А. В. ШУБНИКОВ

Избранные труды по кристаллографии

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ КРИСТАЛЛОГРАФИИ
ИМЕНИ А. В. ШУБНИКОВА



А. В. ШУБНИКОВ

548

Избранные труды по кристаллографии

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1975

Институт геологических наук АН Арм.ССР
Библиотека

УДК 548

Избранные труды по кристаллографии. Шубников А. В.
М., «Наука», 1975, стр. 556.

В сборник включены основные работы академика А. В. Шубникова по кристаллографии, теории симметрии, кристаллооптике, кристаллофизике и росту кристаллов. Сборник снабжен краткими комментариями к работам и полной библиографией трудов А. В. Шубникова. Рассчитан на широкий круг специалистов по физике и химии твердого тела — кристаллографов, минералогов, металловедов.
Таблиц 56. Иллюстраций 376. Библиогр. 661 назв.

Ответственный редактор
чл.-корр. АН СССР Б. К. ВАЙНШТЕЙН

Редакционная коллегия:
К. С. АЛЕКСАНДРОВ, С. Г. ЗБАР (секретарь),
М. В. КЛАССЕН-НЕКЛЮДОВА, В. А. КОПЦИК, В. Ф. ПАРВОВ,
В. М. ФРИДКИН (заместитель ответственного редактора),
А. А. ЧЕРНОВ, М. П. ШАСКОЛЬСКАЯ, И. И. ШАФРАНОВСКИЙ,
Я. И. ШУБНИКОВА, Л. А. ШУВАЛОВ

Ш $\frac{20403-264}{055(02)-75}$ 413—74

© Издательство «Наука», 1975 г.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной отечественной кристаллографии неразрывно связано с именем Героя Социалистического Труда Алексея Васильевича Шубникова (1887—1970), основателя Института кристаллографии АН СССР, ныне носящего его имя.

Начало его творческого пути совпало с переломным для всей кристаллографии моментом, когда М. Лауэ обнаружил явление дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке и тем самым подтвердил предвидения Е. С. Федорова о строении и симметрии кристаллов. Являясь ранее одним из разделов минералогии, хранящим в своих анналах описательный материал по симметрии, гониометрическим, оптическим и другим измерениям кристаллов, кристаллография начала превращаться в самостоятельную науку о строении и свойствах кристаллов.

Под руководством А. В. Шубникова возникло и стало развиваться практическое использование кристаллов.

А. В. Шубников является ученым с исключительно широким кругом научных интересов. Его перу принадлежит более 300 научных работ. Основными в его научном творчестве являются вопросы теории симметрии, морфологии и роста кристаллов, исследований физических свойств анизотропных сред, в особенности оптических, механических и пьезоэлектрических свойств.

Эти центральные линии намечены в работах Алексея Васильевича по-разному. Различные вопросы симметрии, вопросы роста и свойств кристаллов рассматриваются в его работах в течение всего периода научной деятельности. Задачи же геометрической кристаллографии, механического двойникования, вопросы обработки и ориентировки кристаллов связаны с определенными периодами его деятельности и в дальнейшем развивались учениками и последователями Алексея Васильевича.

От своего учителя Ю. В. Вульфа А. В. Шубников унаследовал стремление «к разъяснению взаимного отношения кристалла и среды, в которой он образуется» [1], к рассмотрению кристалла не

[1] *Ю. В. Вульф.* Избранные работы по кристаллофизике и кристаллографии. ГИТТЛ, 1952, с. 18 (из работы 1895 г.).

только как индивидуума неживой природы, но и в качестве непрерывной анизотропной среды «субстрата для физических явлений» [1]. Главным же было стремление видеть кристаллографию максимально приближенной к физике и приносящей непосредственную пользу практике. Последовательность, целенаправленность и упорство в сплаве с большим талантом позволили Алексею Васильевичу сделать многое из начатого его предшественниками Ю. В. Вульфом и Е. С. Федоровым, найти новые направления и наметить пути будущего развития кристаллографии.

Несомненно, работы А. В. Шубникова, в которых рассматривается вся совокупность вопросов симметрии, принадлежат к классическим образцам. Из нескольких десятков работ в этой области в данном сборнике представлено одиннадцать. Среди них одна из первых работ Алексея Васильевича «К вопросу о строении кристаллов» (1916), а также одна из поздних его работ «Симметрия конечных фигур в современной интерпретации» (1967). Более полувека разделяет эти две работы, целая эпоха в развитии науки.

Алексея Васильевича интересовала вся совокупность вопросов, связанных с проявлениями симметрии. Здесь и вопросы симметрии кристаллов, близко связанные с такими разделами математики, как геометрия и теория групп, здесь и проявления симметрии и диссимметрии в живой природе, архитектуре и искусстве. Среди работ, включенных в это издание, имеется работа А. В. Шубникова о проблеме диссимметрии, в которой проведено обобщение ряда работ Л. Пастера и Я. Г. Вант-Гоффа о диссимметрии молекул и поставлен ряд новых задач, еще не решенных наукой.

К числу общепризнанных заслуг Алексея Васильевича принадлежит блестящий анализ работ П. Кюри в области симметрии (1956) и особенно новая, значительно более последовательная формулировка принципа симметрии Кюри. Активное использование этого принципа суперпозиции групп симметрии объекта и воздействия, начатое в мировой науке после появления этой работы А. В. Шубникова,—лучший показатель ее значимости.

Безусловно, вершиной творчества Алексея Васильевича в области теории симметрии явилось открытие антисимметрии. Рожденное в чистых высотах абстракций обобщение понятия кристаллографического равенства фигур и введение антиравенства привели в дальнейшем к появлению целого потока работ по черно-белой и цветной симметрии. Вывод точечных групп антисимметрии, проведенный самим Алексеем Васильевичем, вывод пространственных черно-белых (шубниковских) групп, проведенный позднее Н. В. Беловым, А. М. Заморзаевым и др., групп цветной симметрии — лент, бордюров, мозаик — во всех этих работах теория

---

[1] *Ю. В. Вульф.* Избранные работы по кристаллофизике и кристаллографии. ГИТТЛ, 1952, с. 15 (из работы 1917 г.)

симметрии получила выход за рамки геометрического трехмерного пространства, что явилось крупнейшим после работ Е. С. Федорова обобщением

Характерно, что эта, казалось бы, абстрактная область кристаллографии неожиданно для многих нашла широкое практическое применение: для описания магнитных свойств кристаллов, при изучении магнитной структуры магнитоупорядоченных веществ, при исследованиях двойникования и в других областях.

Вопросы физики кристаллов занимают центральное место в работах А. В. Шубникова. К их числу относятся вопросы теории пьезоэлектрического эффекта, развитие метода симметрии в применении к свойствам кристаллов, кристаллографическое рассмотрение всей совокупности задач оптики анизотропных сред.

Хотелось бы здесь остановиться лишь на некоторых, как сейчас представляется, главных особенностях этих работ. Во многих из них продолжается линия, начатая П. Кюри, который ввел в рассмотрение предельные группы точечной симметрии и определил симметрию электрического и магнитного полей, развивается эта тенденция к симметрийному описанию векторных и тензорных свойств материальных объектов и внешних воздействий. Это проявилось уже в физической части «Основ кристаллографии» А. В. Шубникова, Е. Е. Флинта и Г. Б. Бокия (1940), а в дальнейшем в лекционных курсах, прочитанных А. В. Шубниковым, которые неизменно сопровождались демонстрациями блестящих экспериментов и обычно собирали широкую аудиторию слушателей.

Рассказывая студентам о путях использования метода симметрии, Алексей Васильевич одновременно затрагивал множество других волнующих его вопросов. Такие отступления заставляли слушателей осмысливать с неожиданной стороны многие вопросы, казавшиеся им ранее известными. «Цель науки — сравнивать несравнимое и различать неразличимое»— это любимый афоризм А. В. Шубникова в полной мере характеризует его как ученого и педагога. Яркими примерами необычного подхода Алексея Васильевича к, казалось бы, давно всем известным вещам являются помещенные в сборнике работы о тепловой деформации кристаллов (1956), о симметрии электромагнитного луча (1939). Неизменная простота стиля, неуклонное стремление к предельной ясности изложения, наглядности рисунков и моделей, минимальное использование специальной научной терминологии, отсутствие столь часто встречающегося увлечения формулами—все эти черты классического стиля А. В. Шубникова достойны всяческого подражания.

