их численное интегрирование

1. «Наблюдаемые» координаты Луны¹⁾

Из Ежегодника (например, American Ephemeris) выписываются видимые координаты α и δ Луны и ее горизонтальный

¹⁾ Эти координаты называются «наблюденными», в противоположность получаемым впоследствии «теоретическим», так как используемые для них таблицы Луны получены из наблюдений и табличные значения требуют некоторого улучшения по методу наименьших квадратов.

экваториальный параллакс P для 7 дней, симметрично моменту затмения. Для 1947 г. α и δ давались с точностью до $0'',1$ на каждый час, а P — через 12 час с точностью до $0'',01$ (§ 4, табл. 17). По этим данным с помощью нижеследующих формул вычисляются средние места α_m, δ_m (1947,0) и расстояния r центра Луны от центра Земли в астрономических единицах (обозначения взяты из American Ephemeris):

$$r = \frac{\sin P_{\odot}}{\sin P} \approx \frac{8'',79}{P''} + 3,4434 \cdot 10^{-11} \cdot P'', \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \alpha - f - f' - g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + \tau \Delta \alpha, \\ \delta_m &= \delta - g \cos(G + \alpha) + \tau \Delta \delta. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Абerrационное время

$$\tau = \frac{6378}{299760} \cdot \frac{\operatorname{cosec} P}{3600} = 0^h,1387 \cdot r.$$

Вычисленные значения r сглаживаются так, чтобы их четвертые разности имели постоянный ход (§ 4, табл. 18).

В прямоугольной геоцентрической системе координат, полагаемой в основу исследований движения Луны, ось x направлена в точку весеннего равноденствия 1947,0, ось y — в точку небесного экватора с прямым восхождением 90° , а ось z направлена в северный полюс. Тогда средние прямоугольные координаты Луны будут:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta_m \cos \alpha_m, \\ y &= r \cos \delta_m \sin \alpha_m, \\ z &= r \sin \delta_m \end{aligned} \quad (8.3)$$

(§ 4, табл. 19).

2. Теоретические уравнения движения

а) Невозмущенная орбита

Движение называется невозмущенным, когда массы Земли и Луны считаются сосредоточенными в их центрах, а прочие тела в расчет не принимаются. В этом случае могут быть строго вычислены 6 параметров, определяющих эллиптическую орбиту. Они называются *оскулирующими элементами* и имеют следующие значения:

Большая полуось	$a = 0,0025856790$
Эксцентриситет	$e = 0,0656859 = 13548'',68944$
Наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора	$i = 26^\circ 16' 56'',18$

Прямое восхождение восходящего узла	$\Omega = 10^\circ 38' 21'',85$
Угловое расстояние перигея от восходящего узла	$\pi = 77^\circ 24' 26'',14$
Время прохождения через перигей	$t_0 = \text{май } 22,48266299$

Среднее суточное движение Луны определяется из III закона Кеплера

$$n^2 = \frac{k^2(m_0 + m)}{a^3}, \quad (8.4)$$

где k — гауссова постоянная притяжения, m_0 — масса Земли, m — масса Луны (выраженные в единицах солнечной массы). При

$$k^2(m_0 + m) = 38,221061 (")^2$$

и приведенном выше значении a получаем

$$n = 47020'',8000.$$

В целях достижения быстрой сходимости 6 параметров могут быть выбраны так, чтобы отклонения «наблюдаемой» орбиты (табл. 19) от невозмущенной на концах и в середине невычисленной части были примерно равны и по возможности малы. Затем с помощью известных формул ([2], стр. 11) получаются прямоугольные координаты x_0, y_0, z_0 невозмущенной Луны в экваториальной системе (§ 4, табл. 25).

Из наблюдаемых величин x, y, z и теоретических x_0, y_0, z_0 следуют абсолютные значения возмущений ξ^0, η^0, ζ^0 , обозначенные как «приближенные», во-первых, потому, что они основаны на недостаточном числе наблюдений и, во-вторых, потому, что они требуют еще небольших поправок за счет более точного вычисления возмущений (§ 4, табл. 21)

$$\xi^0 = x - x_0, \quad \eta^0 = y - y_0, \quad \zeta^0 = z - z_0. \quad (8.5)$$

Эти компоненты возмущений, поскольку они основаны на наблюдениях, содержат все влияния, помимо притяжения масс Земли и Луны, принимаемых за сосредоточенные в центрах тяжести.

б) Прямые возмущающие силы D

Солнце

Преобладающее влияние на систему Земля — Луна оказывают возмущения со стороны Солнца. Компонента возмущающей силы по оси x равна

$$D_x = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3} [fq(x' - x) + x]; \quad (8.6)$$

здесь x' , y' , z' — прямоугольные координаты Солнца, которые могут быть взяты из Ежегодника, где они даны в экваториальной системе 1947,0 через 6-часовые интервалы (X' , Y' , Z' , § 6, табл. 28). Координаты Луны x , y , z вычислены по (8.3) (§ 4, табл. 19). Правда, эти координаты еще не окончательные, но в большинстве случаев они достаточны для вычисления возмущений. В отдельных случаях следует повторить вычисление с окончательными значениями. В дальнейшем мы примем обозначения

$$f = 3 - \frac{15}{2}q + \frac{35}{2}q^2 - \frac{315}{8}q^3 + \frac{693}{8}q^4 - \dots, \quad (8.7)$$

$$q = -\frac{1}{r'^2} \left[x \left(x' - \frac{1}{2}x \right) + y \left(y' - \frac{1}{2}y \right) + z \left(z' - \frac{1}{2}z \right) \right]. \quad (8.8)$$

Функция Энке f табулирована по аргументу q (например, [3], стр. 594).

Соответствующие выражения для D_x пригодны и для D_y и D_z . Поскольку здесь за единицу времени принят 6-часовой интервал, гауссова постоянная должна быть уменьшена в четыре раза и тогда $k^2 = 18,494513 \cdot 10^{-6}$.

Юпитер и Венера

Компоненты возмущающей силы равны

$$\begin{aligned} D_x &= k^2 m \frac{3pa - x}{r^3}, \\ D_y &= k^2 m \frac{3pb - y}{r^3}, \\ D_z &= k^2 m \frac{3pc - z}{r^3}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Для Юпитера и Венеры в формуле (8.9) m равно 1/1047,3 и 1/408000 соответственно. Буквой r обозначается расстояние планеты от Земли; вспомогательные величины вычисляются из планетных координат α , δ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a &= \cos \delta \cos \alpha, \\ b &= \cos \delta \sin \alpha, \\ c &= \sin \delta, \\ p &= ax + by + cz. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Сжатие Земли

Сжатие Земли вызывает следующие возмущения:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{Q}{r^4} \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{5} \right) \frac{x}{r}, \\ D_y &= \frac{Q}{r^4} \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{5} \right) \frac{y}{r}, \\ D_z &= \frac{Q}{r^3} \left(\sin^2 \delta - \frac{3}{5} \right) \frac{z}{r}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

причем $\sin \delta = z/r$ и x, y, z, r — координаты и расстояние Луны. Постоянная

$$Q = 5k^2 m_0 a_0^2 \left(p - \frac{1}{2} v \right) = 0,082246 \cdot 10^{-20} \quad (8.12)$$

получается из возмущающей функции

$$V = \frac{k^2 m_0 a_0^2 \left(p - \frac{1}{2} v \right)}{3r^3} \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2} \right) \quad (8.13)$$

и вычисляется по следующим данным:

$$k^2 = 18,494513 \cdot 10^{-6},$$

$m_0 = 0,0000029991$ (масса Земли в долях массы Солнца),

$a_0 = \sin 8'',79$ (экваториальный радиус Земли),

$p = 1 : 297$ (сжатие Земли),

$v = 0,003468$ (отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе).

в) Косвенные возмущения J

Вследствие прямых возмущений D Луна удаляется от невозмущенной орбиты и вместе с этим изменяется притяжение ее Землей. Вызываемые этим косвенные возмущения выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{k^2 (m + m_0)}{r_0^3} (fqx - \xi), \\ J_y &= \frac{k^2 (m + m_0)}{r_0^3} (fqu - \eta), \\ J_z &= \frac{k^2 (m + m_0)}{r_0^3} (fqz - \zeta). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Здесь за аргумент q функции Энке (8.7) берется выражение

$$q = \frac{1}{r_0} \left[\xi \left(x_0 + \frac{1}{2} \xi \right) + \eta \left(y_0 + \frac{1}{2} \eta \right) + \zeta \left(z_0 + \frac{1}{2} \zeta \right) \right]. \quad (8.15)$$

Так как окончательные координаты пока еще неизвестны, вычисления можно начать со значениями x, y, z (табл. 19), полученными по (8.3) с данными из Ежегодника, и с приближенными возмущениями ξ^0, η^0, ζ^0 ; вычисления повторяют, пока возмущения не перестанут изменяться.

3. Привязка по методу особых возмущений Энке

При вычислении особых возмущений Энке исходят из некоторой точки орбиты, для которой положение и касательные возмущенной и невозмущенной орбит совпадают, и пытаются найти

возмущения на ограниченном участке орбиты методом численного интегрирования. Элементы эллиптической орбиты, которые определяют для заданного момента место и движение тела, совпадающие с таковыми на возмущенной орбите, называются *оскулирующими элементами*.

Пусть тело, орбита которого определяется, имеет массу m , а одно из возмущающих тел — массу m_1 (массы выражены в единицах массы Солнца), и пусть k^2 — постоянная тяготения солнечной системы; тогда основные уравнения Энке в прямоугольных координатах будут

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \sum k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) + k^2 (1 + m) \left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right). \quad (8.16)$$

Такие же выражения можно написать для компонент по y и z . Индекс «нуль» означает «невозмущенный»; ρ — расстояние до возмущающего тела. Первые члены в правой части называются прямыми членами, вторые — косвенными. Последние вызывают наибольшие трудности при вычислении.

Согласно Энке, выражение для косвенного возмущения можно преобразовать следующим образом, если ввести, согласно (8.5), возмущение координат

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) x - \xi \right]. \quad (8.17)$$

$$r^2 = (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2. \quad (8.18)$$

Из (8.18) следует

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{1}{r_0^2} [(2x_0 + \xi)\xi + (2y_0 + \eta)\eta + (2z_0 + \zeta)\zeta].$$

Положив правую часть равной $1 + 2q$, имеем

$$\frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-3/2}, \quad (8.19)$$

где

$$q = \frac{1}{r_0^2} \left[\left(x_0 + \frac{1}{2} \xi \right) \xi + \left(y_0 + \frac{1}{2} \eta \right) \eta + \left(z_0 + \frac{1}{2} \zeta \right) \zeta \right]. \quad (8.20)$$

Разложив (8.19) по степеням q , имеем

$$\frac{r_0^3}{r^3} = 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \dots$$

Затем можно написать

$$1 - \frac{r_0^3}{r^3} = fq,$$

где

$$f = 3 \left(1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 + \dots \right). \quad (8.21)$$

Тогда (8.17) принимает вид

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{f q x - \xi}{r_0^3}. \quad (8.22)$$

Соответствующие уравнения получаются и для y и z (ср. (8.14)). После того как q вычислено по (8.20), f может быть взято в пределах $-0,03 < q < +0,03$ из таблицы Энке, выдержку из которой мы здесь даем. Эта таблица существенно облегчает численное интегрирование косвенных возмущений.

Таблица 15

Извлечение из таблицы функции Энке f

Начало			Конец		
q	разн.	$\lg f$	q	разн.	$\lg f$
-0,030 0000		0,510 798	+0,029 5000		0,446 076
	-116			-102	
-0,029 9000		0,510 682	+0,029 6000		0,445 974
	-116			-102	
-0,029 8000		0,510 566	+0,029 7000		0,445 872
	-116			-102	
-0,029 7000		0,510 450	+0,029 8000		0,445 770
	-116			-102	
-0,029 6000		0,510 334	+0,029 9000		0,445 668
	-116			-102	
-0,029 5000		0,510 218	+0,030 0000		0,445 566

4. Численное интегрирование

Дифференциальные уравнения движения, обусловленного всеми возмущающими силами, могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= D_x + J_x = f_x, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= D_y + J_y = f_y, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= D_z + J_z = f_z. \end{aligned} \quad (8.23)$$

В табл. 22, § 4 даны окончательные возмущающие силы, которые были получены на последней ступени аппроксимации. Наибольшее возмущение происходит от Солнца; на втором месте стоят косвенные возмущения, третье место занимают возмуще-

ния от сжатия, затем возмущения от Юпитера и на последнем месте — от Венеры; остальные планеты не оказывают ощутимого действия.

В некоторой точке орбиты для некоторого заданного малого интервала времени Δt вторые разности Δ_2 координат x, y, z весьма близки по величине к вторым производным координат $\frac{d^2\xi}{dt^2} \dots$ и т. д. для того же интервала времени. Выведенные из теории численные значения f_x, f_y, f_z суть «производные». Но поскольку при численном интегрировании используются конечные разности, то для перехода к ним следует прибавить к производным малые поправки

$$\Delta_2 = f + \frac{1}{12} f_{II} - \frac{1}{240} f_{IV}. \quad (8.24)$$

В табл. 23 и 24 (§ 4) поясняется метод численного интегрирования и привязка на примере возмущения по x для первой степени приближения, при которой величины f_x (табл. 23, 6-й столбец) получены по (8.23) из величин табл. 19—21. После того как были вычислены теоретические вторые разности Δ_2 по (8.24) в столбце 8, следует определить две постоянные интегрирования. Прежде всего исходят из приближенных значений этих постоянных, причем за них принимают значения $\Delta_1 = -32,9$ и $\xi^0 = -1559,1$ из табл. 21 для середины интервала (май 20, 12^h).

Новые значения ξ' находят по разностям Δ_1 суммированием (табл. 23, столбец 10). Они ложатся на кривую, которая вследствие приближенных значений постоянных интегрирования искажена и сдвинута относительно броуновской орбиты, но в своих высших производных по степени соответствующего приближения согласуется с теорией.

Чтобы наилучшим образом привязать к броуновской орбите ее кусок, полученный теоретическим путем (что равнозначно более точному определению постоянных интегрирования), из разностей $\Delta\xi = \xi^0 - \xi'$ выводятся поправки к использованным приближенным значениям постоянных интегрирования. Выгодно делать эту привязку по методу наименьших квадратов. Тогда ход вычислений будет следующим. Составляются разности

$$\begin{aligned} d_n &= \Delta\xi_{n+1} - \Delta\xi_1, & n & \text{ интервалов,} \\ d_{n-2} &= \Delta\xi_n - \Delta\xi_2, & n-2 & \text{ " "} \\ d_{n-4} &= \Delta\xi_{n-1} - \Delta\xi_3, & n-4 & \text{ " "} \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

и суммы

$$\begin{aligned} nd_n + (n-2)d_{n-2} + \dots &= S, \\ n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \dots &= s. \end{aligned}$$

S/s есть поправка Δ_1 (вращения). К ξ^0 прибавляется среднее из всех $\Delta\xi$. Таким образом получаем линейную поправку и окончательно увязанные ξ в 5-м столбце табл. 24. Для проверки этот процесс вычислений продлевают еще раз с разностями $\xi^0 - \xi$. Никаких поправок при этом получаться не должно.

После того как закончено вычисление с привязкой для ξ , η и ζ в первом приближении, эти величины вводятся в уравнения (8.14) и (8.23), благодаря чему величины f_x , f_y и f_z получаются во втором, лучшем приближении. Повторяя это вычисление несколько раз, получают окончательные значения увязанных отклонений (табл. 25).

Отсюда интерполируются окончательные возмущения ξ , η , ζ через часовые интервалы на период затмения (май 20, 10—18^h). Эти последние, будучи прибавлены к также проинтерполированным на каждый час невозмущенным координатам x_0 , y_0 , z_0 , дают окончательные прямоугольные координаты x , y , z (табл. 26). Средние координаты α_m , δ_m в системе 1947,0 и расстояния r центра Луны от центра Земли находятся затем для более короткого времени затмения по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_m &= \frac{y}{x}, & \operatorname{tg} \delta_m &= \sin \alpha_m \cdot \frac{z}{y}, \\ r &= \frac{y}{\sin \alpha_m \cos \delta_m}, & r^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Эти средние координаты (таблица не приводится) следует перевести с помощью поправок за прецессию, нутацию и абберацию в видимые геоцентрические координаты. Окончательные результаты даны в табл. 27 и сравнены с данными из *American Ephemeris, 1947* (которые вычислены по таблицам Броуна с эмпирическими поправками и в которых α , δ даются только до $0''$,1). Это сравнение показывает, что имеются систематические разности, которые не имели бы значения для геодезии, если бы они не показывали хода, значительно превосходящего допустимую меру точности. Из-за этих поправок, составляющих всего несколько сотых секунды дуги, и потребовалось произвести вышеописанное объемистое и трудное вычисление для Луны. Это вычисление может быть лишь в грубых чертах заменено простым сглаживанием эфемерид Ежегодника. Новые видимые координаты α , δ , P для Луны являются исходными данными при вычислении бесселевых элементов затмения.

Для астрономии, кроме того, имеют значение поправки к положенным в основу эфемеридным видимым геоцентрическим положениям Луны α , δ и к горизонтальному экваториальному параллаксу P , взятым из Ежегодника. Проще всего эти поправки

получаются по следующим дифференциальным формулам:

$$d\alpha = \frac{206265}{r \cos \delta} (-\sin \alpha dx + \cos \alpha dy),$$

$$d\delta = \frac{206265}{r} \cos \delta (-\sin \delta \cos \alpha dx - \sin \delta \sin \alpha dy + dz), \quad (8.26)$$

$$dP = \frac{-8'',79}{r^2} \left(\frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz + dr_1 \right).$$

Здесь

$$dx = \xi - \xi^0, \quad dy = \eta - \eta^0, \quad dz = \zeta - \zeta^0,$$

получаются из окончательных возмущений ξ, η, ζ (табл. 25) и приближенных возмущений ξ^0, η^0, ζ^0 (табл. 21); dr_1 — первоначально принятая поправка выравнивания, внесенная в величины r табл. 18 перед началом вычисления возмущений. Для начала, середины и конца вновь вычисленной части орбиты Луны вносятся следующие поправки геоцентрических положений (табл. 16).

Таблица 16

Май 1947	$d\alpha$	$d\delta$	dr	dr_1	dP
17 ^d 0 ^h	+0'',19	-0'',03	-3,6 · 10 ⁻⁹	-0,5 · 10 ⁻⁹	+0'',006
20 12	-0,27	0,00	+4,3	+1,3	-0,008
24 0	+0,62	-0,13	-3,4	+0,9	+0,004

§ 4. Пример вычислений для Луны

Таблица 17

Видимые положения и горизонтальные параллаксы Луны
(по эфемериде Луны, «наблюденные» значения)

Май 20	α	δ	P
0 ^h	48° 12' 59'',7	+16° 45' 37'',2	50' 58'',34
6	51 48 56,7	18 00 40,9	
12	55 28 53,25	19 12 00,6	60 14,28
18	59 12 49,05	20 19 09,8	

Средние положения по эфемериде Луны («наблюденные»)

Май 20	α_m	δ_m	r
0 ^h	48° 12' 58",59	+16° 45' 33",76	0,002 442 9155
6	51 48 55,52	18 00 37,34	0,002 437 2304
12	55 28 51,98	19 11 56,93	0,002 432 1454
18	59 12 47,66	20 19 06,03	0,002 427 6850

Средние координаты по эфемериде Луны («наблюденные») в единицах 10^{-9}

Май 20	x	y	z
0 ^h	1558 624,5	1744 223,5	704 422,0
6	1432 861,3	1821 850,7	753 565,2
12	1301 587,1	1892 483,6	799 817,3
18	1165 279,9	1955 802,5	842 979,3

Невозмущенные координаты Луны (теория) в единицах 10^{-9}

Май 20	x_0	y_0	z_0
0 ^h	1560 026,764	1746 595,337	705 481,247
6	1434 356,273	1824 275,934	754 642,299
12	1303 146,154	1894 909,998	800 888,363
18	1166 871,912	1958 179,305	844 021,632

Таблица 21

Приближенные возмущения Луны в единицах 10^{-9}

Май 20	ξ°	Δ_1	Δ_2	τ°	Δ_1	Δ_2	ζ°	Δ_1	Δ_2
0 ^h	-1402,3			-2371,8			-1059,2		
6	-1495,0	-92,7		-2425,2	-53,4		-1077,1	-17,9	
12	-1559,1	-64,1	+28,6	-2426,4	-1,2	+52,2	-1071,1	+6,0	+23,9
18	-1592,0	-32,9	+31,2	-2376,8	+49,6	+50,8	-1042,3	+28,8	+22,8
		+4,8	+37,7		+96,6	+47,0		+49,7	+20,9

Таблица 22

Окончательные возмущающие силы f_x, f_y, f_z в единицах 10^{-9}

1947, май 20	Солнце	Венера	Юпитер	Сжатие	Косвенное возмущение	Общее возмущение, f
-----------------	--------	--------	--------	--------	-------------------------	--------------------------

Возмущение по x

						f_x
0 ^h	+40,6690	+0,0001	+0,0006	-0,0018	-15,8995	+24,7684
6	42,7413	1	6	15	14,8591	27,8814
12	44,6800	1	6	12	13,1458	31,5337
18	46,4796	1	7	10	10,9098	35,5696

Возмущение по y

						f_y
0 ^h	+70,0969	0	+0,0008	-0,0020	-14,6961	+55,3996
6	69,3773		8	19	16,8463	52,5299
12	68,4422		7	17	18,4723	49,9689
18	67,2922		7	15	19,4359	47,8555

Возмущение по z

						f_z
0 ^h	+31,3359	0	+0,0003	-0,0035	-5,5480	+25,7847
6	30,7456		3	37	6,6845	24,0577
12	30,0593		3	39	7,6323	22,4234
18	29,2784		3	41	8,3104	20,9642

Таблица 23

Численное интегрирование и привязка (1-е приближение)

1947, май 20	f_{IV}	f_{III}	f_{II}	f_I	f_x	$\frac{f_{II}}{12}$	Δ_0	Δ_1	ξ'
	Единицы 10^{-12}								
0 ^h	-48		+648		+24,769	+0,054	+24,823		-1402,261
6	-41	-109	+539	+3108	+27,877	+0,045	+27,922	-92,380	-1494,642
12	-54	-150	+389	+3648	+31,525	+0,032	+31,558	-64,458	-1559,100
18	+2	-205	+184	+4037	+35,562	+0,015	+35,577	-32,900	-1592,000
		-203		+4221				+2,677	

Таблица 24

Численное интегрирование и привязка (продолжение табл. 23)
в единицах 10^{-9}

Май 20	ξ'	$\Delta\xi = \xi^0 - \xi'$	Поправка	ξ	$\xi - \xi'$
0 ^h	-1402,261	-0,04	+3,200	-1399,061	+3,24
6	-1494,642	-0,36	+4,087	-1490,555	+4,46
12	-1559,100	0	+4,974	-1554,126	+4,97
18	-1592,000	0	+5,861	-1586,139	+5,86

Таблица 25

Окончательные возмущения (привязанная орбита минус возмущенная орбита) в единицах 10^{-9}

Май 20	ξ	η	ζ
0 ^h	-1399,025	-2372,522	-1059,057
6	1490,554	2424,887	1076,400
12	1554,157	2424,696	1069,677
18	1586,194	2374,499	1040,516

Таблица 26¹⁾Окончательные возмущения и окончательные координаты для узкой области затмения в единицах 10^{-9}

Май 20	ϵ	x	η	v	ζ	z
12 ^h	-1554,157	+130 1591,997	-2424,696	+189 2485,302	-1069,677	+79 9818,686
13	1561,793	127 9210,386	2419,739	190 3554,751	1066,333	80 7232,248
14	1568,535	125 6691,215	2413,405	191 4419,538	1062,373	81 4559,048
15	1574,365	123 4036,808	2405,705	192 5078,281	1057,805	82 1798,203

Таблица 27¹⁾

Видимые координаты Луны для узкой области затмения и сравнение с American Ephemeris

Май 20	Видимое прямое восхождение		Разность	Видимое склонение		Разность	r
	новое	Am. Eph.		новое	Am. Eph.		
12 ^h	55° 28' 52",979	53",25	-0",27	19° 12' 0",599	0",6	0",00	0,00243 2149 724
13	56 05 55,724	55,95	-0,23	19 23 30,243	30,2	+0,04	243 1362 541
14	56 43 05,109	05,40	-0,29	19 34 52,806	52,8	+0,01	243 0592 812
15	57 20 21,119	21,30	-0,18	19 46 08,164	08,2	-0,04	242 9840 636

1) Результаты табл. 26 и 27 приведены в оригинальной работе через часовые интервалы с 10 до 18^h

§ 5. Движение Солнца вокруг центра тяжести G системы Земля — Луна и обратное преобразование этого движения по отношению к Земле

1. Наблюденные координаты точки G

Движение Солнца вокруг центра тяжести G системы Земля — Луна идентично движению центра тяжести G вокруг Солнца с обратным знаком; оно вычисляется с помощью особых возмущений, подобно тому как это было показано в § 2 на примере движения Луны. Прежде всего переводят «наблюденные» средние координаты Солнца X' , Y' , Z' (экваториальная система, равноденствие 1947,0), выборочно взятые из American Ephemeris, в средние эклиптические координаты с помощью соответствующего этому времени среднего наклона эклиптики ($\epsilon = 23^\circ 26' 46''$, 2423). При одновременной перемене знака следующие формулы преобразования дают средние эклиптические координаты центра Земли относительно Солнца:

$$\begin{aligned} -x_e &= X', \\ -y_e &= Y' \cos \epsilon + Z' \sin \epsilon, \\ -z_e &= Z' \cos \epsilon - Y' \sin \epsilon. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Опыт показал, что для Солнца достаточно вычислить улучшенную орбиту точки G (привязку) для 64 суток (32 до и 32 после затмения), а численное интегрирование ограничить промежутком в 4 суток.

Эклиптические координаты Земли, если учитывать и Луну, потребуют следующих поправок:

$$\begin{aligned} \Delta x &= r_G \cos \beta \cos \lambda, \\ \Delta y &= r_G \cos \beta \sin \lambda, \\ \Delta z &= r_G \sin \beta. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Тогда координаты центра тяжести G будут

$$\begin{aligned} x &= x_e + \Delta x, \\ y &= y_e + \Delta y, \\ z &= z_e + \Delta z. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Расстояние r_G центра тяжести системы Земля — Луна, выраженное в единицах среднего расстояния от Солнца, равно

$$r_G = \frac{1}{M} \frac{\sin 8''{,}79}{\sin P}, \quad (8.30)$$

где

$$M = 1 + \frac{m_0}{m} = 82,45;$$

m — масса Луны, m_0 — масса Земли. Эклиптические широта β и долгота λ Луны, а также лунный параллакс P могут быть взяты непосредственно из эфемерид, так как поправки Δx , Δy , Δz относительно малы.

После этого вычисляются прямоугольные эклиптические координаты центра тяжести G (в единицах среднего расстояния Земли от Солнца) через интервалы в 4 суток, с 18 апреля до 21 июня (выборочно — в табл. 29).

2. Теоретические уравнения движения для G

а) Невозмущенная орбита

Полагаем, что массы Земли и Луны сосредоточены в точке G , а масса Солнца — в его центре. Вместо приведенных в § 3 параметров для Луны принимаются соответствующие элементы движения центра тяжести G по отношению к эклиптике.

Оскулирующие элементы

Большая полуось . . .	$a = 1,0000138650$	
Эксцентриситет	$e = 0,01673414000$	
Наклонение орбиты к эклиптике	$i = 0'',5000$	
Долгота восходящего узла	$\Omega = 209^\circ 04' 55'',6600$	} Для равно- денствия 1947,0
Долгота перигелия . . .	$\pi = 253^\circ$	
Средняя аномалия в момент t_0	$M_0 = 134^\circ 43' 46'',1900$	(20 мая, 0 ^h)
или		
Среднее суточное движение	$n = 0^\circ 59' 08'',1192$	
Эксцентриситет	$e = 3451'',664145$	

Квадрат постоянной суточного движения равен

$$k^2(1 + m + m_0) = (3548'',19300)^2.$$

Как и для Луны (§ 4, табл. 20), получаем по известным формулам прямоугольные координаты x_0 , y_0 , z_0 невозмущенного движения G в системе эклиптики 1947,0, а с ними и приближенные возмущения (табл. 30):

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \xi = z - z_0.$$

б) Прямые возмущения D

Прямые возмущения вызываются планетами; обратные величины их масс таковы:

Меркурий . . .	6 000 000
Венера	408 000
Марс	3 093 500
Юпитер	1 047,350
Сатурн	3 501,6
Уран	22 870
Нептун	19 700

Применяя формулы (8.9) и (8.10), следует заменить в них δ и α через β и λ ; используемое значение k^2 следует помножить на 256, так как изменился интервал (4 суток вместо 6 часов). Табл. 31 содержит окончательные возмущающие силы, действующие на G (после трижды повторенного вычисления).

в) Непрямые возмущения J

Возмущающие силы планет смещают центр тяжести масс G с невозмущенной орбиты. Из-за этого меняется и положенное в основу притяжение Солнца. Эти косвенные возмущения также вычисляются по формулам (8.14).

3. Численное интегрирование

Численное интегрирование и увязка, показанные нами на примере Луны (табл. 23 и 24), повторяются в случае Солнца подобным же образом, но с другими интервалами. Мы приводим в табл. 32 окончательные возмущения ξ , μ , ζ эклиптических координат точки G только для двух дней, хотя они вычислены для 64 дней с интервалами 4 дня. Этой таблице соответствует табл. 25 для Луны. Отсюда интерполируются окончательные возмущения точки G через 1 час для малого интервала затмения (табл. 33).

4. Вывод окончательных координат Солнца

По эллиптическим элементам орбиты (разд. 2а) для малого интервала затмения вычисляются прямоугольные координаты x_0 , y_0 , z_0 невозмущенной орбиты в системе эклиптики с десятью десятичными знаками через часовые интервалы (табл. 34). Прибавляя к x_0 , y_0 , z_0 окончательные возмущения ξ , η , ζ для точки G (табл. 33), получаем окончательные координаты x , y , z точки G

в эклиптике (таблицы нет) для узкой области. Эти последние переводятся в экваториальные координаты по формулам

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon, \\z' &= z \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon\end{aligned}\quad (8.31)$$

(таблицы нет).

Отделение влияния Луны (обратное преобразование)

Прямоугольные экваториальные координаты X, Y, Z Солнца относительно центра Земли получаются оборачиванием преобразования (8.29). Вследствие перемены знака координаты центра тяжести G следует вычитать из помноженных на $1/M=1/82,45$ координат Луны

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{M} x_{\zeta} - x', \\Y &= \frac{1}{M} y_{\zeta} - y', \\Z &= \frac{1}{M} z_{\zeta} - z'.\end{aligned}\quad (8.32)$$

Окончательные экваториальные координаты Луны берутся из табл. 26, координаты точки G вычисляются по (8.31). Результаты приведены в табл. 35.

Пример

$$1947, \text{ май } 20, 12^{\text{h}} \text{ вс. вр. } x_0 = -0,5267461807 \quad (\text{табл. } 34)$$

$$\xi = + \quad \underline{116157} \quad (\text{табл. } 33)$$

$$x' = -0,52674501913$$

$$x_{\zeta} = +0,001301591997 \quad (\text{табл. } 26)$$

$$\frac{1}{M} x_{\zeta} = +0,00001578647$$

$$x' = \underline{-0,52674501913} \quad (\text{выше})$$

$$X = \frac{1}{M} x_{\zeta} - x' = +0,52676080560 \quad (\text{табл. } 35)$$

Из прямоугольных координат X, Y, Z , как и в случае Луны, по формулам (8.25) следуют средние координаты α_m, δ_m в системе экватора 1947,0, а также и расстояния r центра Солнца от центра Земли (таблицы нет). Эти средние координаты переводятся обратно путем учета прецессии, нутации и аберрации по (8.2) в видимые геоцентрические координаты для малого

интервала солнечного затмения. Результаты выборочно сопоставлены в табл. 36 со значениями American Ephemeris, 1947 г., которые для этой цели были выглажены полиномами 4-го порядка.

Этот результат показывает, что в случае Солнца, как и в случае Луны, имеются расхождения, которые не имели бы значения для геодезии, если бы не показывали систематического хода, который в недопустимой мере превосходит заданную в начале точность. Эти расхождения нельзя было бы устранить простым выглаживанием эфемериды из Ежегодника. Новые видимые координаты α , δ и r Солнца и Луны являются исходными данными для вычисления бесселевых элементов затмения. Полученные этим способом поправки видимых геоцентрических положений Солнца имеют значение и для астрономии. Они могут быть вычислены с помощью дифференциальных формул (8.26)

$$dX = \xi - \xi^0, \quad dY = \eta - \eta^0, \quad dZ = \zeta - \zeta^0.$$

§ 6. Пример вычислений для Солнца

Таблица 28

Средние экваториальные координаты Солнца
(по эфемериде Солнца, «наблюдаемые» значения)

Май 20	X'	Y'	Z'	r'
0 ^h	+0,533 9494	+0,788 6509	+0,342 0327	1,011 9579
6	530 3599	790 7407	342 9392	1,012 0078
12	526 7608	792 8163	343 8395	0575
18	523 1522	794 8777	344 7337	1068

Таблица 29

Средние эклиптические координаты центра
тяжести G Земли и Луны
(по эфемериде Солнца, «наблюдаемые» значения)

1947 г.	x	y	z
Май 20 0 ^h	-0,533 9305	-0,859 6030	+0,000 0012
24 0	0,475 4232	0,894 1657	15

Таблица 30

Невозмущенные координаты и приближенные возмущения центра тяжести G

(ξ^0, η^0, ζ^0 в единицах 10^{-7})

1947 г.	x_0	ξ^0	y_0	η^0	z_0	ζ^0
Май 20	-0,533 9317	+12,0	-0,859 6038	+7,7	+0,000 0012	+0,1
24	-0,475 4245	+12,9	-0,894 1663	+6,1	+0,000 0013	+1,3

Таблица 31

Окончательные возмущающие силы, действующие на центр тяжести G Земли и Луны, в единицах 10^{-11}

1947 г.	Юпитер	Венера	Сатурн	Марс	Меркурий	Уран	Нептун	Косвенные	Общее возмущение
---------	--------	--------	--------	------	----------	------	--------	-----------	------------------

Возмущение по x

Май 20 ^h	-5146	-1661	+201	-49	-126	0	-1	+367	f_x -6415
24 ^h	-5322	-1737	+208	-49	+219	0	-1	+222	-6460

Возмущение по y

20 ^h	-6072	+712	-5	+4	-778	-5	0	+1105	f_y -5039
24 ^h	-5828	+503	-22	+2	-723	-5	0	+1085	-4988

Возмущение по z

20 ^h	+222	+113	-2	+1	-54	0	0	-10	f_z +270
24 ^h	+218	+113	-3	+1	-81	0	0	-11	+237

Таблица 32

Окончательные возмущения
(привязанная орбита G минус невозмущенная орбита)
в единицах 10^{-7}

1947 г.	ξ	η	ζ
Май 20 0 ^h	+11,5872	+7,3864	+0,2288
24 0	+11,5329	+7,0618	+0,2415

Таблица 33

Окончательные возмущения G в узкой области
затмения в единицах 10^{-7}

1947, май 20	ξ	η	ζ
12 ^h	+11,6157	+7,3733	+0,2290
13	11,6177	7,3719	0,2290
14	11,6194	7,3705	0,2290
15	11,6212	7,3690	0,2291

Таблица 34

Невозмущенные координаты общего центра тяжести G Земли и Луны
(эклиптика, узкая область)

1947, май 20	x_0	y_0	z_0
12 ^h	-0,526 7461 807	-0,864 1420 433	+0,000 0012 100
13	-0,526 1456 826	-0,864 5174 501	12 116
14	-0,525 5449 237	-0,864 8924 285	12 131
15	-0,524 9439 044	-0,865 2669 781	12 145

Окончательные геоцентрические координаты Солнца
(экваториальная система 1947,0; узкая область)

1947, май 20	X	Y	Z
12 ^h	+0,526 7608 056	+0,792 8162 660	+0,343 8395 315
13	+0,526 1600 358	+0,793 1608 121	+0,343 9889 998
14	+0,525 5590 036	+0,793 5049 625	+0,344 1382 864
15	+0,524 9577 094	+0,793 8487 172	+0,344 2874 015

Таблица 36

Видимые координаты Солнца для узкой области затмения и сравнение
с American Ephemeris

1947, май 20	Видимое прямое восхождение			Видимое склонение			Расстояние		
	новое	Am. Eph.	разность	новое	Am. Eph.	разность	новое	Am. Eph.	разность
12 ^h	56°23'38",347	38",631	-0",284	+19°51'39",878	39",984	-0",106	1,012 057 414	404	010
13	56 26 08,114	08,393	0,279	19 52 11,665	11,771	-0,106	65 655	643	012
14	56 28 37,896	38,170	0,274	19 52 43,417	43,523	-0,106	73 887	873	014
15	56 31 07,691	07,961	0,270	19 53 15,133	15,240	-0,107	82 110	094	016

ЛИТЕРАТУРА

1. Sundman K. F., The Motions of the Moon and the Sun at the Solar Eclipse of 1945, July 9 th; Die Tätigkeit der Baltischen Geodätischen Kommission in den Jahren 1944—1947, Helsinki, 1948, S. 63—94.
2. Hirvonen R. A., The Motion of the Moon and the Sun at the Solar Eclipse of 1947, Mai 20th; Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 40, Helsinki, 1951.
3. Oppolzer Th. R. v., Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Bd. 2, Leipzig, 1880, S. 72—139.

17	180° 00' 00"	00° 00' 00"	30 00 00	10 00 00	00 00 00
18	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
19	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
20	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
21	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00

17	180° 00' 00"	00° 00' 00"	30 00 00	10 00 00	00 00 00
18	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
19	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
20	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
21	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00

17	180° 00' 00"	00° 00' 00"	30 00 00	10 00 00	00 00 00
18	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
19	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
20	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00
21	180 00 00	00 00 00	10 00 00	10 00 00	00 00 00

Издание подготовлено редакцией ИГиГ СО АН СССР
 Сдано в печать 10.05.1951 г.

КИНЕМАТОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД НАБЛЮДЕНИЕ СЕРПОВ ПРИ СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЯХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ КОНТАКТОВ

§ 1. Общие положения

При относительных геодезических определениях положения с помощью кинематографического метода следует употреблять для наблюдения серпов на главных станциях (например, по ту и другую сторону океана) возможно более однотипные инструменты. По существу, инструментальное оснащение состоит из неподвижно установленного телескопа с целостатом перед ним, смонтированной на трубе кинокамеры, аппаратуры для приема сигналов времени и вспомогательных часов (хронометра или кварцевых часов). Целостат (система зеркал с часовым механизмом) отражает Солнце в неподвижно установленную (обычно горизонтальную) трубу телескопа, которая, учитывая ее использование в полевых условиях, имеет фокусное расстояние всего лишь 2—4 м. Этому соответствует изображение Солнца радиусом 18—36 м. Большие фокусные расстояния предпочтительнее, но в этом случае, естественно, увеличивается трудность в обращении с инструментом. Так, Дьюркович [1] сообщил об обработке больших изображений Солнца и Луны (радиусом 10 см), полученных с помощью стационарного инструмента — рефрактора Цейсса 65/1055 см. Большие изображения, конечно, значительно выгоднее для измерений, но при этом возникает ряд затруднений.

Кинокамера позволяет получить 24 изображения серпа в 1 секунду в течение нескольких секунд, незадолго до 2-го контакта и вскоре после 3-го контакта. Для съемки и регистрации сигналов времени используются обычные электронные вспомогательные средства (§ 2).

Наблюдательная станция должна быть выбрана возможно ближе к центральной линии затмения. Последнее обеспечивается предвычислением, как правило, с точностью до нескольких сот метров. Однако возможно отклонение реального пробега тени от предвычисленного в сторону (и соответственно во времени) вследствие неуверенности геодезических и астрономических координат. Координаты пункта наблюдения определяются астрономически; при этом следует учитывать поправки за

отклонение отвеса, что возможно, если используется также и триангуляция.

Наблюдения солнечного затмения имеют следующие преимущества перед наблюдениями покрытий звезд.

1. В кратчайшее время может быть получено большое количество изображений серпа на пленке, представляющих собой обширный наблюдательный материал. Покрытия звезд дают лишь единственное наблюдение, а именно момент закрытия (иногда еще и открытия).

2. Серповидная фаза солнечного затмения делает возможной благодаря своей значительной протяженности во времени своеобразную «интеграцию» измерений, окончательный результат которой почти свободен от случайных неровностей лунного края. При наблюдениях покрытий звезд последние часто увеличивают среднюю ошибку наблюдения в несколько раз¹⁾.

3. Измерение пленки позволяет получить две величины, а именно позиционный угол и расстояние между центрами Солнца и Луны. Покрытия звезд дают только расстояния.

Позиционный угол места покрытия должен измеряться по крайней мере с точностью до $0',1$, что соответствует на земной поверхности 50 м. При солнечных затмениях допустима значительно меньшая точность, так как радиус тени значительно меньше радиуса Луны.

Целью обработки является прежде всего вывод сферического расстояния между центрами Солнца и Луны и его позиционного угла (считаемого от северного полюса мира) по отдельным снимкам серпа, время получения которых известно с точностью до $0,01$ сек (наблюдение). Обе эти измеренные величины сравниваются затем со значениями расстояния и позиционного угла, вычисленными по хорошо известным из эфемерид координатам центров Солнца и Луны (предвычисление). Разности «наблюдение минус предвычисление» дают для каждой точки наблюдения свободные члены двух уравнений ошибок, в которых неизвестными являются геодезические и астрономические поправки.

Три *геодезические поправки* носят абсолютный характер, т.е. они относятся к сфероиду, центр и ось вращения которого совпадают соответственно с центром масс и осью вращения Земли. Эти три геодезические поправки являются поправками к определенным астрономическим путем значениям широты и долготы и к высоте места наблюдения по отношению к принятому референц-эллипсоиду.

Четыре *астрономические поправки*, которые в простейшем случае принимаются во внимание в качестве неизвестных, яв-

¹⁾ Для покрытий звезд также существует возможность выглаживания, которая рассматривается в гл. XIII.

ляются поправками к разности прямых восхождений, склонений, параллаксов и видимых радиусов Солнца и Луны. Радиус Солнца, включая также и эффект фотографической иррадиации в пленке, может быть исключен при наблюдении обоих внутренних контактов. Так как здесь можно рассматривать солнечный параллакс как безошибочный, то в двух последних названных неизвестных следует учитывать только поправки радиуса и среднего параллакса Луны. Зависимость между переменным параллаксом Луны и ее средним параллаксом настолько хорошо известна из теории Луны, что, зная последний, мы знаем также и ее параллакс в момент наблюдений.

Поправка за параллакс не может быть определена достаточно точно из отдельных наблюдений затмений и покрытий; поэтому ее сразу заранее отбрасывают. Вместо нее можно ввести в уравнения ошибок выведенное из гравитационной теории конечное приращение динамического параллакса. Все сводится к тому, что в качестве неизвестной остается только одна поправка среднего экваториального радиуса Земли. Последняя в простейших случаях может быть также приравнена нулю, так как ее влияние наверняка незначительно. В общем случае по наблюдениям солнечных затмений можно определить также и поправку высоты, т. е. превышение геоида над референц-эллипсоидом.

Таким образом, в обоих уравнениях ошибок (позиционный угол и расстояние), получаемых в среднем из наблюдений внутренних контактов, остаются пять существенных неизвестных: геоцентрическая долгота и широта пункта наблюдения, разности прямых восхождений и склонений Солнца и Луны и радиус Луны. Пренебрегая астрономическими поправками, можно вывести положение станции на эллипсоиде. Окончательный результат наблюдения солнечного затмения для целей геодезии состоит в определении геоцентрических координат — широты и долготы, а также отклонения отвеса в месте наблюдения, правда, как будет показано ниже, со значительными дальнейшими допущениями.

Применение теории Бесселя намного облегчает составление уравнений ошибок. В этом случае Солнце и Луна, как и вводимая с предварительными координатами точка на Земле, проектируются для каждого мгновения на фундаментальную плоскость (гл. II). Плоскость, параллельная фундаментальной и проходящая через точку наблюдения, постоянно меняет свое положение в пространстве и относительно наблюдателя. В ней по теории Бесселя рассматриваются фигуры сечения конусов тени и полутени. В теории эти конусы принимаются за круговые, но на практике это не в точности так.

В период затмения Луна находится в соединении с Солнцем, а радиус тени относительно мал; поэтому, несмотря на большие расстояния, в плоскости проекции получаются относительно небольшие значения координат, с которыми легко оперировать. Кроме того, некоторые величины — границы тени и полутени с радиусами L_1 и L_2 , скорость и направление движения оси тени, рассматриваемые в плоскости, параллельной фундаментальной, легко связываются соотношениями с величинами, непосредственно наблюдаемыми из пункта на поверхности Земли.

Весьма существенно то, что величины, подлежащие измерению на небе, а именно расстояние между центрами светил и их позиционные углы, также отображаются на фундаментальную плоскость. Позиционный угол на сфере идентичен на фундаментальной плоскости углу, образованному направлением, проходящим через след оси Солнце — Луна и проекции точки наблюдения, с осью координатной системы, ориентированной на север. Расстояние m между этими двумя точками на фундаментальной плоскости пропорционально выводимому из наблюдений сферическому расстоянию центров Солнца и Луны (ср. гл. II, § 6).

§ 2. Технические подробности регистрации

Во время финской экспедиции по наблюдению солнечного затмения 1945 г. (Швеция и Финляндия) изображения Солнца получались обычной кинокамерой, а сигналы времени принимались отдельно камерой звукозаписи. Магнитофонная лента передвигалась непрерывно с одинаковой скоростью, а пленка с изображениями — скачкообразно. При скорости 24 снимка в секунду пленка в течение $1/48$ сек стоит неподвижно, а в следующую $1/48$ сек передвигается на один кадр. Связь между отдельно полученными записями звука и изображения может быть установлена способом, обычным в технике звукового кино [2].

Для этого на ленте звукозаписи рядом с полусекундными ударами хронометра и ритмическими радиосигналами времени длительностью около 0,1 сек, посылаемыми Гринвичской обсерваторией, записывались также звуковые импульсы от хлопушки. Хлопушка приводилась в действие незадолго до и вскоре после контактов Луны. На сторонах хлопушки были расположены маленькие лампочки. Положение сторон во время щелчка фотографировалось на движущейся кинолентке с помощью специального оптического приспособления; поэтому возможно определить соответствующие друг другу по времени точки на пленке с изображением и на пленке с звукозаписью. Для этого достаточно проэкстраполировать мгновение щелчка по предшествующему ряду изображений хлопушки. По известной из регистрации времени скорости движения звуковой ленты можно опреде-

лить разность моментов сигнала хлопущки и освещения кино-пленки. Кроме того, следует внести небольшую поправку за сектор, которым выравнивается влияние сильно отличающихся друг от друга отверстий секторной-бленды, используемых при фотографировании Солнца и хлопущки. Обработка по методу Хенни дала по внешней сходимости среднюю ошибку определения момента для одного снимка, равную $\pm 0,003 \text{ сек}$. Как будет

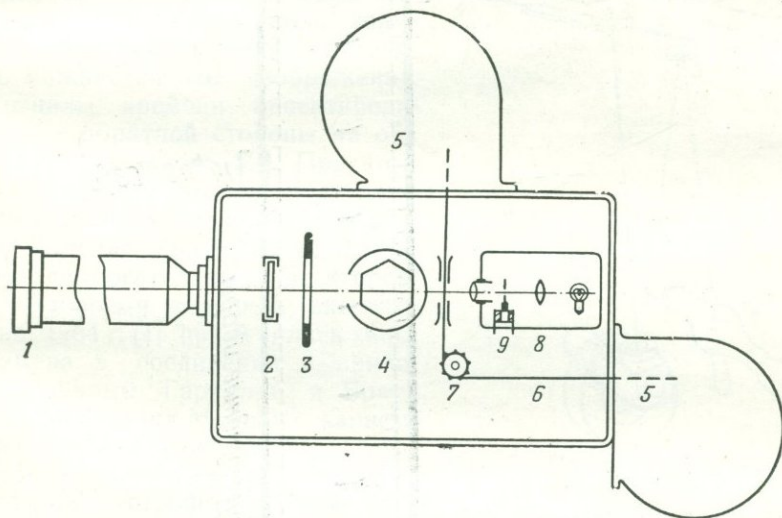


Рис. 49. Схематический разрез камеры финского Геодезического института, 1947 г.

1—объектив, 2—цветной фильтр (Schott GG 11,2 мм), 3—центральный затвор, 4—призма с барабанным затвором, 5—кассета, 6—пленка, 7—катушка, 8—регистрация времени, 9—магнитная бленда.

показано дальше при анализе ошибок, точность $\pm 0,005 \text{ сек}$ достаточна, поэтому по сравнению с другими источниками ошибок определение моментов можно считать безошибочным.

Куккамьяки и Хирвонен [3] во время финской экспедиции 1947 г. обходились на каждой станции единственной камерой (рис. 49), которой фотографировалось Солнце и регистрировались радиосигналы времени и полусекундные удары хронометра. Пленка двигалась непрерывно с постоянной скоростью. Подобно тому как в геодезических инструментах изображение перемещается плоскопараллельной стеклянной пластинкой, здесь изображение Солнца в постоянном чередовании следовало за пленкой на небольшом отрезке при помощи шестигранной стеклянной призмы, составленной из плоских пластинок и вращающейся перед плоскостью пленки. Таким образом, получалось 24 изображения в секунду, причем угловая скорость могла быть

Ритмический сигнал времени
 $14^{\text{h}}48^{\text{m}}21,629$
(Регби GAZ)

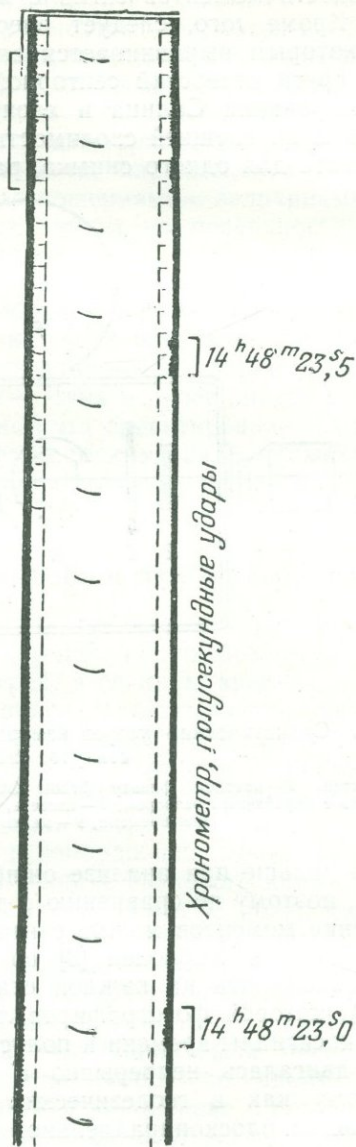


Рис. 50. Фотография серпа, сигналы времени от хронометра и ритмические (за 8 сек до 2-го контакта); 1947 г., Золотой Берг.

отрегулирована так, что изображение следовало за движением пленки с точностью до 1 мк. Барабанный затвор с прорезями, вращающийся вокруг призмы со скоростью, в 6 раз большей, позволял получать очень короткие экспозиции (1/7000 сек). Дополнительный центральный затвор обеспечивал экспозицию лишь вблизи тех положений призмы, когда грани ее были повернуты к пленке. Из-за асимметрии призмы измерялось только каждое шестое изображение. Сигналы времени проектировались с обратной стороны на оба края пленки (рис. 50). При этом поступающие импульсы с помощью магнита сдвигали диафрагмы, изменяя тем самым длину щелей вспомогательных проекторов.

Во время немецкой экспедиции 1954 г. [4] применялась кинокамера в соединении с прибором фирмы Гартманн и Браун (Франкфурт-на-Майне), записывающим след светящейся точки. Четыре электрические измерительные устройства позволяли производить одновременно четыре регистрации: часов и радиосигналов времени, импульсов от камеры при экспозиции и потоков от двух фотометров для определения момента наибольшей фазы методом измерения интенсивности света (гл. XI, § 2). Изображение точечной световой дуги ртутной лампы в приборе Гартманна и Брауна с помощью четырех оптических устройств получалось на регистрирующей ленте светочувствительной бумаги и немедленно вызывало на ней почернение, видимое без проявления. Рис. 51 показывает принцип работы регистрирующего устройства.

Более исчерпывающие сведения о регистрирующей аппаратуре можно найти у Пальма [5].

§ 3. Теоретические основы применения изображений серпов

1. Объект измерения

Каждый отдельный серп образован частью солнечного и частью лунного края (искажения, обусловленные оптикой и рефракцией, мы считаем исчезающе малыми). Центры светил

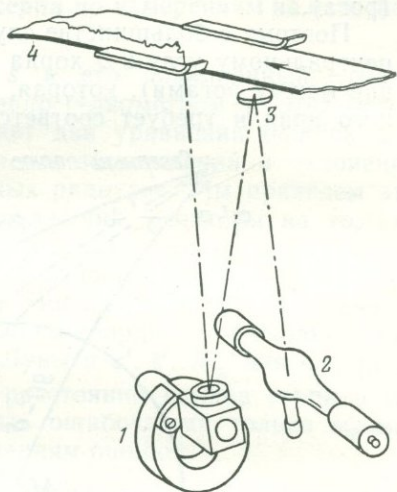


Рис. 51. Принцип светопишущего хронографа.

1 — измерительный прибор, 2 — ртутная лампа высокого давления, 3 — поворачивающееся зеркало, 4 — запись.

на снимке непосредственно не видны; поэтому для 2-го и 3-го контактов можно измерять под микроскопом только изображение самого серпа. Если учитывать неуверенность восприятия точек изображения, то на фотографии серпа выделяются только две пригодные для измерения точки, а именно концы серпа (рога).

Поэтому в большинстве случаев измеряется соответствующая центральному углу $2B$ хорда s между концами серпа (расстояние между рогами), которая, конечно, искажена рельефом лунного края и требует соответствующей поправки. Если заранее

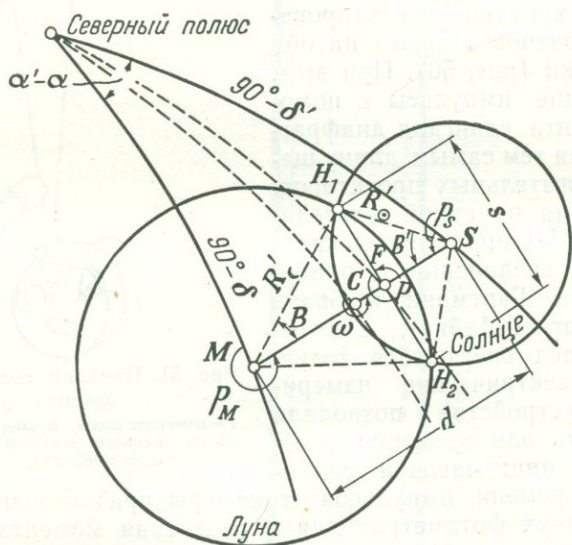


Рис. 52. Соотношения на сфере при использовании серпа.

позаботиться о том, чтобы на снимке можно было точно определить направление на северный полюс, то вторым объектом измерения может быть позиционный угол расстояния между рогами; он измеряется по концам серпа или как позиционный угол p середины хорды серпа (рис. 52). При кругообразных краях позиционный угол хорды $H_1H_2 = s$ отличается от позиционного угла дуги $MS = d$ (измеряемого в точке пересечения хорды с дугой или с ее продолжением) на 90° . Эти две измеренные величины определяют взаимное расположение центров Солнца и Луны.

Сферическое расстояние d между центрами может быть также выведено из толщины серпа $\sigma = d - (R'_C - R'_S)$ (см. рис. 53), откуда из уравнения (2.42) можно получить также и m . Однако

метод должен быть разработан так, чтобы местные неправильности лунного края не влияли на результат. Рассматриваемый в § 7 метод измерения «линзы», получаемой при 1-м и 4-м контактах, по-видимому, пригоден и для измерения толщины серпа.

2. Использование изображения серпа по измерениям на небесной сфере

Расстояние между рогами s и его позиционный угол p прежде измерялись непосредственно гелиомером¹⁾. Этот метод разработан Ганзенем [6]. Он дает два уравнения ошибок для разностей топоцентрических прямых восхождений и склонений Солнца и Луны и для их видимых радиусов. Мы приведем эти уравнения из методических соображений, несмотря на то, что в них включены только астрономические величины.

Наблюденные значения s и p сопоставляются как обычно с их теоретическими значениями. Последние могут быть вычислены с любой желаемой точностью по координатам наблюдателя и по эфемеридам ($\alpha, \delta, R_{\odot}$ для Луны и $\alpha', \delta', R_{\odot}$ для Солнца). Полученные расхождения Δs в расстоянии концов серпа и Δp в позиционном угле, если считать ошибочными только эфемериды, приводят нас к двум уравнениям ошибок

$$\Delta s = \left(\frac{\partial s}{\partial R'_{\odot}} \right) \Delta R'_{\odot} + \left(\frac{\partial s}{\partial R'_{\oplus}} \right) \Delta R'_{\oplus} + \left(\frac{\partial s}{\partial \alpha} \right) \Delta(\alpha' - \alpha) + \left(\frac{\partial s}{\partial \delta} \right) \Delta(\delta' - \delta), \quad (9.1)$$

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial R'_{\odot}} \right) \Delta R'_{\odot} + \left(\frac{\partial p}{\partial R'_{\oplus}} \right) \Delta R'_{\oplus} + \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) \Delta(\alpha' - \alpha) + \left(\frac{\partial p}{\partial \delta} \right) \Delta(\delta' - \delta). \quad (9.2)$$

Эти дифференциальные уравнения были уже представлены в развернутой форме в прежней астрономической литературе [7]. С помощью рис. 52, обозначения которого мы сохраним, они могут легко быть интерпретированы геометрически (C — середина MS , F — середина H_1H_2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial R'_{\odot}} &= \frac{2 \cos B'}{\sin(B+B')}; & \frac{\partial s}{\partial R'_{\oplus}} &= \frac{2 \cos B}{\sin(B+B')}, \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} &= -2 \frac{\cos B \cos B'}{\sin(B+B')} \sin \omega \cos \frac{\delta + \delta'}{2}, & \frac{\partial s}{\partial \delta} &= -2 \frac{\cos B \cos B'}{\sin(B+B')} \cos \omega, \\ \frac{\partial p}{\partial R'_{\odot}} &\approx 0, & \frac{\partial p}{\partial R'_{\oplus}} &\approx 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= \frac{\cos \omega}{d} \cos \frac{\delta + \delta'}{2}, & \frac{\partial p}{\partial \delta} &= -\frac{\sin \omega}{d}. \end{aligned}$$

¹⁾ О гелиометрических наблюдениях во время солнечных затмений упоминал еще Боненбергер в своей книге *Geographische Ortsbestimmung* (1795).

Этот старый способ обработки ныне не применяется из-за сложности вычислений. Он дает уравнения ошибок для длины хорды серпа и для позиционного угла хорды в ее середине. Поскольку этот метод был первоначальным и самым доступным для всякого наблюдателя, его дидактическая ценность не уменьшилась. Тем сильнее впечатление от работы Бесселя, которая, казалось бы, усложняет вопрос, а в действительности упрощает его. Следуя методу Бесселя, наблюдаемые величины, выведенные из киноснимков серпов, переносятся в фундаментальную плоскость. Влияние параллакса вычисляется с помощью кругов L_1 и L_2 , которые образуются в месте пересечения конусов тени и полутени с плоскостью, параллельной фундаментальной и проведенной через точку наблюдения.

3. Использование изображений серпа по измерениям в фундаментальной плоскости

Рассматриваемые здесь соотношения легко выводятся из уравнений теории Бесселя (гл. II, § 1 и 6).

а) Соотношения для расстояния

Имеем

$$L_1 = (z_{\zeta} - \zeta) \operatorname{tg} f_1 + \frac{k}{\cos f_1},$$

$$L_2 = (z_{\zeta} - \zeta) \operatorname{tg} f_2 - \frac{k}{\cos f_2},$$

$$L_1 + L_2 = (z_{\zeta} - \zeta)(\operatorname{tg} f_1 + \operatorname{tg} f_2) + k \left(\frac{1}{\cos f_1} - \frac{1}{\cos f_2} \right),$$

$$L_1 - L_2 = (z_{\zeta} - \zeta)(\operatorname{tg} f_1 - \operatorname{tg} f_2) + k \left(\frac{1}{\cos f_1} + \frac{1}{\cos f_2} \right).$$

Помножив на $\cos f_1$, получаем

$$\cos f_1 (L_1 \pm L_2) = (z_{\zeta} - \zeta) \left(\sin f_1 \pm \sin f_2 \frac{\cos f_1}{\cos f_2} \right) + k \left(1 \mp \frac{\cos f_1}{\cos f_2} \right). \quad (9.3)$$

Множитель $\cos f_1 / \cos f_2$ отличается от единицы только на $1 \cdot 10^{-7}$, поэтому его можно без колебаний положить равным единице. После подстановки сюда значений $\sin f_1$ и $\sin f_2$ из (2.9) имеем

$$\frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} = \frac{(z_{\zeta} - \zeta) \frac{2k}{G} + 2k}{(z_{\zeta} - \zeta) \frac{2k'}{G}} = \frac{k(z_{\zeta} - \zeta + G)}{k'(z_{\zeta} - \zeta)}.$$

Согласно рис. 7,

$$z_{\zeta} - \zeta + G = e'_{\odot} \cos \nu \quad \text{и} \quad z_{\zeta} - \zeta = e'_{\zeta} \cos(\nu + d).$$

Таким образом, мы имеем (пренебрегая малым углом ν)

$$\frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} = \frac{\sin R'_\zeta}{\sin R'_\odot} \sec d$$

и для серпообразной фазы получаем с достаточной точностью

$$R'_\zeta = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} R'_\odot \quad (9.4a)$$

или

$$R'_\zeta - R'_\odot = -\frac{2L_2}{L_1 + L_2} R'_\odot. \quad (9.4b)$$

Уравнение (9.3) дает, если положить $\cos f_1 / \cos f_2 = 1$,

$$\frac{L_1 + L_2}{2} \cos f_1 = \frac{1}{2} (z_\zeta - \zeta) (\sin f_1 + \sin f_2) = (z_\zeta - \zeta) \frac{k'}{G}.$$

Если положить

$$G = e'_\odot \frac{\sin d}{\sin(d + \nu)} \quad \text{и} \quad z_\zeta - \zeta = m \operatorname{ctg}(d + \nu),$$

то

$$\frac{L_1 + L_2}{2} \cos f_1 = \frac{k' \cos(d + \nu) m}{e'_\odot \sin d}.$$

Приняв во внимание, что косинусы малых углов при серповидной фазе почти не отличаются от единицы, получаем важное соотношение

$$d = \frac{2m}{L_1 + L_2} R'_\odot, \quad (9.5a)$$

которое может быть преобразовано следующим образом:

$$m = \frac{d}{R'_\odot} \frac{L_1 + L_2}{2}. \quad (9.5b)$$

Уравнения (9.4) и (9.5) связывают с помощью радиусов кругов тени и полутени видимый радиус Луны и видимое расстояние центров с видимым радиусом Солнца. С помощью уравнения (9.5b) измеримое расстояние d переносится в фундаментальную плоскость как наблюдаемое расстояние $m_{\text{наб}}$. Напишем еще соответствующие формулы для толщины серпа. По рис. 53 имеем

$$\sigma = d - (R'_\zeta - R'_\odot)$$

и по уравнениям (9.4b) и (9.5a)

$$\sigma = 2 \frac{m + L_2}{L_1 + L_2} R'_\odot, \quad (9.6a)$$

$$m = \sigma \frac{L_1 + L_2}{2R'_\odot} - L_2. \quad (9.6b)$$

Если обозначить

$$\beta = \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2},$$

то решение этого уравнения относительно m дает

$$m = \frac{1}{2} \frac{1-\beta}{1+\beta} (L_1 - L_2) - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 (L_1 - L_2)^2 + L_1 L_2 \right]^{1/2}. \quad (9.8)$$

Так вычисляется расстояние m в фундаментальной плоскости по наблюдаемой величине B («наблюденное» расстояние $m_{\text{наб.}}$).

б) Соотношения для позиционного угла

Позиционный угол M требует ориентировки по северному полюсу мира. Северная точка солнечного или лунного края лежит на круге склонений центра диска светила. Оба диска сначала принимаются при этом за совершенно кругообразные. Отклонения от формы круга учитываются обычно на более поздней стадии работы.

При кругообразной границе серпа направление дуги, проведенной через центры Солнца и Луны, перпендикулярно к хорде, стягивающей концы серпа, а также перпендикулярно касательной к краю Солнца в середине серпа. Это направление с трудом устанавливается на пленке. Второе направление, на север, определить на пленке еще труднее.

Для этого используются получившиеся на пленке вершины гор и долины, позиционный угол которых π_i относительно оптического центра Луны и ее северного полюса хорошо известны из специальных исследований (например, Хайна). Идентичность лунных образований должна быть твердо установлена¹⁾. Затем на пленке находятся угловые расстояния B_i этих точек привязки от точки касания ($B = 0$) и, кроме того, угловые расстояния концов серпа B_{eS} и B_{eN} от той же точки; отсюда можно получить позиционный угол центра Солнца относительно центра Луны и ее северного полюса, как это будет показано дальше.

Согласно рис. 54, для позиционного угла π_i точки касания изображения серпа на солнечном крае имеет место уравнение привязки

$$\pi_i = \pi_t - B_i; \quad (9.9)$$

при этом для π_t принимается среднее значение по всем идентифицированным вершинам гор и из всех снимков одного и того же контакта.

Для концов серпа имеем

$$\begin{aligned} \pi_{eS} &= \pi_t + B_{eS} \text{ (южный конец),} \\ \pi_{eN} &= \pi_t + B_{eN} \text{ (северный конец).} \end{aligned} \quad (9.10)$$

¹⁾ Т. е. привязка системы координат на пленке к системе небесных координат.

Из-за рельефа лунного края на концах серпа центральные углы B_{eS} и B_{eN} , выведенные по фотографиям, должны быть приведены к некоторому исправленному положению, как будто неправильности края отсутствуют. Среднее из позиционных углов конца серпа, исправленных за рельеф, представляет собой позиционный угол дуги, проходящей через центры светил. Он отсчитывается на небе против часовой стрелки относительно центра Луны и ее северного полюса.

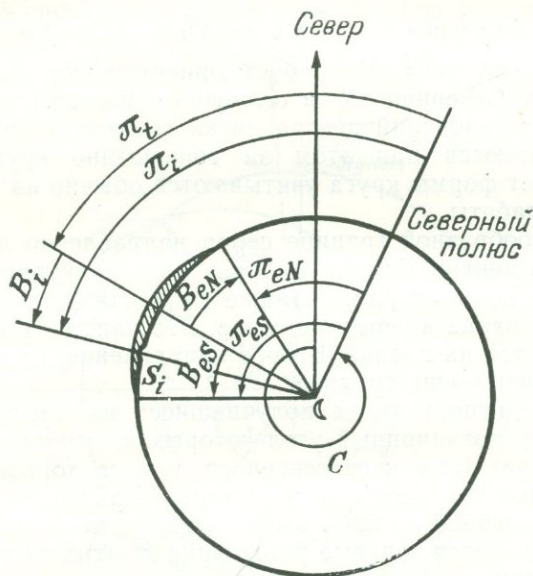


Рис. 54. Привязка точки касания T к вершине горы S_i .