Еще в 1940 г. при работе над «Основами кристаллографии» Алексей Васильевич отметил, что три из семи предельных точечных групп симметрии являются ацентричными и, следовательно, материальные среды с такой симметрией могут обладать

пьезоэлектрическими свойствами. Война на время прервала работы в этом направлении.

Основные усилия коллектива, руководимого А. В. Шубниковым, быстро переключились на важную оборонную работу по снабжению службы связи армии и тяжелой промышленности пьезоизделиями. Лишь в 1944 г. появилась первая работа Алексея Васильевича, в которой сообщалось о создании пьезоэлектрически активных анизотропных сред—пьезоэлектрических текстур. За этой работой последовали несколько других, в том числе две монографии: «Пьезоэлектрические текстуры» (1946) и «Исследования пьезоэлектрических текстур» (1955), написанная совместно с И. С. Желудевым, В. П. Константиновой и И. М. Сильвестровой. Идея о возможности управления свойствами материалов при частичном упорядочении ориентировок кристаллитов, образующих текстуру, стала сейчас обычной. Она широко используется при создании многих практически важных материалов, прежде всего сегнетоэлектрических керамических текстур — самого распространенного пьезоэлектрика современной пьезотехники, гидроакустики, техники связи. Идеи А. В. Шубникова о симметрии и свойствах таких анизотропных сред вошли не только в практику. На их основе продолжают решаться многие задачи кристаллофизики. Создаются, например, количественные методы описания свойств текстур, методы получения особого вида текстур в металлах, проводятся исследования текстур в горных породах и непосредственно в слоях земной коры. Понятие о текстурах используется и при расшифровке структур некоторых биологических объектов.

Одной из любимых областей знания была для Алексея Васильевича оптика кристаллов. Его особенно привлекали возможность провести последовательный анализ свойств кристаллов и их симметрии и тщательно продуманные, эстетически безупречно оформленные эксперименты. В своих книгах «Оптическая кристаллография» (1950) и «Основы оптической кристаллографии» (1958) Алексей Васильевич по существу заново решил многие задачи оптики кристаллов. Вращение плоскости поляризации и симметрия этого явления в разных классах кристаллов, эллиптическое двупреломление, поглощение света кристаллами — вот далеко не полный перечень этих задач. Характерен неизменный интерес, проявляемый А. В. Шубниковым к смежным с оптикой вопросам: оптическим текстурам, свойствам жидких кристаллов, ультразвуковым волнам в кристаллах и т. п. Во всех этих вопросах, решавшихся его учениками и последователями, неоценим вклад самого Алексея Васильевича, высказанное им мнение о предполагаемой модели того или иного явления, совместное обсуждение результатов проведенных опытов.

В числе таких близких к оптике кристаллов вопросов, надолго приковавших к себе интерес А. В. Шубникова, оказались явления растровой оптики и картины муара. Начав с простого объяснения этих картин, Алексей Васильевич увидел в растрах много

интересных возможностей, связанных сначала с моделями групповых волн, а позднее с повышением разрешающей способности микроскопов. А. В. Шубников в свое время первый указал на возможность наблюдать индивидуальные молекулы и молекулярные слои с помощью растров. Эта возможность была впоследствии реализована.

Отдельный раздел в этом сборнике занимают работы А. В. Шубникова, посвященные методам обработки и механическим свойствам кристаллов. Требования возникавшей в то время оптической промышленности, любовь к кристаллам, к работе своими собственными руками и к ясности представлений — вот, вероятно, главные причины, вызвавшие на первых порах появление целого цикла работ А. В. Шубникова, посвященных приемам и сущности процессов шлифовки и полировки кристаллов и камней. Позднее возрос интерес к пьезоэлектричеству и оптике кристаллов и были созданы новые приемы ориентировки и обработки кварца. Эти работы сопровождались также исследованиями механических свойств кварца, широко известными приемами «борьбы» с двойниками.

Ко многим предметам своих исследований Алексей Васильевич возвращался неоднократно. Так было с кристаллизацией салола и вообще с образованием сферолитов, так было с картинами муара и переходом от них к групповым волнам, оптической кристаллографии и растровой оптике, так было и с различными вопросами роста кристаллов.

Одними из первых кристаллов, выращенных А. В. Шубниковым еще в лаборатории Ю. В. Вульфа, были кристаллы бихромата калия. К особенностям роста этого кристалла Алексей Васильевич обращался неоднократно, но все полученные результаты его не удовлетворяли. Лишь в 1964 г. в совместной с В. Ф. Парвовым работе была решена задача о нулевой скорости роста некоторых граней кристаллов. Любопытной представляется в данном случае преемственность в науке, ведь одна из главных работ Ю. В. Вульфа была также посвящена скоростям роста граней.

В работах А. В. Шубникова в области роста кристаллов можно проследить развитие современных представлений о факторах, характеризующих условия выращивания кристалла: геометрический отбор, влияние пересыщения, колебаний температуры и т. д.

Алексею Васильевичу принадлежит также начало работ по исследованию «кристаллизационной силы» и по захвату примесей растущими гранями кристалла, проведены работы по кристаллизации сферолитов и сростков, по постоянному совершенствованию способов выращивания кристаллов.

Алексей Васильевич стоял у истоков современной промышленности кристаллов. Он организовал промышленную лабораторию по выращиванию кристаллов, из которой впоследствии вырос завод, а затем несколько научно-исследовательских институтов и промышленных предприятий кристаллографического профиля. Яв-

ляясь одним из основных организаторов разработки промышленных способов выращивания кристаллов сегнетовой соли, кварца и корунда, Алексей Васильевич всеми доступными ему способами популяризировал науку о росте кристаллов. Его книга «Как растут кристаллы» (1935) была первой по этому вопросу в мировой литературе. За ней последовали «Образование кристаллов» (1947), научно-популярные брошюры «Кристаллы в науке и технике» (1956, 1958) и, наконец, вышедшая за год до его кончины книга «Зарождение и рост кристаллов», написанная совместно с В. Ф. Парвовым в 1969 г.

Алексей Васильевич, всегда относившийся с уважением к созданной при его содействии современной технике выращивания кристаллов, полагал в то же время, что выращивание кристаллов — это в большой мере и искусство, умея от души радоваться совершенству выращенного кристалла и искренне переживать неудачи.

Хочется закончить наше введение словами французского минералога Ж. Виара, написанными им в некрологе по случаю кончины Алексея Васильевича: «... Профессор Шубников показал мне бесцветный кристалл квасцов, размером около десяти сантиметров. Исключительная прозрачность, полное отсутствие дефектов и правильная геометрическая форма октаэдра произвели на меня сильное впечатление. Сам Шубников также восхищался этим совершенным творением природы... Образ этого большого русского ученого всегда будет связываться в моей памяти с выращенным им необычайным поразительно чистым кристаллом».

ТО, ЧТО СОХРАНИЛА ПАМЯТЬ[1]

(Автобиографические заметки)

Я родился в 1887 г. в Москве, в Замоскворечье, бывшем в старину окраиной. В квартире, где жила моя семья, не было ни водопровода, ни электрического освещения, ни канализации. Воду привозили в бочке из так называемого бассейна и продавали по копейке за ведро. По вечерам вся семья собиралась вокруг стола, — взрослые шили, дети готовили уроки — и все при одной свече. Сейчас, когда я смотрю на современную Москву, удивительным кажется, что за время одной человеческой жизни облик моего родного города мог так измениться. Исчезли узкие, мощенные булыжником мостовые, по которым с невероятным грохотом двигались различные экипажи на обтянутых железными ободьями колесах, исчезли конки, запряженные парой замореных лошадей и катившиеся по рельсам. На подъемах в помощь припрягалась еще одна лошадь с мальчишкой «фалетором», сидевшим на ней верхом. Почти совсем исчезли уродливые доходные дома, деревянные домики и лачуги. Появились широкие асфальтированные проспекты, бесконечный поток машин, высокие каменные дома и даже высотные здания.