Прибавляя к нему позиционный угол C северного полюса Луны относительно северного полюса мира, считаемый в том же направлении и вычисленный с помощью геоцентрических элементов либрации b_0 , l_0 , C_0 , получим позиционный угол

$$M_n = \frac{1}{2} (\pi_{eS} + \pi_{eN}) + C \quad (9.11)$$

относительно северного полюса мира. Для ориентировки координатной системы на пленке по северному полюсу мира (привязка точки касания к концам серпа) нужно сначала взять позиционный угол в центре Луны. Применение теории Бесселя требует знания позиционного угла в центре Солнца относительно

северного полюса мира. Добавляя 180° , мы получаем из (9.11) основное соотношение для наблюдаемого позиционного угла

$$M_{\text{наб.}} = 180^\circ + \frac{1}{2}(\pi_{eS} + \pi_{eN}) + C = 180^\circ + \pi_t + \frac{1}{2}(B_{eS} + B_{eN}) + C. \quad (9.12)$$

§ 4. Вывод расстояния и позиционного угла по киноснимкам серпа

Серийное измерение изображений серпа под микроскопом требует единой системы отсчета на пленке (рис. 55). Для последовательности серпов, принадлежащих к одному и тому же контакту, эта система лучше всего определяется прямолинейной

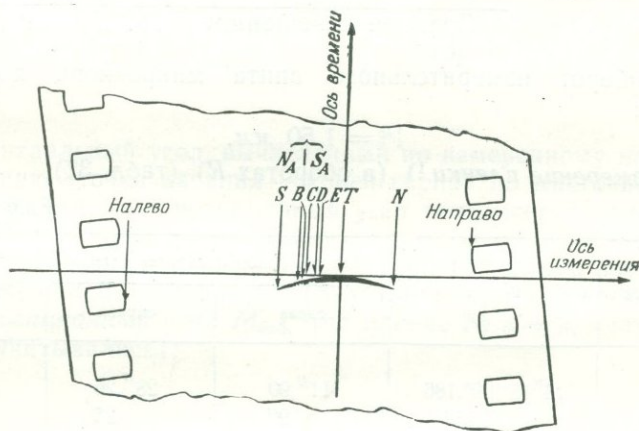


Рис. 55. Измерение пленки.

осью времени пленки и перпендикулярно к ней — прямолинейной осью измерения пленки (касательной к середине серпа на первом или каком-либо среднем изображении).

Поскольку измерения производятся сначала в делениях винта микроскопа, а серпы с течением времени немного поворачиваются относительно оси времени, необходимо внести еще целый ряд редуций, чтобы перейти от системы координат на пленке к системе небесных координат или к системе на фундаментальной плоскости (см. следующий ниже пример).

В настоящее время неуверенными этапами этого метода являются в первую очередь идентифицирование точек привязки и во вторую — учет рельефа лунного края. Приведенные примеры взяты из обработки полного солнечного затмения 1947 г. Кук-камяки и Хирвоненом [8].

Пример

Цена оборота винта микрометра и масштаб пленки (дуга на небе, соответствующая 1 мм пленки) могут быть получены:

- а) измерением нескольких полных изображений Солнца непосредственно до и после затмения;
 б) из движения Солнца за некоторый интервал времени;
 в) из широкого серпа с измеренной толщиной σ и длиной хорды a примерно за 10 мин до 2-го контакта и через 10 мин после 3-го.

1. Масштаб пленки (для Золотого Берега):

по а) 1 мм пленки (ось измерения)	101",830 ± 0",050
б) » » »	101,85 ± 0,26
в) » » »	101,743 ± 0,021
Среднее взвешенное	101",76 ± 0",02

Один оборот измерительного винта микроскопа получился равным:

$$1^R = 1,50 \text{ мм.}$$

2. Измерение пленки¹⁾ (в оборотах R) (табл. 37).

Таблица 37

Пленка №	Вс. вр.	Направляющие отверстия пленки		Точка касания
		слева	справа	
n	14 ^h 48 ^m 19 ^s ,186	11 ^R ,90	28 ^R ,26	22 ^R ,12
$n+1$	19,572	90	25	21,96
$n+2$	19,965	89	26	22,05

Таблица 38

Пленка №	Вершины гор (рис. 38)					Концы серпа и «четки Бейли» ¹⁾			
	A	B	C	D	E	S	N _A	S _A	N
n	—	—	—	20 ^R ,79	21 ^R ,03	19 ^R ,01	19 ^R ,95	19 ^R ,99	24 ^R ,67
$n+1$	—	—	—	20,80	21,04	19,08	19,97	20,01	24,59
$n+2$	—	20 ^R ,25	20 ^R ,37	20,81	21,03	19,09	19,97	20,03	24,61

¹⁾ Разрывы серпа неровностями края Луны, часто имеющие вид нитки жемчуга. Они используются как и концы серпа для вывода $M_{\text{наб}}$. (В примере не приводятся из-за несколько сложного получения весов.)

¹⁾ В системе ось времени — ось измерений (рис. 55).

Отсюда находятся с видимым радиусом Луны $16'38'',22$ и постоянными п. 1 центральные углы B_i , отнесенные к точке касания.

3. Привязка позиционного угла:

Таблица 39

Вершина	B_i	π_i	π_t	Вес
A	18°,77	101°,65	82°,88	1
B	16,38	99,3	82,92	1
C	15,27	98,05	82,78	1
D	11,53	94,45	82,92	1
E	9,38	92,4	83,02	1
			82,90 (из привязки)	
			$\pm 0,04$	

B_i — центральный угол, вычисленный по измеренному на пленке расстоянию «точка касания — конец серпа» по многочисленным изображениям; π_i — позиционный угол конца серпа относительно северного полюса (по Хайну); $\pi_t - B_i = \pi_t$ — позиционный угол точки касания относительно северного полюса (уравнение привязки); $82^\circ,90$ — привязка (Золотой Берег, 2-й контакт).

4. Позиционный угол $M_{\text{наб}}$. (по пленке № $n + 2$, «четки Бейли» не учитывались):

$$M_{\text{наб.}} = 180^\circ + \pi_t + \frac{1}{2}(B_{eS} + B_{eN}) + C$$

$$B_{eS} = +27^\circ,40 \quad 180^\circ + \pi_t = 262^\circ,90$$

$$B_{eN} = -22^\circ,57$$

$$\frac{1}{2}(B_{eS} + B_{eN}) = +2^\circ,41 \quad \frac{1}{2}(B_{eS} + B_{eN}) = +0,18$$

$$\text{Поправка } (\delta') = -2,23$$

$$C = 348,82$$

$$\frac{1}{2}(B_{eS} + B_{eN}) = +0,18$$

$$M_{\text{наб.}} = 251,90$$

Куккамьяки нашел для Золотого Берега 2-й контакт как среднее из 84 снимков:

$$M_{\text{наб.}} = 251^\circ,64 \pm 0^\circ,33'$$

¹⁾ См. добавление в конце параграфа.

5. Расстояние $m_{\text{наб.}}$ (по пленке № $n+2$). По уравнению (9.8) имеем

$$m = \frac{1}{2} \frac{1-\beta}{1+\beta} (L_1 - L_2) - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 (L_1 - L_2)^2 + L_1 L_2 \right]^{1/2},$$

где

$$\beta = \text{tg}^2 \frac{B_e}{2}.$$

Для B_e берется значение, измеренное на пленке и не нормализованное поправкой за радиус; рельеф учитывается в L_1 и L_2 , которые вычисляются с радиусом $R' + h$ соответствующим концу серпа. Полученное значение $M_{\text{наб.}}$, являющееся общим средним для данного контакта, позволяет отнести центральный угол B_e не к точке касания, а к направлению на центр Солнца. По уравнению (9.12)

$$\pi_{\odot} = M_{\text{наб.}} - C \pm 180^\circ = 251^\circ,64 - 348^\circ,82 \pm 180^\circ = 82^\circ,82.$$

Таким образом к величинам п. 4 прибавляется поправка

$$\pi_l - \pi_{\odot} = +0^\circ,08,$$

$$B_{eS} = 27,40 + 0,08 = 27^\circ,48,$$

$$B_{eN} = -22,57 + 0,08 = -22,49,$$

$$\beta_S = \text{tg}^2 \frac{B_{eS}}{2} = 0,059790;$$

$$\beta_N = \text{tg}^2 \frac{B_{eN}}{2} = 0,039529$$

	Юг	Север
$\frac{1-\beta}{1+\beta}$	0,887166	0,923948
$L_1 - L_2$	0,54494	0,54601
$L_1 \cdot L_2$	0,0069401	0,0072319
m	0,0148087	0,0147675
$m_{\text{наб.}}$	= 0,0147881.	

Добавление

К п. 4. Среднее из угловых расстояний точки касания от северного и южного концов серпа, каким оно получается по измерению пленки, требует еще редукции к кругообразному лунному краю, для которого за основу берется радиус $15' 30''$. Если $h = R_{\zeta} - 15' 30''$, 0 есть превышение поверхности Луны над принятым уровнем, то в угол B вносится поправка

$$\delta = \frac{h}{\sin \gamma \cdot R_{\zeta}} \cdot \sin 1^{\circ}.$$

где γ — теоретический угол серпа. Если ввести его значение по уравнению (9.76), то можно написать (Nautical Almanac, 1935, стр. 804—805)

$$\delta = \frac{h}{m \sin B} k; \quad k = \frac{L_1 + L_2}{2R_{\odot} \sin 1^{\circ}},$$

К п. 5. Величины L_1 и L_2 суть «наблюдаемые» радиусы конусов тени и полутени в плоскости, параллельной фундаментальной, отличающиеся, таким образом, от предвычисленных. Они находятся по формулам Nautical Almanac (1935, стр. 804 и далее) из отклонений радиусов в точках S и N профиля края от среднего значения R_m с постоянными c_1, c_2, c_3, c_4

$$L_1 - L_2 = c_1 + c_2(R - R_m),$$

$$L_1 \cdot L_2 = c_3 - c_4(R - R_m).$$

При этом способе обработки долю собственно наблюдения составляют наблюдаемые значения углов B между концами серпа и центром Солнца и соответствующие радиусы L_1, L_2 фигуры тени в плоскости, параллельной фундаментальной.

§ 5. Предвычисление и сравнение с наблюдением

Для некоторых круглых значений всемирного времени T , вблизи 2-го и 3-го контактов, должны быть вычислены соответствующие координаты оси тени (x, y) и координаты пункта наблюдения (ξ, η) в единицах экваториального радиуса (с 7-ю десятичными знаками). Из них на основе соотношений

$$m \sin M = x - \xi, \quad m \cos M = y - \eta$$

получаются соответствующие значения m и M . Дифференцированием величин x, y, ξ, η по времени t , производимым обычно численно, получается относительная скорость тени (относительно места наблюдения) в фундаментальной плоскости; компоненты ее суть $x' - \xi'$ и $y' - \eta'$ (величина n , направление N).

Относительная скорость тени в фундаментальной плоскости зависит через x' и y' от движения Луны относительно Солнца в данный момент, через ξ' и η' — по направлению — от вращения Земли и в малой степени от склонения d оси тени, а по величине — также и от географической широты. Для положения точек в фундаментальной плоскости и их движений получают следующие формулы:

$$\operatorname{tg} M = \frac{x - \xi}{y - \eta}, \quad \operatorname{tg} N = \frac{x' - \xi'}{y' - \eta'},$$

$$m^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad n^2 = (x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2;$$

производные

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{m} [(x' - \xi') \cos M - (y' - \eta') \sin M] = \frac{n}{m} \sin(N - M),$$

$$\frac{dm}{dt} = (x' - \xi') \sin M + (y' - \eta') \cos M = n \cos(M - N),$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{n} [(x'' - \xi'') \cos N - (y'' - \eta'') \sin N],$$

$$\frac{dn}{dt} = (x'' - \xi'') \sin N + (y'' - \eta'') \cos N,$$

$$\operatorname{tg} R = \frac{x'}{y'} = \frac{d(\alpha_{\odot} - \alpha_{\oplus})}{d(\delta_{\odot} - \delta_{\oplus})} \cos \delta_{\odot}, \quad \operatorname{tg} G = \frac{\xi'}{\eta'} = \operatorname{cosec} d \operatorname{ctg}(\mu - \lambda),$$

$$r^2 = x'^2 - y'^2, \quad g^2 = \xi'^2 + \eta'^2.$$

Все это справедливо при введенных в формулы постоянных координатах только для дифференциальных изменений време-

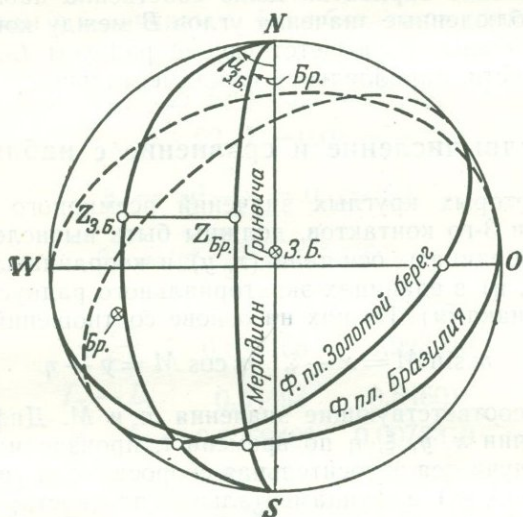


Рис. 56. Полное солнечное затмение 1947 г.

ни t . При дифференциальных изменениях координат места φ , λ все величины вплоть до (r, R) меняются соответственно дифференциалам по φ и λ (вывод не дается).

Величины x' , y' , ξ' , η' получаются или путем интерполирования из Ежегодника и специальных публикаций или дифференцированием основных формул, которые для рассматриваемого нами затмения даны в Nautical Almanac (1947 г., стр. 342):

$$\xi' = 0,004364 \cos \varphi' \cos(\mu - \lambda), \quad \eta' = 0,001484\dot{\xi}.$$

1. Сопоставление предсказанных значений для солнечного затмения 20 мая 1947 г.

Таблица 4.

а) Бесселевы элементы

Бразилия: $\varphi = -17^{\circ}14'01'',88$; $\lambda = +43^{\circ}40'15'',20$; $H = 789 \text{ м}$

Вс. время	x	y	$\sin d$	$\cos d$
$12^{\text{h}}34^{\text{m}}00^{\text{s}}$	-0,553 1264	-0,555 5121	+0,339 8461	+0,940 4810
2-й контакт	15 550 8622	554 7597	8466	4808
30	543 5979	554 0073	8473	4806
38 40	510 8584	541 4681	8468	4772
3-й контакт	55 508 5940	540 7157	8574	4770
39 10	506 3295	539 9634	8579	4767

Вс. время	μ	l_1	l_2	$\text{tg } f_1$	$\text{tg } f_2$
$12^{\text{h}}34^{\text{m}}00^{\text{s}}$	$9^{\circ}24'12'',99$	+0,535 8909	-0,010 4173	0,004 61948	0,00459648
2-й контакт	15 27 58,00	8902	4178		
30	31 43,01	8897	4183		
38 40	10 34 13,23	8817	4263		
3-й контакт	55 37 58,25	8812	4268		
39 10	41 43,25	8807	4273		

Золотой Берег: $\varphi = +6^{\circ}09'56'',35$; $\lambda = -0^{\circ}01'01'',02$; $H = 220,8 \text{ м}$

Вс. время	x	y	$\sin d$	$\cos d$
$14^{\text{h}}48^{\text{m}}00^{\text{s}}$	+0,660 8692	--0,152 7489	+0,340 1535	+0,940 3699
15	663 1346	151 9984	1540	3697
30	665 3998	151 2481	1546	3695
52 50	704 6554	138 2420	1645	3660
53 05	706 9306	137 4919	1652	3657
20	709 1959	136 7415	1658	3655

Вс. время	μ	l_1	l_2	$\text{tg } f_1$	$\text{tg } f_2$
$14^{\text{h}}48^{\text{m}}00^{\text{s}}$	$42^{\circ}54'19'',88$	+0,536 0752	-0,010 2338	0,004 6195,8	0,0045965,7
15	58 04,90	0750	2340		
30	43 01 49,92	0747	2343		
52 50	44 06 50,14	0708	2382		
53 05	10 35,14	0706	2384		
20	14 20,16	0704	2386		

б) Векторы (m , M) и (n , N) движения тени¹⁾

Вс. время	M	m	N	n	$M-N$ соотв. $M-N-180^\circ$
Бразилия					
12 ^h 34 ^m 00 ^s	235°49'10"	0,018 2845	55°50'38"	0,006 7814	-1'28"
15	49 06	16 5893	50 27	7787	-1 21
30	49 04	14 8947	50 16	7757	-1 12
38 40	55 47 11	0,013 2434	55 47 26	7290	- 15
55	47 06	14 9255	47 17	7262	- 11
39 10	47 05	16 6070	47 07	7234	- 2

Золотой Берег

14 ^h 48 ^m 00 ^s	251 34 37	0,017 1272	71 15 28	0,006 2136	+19 09
15	36 33	15 5733	16 40	2163	+19 53
30	38 47	14 0189	17 52	2190	+20 55
52 50	71 14 55	0,013 0345	71 38 29	2661	-23 34
53 05	17 27	14 6013	39 40	2689	-22 13
20	19 32	16 1688	40 51	2716	-21 19

в) Выведенные отсюда дифференциалы
(для 1 секунды времени)

Вс. время	dM/dt	dm/dt	dN/dt	n^2	$d(M-N)/dt$
Бразилия					
12 ^h 34 ^m 07 ^s ,5	-0",27 сек ⁻¹	-722 м/сек	-0",73 сек ⁻¹	722 м/сек	+0",46 сек ⁻¹
22,5	-0,14	722	-0,73	722	+0,59
38 47,5	-0,33	+717	-0,60	717	+0,27
39 02,5	-0,07	717	-0,67	717	+0,60
Золотой Берег					
14 ^h 48 ^m 07 ^s ,5	+7,7	-662	+4,81	662	+2,97
22,5	+8,9	662	+4,81	662	+4,12
52 57,5	+10,1	+666	+4,75	666	+5,37
53 12,5	+8,3	667	+4,75	667	+3,58

¹⁾ (m , M) есть вектор от точки наблюдения к оси тени в фундаментальной плоскости. Вектор (d , M) от центра Солнца к центру Луны на сфере есть $(P'_C - P_\odot)(m, M)$ — вектор скорости тени относительно точки наблюдения в фундаментальной плоскости (так как ее действительно воспринимает наблюдатель); соответствует 1 мин.

²⁾ n и dm/dt не в точности равны из-за $dm/dt = n \cos(M-N)$; во всяком случае $M-N$ лишь весьма мало отличается от 0 или 180° .

г) Пример вычисления координат пункта ξ и η в фундаментальной плоскости (Бразилия, 20 мая 1947 г., 12^h34^m вс. вр.) (рис. 56).

$$\xi = \rho \cos \varphi' \sin (\mu - \lambda),$$

$$\eta = \rho \sin \varphi' \cos d - \rho \cos \varphi' \sin d \cos (\mu - \lambda),$$

$$\lg (\rho \cos \varphi') = \lg c + \lg \cos \varphi + gH \quad [\text{уравнение (2.17)}],$$

$$\lg (\rho \sin \varphi') = \lg s + \lg \sin \varphi + fH,$$

$$\varphi = -17^{\circ}14',01'',88$$

$$\lambda = +43^{\circ}40'15'',20$$

$$H = 789 \text{ м}$$

$$f = 0,6853 \text{ (см. табл. 2, стр. 43, гл. II)} \quad fH = 540E_7$$

$$g = 0,6806$$

$$gH = +536E_7$$

$$\mu = 9^{\circ}24'12'',99$$

$$s \quad 9,9971987 \quad (\text{см. табл. 2, стр. 43, гл. II})$$

$$\sin \varphi \quad 9,4716913n$$

$$\lambda = 43 \ 40 \ 15 \ ,20$$

$$+ 540$$

$$\mu - \lambda = 34 \ 16 \ 02 \ ,21$$

$$\rho \sin \varphi' \quad 9,4689440n$$

$$\cos d \quad 9,9733501$$

$$c \quad 0,0001282 \text{ (табл.)}$$

$$9,4422941n$$

$$\cos \varphi \quad 9,9800504$$

$$= -0,2768816$$

$$+ 536$$

$$\rho \cos \varphi' \quad 9,9802322$$

$$\rho \cos \varphi' \quad 9,9802322$$

$$\sin d \quad 9,5312823$$

$$\sin (\mu - \lambda) \quad 9,7505502n$$

$$\cos (\mu - \lambda) \quad 9,9172008$$

$$\lg \xi \quad 9,7307824n$$

$$9,4287153$$

$$\xi_{\text{эф.}} = -0,5380001$$

$$= +0,2683585$$

$$\eta_{\text{эф.}} = -0,5452401$$

2. Сравнение результатов обработки пленки (наблюдений) с предвычислением

Поскольку позиционный угол M изменился лишь на $2'$ за 5 мин, прошедших между 2-м и 3-м контактами, то для сравнения $M_{\text{наб.}} - M_{\text{эф.}}$ нет нужды интерполировать каждое отдельное значение M на момент снимка; достаточно произвести сравнение $M_{\text{наб.}} - M_{\text{эф.}}$ для среднего момента наблюдения контакта. При

этом в качестве $M_{\text{наб.}}$ для середины интервала наблюдения вводится среднее из всех наблюдаемых M .

Расстояния, напротив, изменяются очень быстро; поэтому для каждого наблюдаемого $m_{\text{наб.}}$ соответствующее моменту снимка $m_{\text{эф.}}$ получается из приведенной выше таблицы интерполированием со вторыми разностями, отдельно по контактам. Изменения $m_{\text{наб.}}$ и $m_{\text{эф.}}$ во времени одинаковы, так как движение Солнца и Луны хорошо известно; поэтому разности $m_{\text{наб.}} - m_{\text{эф.}}$ для каждого контакта могут быть окончательно объединены в среднее значение. Это среднее значение относится к среднему моменту. Сравнение выглядит тогда следующим образом (табл. 41).

Таблица 41

Бразилия, 2-й контакт, расстояние m

Пленка №	Вс. время	$m_{\text{наб.}}$	$m_{\text{эф.}}$	$m_{\text{наб.}} - m_{\text{эф.}}$
i	12 ^h 34 ^m 16 ^s ,49	0,016 071	0,016 421	-0,000 350
$i + 1$	74	15 996	16 392	396
$i + 2$	98	16 025	16 365	340
$i + 3$	17,23	16 029	16 337	308

Среднее из 65 изображений: $m_{\text{наб.}} - m_{\text{эф.}} = 0,0003363$

Бразилия, 2-й контакт, позиционный угол M
(даны только средние значения)

Вс. время	$M_{\text{наб.}}^1)$	$M_{\text{эф.}}$	$M_{\text{наб.}} - M_{\text{эф.}}$
12 ^h 34 ^m 18 ^s	235°,95	235°,82	+0°,13

¹⁾ Поправки внесены.

§ 6. Результаты наблюдения и их связь с неизвестными при использовании середины полной фазы

1. Строгий способ с привязкой к центральной линии затмения на поверхности Земли

Наблюдение солнечного затмения применимо для целей геодезии, если определены максимальная фаза затмения, т. е. наименьшее расстояние оси тени от пункта наблюдения, и соответ-

то, поскольку скорость S движения тени по поверхности Земли известна, мы получим координаты точки наблюдения $S_{\text{наб.}}$ со смещениями: Δt_0 в направлении центральной линии и ΔA_0 перпендикулярно к последней.

Аналитическая обработка, которую мы опишем лишь вкратце, исходит из соотношений, существующих в фундаментальной плоскости между наблюдаемыми величинами и неизвестными [9]. С сокращенными обозначениями

$$u = x - \xi, \quad v = y - \eta \quad (9.13)$$

имеем для момента t_0 середины полной фазы

$$m^2 = u^2 + v^2 = m_0^2, \quad (9.14)$$

$$s = uu' + vv' = 0. \quad (9.15)$$

В проекции на фундаментальную плоскость расстояние m пункта наблюдения от центральной линии в момент t_0 принимает наименьшее значение m_0 и поэтому для $t = t_0$ должно обратиться в нуль. Величины m^2 и s зависят от введенных неизвестных следующим образом:

$$\Delta m^2 = \frac{\partial m^2}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial m^2}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial m^2}{\partial \rho} \Delta R, \quad (9.16)$$

$$\Delta s = \frac{\partial s}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial s}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial s}{\partial \rho} \Delta R + \frac{\partial s}{\partial t} \Delta t_0 = 0. \quad (9.17)$$

Выразим здесь Δm^2 через величины, видимые непосредственно на поверхности Земли; по уравнению (2.43) имеем

$$\Delta m^2 = 2m \Delta m = \frac{2d \Delta d}{K^2}.$$

В момент наибольшей фазы в пункте наблюдения сферическое расстояние d_0 между центрами светил относится к разности видимых диаметров Солнца и Луны как расстояние A_0 данного пункта от центральной линии к половине ширины W зоны полного затмения. Имеем

$$\frac{\Delta d_0}{R'_\odot - R'_\ominus} = \frac{\Delta A_0}{W}. \quad (9.18)$$

Отсюда

$$\Delta A_0 = \frac{W}{R'_\odot - R'_\ominus} \cdot \frac{K^2}{2d_0} \Delta m^2 = q \Delta m^2. \quad (9.19)$$

Умножив (9.16) и (9.17) на определяемый из (9.19) множитель q и соответственно на скорость тени S , получаем относи-

тельно центральной линии

$$\Delta A_0 = q \frac{\partial m^2}{\partial \lambda} \Delta \lambda + q \frac{\partial m^2}{\partial \varphi} \Delta \varphi + q \frac{\partial m^2}{\partial \rho} \Delta R, \quad (9.20)$$

$$S \Delta t_0 = -S \frac{\frac{\partial s}{\partial \lambda}}{\frac{\partial s}{\partial t}} \Delta \lambda - S \frac{\frac{\partial s}{\partial \varphi}}{\frac{\partial s}{\partial t}} \Delta \varphi - S \frac{\frac{\partial s}{\partial \rho}}{\frac{\partial s}{\partial t}} \Delta R \quad (9.21)$$

или сокращенно

$$\Delta A_0 = [1] \Delta \lambda + [2] \Delta \varphi + [3] \Delta R, \quad (9.22)$$

$$S \Delta t_0 = [4] \Delta \lambda + [5] \Delta \varphi + [6] \Delta R. \quad (9.23)$$

Коэффициенты [1]—[6] выведены на основании уравнений (9.13)—(9.15) по формулам (7.4) и (7.7), свободный член ΔA_0 получается из наблюдаемой величины Δd_0 по уравнению (9.18). Для того чтобы можно было вычислить $\Delta \varphi$ и $\Delta \lambda$ из уравнений (9.22) и (9.23), нужно особым приемом независимо определить неизвестную величину

$$\Delta R = \Delta \rho - \frac{\rho}{r} \Delta r. \quad (9.24)$$

Тогда было бы

$$\Delta A_0 - [3] \Delta R = \alpha,$$

$$S \Delta t_0 - [6] \Delta R = \beta,$$

$$\alpha = [1] \Delta \lambda + [2] \Delta \varphi,$$

$$\beta = [4] \Delta \lambda + [5] \Delta \varphi.$$

Для определения ΔR могут быть использованы наблюдения начала и конца солнечного затмения. Это основывается на том, что величина ΔR , хотя и общая для всех станций наблюдения, сильно влияет на $\Delta \varphi$ и $\Delta \lambda$.

Оптимальные условия определения ΔR для данного затмения приведены в [9]. Там указывается также на возможность отделения поправки радиуса Земли $\Delta \rho$ от члена $\frac{\rho}{r} \Delta r$ в выражении дифференциала параллакса Луны. Если окажутся успешными предпринятые в США (Морская исследовательская лаборатория, Вашингтон) и Англии (Королевское радиолокационное управление, Малверн) попытки определения отдельных расстояний Луны r непосредственно с помощью радара, то можно ожидать, что отсюда удастся получить Δr с точностью до 1 км (см. гл. XV, § 6.4).

2. Графическая обработка в общей плоскости проекции

Положение бесселевой фундаментальной плоскости задается в каждый момент времени геоцентрическим направлением (a, d) оси Луна — Солнце и центром Земли. Благодаря этому по теории Бесселя получаются более простые относительные соотношения. Каждому моменту времени t соответствует мгновенная прямоугольная система координат и каждой системе значений x, y, z (координат Солнца и Луны) и ξ, η, ζ (координат пункта наблюдения) соответствует единственная мгновенная фундаментальная плоскость.

В фундаментальной плоскости для любого момента ось y определяется как линия пересечения плоскости круга склонений точки в направлении (a, d) с фундаментальной плоскостью. Поскольку направление (a, d) непрерывно изменяется, фундаментальная плоскость совершает за время Δt поворот $(\Delta a, \Delta d)$. Поэтому и ось y изменяет свой наклон к экватору на Δd , но в плоскости xy она всегда направлена на север.

Поскольку системы фундаментальных плоскостей ориентированы на север и имеют общую исходную точку в центре Земли, их можно объединить одной плоскостью. Мы называем эту плоскость, которая может быть почти идентичной фундаментальной плоскости в момент середины полной фазы, *плоскостью проекции*. Производимые при этом повороты почти не оказывают влияния на x, y и ξ, η , а только на z и ζ , которые в этой связи нас не интересуют.

Таким образом, следует представить себе, что в короткий промежуток времени от 2-го до 3-го контакта все x, y, ξ, η лежат в одной плоскости, после того как они были вычислены для своих мгновенных фундаментальных плоскостей, т. е. с мгновенными координатами светил и с мгновенным часовым углом оси Луна — Солнце. С этими перенесенными координатами и следует производить дальнейшие вычисления; но как только мы перейдем от плоскости проекции обратно к фундаментальным плоскостям, т. е. к направлениям на небе, следует пользоваться основными формулами.

Таким путем были получены два графика рис. 58. На них показаны кривые движения Луны и пункта наблюдения, получаемые в плоскости проекций непосредственно из x, y и ξ, η . Поскольку движение Луны всегда быстрее, чем движение пункта наблюдения, она обгоняет последний в момент середины полной фазы.

В зависимости от величины местного часового угла $\mu - \lambda$ направление G движения пункта наблюдения в плоскости чертежа более или менее отличается от направления R движения Луны; поэтому момент полной фазы обозначается еще и точкой пере-

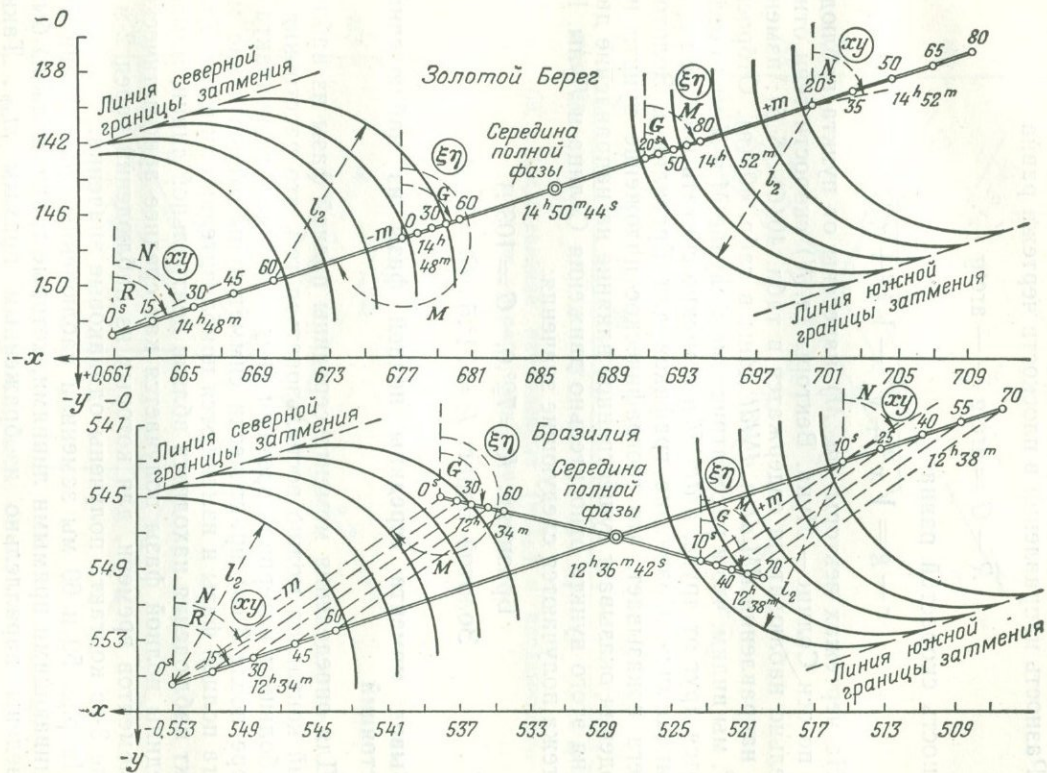


Рис. 58. Графическое представление в одной проекционной плоскости.

сечения обоих направлений (когда она достаточно точно отмечена, как на рис. 58 для Бразилии).

Разность направлений в плоскости чертежа равна

$$R - G = \arctg \frac{x'}{y'} - \arctg \frac{\xi'}{\eta'}.$$

Разность скоростей равна

$$r - g = \sqrt{x'^2 + y'^2} - \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}.$$

На чертежах векторы (m , M) нанесены от пункта наблюдения по оси Солнце — Луна. Векторы (n , N) скорости тени относительно наблюдателя содержатся в табл. 40(б) (§ 5); изменения направлений dM/dt и dN/dt даны в табл. 40 (в). Отбросив 180° , мы видим, что в рассматриваемом случае M и N мало отличаются друг от друга, а dm/dt и n можно считать вообще не отличающимися. Сравнение графиков для Бразилии и Золотого Берега показывает, что географическое положение пункта наблюдения оказывает существенное влияние на направление движения этого пункта относительно движения Солнца и Луны. Из чертежа получаются следующие значения:

$$\text{Бразилия: } R = 72^\circ, 0, \quad G = 103^\circ, 1$$

$$\text{Золотой Берег: } R = 71^\circ, 5 \quad G = 72^\circ, 4$$

3. Вывод момента середины полной фазы из наблюдаемых расстояний

Для определения момента середины полной фазы из наблюдений контактов можно воспользоваться тем, что расстояния m в небольшом интервале времени (незадолго до 2-го контакта — вскоре после 3-го) практически симметричны относительно момента полной фазы и изменяются приблизительно линейно. Если пункт наблюдения находится вблизи центральной линии, момент середины полной фазы получается как среднее арифметическое из моментов времени, для которых из наблюдений перед 2-м и после 3-го контакта получены одинаковые значения.

На рис. 59 и 60 мы заменили наблюдаемые расстояния выравнивающими прямыми линиями, которые также должны быть проведены параллельно изображенным прямым $m_{\text{эф}}$. Таким образом, остается лишь определить моменты, соответствующие точкам пересечения прямых для 2-го и 3-го контактов. Нанесенные точки суть средние из $m_{\text{наб}}$, полученных по пяти последовательным снимкам. Этим достигается более высокая точность, а отклонения от прямых (пунктирные кривые), если их рассматривать как реальные, представляют собой остаточные влияния рельефа лунного края на концах серпов. Теоретические от-

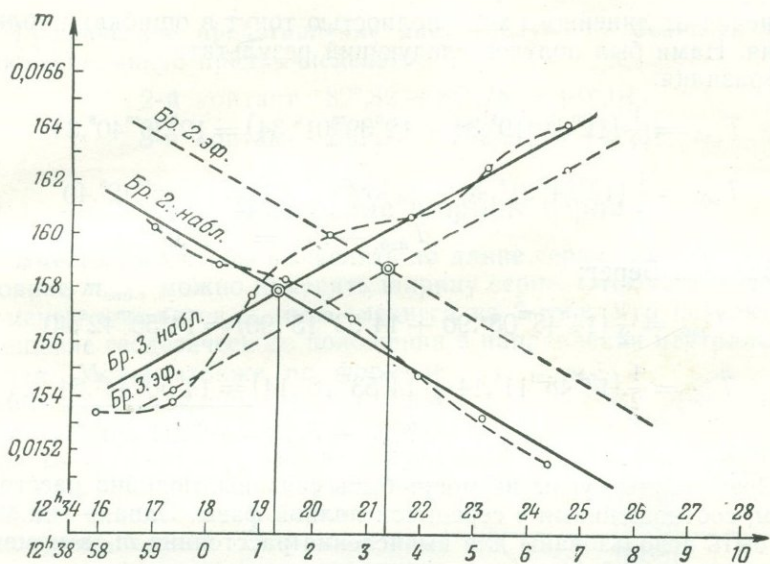


Рис. 59. Представление наблюдаемых ($m_{наб.}$) и предвычисленных ($m_{эф.}$) расстояний для Бразилии.

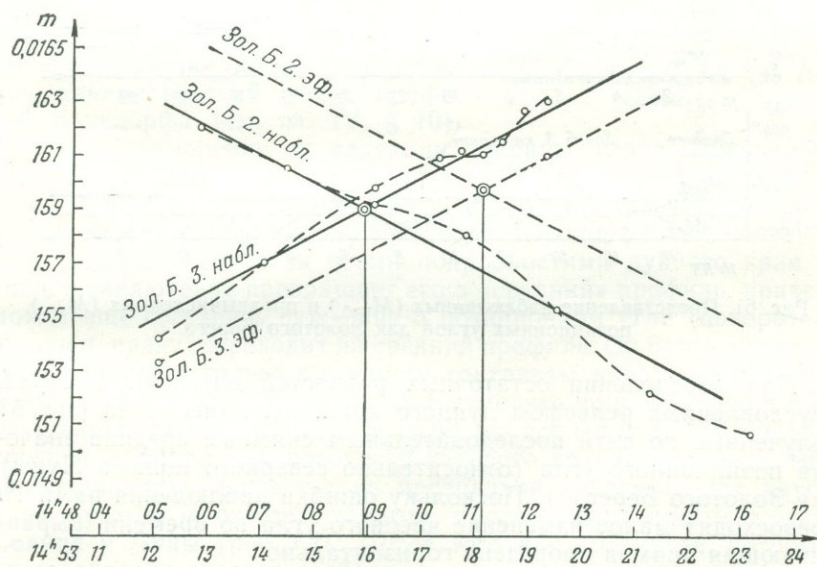


Рис. 60. Представление наблюдаемых ($m_{наб.}$) и предвычисленных ($m_{эф.}$) расстояний для Золотого Берега.

клонения от линейного хода полностью тонут в ошибках наблюдения. Нами был получен следующий результат:

Бразилия:

$$T_{\text{наб.}} = \frac{1}{2} (12^{\text{h}}34^{\text{m}}19^{\text{s}},34 + 12^{\text{h}}39^{\text{m}}01^{\text{s}},34) = 12^{\text{h}}36^{\text{m}}40^{\text{s}},34$$

$$T_{\text{эф.}} = \frac{1}{2} (12^{\text{h}}34^{\text{m}}21^{\text{s}},40 + 12^{\text{h}}39^{\text{m}}03^{\text{s}},40) = 12^{\text{h}}36^{\text{m}}42^{\text{s}},40$$

$$T_{\text{наб.}} - T_{\text{эф.}} = -2^{\text{s}},06 \pm 0^{\text{s}},12$$

Золотой Берег:

$$T_{\text{наб.}} = \frac{1}{2} (14^{\text{h}}48^{\text{m}}08^{\text{s}},90 + 14^{\text{h}}53^{\text{m}}15^{\text{s}},90) = 14^{\text{h}}50^{\text{m}}42^{\text{s}},40$$

$$T_{\text{эф.}} = \frac{1}{2} (14^{\text{h}}48^{\text{m}}11^{\text{s}},14 + 14^{\text{h}}53^{\text{m}}18^{\text{s}},14) = 14^{\text{h}}50^{\text{m}}44^{\text{s}},64$$

$$T_{\text{наб.}} - T_{\text{эф.}} = -2^{\text{s}},24 \pm 0^{\text{s}},10$$

Позиционные углы не могут быть связаны, подобно расстояниям, соотношениями с серединой полной фазы. Однако они могут быть использованы для вычисления расстояния m_0 в момент середины полной фазы.

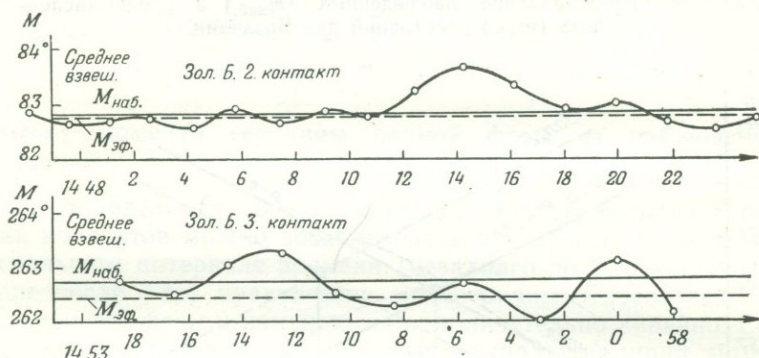


Рис. 61. Представление наблюдаемых ($M_{\text{наб.}}$) и предвычисленных ($M_{\text{эф.}}$) позиционных углов для Золотого Берега.

Для определения остаточных разностей для концов серпа, обусловленных рельефом лунного края, мы нанесли на рис. 61 полученные по пяти последовательным снимкам средние значения позиционного угла (относительно северного полюса Луны) для Золотого Берега¹⁾. Поскольку ошибки наблюдения намного превосходят малое изменение часового угла во времени, выравнивающая прямая проведена горизонтально.

¹⁾ Бразилия дала менее уверенные результаты (неуверенное отождествление).

Графическое представление дает следующие разности «наблюдение минус предвычисление»:

$$2\text{-й контакт } 82^{\circ},82 - 82^{\circ},78 = +0^{\circ},04$$

$$3\text{-й контакт } 262^{\circ},76 - 262^{\circ},45 = +0^{\circ},31$$

§ 7. Измерение ширины серпа

Вместо того чтобы вычислять по длине серпа или хорды расстояние $m_{\text{наб.}}$, можно измерять ширину серпа. Отсюда находятся моменты контактов и (для среднего из 2-го и 3-го контактов) смещение геодезического положения в направлении центральной линии. Можно также по формуле (9.66) из наблюдаемых ширин серпа и радиусов кругов тени и полутени L_1 и L_2 вывести соответствующие расстояния $m_{\text{наб.}}$ в фундаментальной плоскости и положить их в основу вычислений. Если желательно вывести по снимкам позиционный угол середины серпа и смещение геодезического положения перпендикулярно к центральной линии, то для этой цели имеются только два уже описанных способа, а именно привязка к лунному краю, или кинематический метод профилей Бонсдорфа (см. гл. IV, § 10).

Метод измерения и редукции ширины серпа, описанный вкратце в дальнейшем, был применен на практике Песоненом [10] во время затмения 1945 г. В известной степени он сродни кинематическому методу профилей Бонсдорфа (см. гл. IV).

Бонсдорф следует за всеми подробностями лунного края и лишь в заключение превращает его в «средний» профиль, причем может еще составить суждение о позиционном угле (повороте). Песонен сразу переходит на средний профиль. Он применил свой способ в 1945 г. только к внешним контактам, когда вместо серпа получается «линза». Можно также измерять ширину серпа и при внутренних контактах. Для измерения пленки используют микроскоп, в фокальной плоскости которого вращением винта микроскопа могут двигаться на прозрачной подставке два круга с радиусами, соответствующими сфотографированным краям Солнца и Луны (рис. 62). После того как оба круга, которые целесообразно сделать двойными, установлены один над другим на край Солнца и на средний край Луны, получается ширина линзы, сперва в делениях микроскопа, а затем и в секундах дуги.

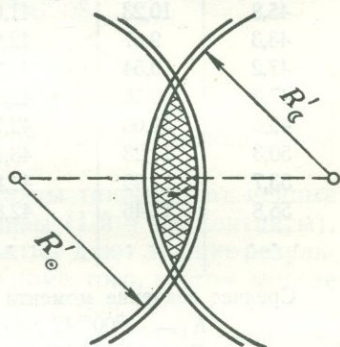


Рис. 62. Поле зрения измерительного микроскопа (по Песонену).

Вывод моментов контактов из ширины линзы
(Финляндия, 1945)

1-й контакт

Станция К			Станция Р		
толщина, м	Δt , сек	момент контакта, сек	толщина, м	Δt , сек	момент контакта, сек
39,9	8,91	41,95	37,0	8,34	19,04
39,8	8,89	42,47	39,2	8,83	19,05
45,8	10,23	41,62	41,7	9,40	18,97
43,3	9,67	42,68	44,0	9,91	18,96
47,2	10,54	42,31	45,4	10,23	19,14
47,3	10,56	42,78	48,8	10,99	19,38
49,5	11,05	42,79	52,2	11,76	19,09
50,3	11,23	43,11	52,8	11,90	19,45
53,7	11,99	42,84	55,9	12,59	19,25
55,8	12,46	42,87	56,5	12,73	19,61
...

Среднее значение момента контакта по 25 отдельным определениям

$$K_I = 13^h 00^m 42^s,906 \pm 0^s,04;$$

$$P_I = 12^h 54^m 19^s,483 \pm 0^s,04.$$

4-й контакт

Станция К			Станция Р		
толщина, м	Δt , сек	момент контакта, сек	толщина, м	Δt , сек	момент контакта, сек
66,3	13,15	58,10	68,8	13,93	38,71
70,7	14,03	58,48	69,9	14,15	38,44
72,0	14,28	58,23	70,0	14,18	37,98
73,3	14,54	57,98	73,3	14,84	38,14
76,2	15,12	58,06	77,1	15,61	38,42
78,1	15,50	57,94	77,8	15,75	38,07
84,7	16,80	58,74	82,5	16,71	38,54
86,5	17,16	58,60	83,5	16,91	38,24
89,7	17,80	58,74	84,9	17,19	38,03
90,0	17,86	58,29	87,7	17,76	38,11
...

Среднее значение момента контакта по 27 отдельным определениям

$$K_{IV} = 15^h 12^m 58^s,814 \pm 0,04;$$

$$P_{IV} = 15^h 08^m 38^s,662 \pm 0,04.$$

С помощью вычисленной относительной скорости Луны ($0'',472 \text{ сек}^{-1}$ в 1945 г.) ширина линзы может быть переведена в разность моментов Δt . Таким образом становится возможным вывести момент контакта из многих зарегистрированных моментов экспозиций.

Таким путем в 1945 г. были определены разности моментов контактов для обеих финских наблюдательных станций K и P , удаленных одна от другой на 350 км. Чтобы дать представление о точности измерений, мы приводим в табл. 42 выдержку из результатов, полученных Песоненом.

Разности наблюдаемых моментов контактов:

$$K_I - P_I = +6^m 23^s,42 \pm 0^s,06,$$

$$K_{IV} - P_{IV} = +4^m 20^s,15 \pm 0^s,06.$$

При скорости тени по земной поверхности 945 м/сек средней ошибке $\pm 0,06 \text{ сек}$ соответствует ошибка в положении точки $\pm 57 \text{ м}$ в направлении движения тени.

Отсюда следует, что 1-й и 4-й контакты также дают ценные результаты и что измерение ширины линзы (1-й и 4-й контакты), а также ширины серпа (2-й и 3-й контакты) дают лучшие результаты, чем измерение длины серпа [8]. Кроме того, в этом методе почти отпадают систематические ошибки, а при небольших расстояниях — также и влияние дифференциальной либрации (см. гл. IV, § 6).

§ 8. Точность наблюдения солнечных затмений для геодезических целей

1. Точность измерения расстояния m

Когда расстояние m определено из центрального угла серпа ¹⁾, как это было сделано при финских наблюдениях 1947 г., его ошибка составляется, согласно (9.8), из слагаемых Δm_B и Δm_L , получаемых дифференцированием по B и L

$$\begin{aligned} \Delta m_B &= \frac{m(L_1 - L_2) \sin B}{(L_1 - L_2) \cos B - m} \Delta B, \\ \Delta m_L &= \frac{L_1 - L_2 - 2m \cos B}{2m - (L_1 - L_2) \cos B} \Delta L. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Ошибка измерения половины центрального угла серпа ΔB может быть выражена соответствующей ошибкой ширины серпа и

¹⁾ В настоящее время нет еще никаких количественных исследований возможности определения m непосредственно из наблюдаемой ширины серпа.

образующих углов концов серпа (в 1947 г. она в среднем равнялась $0'',35$).

Ошибка ΔL разности радиусов $L_1 - L_2$ кругов тени и полутени происходит от неточного знания, относящегося к концу серпа местного радиуса Луны. Согласно уравнению (9.4а), она представляет собой ошибку $\Delta R'$, умноженную на некоторый (постоянный на время затмения) коэффициент; этой ошибкой отягощен радиус конца серпа, взятый с лунной карты Хайна.

По изображениям серпа финской экспедиции 1947 г. (на каждой станции 70 снимков при каждом контакте) расстояние было определено с точностью ± 140 м по одному контакту, а по среднему из обоих контактов с точностью ± 100 м ($15,7 \cdot 10^{-6}$ а).

2. Точность измерения позиционного угла M

Позиционный угол $M_{\text{наб.}}$ подвержен ошибкам тех величин, которые входят в уравнение (9.12). Ошибка C гораздо меньше других. В π_t , напротив, могут войти очень неприятные ошибки вследствие неуверенности отождествления, так как карты лунного края, хотя и составленные по фотографиям, еще и в настоящее время вызывают некоторые сомнения в этом отношении. По-видимому, такой случай имел место в Бразилии при 3-м контакте, когда для M получили среднюю ошибку $\pm 0^\circ,84$, тогда как в остальных случаях она составляла лишь $\pm 0^\circ,20$; $\pm 0^\circ,12$; $\pm 0^\circ,30$.

Если отбросить 3-й контакт в Бразилии, то для финских экспедиций 1947 г. средняя ошибка на одной станции составляет $\pm 0^\circ,21$; этому соответствует линейная величина $0,016 \cdot 0,21/57,3 = \pm 58,6 \cdot 10^{-6}$ а, или $+373$ м.

3. Средние ошибки неизвестных

Зависимость между выведенными из наблюдений величинами m и координатами места наблюдения дается уравнениями (7.7) и (7.8). Если объединить наблюдения 2-го и 3-го контактов в среднее значение, причем осредненный позиционный угол берется в направлении или 2-го, или 3-го контакта, то для каждой станции имеют место следующие соотношения:

$$d(x - \xi) = \sin M dm + m \cos M dM = q_1 d\varphi + r_1 d\lambda = -d\xi, \quad (9.26)$$

$$d(y - \eta) = \cos M dm - m \sin M dM = q_2 d\varphi + r_2 d\lambda = -d\eta.$$

Дифференцируя (7.7), получаем (если $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ выражены в секундах дуги, а дифференциальные перемещения в фундамен-

тальной плоскости — в единицах $10^{-6} \cdot a$)

$$\begin{aligned} q_1 &= +\sin \varphi \sin (\mu - \lambda) 10^6 \sin 1'', \\ r_1 &= +\cos \varphi \cos (\mu - \lambda) 10^6 \sin 1'', \\ q_2 &= -[\cos \varphi \cos d + \sin \varphi \sin d \cos (\mu - \lambda)] 10^6 \sin 1'', \\ r_2 &= +\cos \varphi \sin d \sin (\mu - \lambda) 10^6 \sin 1''. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_\xi^2 &= m_m^2 \sin^2 M + m_M^2 m^2 \cos^2 M, \\ m_\eta^2 &= m_m^2 \cos^2 M + m_M^2 m^2 \sin^2 M, \\ m_\varphi^2 &= \frac{r_2^2 m_\xi^2 + r_1^2 m_\eta^2}{(q_1 r_2 - q_2 r_1)^2}, \quad m_\lambda^2 = \frac{q_2^2 m_\xi^2 + q_1^2 m_\eta^2}{(q_1 r_2 - q_2 r_1)^2}. \end{aligned}$$

С данными, приведенными в § 5¹⁾ и приведенными вначале средними ошибками наблюдаемых величин²⁾

$$m_m = \pm 15,7 \cdot 10^{-6}, \quad m_M = \pm 58,6 \cdot 10^{-6},$$

получаем из приведенных выше формул, пренебрегая ошибкой положения Луны, действительно достигнутую точность:

$$\text{для Бразилии } m_\varphi = \pm 13'',3, \quad m_\lambda = \pm 10'',1;$$

$$\text{для Золотого Берега } m_\varphi = \pm 11'',9, \quad m_\lambda = \pm 6'',7.$$

Учитывая имеющийся теперь опыт, можно считать, что для трубы с эквивалентным фокусом 3—4 м (вместо 2 м) и для того же затмения значения

$$m_m = \pm 75 \text{ м} \quad \text{и} \quad m_M = \pm 0^\circ,05$$

или в долях радиуса

$$m_m = \pm 11,6 \cdot 10^{-6} \quad \text{и} \quad m_M = \pm 14,1 \cdot 10^{-6}.$$

Это является при современных условиях оптимально достижимой точностью наблюдений. С этими значениями вычисляем

$$\text{для Бразилии } m_\varphi = \pm 3'',6, \quad m_\lambda = \pm 3'',5;$$

$$\text{для Золотого Берега } m_\varphi = \pm 3'',0, \quad m_\lambda = \pm 3'',3.$$

Источники ошибок при данном методе. При современных условиях авторы считают главным источником ошибок «привязку» системы координат пленки к системе лунных координат, требующую отождествления вершин гор на профиле края. Эти ошибки слагаются: а) из ошибок сопоставления карт лунного

¹⁾ Числовые значения коэффициентов q и r можно найти в уравнении (9.29).

²⁾ Без 3-го контакта в Бразилии.

края по фотографиям больших масштабов и мелкомасштабных фокальных снимков солнечных серпов, б) из ошибок позиционных углов относительно северного полюса Луны, выведенных из селенографических координат, в) из ошибок отождествления, обусловленных центральной проекцией снимков¹⁾.

Из-за последнего пункта особое внимание следует уделять специальным наблюдениям края при солнечных затмениях. Это позволило бы специалисту, занятому обработкой, исключить каждую неуверенность в отождествлении и прежде всего установить, действительно ли совпадают точки почернения вершин гор и долин на пленке с топографическими экстремальными значениями карты.

Камерон и Дайер [11] исследовали неуверенность астрономических и геодезических постоянных, эфемерид и измерения контактов. Дифференциальные изменения среднего радиуса Луны, входящие в непрерывное измерение контактов, могут быть почти полностью исключены с помощью данных исследования лунного края Морской обсерватории США.

§ 9. Геодезические результаты по наблюдениям солнечного затмения

При всех геодезических предприятиях по наблюдению солнечного затмения речь идет об относительной задаче. Если наблюдают на двух станциях, которые с точки зрения достижимой точности достаточно далеко удалены друг от друга, можно добиться, чтобы относительная ошибка положения Солнца и Луны входила в результат не всей своей величиной, а лишь ее изменением за интервал времени около 2 час. Если же предварительно внести по предложению Зундмана поправки в положения Солнца и Луны, выведенные из полных небесномеханических уравнений движения, то можно принять на основании многократного опыта, что оставшаяся доля относительных ошибок лежит значительно ниже предела точности наблюдений методом фокальной киносъемки. Мы рассмотрим геодезические результаты метода на примере финской экспедиции 1947 г.

Для обработки наблюдения контактов на одной станции получают дифференцированием уравнений (7.4), (7.7) и (7.8) нижеследующие соотношения; в них учтена, кроме того, поправка радиуса Луны, выражающаяся увеличением предвычислен-

¹⁾ Об этом значительном источнике ошибок хорошо знал Хайн. Он пишет: «Приходится удовлетворяться приближением, при котором горе, являющейся на крае Луны, приписываются координаты геометрической точки края, хотя она может быть расположена и ближе к наблюдателю, и на скрытой от нас стороне Луны».

ного расстояния и поэтому являющаяся дополнением к отрицательному коэффициенту в выражении Δm .

$$\text{I) } \sin M \Delta m + m \cos M \Delta m = \Delta(x - \xi) = q_1 \Delta\varphi + \\ + r_1 \Delta\lambda + s_1 \Delta\alpha - \sin M \Delta k_{\zeta}, \quad (9.28)$$

$$\text{II) } \cos M \Delta m - m \sin M \Delta m = \Delta(y - \eta) = q_2 \Delta\varphi + \\ + r_2 \Delta\lambda + s_2 \Delta\delta - \cos M \Delta k_{\zeta}.$$

Свободные члены в левой части вычисляются по расхождениям наблюдений

$$\Delta m = m_{\text{наб.}} - m_{\text{эф.}} \quad \text{и} \quad \Delta M = M_{\text{наб.}} - M_{\text{эф.}}$$

Коэффициенты q и r уже были даны в уравнении (9.27) для единицы длины $a \cdot 10^{-6}$ и секунды дуги. Поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ относятся соответственно к прямому восхождению и склонению Солнца и Луны. Если мы выберем для сохранения одного порядка величин за единицу $0'',01$, то коэффициенты будут иметь вид

$$s_1 = \frac{\cos \delta_{\zeta} 10^4 \sin 1''}{\sin P_{\zeta}}, \quad s_2 = \frac{10^4 \sin 1''}{\sin P_{\zeta}}.$$

Если мы составим приведенные выше уравнения (9.28) для обеих станций наблюдения (индекс a обозначает станцию в начале затмения, e — станцию в конце его), то их относительное положение определяется разностями $I_e - I_a$ и $\Pi_e - \Pi_a$. Вследствие равенства коэффициентов s постоянные части $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ для времени затмения сокращаются. Остающаяся часть обычно очень мала, так что получается результат, в значительной степени свободный от ошибок астрономических положений. Однако это имеет место только в том случае, когда берутся восточный и северный компоненты в фундаментальной плоскости, а не разложение в направлении центральной линии и перпендикулярно к ней.

Используя данные финских экспедиций 1947 г., получаем, согласно уравнениям (9.28) и (9.27), следующие числовые соотношения:

$$\text{Бразилия:} \quad M_a = 55,8^1), \quad m_{\text{наб.}} - m_{\text{эф.}} = +279,10^{-6}; \\ m_a = 0,0163, \quad M_{\text{наб.}} - M_{\text{эф.}} = +0,105^2);$$

1) Среднее из 3-го и 4-го контактов; направление для 3-го контакта.

2) С отбрасыванием отдельных сомнительных значений при 3-м контакте.

Золотой Берег: $M_e = 71^\circ,4^1$, $m_{\text{наб.}} - m_{\text{эф.}} = +257,10^{-6}$,
 $m_e = 0,0159$, $M_{\text{наб.}} - M_{\text{эф.}} = 0^\circ,175$.

$$\begin{aligned} I_a &= 246,8 = +0,79\Delta\varphi_a + 3,81\Delta\lambda_a + 2,74\Delta\alpha_a - 0,83\Delta k_{\zeta}, \\ II_a &= 131,9 = -3,94\Delta\varphi_a - 0,89\Delta\lambda_a + 2,90\Delta\delta_a - 0,56\Delta k_{\zeta}, \\ I_e &= 258,5 = +0,36\Delta\varphi_e + 3,52\Delta\lambda_e + 2,74\Delta\alpha_e - 0,95\Delta k_{\zeta}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} II_e &= 36,5 = -4,67\Delta\varphi_e + 1,11\Delta\lambda_e + 2,90\Delta\delta_e - 0,32\Delta k_{\zeta}, \\ I_e - I_a &= +11,7 = -0,79\Delta\varphi_a - 3,81\Delta\lambda_a + 0,36\Delta\varphi_e + 3,52\Delta\lambda_e - 0,12\Delta k_{\zeta}, \end{aligned} \quad (9.30)$$

$$\begin{aligned} II_e - II_a &= -95,4 = +3,94\Delta\varphi_a + 0,89\Delta\lambda_a - 4,67\Delta\varphi_e + \\ &\quad + 1,11\Delta\lambda_e + 0,24\Delta k_{\zeta}. \end{aligned}$$

Пренебрегая поправкой лунного радиуса Δk_{ζ} , решаем уравнения (9.30) относительно $\Delta\varphi_a$ и $\Delta\lambda_a$ или относительно $\Delta\varphi_e$ и $\Delta\lambda_e$:

Бразилия: $\Delta\varphi_a = -24'',7 + 1,22\Delta\varphi_e - 0,52\Delta\lambda_e$,
 $\Delta\lambda_a = +2'',2 - 0,17\Delta\varphi_e + 1,03\Delta\lambda_e$. (9.31)

Золотой Берег: $\Delta\varphi_e = +20'',8 + 0,88\Delta\varphi_a + 0,44\Delta\lambda_a$,
 $\Delta\lambda_e = +1'',2 + 0,14\Delta\varphi_a + 1,04\Delta\lambda_a$.

Уравнения (9.31) могут быть рассматриваемы как собственно геодезические результаты наблюдения солнечного затмения. При этом два неизвестных нужно найти каким-либо другим путем (с поправкой лунного радиуса; их три). Поправки $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ в правой части могут быть определены по измерениям силы тяжести или из отклонений отвеса материковой сети; ненаписанное третье неизвестное Δk_{ζ} находится из специальных наблюдений Луны или покрытий звезд. Только после того как это сделано, длина геодезической линии может быть нанесена на взятый за основу референц-эллипсоид.

Для суждения о точности выведенных таким образом относительных компонентов отклонения отвеса мы вычислили средние ошибки абсолютных членов уравнений (9.31), а именно

1) для достигнутой в 1947 г. точности наблюдений (§ 8)

$$m_m = \pm 15,7 \cdot 10^{-6}, \quad m m_M = \pm 58,6 \cdot 10^{-6};$$

2) для точности, считавшейся в то время максимально достижимой (данные в скобках),

$$m_m = \pm 11,6 \cdot 10^{-6}, \quad m m_M = \pm 14,1 \cdot 10^{-6}.$$

¹⁾ Среднее из 3-го и 4-го контактов; направление для 3-го контакта.

Мы получили

	$\Delta\varphi$ (относит.)	$\Delta\lambda$ (относит.)
Бразилия:	$-24'',7 \pm 20'' (\pm 5'',2)$	$+2'',2 \pm 12'',5 (\pm 4'',9)$
Золотой Берег:	$+20'',8 \pm 16'' (\pm 4'',2)$	$+1'',2 \pm 12'' (\pm 4'',8)$

Отсюда видно, что со всеми возможными в настоящее время усовершенствованиями этого метода едва ли удастся сделать среднюю ошибку меньше $\pm 3''$. Как ни ценно наблюдение контактов солнечного затмения для астрономических целей, для геодезических целей оно едва удовлетворяет требованиям, предъявляемым к точности определения абсолютных отклонений отвеса. Несмотря на это, опускать его в геодезической литературе нельзя, вследствие выдающегося теоретического значения и образцовой постановки эксперимента.

§ 10. Фотографирование тени с самолета

Уже неоднократно во время затмений были произведены попытки фотографирования в большом масштабе на пластинках или на пленке, движущейся по поверхности Земли (над сушей, над морем или над слоем облаков), границы тени с регистрацией соответствующих моментов времени. Если бы удалось сделать это с требуемой точностью, то нанесение фронта тени на топографическую карту, в совокупности с моментами съемки, позволило бы составить уравнения ошибок путем сравнения полученных данных с предвычисленными.

Еще в 1932 г. Стивенс [12] опубликовал некоторое количество аэрофотоснимков, которые действительно позволяют отчасти определить неправильный фронт тени (2-й и 3-й контакт), но содержат много размытых, плохо определяемых мест. Фишер [13] установил по своим снимкам, полученным на высоте 4900 м над слоем облаков высотой 2000—2500 м, что видимый издалика «фронт» при приближении к месту съемки представился темной зоной совершенно неопределенной формы. Куккамьяки [14] также убедился по снимкам тени, полученным в Финском геодезическом институте в 1945 г. над сушей на высоте 6000 м с помощью широкоугольной камеры Цейсса (30 × 30 см), и по снимкам сравнения для топографии, что имеется лишь немного точек привязки для измеримой линии тени.

Это легко объяснимо, так как из-за слабости света только прямой взгляд на серп или на его отражение оставляет достаточно отчетливое впечатление. Поэтому следует упомянуть ([14], стр. 214) о попытке произвести с самолета киносъемку края отражающей поверхности морских волн вблизи суши. При этом полное угасание прямого света при исчезновении серпа должно

создать достаточно ясно выраженную линию края (линию тени как границу световой поверхности).

О'Киф и Мирс [15] видят причину неудачи с фотографированием тени, кроме общей слабости освещения, в явлениях дифракции, вызываемых краем Луны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Djurkovič P. M., Détermination photographique des positions relatives de la lune et du soleil au cours d'une éclipse, Bull. Obs. Astronom. Béograd, 1956, Béograd, 1957
2. Kalaja P., Time Service by the Finish Geodetic Institut's 1945 Solar Eclipse Expeditions, Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 46, Helsinki, 1955, S. 181—190.
3. Kukkamäki T. J., Hirvonen R. A., The Finish Solar Eclipse Expeditions to the Gold Coast and Braszil 1947, Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 44, Helsinki, 1954, S. 8—13.
4. Brein H., Jelstrup H. S., Nottarp K., Sandig H. U., Sigl R., Beobachtungen zur Sonnenfinsternis 1954 in Südnorwegen, Mitt. Inst. f. Angew. Geodäsie, Nr. 16, Frankfurt, 1957 (zugleich Deutsche Geod. Kommission, Reihe B, Nr 34).
5. Palm A., Registrierinstrumente, Berlin, 1959.
6. Hansen P. A., Theorie der Sonnenfinsternisse, Leipzig, 1859.
7. Ball L. de, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Leipzig, 1912.
8. Kukkamäki T. J., Hirvonen R. A., The Finish Solar Eclipse Expeditions to the Gold Coast and Braszil 1947, Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr 44, Helsinki, 1954.
9. Goldstein A. F., Matingly O. F., Heyden F. J., On the geodetic Application of a Solar Eclipse, Obs. Monogr. Georgetown, Nr. 4, 1957, S. 10—16; Report to Special Study Group, Nr. 9, Toronto (1957); Bull. géod., Nr. 49, 53—63 (1958).
10. Pesonen U., Determination of the outer Contact Moments from the 1945 Solar Eclipse Pictures, Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 46, Helsinki, 1955, S. 191—199.
11. Cameron R. C., Dyer E. R., Comments on the Ephemerides and Constants for a Total Eclipse of the Sun, Obs. Monogr. Georgetown, Nr. 9 (1958). (Enthält ein umfassendes Verzeichnis (19 Seiten) der neueren Literatur.)
12. Stevens A. W., Photographing the Eclipse of 1932 from the Air Nat. Geogr. Mag., 62, Nr. 5, 581—596 (1932).
13. Fisher C., The Story of the Moon, Garden City, N. Y., 1945, S. 237—238.
14. Kukkamäki T. J., Aerialphotographing of the Moon's Shadow on the Earth's Surface, Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 46, Helsinki, 1955, S. 209—214.
15. O'Keefe J. K., Mears D. D., The 800 Inch Telescope, Astron. Soc. Canada, 48, Nr. 1, 2 (1954).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ СОЛНЦА И ЛУНЫ ПО ВРАЩЕНИЮ СОЛНЕЧНОГО СЕРПА

§ 1. Метод наблюдения и техника съемки

При полном солнечном затмении серпы, видимые наблюдателем, находящимся вблизи центральной линии тени, перед 2-м контактом и после 3-го контакта вогнуты в противоположных направлениях. Если для этих двух фаз мысленно построить нормали к серединам серпов, то позиционные углы этих нормалей будут отличаться приблизительно на 180° . За время от одного контакта до другого серп как бы повернулся на 180° . При наблюдении на большем расстоянии от центральной линии и в особенности вне зоны полной фазы это вращение происходит непрерывно и охватывает значительный угол, без существенных изменений длины и толщины серпа. Нас здесь интересуют именно такие пункты, из которых может быть наблюдаемо быстрое вращение серпа.