Отец мой работал бухгалтером в большой текстильной фирме «Даниловская мануфактура». Пока он был жив, семья, несмотря на свою многочисленность, жила в относительном достатке. Когда мне было года два, в Москву приехали иностранцы, поднимавшиеся в воздух на воздушном шаре, оборудованном весьма примитивно. Проходя по улице, мой отец увидел, что с воздушного шара сбросили веревку для того, чтобы добровольцы из публики взялись за нее, остановили полет шара и дали возможность аэронавтам спуститься на землю. Отец вместе с другими прохожими схватился за веревку, но, споткнувшись, упал и разбил себе ногу. Нога разболелась, началась гангрена, в больнице предложили ногу ампутировать, отец не решился и на 42-м году жизни умер. После его смерти на руках у матери, не имевшей никакой специальности, осталось шестеро детей, я был предпоследним, а последний был

---

[1] Печатается впервые. Рукопись автором не окончена (*ред.*).

грудным. Помнится молитва, которую нам было велено читать перед сном: «Господи помилуй мамашу, крестную, Васю, Лизу, Колю, Борю, Леню, Сеню, бабушку и всех родных». Леня — это был я. Меня называли Леней, а не Алешей, так как имя Алеша считалось нежным, а нежностей в нашей семье не водилось. Не помню я, например, чтобы моя обремененная заботами мать («мамаша», как мы ее называли) хоть раз поцеловала кого-либо из своих детей. Правда, и жестокому обращению мы не подвергались. Нас никогда не били, а битье детей тогда процветало почти во всех семьях.

На плечи мамаши, тогда 35-летней женщины, легло тяжелое бремя: надо было поднять на ноги шестерых детей, из которых старшему было 9 лет. «Даниловская мануфактура», где работал отец, назначила его семье небольшую пенсию и впоследствии помогла устроить трех сыновей в Коммерческое училище. Все же основными кормильцами семьи были мамаша и переехавшая к нам ее сестра Александра, та самая крестная, за которую мы должны были молиться. Крестная и мамаша занимались шитьем белья для частных заказчиков, стали белошвейками, как это тогда называлось. Детство мое прошло под непрерывный стук швейной машинки, на которой по очереди работали обе сестры, и под пение русских народных песен. Пела крестная, обладавшая приятным голосом. Та же крестная учила нас и грамоте, усадив рядом с собой за швейную машинку.

Жилось нам в то время довольно туго в материальном отношении. Из экономических соображений на лето от квартиры отказывались и всей семьей, со всеми немудрыми пожитками, переезжали на дачу на Фили, где тогда можно было дешево снять на лето избу. Каждую осень переезжали на новую квартиру, обычно скверную, холодную, тесную, с угарными печами. От угара всей семьей нюхали тертый хрен, тем все лечение и кончалось.

Детей надо было учить. Старшего брата Васю по ходатайству «Даниловской мануфактуры» приняли в Коммерческое училище «живущим». Платила за него та же фирма. Сестру Лизу устроили в гимназию, брата Колю — в четырехклассное мещанское училище, Борю — в шестиклассное. Меня отдали в трехклассное городское училище, где я проучился два года. Потом меня удалось устроить в то же Коммерческое училище, где учился брат Вася, но платным «приходящим» учеником, т. е. питавшимся и ночевавшим дома. Коммерческому училищу покровительствовали богатые купцы, отпускавшие деньги на стипендии для хорошо успевающих, но «недостаточных» учеников (так тогда называли детей бедных родителей). Эти стипендии разыгрывались между «недостаточными» учениками путем жеребьевки, так как на каждую стипендию было очень много кандидатов. Мне посчастливилось вынуть из мешочка счастливый красный шарик, и с 3-го класса я перешел в разряд живущих учеников, получавших в училище, кроме бесплатного обучения, также бесплатный стол и квартиру.



Ученик Московского коммерческого училища

С этого времени я перестал быть обузой для семьи: жил, учился и столовался в училище, и за меня ни копейки не надо было платить. В субботу после уроков меня отпускали домой. Возвращаться в училище надо было в понедельник утром.

Об училище стоит написать подробнее. Хотя училище и называлось коммерческим, но как раз коммерции в нем уделялось немного внимания. Начиная с приготовительного класса, в течение всех девяти лет обучения в училище преподавали иностранные языки (французский, немецкий и английский). Кроме того, дежурные воспитатели владели в совершенстве каким-либо иностранным языком. Один день дежурил «француз», другой день —«немец». С ними полагалось разговаривать только на соответствующем языке. Программа преподавания была построена очень широко. Преподавали физику, химию (органическую, неорганическую, частично аналитическую), естествознание (ботанику и зоологию), русскую словесность (литературу), технологию (изучение различных производств с посещением заводов и Политехнического музея), математику (алгебру, геометрию, для желающих — тригонометрию), товароведение (лекции с практическими занятиями в лаборатории), бухгалтерию, законоведение (теорию права), коммерческую корреспонденцию (на иностранных языках), геогра-

фию, историю, неизбежный закон божий, рисование, пение, танцы, гимнастику (включая фехтование).

Товароведение нам преподавал профессор Никитинский, изобретший само это слово. Под товароведением подразумевалось изучение трех основных вещей, необходимых человеку,— пищи, одежды, жилища. Изучение товароведения сопровождалось занятиями в специальной лаборатории, в которой исследовались все наиболее ходовые товары: хлеб, молоко, дрова, керосин и т. п. Изучением различных производств, в частности прядильно-ткацкого, руководил брат известного ученого академика Вильямса.

Литературе обучал широко образованный преподаватель Н. И. Виноградов, устраивавший в классе своеобразные диспуты о прочитанных произведениях русской литературы. Французский язык преподавал известный Тастевен, автор распространенного в то время учебника. Доцент Московского университета Рождественский с первого урока заявил, что вместо обязательного законоведения будет нам читать теорию права.

Интересен был «железный» режим училища, который нами особенно не ощущался, но неуклонно проводился в жизнь. В основе распорядка лежало уважение младших к старшим. Ученики приготовительного и первых трех классов — это были младшие. Учителя и воспитатели говорили им «ты». Начиная с 4-го класса, менялась форма обращения, все разговаривали с учениками уже на «вы». Младшие носили короткий черный с серебряными пуговицами мундирчик с хвостиком сзади. Начиная с 4-го класса, мундирчик заменялся сюртучком с такими же серебряными пуговицами. 7-е и 8-е классы имели на рукавах нашивки из серебряного галуна. Ученики этих классов назывались старшими. Так их и должны были называть ученики младших классов: «Старший, разрешите мне сделать то-то». Во время завтрака и обеда каждому старшему вручалась власть над десятью младшими, которые к нему прикреплялись на целый учебный год. Старший сидел во главе стола, следил за порядком, за тем, чтобы разносившие обед дядьки своевременно и поровну всех накормили, имел право своею властью дать прибавку гарнира. Обед состоял из супа или щей с мясом, гречневой каши с маслом, куска мяса или котлеты с гарниром. По праздникам меню было более разнообразным. На столе во время обеда стояла тарелка с кусками черного черствого хлеба и кувшин с домашним кислым квасом, который все пили очень охотно. Иностранцы-воспитатели сначала иронизировали над подобным напитком, но потом быстро привыкали и пили квас, не отставая от русских. За вечерним чаем сидевший во главе стола старший получал не одну кружку чая, а три (две с сахаром и одну без сахара). Эта кружка чая являлась знаком отличия. Младшие часто обращались к старшему с просьбой: «Старший, разрешите горького»— и старший, если считал младшего достойным этой чести, отдавал ему свою кружку горького чая.