Явление вращения серпа при полных и кольцеобразных затмениях Аткинсон [1, 2] положил в основу особого метода, который позволил получить более точные результаты, чем прежний метод наблюдения контактов, одинаковый по технике съемки. (Следует помнить, что и здесь речь идет только о наблюдениях вблизи контактов, так как самые контакты улавливаются недостаточно точно.)

Метод Аткинсона основан на принципе максимальной скорости вращения по позиционному углу. Угловая скорость вращения зависит как от характерного для данного затмения соотношения видимых радиусов Солнца и Луны, так и от выбора пункта наблюдения вблизи границы затмения (вне зоны полного затмения). Малое смещение пункта наблюдения перпендикулярно центральной линии при максимальной скорости вращения вызывает большое изменение мгновенного позиционного угла. Неизбежные ошибки в наблюдаемых позиционных углах оказывают в данном случае наименьшее влияние на окончательный результат, т. е. на относительное положение центров Солнца и Луны, зависящее от пункта на земной поверхности.

Легко понять, что серп вращается тем быстрее, чем ближе от центра Солнца проходит центр Луны. Но это не является

единственным критерием для благоприятных условий измерения; напротив, кроме этого, должна быть еще обеспечена известная минимальная толщина серпа. Это последнее условие задается разрешающей способностью фотографического слоя, так как при измерении с увеличением должны быть прежде всего отчетливо видны рога серпа для определения их углового положения. Имея в виду фотографирование, следует для каждого случая предвычислять благоприятнейшее видимое расстояние центров Солнца и Луны, а, следовательно, и положение пункта наблюдения относительно центральной линии. Мы еще вернемся к этому в § 3.

Чтобы найти максимальное вращение, можно пользоваться для общего представления данными Ежегодников, в той или иной форме публикующих границы затмения. Более точные сведения можно найти в специальных изданиях (географические координаты границ, или карта более крупного масштаба, например 1 : 1 000 000). Отсюда можно получить положение пункта наблюдения с точностью до 0,5 км. Окончательное место, наиболее благоприятное для наблюдений, устанавливается вычислением, основанным на точных исходных данных для Солнца и Луны. Но так как эти координаты всегда несколько неуверенны, то обстоятельства наблюдения серпов происходят несколько иначе, чем предсказано. Успех наблюдений в смысле точности существенно зависит от предвычисления, поэтому последнему должно быть уделено особое внимание.

Как и в прежнем методе контактов, дело заключается здесь преимущественно в измерении позиционного угла, и в меньшей степени — в прямом измерении расстояний. Расстояния чаще выводятся косвенным образом из других измеренных элементов серпа (см. гл. IX, § 1 и 3). Поэтому и здесь при вычислении исходят из уравнений ошибок в позиционном угле. Эти уравнения и в методе контактов и в методе вращения имеют одинаковую форму. Поэтому в дальнейшем нам придется иметь дело только с различиями метода вращения от метода контактов в смысле наблюдений, теории и применения. Более подробное рассмотрение многообещающего метода вращения представляется весьма целесообразным; кроме того, здесь используются типичные геодезические приемы.

Во время полного солнечного затмения 1 ноября 1948 г. в Момбасе для регистрации вращения серпа использовалась жестко укрепленная кинокамера, дающая 18 изображений серпа в секунду; съемка началась за 1,5 мин до середины затмения и закончилась 1,5 мин спустя после нее. Приводимая в движение электромотором кинокамера (Vinten K, 35 мм) с объективом высокого качества ($f = 0,953$ м) была установлена на экваториальной установке. Вместо целостата было применено юстирующееся стеклянное зеркало, которое не требовало передвижения

вследствие короткого времени наблюдений. Светосила находилась в пределах от $f: 18$ до $f: 36$; продолжительность экспозиции составляла $1/650$ сек. Непосредственно перед фокальной плоскостью находился зеленый фильтр, служивший для ослабления яркости и исключения влияния вторичного спектра. Моменты экспозиции, радиосигналы и контакты хронометра регистрировались на пишущем хронографе с двумя перьями, приводимом в движение синхронным мотором.

Предполагалось достигнуть (что и было осуществлено) точности позиционного угла в I' по отдельному изображению и точности регистрации моментов времени $1/100$ сек. Комплексное использование позиционного угла рассмотрено в § 4; аппаратура для измерения времени хорошо известна и не требует более подробного описания.

Если ориентировка камеры и пленки в каждый момент экспозиции оставалась неизменной (что, как мы увидим далее, в 1948 г., было не всегда), то нулевое направление часового угла серпа может быть выведено из суточного движения Солнца, которое непрерывно изображается на пленке. Вспомогательными линиями при этом служили линии, проведенные по перфорированным краям пленки. Независимая проверка постоянства ориентировки камеры и пленки является основным преимуществом этого способа.

§ 2. Теоретическое соотношение для вращения серпа

1. Соотношения на сфере

Представим себе на сфере прямоугольную систему координат с началом в центре солнечного диска S , причем ось x параллельна видимому относительному движению Луны, а ось y направлена по кратчайшему расстоянию χ_0 между центрами Солнца и Луны (рис. 63). Середина затмения ($\chi = \chi_0$) соответствует момент $t = 0$. Относительная скорость Луны в момент $t = 0$ есть v ; за короткое время наблюдений ее можно считать постоянной. Пусть позиционный угол от центра Солнца к центру Луны, отсчитываемый от направления на север против часовой стрелки, есть M ; позиционный угол нормали к относительному движению Луны (т. е. позиционный угол центра Луны в момент $t = 0$) обозначим через M_0 .

При вычислении значений, принимаемых позиционным углом M в зависимости от времени, исходные величины M_0 , χ_0 и v предполагаются известными. M_0 и v находят, преобразуя видимые геоцентрические координаты α_{\odot} , δ_{\odot} , α_{\ominus} , δ_{\ominus} , взятые из Ежегодника для круглого момента времени вблизи середины затмения,

в топоцентрические координаты для ряда равноотстоящих друг от друга моментов времени. Тогда величины

$$\Delta\alpha = \alpha'_C - \alpha'_O \quad \text{и} \quad \Delta\delta = \delta'_C - \delta'_O$$

могут быть разложены по степеням t и продифференцированы. В выражениях

$$v_a = \frac{d}{dt} (\Delta\alpha \cos \Delta\delta_O), \quad v_b = \frac{d}{dt} \Delta\delta \quad (10.1)$$

следует ввести вместо t точный момент середины затмения. Тогда получаем

$$v = \sqrt{v_a^2 + v_b^2}, \quad (10.2)$$

$$M_0 = \arctg \frac{v_a}{v_b} - 90^\circ. \quad (10.3)$$

Отсюда легко вычислить M_0 с точностью до $0',5$. Величина κ_0 получается непосредственно из астрономических координат. Для

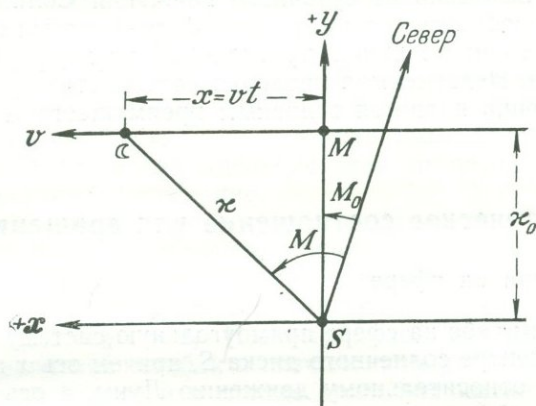


Рис. 63. Особая система координат для вращения серпа.

рассматриваемого нами промежутка времени $\Delta t = \pm 1,5$ мин можно положить $v = \text{const}$; напротив, для M_0 и M никаких допущений и округлений делать нельзя. С помощью рис. 63 получаются следующие простые соотношения.

Позиционный угол M

$$\text{tg}(M - M_0) = \frac{vt}{\kappa_0}. \quad (10.4)$$

Скорость вращения

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{v}{\kappa_0} 206265 \cos^2(M - M_0) \quad (10.5a)$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{v}{x_0} \frac{206265}{1 + \left(\frac{vt}{x_0}\right)^2}. \quad (10.56)$$

Максимальная скорость ($t = 0$ или $M - M_0 = 0$)

$$\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_{\max} = \frac{v}{x_0} 206\,265. \quad (10.6)$$

Для изменения позиционного угла вследствие изменения кратчайшего расстояния x_0 между центрами светил (которое в свою очередь может быть обусловлено смещением места наблюдения или изменения координат Луны) мы имеем

$$\frac{\partial M}{\partial x_0} = -\cos^2(M - M_0) \frac{vt}{x_0^2} = -\frac{\sin 2(M - M_0)}{2x_0} \quad (10.7a)$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial x_0} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{vt}{x_0}\right)^2} \frac{vt}{x_0^2}. \quad (10.7b)$$

Изменение скорости вращения вследствие малого изменения x_0 может быть оценено из следующих отношений:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial M}{\partial x_0}\right) = -\frac{\cos 2(M - M_0)}{x_0} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (10.8)$$

или

$$\Delta \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right) = -\frac{\Delta x_0}{x_0} \cos 2(M - M_0) \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\Delta x_0}{x_0} \frac{1 - \left(\frac{vt}{x_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{vt}{x_0}\right)^2} \frac{\partial M}{\partial t}. \quad (10.9)$$

Числовой пример

Примем $x_0 = 1'$ (как в 1948 г. в Момбасе); тогда при $v = 0',5 \text{ мин}^{-1}$ максимальная скорость вращения будет $28',6 \text{ мин}^{-1}$.

Таблица 43

t , мин	$M - M_1$	Влияние изменения x_0 ($\Delta x_0 = 0'',1$; $x_0 = 1'$; $v = 0',5 \text{ мин}^{-1}$)	
		на позиционный угол	на скорость вращения
0	0°	0	-2',9 мин ⁻¹
0,5	14	-1',3	-2,4
1,0	27	-2,3	-1,4
1,5	37	-2,8	-0,5
2,0	45	-2,9	0

Для $t = 2$ мин или $M - M_0 = 45^\circ$ скорость вращения равна всего лишь $14^\circ,3 \text{ мин}^{-1}$ по (10.5). Таблица 43 показывает на примере Момбасы, 1948 г. ($\chi_0 = 1'$), действие смещения пункта наблюдения (перпендикулярно центральной линии) на позиционный угол и скорость вращения. Изменению $\Delta\chi_0 = 0'',1$, положенному здесь в основу вычисления, соответствует линейное смещение пункта наблюдения примерно на 180 м.

2. Соотношения на фундаментальной плоскости

Вектор расстояния оси тени от наблюдателя в фундаментальной плоскости есть (m, M) (гл. II, § 2). Он направлен из проекции пункта наблюдения в точку пересечения оси тени с фундаментальной плоскостью. Вектор относительной скорости оси тени по отношению к наблюдателю есть (n, N) . Аналогичные равные вектора могут быть построены и в параллельной плоскости, проходящей через пункт наблюдения.

Из соотношений, связывающих позиционный угол и расстояние между сферой и фундаментальной плоскостью (гл. II, § 6), следует, что вектор (n, N) параллелен и пропорционален по величине изменению вектора χ , т. е. видимому движению Луны относительно Солнца.

Относительная скорость центра тени в фундаментальной плоскости около момента середины затмения близка к постоянной. Действительно, главная ее часть — скорость самой тени — изменяется за короткое время наблюдений очень мало. Другая, меньшая часть, являющаяся проекцией обратного суточного движения наблюдателя в фундаментальной плоскости, также изменяется немного. Поэтому, как уже было предположено, v можно рассматривать как постоянную.

По (2.43) и (2.45) имеем для видимого расстояния центров Солнца и Луны (здесь d заменено буквой χ)

$$\chi = m [\sin \pi_{\zeta} (1 + \zeta \sin \pi_{\zeta}) - \sin \pi_{\odot}].$$

Для сокращения положим (топоцентрический параллакс)

$$\pi'_{\zeta} = \pi_{\zeta} (1 + \zeta \sin \pi_{\zeta}).$$

Тогда с достаточной точностью

$$\chi \approx m (\pi'_{\zeta} - \pi_{\odot}) \quad (10.10)$$

и

$$v = (\pi'_{\zeta} - \pi_{\odot}) (n, N); \quad (10.11)$$

v получается в тех единицах, в которых выражены параллаксы. Пусть m_0, M_0 и n_0, N_0 — значения для момента середины затмения (наибольшей фазы), определяемого соотношением:

$$M = N \pm 90^\circ.$$

Так как на рис. 63 оси координат были выбраны параллельно направлениям, задаваемым величинами N_0 и M_0 , то остаются справедливыми следующие уравнения:

$$\pm y = (\pi'_\zeta - \pi_\odot) m_0 = \text{const}, \quad (10.12)$$

$$v = (\pi'_\zeta - \pi_\odot) n_0 = \text{const}, \quad (10.13)$$

$$x = vt = (\pi'_\zeta - \pi_\odot) n_0 t, \quad (10.14)$$

$$\text{tg}(M - M_0) = \frac{x}{y} = \pm \frac{n_0}{m_0} t. \quad (10.15)$$

Когда наблюдательная станция лежит южнее (севернее) центральной линии, y положительно (отрицательно). Тогда $M - M_0$ с течением времени возрастает (убывает), и этим определяется направление вращения серпа. Если позиционный угол отсчитывается от центра Солнца, то согласно гл. II, § 2

$$m \sin M = x - \xi \quad m^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad \text{tg } M = \frac{x - \xi}{y - \eta}, \quad (10.16)$$

$$m \cos M = y - \eta$$

$$m \sin N = x' - \xi' \quad n^2 = (x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 \quad \text{tg } N = \frac{x' - \xi'}{y' - \eta'}$$

$$n \cos N = y' - \eta' \quad (10.17)$$

Из уравнения (10.16) следует для скорости вращения:

$$\frac{1}{\cos^2 M} \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{x' - \xi'}{y - \eta} - \frac{x - \xi}{(y - \eta)^2} (y' - \eta')$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{206\,265}{m} [(x' - \xi') \cos M - (y' - \eta') \sin M]$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{n}{m} \sin(N - M) \cdot 206\,265. \quad (10.18)$$

Максимум скорости вращения получается для $N - M = 90^\circ$, в согласии с (10.6)

$$\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_{\text{max}} = \frac{n_0}{m_0} 206\,265 = \frac{v}{x_0} 206\,265.$$

§ 3. Особые обстоятельства при выборе места наблюдения

Если станция лежит очень близко к центральной линии, серп наблюдается незадолго до 2-го и вскоре после 3-го контактов. В этом случае, как показывает нижеследующая таблица, вращение серпа весьма незначительно. При наблюдении контактов также не происходит быстрого вращения; преобладает быстрое

изменение расстояния. Например, для финских станций наблюдения солнечного затмения 1947 г. предвычисление дало следующие значения для $\frac{\partial M}{\partial t}$ и $\frac{\partial m}{\partial t}$.

Таблица 44

Бразилия, 20 мая 1947 г.	$\frac{\partial M}{\partial t}$, секунд дуги в 1 сек	$\frac{\partial m}{\partial t}$, м/сек	Золотой Берег, 20 мая 1947 г.	$\frac{\partial M}{\partial t}$, секунд дуги в 1 сек	$\frac{\partial m}{\partial t}$, м/сек	Фаза
12 ^h 34 ^m 07 ^s ,5	-0,27	720	14 ^h 48 ^m 07 ^s ,5	+7,7	660	Вблизи 2-го контакта
34 22,5	-0,13	720	48 22,5	+8,9	660	Вблизи 3-го контакта
38 47,5	-0,33	715	52 57,5	+10,1	665	
39 02,5	-0,07	715	53 12,5	+8,3	665	

В противоположность этому при затмении 1 ноября 1948 г. вблизи зоны полного затмения наблюдались следующие скорости вращения.

Таблица 45

Момбаса, 1 ноября 1948 г.	$\frac{\partial M}{\partial t}$, секунд дуги в 1 сек	Фаза
4 ^h 26 ^m 37	-1370	Середина затмения
27 45	-1960	
28 53	-1370	

Условия наблюдения вращения серпа

Из уравнения (10.56) следует, что величина вращения для данного момента t , а также и максимум вращения зависят только от κ_0 , так как v почти постоянно. Для того чтобы вращение вообще могло наблюдаться, должно выполняться условие

$$\kappa_0 > R'_\zeta - R'_\odot.$$

С другой стороны, κ_0 должно достичь некоторой минимальной величины, при которой серп дает безупречные изображения и может быть хорошо измерен. Концы серпа должны быть четкими, несмотря на влияние рельефа Луны. Опыт показал, что углы серпа (рис. 64) меньше 3,° не могут дать удовлетворительных результатов даже при оптимальном увеличении.

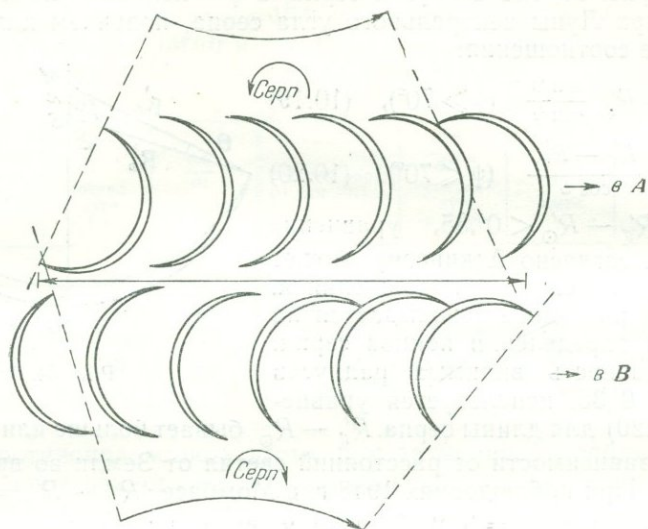


Рис. 66. Двойное наблюдение вращения серпа из пунктов A и B с различных сторон центральной линии (вращение за 3 мин).

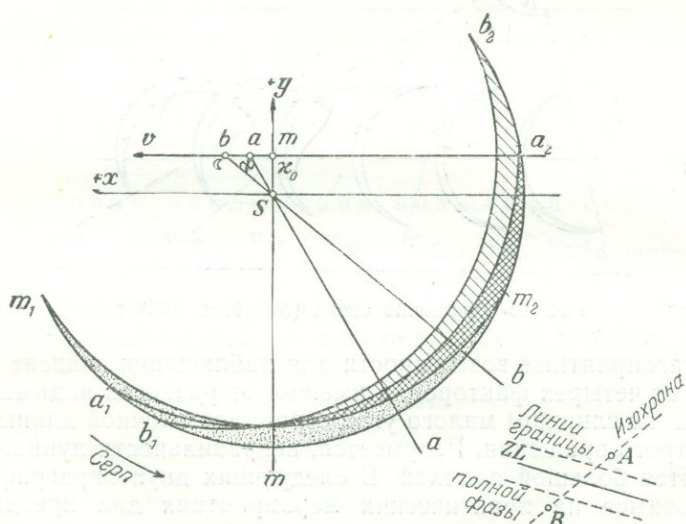


Рис. 67. Двойное наблюдение; особые условия в A .

экспозиция. Скорость вращения в середине затмения получилась равной $32' \text{ сек}^{-1}$ и в момент $t = \pm 1,2 \text{ мин}$ равной $23' \text{ мин}^{-1}$. За время наблюдения ($\sim 3 \text{ мин}$) серп повернулся на 76° .

Двойное наблюдение вращения серпа

В этом случае вращение серпа предполагается наблюдать из двух точек A и B , лежащих по разные стороны от центральной линии (такое двойное наблюдение, насколько нам известно, до

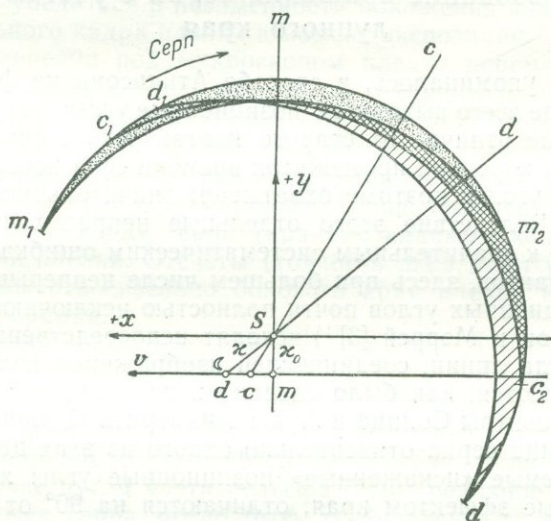


Рис. 68. Двойное наблюдение; особые условия в B .

сих пор еще не производилось). Наиболее благоприятные условия достигаются тогда, когда обе станции находятся на примерно одинаковом расстоянии от центральной линии и по возможности на одной изохроне (кривой моментов одинаковой фазы) (рис. 66—68).

Если системы координат для A и B ориентированы одинаково, то относительное движение Луны в обоих случаях будет происходить параллельно положительному направлению оси x ; только знаки y будут противоположными и вращение происходит в противоположных направлениях. Конечно, полной симметрии и при таком расположении наблюдений достигнуть нельзя, так как лунный край, наблюдаемый в A и B , различен.

Однако двойное наблюдение имеет существенные преимущества.

1. Получается удвоенное число наблюдений.

2. Наблюдениями охватывается значительно бóльшая часть лунного края, и поэтому уменьшаются систематические ошибки, вызываемые рельефом Луны.

3. Неизвестные более сильно проявляют себя в отклонениях изображений серпов, от симметрии. Поэтому следует накладывать одновременные снимки серпа друг на друга и при обработке исходить из разностей этих изображений.

§ 4. Использование вращения серпа с учетом профиля лунного края

Как уже упоминалось, в способе Аткинсона из фотографий серпа прежде всего выводятся позиционные углы центров светил. Существенное отличие от старого контактного способа состоит в том, что за короткий промежуток времени серп поворачивается на большой угол и поэтому охватывает значительную дугу лунного края. Вследствие этого отдельные неправильности края, приводящие к значительным систематическим ошибкам в случае метода контактов, здесь при большем числе непрерывно меняющихся позиционных углов почти полностью исключаются. Кроме того, Аткинсон и Мэррей [3]¹⁾ исходят непосредственно из позиционного угла линии, соединяющей изображения концов серпа. Они не пытаются, как было сделано в прежних работах, локализовать центры Солнца и Луны и измерить позиционный угол каждого конца серпа относительно одного из этих центров. Эти так называемые «искаженные» позиционные углы хорд серпа, обремененные эффектом края, отличаются на 90° от «искаженных» позиционных углов центра одного из светил относительно другого.

Для того чтобы получить позиционный угол хорды, угол ее направления приходится определять относительно края пленки или перфорации за неимением лучшей исходной прямой. Позиционный угол края пленки может быть найден с помощью получающегося на пленке суточного движения Солнца.

Полученные по обширному материалу (в 1948 г. за 3 мин было получено свыше 3000 изображений серпа) «искаженные» позиционные углы сравниваются с их теоретическими (вычисленными) значениями. Образуя разности, можно найти систематические отклонения наблюдений от теории, а именно отклонения ΔM_0 и Δm_0 в позиционном угле и расстоянии, относящихся к моменту времени, близкому к середине затмения. Если эти систематические разности между наблюдением и теорией признаются реальными, то они могут рассматриваться как исходный

¹⁾ В изложении мы следовали этому фундаментальному труду.

материал для определения искомых поправок как астрономического, так и геодезического характера.

Направление хорды серпа на пленке. Измерение серпа длиной всего лишь 9 мм заставляет предъявлять к оптике высокие требования, и в отдельных случаях оно не всегда уверенное. Обработка такого большого количества пленки существенно упрощается, если ориентировка пленки за время наблюдения, составляющее лишь несколько минут, может быть сделана постоянной. Это требует дополнительных контрольных измерений, позволяющих убедиться в неизменности положения камеры и каждого отдельного кадра пленки в момент экспозиции.

При измерении под микроскопом пленка перематывается с одной катушки на другую, проходя по измерительному мостику и прижимаясь к направляющему рельсу. Мостик укреплен на поворотном столике с разделенным кругом. Над подставкой имеется микроскоп, который может перемещаться по направляющей. Поворотом столика можно подвести под двойную нить этого микроскопа как хорду серпа (крайние видимые концы), так и боковой край пленки. Отсчеты (точность $\pm 1'$) дают угол направления хорды относительно бокового края пленки или относительно перфорации.

В зависимости от того, какое место края Луны пересекают солнечные лучи в концах серпа, получаются либо четкие концы серпа, что и должно встречаться при большом числе снимков, либо менее резкая картина, что должно происходить от аномальной рефракции или от рельефа лунного края. Если в этом последнем случае путем учета рельефа Луны реальное положение конечных точек серпа могло быть установлено, то эти снимки также измерялись с точностью ± 1 . Чтобы эта точность действительно достигалась, разумеется, должны быть исследованы инструментальные ошибки вращающегося столика (эксцентриситет и ошибки делений). При измерении снимков из Момбасы ориентировка края пленки относительно делений вращающегося столика для всех пленок оказалась постоянной в пределах точности измерений ($\pm 1'$).

Ориентировка пленки по полюсу мира. Перемещающиеся на пленке с течением времени изображения Солнца позволяют определить направление суточного движения центра Солнца относительно края пленки. Это позволяет определить ориентировку пленки относительно северного полюса, и тем самым отнесенные к краю пленки углы направления хорд серпа могут быть переведены в позиционные углы.

Для этой цели с помощью компаратора измеряется расстояние южного края Солнца (в Момбасе был виден южный край) от прямой, соединяющей две соответствующие дырочки на краях пленки. Другая координата определяется по склонению, моменту

времени и ширине изображения. Из этих координат получается угол между боковыми краями пленки и касательной к слабо изогнутой кривой суточного движения (в точке середины затмения). Этот угол, в зависимости от обстоятельств, может быть еще исправлен за изменение склонения Солнца, которое при измерениях не учитывалось.

Дальнейшие поправки, которые, возможно, придется учитывать, возникают вследствие схождения часовых кругов и вследствие дифференциальной рефракции. Когда склонение Солнца отрицательно, схождение часовых кругов в начале затмения увеличивает позиционный угол на

$$\Delta P = 15' \sin \delta_{\odot} (t - t_0),$$

а в конце затмения уменьшает его на ту же величину, если измеренные направления привязаны к неизменному направлению. Дифференциальная рефракция не влияет на позиционный угол, если хорда серпа вертикальна или горизонтальна; в других случаях при больших зенитных расстояниях нужно вводить и эту поправку. В Момбасе, где наблюдения производились при $z = 70^\circ$, дифференциальная рефракция для ряда снимков составляла в позиционном угле несколько минут дуги.

Эффект края. Пусть M — теоретический позиционный угол расстояния между центрами светил в момент t ; его следует вычислять, принимая лунный край за круг. Наблюдаемый позиционный угол, который получается из угла направления хорды серпа добавлением 90° , обозначим P ; разность

$$v_p = P - M \quad (10.21)$$

мы назовем *наблюдённым эффектом края*. Как оказалось, величины v_p , вызываемые рельефом Луны, могут превосходить 1° . Точность измерения обычно составляет $\pm 1'$. Величины v_p характера рельефа Луны они имеют подчас систематический характер. Можно получить значительно меньшие свободные члены, если сопоставить наблюдаемые эффекты края v_p с вычисленными для тех же либраций «теоретическими эффектами края» E . При вычислении теоретического края лучше всего брать за основу фотографии лунного края Морской обсерватории в Вашингтоне (ср. гл. IV, § 7). Тогда в качестве свободных членов получаем

$$v'_p = P - M - E. \quad (10.22)$$

Эти величины примерно в 10 раз меньше эффектов края v_p и могут быть названы «наблюдёнными остатками эффекта края». Хотя представляется, что ни наблюдаемые эффекты края $P - M$, ни теоретические E (которые также основаны на наблюдениях) не свободны от систематических ошибок, все же можно попробовать выравнивать v'_p по способу наименьших квадратов.

Выравнивание сводится к тому, что изображение «зубьев» наблюдаемых эффектов края $P-M$ накладывается на изображение «зубьев» теоретических эффектов края E и затем смещается и поворачивается вокруг нуля-пункта (середины затмения), пока сумма квадратов остаточных отклонений наблюдений от теории (вычисления) не будет минимальной.

§ 5. Составление уравнений ошибок для позиционных углов

В уравнения ошибок (10.22) наряду с наблюдаемыми позиционными углами P входят теоретические позиционные углы M (для кругообразного лунного края), а также и теоретические эффекты края E . Обе эти величины вычисляются согласно изложенному ниже.

1. Теоретический позиционный угол M

При вычислении M следует учитывать изменение скорости относительного движения Солнца и Луны. Исходят из соотношений (2.20) и (2.23) в фундаментальной плоскости:

$$\begin{aligned} x - \xi &= m \sin M, & x' - \xi' &= n \sin N, \\ y - \eta &= m \cos M, & y' - \eta' &= n \cos N. \end{aligned}$$

Пусть вблизи середины затмения дальнейшие производные вектора расстояния будут

$$\begin{aligned} x'' - \xi'' &= r \sin R, & x''' - \xi''' &= s \sin S, \\ y'' - \eta'' &= r \cos R, & y''' - \eta''' &= s \cos S. \end{aligned}$$

На основе соотношений

$$\begin{aligned} \cos M + i \sin M &= e^{iM}, \\ (y - \eta) + i(x - \xi) &= me^{iM} \end{aligned}$$

вектор расстояний может быть представлен рядом с комплексными членами, причем t_1 должно быть закрепленным моментом времени вблизи середины затмения

$$\begin{aligned} me^{iM} &= m_1 e^{iM_1} + n_1 e^{iN_1} (t - t_1) + \\ &+ \frac{1}{2} r_1 e^{iR_1} (t - t_1)^2 + \frac{1}{6} s_1 e^{iS_1} (t - t_1)^3 + \dots \quad (10.23) \end{aligned}$$

Если t_0 — приведенный в эфемериде момент середины затмения (который слегка отличается от наблюдаемого), то N_0 и M_0 отличаются друг от друга в этот момент на 90° . Таким образом, N_0

может быть исключено, и мы легко находим из (10.23)

$$me^{i(M-M_0)} = m_0 + in_0(t-t_0) + \frac{1}{2}r_0e^{i(R_0-M_0)}(t-t_0)^2 + \\ + \frac{1}{6}s_0e^{i(S_0-M_0)}(t-t_0)^3 + \dots \quad (10.24)$$

После отделения действительной части от мнимой получаем делением

$$\operatorname{tg}(M-M_0) = + \frac{n_0}{m_0}(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{r_0}{m_0} \sin(R_0-M_0)(t-t_0)^2 - \\ - \frac{1}{2} \frac{r_0}{m_0} \frac{n_0}{m_0} \cos(R_0-M_0)(t-t_0)^3 + \dots \quad (10.25)$$

После этого теоретические позиционные углы могут быть вычислены по порядку для всех нужных моментов времени.

2. Вычисление теоретического эффекта края

Лучшие из имеющихся в настоящее время профилей лунного края (например, Ваттса, Морская обсерватория США; еще не опубликованы) получены по фотографиям большого масштаба. Этим профилям соответствуют определенные значения либрации. В профилях Ваттса также необходимо считаться с рефракционными аномалиями, которые могут быть исключены только большим числом снимков, полученных в разное время и в разных местах. Если отвлечься от рефракционных влияний, то следует принять на основе исследований Ваттса, что положение любой точки края может быть найдено с точностью $\pm 0'',07$ в радиальном направлении (гл. IV, § 9).

Предпринятое Ваттсом описание рельефа Луны, из которого по заданной паре значений либраций можно было бы получить соответствующий лунный край, к 1955 г. еще не вышло из печати. Поэтому Аткинсон положил в основу своих вычислений два оригинальных профиля, взятых им у Ваттса и более всего подходящих к либрациям в момент затмения в Момбасе:

Профиль № 43, 1948 г. июнь 17,1; зап. край	$l = +5,23$	$b = -0,52$
Профиль № 275/6, 1950 г. авг. 2,4; вост. край	$l = +5,04$	$b = +0,48$
Либрации в Момбасе 1 нояб. 1948 г.	$l = +5,1$	$b = +0,12$

Ломаная кривая на рис. 69 представляет наблюдаемые эффекты края $P-M$ по пленкам №№ 1400—2100 (осредненным по 10 штук); видно замечательное согласие выглаженных профилей $P-M$ с теоретическим профилем E . Особого внимания заслуживает вызванный местной горной перспективой скачкообразный подъем на пленке № 1690 (от $-1''$ до $+0'',4$). При этом сле-

дует упомянуть, что вследствие разнородности сопоставленных величин нельзя ожидать полного сходства между ломаной кривой и топографическим профилем края.

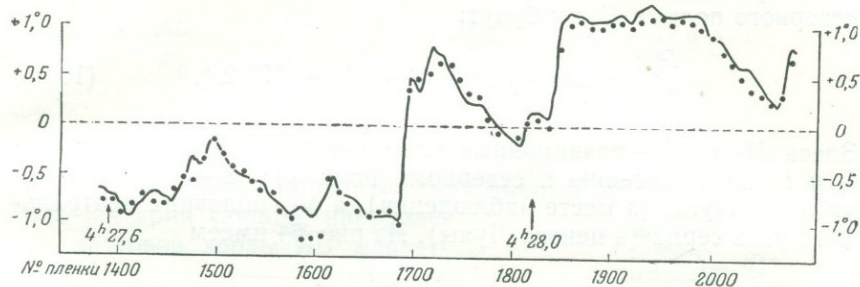


Рис. 69. Остатки эффекта края $P-M-E$ (после выравнивания).

Сплошная линия — теоретические эффекты края E ; точки — наблюдения $P-M$.

Чтобы вывести из топографического профиля края теоретический эффект края (рис. 70), нужно знать позиционный угол не искаженных концов серпа по отношению к северному полюсу

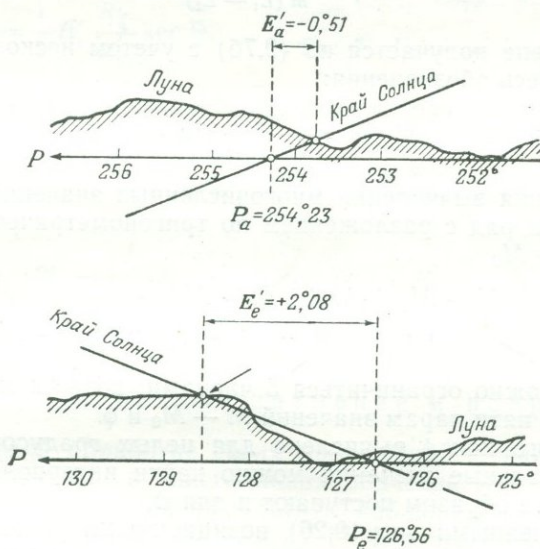


Рис. 70. Учет эффекта края E' .

P — позиционный угол по отношению к северному полюсу Луны.

Луны и угол серпа Θ для каждого обрабатываемого серпа. Абсциссы топографических профилей суть позиционные углы, отнесенные к северному полюсу Луны. Затем с помощью угла серпа

находят пересечение солнечного края с реальным краем Луны. Если предположить, что край Луны кругообразный, то позиционные углы неискаженных концов серпа (a и e) относительно северного полюса Луны будут:

$$\left. \begin{array}{l} P_a \\ P_e \end{array} \right\} = M_0 + 180^\circ - C + (M - M_0) \pm \psi. \quad (10.26)$$

Здесь M_0 и M — позиционные углы центров светил в моменты t_0 и t (по отношению к северному полюсу); C — позиционный угол оси Луны (в месте наблюдения), а ψ — половина центрального угла серпа (в центре Луны). Из рис. 64 имеем

$$\cos \psi = \frac{R'_C{}^2 - R'_\odot{}^2 + z^2}{2R'_C z}, \quad (10.27)$$

что, основываясь на уравнениях (9.4а) и (9.5а), можно написать и так

$$\cos \psi = \frac{m^2 - L_1 L_2}{m(L_1 - L_2)}. \quad (10.28)$$

Для угла серпа получается по (9.7б) с учетом несколько иного принятого здесь обозначения:

$$\sin \Theta = \frac{2m}{L_1 + L_2} \sin \psi. \quad (10.29)$$

Для упрощения вычисления многочисленных значений ψ Аткинсон применил ряд с разложением по тригонометрическим функциям от $M - M_0$

$$\psi = a_0 + a_1 \cos(M - M_0) + b_1 \sin(M - M_0) + a_2 \cos 2(M - M_0) + b_2 \sin 2(M - M_0), \quad (10.30)$$

в котором можно ограничиться 5 членами; коэффициенты определяются по пяти парам значений $M - M_0$ и ψ .

После того как ψ вычислено для целых градусов разности $M - M_0$, остальные значения можно найти интерполированием. Подобным же образом поступают и для Θ .

С вычисленными по (10.26) позиционными углами P_a и P_e обращаются к лунному профилю, либрации которого ближе всего подходят к либрациям наблюдаемого лунного края, и наносят на профиль край Солнца на основании вычисленных углов серпов. При этом следует помнить, что обычно абсциссы и ординаты профиля даны в разных масштабах. Абсциссы точек пересечения солнечного края с лунным профилем $P_a + E'_a$, $P_e + E'_e$ получаются с точностью $0^\circ,01$ (см. рис. 70).

Дальнейшая обработка показана на рис. 71. Прежде всего следует отнести поправки E' к центру Солнца. Имеем

$$\frac{AD}{R'_{\odot}} = E'_a = \frac{h \operatorname{ctg} \theta}{R'_{\odot}}, \quad \frac{AB}{R'_{\odot}} = E_a = \frac{h \operatorname{cosec} \theta}{R'_{\odot}},$$

$$\frac{E_a}{E'_a} = \frac{R'_{\odot}}{R'_{\zeta}} \sec \theta.$$

Если в конце серпа находится гора высотой h , вершина которой касается края Солнца, направление круговой хорды AC меняется на

$$\frac{1}{2} E_a = \frac{1}{2} E'_a \frac{R'_{\zeta}}{R'_{\odot}} \sec \theta.$$

Соответственно для другого конца серпа имеем

$$\frac{1}{2} E_e = \frac{1}{2} E'_e \frac{R'_{\zeta}}{R'_{\odot}} \sec \theta.$$

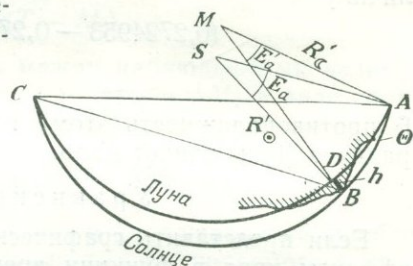


Рис. 71. Приведение к центру Солнца

Таким образом, теоретический эффект края равен

$$E = \frac{1}{2} \frac{R'_{\zeta}}{R'_{\odot}} \sec \theta (E'_a + E'_e). \quad (10.31)$$

На рис. 71

$$R'_{\zeta}/R'_{\odot} = 1,015; \quad \sec \theta = 1,002, \quad E'_a = -0^{\circ},51,$$

$$E'_e = +2^{\circ},08, \quad E = +0,5085 \cdot 1,57 = +0^{\circ},80.$$

Радиус Луны для затмений и покрытий

При первой обработке своих наблюдений Аткинсон использовал публикуемое в Ежегодниках значение лунного радиуса для солнечных затмений. Результаты наблюдения показали, что радиус преуменьшен более чем на $1''$. Без этого ординаты профилей $P-M$ и E не могли быть увязаны наилучшим образом; разрыв всего явственнее был в уже упомянутом реальном скачке на пленке № 1690.

Это отклонение основывается на том, что при наблюдениях затмений для других целей исходят из такого значения лунного радиуса, которое определяется из «средней долины», тогда как при выводе часового угла большее влияние оказывает «средняя гора». Поэтому и в литературе в зависимости от рода

применения даются различные значения среднего радиуса, например:

$$\text{Значение для затмений} \quad \sin R_{\zeta} = 0,2722740 \sin \pi_{\zeta}$$

$$\text{Эфемеридное значение} \quad \sin R_{\zeta} = 0,272481 \sin \pi_{\zeta}$$

$$\text{Значение для покрытий} \quad \sin R_{\zeta} = 0,2724953 \sin \pi_{\zeta}$$

При увеличении R_{ζ} увеличивается l_1 и уменьшается l_2 на величину

$$(0,2724953 - 0,2722740) \frac{\sec f}{1 - \frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin \pi_{\zeta}}}$$

В противоположность этому на угол конуса тени f изменение радиуса Луны влияет мало.

Уравнения ошибок

Если представить графически наблюденные и теоретические эффекты края в функции времени (или номера пленки), как это сделано на рис. 69, то задача выравнивания может быть описана следующим образом: наблюденное изображение $P - M$ располагается параллельно оси абсцисс, причем ордината в точке $t = t_0$ изменяется на искомый отрезок ΔM_0 и, кроме того, поворачивается вокруг точки $t = t_0$ на искомый угол $\Delta m_0/m_0$ так, чтобы сумма квадратов остаточных разностей была наименьшей.

Влияние систематических частей Δm_0 и ΔM_0 на наблюденные остаточные разности $\Delta M = (P - M) - E$ определяется производными (10.5) — (10.7). Однако мы здесь приведем другой вывод, в котором уравнения ошибок для позиционных углов и для видимого расстояния $m(\pi'_{\zeta} - \pi'_{\odot})$ центров светил получаются из одной и той же системы уравнений. Эти последние уравнения ошибок имеют практическое применение, если измерена ширина серпа (ср. гл. IX, § 7).

Отбрасывая члены с высшими степенями t , имеем по уравнению (10.23)

$$me^{iM} = m_1 e^{iM_1} + n_1 e^{iN_1} (t - t_1).$$

Если значения m_1 и M_1 , относящиеся к определенному моменту времени t_1 , изменяются на величины Δm_1 и ΔM_1 , то для вызванных этими изменениями величин Δm и ΔM (в переменный момент t) справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta m}{m} + i \Delta M\right) me^{iM} = & \left(\frac{\Delta m_1}{m_1} + i \Delta M_1\right) m_1 e^{iM_1} + \\ & + \left(\frac{\Delta n_1}{n_1} + i \Delta N_1\right) n_1 e^{iN_1} (t - t_1). \end{aligned}$$

Мы выбираем определенный момент времени вблизи середины затмения ($t_1 = t_0$). Так как Δn и ΔN во время наблюдений весьма близки к нулю, то из предыдущего уравнения следует

$$\Delta m + im \Delta M = \left(\frac{\Delta m_0}{m_0} + i \Delta M_0 \right) m_0 e^{-i(M-M_0)}.$$

Для коэффициентов уравнений ошибок достаточно иметь приближенные значения m и M , вычисляемые по следующим уравнениям ($T \approx M$):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(T - M_0) &= \frac{n_0}{m_0} (t - t_0), \\ m &= m_0 \sec(T - M_0). \end{aligned} \quad (10.32)$$

При этом получаем зависимость между наблюдаемыми величинами ΔM и систематическими частями Δm_0 и ΔM_0 в виде соотношения

$$\frac{\Delta m}{m_0} + i \sec(T - M_0) \Delta M = \left(\frac{\Delta m_0}{m_0} + i \Delta M_0 \right) e^{-i(T-M_0)}.$$

Действительная часть этого уравнения и дает уравнение ошибок для остаточных величин в расстоянии (не наблюдаемого и привлеченного сюда ради систематичности)

$$\Delta m = \Delta m_0 \cos(T - M_0) + \Delta M_0 m_0 \sin(T - M_0). \quad (10.33)$$

Мнимая часть дает уравнение ошибок для остаточных величин в позиционном угле:

$$\Delta M = (P - M) - E = \Delta M_0 \cos^2(T - M_0) - \Delta m_0 \frac{\sin 2(T - M_0)}{2m_0}; \quad (10.34)$$

$(P - M) - E$ есть свободный член, а Δm_0 и ΔM_0 суть неизвестные. Если последние найдены, по ним находятся линейные смещения в фундаментальной плоскости

$$\begin{aligned} \Delta(x_0 - \xi_0) &= (y_0 - \eta_0) \Delta M_0 + (x_0 - \xi_0) \frac{\Delta m_0}{m_0}, \\ \Delta(y_0 - \eta_0) &= -(x_0 - \xi_0) \Delta M_0 + (y_0 - \eta_0) \frac{\Delta m_0}{m_0}. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Можно было бы получить оба неизвестных из уравнения (10.34) и без строгого выравнивания. При этом ΔM_0 следует находить по разностям $(P - M) - E$ вблизи середины затмения, где Δm_0 не влияет на ΔM . Пара значений ΔM_1 и ΔM_2 , симметричных относительно середины затмения, дает

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} = \frac{\Delta M_1 - \Delta M_2}{\sin 2(M_2 - M_0)},$$

причем $M_2 - M_0 = -(M_1 - M_0)$ должно быть как можно ближе к 45° . Это рассуждение показывает, что для хорошего определения $\Delta m_0/m_0$ требуется большой угол вращения. Обычно же,

при многочисленных удачных наблюдениях, предпочтительнее строгое выравнивание.

Иллюстрацией к рассмотренной теории может служить выдержка из вычислений для Момбасы 1 ноября 1948 г.

Пример

$$\varphi = -4^{\circ},0702 \quad \lambda = -39^{\circ},680 \quad H = 14,7 \text{ м}$$

$$\alpha = 1/297 \quad \rho \cos \varphi' = 0,9974972 \quad \rho \sin \varphi' = -0,0705028$$

1-е приближение: $t_1 = 4^{\text{h}}28^{\text{m}},0$ вс. вр.

$$\mu = 251^{\circ},0884 \quad \mu' = 4,36378 \cdot 10^{-3}$$

$$\sin d = -0,2485986 \quad d' = -3,73 \cdot 10^{-6}$$

$$\cos d = +0,9686066$$

$$l_1 = +0,5441576 + 2,355 \cdot 10^{-6}(t - t_1)$$

$$l_2 = -0,0021925 + 2,355 \cdot 10^{-6}(t - t_1)$$

$$\operatorname{tg} f_1 = +0,0047120$$

$$\operatorname{tg} f_2 = +0,0046885$$

$$x - \xi = +0,0096756 + 0,0070214(t - t_1) -$$

$$- 8,86 \cdot 10^{-6}(t - t_1)^2 + 4,9 \cdot 10^{-9}(t - t_1)^3$$

$$y - \eta = +0,0125382 - 0,0049001(t - t_1) +$$

$$+ 0,85 \cdot 10^{-6}(t - t_1)^2 + 3,2 \cdot 10^{-9}(t - t_1)^3$$

Отсюда $t_0 - t_1 = -0^{\text{m}},08977$.

2-е приближение: $t_0 = 4^{\text{h}}27^{\text{m}},91023$ вс. вр.

$$x_0 - \xi_0 = +0,0090378 + 0,0070230(t - t_0) + \dots$$

$$y_0 - \eta_0 = +0,0129531 - 0,0049002(t - t_0) + \dots \quad \text{далее так же, как выше.}$$

Отсюда получаются

$$m_0 = 0,0157945 \quad M_0 = 34^{\circ},905 \quad C = +17^{\circ},194$$

$$n_0 = 0,0085636 \quad N_0 = 124^{\circ},905$$

Вычисление M

$$\operatorname{tg}(M - M_0) = +0,542188(t - t_0) - 4,9 \cdot 10^{-4}(t - t_0)^2 +$$

$$+ 1,5 \cdot 10^{-4}(t - t_0)^3.$$

Вычисление T

$$\operatorname{tg}(T - M_0) = +0,542188(t - t_0)$$

Вычисление ψ

$$\psi = 83^{\circ},099 - 7^{\circ},642 \cos(M - M_0) - 0^{\circ},093 \sin(M - M_0) -$$

$$- 1^{\circ},287 \cos 2(M - M_0) - 0^{\circ},010 \sin(M - M_0).$$

Вычисление Θ

$$\sin \Theta = +0,19113 - 0,21010 \cos(M - M_0) + 0,07540 \cos^2(M - M_0).$$

§ 6. Точность и сравнение результатов

Все 3100 наблюдений прежде всего осреднялись по 10 и при выравнивании еще объединялись в 31 среднее значение равного веса.

Нормальные уравнения

$$22,683 \Delta M_0 + 1,043 \frac{\Delta m_0}{m_0} = -0,03148,$$

$$1,043 \Delta M_0 + 3,550 \frac{\Delta m_0}{m_0} = -0,00270.$$

Неизвестные

$$\Delta M_0 = -0,001371 = -0^\circ,0786 \pm 175'',$$

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} = -0,000357 \pm 770,$$

$$\Delta(x_0 - \xi_0) = -210 \cdot 10^{-7} (\pm 80) = -134 \text{ м} (\pm 51 \text{ м}),$$

$$\Delta(y_0 - \eta_0) = +78 \cdot 10^{-7} (\pm 104) = +50 \text{ м} (\pm 66 \text{ м}).$$

3-е приближение: $t_0 = 4^{\text{h}}27^{\text{m}},91277 \pm 0^{\text{s}},034$ вс. вр.

$$M_0 = 34^\circ,905,$$

$$N_0 = 124^\circ,905.$$

Прежде всего следует отметить относительно небольшие средние ошибки наблюдаемых разностей координат, равные ± 51 м для $x - \xi$ и ± 66 м для $y - \eta$.

Средняя ошибка ΔM_0 , равная $\pm 0^\circ,0175 = \pm 1,05$, говорит о высокой точности, с которой этот метод позволяет определить путем выравнивания позиционный угол в момент, близкий к середине затмения.

Относительная ошибка m_0 , которая, как сказано выше, найдена равной 0,000700, дает после умножения на n_0/m_0 точность, с которой было определено изменение $\text{tg}(M - M_0)$ в единицу времени:

$$0,542 \cdot 0,000770 = \pm 0,000418.$$

Обусловленное этим изменение позиционного угла M , относящегося к моменту t , равно

$$\Delta(M - M_0) = 0,000418t \cos^2(M - M_0) = \pm 1',4t \cos^2(M - M_0).$$

Учитывая ошибку M_0 , получаем, что позиционный угол получен выравниванием в начале наблюдения ($t = -1^{\text{m}},6$) с точностью $\pm 1',7$, а в конце ($t = \pm 1^{\text{m}},3$) — с точностью $\pm 1',6$.

¹⁾ В оригинальной работе приведены вероятные ошибки. Мы заменили их (умножением на 1,48) средними ошибками,

Средняя ошибка $t_0 (\pm 0,034 \text{ сек})$ показывает, что было бы бесполезно повышать точность определения времени более, чем до $\pm 0,005 \text{ сек}$. Из постоянства M_0 и N_0 во втором и третьем приближениях следует, что позиционный угол M_0 нечувствителен к малым изменениям времени вблизи середины затмения.

Следует еще упомянуть, что ошибка величины $\Delta m_0/m_0$ также характеризует точность, с которой определяется относительное положение центров светил ($\chi_0 \approx 1$), потому что для $\Delta \chi/\chi_0$ действительна та же ошибка. Для нее получаем $0,00077 \cdot 60'' = \pm 0,046$. Кроме того, при $v = 0'',5 \text{ сек}^{-1}$ и $m_{t_0} = \pm 0,034 \text{ сек}$ следует заключить, что расстояние между Солнцем и Луной по направлению движения можно определить с точностью до $0'',017$.

Впрочем отношение весов ΔM_0 и $\Delta m_0/m_0$ при этом методе практически постоянно. Интегрирование от 0 до $\pi/4$ коэффициентов нормальных уравнений, составленных из тригонометрических функций, подтверждает это. При этом почти не имеет значения то, что область немного меньше, чем $\pi/4$. Сумма произведений $[ab]$, однако, не нуль, как это должно бы быть при равных расстояниях; последнее следует отнести за счет рельефа лунного края.

Таковы ошибки для отдельной станции, содержащие в себе как геодезическую часть, так и астрономическую. Для относительной геодезической задачи дальнейшие источники систематических ошибок отпадают вследствие однородности аппаратуры и обработки.

Оба геометрических метода (измерение контактов и наблюдение вращения) отличаются друг от друга чисто внешне положением места наблюдения (вблизи центральной линии и на расстоянии до 100 км от последней, вне зоны полного затмения), а также продолжительностью наблюдений. В первом методе последняя составляет 0,5—1,0 мин до и после местного наступления контакта. Промежуток времени между контактами и серединой затмения, составляющий большей частью несколько минут, никак не может быть использован для наблюдений. Напротив, при наблюдениях вращения серпа весь промежуток времени, симметричный относительно середины затмения, может быть использован для непрерывных наблюдений.

Для суждения о точности в настоящее время могут служить лишь указания на то, в какой мере удалось избежать систематических ошибок. Чисто наблюдательная точность, по-видимому, не окажется различной для обоих методов. Однако метод серпов следует считать более точным, ибо

- 1) неизбежные ошибки наблюдения наименьшим образом влияют на окончательный результат,
- 2) обусловленные рельефом лунного края систематические ошибки почти полностью исключаются.

Если бы было возможно наблюдать расстояния с такой же точностью, как позиционные углы, то для тех же неизвестных можно было бы получить дальнейшие уравнения, обремененные другими источниками ошибок.

В заключение напомним здесь, что как внутри зоны полного затмения, так и вблизи ее края представляются благоприятные возможности для наблюдений. При этом продолжительность полной фазы очень чувствительна к изменению места наблюдения в направлении, перпендикулярном движению тени. По предложению Грэнстранда [4], эта возможность будет практически использована с помощью измерений интенсивности света (ср. гл. XI).

ЛИТЕРАТУРА

1. Atkinson R. d'E., Cinematography of partial Solar Eclipses, Month. Not., **113**, 18—33 (1953).
2. Atkinson R. d'E., Pope J. D., Observations at the Eclipses of 1948, Nov. 1 at Mombasa, Month. Not., **113**, 633—646 (1953).
3. Atkinson R. d'E., Murray C. A., Cinematography of partial Solar Eclipses, part III, Analysis of the Observations made at Mombasa 1948, Nov. 1, Month. Not., **115**, 60—100 (1955).
4. Grönstrand H. O., The total Eclipse of the Sun on 1954, June 30, Prediction for Scandinavia, Obs. Ann. Stockholm, 1950, S. 20.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ КОНТАКТОВ ЗАТМЕНИЯ ФОТОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

§ 1. Введение

Еще в 1906 г. Юлиус [1] предложил измерять полную интенсивность света солнечного серпа незадолго до и после обоих внутренних контактов и по величине изменения интенсивности

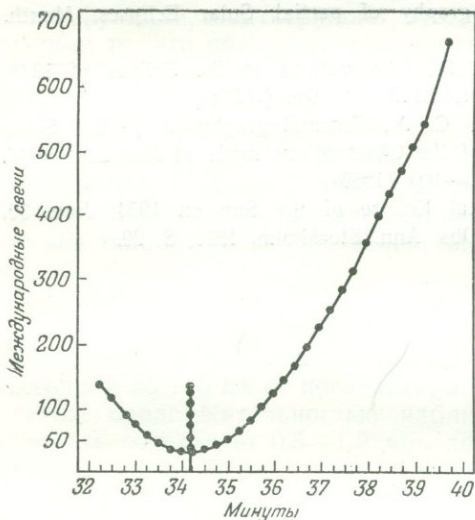


рис. 72. Кривая яркости Ричардса, 1932 г.

со временем определить момент полного затмения. Рихард [2] во время солнечного затмения 1932 г. использовал для измерения интенсивностей фотоэлемент и получил с простейшими вспомогательными средствами момент середины полной фазы с точностью $\pm 0,45$ сек. Полученная им кривая интенсивности приведена на рис. 72. Неблагоприятные обстоятельства наблюдения полного солнечного затмения 1947 г., когда сильная облачность препятствовала наблюдениям на многих пунктах, не помешали Плацеку, Майцегюи и Гавиоле [3] применить внефокальные фотометрические методы и получить моменты 2-го и 3-го контактов при облачном небе с точностью, достаточной для геодезических целей. При так называемых внефокальных методах либо светочувствительный слой фотоэлемента или пленки непосредственно направляется на Солнце, либо при помощи короткофокусного объектива больший участок неба отражается на светочувствительный слой. В противоположность этому при фокальных методах с помощью длиннофокусной оптики в плоскости светочувствительного слоя строится резкое изображение

солнечного серпа. Некоторые установки конструируются так, что в зависимости от облачности неба их можно использовать для наблюдения и фокальным и внефокальным методами. С 1954 г. применяется комбинированная методика независимо от облачности. Так, немецкая экспедиция 1954 г. в Южную Африку одновременно использовала два фотоэлектрических фотометра. Объектив одного из них при поле зрения 10° строил изображение Солнца и окружающего его участка неба на катоде вакуумного фотоэлемента, в то время как второй инструмент имел поле зрения 165° . С помощью широкоугольного фотометра сравнивалась яркость двух равных участков неба, граница раздела которых была перпендикулярна к направлению движения Луны. Измеряемая разность регистрировалась на самописце одновременно с величинами, измеренными первым фотометром. В установке Торройи [4] на равномерно движущейся пленке строится как фокальное изображение серпа с помощью длиннофокусной оптики, так и внефокальное с помощью короткофокусной. Время минимума определяется фотометрически по следам почернения, получающихся вследствие движения пленки.

Кроме этих методов, когда либо непосредственно фотоэлектрически регистрируется общая интенсивность света, либо, наоборот, фотометрически определяется по почернению следа от

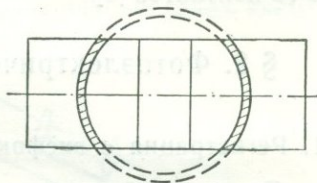


Рис. 73. Диафрагма для кольцеобразного затмения

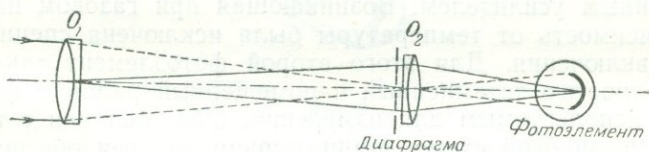


Рис. 74. Оптическое устройство для закрывания части солнечного кольца.

изображения, Панай [5] использовал косвенный метод, применив объективную фотометрию к кинематографическим снимкам солнечного серпа. Измерения производились от снимка к снимку по всей ширине серпа вдоль выбранного радиуса.

Фокальный фотометрический метод может применяться при безоблачном небе и при кольцеобразных солнечных затмениях. Для большого выделения сглаженного минимума в оптическую схему вводится диафрагма, закрывающая мало изменяющиеся части солнечного кольца, так что измеряются интенсивности быстро возникающих и исчезающих секторов кольца (рис. 73 и 74).

Применение фотометрических методов осложняется тем, что поверхность Солнца около края не имеет одинаковой яркости, и, кроме того, тем, что изрезанный край Луны нарушает правильность изменения светового потока. Влияние этих причин весьма значительно и к тому же очень различно для 2-го и 3-го контактов [6].

§ 2. Фотоэлектрические измерения интенсивности света

1. Регистрация с внефокальным фотометром

Эти простейшие фотометрические измерения состоят в регистрации интенсивности света с помощью фотоэлемента, направленного на Солнце за период времени, начиная с 2—3 мин до 2-го и столько же минут после 3-го контакта.

В качестве примера изложим описанный Шауером [7] метод, который был применен при затмении 1952 г. в Африке университетом Джоржтауна совместно с военно-воздушными силами США. Поскольку оборудование для шести станций необходимо было изготовить за сравнительно короткое время, были использованы имеющиеся в продаже приборы. Каждая установка состояла из четырех объединенных блоков: фотоэлектрическая насадка, усилитель, приемник сигналов времени и самописец. Для измерения использовался газонаполненный фотоэлемент, поскольку вакуумный фотоэлемент не мог быть использован с выбранным усилителем. Возникающая при газовом наполнении зависимость от температуры была исключена специальной схемой включения. Для этого второй фотоэлемент такого же типа, полностью затемненный и помещенный рядом с фотоэлементом, используется для измерений, был соединен с последним по мостиковой схеме. Миниатюрная батарея обеспечивала напряжение на фотоэлементах и питала мостиковую схему. В предположении, что изменение температуры одинаково влияет на оба фотоэлемента, равенство токов в мостике может быть нарушено лишь в случае падения света на измерительный фотоэлемент. Для защиты фотоэлемента от рассеянного света был применен узкий и длинный тубус, который ограничивал поле зрения до $40'$. В качестве азимутально-экваториальной установки для фотоэлектрической головки был использован слегка измененный астрокомпас, который от руки поворачивался вслед за Солнцем по нитяному визиру (рис. 75). Усилитель имел пять каскадов усиления, причем каждый давал десятикратное усиление. Отношение $1:10^5$ позволяло регистрировать интенсивности в интервале от полного потока от Солнца до нуля на одной из двух 40-мм полос регистрационной ленты. На другой полосе

двойной самописец записывал сигналы времени, которые поступали от приемника сигналов времени. Регулируя усилитель, добиваются того, чтобы перо, регистрирующее интенсивность света, стояло на нулевой линии. Если эта установка на нуль при подключении моста с полностью затемненным измеряющим фотоэлементом не сохраняется, то в небольших пределах схему

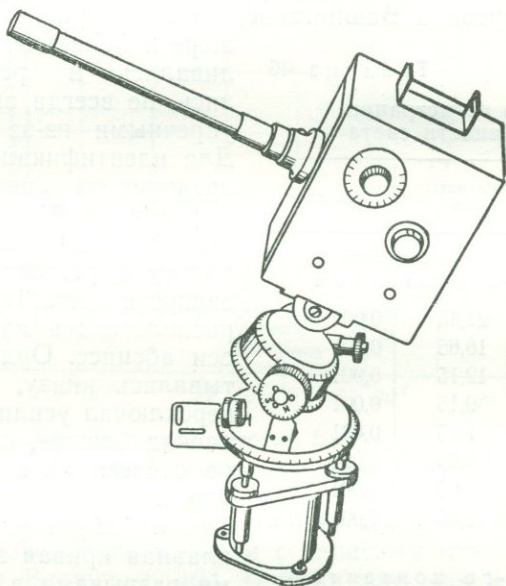


Рис. 75. Астрокомпас с фотоэлектрической приставкой.

можно отрегулировать потенциометром, включенным в одну из ветвей моста. Контроль нуля путем затемнения измеряющего фотоэлемента повторяется в течение всего затмения.

Во время затмения 25 февраля 1952 г. шесть однотипных станций были распределены в полосе от Западной Африки до Персидского залива. В нижеследующем примере приводятся результаты для станций Бангуи и Хартум. Специальная группа определила географические координаты пунктов. Для предвычисления были использованы приведенные American Ephemeris формулы, которые были преобразованы для вычисления на автоматических счетных машинах. С географическими координатами

Бангуи: $\varphi = 4^{\circ} 22' 23'',8 N$; $\lambda = -18^{\circ} 34' 22'',9$; $H = 1347$ фут,
 Хартум: $\varphi = 15^{\circ} 33' 43'',1 N$; $\lambda = -32^{\circ} 34' 05'',3$; $H = 1247$ фут

были получены следующие предвычисленные значения:

Середина полной фазы	Бангун	$8^h 22^m 02^s, 208$,
	Хартум	$9^h 10^m 45^s, 180$;
Время пробега Бангун — Хартум		$2923^s, 572$;
Средняя скорость тени		$1515,030$ миль/час.

При обработке было обнаружено, что секундные сигналы Бюро стандартов в Вашингтоне, которые принимались в Танжере и Мюнхене, а затем усиливались и ретранслировались, не всегда выходили безупречными из-за наложения.

Таблица 46

Пример регистрации интенсивности света

Момент	Ординаты, мм	Усиление
Перед 2-м контактом		
$8^h 20^m 37^s, 0$	21,45	0,001
37,5	16,65	0,001
38,0	12,15	0,001
38,5	9,15	0,001
39,0	7,25	0,001
39,5	6,35	0,001
40,0	6,05	0,001
40,5	6,05	0,001 и т. д.

После 3-го контакта

$8^h 23^m 23^s, 0$	6,40	0,001
23,5	6,75	0,001
24,0	7,40	0,001
24,5	8,90	0,001
25,0	11,00	0,001
25,5	13,80	0,001
26,0	17,9	0,001
26,5	22,2	0,001 и т. д.

Для идентификации пришлось предпринять специальные измерения, чтобы затем от руки перенести отметки времени на полосу с регистрацией интенсивности света. Нулевая линия располагалась на 5 мм выше оси абсцисс. Ординаты отсчитывались книзу, наблюдатель переключал усилитель на один каскад больше, как только перо отсчета интенсивности приближалось к нулевой линии. Таким образом, получалась плавная кривая записи с двумя разрывами в моменты переключения для периода времени до 2-го и после 3-го контактов. Если представить многие метры записи на регистрационной ленте в другом масштабе по оси времени, т. е. на нескольких сантиметрах, то получится следующее наглядное изображение изменения интенсивности (рис. 76). Контроль нуля легко отождествить. При обработке на регистрационной ленте (кусочек ее изображен на рис. 77) были измерены ординаты с точностью до 0,05 мм и затем табулированы. В табл. 46 приведены отсчеты на крутых участках кривой.

Все дальнейшие выводы опирались на табулированные величины. Так был получен момент середины полной фазы путем осреднения моментов для одинаковых мест на нисходящей и восходящей ветвях кривой (табл. 47). Вследствие различных

ошибок моменты, определенные по различным точкам, показывают некоторый ход. Среднее исправлялось за время распро-

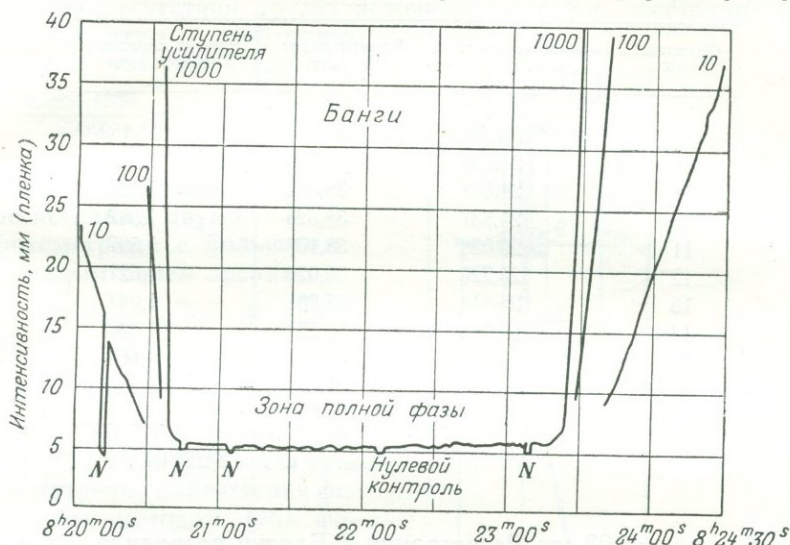


Рис. 76. Кривая яркости, Банги, 1952 г.

Ось времени уменьшена в отношении 1 : 160.

странения сигнала ($+0^s.041$) и параллакс пера ($-0^s.005$). Определение производилось также и с записями при других степенях усиления. Величины табл. 47 были получены в Бангуи с регистрацией при усилении 1000.

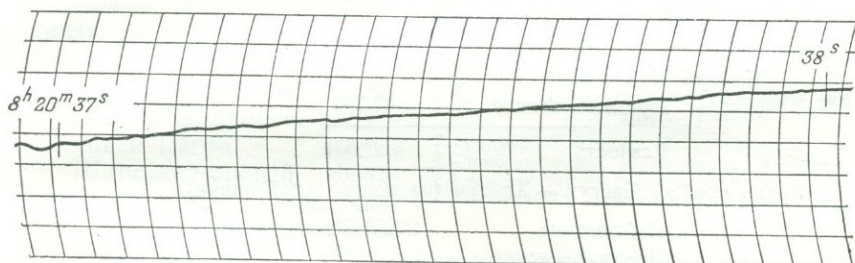


Рис. 77. Кривая регистрации, Банги, 1952 г.

Ординаты отсчитываются от верхнего края.

Вследствие помех запись с усилением 100 и 1000 в Хартуме не получилась, так что пришлось использовать записи в Хартуме и Бангуи лишь с усилением 10. Внутренняя точность определения момента с усилением 10 составляла в Хартуме $\pm 0,04$ сек.

Пример вывода момента середины полной фазы

Ордината, мм	Момент после 3-го конт.	Момент перед 2-м конт.	Момент середины полной фазы
7,00	8 ^h 23 ^m 23 ^s ,763	8 ^h 20 ^m 39 ^s ,141	8 ^h 22 ^m 01 ^s ,452
8	24,239	38,759	1,499
9	24,558	38,542	1,550
10	24,837	38,328	1,582
11	25,028	38,166	1,597
12	25,223	38,020	1,621
13	25,414	37,881	1,647
14	25,526	37,751	1,638
15	25,693	37,636	1,664
16,00	25,853	37,534	1,693
Среднее . . .			8 ^h 22 ^m 01 ^s ,594

а в Бангуи $\pm 0,08$ сек. Регистрация в Бангуи позволила оценить точность определения момента при усилениях 100 и 1000.

Вероятная ошибка: $\pm 0,08$ сек при усилении 10
 $\pm 0,03$ сек » » 100
 $\pm 0,013$ сек » » 1000

Середина полной фазы

Бангуи: Наблюдение	8 ^h 22 ^m 02 ^s ,244
Предвычисление	02,208
Разность	+0 ^s ,036
Хартум: Наблюдение	9 ^h 10 ^m 47 ^s ,814
Предвычисление	45,780
Разность	+2 ^s ,034

Время пробега Бангуи — Хартум (на центральной линии)

Наблюдение	2925 ^s ,570
Предвычисление	2923,572
Разность	+1 ^s ,998

Средняя скорость тени (между Бангуи и Хартумом)

Наблюдение	$Z/2925s,570 = 1513,995$ миль/час
Предвычисление	$Z/2923,572 = 1515,030$ »
Разность	-1,035 миль/час

Здесь Z — длина вдоль центральной линии равняется 1230,361 миль (получена по определениям географических координат).

При отсутствии других источников ошибок расстояние Бангуи — Хартум необходимо поэтому увеличить на

$$\frac{1,998 \cdot 1230}{2959} = 0,841 \text{ миль.}$$

2. Одновременная регистрация двумя фотометрами с большим и малым полем зрения

На станции Керрипфель по программе наблюдений солнечного затмения 1954 г. экспедицией Франкфуртского института прикладной геодезии были предусмотрены наблюдения фотометрическим методом. Оба фотометра — широкоугольный и солнечный — были подключены по одинаковой схеме. Из четырех перьев самописца 1-е и 2-е были подключены к фотометрам, 3-е отмечало моменты экспозиции кинокамеры, а 4-е записывало секундные контакты кварцевых часов, а также (с обратным знаком и удвоенной амплитудой) секундные импульсы радиостанцией Регби.

Широкоугольный фотометр позволял при облачности регистрировать второй и третий контакты путем сравнения яркости двух равных участков неба справа и слева, граница раздела которых перпендикулярна направлению движения тени. Облачный покров играет при этом роль ширмы, на которую проектируется тень от Луны. Конструкция широкоугольного фотометра показана на рис. 78. Горизонтальное выпуклое зеркало с полем зрения 165° строит мнимое изображение. Находящаяся над ним собирающая линза создает действительное изображение, которое

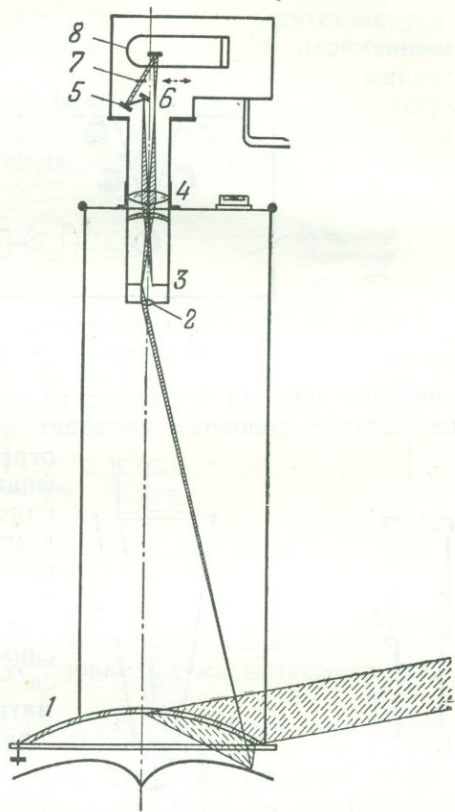


Рис. 78. Схема широкоугольного фотометра.

- 1 — выпуклое зеркало, 2 — собирающая линза, 3 — промежуточное изображение, 4 — объектив, 5 — вспомогательное зеркало, 6 — щель фотометра, 7 — качающаяся диффрагма, 8 — фотоумножитель.

с помощью объектива отбрасывается на разделяющее зеркало фотометра. Половина светового потока проходит мимо разде-

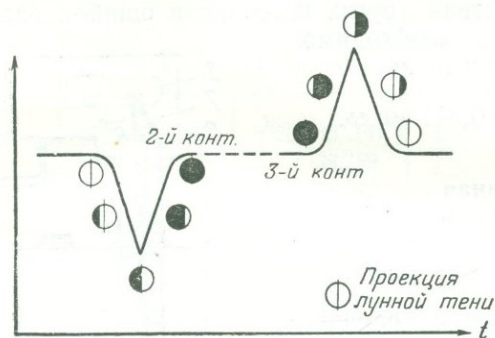


Рис. 79. Схематический процесс регистрации широкоугольным фотометром.

ляющего зеркала и падает на катод фотоумножителя, тогда как вторая половина попадает на катод после двухкратного отражения. Качающаяся диафрагма направляет луч то по одному, то по другому пути. Таким образом, световой ток преобразуется в ряд импульсов, которые после усиления разделяются с помощью переключателя, синхронизованного с качающейся диафрагмой.

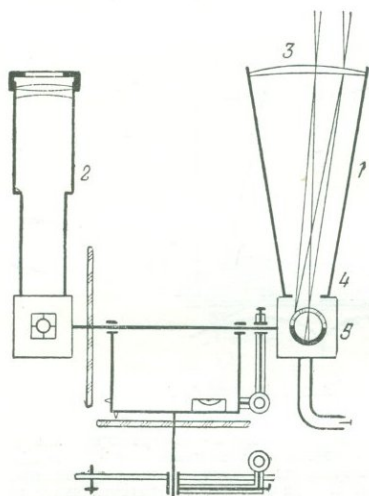


Рис. 80. Схема солнечного фотометра.

1 — труба фотометра, 2 — ведущая труба, 3 — линза, 4 — диафрагма поля зрения, 5 — вакуумная камера.

При этом моменты максимальных отклонений не зависят от облачности и колебаний в электрической схеме прибора. Все эти причины могут вызвать только изменение амплитуды.

Широкоугольный фотометр является прибором, который можно использовать при плохой погоде. При ясном небе у него нет преимуществ, поскольку необходимо с помощью вспомогательных средств имитировать диффузный облачный покров. Чтобы избежать этого, используют солнечный фотометр, приспособленный для ясного неба, который может регистрировать слабые потемнения. Положительная линза (рис. 80) строит изо-

бражение Солнца и окружающего его участка неба в плоскости диафрагмы, которая ограничивает поле зрения до 10° . Вакуумный фотоэлемент устанавливается на таком расстоянии от диафрагмы, чтобы был освещен весь катод. Ввиду отсутствия усилителя постоянного тока фотоэлемент питается переменным током 90 в и 100 гц. Возникающие на выходе полуволны, амплитуда которых зависит от светового тока, подвергаются двухступенчатому усилению и после трехступенчатого деления частоты поступают на 2-е перо самописца. Для наведения на Солнце

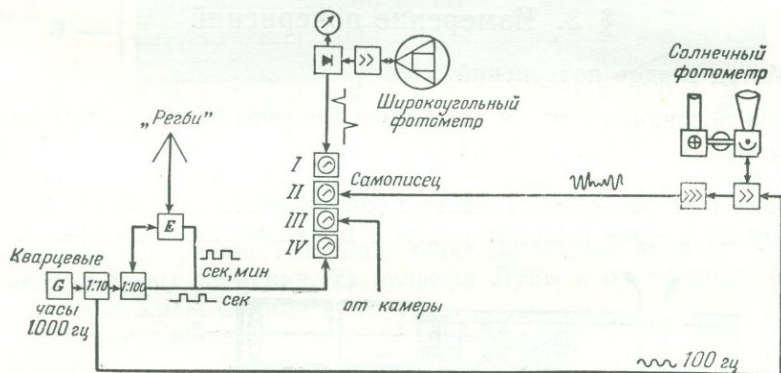


Рис. 81. Общая схема станции.

фотометр вместе с параллельно расположенным искателем устанавливается на азимутальной установке. Схема включения прибора показана на рис. 81.

При обработке наблюдений с солнечным фотометром амплитуды измерялись на стереокомпараторе. Определение моментов контактов и середины полной фазы производится аналогично тому, как описано в приведенном выше примере. Симметрия кривой интенсивностей может быть существенно улучшена путем учета неправильностей лунного края по Хайну.

3. Одновременная регистрация двумя фотометрами с одинаковым полем зрения

Дальнейшее увеличение возможностей дифференциальных измерений было предложено Зандигом [12]. Два солнечных фотометра типа описанного выше должны быть расположены вдоль направления движения тени на расстоянии нескольких десятков метров друг от друга. Регистрация разностей световых потоков позволяет более точно определить середину полной фазы, чем простое измерение интенсивностей. Во время затмения производная очень пологой кривой интенсивностей понижается до

нуля в последние полторы секунды перед 2-м контактом и поднимается таким же образом после 3-го контакта. В [12] приведены ожидаемые разности освещенностей для ясного и для облачного неба. Поскольку поверхностная яркость при облачности очень незначительна, необходимо использовать большие относительные отверстия. Для пробы был использован конденсор диаметром 106 мм и фокусным расстоянием 60 мм. В этом случае на катод отображался участок неба в 20 кв. град.

§ 3. Измерение почернений

1. Метод следов почернений

На основании опытов Торройи и Бонгеры [9] при затемнении 25 февраля 1952 г. Торройа [4] предложил специальную камеру для наблюдения солнечного затмения 30 июня 1954 г. 35-мм киноплёнка движется с постоянной скоростью 72 мм/сек. Поэтому на плёнке выходят следы с изменяющимся почернением,

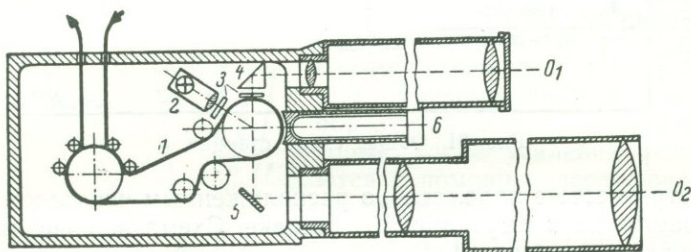


Рис. 82. Камера Торройи.

1—35-мм пленка, 2—эталонный источник света, 3—ступенчатые бленды, 4—поворачивающая призма, 5—поворачивающее зеркало, 6—лампы-вспышки.

а не изображения. Как показано на рис. 82, источник сравнения освещает диафрагму с тремя окошками одинаковой ширины, но ступенчатыми по длине. Таким образом, на движущейся пленке с краю получают три полосы эталонных почернений (1) (рис. 83). Остальная часть пленки используется для регистрации двумя методами изменений освещенности в ходе затмения. При первом методе свет от Солнца с помощью короткофокусного объектива O_1 ($f = 29$ см) проектируется через призму внефокусально на трехступенчатую диафрагму, имеющую такие же размеры, что и диафрагма перед источником сравнения. Почернения получающихся трех полос (2) (рис. 83) могут быть фотометрически привязаны к полосам сравнения. Остающиеся 15 мм ширины пленки служат для фокальной фотометрической регистрации солнечного серпа, резкое изображение которого строит-

ся на движущейся пленке длиннофокусным объективом O_2 ($f = 163$ см). Два целостатных зеркала перед объективами удерживают изображение серпа в рамках поля зрения так, чтобы хорда серпа располагалась перпендикулярно движению пленки. Если предположить, что край Солнца представляет собой окруж-

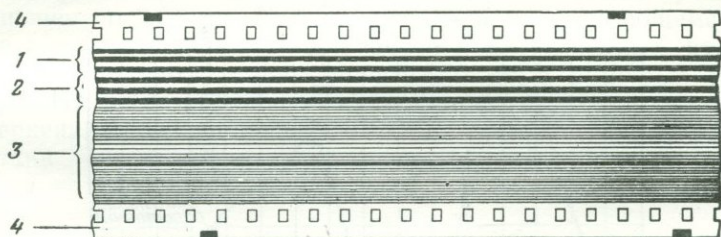


Рис. 83. Пленка с полосами почернения.

1 — полосы сравнения, 2 — внефокальная регистрация, 3 — фокальная регистрация, 4 — марки времени.

ность, то почернение в данной точке на пленке является функцией: 1) фазы затмения, 2) рельефа Луны и 3) распределения яркости на краю Солнца (рис. 84).

Для установления временной шкалы при фотометрической регистрации предусмотрены две лампы вспышки, которые проектируют отметки времени через соответствующие диафрагмы на внешние края пленки. Лампы могут работать от сигналов времени двух радиостанций, либо в случае необходимости от одной

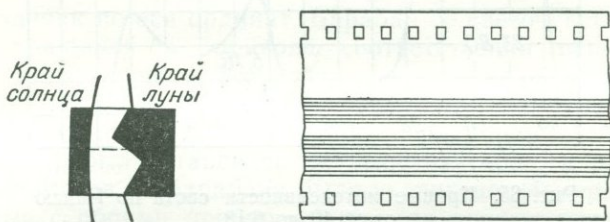


Рис. 84. Схема фокальной регистрации.

станции и контактов часов. Во время затмения 1954 г. в Швеции удовлетворялись записью секундных сигналов, передаваемых радиостанцией Регби. Результаты наблюдений с описанным прибором до сих пор не опубликованы. Поскольку в Швеции в этом же пункте затмение 1954 г. наблюдали еще три экспедиции (норвежская методом Линдблада — Кристенсона, шведская методом Бонсдорфа и экспедиция США методом, описанным Шауером), то полученные результаты дадут возможность сравнить использованные методы.

2. Фотометрия изображений серпов

Панай [5] использовал снимки серпа, полученные кинематографическим путем во время кольцеобразного затмения 1948 г. в Бирме и Японии, для измерения почернений вдоль некоторого

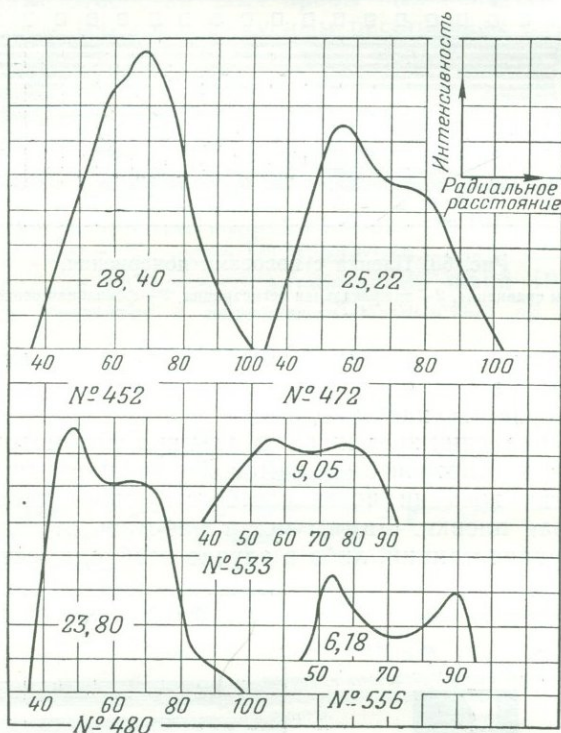


Рис. 85. Кривые интенсивности света по Панаяу от 28,40 до 6,18.

Площадь кривой определяет общую интенсивность.

радиуса, определенного относительно «четок Бейли». Для снимков использовалась съемочная камера для звукового кино с установленным перед ней целостатом. Звуковая дорожка использовалась для записи секундных ударов хронометра и сигналов времени Бюро стандартов в Вашингтоне, ретранслированных радиостанцией в Гонолулу. Для лучшей привязки отметок моментов экспозиций к сигналам времени прием сигналов производился незадолго до начала затмения. Панай использовал снимки, полученные на трех наземных станциях, а также с самолета,

летевшего на высоте 8000 м вдоль центральной линии затмения. Измерение почернений производилось на двух микрофотометрах различной конструкции. Оба прибора пришлось переделать так, что ширина серпа достигала всего 0,1 мм. У визуального микрофотометра Фабри и Бюиссона поперечник светового пучка был уменьшен до 0,01 мм. Установка пленки на вращающемся столике позволила производить наведения на выбранном радиусе; перемещение вдоль длины производилось с помощью микрометра. На регистрирующем микрофотометре Молля измерение почернений производилось с помощью термоэлемента. При регистрации тепловой ток, поворачивая зеркальце гальванометра,

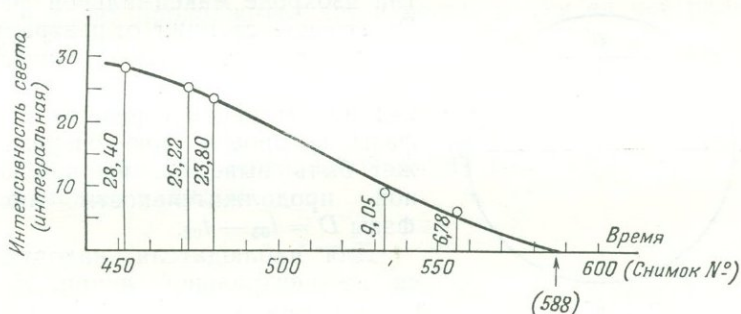


Рис. 86. Функция «интенсивность — время».

смещал зайчик по оси ординат. Барабан со светочувствительной бумагой вращался от привода соответственно перемещению пленки с изображением. Увеличенное изображение серпа проектировалось на щель перед термоэлементом. Ширина и длина щели были изменены в соответствии с размером изображений. Гальванометр был установлен на амортизаторах, а расстояние от гальванометра до барабана было увеличено. Измерения, произведенные с обоими приборами, давали кривые почернения в функции расстояний вдоль радиуса. Кривые интенсивностей были получены путем учета характеристической кривой. Рис. 85 показывает для начала и конца одной серии снимков некоторые кривые, полученные для определенного радиуса по измерениям на микрофотометре Фабри. Общая интенсивность была получена путем графического интегрирования с помощью планиметра. Она тоже приводится на рис. 85. Как показывает рис. 86, минимум приходится на снимок № 588. Поскольку всемирное время каждого снимка известно, можно определить момент контакта, и поскольку по снимкам можно определить также и позиционный угол, то каждое измерение дает два условных уравнения.

§ 4. Геометрические соображения для решения фотометрической задачи

Фотометрические измерения интенсивностей дают обычно две наблюдаемые величины: момент середины полной фазы и ее продолжительность. Обе эти определяемые величины позволяют получить геодезическое положение, если координаты центров Солнца и Луны, их параллаксы и радиус Земли рассматривать как известные величины.

Наблюденный момент середины полной фазы определяет положение станции относительно направления движения тени (на изохроне максимальной фазы). Расстояние станции от центральной линии получается из сферического расстояния d_0 между центрами светил для момента середины полной фазы, которое в свою очередь может быть выведено из наблюдаемой продолжительности полной фазы $D = t_{03} - t_{02}$.

Для наблюдателя, находящегося на центральной линии, $d_0 = 0$, в то время как на краю полосы полного затмения $d_0 = R'_\odot - R'_\ominus$.

Отсюда расстояние A станции от центральной линии определяется из соотношения

$$A = \frac{d_0}{R'_\odot - R'_\ominus} W,$$

где W обозначает половину ширины полосы полного затмения. Разность видимых радиусов Солнца и Луны может быть выявлена по наблюдаемой продолжительности полной фазы вблизи центральной линии, если не хотят вводить разности, полученной по Ежегоднику из геоцентрических величин.

Для вывода зависимости между продолжительностью полной фазы и расстоянием d_0 для момента середины полной фазы воспользуемся чертежом, приведенным Гольдштейном в [10]. На рис. 87 ядро тени на фундаментальной плоскости изображено окружностью, а пункты наблюдения O_1 (на центральной линии) и O_2 (вблизи края тени) расположены так, что момент середины фазы для них совпадает. Поскольку расстояние m_0 связано со сферическим расстоянием d_0 уравнениями (2.43)—(2.46), то можно положить в основу наших рассуждений соотношения в фундаментальной плоскости, которые легко затем перенести на сферу. На поверхности Земли вследствие наклона фундамен-

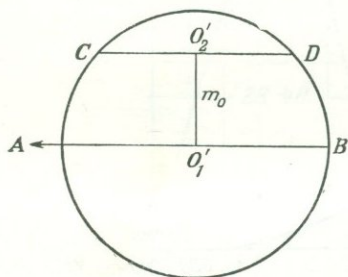


Рис. 87.

гальной плоскости к горизонту пункта наблюдения соотношения будут несколько иными.

Для наблюдателей в O_1 и O_2 продолжительность полной фазы пропорциональна отрезкам AB и CD соответственно; она медленно изменяется с m_0 вблизи центральной линии, а вблизи границы тени быстро падает к нулю. Чтобы оценить точность, с которой получается расстояние m_0 из продолжительности полной фазы, введем относительные величины. Отношение

$$\tau = \frac{CD}{AB}$$

выражает зависящую от m_0 продолжительность полной фазы в O_2 в долях продолжительности полной фазы на центральной линии. Далее,

$$r = \frac{2m_0}{AB}$$

дает расстояние от центральной линии в долях радиуса тени. Затем можно написать

$$r = \sqrt{1 - \tau^2}$$

и

$$\Delta r = -\frac{\tau}{r} \Delta \tau.$$

Ошибка в определении продолжительности полной фазы тем меньше влияет на расстояние от центральной линии (а тем самым и на сферическое расстояние d_0), чем ближе наблюдатель находится к краю полосы полного затмения. Поясним это числовым примером, проделав следующие вычисления.

Продолжительность затмения на центральной линии 200 сек.

Поперечник тени AB 150 км.

В двух пунктах в стороне от центральной линии были получены из наблюдений следующие продолжительности полной фазы:

а) $20 \pm 0,1$ сек,

б) $198 \pm 0,1$ сек.

В первом случае:

$$CD = 15 \text{ км}; \quad \tau = 0,1; \quad \Delta \tau = 0,0005,$$

$$r = \sqrt{1 - \tau^2} = 0,995,$$

$$m_0 = 75 \cdot 0,995 = 74,6 \text{ км},$$

$$\Delta r = 0,1 \cdot 0,0005 = \pm 0,00005,$$

$$\Delta m_0 = 75 \cdot 0,00005 \text{ км} = \pm 4 \text{ м}.$$

Во втором случае:

$$CD = 148,5 \text{ км}; \quad \tau = 0,99; \quad \Delta\tau = 0,0005,$$

$$r = 0,141,$$

$$m_0 = 10,57 \text{ км},$$

$$\Delta r = \frac{0,99}{0,14} \cdot 0,0005 = \pm 0,0035,$$

$$\Delta m_0 = 75 \cdot 0,0035 \text{ км} = \pm 262 \text{ м}.$$

Чтобы получить наиболее уверенное определение расстояния от центральной линии, наблюдательная станция должна располагаться по возможности ближе к краю полосы полного затмения. Наблюдения вблизи центральной линии, непригодные для

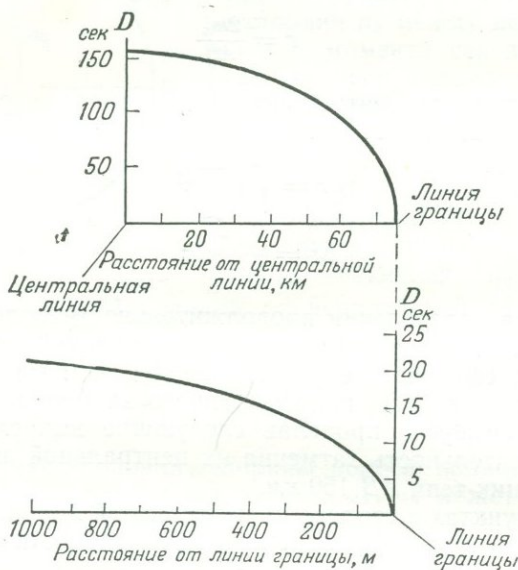


Рис. 88. Продолжительность полной фазы D и расстояние от линии границы для солнечного затмения 1954 г. (Скандинавия, $12^{\text{h}}42^{\text{m}}$ вс. вр.)

определения m_0 , а следовательно, и d_0 , используются для определения момента середины полной фазы t_0 и разности $R'_\odot - R'_\ominus$. При этом для редукции продолжительности полной фазы на центральную линию используются предвычисленные m_0 . Наблюдения вблизи края тени дают t_0 и d_0 . Целесообразно наблюдать на большом числе станций, расположенных на различных расстояниях от центральной линии, и вывести поправку к разности

радиусов, полученных на центральной линии зоны полного затмения. Величины t_0 и d_0 особенно чувствительны к изменению положения места наблюдения. Из сравнения с предвычисленными значениями получают поправку к геодезическому положению.

Дальнейшее разъяснение этих зависимостей дает рис. 88, который составлен для солнечного затмения 1954 г. в Скандинавии (по Грэнстранду [11]). Верхняя кривая представляет продолжительность полной фазы для всей полосы, нижняя кривая — для краевой зоны в большем масштабе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Julius W. H., A new Method for Determining the Rate of Decrease of the Radiative Power from the Center towards the Limb of the Solar Disc, *Astrophys. J.*, **23**, 312 (1906).
2. Richards O. W., Changes in Light Intensity during the 1932 Eclipse, Partial at Woods Hole, Massachusetts, *Astron. J.*, **42**, 127—128 (1933).
3. Platzeck R., Maiztegui A., Gaviola E., Non-focal Methods for Determining 2nd and 3rd Contacts in Total and Center in Annular Solar Eclipses, Publication dedicated to Ilmari Bonsdorff on the Occasion of his 70th Anniversary, *Veröff. Finn. Geod. Inst.*, Nr. 36, Helsinki, 1949, S. 191—208.
4. Torroja J. M., On the Photometric Timing of Total Solar Eclipses, *Bull. géod.*, Nr. 39, 39—43 (1956).
5. Panay T. N., Note on Measurements of the Films of the Solar Eclipse, Mai 9—8, 1948, *Trans. Am. Geophys. Union*, **31**, 809—815 (1950).
6. Graaf K., *Grundriß der Astrophysik*, 1928.
7. Schauer P. C., The Determination of Geodetic Positions and Distances by Means of a Solar Eclipse, *Obs. Monogr. Georgetown*, Nr. 2, 1952.
8. Brein R., Jelstrup H. S., Nottarp K., Sandig H. U., Sigl R., Beobachtungen zur Sonnenfinsternis 1954, in Südnorwegen, *Mitt. Inst. f. Angew. Geodäsie*, Nr. 16, Reihe B., Heft 34, Frankfurt a. M., 1957.
9. Torroja J. M., Bongera V., Determinación de los instantes de los contactos en le eclipse total de Sol de 25 de febrero de 1952 en Cogo (Guinea espanola), *Seminario de Astronomia y Geodesia de la Universidad de Madrid*, Publicación n° 23, 1954.
10. Goldstein A., On the Reduction of Photoelectric Observations of a Total Solar Eclipse, *Obs. Monogr. Georgetown.*, Nr. 3.
11. Grönstrand H. O., The Total Eclipse of the Sun of 1954, June 30. Prediction for Scandinavia, *Obs. Ann. Stockholm*, **16**, Nr. 2 (1950).
12. Sandig H.-U., Bemerkungen zur photoelektrischen Erfassung der Kontaktzeiten von Sonnenfinsternissen, *Wiss Zeitschr., T. H. Dresden*, Bd. 8, 1958/59, Heft 2, *Zugl. Mitt.*, Nr. 1, *Astronom. Obs. T. H. Dresden*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ КОНТАКТОВ И ИЗУЧЕНИЕ ПРОФИЛЯ ЛУННОГО КРАЯ СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

§ 1. Введение

Применение спектрофотометрического метода основано на очень быстром убывании яркости серпов Солнца перед 2-м контактом и столь же быстром возрастании его после 3-го контакта. Однако в противоположность измерению полного светового потока (гл. XI) этот метод исходит из распределения энергии в излучении Солнца, которое регистрируется кинематографическим путем. При этом перед съемочной камерой с объективом или зеркалом (рис. 89) устанавливается преломляющая призма. Эта призма ориентирована по предвычисленному позиционному углу так, что дисперсия света происходит по направлению линии, соединяющей центры Солнца и Луны. Вследствие кругообразности края Солнца спектральные линии получаются такой же формы. Источником непрерывного спектра является солнечная фотосфера. Ее толщина составляет несколько сотен километров (на расстоянии Солнца 300 км соответствуют $0''{,}4$). Собственно фотосфера и определяет видимую границу солнечного диска. Лежащий непосредственно над фотосферой слой называется хромосферой, поскольку незадолго до начала и сразу после окончания полной фазы он бывает виден как цветная кайма у солнечного края. Высота хромосферы несколько тысяч километров. Вследствие малой плотности хромосферы ее излучение составляет лишь исчезающе малую часть нормального излучения Солнца. Эмиссионный спектр хромосферы может быть наблюдаем только при полных солнечных затмениях; вследствие короткого, «молниобразного» появления его до и после покрытия фотосферы Луной его называют также спектром вспышки. Он состоит из тех же линий, которые в фраунгоферовом спектре являются линиями поглощения.

Как показывает рис. 90, на первом снимке, полученном за несколько секунд до следующего, еще преобладает непрерывный спектр. Начиная со второго снимки, полученные через интервалы $0,30$ сек, показывают, как лунный край все более и более надвигается на фотосферу. Непрерывный спектр становится слабее и проявляется на последних снимках только в виде про-

дольных полос, происходящих от глубоких лунных долин; на последних снимках преобладает спектр вспышки.

Из разности почернения на последовательных снимках можно вывести малые угловые расстояния лунного края от фотосферного нулевого горизонта Солнца (т. е. детали лунного профиля) и моменты контактов. Целесообразно использовать непрерывный спектр, а не линейчатый, так как в первом хорошо выражено

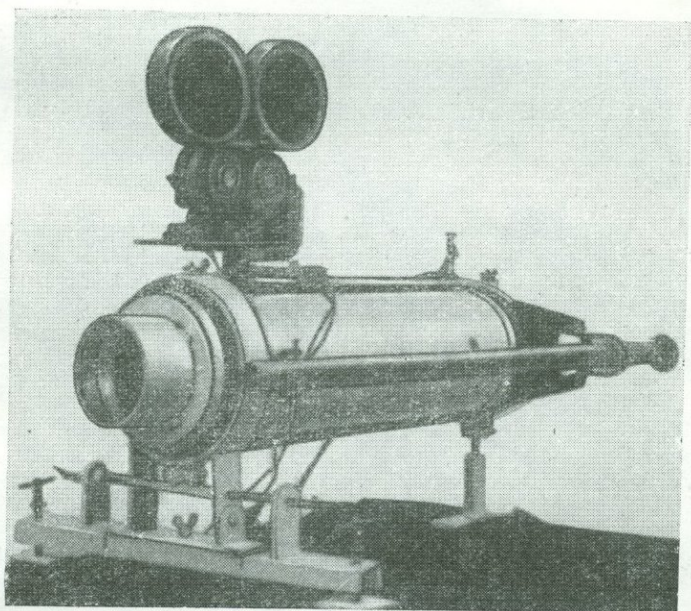


Рис. 89. Спектрофотометрическая камера обсерватории Упсала.

быстрое убывание интенсивности света в самом внешнем слое фотосферы от снимка к снимку, тогда как линии при покрытии исчезают внезапно, без предварительного значительного ослабления яркости.

Дальнейшая обработка заключается в измерении избранных длин волн непрерывного спектра, перпендикулярно к направлению дисперсии, с помощью регистрирующего микроденситометра. Регистрограмма (рис. 91) показывает ослабление почернения от снимка к снимку. Радиальный градиент интенсивности внешнего слоя фотосферы известен из наблюдений и теоретических соображений. Угловая глубина этого слоя примерно равна средней угловой амплитуде профиля лунного края; поэтому рельеф лунного края может быть получен фотометрическим путем (ср. § 2).

Идея кинематографической регистрации быстрых изменений интенсивности в непрерывном спектре для моментов вблизи внутренних контактов и фотометрического использования этих изме-

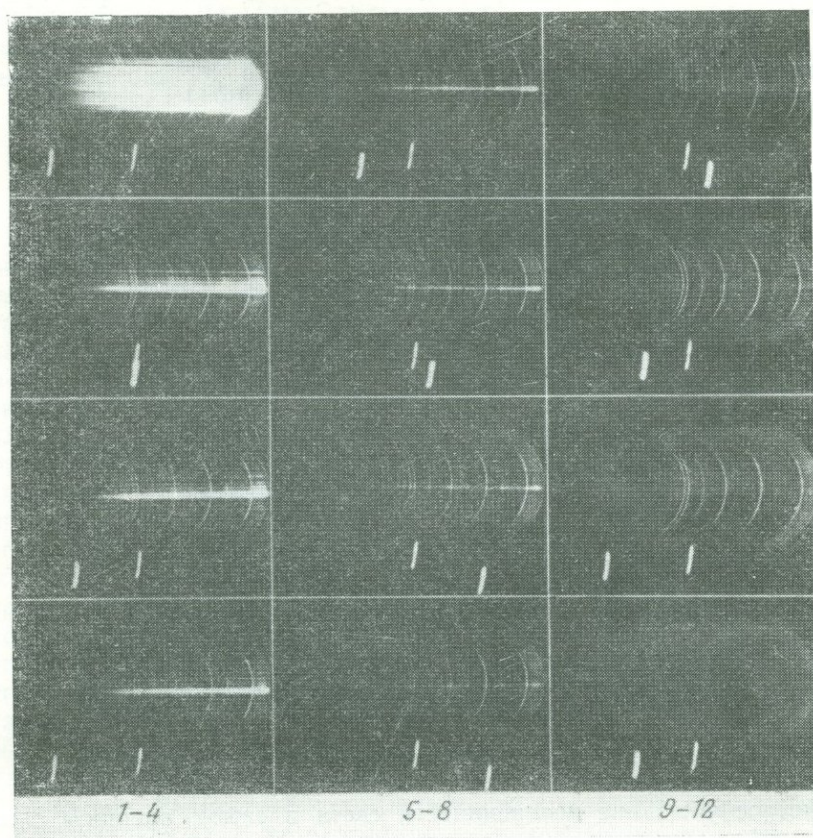


Рис. 90. Спектрофотометрические снимки по Линдбладу (затмение Солнца 9 июля 1945 г., 2-й контакт).

Приведен лишь каждый шестой снимок; снимок 1 получен за 2 сек до снимка 2; снимки 2–12 получены через интервалы 0,30 сек; резкие круги — спектр вспышки, горизонтальные полосы — непрерывный спектр.

нений для определения моментов контактов принадлежит Линдбладу. Еще во время затмения 1927 г. он использовал для съемки спектра вспышки кинокамеру с фокусным расстоянием всего 25 см и относительным отверстием 1:12. Средняя дисперсия призмы перед объективом была около 200 Å/мм. При 15 снимках в секунду, т. е. для интервалов времени, в продолжение которых

Луна изменяет свое положение относительно Солнца всего лишь на $0'',03$, уже на глаз были заметны явные изменения от снимка к снимку. Таким образом, выяснилось, что спектральная интенсивность света узкого солнечного серпа может быть использована как весьма чувствительное средство для определения расстояния отдельных точек лунного края от края Солнца. Обработка наблюдений, полученных шведской экспедицией во время затмения 1945 г., подтвердила ожидания Линдблада и показала следующие преимущества спектрофотометрического метода:

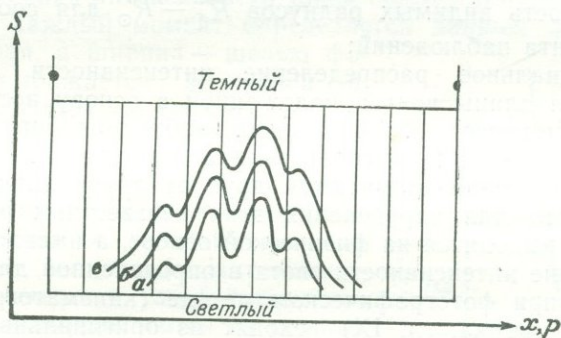


Рис. 91. Регистрация почернения избранной длины волны непрерывного спектра с помощью микроденситометра.

a, б, в — регистрация по трем последовательным изображениям. Вертикали параллельны направлению дисперсии и соответствуют на лунном крае позиционным углам с интервалами $0'',72$.

1. Рельеф лунного края определяется значительно точнее, чем с помощью прежних методов.

2. Влияние волнения атмосферы почти полностью исключается.

3. Возможно применение значительно меньших фокусных расстояний, чем в других методах, что имеет большое значение в полевых условиях.

Кристенсон, опубликовавший большую статью [1] о методе и результатах спектрофотометрического определения моментов контактов, приводит описание двух съемочных камер, использованных шведской экспедицией во время затмения 1945 г. Одна из кинокамер была снабжена линзовой оптикой ($f = 64$ см), другая имела рефлектор с параболическим зеркалом ($f = 101$ см). Объективные призмы давали линейную дисперсию 3,6 и 3,8 мм соответственно между линиями $H\gamma$ и $H\epsilon$. Обе камеры делали около 25 снимков в 1 секунду. Продолжительность экспозиции составляла 0,01 сек при относительном отверстии 1:12 и 1:14 соответственно.

§ 2. Решение спектрофотометрической задачи

1. Известные спектрофотометрической задачи

По Кристенсону, задача содержит всего четыре неизвестных — три геометрических и одно физическое:

- 1) топографический вид зоны лунного края;
- 2) сферическое расстояние d между центрами светил в данный момент;
- 3) разность видимых радиусов $R'_\zeta - R'_\odot$ для соответствующего момента наблюдений;
- 4) радиальное распределение интенсивности $i(h)$ края Солнца для длины волны, положенной в основу исследования.

Три геометрических неизвестных необходимо определять при любом геодезическом использовании наблюдений солнечного затмения. Решения отличаются друг от друга лишь методом, применяемым для определения этих неизвестных параметров. Последние выводятся на физической основе, а именно, опираясь на изменение интенсивности света в определенной длине волны, тогда как при фотографическом методе (кинематографическая фокальная съемка, гл. IX) исходят из оригинальных снимков серпа и отсюда по теории Бесселя получают на геометрической основе моменты контактов, а также позиционные углы и расстояния между центрами светил.

Сферическое расстояние d связано с шириной серпа σ соотношением

$$d = \sigma + R'_\zeta - R'_\odot. \quad (12.1)$$

Разность видимых радиусов Солнца и Луны позволяет получить для заданного значения σ соответствующий центральный угол концов серпа (2ϑ). Из рис. 95 (стр. 281) имеем

$$d \cos \vartheta = R'_\zeta \cos \varepsilon - R'_\odot = R'_\zeta - R'_\odot - R'_\zeta \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (12.2)$$

$$\sin \varepsilon = \frac{d}{R'_\zeta} \sin \vartheta. \quad (12.3)$$

Отсюда следует

$$d \cos \vartheta = R'_\zeta - R'_\odot - \frac{d}{2R'_\zeta} \sin^2 \vartheta$$

и с учетом (12.1)

$$\cos \vartheta = \frac{R'_\zeta - R'_\odot}{R'_\zeta - R'_\odot + \sigma} - \frac{d}{2R'_\zeta} \sin^2 \vartheta \quad (\text{поправочный член}). \quad (12.4)$$

Радиальное распределение интенсивности $i(h)$ края Солнца является в спектрофотометрическом методе основным вспомо-

гательным средством для точного определения положения лунного края относительно солнечного и тем самым — для получения упомянутых выше геометрических неизвестных. Мы ограничимся здесь объяснением важнейших физических соотношений с помощью графических представлений лишь настолько, насколько это необходимо для понимания § 4 и 5.

2. Определение фотометрических высот

Интегральная интенсивность узкой полосы фотосферы, длина которой в каждый момент определяется данным положением лунного края, а ширина — щелью фотометра, выражается величиной m . Она определяется из соотношения

$$m = -2,5 \lg \frac{J}{J_0},$$

которое применяется в качестве шкалы относительных звездных величин (визуальные величины). Интенсивности J , отнесенные к узкой спектральной области, определяются из сравнения соответствующих освещенностей. Для того чтобы из величин m найти высоту лунного края h над фотосферой (перпендикулярно солнечному краю, в угловой мере), нужно знать функцию $h = f(m)$. Эта зависимость может быть выведена эмпирически для края Солнца в монохроматическом свете. Из наблюдений Линдблада и теоретических расчетов Вильдта [2] была получена изображенная на рис. 92 зависимость между высотой h наблюдаемой полосы фотосферы и интегральной интенсивностью J . Отсюда выводится фотосферный градиент dm/dh , для которого Линдблад нашел значение 4,86. Оказалось, что функция $h = f(m)$ линейна в рассматриваемой области ($0 < h < 0''{,}5$). Кристенсон получил из новейших наблюдений для $\lambda = 4100 \text{ \AA}$, в хорошем согласии с теоретическим значением Вильдта

$$\frac{dm}{dh} = 5,69 \pm 0,11.$$

С другой стороны, можно при помощи калибровки получить числовую зависимость $S = f(m)$ плотности почернения пластинки от значения спектральной яркости m , откуда получается и зависимость $h = f(S)$ между фотометрическими высотами и измеримой плотностью пленки S .

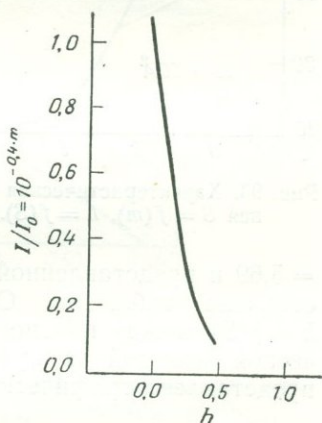


Рис. 92. Падение интенсивности на краю фотосферы $J/J_0 = f(h)$ (эмпирически, по Линдбладу, для $\lambda = 4800 \text{ \AA}$).

Показанная на рис. 93 характеристическая кривая соответствует определенной эмульсии; она была выведена из ряда снимков непрерывного спектра вольфрамовой лампы при постепенно изменяемой силе тока. Зависимость спектрального

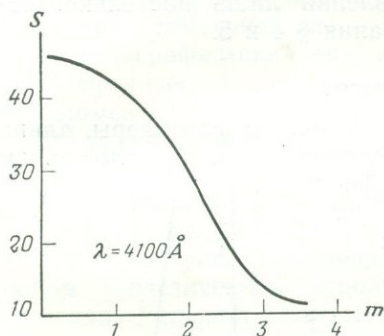


Рис. 93. Характеристическая кривая $S = f(m)$, $h = f(S)$.

распределения энергии от интенсивности теплового потока известна из других исследований. Для установления общего нулевого уровня фотометрических высот величине m_0 , которой соответствует наибольшее из отмеченных почернений S_0 , приписывается высота $h(m_0) = 0$. Тогда с помощью характеристической кривой вместо спектральных интенсивностей m могут быть введены полученные из измерений почернения значения S . На основе новейшего значения фотосферного градиента $dm/dh = 5,69$ и представленной на рис. 93 функции $S = f(m)$ была составлена табл. 48. Она дает окончательную зависимость $h = f(S)$ между плотностью почернения пленки S и фотометрической высотой h при заданных условиях. Эта зависимость представлена графически на рис. 94.

Таблица 48¹⁾

Приведенная²⁾ плотность пластинки S и фотометрическая высота h

S	h	S	h	S	h
46,5	—				
45,9	0",00	41,7—42,0	0",18	29,0—29,9	0",36
45,6	0,02	40,8—41,1	0,20	26,6—27,7	0,38
45,3—45,4	0,04	39,8—40,2	0,22	24,2—25,3	0,40
44,9—45,0	0,06	38,7—39,2	0,24	21,8—22,9	0,42
44,5—44,6	0,08	37,5—38,1	0,26	19,8—20,6	0,44
44,1—44,2	0,10	36,2—36,7	0,28	18,1—18,8	0,46
43,6—43,7	0,12	34,7—35,3	0,30	16,6—17,3	0,48
43,0—43,2	0,14	33,0—33,8	0,32	15,4—15,9	0,50
42,4—42,6	0,16	31,1—32,0	0,34	14,4—14,8	0,52

¹⁾ По Кристенсону [1]. Ради экономии места приводится лишь каждое второе значение.
²⁾ Приведенная плотность пластинки получается приведением зарегистрированного фотометром значения почернения к нормальному значению путем сравнения со стеклянными фильтрами известного почернения.

Значениям $m_0 = 0$ и $h = 0$ для почернения $S_0 = 45,9$ геометрически соответствует изофота вдоль периферии Солнца. Она определяется как фотосферный нулевой урвень и обозначает тот фотометрический край Солнца, по отношению к которому измеряются высоты неправильностей лунного края. По исследованиям Кристенсона фотометрический край Солнца находится лишь в $0'',16$ от точки перегиба в распределении энергии. Под точкой перегиба подразумевается оптический край Солнца, каким он представляется на фотоснимках или человеческому глазу (по теории контрастов Маха).

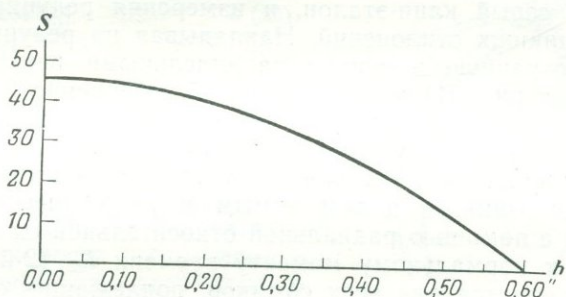


Рис. 94.

Фотосферный нулевой урвень Солнца имеет в качестве базиса для измерений то преимущество, что он установлен математической теорией и поэтому строго определяется, в противоположность более или менее размытому краю фотоснимков. Его следует считать кругообразным на основании теории тяготения и других теорий; по определению он свободен от атмосферных возмущений, которыми искажается фотографический край. Отклонение фотосферного нулевого урвня от оптического края Солнца на $0'',16$ вызвано наличием отрицательных ионов водорода в солнечной атмосфере.

3. Измерение почернения с помощью микроденситометра [3]

Измерение спектрограмм производилось на регистрирующем микроденситометре Коха и Гооса [4]. Прибор работает на том же принципе, что и описанный в гл. XI (стр. 267) регистрирующий микрофотометр Молля. Вместо термоэлемента здесь используются два калиевых фотоэлемента, освещаемых одним источником света. Перед первым фотоэлементом находится пленка, почернение которой измеряется. Перед вторым фотоэлементом расположена устанавливаемая перед измерениями ирисовая диафрагма. Оба фотоэлемента связаны компенсационной схемой Коха с обоими неподвижными внешними электро-

дами электрометра. Поэтому зеркало электрометра не испытывает никаких колебаний при изменении яркости источника света. Чтобы легче найти измеряемое место пленки, последнее вместе с ближайшими окрестностями проектируется на экран, середине которого соответствует щель фотометра. Перемещение подставки, несущей пленку, переносится с помощью стальной ленты, скользящей по сектору, на ведение бумажной полосы для записи регистрации.

При измерении спектрограммы, несмотря на компенсацию, возникают ошибки. Поэтому до и после каждого прохождения измеряется серый клин-эталон, и измерения редуцируются на основе возникших отклонений. Накладывая на редуцированные кривые прозрачную шкалу с параллельными вертикальными линиями (см. рис. 91) можно отсчитать почернение S на равномерных горизонтальных расстояниях, соответствующих определенным позиционным углам, и затем перевести их в высоты. Высоты в одинаковых позиционных углах, соответствующие различным экспозициям, а тем самым и различным моментам, приводятся с помощью радиальной относительной скорости лунного края к нормальному моменту времени t_{02} (2-й контакт). Это делается для всех снимков, подлежащих фотометрической обработке; таким образом, достигается многократное определение отдельных высот лунного края относительно фотосферного нулевого уровня. При этом находится также касание фотосферного края Солнца и среднего лунного края, что представляет собой уже геодезическую цель наблюдений солнечного затмения.

§ 3. Относительное движение Солнца и Луны во время затмения

Обработка спектрофотометрических наблюдений предполагает известными относительные движения Солнца и Луны, какими они представляются на небе из пункта наблюдения. При этом возможны два способа решения этого вопроса. Можно исходить из относительного движения в фундаментальной плоскости и вычислить по (2.23) вектор движения тени (n, N), отнесенный к пункту наблюдения; этот вектор может быть перенесен на сферу с помощью рассмотренных в гл. II, § 6 соотношений. Затем получается величина и направление относительного топоцентрического движения центров светил. Однако предпочтительнее принять за основу вычислений топоцентрические координаты центров Солнца и Луны и следить за их движением непосредственно на сфере. Для этой цели после предвычисления момента середины полной фазы (с точностью до минуты) из эфемерид берутся геоцентрические координаты α и δ через 4-минутные ин-

тервалы для промежутка времени около 60 мин. Эти координаты следует затем перевести в соответствующие пункту наблюдения (φ, λ) топоцентрические координаты α', δ' с помощью выведенных в гл. III, § 3 формул параллакса.

Разности $\Delta\alpha = \alpha'_{\odot} - \alpha'_{\ominus}$ и $\Delta\delta = \delta'_{\odot} - \delta'_{\ominus}$ раскладываются в ряд по степеням времени t . Эти ряды заменяют числовую таблицу. По ним выводятся дифференцированием компоненты относительной скорости v в восточном и северном направлениях

$$v_{\alpha} = \frac{d(\Delta\alpha \cos \delta_{\odot})}{dt}, \quad v_{\delta} = \frac{d(\Delta\delta)}{dt}.$$

Величина δ_{\odot} в выражении для v_{α} есть топоцентрическое склонение центра Солнца в момент t_0 . Однако обычно достаточно использовать геоцентрическое значение. Пусть направление вектора скорости составляет с направлением на север угол ψ . Тогда

$$v = \sqrt{v_{\alpha}^2 + v_{\delta}^2}, \quad (12.5)$$

$$\psi = \arctg \frac{v_{\alpha}}{v_{\delta}}. \quad (12.6)$$

С помощью вектора скорости (v, ψ) можно определить для каждой точки лунного края компоненты относительной скорости в любом выбранном направлении. Наибольший интерес представляют компоненты скорости, перпендикулярные к краю Солнца прежде всего в концах серпа и в середине его, так как из этих скоростей можно найти важное для спектрофотометрических целей убывание с высотой h полной интенсивности света m светящегося элемента поверхности у края Луны. Обозначим через p — позиционный угол конца серпа и через M — позиционный угол середины серпа (оба из центра Луны); тогда по рис. 95 получаем радиальную скорость:

$$\text{На концах серпа } v_p = v \cos(\psi - p \pm \varepsilon) \approx v \cos(\psi - p). \quad (12.7)$$

$$\text{В центре серпа } v_p = v \cos(\psi - M). \quad (12.8)$$

Рис. 95 изображает общий случай, когда пункт наблюдения находится в стороне от центральной линии и поэтому центр Луны проходит севернее или южнее центра Солнца. При этом наблюдается вращение серпа, которое особенно сильно на

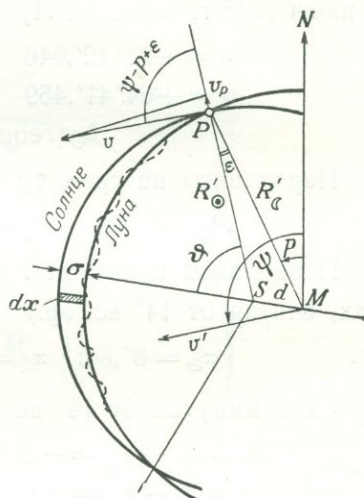


Рис. 95. Компоненты относительной скорости на лунном крае.

границах зоны полного затмения и является основой рассмотренного в гл. X метода Аткинсона. Только при наблюдении на центральной линии позиционный угол середины серпа меняется от 2-го к 3-му контакту скачком на 180° .

Пример

Относительное движение Луны во время полного затмения 9 июля 1945 г. (станция Лунд, Швеция, $14^{\text{h}}01^{\text{m}}$ вс. вр.)

$$\begin{aligned}\lambda &= -21^\circ 12',646 & \rho \sin \varphi' &= 0,9004146 \\ \varphi &= +64^\circ 41',459 & \rho \cos \varphi' &= 0,4286793 \\ \delta_{\odot} (\text{геоц.}) &= 22^\circ 22',09\end{aligned}$$

Параллаксы на среднем расстоянии

$$P_{\odot} = 8'',79, \quad P_{\zeta} = 57' 02'',70 \text{ (по Броуну).}$$

Параллаксы в момент t (топоцентрические, время в минутах, считая от 14^{h} вс. вр.)

$$\pi_{\odot} = 8'',66; \quad \pi_{\zeta} = 58' 08'',14 - 0'',02457t.$$

Для t в минутах от 14^{h} вс. вр. получаются следующие ряды:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha'_{\zeta} - \alpha'_{\odot} = -28'',563 + 30'',329t + 0'',0107t^2, \\ \Delta\delta &= \delta'_{\zeta} - \delta'_{\odot} = -2'',26 - 2'',805t - 0'',0044t^2.\end{aligned}$$

Эти ряды получены способом наименьших квадратов из значений $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, вычисленных для 17 моментов времени (от $14^{\text{h}}00^{\text{m}}$ через 4 мин). Дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned}v_{\alpha} &= \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} \cos \delta_{\odot} = +28'',049 + 0'',0198t, \\ v_{\delta} &= \frac{d(\Delta\delta)}{dt} = -2'',805 - 0'',0088t.\end{aligned}$$

Для $t = +1^{\text{m}},0$ (середина полной фазы)

$$v_{\alpha} = +28'',069; \quad v_{\delta} = -2'',814 \text{ (в 1 мин)}$$

и по (12.5) и (12.6)

$$v = +0'',4701 \text{ (в 1 мин)}, \quad \psi = 95^\circ,73.$$

Изменения v и ψ

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial t} \sin \psi + \frac{\partial v_{\delta}}{\partial t} \cos \psi = +0'',02 \text{ мин}^{-1}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial t} \frac{\cos \psi}{v} - \frac{\partial v_{\delta}}{\partial t} \frac{\sin \psi}{v} = +0'',013 \text{ мин}^{-1}.\end{aligned}$$

Если обозначить для краткости в правой части малый член

$$R'_0 \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{d^2}{2R'_\zeta} \sin^2 \vartheta = \nu, \quad (12.10)$$

то с введенными неизвестными

$$\begin{aligned} x &= \delta'_\zeta - \delta'_\odot = d \cos p_0, \\ y &= (\alpha'_\zeta - \alpha'_\odot) \cos \delta'_\odot = d \sin p_0, \\ z &= R'_\zeta - R'_\odot \end{aligned} \quad (12.11)$$

получим из (12.9) следующие уравнения ошибок для внутренних контактов (индекс 2 соответствует 2-му контакту, индекс 3 — 3-му):

$$\begin{aligned} \cos p \cdot x_2 + \sin p \cdot y_2 + z_2 &= (h_0 - \nu) - h, \\ \cos p \cdot x_3 + \sin p \cdot y_3 + z_3 &= (h_0 - \nu) - h. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Шесть неизвестных $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ не независимы; они связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + \xi, & \xi &= v_\delta (t_{03} - t_{02}), \\ y_3 &= y_2 + \eta, & \eta &= v_\alpha (t_{03} - t_{02}), \\ z_3 &= z_2 - \zeta, & \zeta &= \frac{\partial \pi}{\partial t} (t_{03} - t_{02}). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Здесь v_δ и v_α — компоненты скорости движения Луны относительно Солнца (§ 3), а $\partial \pi / \partial t$ — изменение топоцентрического суточного параллакса Луны. Для солнечного затмения 1947 г.

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_{\text{геоц.}} = -0'',025 \text{ мин}^{-1}; \quad \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_{\text{топ.}} = -0'',028 \text{ мин}^{-1}.$$

Относительное положение центров светил определяется надежнее, если исходить не только из фотометрически измеренных высот h_0 , но включать также в вычисления соответствующий профиль лунного края, приближенно известный из других источников. Благодаря этому, во-первых, получают меньшие свободные члены в уравнениях ошибок; во-вторых, это позволяет получить лучшую основу для вывода неизвестных x_2, y_2, z_2 , так как привязка к приближенному лунному профилю в значительной степени исключает систематическую часть рельефа той части лунного края, для которой имеются фотометрические высоты.

Кристенсон использовал, за неимением лучшего, высоты h^* , взятые для соответствующих моментов контактов с лунной карты Хайна и ввел их как приближенные значения отнесенных к среднему лунному краю неизвестных высот

$$h = h^* + h_1. \quad (12.14)$$

Остаточные высоты h_1 суть выражение неровностей фотометрически измеренного края, остающиеся после выглаживания

последнего с помощью хайновых высот h^* . Не обратившиеся в нуль после выравнивания остаточные высоты h_1 дают по уравнению (12.14) высоту h точки края Q относительно вновь определенного среднего лунного края.

После введения (12.14) и (12.13) в уравнения ошибок (12.12) последние принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \cos p \cdot x_2 + \sin p \cdot y_2 + z_2 &= (h_0 - h^* - \nu) - h_1 \text{ (2-й контакт),} \\ \cos p \cdot x_2 + \sin p \cdot y_2 + z_2 &= (h_0 - h^* - \nu) - \\ &\quad - (\xi \cos p + \eta \sin p + \zeta) - h_1 \text{ (3-й контакт).} \end{aligned} \quad (12.15)$$

В правой части все величины — за исключением остаточной высоты h_1 — суть числовые свободные члены; малые поправки ξ , η , ζ вычисляются по уравнениям (12.13) из моментов контактов и относительных скоростей.

Для станции Лунд (ср. § 3) получены следующие числовые значения:

$$\begin{aligned} t_{02} &= 14^{\text{h}}00^{\text{m}}28^{\text{s}},20 \text{ вс. вр.} & \xi &= -2'',763 \\ t_{03} &= 14 \text{ 01 } 27,06 \text{ » »} & \eta &= +27,532 \\ t_{03} - t_{02} &= +58^{\text{s}},86 & \zeta &= -0,027 \end{aligned}$$

Обработка примерно 110 наблюдений по методу наименьших квадратов дала следующие относительные топоцентрические координаты Луны для момента t_{02} :

$$x_2 = -4'',57 \pm 0'',11; \quad y_2 = -14'',454 \pm 0'',022$$

и следующую разность видимых радиусов:

$$z_2 = +16'',067 \pm 0'',044.$$

Из (12.11) находятся разности прямых восхождений и склонений. Сопоставление наблюдений и вычислений позволяет получить следующие поправки к астрономическим данным.

Таблица 49

Астрономические поправки на станции Лунд
(1945, июль 9, $t_{02} = 14^{\text{h}}00^{\text{m}}28^{\text{s}},20$ вс. вр., $\delta_{\odot} = 22^{\circ}22',09$)

Разности	Наблюдение	Вычисление ¹⁾	Поправка
$\alpha'_{\zeta} - \alpha'_{\odot}$	-15'',630	-14'',303	-1'',327
$\delta'_{\zeta} - \delta'_{\odot}$	-4,57	-3,58	-0,99
$R'_{\zeta} - R'_{\odot}$	+16,067	+16,37	-0,303

¹⁾ Без эмпирической поправки эфемериды.

§ 5. Спектрофотометрическое определение высот лунного края

Табл. 50 показывает ход вычислений на примере одной отдельной точки лунного края. Последняя отождествляется на следующих один за другим снимках по своему позиционному углу, отсчитываемому от северного полюса Луны. Кроме позиционного угла, для облегчения ориентировки и для фиксирования точки края в спектре вспышки вводят абсциссу x (перпендикулярно к направлению дисперсии), выражаемую в миллиметрах или в минутах дуги.

Таблица 50

Вывод высот h_0
 Позиционный угол $p = 68^{\circ},9$; абсцисса $x = 39$;
 центральный угол $\varphi = 7^{\circ},9$; радиальная скорость $v_p = +0^{\prime\prime},4196 \text{ сек}^{-1}$;
 $t_{02} = 14^{\text{h}}00^{\text{m}}28^{\text{s}},20 \text{ в. вр.}$

Разность моментов между экспозицией и контактом $t_{02} - t_i$	Изменная плотность пластинки (почернение) S	Соответствующая S фотометрическая высота h_i	Редукция к контакту $v_p (t_{02} - t_i)$	Приведенная высота h_{0i}
+0,929	18,6	0,46	0,39	0,85
1,010	19,0	0,45	0,42	0,87
1,130	26,0	0,39	0,47	0,86
1,212	28,7	0,37	0,51	0,88
1,331	37,0	0,27	0,56	0,83
1,413	37,7	0,26	0,59	0,85
1,532	40,5	0,21	0,64	0,85
1,614	42,7	0,15	0,68	0,83
1,733	43,5	0,13	0,73	0,86
1,815	44,7	0,07	0,76	0,83
1,934	44,9	0,06	0,81	0,87

Среднее значение $h_0 = 0^{\prime\prime},853$

Фотосферный нулевой уровень Солнца смещается относительно лунного края от снимка к снимку вследствие движения светил; поэтому высоты могут быть выведены многократно. Полученные по ряду последовательных экспозиций измерением почернения пластинки фотометрические высоты h_i могут быть приведены к предвычисленным моментам контактов t_{02} и t_{03} с помощью радиальной относительной скорости v_p исследуемой точки лунного края и зафиксированного момента экспозиции t_i (табл. 50, столбцы 3—5). Например, для второго контакта редуцированная высота будет

$$h_{0i} = h_i + v_p (t_{02} - t_i). \quad (12.16)$$

Из всех редуцированных высот h_{0i} , выведенных для данной точки лунного края, берется среднее арифметическое h_0 , которое и вводится как измеренная величина в уравнения ошибок (12.15).



Рис. 97. Спектрофотометрическое определение высот лунного края (затмение Солнца 9 июля 1945 г., станция Лунд).

Вверху: фотометрические высоты h_0 нанесены по позиционным углам p для момента t_{02} 2-го контакта. Ось абсцисс есть фотосферный нулевой горизонт. Внизу: с вычисленным средним уровнем Луны в качестве оси абсцисс представлены окончательные значения фотометрических высот h (сплошная линия) и высоты Хайна h_H (пунктир) для того же времени и того же лунного уровня. Фотосферный нулевой уровень изображен в виде окружности. Область измерений находилась между 50° и 90° . При 3-м контакте (он не воспроизведен) область заключалась между 280° и 313° .

После того как неизвестные x_2 , y_2 , z_2 определены выравниванием, можно вычислить из уравнений ошибок (12.15) остаточные высоты h_1 . С помощью уравнения (12.14) можно исключить хайновы высоты, которые были привлечены исключительно для лучшей ориентировки при определении центра Луны и среднего уровня Луны. Из соотношения

$$h = h^* + h_1$$

получаются чисто фотометрические высоты края, которые с большой точностью выражают рельеф исследуемой части лунного края (ср. рис. 97).

§ 6. Точность спектрофотометрического метода и геодезические выводы

1. Точность

Спектрофотометрический метод имеет особое значение среди прочих методов наблюдения солнечного затмения благодаря большой точности получаемых величин — относительного положения центров Солнца и Луны, разности видимых радиусов фотосферного нулевого уровня Солнца и среднего края Луны, а также самого лунного профиля для момента времени вблизи полной фазы. Мы приводим здесь внутреннюю точность, не искаженную дифференциальной рефракцией, полученную Линдبلادом и Кристенсоном в 1945 г. при наблюдениях в Лунде ($\lambda = -21^{\circ}12',646$; $\varphi = 64^{\circ}41',459$) и Стокгольме ($\lambda = 21^{\circ}31',500$; $\varphi = 64^{\circ}27',077$).

а) Для относительного положения центров

$$m_{x_2} = \pm 0'',10 \text{ (по склонению),}$$

$$m_{y_2} = \pm 0'',02 \text{ (по прямому восхождению).}$$

б) Для разности моментов середины полной фазы (время пробега тени) между обеими станциями, геодезически связанными друг с другом

$$m_{\Delta t} = \pm 0^s,028.$$

в) Для разности радиусов (в среднем из обеих станций)

$$m_{z_2} = \pm 0'',03.$$

Наблюдатели сочли более надежным значение, полученное в Стокгольме,

$$z_2 = R'_{\zeta} - R'_{\odot} = +16'',210 \pm 0'',022,$$

относящееся к моменту $t = 14^h00^m58^s,8$ вс. вр. Поэтому только это значение и было использовано для сравнения с предвычисленными топоцентрическими разностями видимых радиусов. На основе геоцентрических значений для среднего расстояния

$$R_{\odot} = 959'',63 \pm 0'',10 \text{ (по Ауверсу),}$$

$$R_{\zeta} = 932'',70 \pm 0'',10 \text{ (по Хайну для параллакса } 57' 02'',70)$$

вычисляется топоцентрическая разность видимых радиусов для момента 2-го контакта

$$(R'_{\zeta} - R'_{\odot})_{\text{эф.}} = +16'',37 \pm 0'',14.$$

Достигнутая при наблюдениях точность ($\pm 0'',202$) значительно выше точности, с которой в настоящее время известны абсолютные значения радиусов. Если принять последнюю равной $\pm 0'',10$,

то для разности предвычисленных радиусов получается точность $\pm 0'',14$. Вычисленное значение $16'',37$ относится к фотографическому краю Солнца, тогда как наблюдаемое значение $16'',21$ действительно для расположенного снаружи края фотосферы. Оба эти значения основываются на лунных фотографиях Хайна, т. е. на одном и том же значении R_{\odot} ; поэтому их разность дает расстояние между фотосферным и фотографическим краями Солнца

$$R_{\odot \text{ фотосф.}} - R_{\odot \text{ фотогр.}} = +0'',16.$$

Правда, это значение кажется весьма неуверенным из-за большой средней ошибки предвычисленной разности радиусов; однако его следует считать правдоподобным, так как оно находится в согласии с физическими данными строения солнечной атмосферы.