Живущих в училище было около 300 человек, примерно столько же и приходящих. Живущих надо было учить, одевать и кормить. Приходящие учились и получали только обед. В 6 часов утра живущих будили, за полчаса они должны были одеться, умыться по пояс холодной водой и спуститься в класс. С 6 часов 30 минут до 8 часов заканчивалась подготовка уроков, начатая накануне вечером. В 8 часов по звонку строились в пары, шли в зал на молитву, а потом завтракать. Завтракали в большой столовой за 32 длинными столами. Первый завтрак состоял из кружки чая и половины так называемой французской булки. После завтрака немедленно начинались уроки. Уроков было три. Кончались они в 12. Затем следовал сытный второй завтрак, после него еще два урока. Занятия кончались в 15 часов, приходящие расходились по домам, а живущие шли на двухчасовую прогулку под присмотром воспитателя. В хорошую погоду учеников выпускали во двор училища поиграть, причем им предоставлялась почти полная свобода. Мальчики играли в различные подвижные игры, бегали, кричали и даже дрались класс на класс. В результате, естественно, страдала одежда. Для приведения ее в порядок на подоконниках высоких окон гардеробной сидели двое портных, которые тут же на месте пришивали оторванные рукава и полы мундирчиков. Один раз в неделю был урок гимнастики, для старших — фехтования на эспадронах. Один раз в две недели преподавались бальные танцы.

Строгий распорядок дня соблюдался неуклонно. Жизненный обиход носил довольно спартанский характер. Все ученики должны были носить одинаковую одежду и обувь (ни резиновых галош, ни теплых носков не полагалось) и жить в одинаковых условиях. Зимних шапок тоже не полагалось. Чтобы не отморозить уши, сверх фуражки надевали уродливые башлыки из верблюжьей шерсти. В гардеробной стояли по стенам огромные шкафы с открытыми квадратными ячейками. Каждый ученик имел свою ячейку, куда должен был убирать аккуратно сложенную парадную и верхнюю одежду.

В 18 часов 30 минут по звонку все ученики шли опять в классы — готовить уроки на завтра. В это время в классах должна была соблюдаться полнейшая тишина. Дежурный воспитатель, один на весь коридор, сидел там на стуле под часами и читал книгу. Если он слышал шум в каком-нибудь из младших классов, например во 2-м, он шел в 4-й класс и посылал одного из учеников навести порядок во 2-м классе. Облеченный властью ученик 4-го класса мгновенно наводил порядок в младшем классе, применяя единственное наказание «встать к печке». Воспитатель вмешивался «в усмирение» только в исключительных случаях. Предполагалось, что в старших классах, где сидят взрослые люди, никакого беспорядка вообще быть не может.

В 20 часов 30 минут в столовой опять подавался чай с булкой, после которого отправлялись по спальням. В 21 час младшие долж-

ны были ложиться спать. За порядком в их спальнях смотрели ученики 6-го класса, имевшие в своем ведении по 10 малышей каждый. Эти мелкие начальники были заинтересованы в том, чтобы угомонить младших как можно быстрее и иметь свободное время для чтения, поэтому порядок в спальнях наводился с необычайной быстротой. В 21 час 30 минут наступала полная тишина, все спали. Однажды в спальне произошел любопытный случай. Один из шестиклассников за какую-то провинность поставил подведомственного ему мальчика к печке и забыл про него. Вошедший воспитатель увидел у печки маленькую фигурку с заплаканным лицом. «Ты что?»— спросил воспитатель. «Да вот, старший поставил меня к печке, а сам забыл про меня и лег спать»,— с плачем рассказал мальчик. Тогда воспитатель разбудил шестиклассника, сделал ему внушение и послал отпустить спать провинившегося малыша. Своею властью воспитатель не счел возможным отменить распоряжение старшего.

При училище имелась больница с дежурным фельдшером, но больных, как правило, было очень мало. Я, например, за 7 лет пребывания в училище живущим ни разу в больнице не лежал.

У меня была привычка вставать раньше всех учеников, для того чтобы избавиться от толкотни при умывании. Я вставал в 5 часов утра, обычно еще в темноте, не спеша умывался и отправлялся в гимнастический зал или в свой класс. В зале я бегал один на гигантских шагах, смотрел в окно на восход солнца и на зимний пейзаж. Мне нравилось, что из комнаты, освещенной лампами, небо и дома выглядели синими. В классе я играл на гитаре, к которой пристрастился еще совсем маленьким, или читал, иногда готовил уроки, неизменно наслаждаясь тишиной и одиночеством. Потом спускались остальные ученики, и день шел своим чередом. Учение давалось мне легко, несмотря на довольно плохую память. Я всегда был в числе первых десяти учеников. Больше других предметов меня интересовали физика, химия и математика, особенно геометрия.

Однажды на уроке химии учитель показал нам кристаллы разных веществ, в том числе медного купороса. До сих пор помню, какое сильное впечатление они на меня произвели. Я записал в своем дневнике, что должен обязательно разобраться в том, почему в процессе кристаллизации образуются многогранники. При первой возможности я стал посещать популярные лекции по кристаллографии, которые читал в Политехническом музее профессор Ю. В. Вульф. Вульф был прекрасным лектором, читал лекции вполне понятным и доступным языком, сопровождая их демонстрацией моделей кристаллов и самих кристаллов. Кристаллы он показывал на экране с помощью проекционного фонаря.

Увлечение физикой и химией началось у меня еще раньше. Разнообразные химические опыты, частично собственного изобретения, доставляли моим домашним много беспокойства, так как часто приводили к взрывам и всегда сопровождались порчей

воздуха в комнате. Несмотря на то, что моя мать была очень далека от науки, она никогда не мешала мне заниматься опытами, только просила не проводить опытов, опасных для жизни, и не особенно заражать воздух.

С самого раннего возраста я стал заниматься опытами по статическому электричеству. Отрезав подошву от старой галоши, я стал заряжать ее, натирая о горячую изразцовую печку. Потом сконструировал электрофор, с помощью которого заряжал лейденскую банку собственного изготовления. Зарядив ее, я пригласил своих многочисленных братьев и сестру образовать круг. Круг этот замыкал я, держа в руках лейденскую банку и пропуская искру через всех участников опыта. Как сейчас помню, сколько было при этом визга, крика и смеха.

В школе у меня был приятель, так же как и я увлекавшийся геометрией. Мы с ним удирали и уединялись на чердаке училища, искусно перелезая через разные преграды. Там мы на свободе решали геометрические задачи, требовавшие уединения, спокойствия и тишины. В общих играх во дворе училища я мало принимал участия, так как был болезненно застенчив и к веселым играм мало подготовлен. Застенчивость помешала мне приобрести близких друзей в школе и среди соседских мальчиков.

Дух в училище был довольно демократическим. Однако, когда началась русско-японская война, в школе был устроен молебен, после которого священник выступил с ура-патриотической речью, призывая постоять за веру, царя и отечество. Когда мы разошлись по классам, в нашем 6-м классе один из учеников вдруг запел «Боже, царя храни», аккомпанируя себе ударами книжки по парте. При пении гимна все встали. Вдруг я почувствовал, что ни петь, ни встать не могу, и остался молча сидеть на парте. Монархически настроенные ученики это сразу заметили и пошли на меня с кулаками. Тогда я встал спиной в угол и пригрозил, что всякий, кто дотронется до меня, простится с жизнью. К моему удивлению, все от меня отступились, и никаких дальнейших последствий этот инцидент не имел.

Мой старший брат увлекался толстовством. Естественно, что и я считал себя тоже приверженцем этого учения, ничего в нем по крайней молодости не понимая. Особой религиозностью наша семья не отличалась. По привычке изредка ходили в церковь и соблюдали церковные праздники. Я перестал верить в бога лет с 12, хотя и пел в церковном хоре, куда был отобран за хороший слух. Так называемые «певчие» обучались церковному пению отдельно и пользовались известными привилегиями. Им полагались бесплатные билеты в театр, иногда даже в Большой театр на оперу, а чаще всего в драматический театр Корша.

Мальчики-певчие и живущие ученики перед церковными службами подвергались своеобразной подготовке. Надев парадные мундиры, мы должны были предстать перед дежурным гардеробщиком для наведения чистоты и лоска. Осуществлялось это следую-

щим образом. Гардеробщик надевал на руку большую щетку на ремне, которой обычно чистили лощадей, набирал полный рот квасу и, поворачивая мальчика перед собой, щедро сбрызгивал его квасом с головы до ног, а затем тщательно чистил лошадиной щеткой.

В училище совершенно не возникал вопрос об отношении к людям другой национальности, в частности к евреям. У нас в классе первым учеником был мальчик по фамилии Кормер. Никто никогда не задавался мыслью о том, какой он национальности, пока в театре, куда нас повели, не произошел следующий случай. Не помню, в какой пьесе был чрезвычайно реалистически представлен еврейский погром. В самый разгар «погрома» Кормер вдруг вскочил и прыгнул на сцену, чтобы защитить избиваемых погромщиками евреев. Только тогда мы поняли, что Кормер — еврей.

Всю жизнь я очень люблю музыку. Совсем маленьким я часто сидел на скамеечке у ног крестной, которая, работая на швейной машинке, пела русские песни, обычно «Уж ты сад, ты мой сад». После смерти отца его гитара осталась висеть на стене. Я любил потихоньку трогать ее струны. Вскоре гитару продали. Лет семи я сделал себе музыкальный инструмент сам. Выпросил у матери коробку и тонкие старые резинки. Проделав ножницами на противоположных сторонах коробки надрезы на равных расстояниях друг от друга, я продел и закрепил в них резинки. Натягивая и ослабляя эти резинки, я настроил свой инструмент. Когда он был готов, я лег на кровать на одно ухо, на другое положил свой инструмент и, перебирая струны, мог наигрывать несложные мотивы. Много радости доставил мне этот инструмент. Потом старший брат приобрел себе гитару и выучился самоучкой на ней играть. Иногда он пел под гитару, тогда включался в пение и я. Это называлось у нас дуэтировать. Остальные члены нашей семьи музыкой особенно не интересовались.

В Коммерческом училище пение преподавал прекрасный учитель — Локиер. Кроме пения он познакомил нас с теорией музыки и с сольфеджио. В училище была специальная доска, разлинованная как нотная бумага. Учитель проигрывал нам на рояле простенький мотив и предлагал записать его на доске. Здесь был элемент соревнования: кто первый возьмется это сделать. Обычно этим первым был я, и мне это очень льстило.

С удовольствием пел я и в церковном хоре, который пользовался в Москве заслуженной славой. Кроме церковных служб, на которых бывало много посторонних людей, приходивших специально послушать хорошее церковное пение, иногда в училище устраивались своего рода концерты, на которых хор исполнял уже не церковную, а светскую музыку, хоры из опер. Концерты эти происходили в актовом зале с приглашением посторонней публики.

Я был чрезвычайно привязан к моей старшей и единственной сестре Лизе. Лиза была очень хороша собой, у нее были красивые карие глаза. Помню, как во время концертов я всегда старался

отыскать в публике Лизу. Однажды это мне удалось. Когда я в публике в задних рядах увидел любимые мною темные глаза, я был безмерно счастлив, счастлив до слез.

В училище я зачитывался популярными книгами, в которых были описаны опыты Фарадея и других физиков очень простым и понятным языком. Эти опыты всегда было легко повторить. Например, нужно было получить тонкую струю воды, летящую в воздухе, и поднести к ней заряженную о волосы гребенку. Струя рассыпалась на множество мелких струй с большим ущербом для мебели.

В одном классе со мной учился покойный Николай Иванович Вавилов, впоследствии академик и известный генетик-селекционер. Коля был приходящим учеником, я — живущим, и мы мало соприкасались друг с другом. Запомнилось мне только, что Коля уже в 14-летнем возрасте смело высказывал на уроках свои собственные мнения, как взрослый. В одном из младших классов учился младший брат Коли Вавилова — Сережа, будущий президент Академии наук. Как и все старшеклассники, я не обращал на него никакого внимания. Когда я был в 6-м классе, мне с большим трудом и с громадными для меня затратами удалось построить электрофорную машину. Надо сказать, что мой ежегодный доход равнялся в то время одному рублю, составлявшемуся из двух полтинников, которыми меня награждала бабушка к праздникам. Других денег у меня не водилось вовсе.

Построенная мною машина отличалась от электрофорной машины Вимшерста тем, что в моей машине вращался только один стеклянный диск, а другой был закреплен. Оба диска были мной приготовлены с большим трудом без помощи алмаза. Я приклеивал на стекло с двух сторон мокрую газету, а затем по шаблону откусывал от стекла маленькие кусочки с помощью плоскогубцев. Как полагается, машина кроме стеклянных дисков содержала две лейденские банки и другие нужные детали. Оригинальной особенностью конструкции было то, что в центре вращающегося диска была приклеена большая катушка из-под ниток. Катушка эта была надета на толстый гвоздь, расположенный горизонтально на деревянной подставке. Диск приводился в движение приводом из старого ремешка от швейной машинки.

Я был горд тем, что моя машина дает искры длиной в 5 см, и охотно демонстрировал ее всем желающим: своим соученикам, ученикам моей сестры и даже соседке-прачке, пришедшей в восторг от того, что «железка против железки стоит и железка об железку загорается».

Слух о том, что «Шубников делает электрические машины», дошел до Сережи Вавилова. Вскоре через одного из моих одноклассников, вхожих в дом к Вавиловым, я получил заказ изготовить такую машину для Сережи. На расходы по изготовлению машины и за труды я получил от Вавиловых неслыханную для меня сумму — 5 рублей. Через две недели маленький будущий физик стал

обладателем электрофорной машины. Как знать, может быть именно эта машина сыграла известную роль в выборе Сережей своей специальности.

Интересно, что первые мои печатные работы, числом 9, опубликованные в журнале «Физик — любитель» еще в бытность студентом, были чисто физическими и не имели никакого отношения к кристаллографии.

Окончив в 1906 г. Коммерческое училище с серебряной медалью и получив звание кандидата коммерции, я стал готовиться к экзамену по латинскому языку, без знания которого не мог поступить в университет. С приятелем по училищу Орловым мы в течение года самостоятельно изучили латинский язык в объеме, необходимом для сдачи экзамена, и оба благополучно его сдали. В 1908 г. я был принят на естественное отделение физико-математического факультета Московского университета, избрав для изучения цикл физикохимии с определенным желанием специализироваться по кристаллографии, к которой меня привлекло гармоническое сочетание трех любимых предметов: математики, физики и химии. Мне посчастливилось слушать лекции многих выдающихся профессоров: Крапивина, Зелинского, Каблукова, Лебедева, Эйхенвальда, Умова, Вернадского, Ферсмана, Самойлова, Вульфа.

Сразу после окончания училища, еще до поступления в университет, я стал давать уроки по всем предметам в качестве репетитора. Уроками зарабатывал себе на жизнь и учась в университете. Репетиторство часто было очень тяжелым занятием, ведь способные дети в репетиторах не нуждались. До сих пор я не забыл одного своего ученика, которого я должен был подготовить для поступления в кадетский корпус. Ученик этот был сыном богатого купца, производившего на своей фабрике самовары и торговавшего ими. Купец считал, что единственный способ сделать из неудачного детища человека — это определить его на военную службу, но великовозрастный сынок чувствовал полнейшее отвращение к учению и решительно отказывался заниматься науками. Занятия всегда начинались категорическим отказом с его стороны: «Не буду заниматься. Зачем мне это нужно?» Однажды, выведенный окончательно из терпения, я плашмя сильно ударил лентяя по спине. Вошедший отец одобрил этот метод преподавания, но я тут же категорически отказался от урока.

Отлично помню другого своего ученика — гимназиста. Он был настолько туп, что мог запомнить что-либо только наизусть, а понять вообще ничего не мог. Когда он отвечал урок наизусть, создавалось впечатление, что он кое-что знает, но стоило задать ему какой-нибудь вопрос, как он погружался в молчание и только артистически шевелил ушами. Мучаясь с этим мальчишкой, я сам научился шевелить ушами, а его соображать не научил. В отличие от брата, старшая сестра его была исключительно способной. 15-летняя девочка эта была связана с группой революционно настроенной молодежи. Однажды, придя на урок, я застал в



Студент Московского университета

доме полное смятение. Ждали обыска. Меня попросили унести и спрятать у себя пакет с какими-то крамольными бумагами, что я и сделал. В тот же день обыск состоялся, но за отсутствием улик девочка арестована не была.