г) Высота лунного профиля в произвольной точке края:

Внутренняя средняя ошибка одного измерения $m_{h_{0i}} = \pm 0'',02$.

» » » среднего из 5—10 измерений $m_{h_0} < 0'',01$.

Таблица 51

Перечень некоторых фотометрически измеренных высот¹⁾

Абсцисса x	35	36	37	38	39	40
Центр. угол θ	$5^{\circ},0$	$5^{\circ},7$	$6^{\circ},1$	$7^{\circ},1$	$7^{\circ},9$	$8^{\circ},6$
Позиц. угол p	$71^{\circ},8$	$71^{\circ},1$	$70^{\circ},4$	$69^{\circ},7$	$68^{\circ},9$	$68^{\circ},2$
Отдельные высоты h_{0i}	$0'',46$ $0,49$ $0,50$ $0,48$ $0,48$ $0,49$ $0,48$ $0,48$ $0,51$ $0,50$	$0'',52$ $0,54$ $0,54$ $0,54$ $0,54$ $0,55$ $0,56$ $0,56$ $0,59$ $0,61$ $0,57$ $0,57$	$0'',64$ $0,64$ $0,66$ $0,70$ $0,70$ $0,75$ $0,70$ $0,69$ $0,62$ $0,73$ $0,65$	$0'',78$ $0,77$ $0,80$ $0,85$ $0,82$ $0,81$ $0,75$ $0,83$ $0,78$ $0,76$	$0'',85$ $0,87$ $0,86$ $0,88$ $0,83$ $0,85$ $0,85$ $0,83$ $0,86$ $0,83$ $0,87$	$0'',68$ $0,68$ $0,70$ $0,74$ $0,74$ $0,73$ $0,76$ $0,74$ $0,69$ $0,75$ $0,75$ $0,73$
Среднее: h_0	$0'',487$	$0'',557$	$0'',680$	$0'',795$	$0'',853$	$0'',724$
$m_{h_{0i}}$	$\pm 0,014$	$\pm 0,025$	$\pm 0,041$	$\pm 0,032$	$\pm 0,017$	$\pm 0,029$
m_{h_0}	$\pm 0,004$	$\pm 0,007$	$\pm 0,012$	$\pm 0,010$	$\pm 0,005$	$\pm 0,008$

¹⁾ Вывод отдельных высот h_{0i} дан в табл. 50 для абсциссы $x=39$.

Внешняя средняя ошибка была найдена по двум независимым друг от друга фотометрическим измерениям одного профиля; она равна $\pm 0'',06$. Это следует отнести по большей части за счет неодинаковости аппаратуры, применявшейся в то время на обеих станциях. Полученная с большой уверенностью угловая точность, равная $\pm 0'',01$ (для среднего значения высоты края, выведенного из 5—10 экспозиций), является удивительным достижением. Она показывает, насколько в отдельных случаях новейшие физические методы измерения могут превзойти обычные способы наблюдения. В табл. 51 приводятся выборочно еще некоторые результаты измерений.

2. Геодезические выводы

Обе шведские наблюдательные станции в 1945 г. находились всего лишь на расстоянии 30 км друг от друга и на различном расстоянии от центральной линии. Поэтому возможность определения геодезических положений не рассматривалась. Однако из результатов наблюдений можно сделать некоторые общие геодезические выводы.

В относительной проблеме контактов, представляющей интерес для геодезии, все сводится к тому, с какой точностью совпадают центры Луны, выведенные независимо на обеих станциях из фотометрических профилей края (с учетом перспективного эффекта кривизны на краю Луны).

Разность уровней в $+0'',16$ между фотосферным и фотографическим краями Солнца была выявлена при сравнении фотометрических и фотографических измерений. Если же вывести на обеих станциях фотосферные нулевые уровни, которые благодаря одинаковому для обеих станций методу будут отягощены друг относительно друга лишь весьма малыми ошибками, то останется только влияние разностей средних лунных уровней и соответствующих им центров.

Эта неуверенность имела следствием для шведского предприятия 1945 г. среднюю ошибку в разности времени пробега, равную $\pm 0,03$ сек; при скорости движения тени 920 м/сек это соответствует ошибке ± 30 м в расстоянии между обеими станциями. Если применять полностью однотипную аппаратуру, чего не было в 1945 г., то, согласно Кристенсону, для станций вблизи центральной линии достижима точность $\pm 0,015$ сек, т. е. ± 15 м в расстоянии между станциями.

Эти числа относятся лишь к не очень удаленным друг от друга станциям, для которых, как в Швеции в 1945 г., остаточная неуверенность средних лунных уровней не имеет большого значения. Если станции расположены далеко друг от друга, то лунные уровни, которые различны уже для одной станции в мо-

менты 2-го и 3-го контактов, будут выводиться обеими станциями даже для одного и того же контакта по различным областям лунного края. В этом случае дополнительное применение карты Хайна, или более новых лунных профилей, дает возможность внести исправление, которое значительно уменьшает неуверенность определения лунного уровня.

На основании сказанного выше при трансокеанских расстояниях следует принять за оптимальную (внешнюю) точность спектрофотометрического метода удвоенное или утроенное значение полученной в 1945 г. в Швеции ошибки, т. е. $\pm 30-45$ м.

В спектрофотометрическом методе, который в отношении точности, очевидно, превосходит остальные, успех также зависит в основном от того, как учитывается рельеф лунного края.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kristenson H., Spectrophotometric Determinations of Contact at Total Eclipses of the Sun, *Obs. Ann. Stockholm*, **17**, Nr. 1 (1951).
2. Wildt R., An Interpretation of the Heights of Lines in the Solar Chromosphere., *Astrophys. J.*, **105**, 36 (1947).
3. Sewig R., *Objektive Photometrie*, Berlin, 1935.
Eberhard G., Kohlschütter A., Ludendorff H., *Handbuch der Astrophysik*, Bd. 2, 2. Teil, 1. und 2. Hälfte, Berlin, 1929 und 1931.
Plesse H., *Ebkrtsische Verfahren bei optischen Meßgeräten*, *Zeiss-Werkzeitschrift*, Nr. 21 (1956).
4. Koch F., Goos P., Über eine Neukonstruktion des registrierenden Mikrophotometers. *Zeitschrift für Physik*, **44**, 855—859 (1929).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОКРЫТИЙ ЗВЕЗД ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЦЕЛЕЙ. НАБЛЮДЕНИЕ ПОКРЫТИЯ ЗВЕЗДЫ В ПОСТОЯННОМ ПОЗИЦИОННОМ УГЛЕ

§ 1. Принцип использования

При обычном методе наблюдения покрытий звезд при помощи хронографа отмечается только момент исчезновения (или появления) звезды на крае Луны. Из этого момента времени выводится (см. гл. VI) расстояние $\Delta\sigma$, которое и рассматривается как результат наблюдения. Позиционный угол в момент касания края, который во время солнечных затмений доставляет второе независимое уравнение ошибок, до настоящего времени при наблюдении покрытий звезд не измерялся (или наблюдался в виде исключения), так как нет надежного и достаточно точного способа одновременного наблюдения позиционного угла и расстояния.

Для геодезических целей с недавнего времени стало возможно существенно повысить точность наблюдений следующим образом.

1. Вместо субъективного наблюдения применяется фотоэлемент, и момент исчезновения звезды (обрыв фототока) регистрируется на движущейся со значительной скоростью ленте. Таким путем достигается точность в 0,01 сек. О технике наблюдений см. § 2.

2. Для исключения неровностей лунного края, сильно искажающих результат, на Земле путем точного предвычисления выбираются для наблюдений такие места, для которых покрытие звезды с достаточной точностью происходит в одном и том же месте края Луны.

Этот метод был впервые применен в 1949 г. О'Кифом и Андерсом [1]. При этом для уменьшения числа неизвестных станции наблюдения были привязаны к обычной триангуляционной сети.

Таким образом, речь идет о том, чтобы пронаблюдать одну и ту же звезду последовательно из разных мест в одном позиционном угле (относительно северного полюса Луны), т. е. о наблюдениях с наперед заданной одинаковой ориентировкой (по позиционному углу). При этом для выбора позиционного угла предоставляется полная свобода. Правда, вследствие либ-

рации наблюдения одного и того же места лунного края могут быть гарантированы лишь тогда, когда в позиционный угол внесены небольшие, теоретически обоснованные и постоянно улучшающиеся поправки, о которых подробнее будет сказано в § 4. Поскольку вследствие либрации непрерывно, хотя и незначительно, изменяется и проектирующаяся на небо линия лунного края (передняя и задняя части), то цель, преследуемая жесткой ориентировкой, состоит в наблюдении покрытий определенными и простыми по форме точками лунного края. Далее, вследствие неуверенности исходных данных (координат Луны и пункта наблюдения) можно ожидать небольших отклонений от предвычисленных мест покрытия. Позиционный угол следует выбирать, предварительно убедившись, что наблюдаемое место и на топографической карте лежит наиболее благоприятным образом. Соединяя точки на земной поверхности, для которых одна и та же звезда вступает на край Луны под одним позиционным углом, мы получим кривую равных позиционных углов, которую и здесь и дальше мы будем для краткости называть *изогоной*. При этом позиционный угол всегда отнесен к северному полюсу Луны, а не к северному полюсу мира.

Если для большого числа изогон различных звезд составлена программа, в которой коэффициенты соответствующих уравнений ошибок достаточно разнообразны, то эти уравнения позволяют определить экваториальный радиус и абсолютные отклонения отвеса $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$. При этом предполагается, что станции наблюдения могут быть привязаны к обычной триангуляционной сети, так как иначе число неизвестных было бы слишком велико; кроме того, наблюдения не должны сильно различаться по времени друг от друга. При всем этом размеры сети США или Европы достаточны для получения хороших результатов.

В отношении триангуляции мы различаем три случая.

1. Имеется триангуляция и выравненные отклонения отвеса; тогда полученные величины $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ суть поправки к принятым абсолютным компонентам отклонения отвеса в центральном пункте; они действительны и для всей области триангуляции.

2. Имеется триангуляция, но без выравнивания отклонений отвеса; тогда полученные поправки $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ дают абсолютные отклонения отвеса в центральном пункте, и к этим последним могут быть затем отнесены триангуляцией и астрономическими определениями абсолютные отклонения отвеса для каждого пункта триангуляции.

3. Триангуляции нет; тогда число неизвестных увеличивается с каждой станцией на два ($\Delta\phi$, $\Delta\lambda$) и решение только на этой основе оказывается невозможным.

Как мы видим, описываемый способ требует большой и очень точной предварительной работы. Она состоит в следующем,

1. Интерполирование лунной эфемериды при каждой изогоне для максимальной продолжительности наблюдений 1 час, если ограничиваться областями вроде США или Европы (требуется наивысшая относительная точность).

2. Получение точных координат звезд.

3. Вычисление изогон на земной поверхности и проверка их пригодности с помощью точной карты Луны (Парижский атлас или профили Ваттса).

4. Выбор подходящих точек наблюдения на изогоне и повторное точное вычисление позиционного угла.

Как уже указывалось, для интервала времени, когда граница тени движется по земной поверхности от одной станции наблюдения к другой, лунная эфемерида должна быть известна с очень высокой относительной точностью. Этот промежуток времени при покрытиях звезд обычно не превышает 1 час.

Ошибка в $0'',00054$ в положении Луны даст при среднем расстоянии Луны ошибку положения тени в фундаментальной плоскости, равную

$$\frac{0,00054}{206265} \cdot 384 \cdot 10^6 = 1 \text{ м},$$

а на земной поверхности, как правило, больше. Таким образом, ошибке положения в 1 м соответствуют ошибки в угловых координатах Луны

$$\Delta\alpha_{\zeta} = 0^s,00004 \quad \text{и} \quad \Delta\delta_{\zeta} = 0'',00054.$$

В American Ephemeris и Astronomical Ephemeris с 1960 г. публикуются положения Луны через часовые интервалы с точностью $0^s,001$ по прямому восхождению и $0'',01$ по склонению, т. е. на один знак больше, чем до этого времени давали Ежегодники. Интерполирование с разностями высших порядков позволяет получить из этой эфемериды значения, относительная точность которых за короткое время наблюдений равна $0'',0001$.

§ 2. Фотоэлектрическое наблюдение покрытий

Весьма слабый свет обычно неярких звезд, который доходит до наблюдателя незадолго до соприкосновения с темным краем Луны, требует совершенно иной техники наблюдения и регистрации, чем та, которая применяется при спектрофотометрических наблюдениях Солнца (гл. XII). Дело состоит прежде всего в том, чтобы незадолго до момента контакта навести телескоп на звезду и следовать за ней, заботясь о том, чтобы ее свет постоянно падал на фотоземлет. Очень слабый фототок, усиленный в миллионы раз, подводится затем к регистрирующему прибору с марками времени,

Из результатов этой регистрации выводится момент исчезновения звезды с точностью до 0,01 сек. Вследствие многочисленных помех эта сложная техника может быть с успехом применена только опытными наблюдателями. Однако в астрономии она уже оправдала себя; например, она облегчает измерение радиусов звезд и разделение двойных звезд с расстоянием до 0",01 [2].

Фотометрический принцип был впервые применен К. Шварцшильдом [3] к Солнцу. Позже, основываясь на этом, Уитфорд [4] разработал технику фотоэлектрической регистрации покрытий звезд, которая применяется в Америке и с небольшими изменениями — в европейских странах. В недавно сконструированном О'Кифом и Мирсом [5] приборе удалось устранить ряд источников ошибок и неуверенностей в работе и этим достичь такой точности, которая при современном знании топографии лунного края и для ставившихся до сих пор задач еще не использовалась полностью. Фотометрическая разрешающая способность использованного для измерений переносного 12-дюймового касегреновского телескопа так велика, что она соответствует разрешающей силе 800-дюймового телескопа. Однако инструмента с таким большим отверстием до настоящего времени нет (Маунт Паломар — 5 м). Сравнение осуществляется так: принцип «800-дюймового телескопа» родствен известенному принципу камеры-обскуры. Для весьма малых апертур и больших фокусных расстояний камера-обскура имеет ту же разрешающую способность, что и линзовая камера с тем же фокусным расстоянием. Теоретически по принципу камеры-обскуры мыслим инструмент с неограниченной разрешающей способностью. Для этого необходимо лишь сделать фокус больше, чем

$$f = \frac{2r^2}{\lambda} \text{ (по Релею),}$$

где r — радиус апертуры, а λ — длина волны света. Конечно, на практике этот принцип может быть осуществлен только приближенно.

Наблюдение звезды или Солнца в момент касания с Луной можно сравнить с наблюдением через гигантскую камеру-обскуру. Точку соприкосновения источника света с лунным краем при этом сравнении следует принять за отверстие камеры. Объект — источник света — находится почти в бесконечности; плоскость изображения представляется на Земле, а расстояние до изображения равно расстоянию Луны до земного наблюдателя. При полном отверстии или щели полностью исчезает приведенное выше ограничение. Однако можно себе представить, что падение интенсивности света с приближением его источника к лунному краю происходит от прохождения через воображае-

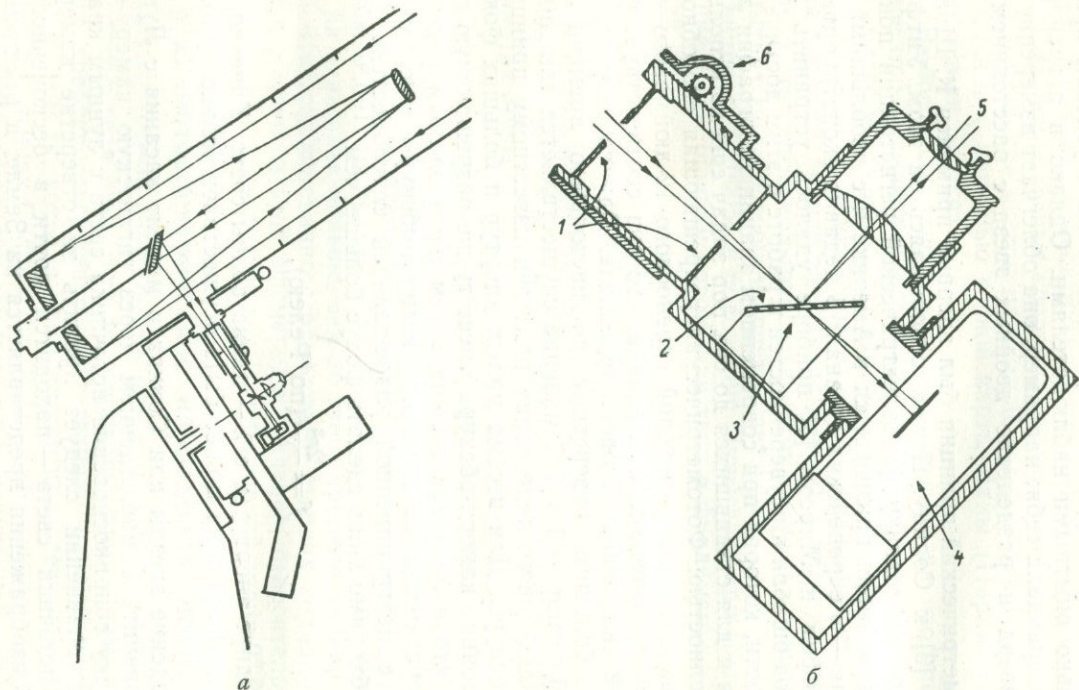


Рис. 98. Фотометрический телескоп по О'Кифу и Мирсу.

a — телескоп, на спрингфилдской монтировке, *б* — увеличенное изображение головки фотометра; 1 — диафрагмы, 2 — металлическое зеркало, 3 — малые отверстия, 4 — фотоумножитель, 5 — окуляр, 6 — фокусирующий винт.

мые многочисленные параллельные щели, ширина которых стремится к нулю. Функция падающего количества света зависит как от движения, так и от формы края. Если при этом сведении к щели или отверстию формула Релея действительна хотя бы приближенно, мы получим для диаметра апертуры при $\lambda = 0,56 \text{ мк}$ и при среднем расстоянии Луны 384 000 км для размера изображения

$$D = 21 \text{ м} (\approx 820 \text{ дюймов})$$

и для разрешающей способности

$$\frac{\lambda}{D} \cdot 206265 = 0'',0055.$$

Правильность этого приближенного представления подтверждается многократным применением метода на практике [5].

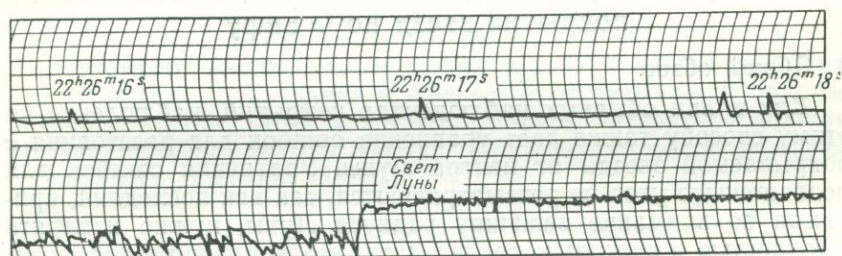


Рис. 99. Пример регистрации момента покрытия (О'Киф и Андерсон, станция 3, звезда 501).

Невидимая линия тени Луны, которой касается покрываемая звезда, окаймлена светлыми и темными полосами; наиболее ярко выраженная из них имеет на Земле ширину около 10 м, что и ставит предел для точности метода в $0'',005$.

В новой аппаратуре О'Кифа и Мирса вблизи фокальной плоскости телескопа установлено металлическое зеркало с малыми отверстиями (0,2 мм). Металлическое зеркало дает возможность наблюдать через боковой окуляр. Благодаря этому становится возможным телескоп вести так, что свет звезды попадает через эти отверстия на фотоумножитель. На рис. 98 воспроизведен фотометрический телескоп на так называемой спрингфилдской монтажке. Свет звезды, пройдя через отверстия зеркала, попадает на фотоумножитель. Фототок, даваемый 9-ступенчатым фотоумножителем, после дальнейшего усиления (всего 1 : 1 000 000) регистрируется чернильным самописцем. Последние более надежны, чем фотографические.

На ленте (рис. 99) на верхней половине записываются через секунду сигналы времени от часов, а на нижней части — сигнал

погружения. Для подразделения шкалы времени целесообразно использовать электрическую частоту. При требуемой высокой чувствительности к свету регистрация и отождествление «сигнала» оказываются делом затруднительным, так как отношение «сигнал/шум» вследствие применяемого высокого усиления очень мало. Шумы происходят от нерегулярного покидания электронами катода, от рассеянного в атмосфере лунного света, от темновых токов в фотоэлементе, от мерцания звезд и от усилителя. Наиболее опасным источником помех оказался лунный свет. Поэтому на северном полушарии самые лучшие наблюдения получаются вблизи первой четверти на темном северном крае; лучшее время для наблюдений — около 1 февраля, наихудшее — около 1 августа.

§ 3. Теория специального наблюдения покрытий звезд по О'Кифу

1. Общий обзор

Как и при обычных наблюдениях покрытий, наблюдение по этому способу также дает уравнения ошибок для расстояния σ покрываемой звезды от центра Луны. Уравнения ошибок для позиционного угла не рассматриваются, так как последний, принимая во внимание величину радиуса Луны, нужно измерять с точностью в несколько секунд дуги, чтобы получить результат наблюдений, равноценный получаемому из расстояний. Свободные члены $\Delta\sigma$, выведенные по разностям «наблюдение минус теория», расчленяются по входящим в задачу неизвестным. При этом в зависимости от важности или уверенности определения под конец делают некоторые упрощения. Так, О'Киф и Андерсон, поскольку малое число наблюдений не позволяло решить проблему в целом, ограничились определением поправки к экваториальному радиусу Земли. Последняя может быть заменена, с введением динамического параллакса Луны, поправкой расстояния до Луны. Далее, можно положить равными нулю поправки $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ исходной точки, если последние будут окончательно определяться другими способами (выравнивание отклонений отвеса). С другой стороны, зная скорость тени, можно измерить большие расстояния (§ 6). Таково современное состояние практического решения задачи.

2. Теория

В дальнейшем через σ мы будем обозначать расстояние звезды, касающейся края Луны, от центра последней, каким оно вычисляется для момента наблюдения в фундаментальной плоскости по координатам звезды и геоцентрическим координатам

Луны. Таким образом, расстояние σ обозначает расстояние пункта наблюдения (ξ, η) от линии, соединяющей звезду и Луну (x, y) ; так же, как величины ξ, η, x, y и геоцентрическое расстояние ρ , оно должно быть в этой главе выражено в метрах. В обозначениях О'Кифа, которые мы сохранили, чтобы не затруднять изучения первоисточника, выведенные в гл. VI соотношения дают

$$\sigma^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2; \quad (13.1)$$

$$x = p \sin(\alpha_{\odot} - \alpha_{*}) \cos \delta_{\odot}, \quad (13.2)$$

$$y = p [\sin \delta_{\odot} \cos \delta_{*} - \cos \delta_{\odot} \sin \delta_{*} \cos(\alpha_{\odot} - \alpha_{*})];$$

$$\xi = \rho \cos \varphi' \sin \vartheta,$$

$$\eta = \rho \sin \varphi' \cos \delta_{*} - \rho \cos \varphi' \sin \delta_{*} \cos \vartheta; \quad (13.3)$$

$$\vartheta = \mu_{*} + \lambda \text{ (местный часовой угол звезды).}$$

Гринвичский часовой угол звезды μ_{*} и координаты x, y, ξ, η соответствуют наблюденному моменту контакта ¹⁾. Долгота места относительно Гринвича в этой главе отсчитывается положительно к востоку, хотя в астрономической литературе долготы обычно положительны к западу. Это сделано из-за вводимой дальше координатной системы.

3. Система координат

При дальнейшей обработке используются три различные прямоугольные системы координат.

а) Земная звездная система (ξ, η, ζ) Бесселевой фундаментальной плоскости с положительными направлениями: ζ — к звезде, ξ и η — в фундаментальной плоскости к востоку и северу соответственно. Заданный вектор определяется относительно осей ξ, η, ζ направляющими косинусами l_1, l_2, l_3 .

б) Земная система вращения (u, v, w) с центром в центре Земли; направление w совпадает с направлением средней астрономической оси вращения и положительно к северному полюсу; u и v в плоскости экватора; u — положительно в направлении на Гринвичский астрономический меридиан, v — положительно в направлении на Индию. Заданный вектор имеет относительно этих осей направляющие косинусы m_1, m_2, m_3 .

в) Земная горизонтальная система (E, N, V) с центром в пункте наблюдения, с направлением V в астрономический зенит; горизонтальное направление E положительно к востоку, а горизонтальное направление N положительно к северу. Заданный

¹⁾ Учитывая, что в числовом примере (§ 5) эфемериды Луны дана по всемирному времени, в дальнейших выводах используется также всемирное время. О поправках ΔT , которые следует учитывать в будущем, см. гл. V.

вектор определяется относительно этих осей направляющими косинусами n_1, n_2, n_3 .

Все системы координат правые. Переход от одной системы к другой может быть выполнен по табл. 52.

Таблица 52

	m_1	m_2	m_3
l_1	$+\sin \mu_*$	$+\cos \mu_*$	0
l_2	$-\sin \delta_* \cos \mu_*$	$+\sin \delta_* \sin \mu_*$	$+\cos \delta_*$
l_3	$+\cos \delta_* \cos \mu_*$	$-\cos \delta_* \sin \mu_*$	$+\sin \delta_*$
	n_1	n_2	n_3
m_1	$-\sin \lambda$	$-\sin \varphi \cos \lambda$	$+\cos \varphi \cos \lambda$
m_2	$+\cos \lambda$	$-\sin \varphi \sin \lambda$	$+\cos \varphi \sin \lambda$
m_3	0	$+\cos \varphi$	$+\sin \varphi$
	n_1	n_2	n_3
l_1	$+\cos \vartheta$	$-\sin \varphi \sin \vartheta$	$+\cos \varphi \sin \vartheta$
l_2	$+\sin \delta_* \sin \vartheta$	$\left\{ \begin{array}{l} +\sin \delta_* \sin \varphi \cos \vartheta \\ +\cos \delta_* \cos \varphi \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -\sin \delta_* \cos \varphi \cos \vartheta \\ +\cos \delta_* \sin \varphi \end{array} \right.$
l_3	$-\cos \delta_* \sin \vartheta$	$\left\{ \begin{array}{l} -\cos \delta_* \sin \varphi \cos \vartheta \\ +\sin \delta_* \cos \varphi \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} +\cos \delta_* \cos \varphi \cos \vartheta \\ +\sin \delta_* \sin \varphi \end{array} \right.$

Переход от системы a фундаментальной плоскости к системе с горизонтальной плоскостью используется для получения движения тени при выборе мест наблюдения на земной поверхности (направление изогоны) и при разрезе по методу тени (§ 6). В этих параграфах мы применяем только системы a и b . Из табл. 52 непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \xi &= u \sin \mu_* + v \cos \mu_*, \\ \eta &= -u \sin \delta_* \cos \mu_* + v \sin \delta_* \sin \mu_* + w \cos \delta_* \end{aligned} \quad (13.4)$$

и в геоцентрических полярных координатах

$$\begin{aligned} u &= \rho \cos \varphi' \cos \lambda, \\ v &= \rho \cos \varphi' \sin \lambda, \\ w &= \rho \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Поскольку геоцентрический радиус ρ может иметь наклон к вертикали до 17° , а потому и геоцентрическая широта φ' изменяется с высотой станции над уровнем моря, практичнее вместо ρ ввести радиус кривизны N эллипсоида на широте φ . Последний лежит так близко к линии отвеса, что высота станции h может быть непосредственно прибавлена к N . Введя астрономическую широту φ , получаем вместо уравнения (13.5)

$$\begin{aligned} u &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ v &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ \omega &= [(1 - e^2)(N + h)] \sin \varphi, \\ N &= a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Поскольку здесь нужно найти поправку экваториального радиуса, то неважно, найдена ли она по ρ или по N .

4. Составление уравнений ошибок для расстояний

Пусть σ — радиус Луны в метрах, каким он получается из уравнения (13.1) по измеренному моменту контактов, и $k_0 = 1\,737\,988$ м — условный средний радиус Луны; тогда величина

$$\Delta\sigma = \sigma - k \quad (13.7)$$

может быть получена для каждого контакта. Таким образом, мы ищем уравнение ошибок вида

$$\Delta\sigma = b_1 \Delta u + b_2 \Delta v + b_3 \Delta \omega + b_4 \Delta \alpha_\zeta + b_5 \Delta \delta_\zeta + b_6 \Delta p - \Delta k, \quad (13.8)$$

в котором коэффициенты b — частные производные $\Delta\sigma$ по неизвестным. Дифференцированием уравнения (13.7) получаем

$$\Delta\sigma = \frac{x - \xi}{\sigma} (\Delta x - \Delta \xi) + \frac{y - \eta}{\sigma} (\Delta y - \Delta \eta) - \Delta k. \quad (13.9)$$

Положив

$$\frac{x - \xi}{\sigma} = \sin \chi, \quad \frac{y - \eta}{\sigma} = \cos \chi, \quad (13.10)$$

получаем

$$\Delta\sigma = (\Delta x - \Delta \xi) \sin \chi + (\Delta y - \Delta \eta) \cos \chi - \Delta k. \quad (13.11)$$

Позиционный угол χ (от звезды к центру Луны) отсчитывается в фундаментальной плоскости от севера через восток по часовой стрелке, на небе — против часовой стрелки, также от севера через восток. Позиционный угол от центра Луны к точке контакта отличается от χ почти на 180° .

В (13.11) Δx , Δy , $\Delta \xi$, $\Delta \eta$ должны быть выражены через переменные уравнения (13.8); в $\Delta \xi$, $\Delta \eta$ поправки положений звезд

могут быть отброшены вследствие их незначительности. Они обычно порядка $0''{,}1$, и их влияние на координаты пункта наблюдения выражается несколькими метрами. Из (13.4) получаем

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \sin \mu_* \Delta u + \cos \mu_* \Delta v, \\ \Delta \eta &= -\sin \delta_* \cos \mu_* \Delta u + \sin \delta_* \sin \mu_* \Delta v + \cos \delta_* \Delta w, \end{aligned} \quad (13.12)$$

из (13.2)

$$\begin{aligned} \Delta x &= p \cos \delta_{\zeta} \Delta \alpha_{\zeta} \frac{x}{p} \Delta p, \\ \Delta y &= p \Delta \delta_{\zeta} + \frac{y}{p} \Delta p. \end{aligned} \quad (13.13)$$

В уравнениях (13.13) ошибки положений звезд учтены постольку, поскольку под $\Delta \alpha_{\zeta}$ и $\Delta \delta_{\zeta}$ подразумеваются поправки положения Луны относительно покрываемой звезды. Подставляя полученные выражения в (13.11), получаем коэффициенты уравнения ошибок (13.8):

$$\begin{aligned} b_1 &= -\sin \mu_* \sin \chi + \sin \delta_* \cos \mu_* \cos \chi, \\ b_2 &= -\cos \mu_* \sin \chi - \sin \delta_* \sin \mu_* \cos \chi, \\ b_3 &= -\cos \delta_* \cos \chi, \quad b_5 = p \cos \chi, \\ b_4 &= p \cos \delta_{\zeta} \sin \chi, \quad b_6 = \frac{x \sin \chi + y \cos \chi}{p}. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Пренебрегая членами с квадратом эксцентриситета и отбрасывая поправки за высоту геоида, получаем из (13.6)

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta(N+h) \cos \varphi \cos \lambda - (N+h) \sin \varphi \cos \lambda \Delta \varphi - \\ &\quad - (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \Delta \lambda, \\ \Delta v &= \Delta(N+h) \cos \varphi \sin \lambda - (N+h) \sin \varphi \sin \lambda \Delta \varphi + \\ &\quad + (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \Delta \lambda, \\ \Delta w &= \Delta(N+h) \sin \varphi + (N+h) \cos \varphi \Delta \varphi \end{aligned} \quad (13.15)$$

и

$$\Delta(N+h) \approx N \frac{\Delta a}{a}. \quad (13.16)$$

Отсюда можем написать

$$\begin{aligned} \Delta u &= u \frac{\Delta a}{a} - u \operatorname{tg} \varphi \Delta \varphi - v \Delta \lambda, \\ \Delta v &= v \frac{\Delta a}{a} - v \operatorname{tg} \varphi \Delta \varphi + u \Delta \lambda, \\ \Delta w &= w \frac{\Delta a}{a} + w \operatorname{ctg} \varphi \Delta \varphi; \end{aligned} \quad (13.17)$$

теперь нехватает только члена $b_6 \Delta p$.

5. Введение динамического параллакса Луны

Поправка расстояния Луны Δp является функцией поправок экваториального радиуса Δa и параллакса Луны ΔP . Так как

$$p = \frac{a}{\sin P}, \quad (13.18)$$

то

$$\Delta p = \frac{\Delta a}{\sin P} - \frac{a}{\sin P} \operatorname{ctg} P \frac{\Delta P''}{206265} \quad (13.19)$$

или

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta P}{P}.$$

Поскольку отношение мгновенного расстояния Луны к среднему расстоянию p_m очень точно известно из теории, то имеем

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p_m}{p_m} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta P_m}{P_m}. \quad (13.20)$$

Для поправки ΔP_m среднего параллакса Луны получается из динамического параллакса следующее выражение (гл. III, уравнение (3.50)):

$$\Delta P_m = \frac{\operatorname{tg} P}{3a} \Delta a - \frac{\operatorname{tg} P}{3g_a} \Delta g_a + \frac{\operatorname{tg} P}{3 \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right)} \Delta \left(\frac{1}{\mu} \right) - \frac{\operatorname{tg} P}{3n(n-1)} \Delta n. \quad (13.21)$$

Вследствие относительно большой неуверенности экваториального радиуса (~ 300 м) первый член справа намного превосходит остальные; поэтому поправками последних в ходе дальнейшей обработки можно пренебречь, когда с помощью уравнения (13.21) совершается переход к наиболее точным в данное время значениям g_a (сила тяжести на экваторе) и μ (отношение массы Луны к массе Земли).

Ламберт [6] использовал следующие исходные значения для динамического параллакса:

$$a = 6378388 \text{ м}, \quad g_a = 978,052 \text{ см/сек}^2, \\ \mu = \frac{1}{81,53}, \quad n = 297,0.$$

Отсюда по уравнению (13.21) получаем, если a дано в км, а g_a в см/сек²,

$$\Delta P_m'' = 0,179 \Delta a - 1,17 \Delta g_a + 0,170 \Delta \left(\frac{1}{\mu} \right) - 0,0130 \Delta n. \quad (13.22)$$

О'Киф и Андерсон, сохранив $n = 297,0$, положили в основу динамического параллакса значения $g_a = 978,036^1)$ и $1/\mu = 81,27$ (Спенсер-Джонс). Со следующими отсюда поправками

$$\Delta g_a = -0,016; \quad \Delta \left(\frac{1}{\mu} \right) = -0,26; \quad \Delta n = 0$$

можно свести поправку ΔP_m к единственной поправке экваториального радиуса. Из (13.22) получаем

$$\Delta P_m'' = \frac{tg P_m}{3a} \cdot 206265 \Delta a - 0'',025. \quad (13.23)$$

Подставляя (13.23) в (13.19), получаем из динамической теории (в метрах)

$$\Delta p = \frac{2}{3 \sin P} \Delta a + 2790. \quad (13.24)$$

Подставив (13.24) и (13.17) в (13.18), причем свободный член из Δp переносится в левую часть, получаем уравнение ошибок для расстояния σ в метрах

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= \frac{x \sin \chi + y \cos \chi}{a} \cdot 2790 \cdot \sin P = \\ &= \Delta a \left\{ \cos \varphi (\sin \delta_* \cos \chi \cos \vartheta - \sin \chi \sin \vartheta) - \sin \varphi \cos \delta_* \cos \chi + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{3} \frac{x \sin \chi + y \cos \chi}{a} \right\} - \frac{\Delta \varphi'' \cdot a}{206265} \left\{ \sin \varphi (\sin \delta_* \cos \chi \cos \vartheta - \right. \\ &- \left. \sin \chi \sin \vartheta) + \cos \varphi \cos \delta_* \cos \chi \right\} - \\ &- \frac{\Delta \lambda'' \cdot a}{206265} \cos \varphi \left\{ \sin \delta_* \cos \chi \sin \vartheta + \sin \chi \cos \vartheta \right\} + \\ &+ \frac{\Delta a''_{\zeta}}{206265} p \cos \delta_{\zeta} \sin \chi + \frac{\Delta \delta''_{\zeta}}{206265} p \cos \chi - \Delta k. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Здесь

$$\vartheta = \mu_* + \lambda$$

— местный часовой угол (λ положительно к востоку). Поправки $\Delta a''_{\zeta}$ и $\Delta \delta''_{\zeta}$ следует понимать как поправки относительно звезды. Последние три члена уравнения ошибок (13.25) постоянны для всех станций, с которых наблюдается покрытие одной и той же звезды под одинаковым позиционным углом, если можно поручиться, что точке равных позиционных углов на крае Луны действительно соответствует одно и то же значение k ; однако последнее из-за либрации не всегда удовлетворяется достаточно

¹⁾ Потсдамское значение с поправкой -16 мгал (предварительное международное, 1953 г.).

точно. Сделав такое предположение, мы можем связать астрономические неизвестные следующими соотношениями:

$$\frac{\Delta\alpha''}{206265} \cdot p \cos \delta_{\zeta} \sin \chi + \frac{\Delta\delta''}{206265} \cdot p \cos \chi - \Delta k = U'. \quad (13.26)$$

Из остатка U' могут быть выведены — при достаточной точности наблюдений и редукции — интересные с астрономической точки зрения дополнительные поправки для Луны.

Если внутри замкнутой триангуляционной сети имеется общее выравнивание отклонений отвеса (для Европы по Вольфу [7]) или абсолютные отклонения отвеса для центрального пункта выведены из аномалий силы тяжести (для Северной Америки по Райсу [8]), то можно получить неизвестные $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ для всех точек наблюдения в этой триангуляционной сети.

Если считать достаточно точными поправки $\Delta\phi_0$, $\Delta\lambda_0$ центрального пункта, выведенные по выравниванию отклонений отвеса (что, однако, едва ли допустимо), то в уравнения войдет только одно существенное неизвестное Δa . Каждый пункт наблюдения даст одно уравнение ошибок. Если наблюдения расстояния производились, как это обычно было до сих пор, с различными позиционными углами, то в каждое наблюдение войдет еще одно существенное неизвестное — поправка радиуса Луны Δk , различная для каждого пункта наблюдения. Тогда задача заключалась бы в решении весьма обширного наблюдательного материала, в предположении, что из него исключены все неправильности края Луны.

При наблюдении в постоянном позиционном угле для звезды, наблюдавшейся по меньшей мере на двух станциях, войдет одна и та же неизвестная Δk , входящая в остаточный член U' и не препятствующая выводу Δa , $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, так как их коэффициенты сильно меняются.

Наблюдения отдельных контактов неравновесны; их вес зависит от величины коэффициентов и скорости движения тени по Земле во время наблюдения. Более подробно об этом сказано в работе О'Кифа и Андерсон [1].

§ 4. Предвычисление изогоны

Изогона определяется тем, что во всех последовательных фундаментальных плоскостях имеет место соотношение

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{x - \xi}{y - \eta} = \operatorname{const}. \quad (13.27)$$

Здесь χ — позиционный угол центра Луны относительно звезды; позиционный угол точки покрытия относительно центра Луны

близок к $\chi \pm 180^\circ$; x и y зависят в каждый момент времени только от расстояния Луны и от координат Луны и звезды, ξ и η — от часового угла звезды и от координат места наблюдения.

1. Американский метод (О'Кифа)

После предварительной ориентировки, которая лишь весьма приближенно должна дать пространственный и временной ход изогонии по земной поверхности вблизи предполагаемых станций наблюдения, на линиях, перпендикулярных к предварительной изогонии, строго вычисляются для определенных моментов времени группы значений x , y , ξ , η . После этого можно нанести на карту (масштаб 1:25000) систему изогоний вблизи запланированных станций, например в районе $0^\circ,5 \times 0^\circ,5$. С окончательно вычисленным для исходного пункта I значением χ_1 изогонии χ_1 может быть квадратически проинтерполирована по карте для всех остальных (далеко отстоящих друг от друга) станций наблюдения. При этом течение изогонии может быть определено с точностью $\pm 0^\circ,1$ — $\pm 0^\circ,2$.

Прежде всего следует убедиться, что выполняются следующие требования.

1. Выбранная станция и ее окрестности должны быть легко доступны.

2. Станция наблюдения может быть легко привязана к триангуляции.

3. Точки касания и их непосредственные окрестности должны, с учетом параллактической либрации, приходиться на подходящее (благоприятное) место края Луны (Атлас лунных профилей, Париж; Лунные профили Ваттса).

После этого можно строго вычислить для окончательно избранного пункта позиционный угол и с дифференциальными формулами для поправок, перпендикулярно к изогонии, найти место, которое наиболее точно соответствует исходному значению χ_1 .

Исходный пункт лучше всего выбирать там, где самая трудная топографическая и съемочная обстановка, так как все остальные станции намечаются в зависимости от исходной. По окончании программы наблюдений мы будем иметь возможность контроля, состоящего в том, что для всех станций одной изогонии уравнение (13.27) должно выполняться внутри известных границ.

Из-за вращения Луны в картинной плоскости позиционный угол относительно северного полюса мира немного меняется; со временем это изменение следует учитывать от станции к станции, если покрытие должно происходить в одной и той же точке физического края Луны. Указанное изменение для расстояния

между станциями в 1000 км составляет несколько минут дуги. Угловая скорость вращения Луны вокруг центра ее диска по формуле Хенриксена ([1], стр. 230) равна

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sin i, \quad (13.28)$$

где $T = 27^d3217$ — сидерический период Луны, а i — наклон лунной оси к фундаментальной плоскости.

2. Японский метод (Хироze)

Как сообщает Хироze [9], в Японии также наблюдали покрытия при помощи электронных приборов. Вместо введенного нами выражения «изогона» в [9] употребляется термин «equal limb line»; под этим понимается линия на земной поверхности, из точек которой покрытие представляется в одной и той же точке края Луны; это эквивалентно понятию изогоны.

Если желательнее обеспечить вершину параллактического треугольника, базис которого образуют две земные станции в одной и той же точке лунного края, пункты наблюдения выбираются на этой линии. Вследствие перекрытий в краевой зоне лунного диска приходится считать с возможностью ошибок даже тогда, когда отнесенный к северному полюсу Луны позиционный угол для обеих станций в точности одинаков. Для того чтобы можно было наблюдать на подыскиваемой станции II в момент t_{II} покрытия звезды точно тем же местом лунного края, в каком оно наблюдается в момент t_I на базисной станции I, Хироze рекомендует следующий путь (рис. 100).

Ищут координаты $\varphi_{II'}$, $\lambda_{II'}$ точки II', лежащей на том же эллипсоиде, что и станция I, и для которой, согласно вычислениям, покрытие имеет место в момент t_{II} . Тогда это явление произойдет в момент t_{II} и для каждой точки, лежащей на луче станция II — звезда. С помощью высоты и азимута звезды графически ищем точку пересечения этого луча с профилем местности. Точка II лежит на изогоне, и ее координаты φ , λ , h также могут быть вычислены.

Этот способ исходит из молчаливого предположения, что происходящие от Луны различия между наблюдением и предвычислением одинаковы для станций I и II. После того как для покрытия на станции I вычислены обычным образом момент t_I и позиционный угол χ_I , по скорости движения тени находится момент t_{II} . Все точки, для которых контакт наступает в момент t_{II} при позиционном угле χ , имеют в фундаментальной плоскости координаты

$$\xi = x - k \sin \chi, \quad \eta = y - k \cos \chi, \quad (13.29)$$

причем x и y вычисляются для выбранного момента t_{II} . Из точек, удовлетворяющих этим уравнениям, станция II' должна лежать на том же эллипсоиде, что и станция I. Таким образом,

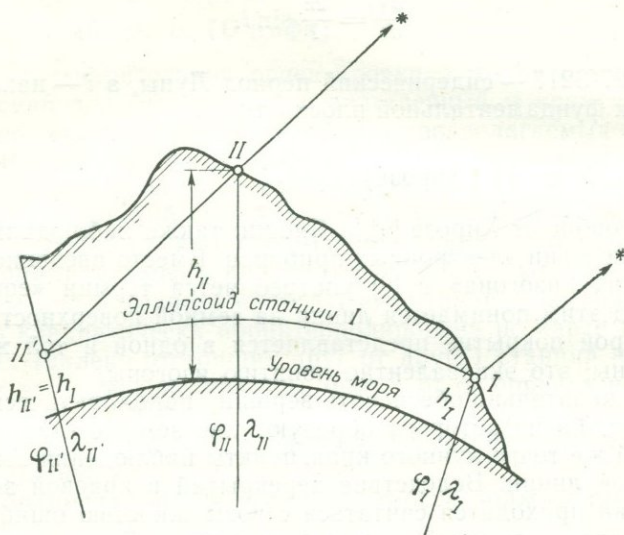


Рис. 100. Предвычисление изогоны по Хирозе.

ее координата ξ может быть получена из уравнения этого эллипсоида. Затем координаты ξ, η, ζ точки II' преобразуются в географические координаты φ, λ точки II' по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u &= \xi \sin \mu_* - \cos \mu_* (\eta \sin \delta_* - \zeta \cos \delta_*), \\ v &= \xi \sin \mu_* + \sin \mu_* (\eta \sin \delta_* - \zeta \cos \delta_*), \\ w &= \eta \cos \delta_* + \zeta \sin \delta_*; \end{aligned} \quad (13.30)$$

$$\operatorname{ctg} \lambda = \frac{u}{v}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{u \cos \lambda + v \sin \lambda}{w + Ne^2 \sin \varphi}; \quad (13.31)$$

μ_* , δ_* — гринвичский часовой угол и склонение звезды, k — радиус Луны.

После того как определено положение точки II' , находим координаты φ, λ, h точки II по азимуту и высоте звезды; проще всего это делается графическим путем. Хирозе получил этим методом значение экваториального радиуса $a = 6\,377\,879 \pm 357$ м.

3. Область применения

Если желательно продлить изогону на большое расстояние, то сначала неизбежно придется установить идентичность точки лунного края. В связи с этим встает вопрос, какой же длины изогоны могут быть выбраны для наблюдений.

В пределах североамериканского и европейского континентов в распоряжении имеются известные из геодезических измерений расстояния в несколько тысяч километров по всем направлениям. Чем длиннее различные изогоны и чем сильнее они различаются по среднему азимуту, тем благоприятнее будут результаты как в $\Delta\alpha$, так и в $\Delta\phi_0$ и $\Delta\lambda_0$. Труднее ответить на вопрос, насколько точно с данной изогоной покрываемая звезда наблюдается касающейся одной и той же точки лунного края,

Как уже выяснено, для расстояний, пробегаемых тенью примерно за час, достаточно интерполировать эфемериду Луны. При этом точки на крае Луны получаются с относительной точностью в несколько десятитысячных долей секунды дуги. И без того малые ошибки специально переработанного звездного каталога совершенно выпадают при относительном определении положения, а геодезические координаты, полученные по единой триангуляции, имеют на краях континента точность ± 10 м.

Остается вопрос о рельефе лунного края. Даже при больших расстояниях заданный и редуцированный за либрацию позиционный угол может удерживаться в пределах $6'$; поэтому речь идет в первую очередь о том, чтобы найти такое место края, которое в этом интервале углов по поверхности меньше отклонилось бы от некоторой ровной поверхности на Луне. Такие места встречаются часто. Малые остатки неровностей края, которые все-таки войдут в наблюдения даже при постоянстве позиционного угла, могут быть исключены с помощью специальных наблюдений этих участков края.

§ 5. Пример наблюдения покрытия звезды в постоянном позиционном угле

Для дальнейшего пояснения мы используем наблюдения О'Кифа и Андерсон [1] и приведем выборочно некоторые данные обработки. Наблюдались 4 звезды на 9 станциях (см. табл. 53 и рис. 101).

На ленте самописца (см. рис. 99) моменты даны по центральному стандартному времени¹⁾. Снятые с нее моменты контактов были исправлены введением различных поправок

¹⁾ Время XVIII часового пояса, которое на 6 час меньше всемирного времени. — Прим. ред.

(сигналы времени, инструментальные поправки, поправки за скорость распространения радиоволн). В столбце 5 табл. 56 дается исправленное время покрытия. К геодезически определенному

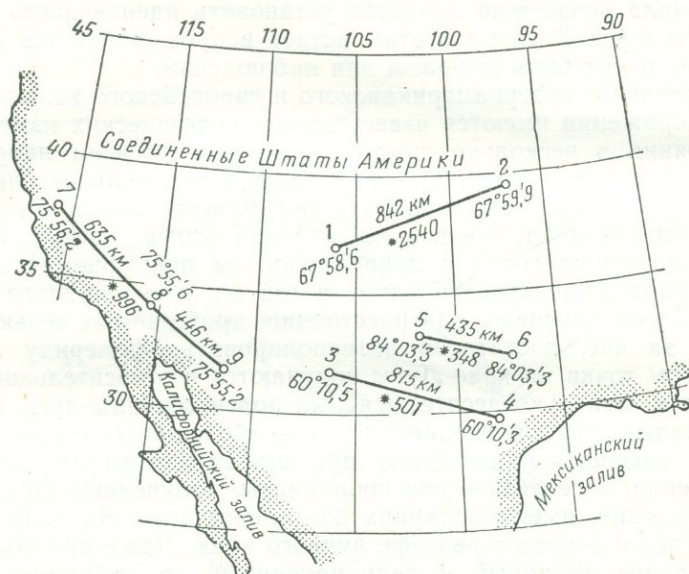


Рис. 101. Изогоны по О'Кифу и Андерсон. Углы суть позиционные углы касания края, отсчитываемые относительно центра Луны и направления на северный полюс мира.

уровню моря прибавляется высота геоида над международным эллипсоидом, высота инструмента и поправка высоты за рефракцию (гл. II, § 3) (столбец 4 табл. 56). На основе профилей края Парижского атласа лунных профилей было сделано заключение, что изогона 5—6 была выбрана неудачно, так как

Таблица 53

Видимые места звезд

№ ЗС	Яркость	Дата	α вид.	δ вид.	Звездное время в 0 ^h вс. вр.	Наблюдение на станции №№
2540	7 ^m ,0	1949 сент. 1	17 ^h 37 ^m 12 ^s ,13	-28°54'0",7	22 ^h 39 ^m 18 ^s ,093	1 и 2
501	6,1	1950 февр. 24	3 25 30,80	+22 38 9,1	10 13 12,021	3 и 4
348	6,8	1950 март 22	2 19 47,02	+16 38 38,9	11 55 42,424	5 и 6
996	6,8	1950 апрель 23	6 27 12,97	+28 15 0,6	14 1 52,159	7, 8, 9

Таблица 54

Видимые места Луны, 1949, сент. 1
(выдержки)

Вс. время	α вид.		δ вид.	
0 ^h	17 29 ^m 42 ^s ,71		—28° 0' 16",0	
1	17 32 13,36	150 ^s ,65	28 3 10,0	174",0
2	17 34 44,00	150,64	28 5 53,5	163,5
3	17 37 14,62	150,62	28 8 26,5	153,0
4	17 39 45,22	150,60	28 10 49,2	142,7
5	17 42 15,79	150,57	28 13 1,4	132,2
6	17 44 46,33	150,54	—28, 15 3,2	121,8

Таблица 55

Радиус и параллакс Луны
(выдержки)

0 ^h и 12 ^h , вс. время	Радиус	Параллакс	
1949 авг. 31,0	15' 52",27	58' 14",98	20",78
31,5	46,64	57 54,32	20,66
1949 сент. 1,0	41,12	57 34,06	20,26
1,5	35,76	57 14,37	19,69
2,0	15 30,59	56 55,40	18,97
			18,14

при изменении позиционного угла на $\pm 0^\circ,2$ место соприкосновения оказывается в точке края, которая лежит на 2" (3,7 км) выше [10].

Из отнесенных к центральному пункту (Meades Ranch) широт и долгот станций и из склонений и гринвичских часовых углов звезды в момент покрытия были вычислены координаты ξ , η пункта наблюдения (табл. 57). Координаты x , y Луны в фундаментальной плоскости были получены по проинтерполированным координатам Луны и координатам звезды. В качестве

Наблюдение

№ станции	Широта ¹⁾	Долгота ¹⁾	Высота над междунар. эллипсоидом, м	Наблюдаемое вс. время покрытия	Позиционный угол соприкосновения из центра Луны относительно		Либрация		
					северного полюса мира	оси Луны	l	b	c
1	36°57'	106°03'	2556,3	2 ^h 50 ^m 20 ^s ,203	67°59'	66°,3	+6°,2	+7°,0	+1°,7
2	39 23	96 48	443,9	3 07 47,255					
3	31 41	106 17	1145,2	4 26 16,795	60 10	73,5	-4,0	-4,7	-13,3
4	29 37	98 01	210,5	4 35 07,416					
5	33 09	101 38	943,1	2 20 31,985	84 03	98,9	-1,9	-3,2	-14,8
6	32 20	97 12	269,0	2 22 57,616					
7	37 34	120 49	62,3	4 37 42,479					
8	34 04	115 14	405,0	4 45 58,538	75 56	73,3	-7,1	-6,5	+2,6
9	31 39	111 32	1140,1	4 50 40,065					

¹⁾ Даются до 0",001; здесь же для коэффициентов дифференциальных формул — только до 1 минуты дуги.

Обработка

Станция	x, м	y, м	ξ, м	η, м	Δσ, м
1	-536,571	+5 099 297	+1 076 598	+5 751 784	+2142
2	+534 979	5 020 389	2 148 390	5 672 321	2159
3	3 305 044	1 238 866	4 815 415	2 104 719	2966
4	3 793 508	1 397 410	5 303 806	2 263 376	2960
5	3 490 415	2 813 744	5 221 126	2 993 965	2081
6	3 619 792	2 870 267	5 350 525	3 050 539	2109
7	2 800 378	1 876 777	4 488 093	2 299 570	1879
8	3 286 960	1 854 475	4 974 602	2 277 530	1872
9	3 563 105	1 841 819	5 250 714	2 265 061	1885

среднего радиуса Луны вводилась величина $k = 1\,737\,988$ м, в качестве среднего горизонтального экваториального параллакса $P_m = 3422''{,}70$. Затем из (13.7) получились приведенные в табл. 57 наблюдаемые значения $\Delta\sigma$.

В рассматриваемом случае число наблюдений было недостаточным для уверенного определения неизвестных Δa , $\Delta\varphi_0$, $\Delta\lambda_0$ по (13.25), поэтому О'Киф ввел в уравнения ошибок в качестве окончательных значений выведенные из аномалии силы тяжести [8] абсолютные отклонения отвеса центральной точки (Meades Ranch) $\Delta\varphi_0 = -1''{,}2$; $\Delta\lambda_0 = -0''{,}5$. Затем составлялись уравнения вида

$$\Delta\sigma' = A_i \Delta a + U'_k$$

(i — число наблюдений, k — число звезд; $i > k$).

Неинтересная с геодезической точки зрения неизвестная U' уравнения (13.26) для любой звезды (при идентичности точки края) имеет одно и то же значение. Если исключить ее из взаимно связанных наблюдений, то уравнения ошибок будут содержать только неизвестную Δa .

Редуцированные уравнения ошибок для Δa :

$$-0,0269 \Delta a + 6 = 0,$$

$$+0,0269 \Delta a - 6 = 0,$$

$$-0,0194 \Delta a - 5 = 0,$$

$$+0,0194 \Delta a + 5 = 0,$$

$$-0,0063 \Delta a + 14 = 0,$$

$$+0,0063 \Delta a - 14 = 0,$$

$$-0,0375 \Delta a - 3 = 0,$$

$$+0,0061 \Delta a + 7 = 0,$$

$$+0,0313 \Delta a - 4 = 0.$$

Если рассматривать выраженные в метрах свободные члены равновесными, то

$$\Delta a = +60 \text{ м} \pm 169 \text{ м}$$

и

$$a = 6378448 \pm 169 \text{ м}.$$

Если даже результаты этой первой попытки вследствие ограниченной программы наблюдений и не могут считаться удовлетворительными во всех отношениях (прежде всего в отношении лунного профиля), то они показали во всяком случае, что это метод многообещающий, позволяющий получить при достаточном его расширении не только экваториальный радиус, но и абсолютные отклонения отвеса. Большой подготовительной работе

не следует придавать много значения. Достоинно внимания то, что фундаментальные величины a , $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ в противоположность выравниванию отклонений отвеса могут быть получены из чисто геометрических соотношений.

О'Киф и Андерсон дают следующее наглядное представление о значении способа наблюдения в постоянном позиционном угле в применении к определению экваториального радиуса.

Если при известных абсолютных отклонениях отвеса внутри взаимно связанной триангуляции отказаться от поправок $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, то прежде всего по геодезическому базису, образованному двумя удаленными друг от друга точками наблюдения, и измеренной разности моментов (если приблизительно знать геометрическую форму изопозы) получится средняя скорость движения тени по земной поверхности. Это как раз та величина, которая должна быть определена на основе геодезических требований и при всех других способах. Поэтому и значение ее то же.

Скорость движения тени по земной поверхности зависит от непрерывно изменяющейся линейной скорости обращения Луны относительно центра Земли. Поправка к этой линейной скорости может быть обусловлена только экваториальным радиусом, поскольку угловая скорость Луны, а также отношение экваториального радиуса Земли к расстоянию до Луны (параллакс) известны с большой точностью.

С другой стороны, скорость перемещения тени по поверхности Земли зависит от (постоянной) линейной скорости точки поверхности Земли вследствие вращения последней. Поскольку сжатие известно, линейная скорость вращения является функцией только широты и экваториального радиуса, т. е. расстояния точки наблюдения от центра Земли, которое неуверенно приблизительно на 300 м.

При увеличении экваториального радиуса на Δa скорость тени в фундаментальной плоскости изменяется не в том же отношении: увеличение экваториального радиуса имеет следствием (уравнение 13.23) увеличение параллакса, и относительное увеличение расстояния Луны составляет поэтому (13.24) только $\frac{2}{3}$ относительного увеличения радиуса Земли. С другой стороны, линейная скорость вращения точки наблюдения увеличивается на $\Delta a \omega \cos \phi$. Благодаря этому скорость движения тени по поверхности Земли уменьшается, так что в конечном итоге она увеличивается всего на $\frac{1}{3}$ относительного увеличения радиуса Земли. Из этого О'Киф заключает, что даже при недостаточно точном значении экваториального радиуса и параллакса Луны наблюдения покрытий звезд в постоянном позиционном угле могут быть использованы для определения больших расстояний на поверхности Земли при помощи скорости движения тени.

§ 6. Геодезические засечки с помощью покрытий звезд (метод теней)

Мы упомянем еще об одном применении наблюдений покрытий звезд по О'Кифу и Андерсон, целью которого является привязка нового расположенного за океаном пункта к имеющейся системе триангуляции [11]. Техника наблюдений та же; истинные расстояния выводятся с помощью линейной скорости тени Луны на земной поверхности.

В примере (§ 5) все станции наблюдения были привязаны к одной и той же триангуляции, а абсолютные отклонения отвеса центрального пункта вводились как известные из выравнивания всех отклонений отвеса. Поэтому единственной неизвестной оставалась поправка экваториального радиуса. При расширении применения этого способа обычно бывает, что только одна из двух станций привязана к имеющейся сети триангуляции. Поэтому полагают $\Delta a = 0$, и задача состоит в том, чтобы определить поправки $\Delta \varphi$ и $\Delta \lambda$ для нового пункта с помощью известной скорости тени. Это делается как при графической засечке: вычисляется положение лунной тени для наблюдаемого в новом пункте момента покрытия и наносится относительно определяемого приближенными координатами положения пункта. Край лунной тени вблизи станции можно считать прямолинейным. Его азимут и расстояние от приближенного пункта могут быть вычислены для момента покрытия и представляют собой линию положения.

1. Общее описание метода

В момент, когда в пункте P наблюдается соприкосновение звезды с Луной, звезда, точка края Луны и пункт P лежат на одной прямой; на продолжении этой прямой лежит соответствующая точка P' фундаментальной плоскости. Географические координаты пункта известны лишь приближенно. Следовательно, вычисленная по приближенным координатам проекция пункта P'_0 , вообще говоря, лежит не в P' . Если принять, что координаты центра Луны для этого момента известны безошибочно, то из

$$\sigma_0^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

получаем в фундаментальной плоскости расстояние σ_0 точки P'_0 от центра Луны (рис. 102). Если бы нам был известен из других источников соответствующий наблюдаемому месту края истинный радиус σ , то его значение в фундаментальной плоскости также было бы известно и можно вывести из разности $\sigma - \sigma_0$ поправки к ξ и η .

Позиционный угол χ точки касания в настоящее время еще не может быть пронаблюдан достаточно точно; однако можно вычислить значение χ_0 , соответствующее значению σ_0 . Малая разность $\chi - \chi_0$ не имеет здесь значения. Если $\sigma - \sigma_0$ численно известны, то можно найти с помощью χ_0 точку Q и в ней перпендикулярную к лунному радиусу линию положения, на которой должна лежать проекция P' в фундаментальной плоскости. Эта линия положения есть не что иное, как небольшой отрезок границы тени, относящийся к наблюдаемому моменту времени. Так ставится абсолютная задача, которая, однако, неосуществима.

Поэтому мы обращаемся к относительной задаче. При этом неизвестный радиус Луны σ исключается тем, что одна и та же звезда наблюдается в том же месте лунного края последовательно на двух станциях, из которых одна является опорной (1), а другая новой (2). Из двух значений $\sigma - \sigma_{01}$ и $\sigma - \sigma_{02}$ можно составить

$$\Delta\sigma = \sigma_{02} - \sigma_{01}$$

и обработать эти разности так же, как было описано выше для $\sigma - \sigma_0$. Это значит, что вместо истинного радиуса σ , которого мы не знаем (абсолютная задача), мы применяем к станции 2

Рис. 102. Линия положения в фундаментальной плоскости.

значение радиуса Луны, введенное для станции 1 (относительная задача). Тогда в точке 2 мы получим лишь относительно правильно лежащую линию положения.

До сих пор все относилось к фундаментальной плоскости. Для того чтобы получить геодезические координаты, нужно перейти с фундаментальной плоскости на поверхность Земли (или, с достаточной точностью, на сфероид). Это достигается тем, что вычисляется сечение цилиндра тени земной поверхностью в непосредственном окружении образующей точки Q , причем поверхность может быть в заключение заменена горизонтальной плоскостью. Вследствие малости рассматриваемой области можно, кроме того, заменить цилиндр тени касательной плоскостью, содержащей образующую точки Q .

Эта задача аналитической геометрии решается с помощью соотношений, связывающих координатную систему фундаментальной плоскости (а тем самым и цилиндр тени) с горизонтальной системой. Для составления этих соотношений можно избрать или три эйлеровых угла, или приведенные в § 3 направляющие косинусы (между которыми существует 6 известных соотношений). Перенесенная таким образом в горизонтальную плоскость линия положения может быть представлена графиче-

чески или пересечением ее с осями или расстоянием и направлением относительно заданной приближенной точки P_0 .

Линия положения пересекает оси местной горизонтальной системы (E — к востоку, N — к северу, начало в P_0) в точках

$$E = \frac{\Delta\sigma}{C_{11} \sin \chi + C_{21} \cos \chi}, \quad N = \frac{\Delta\sigma}{C_{12} \sin \chi + C_{22} \cos \chi}, \quad (13.32)$$

где C_{ik} — направляющие косинусы осей фундаментальной плоскости относительно осей местной системы (ср. таблицы в § 3).

Другие звезды с иными опорными станциями дадут другой пробег тени и тем самым новые линии положения под различными азимутами (см. рис. 104). Для каждой новой станции с предвычисленной точкой покрытия на краю Луны нужно подыскивать заранее противоположащую станцию, могущую быть привязанной к триангуляции, и для которой точка погружения была бы в точности той же самой. В этом — единственная трудность метода.

2. Числовой пример геодезической связи двух разделенных морем триангуляций

В следующем примере, выбранном из-за его близкого родства с известными методами измерения, приведены 4 опорные

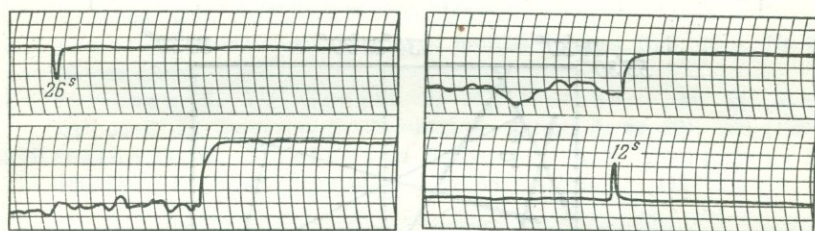


Рис. 103. Фотоэлектрическая регистрация момента покрытия для звезды ZC 817.

Слева: основная точка на Филиппинах (станция 3); справа: новая точка Палау; сверху направо и внизу налево: обрыв светового потока (погружение); внизу направо и сверху налево: марка времени (целые секунды). Интервал масштаба времени на регистрационной полосе около 0,04 сек.

станции филиппинской триангуляции [11]. Новый пункт с приближенными координатами $\varphi_0 = 6^\circ 54' 59''{,}8$; $\lambda_0 = 134^\circ 19' 23''{,}1$ находится на острове Палау (Марианско-Каролинская цепочка) и удален от пунктов привязки примерно на 1500 км. На рис. 103 показана регистрация момента покрытия. Наблюдения Военной картографической службы США дали для нового пункта P

Таблица 58

Станция	Звезда	Дата	Исправленное время наблюдения (вс.)	$\Delta\sigma, \text{ м}$	Линии положения в горизонтальной плоскости	
					расстояние от $P_0, \text{ м}$	направленные от севера
1 P	ZC 1150	1955 март 4	12 ^h 25 ^m 50 ^s ,432 13 09 08,985	+1233	1535	296°,9
2 P	Y 2567 v 10	1956 март 20	11 35 37,753 12 10 38,862	+597	1275	254,7
3 P	ZC 817	1956 апр. 15	11 28 26,737 11 43 12,053	+288	578	344,5
4 P	ZC 2018	1956 июнь 18	12 13 31,094 12 55 29,015	+1494	635	239,0

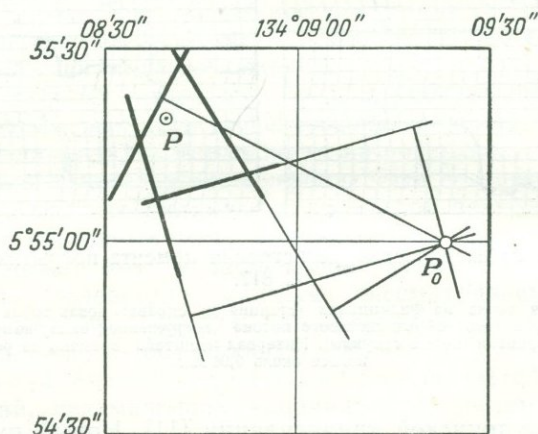


Рис. 104. Линия положения в горизонтальной плоскости (Палау, 1955—1956).