Моя сестра Лиза, окончив с золотой медалью гимназию, мечтала продолжать образование на Высших женских курсах. Однако на курсы ее не приняли из-за отсутствия у нее имущественного ценза: у нее не было ни недвижимой собственности, ни определенного заработка. Тогда ей пришлось открыть у себя на дому школу для маленьких детей, которым она сама и преподавала все предметы. Наличие на двери соответствующей вывески позволило сестре поступить на биологический факультет Высших женских курсов и получить высшее образование.

В бытность мою студентом я во время перемены показывал ученикам сестры «фокусы» по электричеству, магнетизму и другим физическим явлениям. Этим «фокусам» и была посвящена одна из моих первых печатных работ, опубликованная в журнале «Физик—любитель» в 1909 г.

Самые интересные лекции по физике, всегда сопровождавшиеся демонстрациями, читал в университете профессор Умов. Когда Умов дошел до последней лекции по термодинамике, он велел

поставить у себя на столе метроном. Рассказывая нам о тепловой смерти, Умов в заключение пустил в ход метроном. Мы должны были понять, что каждый стук метронома вел всех нас к термодинамической гибели.

В первый год пребывания в университете я слушал много самых разнообразных лекций, не входивших в программу курса. Например, я усердно посещал все лекции В. И. Вернадского по минералогии. На первые лекции студенты валили валом, затем слушателей становилось все меньше и меньше. Интерес к кристаллографии, зародившийся у меня еще в детстве, так и не угасал. Вскоре я пошел к В. И. Вернадскому, сказал ему, что хотел бы специализироваться по кристаллографии, и просил дать мне какое-нибудь задание. В. И. Вернадский велел мне изобразить один из кристаллов в стереографической проекции. Я встал в тупик, так как никогда не слышал о существовании такой проекции, и решил узнать о ней у А. Е. Ферсмана. Когда я пришел к Александру Евгеньевичу, он сидел в темной комнате у гониометра. Я приоткрыл черную занавеску и задал Ферсману вопрос о стереографической проекции. Он с раздражением крикнул мне: «Маля́ра смотрите, Маля́ра!» Старушка-библиотекарша сейчас же раздобыла мне книжку Маля́ра на французском языке, в оглавлении которой я нашел термин «стереографическая проекция». Одолев Маля́ра, я уже смог выполнить задание Вернадского и был принят на его кафедру. Далее мне было предложено самому вырастить этот кристалл и определить его симметрию, измерив углы между гранями на гониометре.

В то время на кафедре техника выращивания кристаллов находилась на самом низком уровне. Никто не умел их выращивать, даже сам руководитель группы выращивания кристаллов Алексат. Для приготовления раствора нужной концентрации кристаллизаторы ставились на асбестовые пластинки, подогреваемые снизу пламенем газовой горелки. Как правило, кристаллизаторы от перегрева лопались. Если же удавалось этого избежать, все равно кристаллы получались очень невысокого качества, так как рецептов для выращивания их не существовало, а аналитических весов не было. С большим трудом в течение года мне все же удалось вырастить несколько довольно плохих кристаллов семиводного цинксульфата и определить их симметрию. Симметрия эта оказалась другой, чем предполагал Вернадский. На существовавшем при кафедре семинаре я сделал удачный доклад о результатах моей первой работы, но самого меня эта работа не удовлетворила.

Когда я постигал стереографическую проекцию по Маля́ру, в комнату вошел Ю. В. Вульф, возвратившийся в то время из Варшавы и начавший работать на кафедре Вернадского, где он читал, в частности, курсы криталлооптики и геометрической кристаллографии. Увидев, чем я занимаюсь и как черчу проекцию, Вульф сказал, что можно сделать это гораздо проще, если воспользоваться придуманной им стереографической сеткой. Применив

эту сетку, я сразу и легко усвоил суть стереографической проекции.

После разговора с Вульфом мне захотелось изучать кристаллографию под его руководством во всем ее объеме и разнообразии. В это время Ю. В. Вульф был в полном расцвете своих творческих сил. Его лекции по геометрической кристаллографии и кристаллооптике, построенные на описании его собственных работ, были очень оригинальны и интересны. Прослушав эти курсы, я окончательно и бесповоротно стал поклонником Вульфа. Меня очень поразило, что в единственной, принадлежащей ему в университете комнате стоял токарный станок, на котором он сам и работал. С помощью этого станка Вульф изготовил кристаллизатор, вращавшийся по горизонтальной оси (обычно кристаллизаторы вращались в то время только вокруг вертикальной оси).

Я осмелился предложить Ю. В. Вульфу свои услуги в качестве помощника на все руки. Вульф принял мое предложение и немедленно поручил мне вырастить кристаллы бихромата калия, пустив в ход придуманный им вращающийся кристаллизатор. С большим интересом взялся я за эту работу и после исследования получившихся кристаллов пришел к выводу, что вопреки данным Грота, помещенным в его справочнике, кристаллы бихромата калия по своей морфологии центра симметрии не имеют.

Первая моя научная работа «О симметрии кристаллов бихромата калия» была опубликована в 1911 г. В этом же году Ю. В. Вульф, как и некоторые другие прогрессивно настроенные профессора Московского университета, в знак протеста против известного приказа министра Кассо покинул университет и перешел на работу в Народный университет им. А. Л. Шанявского. В течение двух лет я работал неофициальным ассистентом Вульфа, а в 1913 г. был избран на эту должность формально.

Хочется посвятить несколько строк моему любимому учителю Ю. В. Вульфу, который дал мне так много, поставив на правильный путь изучения кристаллов. Как и он, я посвятил этому изучению всю свою жизнь.

Ю. В. Вульф не принадлежал к распространенному типу ученых, которые приобретают известность в науке в значительной мере своей усидчивостью, организаторскими способностями, умением сосредоточиться на одной определенной идее. У него была поразительная способность быстро ориентироваться в совершенно новых для него областях науки, попадать, как говорится, в самую точку. Открытие братьями Кюри в 1880 г. пьезоэлектричества кварца вызвало появление известной работы Вульфа о ложном пироэлектричестве кварца. Работа П. Кюри об образовании кристаллов, появившаяся в 1885 г., послужила толчком к опубликованию интересной работы Вульфа о скоростях роста и растворения кристаллов, в которой он конкретизирует гипотезу П. Кюри о том, что кристалл при росте принимает форму, отвечающую минимуму поверхностной энергии, в совершенно ясном и простом выводе: «скорости роста граней кристаллов пропорциональны

их капиллярным постоянным». Теоретические исследования Е. С. Федорова и А. Шенфлиса о строении кристаллов оставляют свой след в работах Вульфа по теории габитуса и о строении кварца и некоторых псевдосимметричных кристаллов, вышедших в свет в 1887—1890 гг. Изобретение Е. С. Федоровым теодолитного гониометра порождает ряд работ Вульфа по теодолитному методу. До настоящего времени повсеместно применяется сетка Вульфа для построения стереографических проекций и графических вычислений кристаллов.

После открытия Лауэ в 1912 г. дифракции рентгеновских лучей Ю. В. Вульф отдал все свои силы рентгенографии кристаллов. Одним из важнейших результатов его работ в этой области явилась знаменитая формула Брэгга — Вульфа. Много интересного внес Вульф и в изучение симметрии кристаллов. Он свел все операции симметрии к последовательному отражению симметричных фигур, в том числе и кристаллов, в плоскостях симметрии. Природный дар позволял Вульфу прекрасно ориентироваться в дебрях науки и всегда выводил его на правильный путь. В то же время задать тему для работы своему ученику было для Вульфа истинным мучением. Он мог задать ученику только такую задачу, решение которой ему самому было уже известно.

Свои лекции Вульф строил не на традиционном разглядывании со всех сторон деревянных моделей кристаллов и не на писании мелом формул на доске, а на демонстрации явлений, происходящих в «живых» кристаллах, часто с помощью микропроекции. Одна из его книг так и озаглавлена «Жизнь кристаллов». Ю. В. Вульф очень гордился тем, что «открыл Федорова», т. е. сделал его имя известным за рубежом, напечатав рефераты работ своего старшего соратника на поприще кристаллографии в немецком кристаллографическом журнале.