(Палау) четыре линии положения и, кроме того, чертеж с изображением ошибок, по которому было выбрано окончательное положение пункта (рис. 104).

Географические координаты нового пункта P в филиппинской системе координат: $\varphi = 6^{\circ}55'19''{,}2$; $\lambda = 134^{\circ}08'39''{,}5$. Относительная точность около $1/10\,000$.

ЛИТЕРАТУРА

1. O'Keefe J. A., J. Pamela Anderson, The Earth's equatorial Radius and the Distance of the Moon, Bull. g'eod., Nr. 29, 219—248 (1953); Astron. J. 57, 108—121 (1952).
2. Evans D. S., Occultations and Lunar Mountains, Astron. J., 60, 432 (1955).
3. Schwarzschild K., Über die totale Sonnenfinsternis vom 30. August 1905, Astron. Mitt., Göttingen, 1906, 3. Teil.
4. Whitford A. E., Angular Diameters of Stars from Occultations by the Moon, Astron. J., 52, 131—132 (1947).
5. O'Keefe J. A., Mears D. D., The 800-Inch Telescope, Astron. Soc. Canada, 48, Nr. 1 (1954).
6. Lambert W. D., The Figure of the Earth and the Parallax of the Moon, Astron. J., 38, 181—185 (1928).
7. Wolf H., Beiträge zur Lotabweichungsausgleichung und Geoidbestimmung. Allgemeine Betrachtungen und Durchführung im Bereich des Zentral-europäischen Netzes, Veröff. Inst. f. Erdmessung, Bamberg, 1949.
8. Rice D. A., Deflections of the Vertical from Gravity Anomalies in the United States, U. S. Coast and Geodetic Survey, Washington, 1951.
9. Hirose H., On the Prediction of the equal Limb Line for an Occultation, Astronom. Obs. Tokyo, 2, 218—222 (1953).
10. Weimer Th., Occultations d'étoiles et profiles lunaires, Bull. géod., Nr. 31, 37—46 (1954).
11. Henriksen S. W., Genatt S. M., Marchant M. Q., Batchlor C. D., Surveying by Occultations, Astron. J., 63, 291—295 (1958).
12. Preston G. W., Stephenson C. B., Smith R. E., Thomas N., Photoelectric Observations of Occultations, Astron. J., 443 (1954).

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПАРАЛЛАКТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛУНЫ СРЕДИ ЗВЕЗД

§ 1. Введение

Среди доступных наблюдениям небесных тел Луна имеет самое быстрое суточное движение и наибольший параллакс. Первое свойство делает ее особенно пригодной для решения астрономической проблемы времени (гл. V); второе свойство делает возможным привлечение наблюдений Луны для создания мировой геодезической системы координат.

Если отвлечься от вращения Земли, т. е. смотреть из ее центра, то движение Луны будет происходить в восточном направлении по орбите, которую для одной ночи можно считать весьма близкой к большому кругу. Это движение составляет (в среднем) несколько более $0^{\circ},5$ в час., т. е. несколько превышает видимый радиус Луны. Для точки на поверхности Земли Луна испытывает, кроме того, меняющееся со временем *параллактическое смещение*, вызываемое тем, что местоположение наблюдателя участвует во вращении Земли. Это смещение может быть разделено на две части:

1) примерно постоянное смещение по склонению, зависящее от географической широты пункта наблюдения и от параллакса и склонения Луны;

2) периодическое смещение, которое для одних суток весьма близко к эллипсу. Положение Луны на этом эллипсе зависит от местного часового угла, а размеры эллипса определяются параллаксом и склонением Луны, а также географической широтой пункта наблюдения (ср. стр. 68—69).

Для наблюдателя, находящегося вблизи земного экватора, большая полуось этого эллипса приблизительно вчетверо больше видимого радиуса Луны.

Использование лунного параллакса для геодезического определения положений в принципе весьма просто. Требуется определить с помощью наблюдений положение центра лунного диска на звездном небе, зависящее от положения наблюдателя и положение точки наблюдения относительно центра масс Земли. Пространственные координаты центра диска Луны предполагаются известными. Поясним этот принцип по Марковицу (см.

рис. 105). Прямоугольная система координат x, y, z отнесена к центру Земли C ; за ось вращения примем ось z , а плоскость xz проходит через Гринвич. Геоцентрические координаты Луны для момента всемирного времени, в который последняя наблюдается из станции $S(x_0, y_0, z_0)$ в направлении $L_1(\alpha'_1, \delta'_1)$, считаем известными; тогда x_1, y_1, z_1 и α'_1, δ'_1 определяют прямую для станции S (линия положения L_1). Второе наблюдение, произведенное позже той же ночью, даст вторую линию положения L_2 .

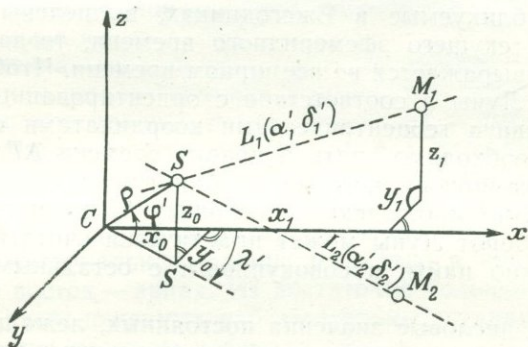


Рис. 105.

Пересечение их определяет точку S . Если рассматривать вопрос аналитически, то можно сказать, что из двух определений положения Луны получаются четыре величины $\alpha'_1, \delta'_1, \alpha'_2, \delta'_2$ для трех неизвестных x_0, y_0, z_0 . Из значения параллактического смещения, соответствующего земному радиусу (около $3500''$), очевидно, что для геодезических определений положения требуется необычайно высокая точность измерений и геоцентрических координат Луны. Например, ошибка в положении Луны $0'',1$, т. е. относительная ошибка $1:35\,000$ в горизонтальном параллаксе, исказит расстояние от центра Земли, равное приблизительно 6370 км, в том же отношении, т. е. на 200 м. Поэтому нужно стремиться к точности измерений до $0'',01$, которая стала возможной только в последнее время; вот почему раньше метод лунных параллаксов не находил практического применения в геодезии. Решающую роль в этой задаче, естественно, играют координаты Луны. Они даны для 1952—1959 гг. в «Improved Lunar Ephemeris» и начиная с 1960 г. — в Ежегодниках, через часовые интервалы, с точностью $0'',01$ по δ и $0^s,001$ по α . Отныне эти угловые координаты Луны являются надежной основой для вывода геоцентрических координат земных наблюдательных станций. Кроме того, как показано в гл. VIII, их относительная точность для небольших интервалов времени (т. е. внутри

некоторого отрезка орбиты Луны) может быть значительно повышена. Неуверенность в значении экваториального радиуса входит в параллакс в качестве неизвестного масштабного фактора. Геоцентрические координаты станций также отягощены этим масштабным фактором. Он может быть найден, если показанное на рис. 105 определение положений применить к двум станциям, связанным между собой триангуляцией. При этом становится известным также и расстояние до Луны в метрах.

Дальнейшее осложнение заключается в том, что лунные положения, публикуемые в Ежегодниках, вычислены на основе равномерно текущего эфемеридного времени, тогда как эпоха наблюдения выражается во всемирном времени. Чтобы привести координаты Луны в соответствие с ориентированными относительно Гринвича геоцентрическими координатами станций наблюдения, необходимо знать поправку времени ΔT (эфемеридное минус всемирное), которая, вообще говоря, может быть выведена из самих наблюдений. Поскольку ΔT меняется медленно и за один оборот Луны может практически считаться постоянной, ее можно найти в совокупности с остальными неизвестными.

Наконец, числовые значения постоянных, лежащих в основе эфемериды, также не известны абсолютно точно и требуют улучшения. Поэтому описанный здесь метод лунных параллаксов может быть осуществлен только при обширной наблюдательной программе; параллактическое смещение Луны измеряется на многочисленных станциях, лежащих на различных географических широтах, по возможности в одну ночь, в восточной, южной и западной сторонах неба. Из такого наблюдательного материала, охватывающего большую часть орбиты и несколько оборотов Луны, можно вывести геоцентрические координаты станций и соответствующую эпохе наблюдений поправку времени, а также найти поправки к эмпирическим постоянным движения Луны.

Такая в полном смысле слова космическая триангуляция была произведена по инициативе Марковица, директора Службы времени Морской обсерватории в Вашингтоне, во время Международного геофизического года 1957—1958 гг. Во время наблюдений фотографическим путем получались крупномасштабные снимки с Луной на фоне звездного неба, в центральной проекции, соответствующей данной станции. Станции наблюдения были распределены по всему земному шару (Северная и Южная Америка, Гавайские о-ва, Новая Зеландия, Австралия, Япония, Индия, Африка и Европа); некоторые из них (в Европе, Африке и Америке) были связаны триангуляцией и могли поэтому дать масштаб для выводимых расстояний. О разработанной Марковицем технике наблюдений и об аналитической обработке ре-

зультатов измерений будет сказано в § 6 и 7. Обработка обширного материала ведется на Морской обсерватории до настоящего времени, и там надеются в течение 1960 г. получить предварительные результаты [2]. Общее решение имеет следующие цели:

- 1) определение размеров и фигуры Земли (геоида);
- 2) улучшение постоянных орбиты Луны;
- 3) вывод эфемеридного времени, в особенности новой его единицы — эфемеридной секунды, по которой будут эталонироваться атомные часы.

Поставленная геодезическая цель заключается прежде всего в определении геоцентрических координат станций наблюдения. Эти координаты полностью независимы от направления отвеса и связаны только с самой земной корой. С привлечением астрономических определений направления отвеса можно будет получить абсолютные отклонения отвеса с точностью $1-2''$. Из изменений геоцентрического радиуса-вектора могут быть найдены средний экваториальный радиус и сжатие в направлениях север — юг и восток — запад. Из достаточно большого числа целесообразно расположенных наблюдательных станций можно, наконец, вывести размеры и фигуру геоида.

§ 2. Изменение лунного параллакса, обусловленное изменениями геодезических переменных

При аналитической разработке параллактического метода геодезическое положение можно ввести непосредственно в прямоугольных геоцентрических координатах x, y, z . Затем следует перейти к системе формул Марковица, которая будет рассмотрена подробно в § 6. Вместо этого положение места наблюдения можно выразить через географические координаты φ и λ и высоту H , причем эти параметры отнесены к эллипсоиду вращения известных размеров, ось которого совпадает с осью Земли, а центр — с центром масс Земли; поэтому здесь, собственно, речь идет также о геоцентрических координатах. В обоих случаях целесообразно применять дифференциальные формулы, позволяющие вывести из разностей наблюдаемых и предвычисленных (по предварительным координатам пункта) лунных положений поправки к геодезическому положению.

Рассмотрим прежде всего второй случай и будем понимать под *геодезическими дифференциалами параллакса Луны* изменения последнего по α и δ , обусловленные дифференциальными изменениями геодезических переменных, т. е. в первую очередь изменениями экваториального радиуса a и эллипсоидальных широты φ и долготы λ места наблюдения. Высота H' пункта

наблюдения относительно геоида должна быть принята в качестве достаточно хорошо известной вместо высоты H пункта относительно принятого эллипсоида. На каждой станции появляется, таким образом, третья неизвестная $\Delta H = H - H'$ — превышение геоида над эллипсоидом. Его влияние на упомянутые выше изменения параллакса незначительно; то же самое можно сказать о параметре, определяющем фигуру эллипсоида (сжатие или эксцентриситет).

Формулы (3.10), (3.11), (3.16), (3.17), выведенные в гл. III для параллакса Луны по α и δ , имеют после замены обозначения часового угла ($\theta - \alpha$) через t следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} p_{\alpha} &= \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = -\frac{k_{\alpha} \sin t}{1 - k_{\alpha} \cos t}, \\ \operatorname{tg} p_{\delta} &= \operatorname{tg}(\delta' - \delta) = -\frac{k_{\delta} \sin(\gamma - \delta)}{1 - k_{\delta} \cos(\gamma - \delta)}, \\ k_{\alpha} &= \frac{\rho \sin P \cos \varphi'}{a \cos \delta}, \quad k_{\delta} = \frac{\rho \sin P \cdot \beta}{a}. \end{aligned}$$

Для учета высоты H станции над эллипсоидом мы должны добавить в правую часть (3.2) величину H . Поправкой широты за высоту по (3.3) можно пренебречь, так как в последующем разложении мы ограничиваемся членами с e^2 . Имея

$$\frac{\rho}{a} = 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{H}{a},$$

получаем

$$k_{\alpha} = \frac{\sin P \cos \varphi'}{\cos \delta} \left(1 + \frac{H}{a} - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right), \quad (14.1)$$

$$k_{\delta} = \sin P \cdot \beta \left(1 + \frac{H}{a} - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right). \quad (14.2)$$

1. Геодезический дифференциал параллакса по прямому восхождению

Дифференцирование $\operatorname{tg} \alpha$ по k_{α} и t дает

$$\Delta p_{\alpha} = -\frac{\sin^2 p_{\alpha}}{k_{\alpha}^2 \sin t} \Delta k_{\alpha} - \frac{\sin^2 p_{\alpha}}{k_{\alpha} \sin^2 t} (\cos t - k_{\alpha}) \Delta t.$$

Приняв для краткости

$$m_{\alpha} = \frac{\sin^2 p_{\alpha}}{k_{\alpha} \sin t}, \quad (14.3)$$

что в первом приближении равно p_{α} , имеем

$$\Delta p_{\alpha} = -\frac{m_{\alpha}}{k_{\alpha}} \Delta k_{\alpha} - \frac{m_{\alpha}}{\sin t} (\cos t - k_{\alpha}) \Delta t. \quad (14.4)$$

Дифференцированием (14.1), принимая $\Delta\varphi' = \Delta\varphi$, получаем Δk_α и по (14.4)

$$\Delta p_\alpha'' = -m_\alpha \operatorname{ctg} P \cdot \Delta P'' + m_\alpha \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta\varphi'' - m_\alpha \frac{206265}{a} \Delta H + \\ + m_\alpha e \sin^2 \varphi \cdot 206\,265 \Delta e - m_\alpha \left(\operatorname{ctg} t - \frac{k_x}{\sin t} \right) \Delta t'' \quad (14.5)$$

Отсюда нельзя получить непосредственного улучшения экваториального радиуса. Однако, по Ламберту [3], с помощью динамического параллакса можно представить ΔP в виде функции поправок экваториального радиуса a , обратной величины сжатия n , среднего ускорения силы тяжести на экваторе g_a и массы Луны μ (в единицах земной массы). После этого дифференциал горизонтального экваториального параллакса выражается следующим образом (ср. гл. III, уравнение 3.50):

$$\Delta P = \frac{\operatorname{tg} P}{3a} \Delta a - \frac{\operatorname{tg} P}{3g_a} \Delta g_a + \frac{\operatorname{tg} P}{3} \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right) \Delta \left(\frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{3} \frac{\operatorname{tg} P}{n(n-1)} \Delta n.$$

Если не вносить поправок g_a и μ , то

$$\Delta P = \frac{\operatorname{tg} P}{3a} \Delta a - \frac{1}{3} \frac{\operatorname{tg} P}{n(n-1)} \Delta n. \quad (14.6)$$

Вводя это выражение для ΔP в (14.5) и положив затем

$$e \Delta e = -\frac{1}{n^2} \Delta n \quad \text{и} \quad \Delta t = -\Delta \lambda,$$

получаем геодезический дифференциал параллакса по прямому восхождению

$$\Delta p_\alpha'' = -m_\alpha \frac{206\,265}{3a} \Delta a + m_\alpha \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta\varphi'' + \\ + m_\alpha \left(\operatorname{ctg} t - \frac{k_x}{\sin t} \right) \Delta \lambda'' - m_\alpha \frac{206\,265}{a} \Delta H + \\ + m_\alpha \frac{206\,265}{n^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \Delta n. \quad (14.7)$$

Следует еще убедиться, что достижимая точность позволяет независимо определить превышение геоида ΔH над эллипсоидом, а также поправку Δn обратной величины сжатия. В противном случае эти члены должны быть определены другими способами и затем внесены в левую часть как поправки или использованы для оценки произведенных упрощений.

2. Геодезический дифференциал параллакса по склонению

Одинаковое строение обеих формул — для p_α и для p_δ — позволяет написать следующие выражения по аналогии с уравнениями (14.3) и (14.4):

$$\Delta p_\delta = -\frac{m_\delta}{k_\delta} \Delta k_\delta - \frac{m_\delta}{\sin(\gamma - \delta)} [\cos(\gamma - \delta) - k_\delta] \Delta \gamma, \quad (14.8)$$

где для краткости положено

$$m_\delta = \frac{\sin^2 p_\delta}{k_\delta \sin(\gamma - \delta)},$$

что в первом приближении равно p_δ .

Пренебрегая членами высших порядков, получаем дифференцированием из (14.2) и (3.17) и (3.19)

$$\begin{aligned} \Delta k_\delta = k_\delta \operatorname{ctg} P \cdot \Delta P + \frac{k_\delta}{\beta^2} \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 t_m \Delta \varphi + \\ + \frac{k_\delta}{\beta^2} \cos^2 \varphi \sin t_m \cos t_m \Delta \lambda + \frac{k_\delta}{a} \Delta H - k_\delta \sin^2 \varphi e \Delta e, \end{aligned} \quad (14.9)$$

$$\Delta \gamma = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\varphi} \Delta \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\gamma \operatorname{tg} t_m \Delta \lambda. \quad (14.10)$$

Здесь мы положим

$$t_m = \theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2}, \quad \Delta \lambda = -\Delta t \quad \text{и} \quad \cos^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 1.$$

Приняв

$$\beta^2 = \frac{\sin^2 \varphi'}{\sin^2 \gamma},$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta p_\delta'' = -m_\delta \operatorname{ctg} P \cdot \Delta P - m_\delta \left\{ \sin^2 \gamma \operatorname{ctg} \varphi \sin^2 t_m + \right. \\ \left. + \frac{\cos(\gamma - \delta) - k_\delta}{\sin(\gamma - \delta)} \cdot \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\varphi} \right\} \Delta \varphi - \\ - \frac{1}{2} m_\delta \left\{ \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \gamma 2t_m - \sin 2\gamma \operatorname{tg} t_m \frac{\cos(\gamma - \delta) - k_\delta}{\sin(\gamma - \delta)} \right\} \Delta \lambda - \\ - m_\delta \frac{206\,265}{a} \Delta H + m_\delta 206\,265 \sin^2 \varphi e \Delta e. \end{aligned}$$

Снова заменив ΔP по (14.6) величинами $\Delta \alpha$ и Δn , а $e \Delta e$ величиной $-\frac{1}{n^2} \Delta n$ и одновременно упрощая выражение в скобках с учетом того, что

$$\cos t_m = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \gamma},$$

получаем выражение для геодезического дифференциала параллакса по склонению

$$\begin{aligned} \Delta p_{\delta}'' &= -m_{\delta} \frac{206265}{3a} \Delta a - \frac{m_{\delta}}{\sin 2\varphi} \left\{ \sin^2 \gamma - \sin^2 \varphi + \right. \\ &+ \left. \sin 2\gamma \frac{\cos(\gamma - \delta) - k_{\delta}}{\sin(\gamma - \delta)} \right\} \Delta \varphi - \\ &- \frac{1}{2} m_{\delta} \sin t_m \sin 2\gamma \left\{ \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\cos(\gamma - \delta) - k_{\delta}}{\sin(\gamma - \delta)} \frac{1}{\cos t_m} \right\} \Delta \lambda - \\ &- m_{\delta} \frac{206265}{a} \Delta H + m_{\delta} \frac{206265}{n^2} \left\{ \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right\} \Delta n. \end{aligned} \quad (14.11)$$

3. Упрощение формул

Если исходить из приведенной в гл. III, § 7 приближенной формулы, то можно, пренебрегая некоторыми малыми величинами, получить более простые выражения для коэффициентов $\Delta \varphi$ и $\Delta \lambda$. Имеем

$$p_{\alpha} = \alpha' - \alpha \approx -\sin P \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta} \sin t,$$

$$p_{\delta} = \delta' - \delta \approx -\sin P \sin \varphi' \cos \delta + \sin P \cos \varphi' \sin \delta \cos t = p_{\delta_I} + p_{\delta_{II}}.$$

Не делая различия между φ и φ' и дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial \varphi} = -p_{\alpha} \operatorname{tg} \varphi = \sin P \frac{\sin \varphi}{\cos \delta} \sin t,$$

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial \lambda} = -p_{\alpha} \operatorname{ctg} t = \sin P \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \cos t,$$

$$\frac{\partial p_{\delta}}{\partial \varphi} = p_{\delta_I} \operatorname{ctg} \varphi - p_{\delta_{II}} \operatorname{tg} \varphi = -\sin P (\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \cos t),$$

$$\frac{\partial p_{\delta}}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} p_{\alpha} \sin 2\delta = \sin P \cos \varphi \sin \delta \sin t.$$

После этих упрощений (14.7) и (14.11) принимают очень наглядный вид, если учесть еще, что члены с Δa , ΔH и Δn , которые в сущности означают смещение точки наблюдения в радиальном направлении и, естественно, не могут быть разделены по наблюдениям на одной станции, могут быть объединены. Их влияние на параллакс может быть тогда кратко обозначено через $p_{\alpha} \frac{\Delta \rho}{\rho}$

и $p_{\delta} \frac{\Delta \rho}{\rho}$. Тогда соответственно имеем

$$\Delta p_{\alpha}'' = - \frac{\sin P}{\cos \delta} \sin t \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} 206\,265 \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \Delta \varphi'' \right] + \\ + \frac{\sin P \cos \varphi}{\cos \delta} \cos t \cdot \Delta \lambda'',$$

$$\Delta p_{\delta}'' = - \sin P \cos \delta \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} 206\,265 \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \Delta \varphi'' \right] + \\ + \sin P \sin \delta \cos t \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} 206\,265 \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \Delta \varphi'' \right] + \\ + \sin P \cos \varphi \sin \delta \cos t \cdot \Delta \lambda'',$$

где

$$\frac{206\,265}{\rho} \Delta \rho = \frac{206\,265}{3a} \Delta a + \frac{206\,265}{a} \Delta H + \frac{206\,265}{3n^2} (3 \sin^2 \varphi - 1) \Delta n.$$

Квадратные скобки содержат компоненты перемещения точки наблюдения, лежащие в плоскости меридиана пункта наблюдения, а именно перемещения в направлении земной оси и перпендикулярно к ней. Как мы убедились при выводе формул параллакса, компонента, параллельная земной оси, не зависит от часового угла, а коэффициент при ней также мало меняется со временем ($0,88 < \cos \delta < 1$).

Таким образом, наблюдения на одной станции не могут дать независимого определения геодезического положения, так как даже при продолжительных наблюдениях практически невозможно отделить параллактическое смещение, параллельное земной оси, от поправки к склонению Луны. Поэтому привлечение многочисленных станций на различных широтах, как это было сделано при осуществлении метода Марковица, представляет существенную предпосылку для удовлетворительного решения задачи.

§ 3. Астрономические дифференциалы лунного параллакса

Кроме геодезических величин, определяющих местоположение наблюдателя, улучшения требуют также α и δ Луны. Ошибками координат использованных звезд можно пренебречь ввиду их случайного характера. Тогда мы имеем следующие соотношения, из которых путем уравнивания при наличии обширного наблюдательного материала, измеренного с соответствующей точностью, можно получить искомые геодезические

и астрономические поправки:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{наб}} + v_{\alpha} &= \alpha_{\text{Броун}} + p_{\alpha} + \Delta p_{\alpha} + \Delta \alpha_{\zeta}, \\ \delta_{\text{наб}} + v_{\delta} &= \delta_{\text{Броун}} + p_{\delta} + \Delta p_{\delta} + \Delta \delta_{\zeta}, \end{aligned} \quad (14.12)$$

(геод.) (астр.)

$$|v_{\alpha} v_{\alpha}| + |v_{\delta} v_{\delta}| = \min.$$

Поправки положения Луны $\Delta \alpha_{\zeta}$ и $\Delta \delta_{\zeta}$ сначала должны быть переведены в поправки долготы и широты $\Delta \lambda_{\zeta}$ и $\Delta \beta_{\zeta}$, а затем эти последние должны быть выражены через поправки элементов орбиты Луны. Это и будут *астрономические дифференциалы параллакса*.

Коэффициенты астрономических поправок близки к единице, тогда как геодезические дифференциалы, согласно (14.7) и (14.11), содержат в качестве множителя лунный параллакс. Поэтому последние суть величины того же порядка, как и не рассматриваемые здесь изменения, следствием которых являются определяемые поправки $\Delta \alpha_{\zeta}$ и $\Delta \delta_{\zeta}$ к введенным в (14.12) параллаксам p_{α} и p_{δ} . На это следует обратить внимание при общем выравнивании, которое и без того лучше всего производить методом последовательных приближений.

Для перехода от экваториальной системы координат к эклиптической (β, λ) получаем, дифференцируя известные соотношения, справедливые для треугольника «полюс мира — полюс эклиптики — светило»

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_{\zeta} &= \sec \delta \cos X \cos \beta \Delta \lambda_{\zeta} - \sec \delta \sin X \Delta \beta_{\zeta}, \\ \Delta \delta_{\zeta} &= \sin X \cos \beta \Delta \lambda_{\zeta} + \cos X \Delta \beta_{\zeta}, \end{aligned}$$

где X — параллактический угол Луны. С обозначениями Ньюкомба ([4], табл. XI — для коэффициентов перевода) уравнение перехода принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_{\zeta} &= [1 + (v\alpha)] \Delta \lambda_{\zeta} + (\beta\alpha) \Delta \beta_{\zeta}, \\ \Delta \delta_{\zeta} &= (v\delta) \Delta \lambda_{\zeta} + [1 + (\beta\delta)] \Delta \beta_{\zeta}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Расхождения в эклиптической долготе и широте нужно затем выразить через поправки истинной долготы l_v Луны в орбите, средней долготы восходящего узла \mathcal{Q} и наклоения i лунной орбиты. При этом следует учесть, что в теории определения орбиты сумма ΥC и CM (рис. 106) называется *долготой в орбите*. Первая дуга есть эклиптическая долгота \mathcal{Q} восходящего узла, отсчитываемая в направлении движения, тогда как CM есть измеренное в орбите расстояние Луны от узла. Нижеследующий,

значительно упрощенный метод рассмотрения исключительно сложного движения Луны позволит нам получить члены, зависящие от элементов орбиты, в том виде, как они были выведены в работах Баттермана [5—7] и Бёме [8].

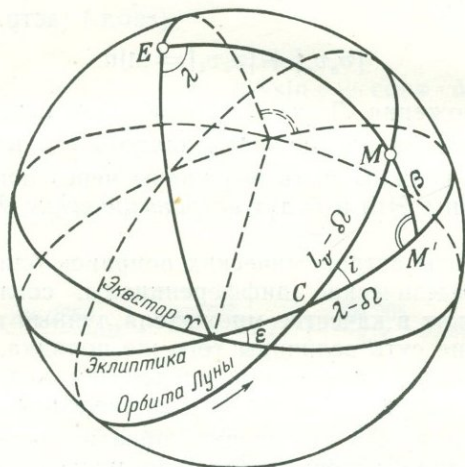


Рис. 106. Орбита Луны относительно экватора и эклиптики.

Из треугольника CMM' получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= \Omega + \operatorname{arctg} [\cos i \operatorname{tg} (l_v - \Omega)], \\ \sin \beta &= \sin i \sin (l_v - \Omega). \end{aligned} \quad (14.4)$$

После дифференцирования по переменным правой части используем для преобразования коэффициентов при Δl_v и $\Delta \Omega$ соотношение

$$\begin{aligned} \cos (l_v - \Omega) &= \cos \beta \cos (\lambda - \Omega) \quad (\text{из треугольника } CMM') \\ \text{и второе из (14.4); отбросив член порядка выше } \sin^2 i, \text{ получим} \\ \Delta \lambda &= [1 + (F \cdot l)] \Delta l_v - (F \cdot l) \Delta \Omega - \sin (\lambda - \Omega) \cos (\lambda - \Omega) \operatorname{tg} i \Delta i, \\ \Delta \beta &= (F \cdot \beta) \Delta l_v - (F \cdot \beta) \Delta \Omega + \sin (\lambda - \Omega) \Delta i. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Мы применим для коэффициентов обозначения, введенные Ньюкомбом и имеющие следующий смысл ([4], табл. X)

$$\begin{aligned} (F \cdot l) &= \sin^2 i \left[\sin^2 (\lambda - \Omega) - \frac{1}{2} \right], \\ (F \cdot \beta) &= \sin i \cos (\lambda - \Omega). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Затем переведем неравномерно изменяющуюся долготу Луны в орбите l_v в среднюю долготу l_m и в элементы, определяющие форму орбиты и ее положение в орбитальной плоскости. Последними являются эксцентриситет e и долгота перигея Π .

По определению, средняя долгота l_m равна истинной долготе l_v , если Луна находится в перигее. Долгота перигея определяется так же, как и долгота в орбите, а именно, как сумма дуг, измеряемых в направлении движения и соединяющих точку весеннего равноденствия с восходящим узлом лунной орбиты и последний — с перигеем. Таким образом, можно написать для перигея

$$l_v = \Pi + v; \quad l_m = \Pi + g. \quad (14.17)$$

Здесь истинная аномалия, т. е. расстояние Луны от перигея, обозначена через v . Средняя долгота определяется соответствующим образом через среднюю аномалию g . Последняя относится к точке, проходящей через перигей в тот же момент, что и Луна, и совершающий полный оборот по орбите за то же время, но с постоянной угловой скоростью. Теория движения планет дает разность между истинной и средней аномалиями (так называемое *уравнение центра*)

$$v = g + 2e \sin g + \frac{5}{4} e^2 \sin 2g + \dots$$

Откуда совместно с (14.17) следует

$$l_v = l_m + 2e \sin g + \frac{5}{4} e^2 \sin 2g + \dots \quad (14.18)$$

Из многочисленных возмущающих членов, входящих в полное уравнение движения Луны, следует принимать во внимание лишь вызываемое Солнцем параллактическое неравенство эклиптических долгот. Оно представляется выражением $P \cdot (F \cdot P)$, в котором главный коэффициент P требует улучшения. Пусть его поправка в отличие от поправки параллакса будет $\Delta \bar{P}$. Теория Луны дает для множителя $(F \cdot P)$ выражение

$$(F \cdot P) = \sin D - 0,144 \sin (D - g') + 0,149 \sin (D - g) + \\ + 0,068 \sin (D + g).$$

Здесь D — разность средних долгот Солнца и Луны, g и g' — средние аномалии Луны и Солнца соответственно.

С учетом упомянутой выше поправки, полагая

$$\Delta g = \Delta l_m - \Delta \Pi$$

и, согласно Ньюкомбу,

$$F = 2e \cos g + \frac{5}{2} e^2 \cos 2g,$$

получаем, дифференцируя (14.8),

$$\Delta l_v = (1 + F) \Delta l_m - F \Delta \Pi + 2 \sin \left(1 + \frac{5}{2} e \cos g \right) \Delta e'' + (F \cdot P) \Delta \bar{P}. \quad (14.19)$$

(с $\Delta e'' = \Delta e \cdot 206265$, все в секундах дуги). Подставляем это в (14.15) и принимаем во внимание порядок величин. Например, член $(F \cdot l)$ самое большое порядка e^2 и может влиять на уравнения ошибок только в соединении с $\Delta \Omega \sin i$ и т. д.:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda = & [1 + F + (F \cdot l) \Delta l_m + 2 \sin g \left(1 + \frac{5}{2} e \cos g \right) \Delta e'' - \\ & - F \Delta \Pi + (F \cdot P) \Delta \bar{P} - (F \cdot l) \Delta \Omega - \sin(\lambda - \Omega) \cos(\lambda - \Omega) \operatorname{tg} i \Delta i, \end{aligned} \quad (14.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta \beta = & (F \cdot \beta) (1 + F) \Delta l_m + 2 \sin g (F \cdot \beta) \Delta e'' - \\ & - (F \cdot \beta) F \Delta \Pi + (F \cdot \beta) (F \cdot P) \Delta \bar{P} - (F \cdot \beta) \Delta \Omega + \sin(\lambda - \Omega) \Delta i. \end{aligned}$$

Подставляя это в уравнение (14.13), получаем астрономические дифференциалы, которые мы должны ввести в уравнения ошибок (14.12),

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_{\zeta} = & f_{11} \Delta l_m + f_{e1} (2 \Delta e'') + f_{\Pi 1} (2e \Delta \Pi) + \\ & + f_{P1} \Delta \bar{P} + f_{\Omega 1} (\sin i \cdot \Delta \Omega) + f_{i1} \Delta i, \end{aligned} \quad (14.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta_{\zeta} = & f_{12} \Delta l_m + f_{e2} (2 \Delta e'') + f_{\Pi 2} (2e \Delta \Pi) + \\ & + f_{P2} \Delta \bar{P} + f_{\Omega 2} (\sin i \cdot \Delta \Omega) + f_{i2} \Delta i. \end{aligned}$$

Введя сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} k_{1a} &= 1 + (v \cdot \alpha) + (\beta \cdot \alpha) \cdot (F \cdot \beta), \\ k_{1b} &= (v \cdot \delta) + (F \cdot \beta) + (\beta \cdot \delta) \cdot (F \cdot \beta), \end{aligned}$$

получаем следующие выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} f_{11} &= [1 + F + (F \cdot l)] \cdot k_{1a}, \\ f_{e1} &= \sin g \left(1 + \frac{5}{2} e \cos g \right) k_{1a}, \\ f_{\Pi 1} &= -\frac{F}{2e} \cdot k_{1a}, \\ f_{P1} &= (F \cdot P) \cdot k_{1a}, \\ f_{\Omega 1} &= -\left\{ \sin i \left[\sin^2(\lambda - \Omega) - \frac{1}{2} \right] + (\beta \cdot \alpha) \cos(\lambda - \Omega) \right\} = \\ &= -(F \cdot l) \operatorname{cosec} i - (\beta \cdot \alpha) \cos(\lambda - \Omega), \\ f_{i1} &= \sin(\lambda - \Omega) |(\beta \cdot \alpha) - \operatorname{tg} i \cos(\lambda - \Omega)|, \\ f_{12} &= [1 + F + (F \cdot l)] \cdot k_{1b}, \end{aligned}$$

$$f_{e2} = \sin g \left(1 + \frac{5}{2} e \cos g \right) \cdot k_{l_2},$$

$$f_{i2} = -\frac{F}{2e} \cdot k_{l_2},$$

$$\varphi_{P2} = (F \cdot P) \cdot k_{l_2},$$

$$f_{\Omega 2} = -\{(F \cdot l) \operatorname{cosec} i (v \cdot \delta) + \cos(\lambda - \Omega) [1 + (\beta \cdot \delta)]\},$$

$$f_{i2} = \sin(\lambda - \Omega) [1 + (\beta \cdot \delta) - \operatorname{tg} i \cos(\lambda - \Omega)(v \cdot \delta)].$$

Из всех элементов лунной орбиты эксцентриситет e и наклонение к эклиптике i можно рассматривать как постоянные, по крайней мере для исторических промежутков времени, тогда как долготы перигея и узла, как известно, меняются быстро. Узел обходит обратным движением эклиптику примерно за 19 лет; перигей перемещается по лунной орбите прямым движением и обходит ее за 9 лет.

Брун взял значения, выведенные Ньюкомбом из наблюдений в Гринвиче (1846—1874) и Вашингтоне (1862—1874),

$$e = 0,05490056 \quad \text{и} \quad i = 5^\circ 08' 43'',48;$$

главный коэффициент параллактического неравенства был вычислен Баттерманом по 1000 наблюдений покрытий звезд

$$P = -124'',93 \pm 0'',18.$$

Если учитывать также и поправку к наклону эклиптики, как это сделал Бёме [8], то в выражение (14.21) для $\Delta\lambda_{\odot}$ следует включить член $-\operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cdot \Delta\epsilon$ и в выражение для $\Delta\delta_{\odot}$ — член $+\sin \alpha \cdot \Delta\epsilon$.

§ 4. Результаты наблюдений лунных положений

1. Покрытие звезд

Из ранних попыток совместного вывода геодезических и астрономических постоянных из наблюдений Луны прежде всего заслуживают упоминания работы Баттермана, в которых, правда, в основном преследовались астрономические цели [5—7]. В течение 1884—1903 гг. Баттерман пронаблюдал с большой тщательностью на 16-сантиметровом рефракторе старой Берлинской обсерватории свыше тысячи покрытий звезд по методу глаз и ухо. Полученные им результаты явились существенным вкладом в разработку теории Луны, но в геодезическом отношении они не оправдали ожиданий. Это и не удивительно, если вспомнить, что в те времена не было возможности учитывать лунный профиль и что ошибка в $0'',1$ в положении Луны соответствует ошибке в $6''$ в геодезическом положении. Средняя ошибка одного наблюдения оказалась равной $+0'',82$. Из этой

величины в среднем $0'',75$ можно отнести за счет неровностей лунного края. Тем не менее работа Баттермана еще и теперь может быть полезной при новых наблюдениях с усовершенствованной методикой.

При обработке покрытий звезд уравнения ошибок основываются на соотношении

$$m = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = k.$$

Величины x , y , ξ , η вычисляются по (6.2) и (6.3) (гл. VI, стр. 133—134) для момента покрытия по эфемериде и по принятым координатам пункта наблюдения; их следует улучшить так, чтобы разность между расстоянием m и радиусом Луны k стала равна нулю

$$m - k + d(m - k) = 0.$$

Не входя в подробности вывода, приведенного в [9], мы приводим здесь ради систематичности уравнение ошибок в том виде, как его представил Баттерман

$$\begin{aligned} \Delta = p_0(m - k) = & + \frac{p_0}{p} \cos \delta \sin Md (\alpha - \alpha') + \frac{p_0}{p} \cos Md (\delta - \delta') + \\ & + dr_0 - \cos \delta' \cos M \cdot \mu - \\ & - |\sin (\theta - \alpha') \sin M - \sin \delta' \cos (\theta - \alpha') \cos M| \cdot \nu - \\ & - |\cos (\theta - \alpha') \sin M + \sin \delta' \sin (\theta - \alpha') \cos M| \cdot \psi. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Здесь p — лунный параллакс, r — видимый радиус Луны и M — позиционный угол точки касания. Геодезические неизвестные входят в следующей комбинации:

$$\begin{aligned} \mu &= p [\sin \varphi' dp'_0 + p_0 \sin l' \cos \varphi' d\varphi'], \\ \nu &= p [\cos \varphi' dp'_0 - p_0 \sin l' \sin \varphi' d\varphi'], \\ \psi &= p_0 \sin l' p \cos \varphi' d\lambda'. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Взаимосвязь линейной величины k со средним угловым значением r_0 радиуса Луны, с одной стороны, и с постоянной p_0 лунного параллакса — с другой, учтена в (14.22) дифференциальным равенством

$$dr_0 = p_0 dk + k dp_0.$$

Неразделимая по станциям комбинация

$$dp'_0 = dp_0 + p_0 \frac{dp}{p}$$

входит в уравнение ошибок как поправка «местной постоянной» параллакса и содержится в неизвестных μ и ν в соединении с поправкой широты $d\varphi$ (см. § 2.3).

Поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ Баттерман перевел обратно в элементы орбиты Луны (средняя долгота, параллактическое неравенство, эксцентриситет, долгота перигея, а также параллакс и радиус Луны) (см. § 3). Как уже указывалось в конце § 2, величина μ как дифференциал от $\rho\rho_0 \sin \varphi'$ неотделима от постоянной поправки склонения или соответственно широты Луны, если наблюдения производятся на одной станции. Баттерман учел это обстоятельство при составлении уравнений ошибок, которые поэтому противоположны уравнениям параллаксов Гельмерта (гл. III, § 8).

Величина $\Delta\varphi$, вычисленная в предположении $\Delta\rho = 0$, была неуверенным геодезическим результатом. Напротив, для $\Delta\lambda$ получилось из $\psi = 0''{,}55$ подтверждаемое средней ошибкой, но совершенно невероятное по величине восточное отклонение от веса, равное $55'' \pm 9''$.

Хопман, подвергший критическому разбору работы Баттермана, считает, что причину такого поразительного результата следует искать в личном уравнении. При субъективной оценке момента покрытия могут иметь место запаздывания более чем на 1 сек; поэтому в настоящее время покрытия звезд имеют значение для геодезических целей лишь в случае применения объективной регистрации (гл. XIII).

2. Фотографирование

Уже давно были сделаны попытки привлечь фотографию к определению точного положения Луны привязкой ее к окружающим звездам. Вследствие яркости и быстрого движения Луны было исключительно трудно получить достаточно четкие снимки Луны и соседних с ней звезд; кроме того, лунный профиль мог быть учтен лишь приближенно.

В литературе [11—14] сообщается о более обширной программе Гарвардской обсерватории 1911—1917 гг., согласно которой Кинг взял на себя получение снимков (около 40 вечеров наблюдений в год), а Рассел (Принстон) — их обработку. Несмотря на еще невысокую в то время технику фотографирования (Луна фиксировалась моментальной экспозицией на фоне звезд, полученных с 10-минутной экспозицией), результаты оказались сравнительно точными, хотя и не достаточными для геодезических целей (ошибка положения Луны по одному снимку около $\pm 1''$ по α и δ).

Лучшие результаты получил Бёме [8] по фотографиям $6 \text{ см} \times 9 \text{ см}$, сделанным Хайном в 1920—1928 гг. с помощью

360-сантиметрового рефрактора в тех случаях, когда достаточно яркая звезда находилась в непосредственном соседстве с Луной. Относительно обработки пластинок упомянем лишь, что Бёме отмечал точкой вблизи центра лунного диска предварительный центр и измерял на компараторе расстояния от этого центра до опорной звезды, а также и до точек края через 4° по позиционному углу. Отсюда по способу, описанному в гл. IV, § 7, выводилось положение центра Луны. Ошибка одного определения положения Луны среднего из двух пластинок при одной опорной звезде находилась для α и δ по внутренней сходимости (соответственно $\pm 0'',37$ и $\pm 0'',28$) и по выравниванию (соответственно $\pm 0'',72$ и $\pm 0'',59$).

Полученные по снимкам одного вечера (в общей сложности было 39 вечеров) поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ к табличным значениям преобразовывались затем в эклиптические значения $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ и использовались для определения элементов движения Луны; при этом исходили из теории Броуна и ее постоянных. Было заранее решено отказаться от включения геодезических неизвестных; для $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ было составлено по 39 уравнений ошибок, которые для числовой обработки несколько проще уравнений (14.20). Задача улучшения эксцентриситета также не ставилась. Остальные поправки появляются лишь в той группе уравнений ошибок, где их влияние преобладает (Δl_m , $2e\Delta\Pi$ и Δp — только в $\Delta\lambda$; Δi и $\sin i \cdot \Delta\Omega$ только в $\Delta\beta$). В широтах учитывается, кроме того, постоянная поправка $\Delta\beta_0$ в широте Луны и поправка наклона эклиптики.

Затруднение состоит в том, как представить в уравнениях ошибок поправку средней долготы, неправильно изменявшуюся за 8-летний промежуток времени. Бёме обошел его тем, что принял для Δl_m среднее значение, выведенное по более длинным интервалам времени. Учитывая малость остальных неизвестных и меняющиеся знаки их коэффициентов, это, по-видимому, корректно. Правда, распределение вечеров наблюдений в отдельные годы было различным. Для исключения Δl_m служили следующие средние групповые:

1929—1921	+0'',13
Март — апрель 1922	+3'',0
1922—1925	+0'',64
1926—1928	+0'',03

Выравнивание дало по уравнениям для $\Delta\lambda$

$$2e\Delta\Pi = -0'',10 \pm 0'',14,$$

$$\Delta p = -0'',21 \pm 0'',14 \quad (\text{эпоха } 1923, 8).$$

После того как в вычисление широт были введены найденные поправки долготы, из второй группы было получено

$$\Delta\beta_0 = -0'',51 \pm 0'',10,$$

$$\Delta i = -0'',30 \pm 0'',11,$$

$$\sin i \cdot \Delta\Omega = +0'',22 \pm 0'',14,$$

$$\Delta\varepsilon = -0'',03 \pm 0'',15 \text{ (эпоха 1923, 8).}$$

Постоянная поправка широты означает (если она реальна), что центр масс Луны лежит примерно на 1 км южнее центра фигуры Луны.

§ 5. Измерение положения Луны среди звезд в период МГГ

Известный в принципе метод фотографирования Луны вместе с окружающими звездами нашел широкое применение в 1953 г., когда Марковиц сконструировал свою лунную камеру. В этой камере уменьшается различие яркостей Луны и звезд и, кроме того, компенсируется движение Луны среди звезд во время экспозиции. По инициативе Марковица во время Международного геофизического года на двадцати обсерваториях, распределенных по всей Земле, были установлены подобные камеры для фотографирования Луны по единой программе.

Прибор состоит из кассеты для пластинок $7'' \times 7''$ (17 см \times 17 см), которая может быть смонтирована на постоянно установленных рефракторах обсерваторий. Для компенсации суточного движения звезд пластинка перемещается с помощью небольшого синхронного мотора (рис. 107). Для поглощения голубых лучей от звезд (до 5000 Å) перед фотопластинкой устанавливается желтый фильтр приблизительно такого же размера (Шотт GG 14 Å), имеющий в середине круглое отверстие размером с изображение лунного диска. Перед фильтром расположена плоскопараллельная пластинка из темного стекла, закрывающая круглое отверстие и приводимая во вращение вторым синхронным мотором. Скорость вращения и позиционный угол оси вращения подбираются так, что относительное движение Луны компенсируется. Тем самым становятся возможными более длительные экспозиции, несмотря на различные скорости движения Луны и звезд. Момент экспозиции, регистрируемый на хронографе с точностью $\pm 0,02$ сек, соответствует моменту, когда желтый фильтр и темная пластинка стоят параллельно друг другу. Этому моменту, когда нет никакого отклонения через плоскопараллельную пластинку, и соответствует положение

Луны среди звезд, зафиксированное на негативе. Параллельность проверяется автоколлимацией. Сигналы контактного устройства регистрируются относительно часов, идущих по всемирному времени. Наблюдателю следует позаботиться об определении поправки этих часов с помощью сигналов времени.

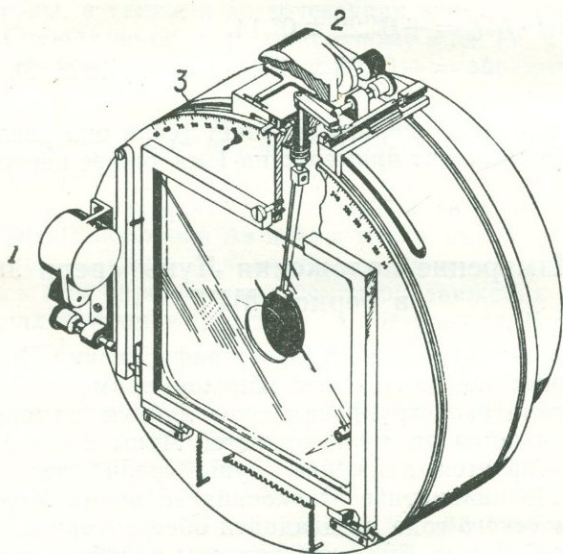


Рис. 107. Лунная камера Марковнца.

1—мотор для ведения фотопластинки, 2—мотор для поворота, 3—деления для установки по позиционному углу.

Прибор имеет приспособления для правильной установки по
 1) движению звезд,
 2) движению Луны,
 3) позиционному углу оси вращения плоскопараллельной пластинки.

Данные для установки табулируются для каждой из двадцати станций заранее. После установки инструмента изображение Луны помещается в центре поля зрения трубы-искателя, и процесс наблюдения протекает автоматически, как только нажата пусковая кнопка. При этом мотор часового механизма телескопа выключается и включаются синхронные моторы камеры. Открывание и закрывание затвора также происходит автоматически. Специальный источник света создает во время экспозиции на негативе след длиной около 6 см, что облегчает быструю предварительную ориентировку в измерительной машине.

Толщина темной плоскопараллельной пластинки вашингтонского рефрактора составляет 1,8 мм. Коэффициент пропускания

равен 0,001. При фотографировании использовались следующие материалы: при полнолунии — пластинки Истмен II G, при первой четверти — Истмен 103 G, с чувствительностью до 5700 А. Время экспозиции 12 и 24 сек соответственно.

Для исключения ошибок ведения экспонируются две пластинки, причем вторая — после поворота камеры на 180° вокруг оптической оси ¹⁾. Для страховки получается еще такая же пара пластинок, но обычно их измерять не приходится. Как правило, за ночь производится три полных наблюдения (на востоке, юге и западе). При малой высоте Луны ограничиваются двумя наблюдениями с интервалом 4 час или одним вблизи меридиана. Ниже 20° наблюдения не производятся. Фаза Луны должна быть между первой и последней четвертью, а еще более благоприятна вблизи новолуния и полнолуния. Отправляемые в центральное измерительное учреждение данные состоят из полученных пластинок, записей хронографа с отметками сигналов времени и обзорного рисунка звездного поля, подлежащего измерению. При этом наиболее яркие ближайшие к Луне звезды обозначаются номерами Йельских зонных каталогов. На пластинках соответствующие звезды обводятся кружками (рис. 108).

Итак, обработке подлежат снимки, на которых единственным объектом переднего плана является Луна в центральной проекции из пункта наблюдения на фоне некоторого участка звездного неба. Поскольку наблюдения могут быть распределены по большей части лунной орбиты и по большой области местных часовых углов и почти нет ограничений в отношении места и времени, становится возможным накопление обширного наблюдательного материала. Распределение станций по всей Земле и распространение наблюдений на большой промежуток времени изменяет коэффициенты уравнений ошибок в пределах от нуля и почти до единицы; благодаря этому впервые становится возможным независимое в полном объеме определение астрономических и геодезических неизвестных. Однако всего этого еще недостаточно. Нужно решить еще две следующие задачи:

1. Учесть неправильности лунного края; для этого вместо карт Хайна используют лунные профили из Парижского атласа и профили и каталоги Морской обсерватории США (гл. IV, § 8 и 9).

2. Улучшить лунную эфемериду на основе теории Броуна, с учетом изменений масштаба времени, основанного на вращении Земли (гл. V, § 1—4).

Обработка пластинок, полученных в период Международного геофизического года за сто с лишним ночей, была произведена

¹⁾ Markowitz W., Instructions for Operation of the Moon Camera, U. S. Naval Observatory, 29 June 1956.

четырьмя центральными измерительными лабораториями, в распоряжении которых были четыре одинаковые измерительные координатные машины Манна. Машины имеют два прецизионных винта по x и y и поворотный столик, несущий пластинку; столик поворачивается через 6° . Для установки используется проекционный экран. Звезды измеряются дважды — в нормальном положении и после поворота пластинки на 180° , так что координаты отнесены к оси вращения пластинкодержателя.

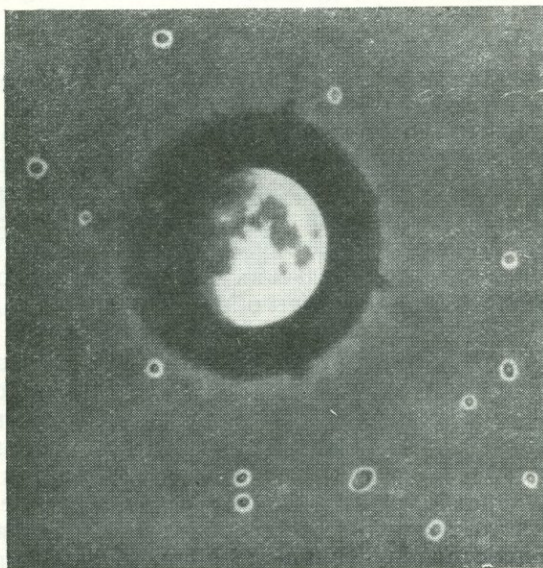


Рис. 108. Снимок, полученный с лунной камерой Марковица (Луна и Плеяды).

Звезды обведены кружками. Круглая тень вызвана плоским темным фильтром. (Из информационного Бюллетеня Морской обсерватории США, the Moon Position Program, 1956).

Радиус Луны измеряется через 6° . По методу наименьших квадратов получается положение центра Луны относительно оси вращения, а тем самым и относительно системы окружающих звезд. Если измеряется значительная часть лунного края, то можно считать, что отклонения края Луны от круговой формы взаимно компенсируются; поэтому полученные координаты центра уже почти свободны от ошибок края и могут быть приняты за первое приближение. Предусмотрено и дальнейшее исправление за неровности края и приведение края в целом к некоторому стандартному положению. Отсчетный механизм измерительной машины управляет перфоратором, так что результаты

измерения выдаются в виде перфокарт. Основными каталогами для положений звезд являются FK3, Йельский зонный каталог и New Zodiacal Catalogue. К ним присоединяются новые фотографические каталоги AGK2 и AGK3 (2-й и 3-й каталоги Астрономического общества), из которых первый уже вышел в свет. Положения звезд, взятые из Йельского каталога, также переносятся на перфокарты при подготовке к вычислениям. После приведения к общему равноденствию и к одной эпохе (учетом прецессии, нутации, собственного движения и параллакса) и в данном случае после перевода на систему FK3 можно считать, что используемые координаты звезд достаточно свободны от ошибок. Для трудоемкого вычисления редукций использовалась электронная машина (IBM 650).

Благодаря большому числу наблюдений на каждой станции случайная ошибка будет мала. Напротив, несовершенства различных телескопов и измерительных машин могут вызвать значительные систематические ошибки. Для исключения последних на каждой станции через равные промежутки времени получают контрольные снимки звездного поля, в котором одна звезда достаточно ярка, чтобы ее можно было сфотографировать через темное стекло серединного фильтра. При этом фильтр должен, конечно, оставаться неподвижным. Одно и то же звездное поле фотографируется всеми станциями по два раза на востоке, юге и западе; отсюда сравнительными измерениями могут быть получены ошибки отдельных инструментов и разности между различными инструментами. Для эталонирования измерительных машин применяются стеклянные масштабы, с помощью которых удалось свести систематическую ошибку с $0,25 \text{ мк}$ до $0,1 \text{ мк}$. Ошибка измерительной машины, вызывающая в центре пластинки ошибку в $0,2 \text{ мк}$, исказила бы положение Луны на пластинках, полученных в Вашингтоне, на $0'',009$.

Следует считать, что положение Луны может быть определено по паре пластинок с точностью $\pm 0'',15$; можно ожидать, что по всему наблюдательному материалу одной станции за 100 ночей результирующая ошибка положения Луны снизится до $0'',015$ — $0'',02$. Этому на Земле соответствуют ошибки положения в 30 — 40 м (по Марковицу [2], вероятные ошибки).

§ 6. Определение геоцентрических координат по методу Марковица

1. Общая обработка

Задача состоит в том, что требуется установить зависимость между топоцентрическими координатами α' , δ' центра Луны и геоцентрическими координатами станции наблюдения. Для этой

цели Марковиц [2] вводит две *прямоугольные системы координат*, отнесенные к центру тяжести Земли (x, y, z и X, Y, Z), оси z и Z которых совпадают с осью вращения Земли. Плоскость xz первой системы содержит Гринвич, а ось y направлена в точку с западной геоцентрической долготой 90° . Вторая система (X, Y, Z) вращается вокруг оси первой системы; ее ось X направлена в точку весеннего равноденствия, ось Y — в точку неба с $\alpha = 6^h$.

Пусть станция S , положение которой определяется, имеет в экваториальной системе, ориентированной по Гринвичу, геоцентрические полярные координаты ρ, φ', λ' ; а в системе небесного экватора, ориентированной по точке весеннего равноденствия, — геоцентрические полярные координаты ρ, φ', θ , где θ — часовой угол точки весеннего равноденствия относительно геоцентрического меридиана станции S . Тогда

$$\begin{aligned} x_s &= \rho \cos \varphi' \cos \lambda', \\ y_s &= \rho \cos \varphi' \sin \lambda', \\ z_s &= \rho \sin \varphi'; \end{aligned} \quad (14.24)$$

$$\begin{aligned} X_s &= \rho \cos \varphi' \cos \theta, \\ Y_s &= \rho \cos \varphi' \sin \theta, \\ Z_s &= \rho \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (14.25)$$

В системе XYZ получаем для центра Луны

$$\begin{aligned} X_m &= R \cos \delta \cos \alpha, \\ Y_m &= R \cos \delta \sin \alpha, \\ Z_m &= R \sin \delta. \end{aligned} \quad (14.26)$$

Геоцентрические положения Луны $R = \text{cosec } P$, α, δ протабулированы в эфемеридах как функция равномерно текущего эфемеридного времени; напротив, наблюдаемым положениям соответствуют отметки всемирного времени. В конце этого параграфа мы еще остановимся на определении поправки ΔT , служащей переходом от одного из этих масштабов времени к другому. Здесь же примем прежде всего, что для момента наблюдения возможно получить как геоцентрические полярные координаты R, α, δ Луны, так и геоцентрический гринвичский часовой угол γ точки весеннего равноденствия.

С введением геоцентрического гринвичского звездного времени γ в (14.25) можно положить

$$\theta = \gamma - \lambda'.$$

Тогда получим совместно с (14.24)

$$\begin{aligned} X_s &= x_s \cos \gamma + y_s \sin \gamma, \\ Y_s &= x_s \sin \gamma - y_s \cos \gamma, \\ Z_s &= z_s. \end{aligned} \quad (14.27)$$

Согласно (14.26) и (14.27) прямоугольные координаты центра Луны, отнесенные к месту наблюдения, будут

$$\begin{aligned} X_m - X_s &= R \cos \delta \cos \alpha - x_s \cos \gamma - y_s \sin \gamma, \\ Y_m - Y_s &= R \cos \delta \sin \alpha - x_s \sin \gamma + y_s \cos \gamma, \\ Z_m - Z_s &= R \sin \delta - z_s. \end{aligned} \quad (14.28)$$

Пусть для того же момента времени α' , δ' — наблюдаемые топоцентрические угловые координаты центра Луны, а D — его расстояние от станции S . Тогда

$$\begin{aligned} X_m - X_s &= D \cos \delta' \cos \alpha', \\ Y_m - Y_s &= D \cos \delta' \sin \alpha', \\ Z_m - Z_s &= D \sin \delta'. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Приравняв друг другу (14.28) и (14.29), получим исходные соотношения для определения геоцентрических координат станции:

$$\begin{aligned} D \cos \delta' \cos \alpha' &= R \cos \delta \cos \alpha - x_s \cos \gamma - y_s \sin \gamma, \\ D \cos \delta' \sin \alpha' &= R \cos \delta \sin \alpha - x_s \sin \gamma - y_s \cos \gamma, \\ D \sin \delta' &= R \sin \delta - z_s. \end{aligned} \quad (14.30)$$

а) Окончательные формулы. Из (14.30) можно исключить топоцентрическое расстояние D , если сложить два первых уравнения, предварительно умножив их на $\sin \alpha'$ и на $-\cos \alpha'$ соответственно, и, кроме того, сложением всех трех уравнений после умножения соответственно на $\cos \alpha'$, $\sin \alpha'$ и $-\text{ctg } \delta'$. Так получаются два соотношения (14.31), выражающие связь между искомыми прямоугольными координатами x_s , y_s , z_s станции и наблюдаемыми топоцентрическими координатами центра Луны,

$$\begin{aligned} 0 &= R \cos \delta \sin(\alpha' - \alpha) - x_s \sin(\alpha' - \gamma) - y_s \cos(\alpha' - \gamma), \\ 0 &= R \cos \delta \cos(\alpha' - \alpha) - R \sin \delta \text{ctg } \delta' - x_s \cos(\alpha' - \gamma) + \\ &\quad + y_s \sin(\alpha' - \gamma) + z_s \text{ctg } \delta'. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Одно наблюдение положения Луны дает два уравнения с тремя неизвестными x_s , y_s , z_s ; поэтому для решения необходимы два или более наблюдений.

б) Дифференциальные формулы. Пусть известны приближенные значения x_{0s} , y_{0s} , z_{0s} геоцентрических координат станции, и пусть с помощью этих значений вычислены для рассматриваемого момента времени топоцентрические координаты α'_0 , δ'_0 ; тогда на основании (14.30) соотношения между наблюдаемыми топоцентрическими положениями могут быть выражены

дифференциальными формулами

$$\alpha' = \alpha'_0 + \Delta\alpha', \quad \delta' = \delta'_0 + \Delta\delta' \quad (14.32)$$

и окончательными координатами

$$x_s = x_{0s} + \Delta x_s; \quad y_s = y_{0s} + \Delta y_s; \quad z_s = z_{0s} + \Delta z_s. \quad (14.33)$$

Для получения исходных формул нужно первое и второе выражения (14.30) сначала умножить соответственно на $-\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ и сложить, а затем умножить соответственно на $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ и тоже сложить. Получаем

$$D \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) = x_s \sin(\alpha - \gamma) + y_s \cos(\alpha - \gamma), \quad (14.34)$$

$$D \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) = -x_s \cos(\alpha - \gamma) + y_s \sin(\alpha - \gamma) + R \cos \delta.$$

Деля первое из уравнений (14.34) на второе, получаем для прямого восхождения

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{x_s \sin(\alpha - \gamma) + y_s \cos(\alpha - \gamma)}{-x_s \cos(\alpha - \gamma) + y_s \sin(\alpha - \gamma) + R \cos \delta}. \quad (14.35)$$

Деление третьего уравнения (14.30) на второе уравнение (14.34) дает для склонения

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{(R \sin \delta - z_s) \cos(\alpha' - \alpha)}{-x_s \cos(\alpha - \gamma) + y_s \sin(\alpha - \gamma) + R \cos \delta}. \quad (14.36)$$

Введем в уравнения (14.35) и (14.36) приближенные значения из уравнений (14.32) и (14.33) с их поправками. Разложив в ряд Тэйлора и ограничившись членами 1-го порядка, получаем следующие линейные соотношения:

$$\begin{aligned} a_1 \Delta x_s + a_2 \Delta y_s &= a_3 \Delta\alpha', \\ b_1 \Delta x_s + b_2 \Delta y_s + b_3 \Delta z_s &= b_4 \Delta\alpha' + b_5 \Delta\delta'. \end{aligned} \quad (14.37)$$

Дифференцированием находим для коэффициентов следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin(\alpha - \gamma) + \cos(\alpha - \gamma) \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha), \\ a_2 &= \cos(\alpha - \gamma) - \sin(\alpha - \gamma) \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha), \\ a_3 &= \sec^2(\alpha' - \alpha) [R \cos \delta - x_s \cos(\alpha - \gamma) + y_s \sin(\alpha - \gamma)]. \end{aligned} \quad (14.38)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \cos(\alpha - \gamma) \operatorname{tg} \delta', \\ b_2 &= -\sin(\alpha - \gamma) \operatorname{tg} \delta', \\ b_3 &= -\cos(\alpha' - \alpha), \\ b_4 &= \sin(\alpha' - \alpha) (R \sin \delta - z_s), \\ b_5 &= \sec^2 \delta [R \cos \delta - x_s \cos(\alpha - \gamma) + y_s \sin(\alpha - \gamma)]. \end{aligned} \quad (14.39)$$

Поправки $\Delta\alpha'$ и $\Delta\delta'$ в правой части (14.37) становятся известны из наблюдений. Из двух или более наблюдений положения Луны

могут быть выведены поправки прямоугольных координат станции Δx , Δy , Δz . В программе МГГ для каждой из двадцати станций предусматривалось большое число наблюдений, чтобы сделать возможным определение других неизвестных (поправка момента ΔT , улучшение элементов лунной орбиты).

2. Специальная обработка

Из трех наблюдений положения Луны, сделанных в одну ночь на одном пункте в различных часовых углах (на востоке, в меридиане и на западе), можно определить, как показал Марковиц [2], поправку времени ΔT (эфемеридное время минус всемирное время) и, кроме того, угол между астрономическим и геоцентрическим меридианами пункта наблюдения.

Астрономический меридиан определяется плоскостью, проходящей через направление отвеса пункта наблюдения и параллельной оси вращения Земли. Он может быть немедленно найден. Геоцентрический меридиан определяется плоскостью, содержащей пункт наблюдения и ось вращения Земли. Он должен определяться из особых наблюдений.

Мы используем для этой цели соотношения (14.29), введя значения X_s и Y_s из (14.25); получаем

$$\begin{aligned} D \cos \delta' \cos \alpha' &= R \cos \delta \cos \alpha - \rho \cos \varphi' \cos \theta, \\ D \cos \delta' \sin \alpha' &= R \cos \delta \sin \alpha - \rho \cos \varphi' \sin \theta. \end{aligned} \quad (14.40)$$

Умножаем первое из этих уравнений на $\sin \alpha'$, второе на $-\cos \alpha'$ и складываем. Тогда

$$0 = R \cos \delta \sin(\alpha' - \alpha) + \rho \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha'). \quad (14.41)$$

Здесь θ — часовой угол точки весеннего равноденствия относительно геоцентрического меридиана станции наблюдения. Топоцентрический часовой угол Луны $\theta - \alpha'$ относится также к геоцентрическому меридиану станции наблюдения и неизвестен. Обозначим его через U_g ,

$$U_g = \theta - \alpha'.$$

Обозначим топоцентрический часовой угол Луны относительно астрономического меридиана в тот же момент времени через U_a . Тогда разность

$$\Delta U = U_g - U_a$$

содержит наряду с поправкой времени ΔT еще одну неизвестную. Введя в (14.41)

$$U_g = U_a + \Delta U,$$

имеем

$$R \cos \delta \sin(\alpha' - \alpha) = -\rho \cos \varphi' [\sin U_a + \Delta U \cos U_a]. \quad (14.42)$$

Пусть в нашем распоряжении имеются три наблюдения Луны, для которых U_a имеет значения $-h, 0, +h$, причем h близко к прямому углу. Обозначим эти наблюдения индексами 1, 2, 3. Тогда по (14.42) будем иметь, если для краткости положим $R \cos \delta = \rho$,

$$\begin{aligned} p_1(\alpha'_1 - \alpha_1) &= -\rho \cos \varphi' (-\sin h + \Delta U \cos h), \\ p_2(\alpha'_2 - \alpha_2) &= -\rho \cos \varphi' \Delta U, \\ p_3(\alpha'_3 - \alpha_3) &= -\rho \cos \varphi' (+\sin h + \Delta U \cos h). \end{aligned} \quad (14.43)$$

В противоположность $\theta - \alpha'$ разность $\alpha' - \alpha$ всегда остается малой. Если t_1, t_2 и t_3 суть моменты наблюдения, выраженные по всемирному времени, то геоцентрические прямые восхождения α следует интерполировать для соответствующих моментов эфемеридного времени T_1, T_2, T_3 , причем

$$T_i = t_i + \Delta T,$$

а для ΔT сначала известно лишь приближенное значение. Исключив из (14.43) неизвестную ΔU , для чего первое и третье уравнения складываются и делятся на второе, получаем следующее условное уравнение, которое удовлетворяется только в том случае, когда в эфемериду входят с правильным значением T ,

$$\frac{p_1(\alpha'_1 - \alpha_1) + p_3(\alpha'_3 - \alpha_3)}{p_2(\alpha'_2 - \alpha_2)} = 2 \cos h$$

или

$$p_1\alpha'_1 + p_3\alpha'_3 - 2p_2\alpha'_2 \cos h = p_1\alpha_1 + p_3\alpha_3 - 2p_2\alpha_2 \cos h. \quad (14.44)$$

Если значения α_i и $p_i = R_i \cos \delta_i$, взятые с предварительным значением ΔT для моментов $T_i = t_i + \Delta T$, не удовлетворяют уравнению (14.44), ΔT может быть найдено последовательными приближениями. Здесь следует заметить, что в соответствии с расположением наблюдений $\cos h$ малая величина и геоцентрические прямые восхождения возрастают с введенной поправкой времени ΔT почти линейно. Окончательное значение ΔT будет получено из наблюдений всех станций.