В 1912 г. я окончил Московский университет по физико-математическому факультету и в 1913 г. получил диплом с отличием. Интересы мои к этому времени окончательно определились. Мне было ясно, что я хочу работать только в области кристаллографии.

Во время занятий в университете я пользовался отсрочкой по военной службе. Окончив университет, я должен был отбывать воинскую повинность в качестве вольноопределяющегося. Мне удалось добиться зачисления в один из московских полков для того, чтобы не прерывать работы у Вульфа в его лаборатории, куда я ходил по вечерам и по праздничным дням, иметь возможность жить дома, а не в казармах и благодаря этому продолжать давать уроки и помогать материально матери и младшему брату.

Московский Перновский гренадерский короля Фридриха-Вильгельма IV полк, куда я попал, отличался своими красивыми погонами, на которых блестели буквы *FR* и римская цифра IV: *F* — Фридрих, *R* — rex (король), IV — порядковый номер немецкого короля — шефа полка. Забегая вперед, расскажу, что во время первой мировой войны, в которой мне пришлось принимать уча-

стие, на погонах добытого нашими солдатами немецкого пленного солдата («языка») я с удивлением увидел точно такие же погоны, как и на солдатах русского Перновского гренадерского полка.

Несмотря на университетский значок, который я должен был носить в обязательном порядке, я все же подвергался неизбежной солдатской муштре на общих основаниях. Шагистика, ружейные приемы, изучение винтовки, изучение военных уставов — все это преподавалось всем вольноопределяющимся, и по всем «предметам» они должны были сдавать экзамены.

В первый же день, когда я вместе с другими вольноопределяющимися явился в полк уже в военном обмундировании, нас всех выстроили в шеренгу по росту, после чего портной большими ножницами обрезал нам полы шинелей по одной линии. Затем вышел командир полка и сказал нам речь, сводившуюся к тому, что военная служба должна выработать из хамов воспитанных людей и что солдаты должны выполнять беспрекословно все распоряжения начальства, не входя в их суть. К этому он добавил, что все без исключения солдаты как православного, так и других вероисповеданий, например магометане, должны неукоснительно посещать все церковные службы, так как бог — один. Однако правило это не распространяется на евреев. Последовала команда «Жиды — три шага вперед!» Закончилась речь специальным обращением к евреям: «Вам придется оставить все ваши штучки. В церковь вам, конечно, входить нельзя, но чтобы вы не имели преимуществ перед другими, вы обязаны находиться во время церковных служб в гимнастическом зале».

Кроме вольноопределяющихся первого разряда, имевших высшее образование, служивших в армии один год и пользовавшихся льготами, существовали еще вольноопределяющиеся второго разряда, имевшие среднее и шестиклассное образование и служившие в армии два года. Естественно, что между теми и другими был постоянный антагонизм, тем более, что вольноопределяющиеся первого разряда попадали под начальство уже прослуживших один год вольноопределяющихся второго разряда при обучении шагистике, ружейным приемам, гимнастике и т. п. Вспоминается мне случай, происшедший со мною во время обучения ружейным приемам. Приставленный к нам начальник заставлял меня бесконечное число раз повторять один и тот же прием. Командовал «на плечо», затем «отставить», опять «на плечо», опять «отставить», снова «на плечо» и т. д. Я никак не мог ему угодить. Доведенный до бешенства явно умышленными придирками, я вместо приема «на плечо» вдруг сделал выпад штыком вперед прямо по направлению к животу «учителя». Дело пахло для меня военным судом, но «учитель», вероятно, понял, что хватил через край, и оставил меня в покое.

К концу года, сдав все полагающиеся экзамены, я получил первый военный чин прапорщика запаса и мог вернуться к своим занятиям наукой. Однако весной 1914 г. я был снова призван для

прохождения лагерного сбора, который проводился в районе Орла. Сбор выражался в том, что призванные на него свежеиспеченные прапорщики должны были учиться командовать солдатами под руководством опытных кадровых офицеров. По окончании сбора все его участники получили право на бесплатную поездку в любое место России по своему выбору. Я выбрал поездку на Кавказ, намереваясь совершить путешествие по Военно-Грузинской дороге. Однако, доехав до Казбека, я увидел на стене объявление о войне с Германией и о мобилизации. Пришлось немедленно поехать в Москву. Я явился там к воинскому начальнику и вскоре был направлен в действующую армию, в пограничный город Вержболово. От этого города остались одни развалины. Из земли торчали только кирпичные трубы и остатки печей. Эту же картину мы застали и в соседнем, уже немецком, Эйдкунене, который в это время был занят нашими войсками. В обоих городах у дверей разбитых магазинов лежали грудами на земле вывалившиеся как из рога изобилия товары: сапоги, ботинки, продукты и т. п. Многие офицеры брали себе из этих груд обувь и мануфактуру. Встретился мне солдат, с трудом тащивший на себе огромное мягкое кресло, обитое бархатом, другой солдат нес большое зеркало, третий — изображение мадонны. Батальонный командир остановил их, обругал и спросил, зачем им эти громоздкие вещи. Солдат, несший кресло, ответил: «Так что, ваше благородие, перед смертью посидеть». Офицер приказал их всех троих арестовать за мародерство и отправить в штаб. Когда солдат повели, я догнал их и приказал конвойным отпустить, что те с удовольствием и сделали. В царившей полной неразберихе мне это сошло с рук.

С первого дня моей службы в армии ко мне был приставлен денщик по фамилии Ферапошкин — весьма колоритная фигура, с которым мы жили душа в душу все время, проведенное мною на военной службе. Ферапошкин, уроженец Рязанской губернии, был значительно старше меня, уже принимал участие в японской войне и был довольно ловок в практических делах. Поразил он меня своим полнейшим невежеством. Однажды я показал ему фотографию моста и спросил, что это изображено. Ухмыльнувшись, он ответил, что это портрет поручика Рытова. Когда после ранения я был переведен на нестроевую должность и работал на заводе, Ферапошкин последовал за мною и был потрясен видом электрической лампочки. Как-то на заводе я показал ему под микроскопом движущихся инфузорий. Посмотрев в микроскоп, он недоверчиво покосился на меня и сказал: «Вы все меня, ваше благородие, обманываете!»

Вместе с другими прапорщиками я явился в пехотный полк, находившийся уже в Восточной Пруссии. Там командир полка назначил меня охранять с небольшим количеством солдат дивизионный обоз, стоявший от передовой позиции километрах в 15. Начальник обоза сразу же отправил меня с вестовым в штаб диви-

зии для того, чтобы уяснить обстановку, узнать где наша армия и куда девать обоз, о котором все забыли. Штаб неизвестно где находился, ориентироваться мы могли только по доносившимся звукам боя. Проселочная дорога, по которой мы ехали, шла лесом. Встреченные нами раненые и отбившиеся от своих частей солдаты сказали, что немцы близко и что все пропало. Все же мы поехали вперед.

Переезжая ручей вброд, я, как неопытный ездок, чуть не погубил себя и своего коня, провалившегося в тину. Если бы не помощь вестового, моя военная служба на этом бы и закончилась. Однако вестовой сумел вытащить и меня и лошадь, и мы поехали дальше, навстречу отступавшим войскам. Наконец мы разыскали штабных офицеров, явно поддавшихся панике. Один из них отдал распоряжение отправить дивизионный обоз в ближайший немецкий городок. Я поехал обратно. Когда я передал приказ начальнику обоза, он быстро сел в повозку и поехал прямо в Вержболово вместе с обозом. Оказалось, что указанный мне городок за это время уже был занят немцами.

Вскоре я был переведен на передовые позиции. Батальон, куда я прибыл, получил приказ идти навстречу неприятелю, находившемуся неизвестно где. Одна из четырех рот, составлявших наш батальон, была разбита на отделения и рассыпана цепью, которая должна была первой встретить врага. Я шел с остальными тремя ротами по шоссе вслед за первой цепью. Большинство солдат, шедших вместе со мной, были новичками на войне, как и я. Во время передвижения они вели между собою и со мной самые штатские разговоры: о доме, о работе, о семьях. Вдруг первая цепь напоролась на врага. Послышалась беспорядочная стрельба. Тогда мы рассредоточились по обе стороны шоссе, легли на землю, окопались и стали ждать событий. Офицеру окапываться было не положено. Мне насыпал небольшую защитную земляную стенку лежащий рядом солдат по своей инициативе. Вдруг над нами пролетел со свистом первый снаряд, затем второй. Артиллерийская стрельба усиливалась, и каждый думал, какой снаряд предназначен ему.