С определением ΔT координаты Луны смогут быть отнесены отныне к той же мере времени, что и наблюдения. ΔU может быть найдено также из (14.43). Вычтя третье выражение из первого и разделив разность на второе, получим

$$\Delta U = - \frac{2 \sin h p_2 (\alpha'_2 - \alpha_2)}{p_1(\alpha'_1 - \alpha_1) - p_3(\alpha'_3 - \alpha_3)}. \quad (14.45)$$

§ 7. Сравнение универсального метода и метода теней Бесселя

Можно сравнить параллактический универсальный метод с бесселевой теорией затмений, если найденное по фотоснимкам топоцентрическое место центра Луны рассматривать как место фиктивной звезды, покрытие которой произошло в момент фотографирования. К этому фиктивному покрытию могут быть применены формулы теории затмений Бесселя.

Положим, после внесения необходимых поправок, что в момент экспозиции t

$$\alpha'_\zeta = \alpha_\times \quad \text{и} \quad \delta'_\zeta = \delta_\times. \quad (14.46)$$

Вычислим затем по (6.2) и (6.3) (гл. VI, стр. 133—134) координаты x , y центра Луны и координаты ξ , η , ζ пункта наблюдения в системе фундаментальной плоскости. Тогда должно быть

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad (14.47)$$

если не влияет какая-нибудь ошибка. Входящие в эти условные уравнения расхождения следует приписать в основном (если отвлечься от ошибок наблюдения) неизвестным поправкам $\Delta\alpha$, $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha_\zeta$, $\Delta\delta_\zeta$.

Ниже мы разовьем эти соображения в упрощенном виде в применении к формулам и обозначениям О'Кифа и Андерсон (ср. гл. XIII, § 3); (λ положительна к востоку). Пусть по заданным координатам Луны α_ζ , δ_ζ , фиктивной звезды α'_ζ , δ'_ζ и пункта наблюдения φ , λ , $N + h$ вычислены координаты x_0 , y_0 , ξ_0 , η_0 в фундаментальной плоскости. Это ведет к расхождению

$$x_0 - \xi_0 = w_x, \quad y_0 - \eta_0 = w_y. \quad (14.48)$$

Пусть искомые окончательные координаты суть

$$\begin{aligned} x_0 + \Delta x &= x, & y_0 + \Delta y &= y, \\ \xi_0 + \Delta \xi &= \xi, & \eta_0 + \Delta \eta &= \eta. \end{aligned} \quad (14.49)$$

Тогда

$$\Delta \xi - \Delta x = w_x, \quad \Delta \eta - \Delta y = w_y. \quad (14.50)$$

Для того чтобы выразить $\Delta \xi$ и $\Delta \eta$ через поправки параметров эллипсоида a , φ , λ , мы используем введенную в гл. XIII, § 3 прямоугольную геоцентрическую систему координат

$$\begin{aligned} u &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ v &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ w &= (N + h) \sin \varphi - e^2 N \sin \varphi. \end{aligned} \quad (14.51)$$

Согласно (13.12) и (13.17), имеем

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= \sin \mu_* \Delta u + \cos \mu_* \Delta v, \\ \Delta\eta &= -\sin \delta_* \cos \mu_* \Delta u + \sin \delta_* \sin \mu_* \Delta v + \cos \delta_* \Delta w,\end{aligned}\quad (14.52)$$

$$\begin{aligned}\Delta u &= u \frac{\Delta a}{a} - u \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta\varphi - v \Delta\lambda, \\ \Delta v &= v \frac{\Delta a}{a} - v \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta\varphi + u \Delta\lambda,\end{aligned}\quad (14.53)$$

$$\Delta w = w \frac{\Delta a}{a} + w \operatorname{ctg} \varphi \cdot \Delta\varphi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= \frac{\Delta a}{a} \left(u \sin \mu_* + v \cos \mu_* - \frac{\Delta\varphi}{206\,265} \operatorname{tg} \varphi (u \sin \mu_* - v \cos \mu_*) \right) + \\ &\quad + \frac{\Delta\lambda}{206\,265} (u \cos \mu_* - v \sin \mu_*),\end{aligned}\quad (14.54)$$

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= \frac{\Delta a}{a} [\sin \delta_* (-u \cos \mu_* + v \sin \mu_*) + w \cos \delta_*] + \\ &\quad + \frac{\Delta\varphi}{206\,265} \operatorname{tg} \varphi [\sin \delta_* (u \cos \mu_* - v \sin \mu_*) + w \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos \delta_*] + \\ &\quad + \frac{\Delta\lambda}{206\,265} \sin \delta_* (v \cos \mu_* + u \sin \mu_*),\end{aligned}\quad (14.55)$$

что можно переписать в сокращенном виде

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= c_1 \Delta a + c_2 \Delta\varphi + c_3 \Delta\lambda, \\ \Delta\eta &= c_4 \Delta a + c_5 \Delta\varphi + c_6 \Delta\lambda.\end{aligned}\quad (14.56)$$

По (13.13) имеем

$$\begin{aligned}\Delta x &= p \cos \delta_\zeta \Delta a_\zeta + \frac{x}{p} \Delta p, \\ \Delta y &= p \Delta\delta_\zeta + \frac{y}{p} \Delta p.\end{aligned}\quad (14.57)$$

Используя, как это сделал Ламберт, зависимость между поправками Δp (p — расстояние до Луны в метрах) и Δa , вытекающую из динамической теории, можно выразить Δp при помощи (13.24) через поправку экваториального радиуса

$$\Delta p = \frac{2}{3 \sin p} \Delta a + 2790 \text{ (в метрах)}. \quad (14.58)$$

Положив в правой части (14.50)

$$w'_x = w_x + 2790 \frac{x}{p}, \quad w'_y = w_y + 2790 \frac{y}{p} \quad (14.59)$$

и объединив коэффициенты при Δa в виде

$$c'_1 = c_1 - \frac{2}{3 \sin p} \frac{x}{p}; \quad c'_4 = c_4 - \frac{2}{3 \sin p} \frac{y}{p}, \quad (14.60)$$

получаем, подставляя в (14.50), следующие уравнения ошибок:

$$\begin{aligned} \omega'_x &= c'_1 \Delta a + c_2 \Delta \varphi + c_3 \Delta \lambda - \frac{p \cos \delta_{\zeta}}{206265} \Delta \alpha_{\zeta}, \\ \omega'_y &= c'_4 \Delta a + c_5 \Delta \varphi + c_6 \Delta \lambda - \frac{p}{206265} \Delta \delta_{\zeta}. \end{aligned} \quad (14.61)$$

Таким образом, универсальный паралактический метод свелся к бесселевой обработке затмений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markowitz W., The Use in Geodesy of the Results of Lunar Observations and eventual Observations of artificial Satellites, *Bull. géod.*, Nr. 49, 33—40 (1958).
2. Markowitz W., Geocentric Coordinates from Lunar and Satellite Observations, *Bull. géod.*, Nr. 49, 41—49 (1958).
3. Lambert W. D., Celestial Flare Triangulation, *Eng. Exp. Station New Ohio University*, 25, Nr. 3 (1953).
4. Newcomb S., Investigation of Corrections to Hansens Tables of the Moon, Washington, 1876.
5. Battermann H., Beiträge zur Bestimmung der Mondbewegung und der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen von Sternbedeckungen, Berlin, Bd. 5, 1891.
6. Battermann H., Bestimmung der Mondlänge, des Mondhalbmessers und der Sonnenparallaxe, *Beobachtgsergeb*, Berlin, Bd. 11, 1902.
7. Battermann H., Beitrag zur Bestimmung der Mondbahn und des Mondhalbmessers usw. nebst Vereinigung der Resultate der drei Berliner Reihen, *Beobachtgsergeb*, Berlin, Bd. 13, 1910.
8. Böhme S., Bearbeitung der Aufnahmen von Fr. Hayn zur Ortsbestimmung des Mondes am Normalrefraktor der Leipziger Sternwarte in den Jahren 1920—1928, *Astron. Nachr.*, 256, 365—386 (1935).
9. Battermann H., Resultate für Mondort, Mondhalbmesser und Sonnenparallaxe, *Astron. Nachr.*, 157, 166—176 (1901).
10. Hopmann J., Über die gravimetrische und astronomische Bestimmung von Lotabweichungen, *Veröff. Inst. f. Erdmessung*, Nr. 12, Bamberg, 1950, S. 75—125.
11. Brown E. W., Russel H. N., Position of the Moon determined photographically, *Ann. Harv. Coll. Obs.*, Cambridge, Mass., 72, Nr. 1, 1—14 (1911).
12. Russel H. N., Fowler M., Photographic Determinations of the Position of the Moon, *Ann. Harv. Coll. Obs.*, Cambridge, Mass., 76, 127—160 (1915).

- 13 Russel H. N., Fowler M., Borton M. C., Fuller E., Photographic Determinations of the Position of the Moon, Ann. Harv. Coll. Obs., Cambridge, Mass., 80, Nr. 11 (1917).
14. Russel H. N., Borton M. C., Fuller E., Photographic Determinations of the Position of the Moon, Ann. Harv. Coll. Obs., Cambridge, Mass., 81, Nr. 5 (1919).
15. Markowitz W., Photographic Determination of the Moon's Position, and Applications to the Measure of Time, Rotation of the Earth, and Geodesy, Astron. J., 59, 69—73 (1954).

БЛИЗЗЕМНОЙ ИСКУССТВЕННЫЙ СПУТНИК С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГЕОДЕЗИИ

Развитие наблюдательной и измерительной техники для определения орбит искусственных спутников Земли заставляет ожидать, что основанные на этом исследования по определению фигуры Земли в будущем будут иметь большое значение. По мнению Марковица [1], для решения геодезической задачи принципиально возможны два пути: *динамический* — использование наблюденных аномалий искусственного спутника для вывода гравитационного потенциала тела Земли и *геометрический* — подобный получению геоцентрических координат из наблюдений Луны. В большей своей части получаемые до сего времени значения основывались на первом методе. Вывод геоцентрических координат по параллаксу спутника требует особых технических вспомогательных средств и спутников с орбитами между 500 и 1000 км. Этот метод до сего времени не нашел достаточного развития.

При анализе движения близземного спутника, как это показал Коцаи [2], можно пренебречь притяжением Луны и Солнца ввиду его незначительности. Влияние верхних слоев земной атмосферы и других многочисленных физических возмущений может быть эмпирически получено из большого наблюдательного материала и исключено. Остающиеся отклонения можно рассматривать как зависящие от распределения масс.

Поскольку ничего другого не предложено, все величины в этой главе даются в системе CGS.

§ 1. О неравенствах в движении спутников вследствие возмущений от масс Земли

1. Поле тяготения

Наблюдение и анализ движения искусственных спутников Земли может основываться на классических теоретических и практических работах, относящихся к Луне.

Возмущение движения земной оси вследствие притяжения Луны и Солнца (лунно-солнечная прецессия), как это впервые вывел Даламбер в 1749 г., можно использовать для определения динамического сжатия Земли, т. е. отношения разности главных моментов инерции $C - A$ к наибольшему главному моменту инерции C

$$\frac{C - A}{C} = 0,0032794 \pm 11 \quad (1959).$$

Прецессия земной оси входит в определение орбиты спутника через его экваториальные координаты — прямое восхождение и склонение; обычно для коротких промежутков времени этим влиянием можно пренебречь.

Тобиас Майер нашел в 1767 г. эмпирический возмущающий член в эклиптической долготе Луны. Лаплас впервые в 1802 г. объяснил в своей «Небесной механике» наличие этого члена сжатием Земли и нашел соответственный возмущающий член и в эклиптической широте. Ганзен занимался в 1865 г. выводом возмущающих членов высших порядков в движении Луны. Наряду с определением силы тяжести на поверхности Земли движение Луны (и в большей степени движение близземных искусственных спутников) позволяет определить отношение разности главных моментов инерции $C - A$ к наибольшему моменту инерции R^2M , образуемому суммарной массой M на расстоянии экваториального радиуса R

$$\frac{C - A}{R^2M} = 0,0010867 \pm 12 \quad (1959)$$

(это отношение называется *статическим сжатием*). Кроме того, анализ наблюдаемых движений искусственных спутников позволяет определить влияние масс следующих меньших порядков. Дальнейшие малые влияния (трение о воздух, движение воздуха, изменение наклона орбиты и т. д.) будут здесь рассмотрены в общих чертах.

Если принять Землю за однородный шар, то существует полная симметрия в притяжении спутника, и результирующее притяжение проходит через центр шара. Однако из-за всех отклонений от идеальной сферической формы в действительности это не происходит. Разность $C - A$ возникает главным образом вследствие вздутия Земли у экватора на 21,5 км. Это обстоятельство вызывает при удалении от полюса на экваториальный радиус уменьшение ускорения силы тяжести на $3Jg_0 = 4,791 \text{ см/сек}^2$ по сравнению с ускорением на экваторе

$$J = \frac{3}{2} \frac{C - A}{R^2M} = 1,630 \cdot 10^{-3} \quad (1959).$$

Ускорение силы тяжести на экваторе (на расстоянии R) составляет $981,429 \text{ см/сек}^2$, а на полюсе (на том же расстоянии) $976,638 \text{ см/сек}^2$. Значение этой величины для сферической Земли

$$g_0 = \frac{k^2 M}{R^2}$$

составляет $979,820$ и соответствует ускорению силы тяжести на реальной Земле в точке, геоцентрическая широта которой удовлетворяет соотношению $\sin^2 \varphi = 1/3$.

Ускорение центробежной силы на экваторе равно

$$\omega^2 R = 3,391 \text{ см/сек}^2 \quad (R = 6,3781 \cdot 10^8 \text{ см, по Джеффрису}).$$

Возникающая асимметрия поля тяготения Земли вызывает аномалии J , которые проявляются в движении спутника. Так же на его движение влияют возмущения высшего порядка от масс.

Относительно сжатия ε , в первую очередь интересующего геодезистов, известно, что если в основу положить измерения силы тяжести, то, как следует из теоремы Клеро, в первом приближении сжатие равно

$$\varepsilon = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 R}{g_R} - \frac{g_p - g_R}{g_R} + \dots \quad (15.1)$$

Это выражение получается, если величину J заменить через измеренное значение разности $g_p - g_R$.

В случае движения спутника естественнее сохранить первоначальную величину J и использовать соотношения, приведенные в «Высшей геодезии» Гельмерта (часть II, стр. 77). С небольшими изменениями, облегчающими практическое применение, они совпадают с формулами, выведенными Джеффрисом [21]:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= J + \frac{m}{2} + \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{m}{7} \right) + \text{чл. } (\varepsilon^3) \quad (\varepsilon = 1/297,1), \\ m &= m_0 (1 - \varepsilon) = 3456 \cdot 10^{-3}, \\ m_0 &= \frac{\omega^2 R}{g_R} = 3468 \cdot 10^{-3}, \\ J &= \frac{3}{2} \frac{1}{MR^2} (C - A). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Отсюда можно заключить, что возможное улучшение dJ вызовет улучшение только величины ε и члена $\beta^2 \sin^2 \varphi$ международной формулы для силы тяжести

$$d\varepsilon = -d \left(\frac{g_p - g_R}{g_R} \right) = dJ. \quad (15.3)$$

Хотя J до сих пор известно только с точностью до $1/500$, m_0 известно с точностью $1/25000$.

Обратимся теперь к уравнениям движения спутника в поле тяготения Земли, чтобы показать отдельно влияние моментов инерции (J и высших порядков). Задачей является при этом вывод соотношений между наблюдаемыми аномалиями в движении и моментами инерции, которые могут быть переведены в изменения радиуса геоида.

2. Уравнения движения

Силовая функция притяжения точки с массой, равной единице и находящейся вне Земли, выражается формулой

$$U = k^2 \int \frac{dm}{e},$$

где e — расстояния элементов массы Земли dm от притягиваемой точки, а $k^2 = 66,70 \cdot 10^{-9}$ — постоянная тяготения. Разложение $1/e$ в степенной ряд

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \dots \right\}$$

приводит к сферическим функциям P от сферических геоцентрических небесных координат притягиваемой точки r' , Θ' , Φ' (r' — радиус-вектор, Θ' — дополнение геоцентрической широты, Φ' — геоцентрическая долгота, R — экваториальный радиус, r — расстояние элемента массы dm от центра Земли). После подстановки члены, практически используемые в случае спутника, представляются в следующем виде:

$$U = g_0 R \left\{ \frac{R}{r'} + J \left(\frac{R}{r'}\right)^3 \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \Theta'\right) + J_2 \left(\frac{R}{r'}\right)^3 \sin^2 \Theta' \cos 2(\Phi' - \Phi_0) + \right. \\ \left. + J_3 \left(\frac{R}{r'}\right)^4 (5 \cos^3 \Theta' - 3 \cos \Theta') + \right. \\ \left. + J_4 \left(\frac{R}{r'}\right)^5 (35 \cos^4 \Theta' - 30 \cos^2 \Theta' + 3) + \dots \right\}. \quad (15.4)$$

U (по смыслу берется отрицательным) — потенциальная энергия точечной массы; U равно работе, которую нужно произвести, чтобы эту массу из центра Земли перенести на расстояние r' .

После введения наилучших числовых приближений (Джеффрис [21]) получаем

$$R = 6,3781 \cdot 10^8 \text{ см},$$

$$g_0 = Mk^2/R^2 = 979,820 \text{ см/сек}^2,$$

$$J = \frac{3}{2} \frac{1}{MR^2} (C - A) = 1,637 \cdot 10^{-3},$$

$J_2 = \frac{3}{4} \frac{(B - A)}{MR^2}$ (J_2 и Φ_0 характеризуют эллиптичность экватора, численные значения неуверенны),

$J_3 = \frac{1}{5} \frac{1}{MR^3} \int P_{3,1} r^3 dm$ (характеризует асимметрию северного и южного полушарий, численное значение неуверенно),
 $J_4 = \frac{1}{35} \frac{1}{MR^4} \int P_{4,1} r^4 dm = 10,6 \cdot 10^{-6} = D$ (характеризует нарушение симметрии экватора).

Наиболее выгодное соотношение для вывода ускорения силы тяжести g_0 на сферической Земле содержит измеренную величину ускорения силы тяжести на экваторе g_R

$$g_R + \omega^2 R = g_0 \left(1 + J + \frac{3}{7} D \right);$$

$$g_0 = \frac{g_R + \omega^2 R}{1 + J + \frac{3}{7} D}.$$

Полагая $g_R = 978,0373$ см/сек² и $\omega^2 R = 3,391$ см/сек², получаем $g_0 = 979,820$ см/сек². Отсюда, принимая $R = 6,3781 \cdot 10^8$ см и $k^2 = 66,7 \cdot 10^{-9}$ см³/г · сек², получаем массу Земли $M = 5976 \cdot 10^{24}$ г.

В динамике системы материальных точек показывается, как найти уравнения движения материальной точки единичной массы из выражений для кинетической и потенциальной энергий. Если $q_n = r, \Theta, \Phi$ — сферические полярные экваториальные координаты движущейся массы, то кинетическая энергия L и потенциальная энергия U , если ограничиться членами с J , представляются выражениями

$$L = \frac{1}{2} \{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 + r^2 \sin^2 \Theta \cdot \dot{\Phi}^2 \}, \quad (15.5)$$

$$U = g_0 R \left\{ \frac{R}{r} + J \left(\frac{R}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \Theta \right) + \dots \right\}. \quad (15.6)$$

Из уравнений Лагранжа 2-го рода следуют уравнения движения

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{\partial U}{\partial q_n} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = 0, \quad (15.7)$$

где $q_n = r, \Theta, \Phi$. Эти уравнения опираются только на принцип Даламбера: «Работа, совершаемая действующими силами и силами инерции при бесконечно малом перемещении, всегда равна нулю».

Для $n = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= r \dot{\Theta}^2 + r \sin^2 \Theta \cdot \dot{\Phi}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta} &= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\Theta \cdot \dot{\Phi}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \Phi} &= 0; \end{aligned} \quad (15.8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \ddot{r},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}, \quad (15.9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2r \sin^2 \theta \cdot \dot{r} \dot{\phi} + r^2 \sin \theta \cdot \dot{\theta} \dot{\phi} + r^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\phi};$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 - Jg_0 \left(\frac{R}{r}\right)^4 (1 - 3 \cos^2 \theta) - \dots,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = Jg_0 \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin 2\theta + \dots, \quad (15.10)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 + \dots$$

Поскольку компоненты ускорения $\partial U / \partial q_n$, как было отмечено выше, должны быть взяты с обратным знаком, то уравнения движения для единичной точечной массы в поле тяготения принимают вид

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2 = -g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 - Jg_0 \left(\frac{R}{r}\right)^4 (1 - 3 \cos^2 \theta) - \dots,$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \frac{1}{2} r \sin 2\theta \cdot \dot{\phi}^2 = 0 + Jg_0 \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin 2\theta + \dots, \quad (15.11)$$

$$2r \sin^2 \theta \cdot \dot{r} \dot{\phi} + r^2 \sin 2\theta \cdot \dot{\theta} \dot{\phi} + r^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\phi} =$$

$$= 0 + \dots \quad (J \text{ отсутствует}).$$

Во втором уравнении (15.11) первые два члена представляют собой полную производную от $r^2 \dot{\theta}$, умноженную на $1/r$, в третьем уравнении три члена являются полной производной от $r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}$.

При интегрировании этих трех уравнений движения поступают следующим образом. В правых частях принимают во внимание только первые члены. Тогда (при $J_1, J_2, \dots = 0$, т. е. для шарообразной Земли, со слоями одинаковой плотности) на спутник действует только радиальное ускорение, а именно

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Это существенно упрощает уравнения, которые при этом, как показывается в механике, приводят к трем законам Кеплера.

§ 2. Изменения в законах Кеплера для близземного спутника вследствие учета моментов инерции

Чтобы описать изменения в общих чертах, необходимо ввести вместо сферических полярных координат r, θ, ϕ новые параметры, которые определяют положение мгновенной плоскости

орбиты спутника в экваториальной системе и самого спутника на орбите:

1) наклон i плоскости орбиты к экваториальной плоскости;
 2) фазовый угол ψ спутника в плоскости орбиты, отсчитываемый от некоторого первоначального направления, и угол β , которым выражается поворот большой оси орбиты в ее плоскости (отсчитывается в том же направлении, что и угол ψ);

3) фазовый угол Ω в экваториальной плоскости, определяющий поворот плоскости орбиты вокруг земной оси.

В случае сжатой Земли орбита спутника уже не является плоской, а представляет собой спираль. Эту спираль можно заменить мгновенными плоскостями орбиты, которые определяются тем, что проходят через спутник и имеют постоянный наклон i . (Вектор скорости не лежит точно в этой плоскости, а слегка наклонен к ней.)

В дальнейшем мы не будем исходить из интегрирования трех приведенных выше уравнений движения, а ограничимся изложением легко понятных выводов, примененных Кинг-Хили [3] и другими авторами [4, 5] для орбит с малыми эксцентриситетами ($e < 0,05$). О строгом методе вычисления орбит (Бреннер) см. § 4.

1. Изменения первого закона Кеплера

После введения малых членов, наибольший из которых (J) достигает максимального значения $1/400$, первый закон Кеплера претерпевает изменения. Первое уравнение движения приводит к выражению для обратной величины радиуса-вектора r :

$$\frac{1}{r} = L \{ 1 + e \cos(\psi - \beta) + J \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{5 \cos^2 i - 3}{2} + \frac{\sin^2 i}{6} \cos 2\psi \right) + \dots \}; \quad (15.12)$$

r — радиус-вектор, отсчитываемый от фокуса (центра Земли);

$1/L$ — параметр эллипса;

e — эксцентриситет;

$\psi - \beta$ — истинная аномалия, отсчитываемая от перигея;

i — наклон плоскости орбиты к экватору.

Мгновенная орбита представляет собой эллипс, радиус-вектор которого из-за влияния J меняется на постоянную величину с изменением i и периодически — с изменением i и ψ (рис. 109).

Пункт наблюдения можно ввести в это выражение и через параллакс спутника. Под постоянной экваториального горизонтального параллакса спутника, как и в случае Луны, понимают

угол P_0 , определяемый следующими выражениями:

$$\sin P_0 = \frac{R}{\bar{r}},$$

$$\frac{1}{\bar{r}} = L \left[1 + J \left(\frac{R}{\bar{r}} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 3}{2} + \dots \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\psi; \quad (15.13)$$

R — экваториальный радиус Земли, \bar{r} — среднее гармоническое всех r .

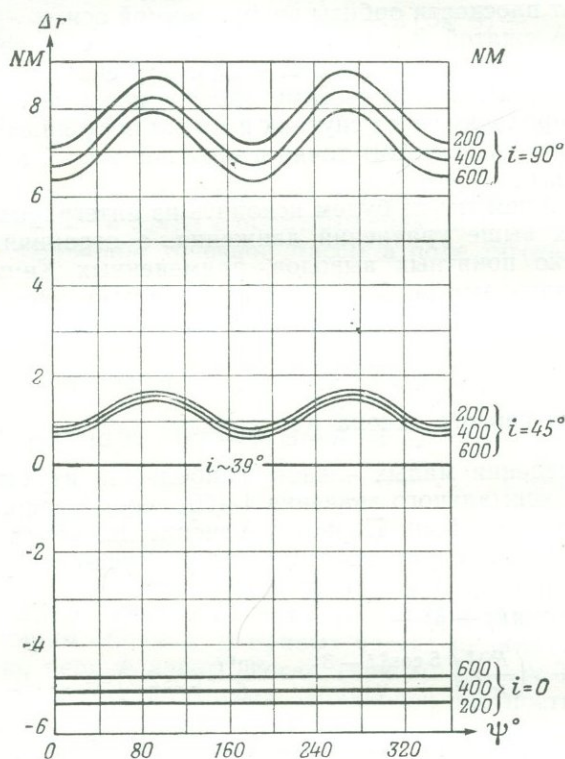


Рис. 109. I закон Кеплера. Изменение радиального расстояния в зависимости от J в морских милях (NM).

Величины 200, 400, 600 суть выраженные в морских милях средние высоты ($\bar{r} - R$) спутника при прохождении через экватор; ψ — угол фазы; i — наклонение плоскости орбиты.

Для Луны $P_0 = 0^\circ 57' 02'' ,57$; для искусственного спутника с $\bar{r} - R = 500$ км $P_0 = 68^\circ 01' 06'' ,94$. Это показывает, что для спутников в будущем не будет требоваться большая точность измерения параллакса, как в случае Луны (отвлекаясь от прочих трудностей).

2. Изменения второго закона Кеплера

Принимая во внимание замечание, сделанное при выводе уравнений движения (15.11), можно немедленно получить из третьего уравнения универсальный закон площадей

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{dt} = \text{const} = p_A; \quad (15.14)$$

постоянная p_A есть проекция на плоскость экватора элемента площади, проходимого радиусом-вектором за единицу времени.

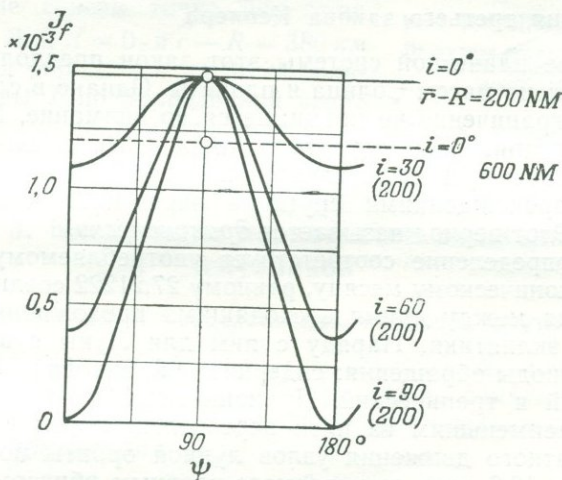


Рис. 110. II закон Кеплера.

Величина $p_B J_f$ — изменение удвоенной описанной площади в зависимости от J .

Чтобы перейти на мгновенную плоскость орбиты, надо положить

$$p_A = p_B \cos i. \quad (15.15)$$

По Кинг-Хили ([3], стр. 57, уравнение 24) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\Phi} &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos i} \left\{ 1 + J \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin^2 \theta + \dots \right\}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d\psi}{d\Phi} \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Если отсчитывать ψ , как здесь, от наивысшей точки орбиты, то из прямоугольного сферического треугольника получаем:

$$\cos \theta = \sin i \cos \psi,$$

откуда

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 i - \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2\psi$$

и окончательно в плоскости орбиты

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = p_B \left\{ 1 + J \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 i - \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2\psi + \dots \right) \right\}. \quad (15.17)$$

Максимальное изменение проходимого элемента площади p_B вследствие введения J составляет 1/1200. Элемент площади претерпевает изменения на постоянную величину с i и периодические изменения с изменением i и ψ (рис. 110).

3. Изменения третьего закона Кеплера

В случае планетной системы этот закон предполагает учет влияния только массы Солнца и планеты. Однако в случае спутника это ограничение не принимается во внимание. Период обращения спутника T по орбите, не лежащей в какой-либо определенной плоскости, определяется как время между двумя северными прохождениями спутника через плоскость небесного экватора. Этот период называется *драконическим*.

Такое определение соответствует употребляемому в случае Луны драконическому месяцу, равному 27,21222 средним суткам. Это — время между двумя восходящими прохождениями через плоскость эклиптики. Наряду с ним для Луны существуют и другие периоды обращения: сидерический, синодический, аномалистический и тропический. Драконический период обращения является наименьшим из пяти перечисленных периодов вследствие обратного движения узлов лунной орбиты по эклиптике (на 360° за 18,6 лет), вызываемого главным образом эллиптичностью Земли (J).

По приведенному выше определению имеем для спутника

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\psi} d\psi.$$

Обозначая через a большую полуось эллиптической орбиты, Кинг-Хили ([3], стр. 63, ур-ние 73) находит при помощи (15.17) следующее выражение для $d\psi/dt$:

$$T = 2\pi \left(\frac{a^3}{g_0 R^2} \right)^{1/2} \left[1 - J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{7 \cos^2 i - 1}{4} + \dots \right]. \quad (15.18)$$

Отсюда следует, что для двух орбит с мало отличающимися большими полуосями a_1 и a_2 величина J в отношении T_2^2/T_1^2 исключается и действует только совместно с другими моментами масс в малых членах высших порядков

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3} + \dots$$

Период обращения T вследствие J изменяется по сравнению с T для шарообразной Земли на $1/400$ (как и для $1/r$). Он претерпевает постоянные изменения с изменением i и не имеет никаких значительных периодических изменений (рис. 111).

Как следует из приведенного выше определения, за время T спутник проходит 360° по своей слегка спиральной орбите; относительно же звезд он проходит не совсем точно 360° из-за прецессии. Для $i = 0$ и $\bar{r} - R = 380$ км этот период обращения на 8 сек больше величины T по приведенной выше формуле, которая в свою очередь на 13 сек меньше периода в случае шарообразной Земли.

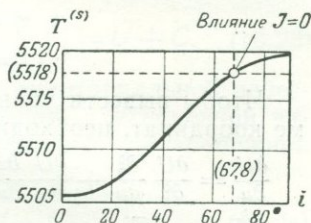


Рис. 111. III закон Кеплера. Изменение периода образования T в зависимости от J для $a = R + 200$ (NM).

§ 3. Следующие неравенства движения спутников

1. Астрономическая и геодезическая скорость спутника

Под астрономической скоростью спутника N_a понимают его линейную скорость, как она наблюдается из центра невращающейся Земли. Она связана в первом приближении с потенциалом одного притяжения

$$U = k^2 \int \frac{dm}{e}$$

без потенциала центробежной силы Земли.

Под геодезической скоростью N_g мы понимаем линейную скорость спутника, которая наблюдается с Земли, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω . Она зависит в первом приближении от потенциала Земли, слагающегося из потенциала притяжения и потенциала центробежной силы

$$V = U + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + v^2).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать движение во вращающейся системе координат.

Возьмем для первого случая (только одно U) неподвижную прямоугольную геоцентрическую экваториальную систему координат ξ, η, ζ (ось ξ которой направлена в точку весеннего равноденствия) и для второго случая (V) аналогичную, но вращающуюся вместе с Землей координатную систему u, v, w , ось u которой направлена в точку экватора на меридиане Гринвича.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\xi &= u \cos \omega t - v \sin \omega t, \\ \eta &= u \sin \omega t + v \cos \omega t, \\ \zeta &= w.\end{aligned}\tag{15.19}$$

Чтобы вывести уравнения движения во вращающейся системе координат, необходимо к существующим ускорениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial u} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cos \omega t + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \sin \omega t = \frac{d^2 u}{dt^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial v} &= -\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \sin \omega t + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \cos \omega t = \frac{d^2 v}{dt^2}\end{aligned}\tag{15.20}$$

присоединить на основании законов динамики материальных точек еще «кажущиеся» ускорения. Это — компоненты ускорения Кориолиса (которые зависят от относительной скорости)

$$-2\omega \frac{dv}{dt} \text{ и соответственно } +2\omega \frac{du}{dt}$$

и компоненты центробежного ускорения, которое зависит от относительного положения

$$-\omega^2 u \text{ и соответственно } -\omega^2 v.$$

Отсюда получаем уравнения движения во вращающейся системе

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dt^2} - 2\omega \frac{dv}{dt} - \omega^2 u &= \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} - \omega^2 u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{du}{dt} - \omega^2 v &= \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial v} - \omega^2 v, \\ \frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial w} = \frac{\partial V}{\partial w}.\end{aligned}\tag{15.21}$$

Умножая первое уравнение (15.21) на $2 \frac{du}{dt}$, второе на $2 \frac{dv}{dt}$ и третье на $2 \frac{dw}{dt}$ и складывая, получаем полный дифференциал квадрата геодезической скорости N_g , а также астрономической скорости N_a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} N_g^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] + V + C, \\ C &= \text{const} = -\frac{k^2 M}{2a}.\end{aligned}\tag{15.22}$$

$$\frac{1}{2} N_a^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] = U + C.$$

При помощи соотношений

$$\xi = r \sin \Theta \cos \Phi, \quad \eta = r \sin \Theta \sin \Phi, \quad \zeta = r \cos \Theta$$

можно преобразовать эти выражения к пространственной полярной системе координат

$$\frac{1}{2} N_a^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right] = U + C. \quad (15.23)$$

Это выражение, позволяющее перейти от экваториальной небесной системы координат к системе, связанной с мгновенной эллиптической орбитой, определяет зависимость центробежной силы на орбите

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{2}{r} (U + C). \quad (15.24)$$

Эти уравнения возможно написать сразу, без вывода, поскольку они выражают закон сохранения энергии (постоянство суммы кинетической и потенциальной энергий).

Итак, изменения линейной скорости верно и без искажений воспроизводят общие возмущения силового поля, пересекаемого при движении.

При наблюдении линейной скорости спутника с земной поверхности используется N_a , когда спутник фотографически привязывают только к системе звезд; напротив, N_g может быть применена, когда спутник, кроме того, привязывают к триангуляционной системе (тригонометрические методы, § 5), чтобы получить r и dr/dt . Для полноты изложения приведем еще зависимости N_a и N_g с учетом сжатия (член J) и наклона плоскости орбиты i . По Кинг-Хили имеем

$$N_a^2 = 2g_0 R^2 L \left[1 + e \cos(\psi - \beta) + \frac{2}{3} J \left(\frac{R}{r} \right)^2 (-2 + 4 \cos^2 i - \sin^2 i \cos^2 \psi) + \dots \right] + C, \quad (15.25)$$

$$N_g^2 - N_a^2 = \frac{\omega^2}{L^2 [1 + e \cos(\psi - \beta)]^2} \cdot F, \quad (15.26)$$

$$F = 1 - \sin^2 i \cos^2 \psi - 2J \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - \sin^2 i \cos^2 \psi) \times \\ \times \left(\frac{5 \cos^2 i - 3}{2} + \frac{1}{6} \sin^2 i \cos 2\psi \right) + \dots$$

Здесь также заметны отклонения (вследствие J) от основной эллиптической скорости, которые постоянным образом зависят от i и периодически меняются с i и ψ .

2. Прецессия узлов мгновенной орбиты

Согласно Кинг-Хили, рассмотрим в экваториальной плоскости наряду с фазовым углом Φ изменяющийся по другому закону переменный угол Ω (прямое восхождение восходящего узла в

экваторе), чтобы вывести величину, соответствующую в случае Луны попятному вращению $\Delta\Omega$ плоскости мгновенной орбиты вокруг оси вращения Земли.

Введем в формулы для прецессии, выведенные Кинг-Хили ([3], стр. 71, уравнение 88), также член с J_3 из уравнений движения (асимметрия Земли относительно экватора), поскольку наблюдения прецессии наряду с непрерывными наблюдениями высоты перигея дают в настоящее время наибольшую точность

$$-\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{g_0}{R}} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{R}{a}\right)^{1,5} \cos i \left[J + J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{19}{12} \sin^2 i - 1\right) - \frac{3}{8} J_3 e \left(\frac{R}{r}\right) \frac{\sin p}{\sin i} (15 \sin^2 i - 4) - \frac{3}{14} D \left(\frac{R}{r}\right)^2 (7 \sin^2 i - 4) + \dots \right]; \quad (15.27)$$

Здесь D — сферическая функция 4-го порядка, p — средний аргумент перигея (расстояние в орбите от экватора) и a — большая полуось основного эллипса. Следовательно, наибольшая прецессия возникает при $i=0$ (если $r-R=380$ км, то $d\Omega/dt = -8^{\circ},2$ в сутки). Периодические изменения с изменением i и ψ не имеют места (рис. 112).

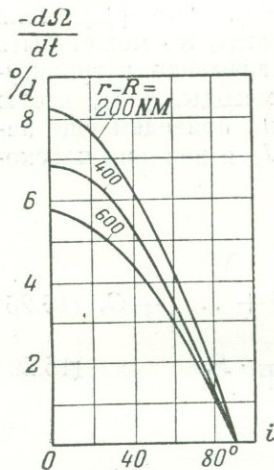


Рис. 112. Вращение плоскости орбиты в зависимости от J .

Здесь уместно заметить, что наклон плоскости орбиты изменяется от оборота к обороту и в пустоте вследствие теоретических членов высших порядков. Это доказано по наблюдениям второго советского спутника с помощью кинотеодолитов 3 ноября 1957 г.: $di/dt = -0^{\circ},0018$ в сутки для $i=65^{\circ},3$ [6]. Пределы $d\Omega/dt$ ограничены неуверенностью в i . Аналогичным образом и остальные элементы орбиты показывают небольшие изменения (например, большая полуось и эксцентриситет).

3. Вращение оси эллипса в плоскости орбиты

Как и величина Ω для плоскости орбиты, угол β в уравнении основного эллипса изменяется вследствие J и моментов масс высшего порядка. В случае Луны это соответствует вращению линии абсид на 360° за 8,85 года. Из уравнений движения Кинг-Хили вывел следующую формулу ([3], стр. 71, уравнение 89):

$$\frac{d\beta}{dt} = J \sqrt{\frac{g_0}{R}} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{R}{a}\right)^{1,5} \left\{ \frac{5 \cos^2 i - 1}{2} + \dots \right\}. \quad (15.28)$$

Предельная положительная скорость вращения получается при $i = 0$. (если $\bar{r} - R = 380$ км, то $\frac{d\beta}{dt} = \pm 16,5$ в сутки); предельная отрицательная скорость вращения — при $i = 90^\circ$ ($-4^\circ, 1$ в сутки). Вращение не происходит при $i = 63^\circ, 4$. Периодические изменения с i и ψ не существуют. Вследствие множителя $(R/\bar{r})^{3,5}$ в обоих случаях величина вращения быстро уменьшается с высотой

$r, \text{ км}$	7 000	8 000	9 000	10 000
$\left(\frac{R}{r}\right)^{3,5}$	0,7222	0,4526	0,2996	0,2072

§ 4. Дальнейшая разработка теории движения спутника по Бреннеру (1959)

Усовершенствование методов наблюдения искусственных спутников за последние годы сделало необходимым улучшение и развитие первоначальной теории Кинг-Хили с точки зрения более точного предвычисления орбиты и эфемериды. Многочисленные исследования в этом направлении были проведены группой ученых под руководством Бреннера, Станфордский исследовательский институт, США [7].

Теория Кинг-Хили применима лишь для орбит с малыми эксцентриситетами ($e < 0,05$) и рассматривает мгновенную орбиту как плоскость постоянного наклона, проходящую через центр Земли и спутник. Поэтому наклон орбиты равен максимальной широте спутника.

В теории Бреннера на эксцентриситет не накладывается никакого ограничения. В ней аналитически вводится изменяющаяся со временем «новая относительная плоскость», которая также проходит через центр Земли и содержит спутник. Новая относительная плоскость имеет переменный наклон $i = i(t)$ к экваториальной плоскости. Направление пересечения этих плоскостей (долгота линии узлов) $\Omega = \Omega(t)$ тоже является функцией времени. Полярные координаты r (радиус-вектор) и ψ (угол между радиусом-вектором и линией узлов), введенные при описании орбиты в орбитальной плоскости, а также углы

i — наклон «орбитальной плоскости»,

Θ — дополнение до 90° широты спутника,

Ω — долгота линии узлов,

Φ — долгота спутника

связаны широко используемыми соотношениями

$$\text{ctg } \Theta = \text{tg } i \sin (\Phi + \Omega),$$

$$\cos \Theta = \sin i \cos \psi,$$

$$\sin \Theta = -\sin \psi \sec (\Phi + \Omega).$$

«Новая относительная плоскость» существенно отличается от оскулирующей плоскости, которая лежит в основе астрономической системы координат для оскулирующего эллипса. Эта система координат вообще не применяется Бреннером [8]. Вывод оскулирующих элементов приводится в отдельном приложении, в дополнение к перечисленным выше работам [10].

Аналитическое решение проблемы определения орбиты, которое Бреннер приводит к [8], исходит из трех дифференциальных уравнений движения (15.11). Метод аналогичен применяемому в теории возмущений: различные процессы представлялись подходящими для каждого случая математическими выражениями, содержащими неизвестные функции. Последние успешно определялись с различной степенью приближения путем решения некоторого числа линейных дифференциальных уравнений (частично с введением эллиптических и приближенных тригонометрических функций).

При этом предполагается, что принятые математические выражения являются решением дифференциальных уравнений, в чем, однако, необходимо было убедиться в последующем. Это было сделано Бреннером путем обширного численного интегрирования и рассмотрения остаточных ошибок после подстановки найденных решений.

Из первого уравнения (15.11) вместо принимаемого до этого приближения для радиуса-вектора

$$\frac{1}{r} = L [1 + e \cos(\psi - \beta_0) + \dots]$$

получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{r} = L [1 + e \cos(\alpha\psi - \beta_0) + f(J)],$$

где $f(J)$ и α зависят от малых членов с J , причем

$$f(J) = 12 \text{ малых членов с } J,$$

$$\alpha = 1 + 2 \text{ малых члена с } J.$$

Величины L , e , β_0 — постоянные, которые наряду с другими выводятся как постоянные интегрирования по начальным условиям. Неизвестные функции моментов масс J получаются из наблюдений.

Из второго уравнения (15.11) получаются зависимости для наклона i (три малых члена) и для долготы восходящего узла Ω (шесть малых членов) в функции времени.

Из третьего уравнения (15.11) выводится зависимость для углового движения по орбите ψ (11 малых членов) от времени. Тем самым вся орбита будет описана для большого числа оборотов.

Эти результаты являются значительным шагом вперед в деле предвычисления эфемерид, сохраняющих точность в несколько секунд даже при большом числе оборотов, и позволяют построить гипотезы для объяснения наблюдаемых аномалий орбиты, происходящих как вследствие влияния атмосферы и космической пыли, так и магнитных и электрических сил и светового давления.

Лишь после этого мы получаем надежную основу для определения распределения масс и фигуры Земли.

§ 5. Оптические наблюдательные методы

1. Тригонометрические методы

В основе этих методов лежат методы, применяемые в геодезии для удаленных и высоких целей. Отличие заключается лишь в необходимости применять более совершенные оптические приборы и делать более точное определение времени.

На многих станциях, расположенных вдоль видимой орбиты спутника, производится измерение высоты полета над горизонтом, чтобы получить приближенные геоцентрические координаты и тем самым найти орбиту. С помощью теоретически точно известных редуций за вращение Земли, вращение плоскости орбиты и линии абсид можно учесть эти влияния при выводе орбиты, если только наблюдения не разделены слишком большими интервалами времени.

Одно определение высоты требует двух станций, расположенных на расстоянии, соизмеримом с высотой полета, и положения которых привязаны к триангуляционной сети. На этих станциях должны производиться парные фотографические засечки, либо одномоментные, либо разномоментные, но которые можно привести к одному моменту [37]. Из полученных высот (с небольшими допущениями) может быть получен радиус-вектор r , а путем использования следов звезд — географические координаты спутника, по которым могут быть получены (правда, приближенно) и его геоцентрические координаты.

На подобных парных станциях, взаимное расстояние и геодезический азимут которых могут быть вычислены, производится одновременное определение азимута и зенитного расстояния спутника. После учета, вообще говоря, известных уклонений отвеса из сферических треугольников можно получить расстояния до проекции пути спутника и третий сферический угол. После этого из плоских треугольников можно получить высоту спутника (два значения) и радиус-вектор.

Геодезический институт в Потсдаме применил камеру Тахар (фокусное расстояние 25,5 см, диаметр объектива 17 см, светосила 1:1,5). Точность определения одной высоты достигала

± 300 м [11]. Новым в Потсдаме являлось применение универсала (диаметр круга 26 см, деления через 5', уровень полутора-секундный), снабженного искателем и фотографической регистрацией кругов, что позволило получать большое число достаточно точных наблюдений азимута и зенитного расстояния.

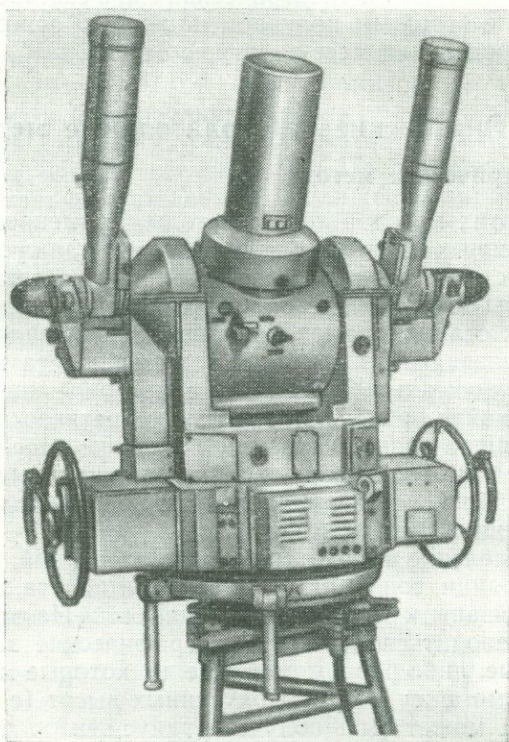


Рис. 113. Кинотеодолит фирмы «Аксания». Модель Kth 58E с электрическим приводом.

В ноябре 1957 г. на пяти наблюдательных станциях в Англии [12] для оптических наблюдений спутников были установлены кинотеодолиты фирмы «Аксания» (рис. 113) с достаточно длиннофокусными трубами.

Кинотеодолиты наводились на спутник двумя наблюдателями. Во время слежения производились фотографические наблюдения цели через 0,2 или 0,25 сек, сопровождавшиеся фотографическими отсчетами двух стеклянных кругов по азимуту и зенитному расстоянию. В отсчеты кругов вводились поправки за положение цели относительно центра поля пластинки. Кроме того,

зенитные расстояния исправлялись поправками за астрономическую рефракцию. Средняя ошибка одного измеренного угла составляла $\pm 20''$.

Для анализа наблюдений только на одной станции полученные из фотографий азимуты и зенитные расстояния были переведены в наблюдаемые направляющие косинусы направления визирования с направлениями на север и восток из пункта наблюдения. Из разностей наблюдаемых и хорошо известных вычисленных направляющих косинусов при помощи вычислительных машин были выведены улучшенные высоты спутника с точностью до ± 600 м.

В Финляндии вместо кинотеодолитов применялись метеорологические теодолиты для наблюдения шаров-зондов. Наблюдения с этими приборами в два-три раза менее точны, однако также имеют научную ценность.

Одновременные данные наблюдений, которые могут быть получены интерполяцией из близких по времени наблюдений на двух или более триангуляционных наблюдательных пунктах, позволяют получить три прямоугольные координаты спутника. Подобные наблюдения, организованные в Англии, показали, что каждая координата была получена со средней ошибкой ± 200 м.

Новинкой является выпущенная фирмой «Аскания-Верке» приставка к прецизионному теодолиту для слежения за спутником. Разделенные круги фотографируются автоматической камерой. Специальный прибор позволяет получить отсчеты кругов с точностью до $0'',1$. Поэтому измерения углов производятся значительно точнее, чем с кинотеодолитом. Устройство для слежения состоит из подставки, на которую ставится теодолит. Подставка имеет круглую вращающуюся площадку, которая несет два мотора постоянного тока для вращения приводов по высоте и азимуту. С помощью карданных валов действие привода передается на теодолит. Наведение на спутник может производиться с помощью двух труб-искателей наблюдателем и его помощником. Установка цели на крест нитей осуществляется каждым из них по высоте и азимуту соответственно от кнопочного управления. Слежение осуществляется изменением угловой скорости вращения приводов. Когда цель находится в течение нескольких секунд на кресте нитей главной трубы, наблюдатель открывает электромагнитный затвор камеры и регистрирует отсчет круга.

2. Камера Бекер-Нанн для оптических наблюдений спутников

Для Международного геофизического года в США была изготовлена серия больших высокопроизводительных фотографических камер на основе метеорной камеры Супер-Шмидт, предназначенных для определения прямых восхождений и склонений

спутников. Весьма сложная оптика была спроектирована Бекером, а монтаж — Нанном [13, 14, 16].

К 1959 г. установлено двенадцать таких камер; около 30° северной широты на семи станциях: в Нью-Мексико, Флориде, Испании, Иране, Индии, Японии и на Гавайских островах, и

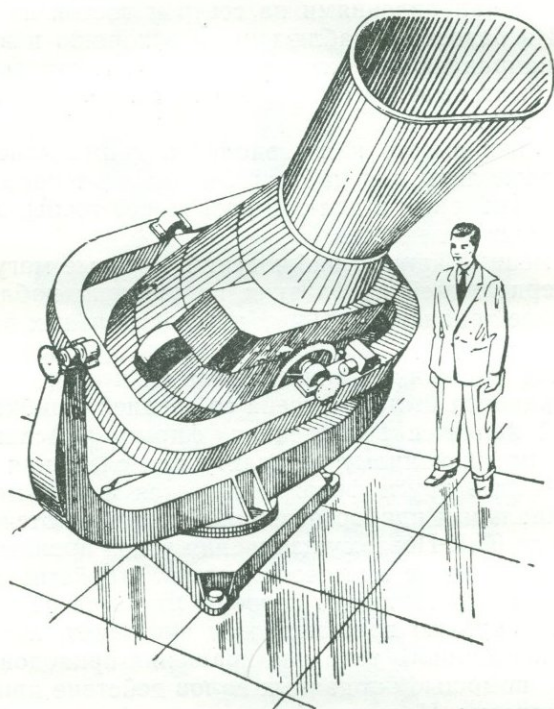


Рис. 114. Камера Бекер-Нанн.

около 30° южной широты на трех станциях — в Аргентине, Южной Африке и Австралии. Кроме того, имеются две промежуточные станции в Голландской Вест-Индии и в Перу. Организацию комплексной работы возглавляет директор Смитсоновской астрофизической обсерватории в Кембридже (штат Массачусетс) Уиппл.

Телескоп монтируется на азимутальной установке и может независимо вращаться около трех осей. Его можно заранее автоматически направлять на ожидаемое положение спутника. С помощью приводов от моторов инструмент может автоматически следовать за спутником или за звездой.

Описание методики

В первом случае (инструмент следует за спутником) изображения опорных звезд смещаются в обратном направлении по отношению к движению спутника и получаются в виде следов с разрывами, соответствующими отмеченным моментам. При этом способе используются звезды до 6^m на расстояниях $< 2^\circ$.

Во втором случае (инструмент следует за звездой) изображения звезд получаются в виде точек (уже до 12^m , так что можно связать яркие и слабые звезды и использовать особо слабые звезды) на расстоянии $< 0,5^\circ$.

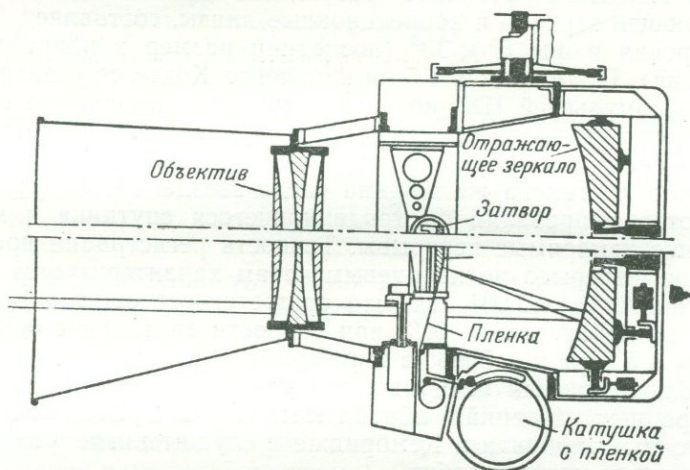


Рис. 115. Камера Бекер-Нанн в двух взаимно-перпендикулярных разрезах.

Сильно изменяющиеся видимые скорость и яркость спутника делают необходимым производить снимки с циклами U продолжительностью 2, 4, 8, 16 и 32 сек. Каждый цикл U (время одного оборота затвора) включает следующие равные по относительной продолжительности интервалы:

- затвор полностью открыт — $1/10 U$ (след звезды);
- затвор закрыт — $1/200 U$ (перерыв следа);
- интервал времени между двумя последующими закрываниями затвора — $1/40 U$ (интервал времени между двумя последующими перерывами следов).

Изменение продолжительности цикла достигается изменением скорости вращения затвора. Например, для цикла $U = 2$ сек (самое быстрое видимое движение спутника, порядка $5000''$ в сек), $a = 0,2$ сек, $b = 0,01$ сек, $v = 0,05$ сек; для цикла $U = 32$ сек (самое медленное видимое движение спутника, около

300" в сек), $a = 3,2$ сек, $b = 0,16$ сек, $v = 0,80$ сек. Подобная структура циклов и их подразделение позволяют достичь наибольшей точности при данной чувствительности эмульсии путем выбора соответствующего цикла в зависимости от обстоятельств наблюдения на небе. Вероятная ошибка определения одного прямого восхождения или склонения в среднем равна $\pm 2''$, в лучших случаях $\pm 1''$. Контрольное определение положения фундаментальной звезды (вместо спутника) по трем опорным звездам, произведенное дважды, дало отклонения относительно каталожного значения по α до $1''$ и по δ от $0,2''$ до $1''$.

Эквивалентное фокусное расстояние оптической системы, включающей зеркало и коррекционные линзы, составляет 48 см, поле зрения равно $5^\circ \times 30^\circ$ (последний размер в направлении движения). Применяется 5,5-см кинолента Кодак со спектроскопической эмульсией ID2, которая специально изгибается вследствие кривизны поля. Камера сконструирована так, что размеры изображения существующих спутников составляют в среднем $20 \text{ мк} \approx 8'',6$. Такова же ширина следа звезды 6^m , получаемого при фотографировании быстро движущегося спутника и имеющего еще измеримые перерывы. Точность регистрации времени середины перерыва по кварцевым часам характеризуется вероятной ошибкой $\pm 0,001$ сек, что соответствует ошибке в положении на орбите около $0,3''$ при скорости спутника $v = 300''$ в секунду и $5''$ при $v = 5000''$ в секунду.

Наблюдательный материал, поступающий от двенадцати международных станций, обрабатывается централизованно на электронных машинах в Кембридже и служит для непрерывного улучшения элементов орбит.

§ 6. Радиометрические наблюдения спутников

1. Измерения эффекта Доплера

Такие измерения производятся при относительно низких прохождениях спутника через широты наблюдательной станции. Измерения эффекта Доплера являются ценным дополнением к оптическим наблюдениям, поскольку они не требуют видимости объекта и позволяют быстро получить приближенные значения элементов орбиты.

Передатчик, установленный на спутнике, посылает радиоволны. Измеряется изменение частоты этих радиоволн, происходящее вследствие наличия компоненты v_r (по направлению на станцию наблюдения) в его скорости движения по орбите v_s . Происходящее явление для радиоволн аналогично известному эффекту, имеющему место при движении источника света или звука.

При уменьшающемся расстоянии число волн, приходящих на место наблюдения за единицу времени, увеличивается пропорционально лучевой скорости, вследствие чего возрастает частота ν_0 . Для случая света это обозначает смещение к области коротких волн (синее смещение); при увеличивающемся расстоянии происходит обратное явление (красное смещение). Обозначим через c скорость света в вакууме, $c' = c/n$ — скорость света в ионосфере и n — коэффициент преломления в ионосфере. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 \left(1 - \frac{v_r}{c'}\right); \\ \nu &= \nu_0 \left(1 + \frac{v_r}{c'}\right); \\ \lambda\nu &= c'.\end{aligned}\tag{15.29}$$

Когда спутник проходит участок орбиты до точки, расположенной над наблюдательной станцией, принимаемая частота увеличивается на

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v_r}{c'},\tag{15.30}$$

а после прохождения этой точки произойдет такое же уменьшение частоты. В целом амплитуда изменения частоты составит $2\nu_0 \frac{v_r}{c'}$.

Вследствие того что расстояние и высота спутника, проходящего мимо станции, меняются постепенно, изменение частоты не наступает внезапно, а происходит по характерной доплеровской кривой изменения частоты $\Delta\nu(t)$. Эта кривая лежит в основе теории и наблюдений и служит исходным материалом для дальнейших выводов. Теоретическое значение сдвига частот зависит по изложенному выше от выражения компоненты скорости v_r по лучу зрения, которая хотя и сложным способом может быть достаточно точно выражена геометрически.

Сравнение выведенной путем регистрации доплеровской кривой с теоретической даст основу для улучшения использованных приближенных элементов, если некоторые другие величины известны достаточно точно.

Для возможности быстрого использования доплеровских кривых в большинстве случаев удовлетворяются тремя параметрами: общим изменением частоты $\Delta\nu$, моментом достижения точки перегиба и наклоном к оси времени поворачивающейся касательной к доплеровской кривой.

Время, определяемое положением касательной в точке перегиба, соответствует моменту прохождения спутника через точку W на наименьшем расстоянии от места наблюдения. Наибольший наклон также соответствует наименьшему расстоянию d ,

которое раскладывают на две компоненты — горизонтальную H и вертикальную h

$$d^2 = H^2 + h^2.$$

С учетом кривизны Земли E получают геоцентрический радиус r_W для точки W на орбите

$$r_W = R_B + h + E.$$

Точка орбиты W лежит на $H \cos A$ к северу и на $H \operatorname{tg} A = v_s(t_W - t)$ к востоку от наблюдаемого места, если A есть азимут компоненты H . Соответствующим образом производятся измерения двух точек W : одной на восходящем, а другой

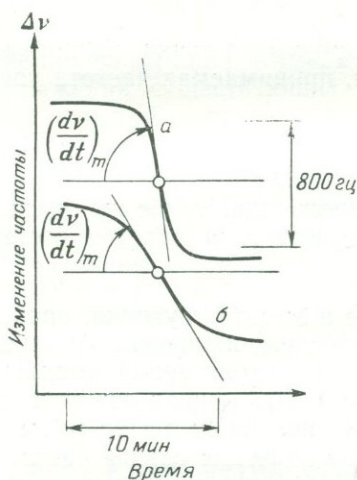


Рис. 116. Кривые Доплера.
а — ближнее, б — дальнее прохождение.

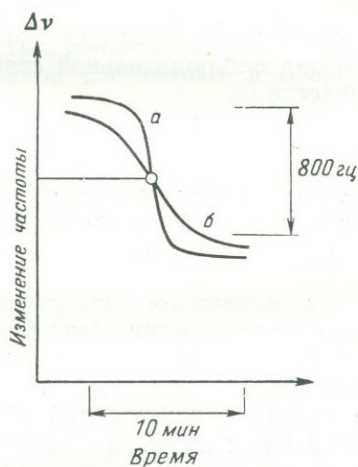


Рис. 117. Теоретические кривые Доплера.
а — ближнее, б — дальнее прохождение.

на нисходящем прохождении спутника через широты станции; доплеровские кривые этих прохождений отличаются друг от друга. Из (15.30) следует

$$\frac{d \Delta \nu}{dt} = \frac{v_0}{c'} \frac{dv_r}{dt}; \quad \left| \frac{d \Delta \nu}{dt} \right|_{\max} = v_s^2 F(h). \quad (15.31)$$

Рис. 116 и 117 показывают как наблюдаемый, так и теоретический ход доплеровских кривых для близкого (верхняя кривая) и для удаленного (нижняя кривая) прохождения для $v_0 = 20\,005 \text{ кгц}$ и $v_s = 7,6 \text{ км/сек}$.

2. Примеры использования доплеровских кривых

а) Определение момента для точки на орбите

Определение момента t_W для одной из двух точек W позволяет вывести экваториальные геоцентрические координаты φ_W , λ_W проекции точки W на Земле, полученной путем центральной проекции из центра Земли. Наряду с другими элементами орбиты (большая полуось, период обращения, наклон орбиты и прецессия) необходимо знать время t_0 и географическую долготу λ_0

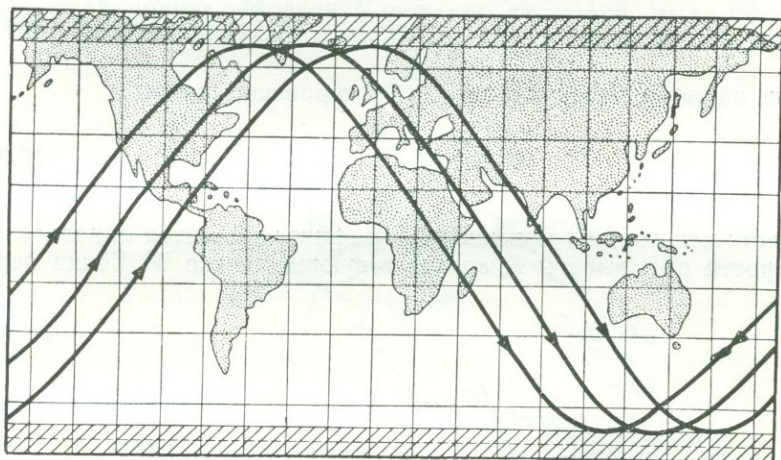


Рис. 118. Три последовательных оборота спутника в проекции Меркатора.

прохождения через восходящий экваториальный узел орбиты. Необходимые, достаточно простые соотношения были получены Пристером, Бенневицем, Ленгрюссером ([17], стр. 20).

Прохождения через узел

Пример. Спутник 1¹⁾ ($i = 65^\circ$, $p = 2^\circ,96$ в сутки), окт. 10, 1957.

Всемирное время t_0	λ_0 , к востоку от Гринвича
0 ^m 14 ^m 18 ^s	304,1
1 50 49	280,1
3 26 49	256,0
5 02 50	231,0
6 38 50	207,0

¹⁾ Первый советский спутник. — Прим. ред.

После вычисления φ_W , λ_W получают более точные положения проекций точек орбиты на Землю, чем грубо оцененные проекции орбиты на карту Меркатора (рис. 118).

б) Вывод высоты полета

Для вывода высоты полета h над горизонтом наблюдательной станции Пристер [17] использовал скорости спутника, полученные из закона сохранения энергии

$$v_s^2 = k^2 M \left(\frac{2}{R_W + h} - \frac{1}{a} \right) \quad (15.32)$$

и из наклона касательной к доплеровской кривой

$$v_s^2 = \left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} \frac{1}{F(h)}. \quad (15.33)$$

Вместо вычисления применялся графический метод определения скорости v_s и высоты h , соответствующих точке W . Точки пере-

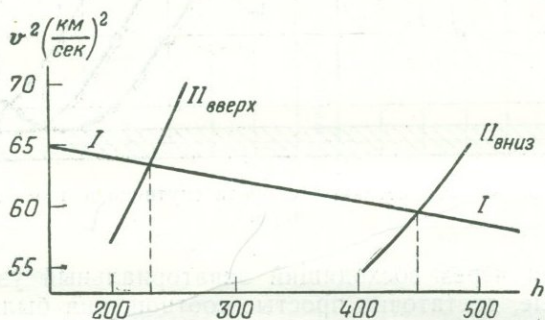


Рис. 119. Графическое определение высот h при измерении эффекта Доплера.

сечения обеих кривых (рис. 119) дают высоты при восходящем и нисходящем (справа) прохождении, а затем и радиусы-векторы

$$e = R_W + h.$$

в) Применение полученных высот для определения эксцентриситета и положения перигея

В уравнении эллипса в полярных координатах в качестве неизвестных принимаются эксцентриситет e и истинная анома-

для u_1 для точки W_1

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos u}, \quad (15.34)$$

$$u_1 = \arccos \frac{a(1-e^2) - r_1}{er_1},$$

$$u_1 = \arccos \frac{a(1-e^2) - r_2}{er_2} - \Delta u, \quad (15.35)$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u.$$

Отсюда можно определить разность аномалий Δu из сферического треугольника «полюс — W_1 — W_2 » (рис. 120). Для про-

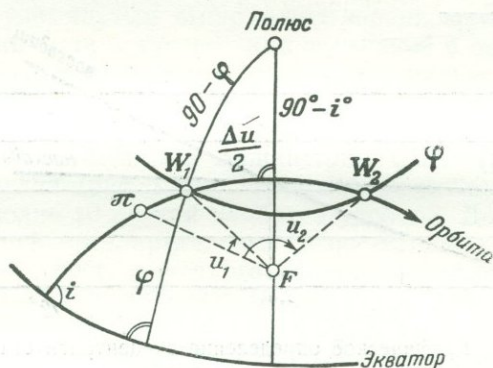


Рис. 120.

хождения через один и тот же круг широты с геоцентрической широтой φ имеем

$$\cos \frac{\Delta u}{2} = \frac{\sin \varphi}{\sin i}; \quad (15.36)$$

при прохождении через слегка отличные круги широт φ_1 и φ_2 величина Δu складывается не из равных, а из слегка отличающихся частей. Вследствие трансцендентности уравнений для u применяют не численное, а графическое решение (рис. 121). Для $a = 6920$ км, $r_1 = 6371 + 222 = 6593$ км, $r_2 = 6371 + 442 = 6813$ км, $\Delta u = 62^\circ,7$ получают

$$e = 0,0481; \quad u_1 = 11^\circ,1.$$

Поскольку аномалия считается от перигея, то величина $-u_1$ определяет положение перигея.

В нашем изложении мы остановились лишь на принципе и некоторых приложениях эффекта Допплера, вытекающих из наблюдения на одной наблюдательной станции. Таким путем могут быть определены немногие элементы орбиты, если принимать остальные за известные.

г) Дальнейшие исследования по определению орбит

Пристер и Гергенхан [18] разработали теорию для определения по измерениям эффекта Допплера всех элементов орбиты из наблюдений на трех соответствующим образом выбранных станциях.

Определению орбиты по измерениям эффекта Допплера посвящена одна из статей Гюйе [26]. Гюйе рассматривает вопрос, какие элементы входят в измерение доплеровского смещения и каким образом эти элементы могут быть получены из анализа общей зависимости изменения частоты со временем.

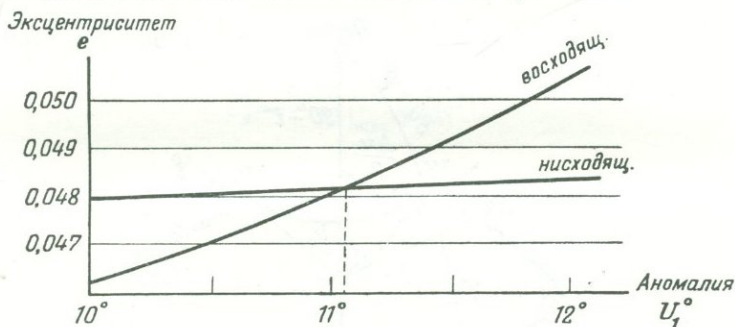


Рис. 121. Графическое определение эксцентриситета и узла.

$$a = 6920 \text{ км}, r_1 = 6593 \text{ км}, r_2 = 6813 \text{ км}, \Delta i = 62^\circ, 7.$$

Еще дальше идет теоретическая статья Р. Ньютона [27], который, кроме элементов орбиты, хочет получить еще и геодезические данные. Он ставит задачу определения максимальных коэффициентов разложения гравитационного потенциала и геодезических координат, увязанных между собой в одну сеть наблюдательных станций. В основном его программные рассуждения приводят к следующему: частота высокой стабильности посылается наблюдательной станцией на спутник и после усиления на спутнике принимается станцией обратно для измерения эффекта Допплера.

В этих двух работах показывается, что методом измерения эффекта Допплера можно достичь тех же результатов, что и с оптическими методами наблюдения спутников.

3. Другие радиометоды наблюдений спутника

Регистрация интенсивности радиоволн при пролете спутника над станцией наблюдения удастся значительно хуже вследствие атмосферных помех [17]. Интенсивность их достигает максимума в момент, когда спутник находится на кратчайшем расстоянии от наблюдателя.

Возможность измерения расстояния от спутника с помощью радиолокатора более ограничена. Только в том случае, когда орбита спутника хорошо известна и обнаружение его делается надежным, этот метод может принести лучшие результаты, если использовать для определения высоты полета и горизонтальной дальности большие радиотелескопы. Кроме того, в Англии и других странах применяется метод радиогониометрии, при котором принимаются радиосигналы для определения направления накапливаются со временем. Отдельное направление определяется с точностью $\pm 3'$, вблизи зенита $\pm 0',3$ ([12], стр. 29; [16], стр. 217).

4. Радиолокационные измерения Луны

Наряду с упомянутым выше использованием радиолокационных наблюдений для искусственных спутников в последние годы большое значение приобрели радиолокационные наблюдения Луны. Эти методы, имеющие значение как для определения лунной орбиты, так и для определения размеров Земли (см. стр. 211—213) были испытаны в Вашингтоне, США (рис. 122) и в Малверне, Англия (рис. 123). После многих исследований остановились на волне 10 см как наиболее удобной. До сих пор опубликованы лишь предварительные результаты¹⁾.

Предметом непосредственного измерения с помощью радиолокатора является расстояние D от земного наблюдательного пункта до малого участка поверхности Луны вблизи центра ее диска. Прибавляя радиус Луны, известный по другим исследованиям, получают мгновенное расстояние D земного наблюдателя от центра Луны. Радиус Луны, естественно, отягощен некоторой ошибкой, которая складывается из ошибки положенного в основу среднего радиуса Луны и ошибки величины местной неправильности лунной поверхности (как и в случае измерения параллакса).

Переход от D к расстоянию центра Земли от центра Луны производится по следующей формуле:

$$D = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma)^{1/2},$$

где ρ — геоцентрическое расстояние наблюдателя, γ — угол при центре Земли между ρ и r . Уравнение служит для вывода мгновенного расстояния r между центрами тел. Оно приводит к новому достойному внимания соотношению, если в нем заменить

ρ через средний радиус Земли ρ_m и сжатие ϵ ,

r через среднее расстояние до Луны r_m ,

r_m через динамические величины.

¹⁾ Некоторые результаты радиолокационных исследований Луны см. в книге: Радиоастрономия, Парижский симпозиум 1958 г., М., ИЛ, 1960, часть 1. — Прим. ред.

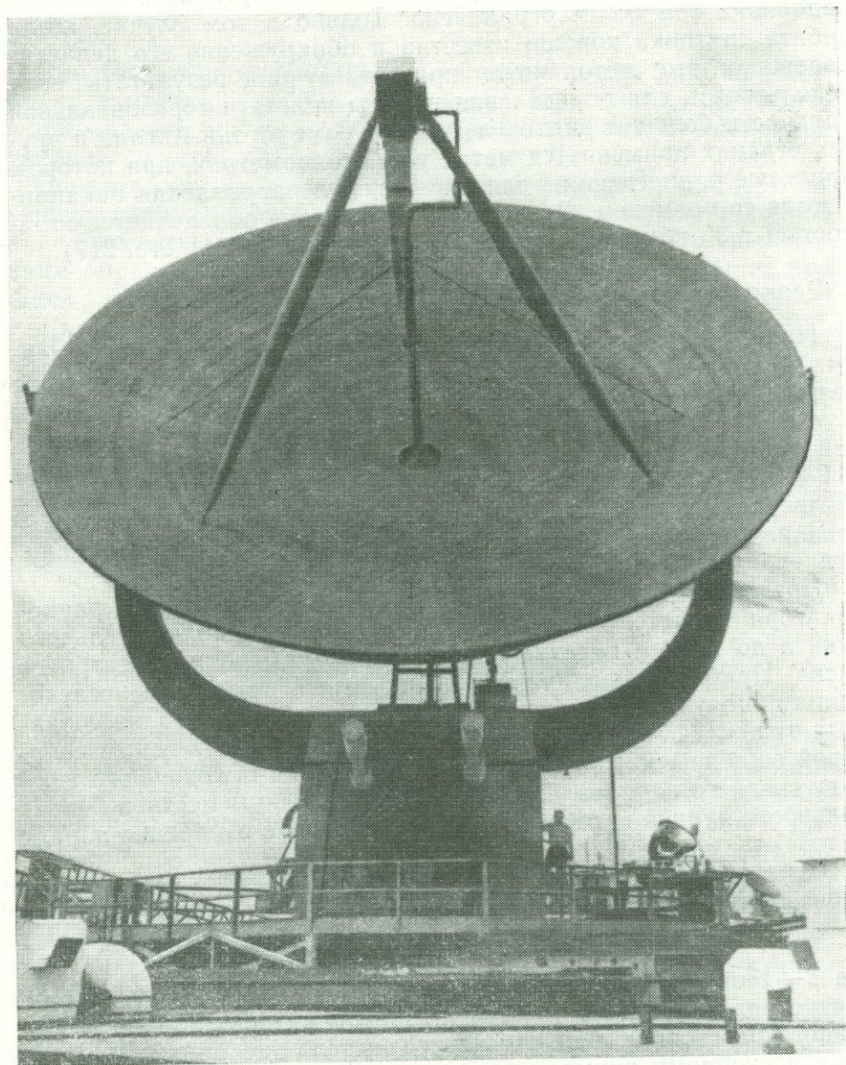


Рис. 122. 50-футовый радиотелескоп Морской исследовательской лаборатории США.



Рис. 123. 45-футовый радиотелескоп Королевской радиообсерватории в Малверне (Англия).

Тогда

$$\begin{aligned}\rho &= f(\rho_m, \epsilon), \\ r &= f(r_m), \\ r_m &= f(g_m, \rho_m, m, \epsilon).\end{aligned}$$

Величина m обозначает отношение центробежной силы на экваторе к главному члену силы тяготения g_m . Подставляя эти выражения в приведенное выше уравнение для D и считая m и g_m постоянными и достаточно хорошо известными величинами, получим новое важное для геодезии соотношение между измеренной величиной D и средним радиусом Земли ρ_m и ее сжатием ϵ

$$f(\rho_m, \epsilon) = D.$$

Помимо геодезии радиолокационные измерения Луны могут иметь значения еще в двух областях: они дают независимое значение параметра лунной орбиты и средний радиус лунной орбиты.

До тех пор пока еще не накоплено большого количества наблюдений, для получения r_m привлекают лунную теорию Броуна, которая все же дает не столь точные значения для отдельных r по сравнению с радиолокационным методом. Отдельные значения расстояний D от поверхности Земли до поверхности Луны получают в последнем случае с точностью 1 : 300 000.

§ 7. Полученные результаты и геодезические выводы

1. Сжатие Земли

Было установлено, главным образом по измерениям прямого восхождения восходящего узла на экваторе (прецессия), а также из наблюдения вращения линии абсид, что выведенная по измерениям силы тяжести величина $J = 1,637 \cdot 10^{-3}$ [21], которой при $m = 3456 \cdot 10^{-6}$ соответствует сжатие $1/\epsilon = 297,1$, вероятно, несколько завышена. В среднем из всех доступных нам определений (Кинг-Хили, Мерзон, Яккиа, Уиппл, Джеффрис, О'Киф) можно временно принять за вероятные значения

$$J = 1,630 \cdot 10^{-3} \pm 17;$$

$$\frac{1}{\epsilon} = 297,7 \pm 0,15.$$

Им соответствует уменьшение членов с $\sin^2 \varphi$ формулы силы тяжести

Международная формула силы тяжести (1930 г.)	0,0052884 $\sin^2 \varphi \pm 60$
Джеффрис (1952 г.)	0,0052891 $\sin^2 \varphi \pm 41$
Наблюдения спутников (1952 г.)	0,0052823 $\sin^2 \varphi \pm 17$

Только после обработки обширного наблюдательного материала спутников и силы тяжести возможно будет установить, действительно ли существует между ними систематическая разность. Обработка наблюдений спутников за первый год показала, что точность получаемого сжатия вдвое больше, чем по измерениям силы тяжести. Специализированные спутники и улучшение методики наблюдений принесут еще бóльшую точность и сделают возможным вывод возмущений высших порядков от масс.

2. Трехосность

Наблюдение движения узлов орбиты близкого спутника позволяет сделать заключение о возможной трехосности земного эллипсоида. В основу анализа движения узлов положено известное выражение $P_{2,2} \cos 2\lambda$ для влияния отклонения фигуры Земли от тела вращения на величину силы тяжести. Выражение для возмущающего потенциала этого члена связано с u и v геоцентрическими экваториальными прямоугольными координатами вращающейся системы следующим образом (О'Киф и Батчлор [19]):

$$\Delta U = 6,62 \cdot 10^{22} \frac{3}{2} \frac{u^2 - v^2}{r^5}, \quad (15.37)$$

где постоянная, выраженная в единицах метр и секунда, взята у Джеффриса [20, 21]. Если ввести геоцентрические неподвижные координаты ξ , η , привязанные к точке весеннего равноденствия, то получим

$$\Delta U = 6,62 \cdot 10^{22} \frac{3}{2r^5} [(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\omega t + 2\xi\eta \sin 2\omega t]. \quad (15.38)$$

Из этого выражения путем дифференцирования получаем возмущающие силы, от которых зависит движение узлов $d\Omega/dt$ [22]. Для более простого интегрирования уравнений движения можно прежде всего положить эксцентриситет орбиты спутника равным нулю. Тогда после упрощения получаем главный член движения узлов ([19], стр. 184)

$$\Delta \Omega = -6,62 \cdot 10^{22} \frac{3}{2na^5} \frac{\cos i}{2\omega} \sin(2\Omega - 2\omega t), \quad (15.39)$$

где a — большая полуось орбиты, n — среднее сидерическое движение спутника, ω — угловая скорость движения Земли, Ω — прямое восхождение восходящего узла орбиты спутника, i — наклон орбиты спутника к экватору.

Используя выведенный Джеффрисом коэффициент $6,62 \cdot 10^{22}$, получаем геоцентрическую амплитуду движения узлов спутника примерно $5''$ при $i = 0$, что соответствует топоцентрической амплитуде $65''$. Поскольку (15.39) имеет полусуточный период,

то узлы за 12 час колеблются в пределах $\pm 65''$. О'Киф и Батчлор считают возможным наблюдать это явление, несмотря на большую топоцентрическую угловую скорость спутника. Если этим наблюдениям не присущи полусуточные периоды, вызванные другими причинами, то этот метод открывает новые интересные возможности для определения трехосности земного эллипсоида.

3. Несимметрия северного и южного полушарий

В журнале *Sky and Telescope* (28, № 5, 1959) изложен вывод из наблюдений члена J_3 (см. § 1, п. 2), который позволил оценить возможную асимметрию фигуры Земли относительно плоскости экватора. Это исследование опиралось на наблюдения высот перигея спутника «Авангард» 1958 $\beta 2$, у которого перигей за 82 дня делает полный оборот относительно Земли.

Эта асимметрия означает наличие отклонения от гидростатического равновесия, обусловленного упругими напряжениями в земной коре. Анализ наблюдений на основе уравнений движения был произведен Коцаи [23].

Здесь следует заметить, что незначительность наблюдаемых вариаций может легко привести к ложным выводам относительно существования малых J -членов. Это может иметь место в том случае, если при интерпретации наблюдений не применяется аналитическая теория, в которую можно непрерывно вводить наблюдения (например, фотографические).

Если использовать наблюдения, относящиеся только к определенному месту на орбите («Авангард» 1958 $\beta 2$), то можно вывести изменение эксцентриситета орбиты с периодом 82 дня и в том случае, если член J_3 положен равным нулю. Это явление, одинаково заметное в движении узлов, в прецессии перигея и в наклоне орбиты, было открыто в 1959 г. Бреннером, Фультоном и Шерманом [9]. О малых периодических возмущениях эксцентриситета в зависимости от J_2 изложено также в работе Таратыновой [24].

Отсюда следует, что наблюдения могут дать искаженные результаты вследствие неудачной методики. Принимая во внимание все новые исследования, можно заключить, что асимметрия Земли, как и трехосность земного эллипсоида, к настоящему времени (1960 г.) еще сомнительны.

4. Главный момент инерции Земли

Из общего разложения потенциала силы тяжести следует, что не может быть принципиальной разницы между величинами J , выведенными из формулы силы тяжести и по движению спут-

ника (если отвлечься от возможных случайных или систематических ошибок наблюдения). Из наблюдений получается

$$\frac{2}{3} J = \frac{C - A}{MR^2} = 0,001087 \pm 11 = \alpha_1.$$

Численно величина α_1 дает отношение разности главных моментов инерции к некоторому фиктивному наибольшему моменту инерции, получаемому, если сосредоточить всю массу M на конце радиуса экватора R (см. § 1, п. 1). Для получения отсюда сжатия (1 : 297,7) для обоих видов наблюдений возможно применить только теорию Клеро.

Совершенно другим образом из прецессионного движения Земли можно получить значение отношения разности $C - A$ к наибольшему главному моменту инерции

$$\frac{C - A}{C} = 0,003288 \pm 2 = \alpha_2.$$

Оба соотношения позволяют, по исключению $C - A$, получить главные моменты инерции C и A по измеренным величинам

$$C = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} MR^2 = 0,3306 MR^2;$$

$$\text{При } MR^2 = 24315 (\pm 21) \cdot 10^{41} \text{ г} \cdot \text{см}^2,$$

$$C = 8039 (\pm 20) \cdot 10^{41} \text{ г} \cdot \text{см}^2,$$

$$A = 8013 (\pm 20) \cdot 10^{41} \text{ г} \cdot \text{см}^2.$$

Коэффициент 0,3306 взят из статьи Генриксена [29], который, основываясь на теории гидростатического равновесия, получил из него сжатие равным 1 : 299,8. Произведя основательный анализ хорошо обоснованной величины 1 : 297,7, О'Киф [30] пришел к выводу, что Земле следует приписать большее сжатие, чем то, которое соответствует существующей скорости вращения Земли, и что поэтому в теле Земли должны существовать сильные напряжения, действующие вдоль главной оси. Этот взгляд, который неоднократно обосновывался в прошлом иными аргументами, в настоящее время защищается Джеффрисом [31]. В общем по поводу излагаемой проблемы можно заметить, что вывод сжатия из теоремы Клеро (1738 г.) не основывается на гипотезе о распределении масс, как это показали Стокс (1849 г.) и Гельмерт [32—34].

Новую точку зрения на определение моментов масс высказал Кук [35, 36].

Вековые изменения орбит могут быть сравнительно легко и достаточно точно определены из наблюдений на одной и той же

станции за достаточно долгий период времени. Долгопериодические колебания (с периодом вращения перигея) малы и определяются из наблюдений с трудом. Короткопериодические колебания (с периодом обращения спутника) требуют сети связанных между собой станций наблюдения.

Наибольшие члены вековых и долгопериодических колебаний, которые включают члены до 6-го порядка зональных сферических функций (члены, не зависящие от долготы), согласно Куку, могут быть определены из наблюдений спутников с точностью, в 10—20 раз большей, чем по измерениям силы тяжести. Вывод наибольших тессеральных и секториальных вариаций (членов, зависящих от долготы) требует специальных орбит и периодов обращения спутников, которые должны быть по возможности в простом отношении с периодом вращения Земли; этого еще до сих пор не достигнуто. Следует указать на трудно поддающееся определению влияние торможения спутника атмосферой вблизи перигея, которое, между прочим, приводит к малым изменениям наклона орбиты. Плотность атмосферы составляет на высоте 500 км около 10^{-15} г/см³, а на высоте 1000 км — около 10^{-17} г/см³.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markowitz W., Use in Geodesy of the Results of Lunar Observations and eventual Observations of artificial Satellites, *Bull. géod.*, Nr. 49, 33—39 (1958).
2. Kozai Y., On the Effects of the Sun and the Moon upon the Motion of a close Earth Satellite, *Smiths. Astrophys. Obs.*, Cambridge, Mass., Special Report Nr. 22, 1959.
3. King-Hele D. G., The Effect of the Earth's Oblateness on the Orbit of a near Satellite, *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, 247, 49—72 (1958).
4. King-Hele D. G., Merson R. H., *Satellite Orbits in Theory and Practice*, *J. Brit. Interplan. Soc.*, 16, 446—471 (1958).
5. Izsaák I., On the first Order secular Perturbations of an artificial Satellite in the gravitational Field of the oblate Earth, *Mitt. Sternw. Ungar. Akad. Wiss.*, Budapest, Nr. 43 (1958).
6. Merson R. H., King-Hele D. G., Use of artificial Satellites to explore the Earth's gravitational Field, Results from 1957 β (Sputnik 2), *Nature*, 182, 640—641 (1958).
7. Brenner J. L., Fulton R., Latta G. E., Sherman N., Weisfeld M., *Methods for Satellite Orbit Calculation, Theory and Applications*, Stanford Research Institute, Menlo Park, Cal. Final Report, 1959.
8. Brenner J. L., Latta G. E., Weisfeld M., *A new Coordinate System for Satellite Orbit Theory*, Stanford Research Institute, Menlo Park, Cal. Interim Technical Report Nr. 2 (1959).
9. Brenner J. L., Fulton R., Sherman N., *The Determination of the Earth's Potential Field by Observations of Satellite Orbits, with special*

- Reference to the Determination of the Third Harmonic, Stanford Research Institute, Menlo Park, Cal. Interim Technical Report Nr. 3 (1959).
10. Brenner J. L., Calculation of the Osculating Elements of the Orbit of a Near-Earth Satellite, Stanford Research Institute, Menlo Park, Cal. Interim Technical Report Nr. 4, 1959.
 11. Berichte aus «Wissenschaft und Fortschritt», 1957, Heft 12; 1958, Heft 9.
 12. Merson R. H., Techniques of Analysing terrestrial radio and optical Observations of Earth Satellites, Astronaut. Acta, 5, 26—29 (1959).
 13. Henize K. H., The Baker-Nunn Satellite tracking Camera, Sky and Telesk., 16, Nr. 3 (1957).
 14. Henize K. H., Status of the photographic Satellite tracking System, Smiths. Astrophys. Obs., Cambridge, Mass., Special Report Nr. 14, 22—25 (1958).
 15. Davis R. J., The Baker-Nunn Camera, Smiths. Astrophys. Obs., Cambridge, Mass., Special Report Nr. 14 (1958).
 16. Öpik E. J., Artificial Satellites, Irish Astron. J., 4, 201—257 (1957).
 17. Priester W., Bennewitz H. G., Lengrüsser P., Radiobeobachtungen des ersten künstlichen Erdsatelliten, Wiss. Abh. Nordrhein-Westfalen, Köln, 1958, Bd. 1.
 18. Priester W., Hergenahn G., Bahnbestimmung von Erdsatelliten aus Dopplereffekt-Messungen, Wiss. Abh. Nordrhein-Westfalen, Köln, 1958, Bd. 8.
 19. O'Keefe J. A., Batchlor C. D., Perturbations of a close Satellite by the equatorial Ellipticity of the Earth Astron. J., 62, 183—185 (1957).
 20. Jeffreys H., The Determination of the Earth's gravitational Field, Month. Not. Geophys. Suppl., 5, 1—22 (1941); 5, 55—66 (1943).
 21. Jeffreys H., The Earth, its Origin, History and physical Constitution, Cambridge, 1952, S. 127.
 22. Moulton F. R., An Introduction to celestial Mechanics, New York, 1914.
 23. Kozai Y., The Earth's gravitational Potential derived from the Motion of Satellite 1958 Beta 2, Smiths. Astrophys. Obs., Cambridge, Mass., Special Report Nr. 22 (1959).
 24. Таратынова Г. П., О движении искусственного спутника в нецентральной поле тяготения Земли с учетом сопротивления воздуха. Успехи физ. наук, 63, 51 (1957).
 25. Rehse H., Beobachtung von künstlichen Erdsatelliten Wiss. Zeitschr., T. h. Dresden, Bd. 8, 1958/59, Heft 2, Zugl. Mitt. Nr. 1, Astron. Obs. T. H. Dresden.
 26. Guier W. H., The Tracking of Satellites by Doppler Methods, The Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory, Silver Spring, Maryland, Sitzungsbericht COSPAR — Konferenz Nizza, Januar 1960.
 27. Newton R. R., Geodetic Measurements by Analysis of the Doppler Frequency Received from a Satellite, The Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory. Silver Spring, Maryland, Sitzungsbericht COSPAR-Konferenz Nizza, Januar 1960.

28. Cook A. H., Reports on the Progress of Geophysics Developments in Dynamical Geodesy, *Geophys. J.*, Bd. 2, 222—240 (1959).
29. Henriksen S. W., *Annals of the JGY*, Bd. 12, Kap. 3, 7.
30. O'Keefe J. A., Determination of the Earth's Gravitational Field, Godd. Space Flight Center. National Aeronautics and Space Administration, Washington, Sitzungsbericht COSPAR-Konferenz Nizza, Januar 1960.
31. Jeffreys H., *The Earth, its Origin, History and physical Constitution*, Cambridge, 1959. (Русский перевод: Джеффрис Г., Земля, ее происхождение, история и физическое строение, М., ИЛ, 1960.)
32. Helmert F. R., *Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*, Teil II, Leipzig, 1884.
33. Helmert F. R., Das Theorem von Clairaut, *Z. f. Verm.*, 7, 121—145 (1878).
34. Berroth A., Numerische Werte der Masse und Dichte der Erde sowie ihre Hauptträgheitsmomente, *Z. f. Geophys.*, 18, 42—50 (1943).
35. Cook A. H., On the Determination of the Earth's Gravitational Potential from Observations of Artificial Satellites, Report presented at the Meeting of the International Gravity Commission of the International Association of Geodesy, September 1959.
36. Cook A. H., The external Gravity Field of a rotating Spheroid to the Order of e^3 , *Geophys. J.*, 2, 199 (1959).
37. Whitney Ch., Veis G., A Flashing Satellite for geodetic Studies, *Smiths. Astrophys. Obs. Cambridge, Mass.*, Spec. Report No. 19, 1959.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Arnold K., Die Bewegung der Knotenlinie einer Satellitenbahnebene aufgrund der Schwereanomalien, *Gerl. Beitr. Geophys.*, 68, 193—203 (1959).
- Bosanquet C. H., Change of Inclination of a Satellite Orbit, *Nature*, 182, 1533 (1958).
- Brouwer D., The Motion of a Particle with negligible Mass under the gravitational Attraction of a Spheroid, *Astron. J.*, 51, 223—231 (1946).
- Buchar E., Motion of the Nodal Linie of the Second Russian Earth Satellite (1957 β) and the Flattening of the Earth, *Nature*, 182, 198—199 (1958).
- Cook A. H., Determination of the Earth's Gravitational Potential from Observations on Sputnik 2 (1957 β), *Geophys. J.*, 1, 341—345 (1958).
- Garfinkel B., On the Motion of a Satellite of a oblate Planet, *Astron. J.*, 63, No. 1257 (1958).
- Hergenahn G., Die Bahn des Satelliten 1958 δ_2 , *Naturwiss.*, 434—435 (1958).
- Jacchia L. G., The Earth's gravitational Potential as derived from Satellites 1957 Beta 1 and 1958 Beta 2, *Smiths. Astrophys. Obs. Special Report Nr. 19*, 1959.
- King-Hele D. G., Merson R. H., A new Value for the Earth's Flattening, derived from Measurements of Satellite Orbits, *Nature*, 183, 881—882 (1959).

- Kozai Y., Note on the Secular Motions of the Node and Perigee of an Artificial Satellite, *Smiths. Astrophys. Obs., Special Report Nr. 30*, 1959.
- Levy, Sur les Trajectoires des Satellites proches, *Bull. géod.*, **53** (1958).
- Melin M., Observing the Satellites, *Sku and Telescope*, Nov. 1958.
- Merson R. H., King-Hele D. G., Plimmer R. N. A., Changes in the Inclination of Satellite Orbits to the Equator, *Nature*, **183**, 239—240 (1950).
- Musen P., Contributions of the Theory of Satellite Orbits, *Godd. Space Flight Center. National Aeronautics and Space Administration, Washington, Sitzungsbericht COSPAR-Konferenz Nizza, Januar 1960*.
- O'Keefe J. A., An Application of Jacobi's Integral to the Motion of the Earth Satellite, *Astron. J.*, **62**, 256—266 (1957).
- Spitzer L., Perturbations of a Satellite Orbit, *J. Brit. Interplan. Soc.*, **9**, 130—136 (1950).

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОШЛОГО, СОХРАНИВШИЕ АКТУАЛЬНОСТЬ ДО НАСТОЯЩЕГО ВРЕМЕНИ

Современная методика является результатом длительного развития. Если проследить за этим развитием, то становится понятным все достигнутое в настоящее время. Не все оставшееся позади превзойдено; напротив, многие старые разработки геометрического характера актуальны и теперь и могут быть использованы как для решения отдельных вопросов, так и для понимания общих взаимосвязей. В настоящей главе рассматриваются некоторые из этих методов.

§ 1. Обзор старых методов¹⁾

Еще народы древности заметили периодическое повторение солнечных и лунных затмений. Так, халдеи знали и называли саросом период Галлея, состоящий из 223 синодических оборотов Луны, по истечении которого Луна снова столь близка к эклиптике в соединении или в противостоянии с Солнцем, что может произойти солнечное или лунное затмение. Цикл сароса служил в I тысячелетии до н. э. для исчисления времени и предсказания затмений.

Гиппарх²⁾ и Птолемей³⁾ разработали более точный, независимый от сароса и метод предвычисления затмений. Птолемей составил таблицы сизигий (в частности, эклиптических сизигий) и

¹⁾ Изложение этого параграфа основано на книге: Wolf R., *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur*, Bd. 2, Zürich, 1892.

²⁾ Гиппарх, греческий философ (II в. до н. э.), считается основателем научной астрономии. Птолемей включил в свой «Альмагест» основные положения Гиппарха. Гиппарх изобрел способ определения местоположения на Земле с помощью географических координат — широты и долготы; он составил первый звездный каталог.

³⁾ Птолемей, Клавдий, древнегреческий математик, основатель системы мира, носящей его имя, учил около 140 г. н. э. в Александрии. Он составил таблицы для вычисления движения Солнца, Луны и планет. Его главное астрономическое произведение «Синтаксис» или «Constructio Mathematica», переведено в 827 г. на арабский язык («Альмагест»).

проанализировал в своем «Альмагесте» условия наступления затмения. Он пытался определить геометрическими методами момент затмения, наименьшее расстояние между центрами светил и фазу затмения. За дальнейшими подробностями мы отсылаем к Птолемею [1] (6-я книга «Альмагеста») или к «Истории астрономии» Деламбура [2].

Успеху систематической разработки задачи предвычисления затмений способствовал метод проекций Иоганна Кеплера (1571—1630) (*Astronomiae past optica, Tabulae Rudolfinae*); этот же метод, по-видимому, независимо от Кеплера, предложили через полстолетия также Рен (1632—1723) и Д. Кассини (1625—1712). В этом методе происходящее явление рассматривается с Солнца; на плоскость, перпендикулярную к лучу зрения, проектируются видимый путь Луны и суточное движение наблюдателя по кругу параллели, представляющемуся эллипсом. Нанеся на проекциях пути Луны и пути пункта наблюдения отметки времени, находят на обеих траекториях одинаково оцифрованные отметки, расстояние между которыми равно сумме или соответственно разности видимых радиусов Солнца и Луны; таким образом, находят начало и конец частного или соответственно полного затмения для данного пункта. Метод отличается наглядностью; поэтому мы поясним его примером в конце исторического обзора (§ 2).

Этот по существу своему графический метод был далее развит Флемстидом (1646—1719) и изложен в труде «*The Doctrine of the Sphere*» [17]. По-видимому, превосходство вычислений над графическим методом, не дающим большой точности, впервые признал Лакайль. Он переделал графический способ в аналитический. По этому поводу он писал: «Астрономы, заменяющие эти скучные вычисления графическими операциями на проекции сферы, не могут отрицать, что, с какой бы тщательностью ни производились эти операции и каков бы ни был радиус проектируемой фигуры, невозможно обеспечить точность в 0,5 мин. Итак, все преимущества на стороне вычисления» ([3], стр. 292).

Здесь не место для оценки большого вклада, внесенного известными астрономами и математиками XVIII и начала XIX вв. в дальнейшее усовершенствование метода предвычисления затмений. В списке литературы мы вынуждены ограничиться перечислением самых значительных работ [18—32]. Однако совершенно необходимо упомянуть работу Лагранжа (1736—1813) [4]; ему обязаны мы чисто аналитическим методом, который впоследствии был развит Бесселем и столь им усовершенствован, что до сих пор под названием метода Бесселя он составляет основу всех относящихся к затмению вычислений. Бесселев анализ затмений завершает описанный выше путь решения этого вопроса. Бессель дал окончательное решение, удовлетворяющее

всем теоретическим и практическим требованиям. Теория Бесселя была изложена в основных чертах во второй главе этой книги.

Почти одновременно с Бesselем проблемой затмений занялся Ганзен [6]. Он исходил из фундаментальных уравнений, подобных бесселевым, но положил в основу своих рассуждений пересечение фундаментальной плоскости с эклиптической и пренебрег полной теоретической строгостью, учитывая практические требования своего времени. В следующем параграфе мы разберем подробнее метод проекций, разработанный в 1820 г. Урсином по предложению Гаусса, поскольку при помощи этого метода происходящие на небе явления воспроизводятся так, как они непосредственно воспринимаются наблюдателем. Наконец, следует упомянуть применявшийся ранее в *Nautical Almanac* [8] метод, в котором строгое решение получается без помощи проекции на плоскость, на основе параллакса и видимого движения небесных тел. Оба эти метода по своей наглядности удобны для менее знакомого с материалом читателя, поскольку знакомят его с *основными взаимосвязями* применяющихся понятий. Метод *Nautical Almanac* имеет не только исторический интерес; напротив, он все еще актуален при решении специальных вопросов, относящихся к затмению Солнца.

Использование затмений для определения географических координат

Очевидно, что для предвычисления затмения требуются, с одной стороны, точные таблицы движения Солнца и Луны, и с другой — географические координаты пункта, для которого предназначается предвычисление. Поэтому наблюдения затмений могут служить для оценки степени совершенства таблиц Солнца и Луны, а также для определения или проверки географических координат точек на Земле.

Еще Кеплеру было известно, что ошибка в принятой географической долготе целиком входит в предвычисленные моменты фаз. Он пытался получить по своим наблюдениям затмения Солнца 7 марта 1598 г. в Граце и наблюдениям одного из учеников Тихо Браге в Ураниенбурге разность долгот этих мест. Результат был искажен ошибкой в вычислениях, но примененный им метод сам по себе корректен [9]. Кеплер неоднократно производил также наблюдения для критического исследования и проверки своих таблиц.

Позже Д. Кассини [10] определил из наблюдений солнечного затмения 1699 г. долготу Киля и ряда других пунктов относительно Парижа; позднее Гришов получил разность долгот Берлин — Париж [11]. Это побудило Копенгагенскую академию объявить конкурс на лучшую работу по этой задаче и родственному

ей определению долгот по покрытиям звезд. Премии была удостоена работа Каньоли [12].

По мнению Гумбольдта (*Examen critique*, стр. 475), Америго Веспуччи уже в 1499 г. наблюдал покрытия звезд с географической целью. После того как были составлены надежные таблицы Луны, покрытия звезд стали играть важную роль в морских путешествиях XVIII—XIX вв. С появлением хороших хронометров, а затем и передач сигналов времени по радио затменные методы почти полностью потеряли свое былое значение как в морском деле, так и при определении географических координат. Только современная, сильно усовершенствованная техника наблюдений и очень точное знание движений Солнца и Луны вновь делают весьма перспективным применение наблюдений затмения к определению трансокеанских расстояний.

§ 2. Графические методы

Для того чтобы показать, как в прежние времена предвычисляли по упомянутому выше принципу Кеплера ход солнечного затмения для данного пункта с помощью геометрических построений, мы применили к солнечному затмению 30 июля 1954 г. (частному для Дармштадта) метод, описанный Тобиасом Майером [13]¹⁾. Из Ежегодника были взяты следующие данные для момента геоцентрического соединения по долготе.

Всемирное время соединения по долготе: $12^{\text{h}} 25^{\text{m}} 39^{\text{s}}$

$$\begin{aligned} L_{\odot} &= L_{\zeta} = 98^{\circ} 10', 2 & b_{\zeta} &= +36', 5 \\ \delta_{\odot} &= +23^{\circ} 47', 8 & P_{\zeta} - P_{\odot} &= 58', 9 \\ R_{\odot} &= 15', 7 & R_{\zeta} &= 16', 1 \end{aligned}$$

Часовое изменение широты Луны: $-3', 2$

Часовое относительное движение по долготе: $+32', 8$

Отсюда часовое относительное движение в орбите: $+33', 0$

Уравнение времени: $-3^{\text{m}}, 25^{\text{s}}$

Географические координаты пункта наблюдения (Дармштадт, Геодезический институт):

$$\varphi = 49^{\circ} 52', 6, \quad \lambda = 8^{\circ} 39', 4 = 34^{\text{m}}, 38^{\text{s}} \quad (\text{к востоку от Гринвича}).$$

Если смотреть из центра Солнца, то Луна и принимаемая за шар Земля ограничены кругами, радиусы которых относятся, как $R_{\zeta} : (P_{\zeta} - P_{\odot})$. Чтобы следить за ходом затмения, заменим

¹⁾ Тобиас Майер (1723—1762) — отец Тобиаса Майера, автора «Практической геометрии».

совые интервалы получаются делением на 15-градусные дуги круга, описанного вокруг эллипса.

С помощью циркуля отыскиваются на параллели и лунной орбите одинаково оцифрованные точки, расстояние между которыми равно заданной величине (например, сумме $R_{\odot} + R_{\ominus}$), что определяет начало и конец затмения. Моменты фаз легко получаются с точностью до нескольких десятых минуты времени. Круги, центры которых лежат на пути Луны, представляют Луну в соответствии с размером Земли, т. е. так, как это соответствует

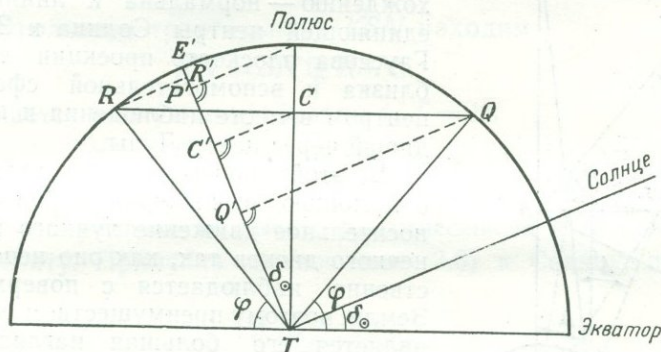


Рис. 125. Ортогональная проекция параллелей.

гелиоцентрическим радиусам. Круги с центрами на параллели показывают видимую величину Солнца по сравнению с Луной в масштабе геоцентрических радиусов.

После перевода во всемирное время получаем для начала, максимума и конца затмения:

$$11^{\text{h}}31^{\text{m}}.3; \quad 12^{\text{h}}49^{\text{m}}.7; \quad 14^{\text{h}}03^{\text{m}}.7.$$

Результат совпадает с точностью до $0^{\text{m}}.1$ со значениями, проинтерполированными по *Astronomisch-Geodätisches Jahrbuch*.

В старых изданиях рассматриваются еще и другие графические методы; желающих познакомиться с ними мы отсылаем к литературе.

§ 3. Метод Гаусса

Метод проекций, основанный в противоположность рассмотренному выше на безупречных геометрических положениях, восходит к идее Гаусса. Он был разработан по его заданию Урсином [7] для солнечного затмения 7 сентября 1820 г. Неточности в передаче идей Гаусса были позже исправлены Цехом [14]. Метод обстоятельно изложен Петерсом и пояснен числовым примером. При числовой обработке применяются приближенные

лактического смещения. На продолжении TO лежит геоцентрический зенит наблюдателя Z' .

Обозначим геоцентрическое угловое расстояние Солнца и Луны через Δ ; тогда из прямоугольного треугольника LTM

$$LN = LT \sin \Delta, \quad NT = LT \cos \Delta. \quad (16.1)$$

Линейная единица расстояния может быть выбрана произвольно; полагаем $LT = 1$. Тогда

$$LN = \sin \Delta, \quad NT = \cos \Delta.$$

Из прямоугольного треугольника KSN находим

$$KN = SN \operatorname{tg} KSN; \quad (16.2)$$

SN выражается следующим образом ($LT = 1$):

$$\frac{SN}{LT} = \frac{ST}{LT} - \frac{NT}{LT} = \frac{\sin P_{\odot}}{\sin P_{\odot}} - \cos \Delta. \quad (16.3)$$

Угол KSN — параллакс по высоте p_{\odot} , отнесенный к геоцентрическому зениту. Применяв соотношение (3.6) к Солнцу, получаем

$$\operatorname{tg} p_{\odot} = \frac{\frac{a}{e} \sin P_{\odot} \sin z_{\odot}}{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \cos z_{\odot}},$$

и далее, используя (16.3),

$$KN = \frac{\sin P_{\odot} - \sin P_{\odot} \cos \Delta}{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \cos z_{\odot}} \frac{\rho}{a} \sin z_{\odot}. \quad (16.4)$$

Первая дробь в (16.4) с хорошим приближением¹⁾ равна $\sin(P_{\odot} - P_{\odot})$ и будет обозначаться в дальнейшем через Π . Таким образом,

$$KN = \Pi \frac{\rho}{a} \sin z_{\odot},$$

$$\Pi = \frac{\sin P_{\odot} - \sin P_{\odot} \cos \Delta}{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \cos z_{\odot}}. \quad (16.5)$$

1. Прямоугольные координаты

Введем прямоугольную пространственную систему координат с началом в N ; ось z направим по NS . За ось y примем линию пересечения плоскости круга склонения Солнца с плоскостью

¹⁾ Ошибка во время затмения составляет около $0'',001$.

проекции, с положительным направлением в сторону увеличивающихся склонений. Ось x параллельна земному экватору; положительное направление ее должно соответствовать прямому восхождению $\alpha_{\odot} + 90^{\circ}$.

Пусть τ — произвольно выбранный момент истинного времени эфемеридного меридиана, близкий к моменту соединения. К этому моменту относятся следующие координаты.

Центр Луны L

$$\begin{aligned}x &= LN \sin LNY = \sin \Delta \sin \mathfrak{E}, \\y &= LN \cos LNY = \sin \Delta \cos \mathfrak{E}, \\z &= 0;\end{aligned}\tag{16.6}$$

$LNY = \mathfrak{E}$ есть угол, который образует дуга, соединяющая центры Солнца и Луны, и круг склонений Солнца при рассмотрении из центра Земли (геоцентрический позиционный угол).

Центр Солнца S

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = SN.$$

Топоцентрическое место K Солнца

$$\begin{aligned}\xi &= KN \sin KNY = \frac{\rho}{a} \Pi \sin z_{\odot} \sin v, \\ \eta &= KN \sin KNY = \frac{\rho}{a} \Pi \sin z_{\odot} \cos v, \\ \zeta &= 0;\end{aligned}$$

$KNY = v$ есть так называемый параллактический угол; на рис. 126 он выглядит как угол между плоскостью TSY круга склонений и вертикальной плоскостью TOS , пересекающимися плоскостью проекции по прямым NY и NK .

Положение наблюдателя O

Проекция точки наблюдения O на плоскость xy есть точка H (OH параллельна TN). Она лежит на прямой NK , так как принадлежит к вертикальной плоскости, проведенной через S ; координаты ее X, Y, Z . HN составляет с NY тоже угол v .

Имеем

$$\begin{aligned}HN &= OG = OT \sin z_{\odot}, \\ OT &= \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot},\end{aligned}\tag{16.7}$$

LT принято за единицу.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} X &= HN \sin v = \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \sin z_{\odot} \sin v, & X &= \xi \frac{\sin P_{\odot}}{\Pi}, \\ Y &= HN \cos v = \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \sin z_{\odot} \cos v, & Y &= \eta \frac{\sin P_{\odot}}{\Pi}, \quad (16.8) \\ Z &= -NT + TG = -\cos \Delta + \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \cos z_{\odot}. \end{aligned}$$

При аналитической обработке (например, при предвычислении фазы для заданного места) основную роль играют координаты точек $L(x, y)$ и $K(\xi, \eta)$. Как и в Бесселевой теории, первые не зависят от положения наблюдателя, тогда как ξ и η зависят от места наблюдения; смысл этих величин здесь, разумеется, иной. Предпочтительнее выразить координаты центра Луны L через геоцентрические прямые восхождения и склонения Солнца и Луны, табулированные в Ежегодниках, а не через геодезическое расстояние Δ и позиционный угол \mathfrak{S} .

Из сферического треугольника, образуемого полюсом экватора и геоцентрическими местами Солнца и Луны, находим (рис. 128)

$$\begin{aligned} \sin \Delta \sin \mathfrak{S} &= \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}), \\ \sin \Delta \cos \mathfrak{S} &= \sin \delta_{\odot} \cos \delta_{\ominus} - \cos \delta_{\odot} \sin \delta_{\ominus} \cos(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}), \quad (16.9) \\ \cos \Delta &= \sin \delta_{\odot} \sin \delta_{\ominus} + \cos \delta_{\odot} \cos \delta_{\ominus} \cos(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}). \end{aligned}$$

Левые части двух первых уравнений, согласно уравнениям (16.6), равны x и y соответственно. Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} x &= \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}), \\ y &= \sin \delta_{\odot} \cos \delta_{\ominus} - \cos \delta_{\odot} \sin \delta_{\ominus} \cos(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}), \quad (16.10) \end{aligned}$$

или, после преобразований,

$$y = \sin(\delta_{\odot} - \delta_{\ominus}) + \cos \delta_{\odot} \sin \delta_{\ominus} 2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}).$$

Во время солнечного затмения $\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}$ не превосходит $1^{\circ}34'$; поэтому мы получим хорошее приближение¹⁾, которое можно использовать почти во всех случаях, если положим

$$\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}) \approx \frac{1}{4} \sin^2(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus})$$

и выразим y через x

$$y \approx \sin(\delta_{\odot} - \delta_{\ominus}) + \frac{1}{2} \frac{\sin \delta_{\ominus}}{\cos \delta_{\odot}} x^2. \quad (16.11)$$

¹⁾ Ошибка может достигнуть при внешнем контакте максимального значения $0'',007$; при внутреннем контакте она всегда меньше $1/6$ этой величины.

Формулы (16.7) для ξ и η содержат зенитное расстояние Солнца z_{\odot} и его параллактический угол v . Вместо этих величин

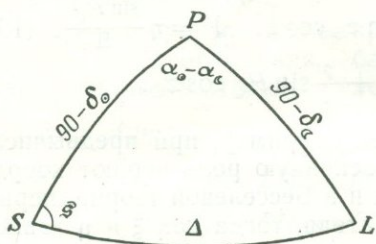


Рис. 127.

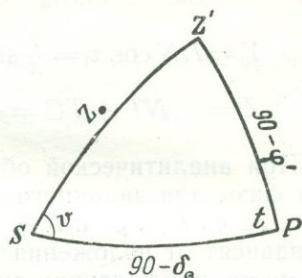


Рис. 128.

лучше использовать геоцентрическую широту пункта наблюдения и часовой угол Солнца t . Из треугольника «зенит — полюс — Солнце» получаем (рис. 128)

$$\sin z_{\odot} \cos v = \sin \varphi' \cos \delta_{\odot} - \cos \varphi' \sin \delta_{\odot} \cos t,$$

$$\sin z_{\odot} \sin v = \cos \varphi' \sin t,$$

что дает нам для ξ и η

$$\xi = \frac{\rho}{a} \Pi \cos \varphi' \sin t,$$

$$\eta = \frac{\rho}{a} \Pi \sin \varphi' \cos \delta_{\odot} - \frac{\rho}{a} \Pi \cos \varphi' \sin \delta_{\odot} \cos t.$$

(16.12)

2. Расстояние между центрами светил в плоскости проекции при определенных фазах

Наступление различных фаз в пункте наблюдения O зависит от топоцентрического углового расстояния $LOK = \Delta'$ центров Солнца и Луны. В плоскости проекции (треугольник LKO на рис. 126) расстояние между центрами представляется отрезком

$$D = KL = \frac{LO \sin \Delta'}{\sin LKO}.$$

Обозначив через σ угол, образуемый отрезком KL с северным направлением оси y , получим для гауссова расстояния D и его угла направления σ

$$D \sin \sigma = x - \xi,$$

$$D \cos \sigma = y - \eta.$$

(16.13)

Угол LKO в приведенном выше уравнении для D не может отклоняться от 90° более чем на $9''^1$), поэтому следует положить $\sin LKO = 1$; вызванная же этим ошибка менее $10^{-9} D$. Из треугольника LOT получаем для LO

$$LO \cos p_{\zeta} + OT \cos z_{\zeta} = LT = 1,$$

причем

$$OT = \frac{\rho}{a} \sin P_{\zeta}.$$

Отсюда имеем в плоскости проекции

$$D = \frac{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\zeta} \cos z_{\zeta}}{\cos p_{\zeta}} \sin \Delta'. \quad (16.14)$$

Для внешнего и внутреннего контактов Δ' равно соответственно $R'_{\zeta} + R'_{\odot}$ и $R'_{\zeta} - R'_{\odot}$, где R'_{ζ} и R'_{\odot} — видимые радиусы Луны и Солнца в пункте наблюдения. Обозначив соответствующие геоцентрические величины через R_{ζ} и R_{\odot} , получаем из (3.30)

$$\begin{aligned} \text{Луна:} \quad \sin R'_{\zeta} &= \frac{\sin R_{\zeta} \cos p_{\zeta}}{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\zeta} \cos z_{\zeta}}, \\ \text{Солнце:} \quad \sin R'_{\odot} &= \frac{\sin R_{\odot} \cos p_{\odot}}{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \cos z_{\odot}}. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Можно избежать вычисления R'_{ζ} и R'_{\odot} , если значение $\sin \Delta'$ из (16.15) подставить в (16.14). Необходимые для этого разложения мы продолжим несколько далее, чем это было сделано в обработке Петерса [15], чтобы более уверенно получить угловое расстояние с точностью до $0'',001$. Соответствующие формулы становятся от этого несколько менее удобными, однако при желании они могут быть легко упрощены — прежде всего в первом приближении.

Сначала имеем

$$\begin{aligned} \sin \Delta' = \sin (R'_{\zeta} \pm R'_{\odot}) &= \sin R'_{\zeta} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{R'_{\odot}}{2} \right) \pm \\ &\pm \sin R'_{\odot} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{R'_{\zeta}}{2} \right), \end{aligned}$$

что без заметной ошибки может быть написано так:

$$\sin \Delta' = \sin R'_{\zeta} \pm \sin R'_{\odot} \mp \frac{1}{2} \sin R'_{\zeta} \sin R'_{\odot} (\sin R'_{\zeta} \pm \sin R'_{\odot}).$$

¹⁾ Находим $\cos LKO = \sin p_{\odot} \cos (\sigma - \nu)$.

Отсюда получаем для контактов в гауссовой плоскости проекции (верхний знак для внешнего контакта, нижний — для внутреннего)

$$D = \sin R_{\zeta} \pm \sin R_{\odot} \sec p_{\zeta} \frac{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\zeta} \cos z_{\zeta}}{1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\odot} \cos z_{\odot}} \mp \mp \frac{1}{2} \sin R_{\zeta} \sin R_{\odot} (\sin R_{\zeta} \pm \sin R_{\odot}). \quad (16.16)$$

В последнем члене, достигающем максимално в угловой мере лишь нескольких тысячных долей секунды дуги, геоцентрические радиусы заменены видимыми; кроме того, положено $\cos p_{\odot} = 1$.

Более простая формула ([15], стр. 581) дает точность в несколько сотых секунды дуги

$$D \approx \sin R_{\zeta} \pm \sin R_{\odot} \left(1 - \frac{\rho}{a} \sin P_{\zeta} \cos z_{\zeta}\right). \quad (16.16a)$$

Предвычисление происходит так же, как и в методе Бесселя. Сначала вычисляются координаты Луны x и y для равноотстоящих моментов времени, например $T_0 - 2^h$, $T_0 - 1^h$, T_0 , $T_0 + 1^h$, $T_0 + 2^h$ (T_0 близко к моменту истинного соединения по прямому восхождению). Отсюда получаются изменения x и y во времени. Изменения во времени ξ и η могут быть найдены с достаточной точностью только дифференцированием по часовому углу t . Для малого промежутка времени $T - T_0$ можно написать

$$\begin{aligned} D \sin \sigma &= (x_0 - \xi_0) + \left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)(T - T_0), \\ D \cos \sigma &= (y_0 - \eta_0) + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\right)(T - T_0). \end{aligned} \quad (16.17)$$

Обозначим через D_0 , σ_0 вектор расстояния KL в момент T_0 и через n , N величину и угол направления относительного движения K и L . Тогда

$$\begin{aligned} D \sin \sigma &= D_0 \sin \sigma_0 + (T - T_0) n \sin N, \\ D \cos \sigma &= D_0 \cos \sigma_0 + (T - T_0) n \cos N. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, как в гл. II, § 4, при $\psi = \sigma - N$

$$\sin \psi = \frac{D_0 \sin(\sigma_0 - N)}{D} \quad (16.18)$$

и для искомого момента фазы T

$$T - T_0 = - \frac{D_0 \cos(\sigma_0 - N)}{n} + \frac{D \cos \psi}{n}. \quad (16.19)$$

В то время как у Бесселя (гл. II, § 6) направляющий угол M в фундаментальной плоскости практически идентичен позиционному углу центров светил на сфере, гауссовы направляющие углы σ отличаются от топоцентрических позиционных углов центров светил на величину сближения меридианов точек K и N (топоцентрическое и геоцентрическое место Солнца в плоскости проекции). Сферическое расстояние между этими точками по (16.4) почти равно параллаксу Луны по зенитному расстоянию; поэтому здесь нельзя пренебрегать схождением меридианов при переносе данных наблюдения в плоскость проекции для дальнейшей числовой обработки (составления уравнений ошибок). Метод Бесселя и в этом пункте имеет преимущество в смысле большей простоты.

Что касается методов, в которых плоскость проводится через центр Луны, Бессель говорит о них следующее [5]:

«Если мы, находясь в любом следующем за суточным движением месте наблюдения на Земле, проектируем Солнце на плоскость, перпендикулярную к линии, соединяющей центры Солнца и Земли, и проходящую через центр Луны, то эта схема покажет движение Солнца по той же кривой, по которой, глядя из его центра, мы увидели бы движение точки наблюдения, а центр Луны — там, где он действительно находится. Сами Солнце и Луна выглядят на чертеже эллипсами, получающимися от сечения описанных вокруг этих светил конусов с вершиной в месте наблюдения; эти эллипсы мало отличаются от больших кругов двух шаров, из которых первый вписан в конус, описанный вокруг Солнца, а центр его лежит в плоскости проекции, второй же — сама Луна. Эта схема полностью соответствует расположению Солнца и Луны на небе: условие того, что края обоих светил соприкоснулись, выражается на чертеже в том, что измеренное на нем расстояние между одновременными положениями обоих светил должно стать равным сумме (или разности) нанесенных на плоскость проекции радиусов Солнца и Луны».

§ 4. Сферически-тригонометрическая обработка

Стремясь преодолеть несовершенство старых проекционных методов, Вулхауз разработал [8] примерно в одно время с Бесселем и Ганзенем способ предвычисления затмений, который в слегка видоизмененной форме долгое время применялся для *Nautical Almanac* и в настоящее время находит применение для специальных исследований (ср. гл. X и XII).

Вулхауз предпочел обойтись без плоскости проекции; его рассуждения исходят от видимых положений Солнца и Луны на сфере (топоцентрические места), как они представляются земному наблюдателю в зависимости от времени и избранного им

пункта наблюдения. Отсюда путем сферически-тригонометрических вычислений получается в весьма наглядном виде вся желаемая информация как о течении затмения вообще, так и о моментах наступления некоторых фаз (например, контактов) для заданного пункта на Земле.

Прежде всего нужно по имеющимся в эфемеридах геоцентрическим прямым восхождениям и склонениям найти их значения, отнесенные к пункту наблюдения (топоцентрические). Для этого в нашем распоряжении имеются известные формулы параллакса (уравнения (3.10) и (3.16)). Ряд полученных этим путем положений Луны представляет собой по отношению к таким же положениям Солнца видимый относительный путь Луны; контакт имеет место, когда топоцентрическое угловое расстояние между центрами равно сумме или разности видимых радиусов Солнца и Луны. Для параллактического увеличения радиуса следует применить формулы (3.30) или (3.31).

Затем требуется найти момент, в который центры обоих тел находятся на видимом расстоянии, соответствующем данной фазе. Быстрое изменение часового угла (около 15° в час) имеет следствием сильную изменчивость параллакса; поэтому видимый относительный путь Луны значительно отличается от большого круга, особенно когда затмение наблюдается в некотором расстоянии от меридиана. Поэтому, строго говоря, не следует рассматривать скорость видимого движения Луны как постоянную (в противоположность случаю вычисления свободного от влияния параллакса лунного затмения, где определенную роль в результате решения играет только выбранный момент, принятый за исходный момент времени). Цель достигается путем последовательных приближений. Предположив сначала, что движение равномерно, находят приближенно моменты отдельных контактов; эти моменты вместе с соответствующими им относительными положениями обоих тел являются исходными для нового, производимого отдельно для каждой фазы вычисления, дающего более точные результаты, в случае необходимости повторяемого еще раз.

Для практического вычисления Вулхауз ввел в строгие формулы известные упрощения. Не было смысла при тогдешнем состоянии теории Луны и техники вычислений производить вычисления с точностью, превышающей $0'',1$.

Пожалуй, можно назвать неточными ряд формул, рекомендованных для числовой обработки, но не самый метод. Не принятое во внимание влияние рефракции легко учитывается внесением соответствующей поправки в геоцентрическое расстояние ρ (ср. гл. II, § 3). Ниже мы приводим, частично изменив обозначения, метод Вулхауза, поскольку он позволяет предвычислять условия для заданного пункта.

Они выражаются через относительные часовые изменения геоцентрических прямого восхождения и склонения $(\Delta\alpha)_1$ и $(\Delta\delta)_1$ и через соответствующие изменения параллаксов $(p_\alpha)_1$ и $(p_\delta)_1$

$$\begin{aligned} x_1 &= [(\Delta\alpha)_1 + (p_\alpha)_1] \cos \delta, \\ y_1 &= (\Delta\delta)_1 + (p_\delta)_1. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Влияние вращения Земли значительно преобладает в изменениях параллакса над влиянием остальных, медленно изменяющихся величин. Поэтому здесь достаточно продифференцировать p_α и p_δ по часовому углу как единственной переменной. Ограничиваясь членами первого порядка, мы получаем из упрощенных формул (гл. III, § 7):

$$\begin{aligned} (p_\alpha)_1 &= -P' \cos \varphi' \sec \delta \cos t \frac{d(\theta - \alpha)}{dt}, \\ (p_\delta)_1 &= -P' \cos \varphi' \sin \delta \sin t \frac{d(\theta - \alpha)}{dt}. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Величина

$$P' = \frac{p}{a} \sin(P_\zeta - P_\odot)$$

применена Вулхаузом в другом месте для вычисления параллакса Луны относительно Солнца. Здесь можно вместо P' просто поставить P_ζ , так как отброшенная вторая производная параллакса по времени обычно превосходит изменение солнечного параллакса. Для δ следует взять среднее значение. Последний множитель, составляющий в градусной мере в среднем $14^\circ 29'$, мы принимаем равным $2 \sin 7^\circ 15'$.

Для вычисления контактов заменяем видимый путь Луны дугой большого круга $ВМЕ$, касающейся видимого пути Луны в точке $М$. Эта дуга образует с S сферические треугольники, которые по их малости можно считать плоскими. Прежде всего имеем

$$\operatorname{tg} M = \frac{x}{y}, \quad (16.23)$$

$$\operatorname{tg} N = \frac{x_1}{y_1} = \operatorname{ctg} i, \quad (16.24)$$

$$d = \frac{x}{\sin M} = \frac{y}{\cos M} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (16.25)$$

Часовое движение в орбите составляет

$$n = \frac{x_1}{\cos i}. \quad (16.26)$$

Моменты наибольшей фазы (t_0), начала (t_B) и конца затмения (t_E) относительно принятого момента t_M , в который Луна

находится в топоцентрическом месте $M(x, y)$, определяются делением соответствующих дуг на скорость в орбите n

$$t_0 = t_M - \frac{MM_0}{n},$$

$$t_B = t_M - \frac{MB}{n},$$

$$t_E = t_M + \frac{ME}{n}.$$

Дуги получаются из соответствующих треугольников с общей вершиной S

$$MM_0 = d \sin (M + i),$$

$$MB = d \frac{\sin [\omega + (M + i)]}{\cos \omega},$$

$$ME = d \frac{\sin [\omega - (M + i)]}{\cos \omega}.$$

Имеем

$$\cos \omega = \frac{d_0}{\Delta'} \quad \text{и} \quad d_0 = d \cos (M + i),$$

откуда

$$\cos \omega = \frac{d}{\Delta'} \cos (M + i). \quad (16.27)$$

Делая подстановку, получаем уравнения, с которыми оперировал Вулхауз, в следующей форме:

$$t_0 = t_M - \frac{d}{n} \sin (M + i),$$

$$t_B = t_M - \frac{d}{n} \frac{\sin [\omega + (M + i)]}{\cos \omega}, \quad (16.28)$$

$$t_E = t_M + \frac{d}{n} \frac{\sin [\omega - (M + i)]}{\cos \omega}.$$

Входящие сюда величины задаются соотношением (16.23) — (16.27). Формулы (16.28) можно несколько упростить при помощи (16.27).

$$t_0 = t_M - \frac{d}{n} \sin (M + i),$$

$$t_{B,E} = t_0 \mp \frac{d}{n} \frac{\sin \omega \cos (M + i)}{\cos \omega} = t_0 \mp \frac{\Delta'}{n} \sin \omega. \quad (16.29)$$

Позиционные углы точек контактов, отсчитываемые из центра Солнца от севера через запад, будут $Q = -i \mp \omega$,

Способ Вулхауза, иногда не совсем правильно называемый геометрическим способом¹⁾, носит чисто аналитический характер и нигде не опирается на геометрические построения. Впрочем, геометрическая интерпретация решения уравнения движения была дана позже Nautical Almanac Office, причем от формул (16.20) — (16.22) производился непосредственный переход к следующему соотношению:

$$\Delta'^2 = (x + x_1 \Delta t)^2 + (y + y_1 \Delta t)^2,$$

где $\Delta' = R'_\odot \pm R'_\oplus$, а все величины вычисляются для исходного момента t_M . Положив

$$\begin{aligned} x &= d \sin M, & y &= d \cos M, \\ x_1 &= n \sin N, & y_1 &= n \cos N \end{aligned}$$

при произвольном t_M , получаем, решая квадратичное относительно Δt уравнение посредством замены

$$\sin \psi = \frac{d}{\Delta'} \sin (M - N),$$

выражение

$$\Delta t = t - t_M = -\frac{d}{n} \cos (M - N) \pm \frac{\Delta'}{n} \cos \psi. \quad (16.30)$$

Легко увидеть совпадение с формулами (16.29), в которых нужно заменить i через $90^\circ - N$ и ω — через $90^\circ - \psi$. Вспомогательный угол ψ на рис. 129 представляется углами M_0ES и соответственно M_0BS .

Если принятый приближенный исходный момент t_M отличается от искомого момента не более, чем на 10 мин, то уже первое приближение дает результат с точностью до 1 сек. Поэтому рекомендуется поступать следующим образом: прежде всего нужно найти приближенное значение момента видимого соединения по прямому восхождению. Исходя из этого момента, мы получаем уже довольно точные моменты наибольшей фазы и внутренних контактов; моменты внешних контактов, напротив, получаются лишь с точностью до нескольких минут. Таким образом, мы получаем подходящие исходные значения, чтобы снова, во втором приближении, вычислить первый и последний контакты. Теперь результат будет уже точен до долей секунды. Можно сделать то же и с внутренними контактами и убедиться в степени достигнутого приближения.

Рассмотренное выше решение представляется нам менее удачным, чем метод Бесселя, прежде всего с точки зрения техники вычислений. Тесная связь движений тени и наблюдателя,

¹⁾ Например, у Швана [16].

требующая привязки к топоцентрическим местам, не допускает в противоположность методу Бесселя такого строгого разделения на величины, зависящие и независящие от пункта наблюдения. Поэтому здесь только в незначительной мере возможно снять с вычислителя часть работы предвычислением и опубликованием не зависящих от места наблюдения элементов затмения.

Впрочем, Вулхауз считал, что его формулы проще и выгоднее в том случае, когда в распоряжении вычислителя нет таких величин, как Бесселевы элементы. Позже *Nautical Almanac* также перешел к публикации Бесселевых элементов (с 1931 г. для времени затмения через 10-минутные интервалы).

В настоящее время еще нельзя отказываться от описанного выше метода исследования, если требуется с большой точностью проследить течение солнечного затмения в заданном месте. «Сферическая» обработка яснее всего показывает центрально-перспективный характер вызываемого Луной затмения и роль, которую играет при этом суточный параллакс; поэтому она дает известные преимущества, особенно при геодезическом использовании результатов наблюдения затмений. Ответ на вопрос: что именно закрывает Луна от Солнца, если глядеть с Земли, — дается решением Вулхауза с его топоцентрическим способом исследования лишь постольку, поскольку можно рассматривать Луну как шар. В этом случае все необходимые сведения могли бы быть получены из положения центров и величины радиусов дисков. Однако в настоящее время этого уже недостаточно, так как нужно учитывать еще и соответствующий лунный профиль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ptolemäus Claudius, *Almagest*, Buch VI, Ausgabe Halma, Paris, 1813—1815, I, S. 373—453.
2. Delambre J. J., *Histoire de l'Astronomie ancienne* (Bd. 1 und 2), au moyen âge (Bd. 3), moderne (Bd. 4 und 5) et au 18^{me} siècle (Bd. 6), Paris, 1817—1927.
3. Wolf R., *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur*, Bd. 2, Zürich, 1892, S. 292.
4. Lagrange J. J., *Anmerkungen über die Entwerfung der Sonnenfinsternisse*, Übersetzung von Schulze im Berliner Astronomischen Jahrbuch, 1781.
5. Bessel F. W., *Astronomische Untersuchungen*, Bd. 2, Kap. X, *Analyse der Finsternisse*, Königsberg, 1842, S. 95.
6. Hansen P. A., *Über die Verfinsterung der Erde überhaupt*, *Astron. Nachr.*, 1837, S. 339—342.
7. Ursin G. F., *De eclipsi solare de 7. Sept. 1820 apparitura*, Hafniae, 1820
8. Woolhouse W. S. B., *On Eclipses*, Anhang zum *Nautical Almanac für 1836*, S. 53—148.

9. Kepleri Opera omnia, Ausgabe Chr. Frisch, Bd. 2, Frankfurt, 1858—1871, S. 372.
10. Cassini D., Mém. Paris, 1700.
11. Grischow A. N., Détermination de la différence des Méridiens entre l'Observatoire de Paris et celui de Berlin, Mém. prés., 1750.
12. Cagnoli A., Méthode pour calculer les longitudes géographiques d'après l'observation d'éclipses de soleil ou d'occultations d'étoiles, Vérona, 1789.
13. Mayer Tobias sen., Mathematischer Atlas, Augsburg, 1745.
14. Zesch J., Astronomische Untersuchungen über die wichtigsten Finsternisse, welche von den Schriftstellern des Klassischen Altertums erwähnt werden, Preisschrift, Leipzig, 1853.
15. Sawitsch A., Abriß der praktischen Astronomie, 2. Auflage, Neu herausgegeben von C. F. W. Peters, Leipzig, 1879, S. 565—640.
16. Schwan B. P., Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse, Teubner, Leipzig, 1910.
17. Flamsteed J., The Doctrine of the Sphere, London, 1680.

А. Беррот и В. Хоффман

Космическая геодезия

Редактор Л. В. САМСОНЕНКО

Художник Л. Г. Ларский
Технический редактор В. П. Сизова
Корректор Т. А. Палладина

Сдано в производство 23/XI 1962 г.

Подписано к печати 8/IV 1963 г.

Бумага 60×90¹/₁₆. 12,9 бум. л.

25,8 печ. л.

Уч. изд. л. 22. Изд. № 27/1347.

Цена ~~1 р.~~ 74 к. Зак. № 881

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1 й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УЦБ и ПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29

1444



~~10. 7. 7.~~