С наступлением темноты стрельба затихла. Начальство приказало пойти и взять «языка». Молодой офицер с тремя солдатами отправился в сторону немцев и скоро вернулся, взяв пленного. Мы обступили его, и я с удивлением увидел на его плечах такие же погоны, которые носили гренадеры Московского Перновского полка. Очевидно, немецкий король Фридрих-Вильгельм IV был одновременно шефом Перновского полка и того немецкого полка, где служил наш пленный. Пленный дрожащими руками вынул из кармана фотографии своих детей и стал объяснять солдатам что-то по-немецки. Солдаты добродушно обучали пленного русскому языку и первым делом накормили его хлебом. Я взял на себя роль переводчика и объяснил немцу, что его никто не обидит и что он может не опасаться за свою жизнь.

Утром наша разведка донесла, что деревня, около которой мы находились, оставлена неприятелем. Тогда мы быстро заняли эту пустую деревню. Начальство же сообщило в ставку, что населенный пункт занят с боем. На полк посыпались награды. Я лично получил орден Анны 4-й степени, не сделав ни одного выстрела и не видав в глаза ни одного немца, кроме пленного.

Следующий бой, в котором мне пришлось принять участие, заключался в следующем. Наш батальон был разбит на две части. Первая из них была рассыпана цепью лицом к неприятелю, а вторая расположена шагах в 500 от первой, параллельно ей. Я оказался во второй части, получившей приказ в случае необходимости заменить первую цепь. Командовавший обеими частями офицер встал за каменной стеной какого-то здания. Нам должна была помогать имевшаяся в части единственная пушка, стрелявшая через наши головы. Вскоре завязалась ружейная перестрелка. Передняя цепь стреляла из винтовок лежа. Через некоторое время один из солдат, лежавших в этой цепи, привстал и начал стрелять с колена, несмотря на ругань командира. Вскоре привстал другой солдат, за ним третий, четвертый. Тогда первый солдат, стрелявший с колена, встал во весь рост и начал стрелять стоя, за ним встали и все остальные. Сейчас же немцы (человек 30 вместе с офицером) подняли руки вверх и сдались. На этом все и кончилось.

Другой бой протекал при таких обстоятельствах. У нашего батальонного командира стал нарывать палец. Воспользовавшись этим, он уехал к полковому врачу. Тогда я как старший по чину оказался в роли командира. В этом качестве я получил приказ пойти на ночь в так называемую «сторожовку». Ночью надо было занять позицию, чтобы утром на ней принять бой на себя. Впереди позиции были расставлены часовые, которые первыми должны были обнаружить неприятеля. Рота, в которой я непосредственно находился, расположилась в сарае, принадлежавшем немцу — колонисту. Этот немец, так же как и местное польское население, был уверен, что «ютро бендзе буй (завтра будет бой)».

Всю ночь я проверял боеспособность солдат, которые все крепко спали, поставив винтовки к стене. Мне приходилось их будить, но как только я уходил, вдогонку мне раздавался мощный и дружный храп измученных солдат. Зная из полученного приказа, что возможна ночная атака, я, естественно, волновался. С рассветом солдаты проснулись и зашевелились. Я стал смотреть в бинокль в сторону леса, откуда ожидалось появление неприятеля. Вдруг из леса появился верхом на лошади солдат в каске, ехавший рысью по направлению к нам. Несмотря на строгий приказ ни в коем случае не стрелять раньше времени, один из часовых выстрелил в верхового. Немец не спеша повернул коня и спокойно стал удаляться к лесу, откуда сейчас же появились немецкие войска. Приблизившись к нам на расстояние выстрела, немцы стали подходить к нам перебежками. Завязалась перестрелка. По приказмы должны были рассредоточиться и отступать, заманивая нем-

цев к нашим окопам, где был размещен весь наш полк. Когда мы начали отступать, немцы открыли огонь из орудий, а над нашими головами появился самолет-разведчик — большая редкость в то время. Мы стали стрелять в самолет из винтовок и скоро с радостью увидели, что он подбит и падает на опушку леса. Отстреливаясь, мы добрались до наших окопов и сейчас же сели обедать, не обращая внимания на артиллерийский обстрел и на приближающегося неприятеля.

Вдруг послышалась команда: «В атаку, за мной». Мы все вскочили и пошли вперед вдоль шоссе по указанному командиром направлению. Ни артиллерии, ни пулеметов у нас не было, и мы пошли в атаку по методу Суворова, с одними штыками. Невидимые нам немцы расстреливали нас из пулеметов и пушек, наши части перепутались. Я оказался командиром совсем другого отряда. Солдаты наши, хотя и подчинялись приказу идти вперед, все же старались держаться под защитой деревьев, которыми было обсажено шоссе. Удивила меня стоявшая рядом с шоссе корова. Она мирно щипала траву, не обращая ни малейшего внимания на летавшие вокруг нее пули и снаряды.

Когда мы дошли до деревни, наша атака остановилась сама собой. Никакие силы не могли заставить нас идти вперед на верную смерть, не видя ни одного немца и не зная точно, где враг находится. Немцы зажгли деревню, а мы стали отступать, время от времени ложась на землю и отстреливаясь. Желая рассмотреть немцев в бинокль, я вдруг упал, не почувствовав никакого удара и не испытывая боли. Однако попытка подняться успеха не имела. Тогда я понял, что ранен и обречен на то, чтобы попасть в плен к наступающим немцам. Я закричал: «Я ранен». Двое солдат остановились, подошли и подняли меня с земли. Обняв их за шею, я повис на них, и они понесли меня. Вскоре к ним присоединились еще два солдата. Укрывшись за стеной встретившегося домика, солдаты раздели меня и кое-как перевязали перевязочными материалами из индивидуального пакета. Тут обнаружилось, что я ранен в живот и что мои брюки и сапоги полны крови. Все эти доспехи так и остались на поле боя, а мои спасители потащили меня дальше, отыскивая полевой госпиталь. В госпитале царила полнейшая растерянность. Большое количество тяжелораненых, падающие кругом снаряды, отсутствие средств перевозки и перевязочного материала привело немногочисленный персонал госпиталя в смятение. Все же перевязку мне сделали, а несшим меня солдатам выдали носилки. На этих носилках и понесли меня дальше.

С наступлением сумерек канонада несколько затихла. Боли я не чувствовал, но было очень холодно, особенно когда солдаты клали носилки на холодную землю. Этой же ночью я попал в новый полевой госпиталь, где после перевязки меня погрузили на санитарную повозку. Здесь я простился со своими спасителями и через некоторое время был доставлен в более совершенный полевой

госпиталь, где меня в первый раз осмотрел врач. Измученный потерей крови и долгим путешествием, я лежал с закрытыми глазами и вдруг услышал латинскую фразу: «Вот ты лежишь и даже улыбаешься и не знаешь, что дни твои сочтены». Такой приговор произнес надо мной врач. Все же меня погрузили в санитарный поезд, направлявшийся в Варшаву. В поезде на нижних полках лежали тяжело раненые офицеры. Меня положили на верхнюю полку, где я тотчас же заснул. Проснувшись утром, я увидел в окно совершенно розовый мир. Оказывается, ночью выпал снег, и восходящее солнце окрасило все в нежно-розовый цвет. Тут почему-то я почувствовал, что буду жить.

В Варшаве меня в конечном счете вылечили, рана затянулась, я начал понемногу ходить. Врачебная комиссия предоставила мне отпуск. Тогда выяснилось, что ехать в Москву мне не в чем, так как мои брюки остались на поле боя, а в госпитале снабжение брюками выздоравливающих не предусмотрено законом. Я оказался в безвыходном положении, так как купить брюки мне было не на что. Тогда мой сосед по палате — раненый полковник, кряхтя полез под кровать, вынул из чемодана широчайшие брюки военного образца и сказал мрачно: «Нате Вам, прапорщик, штаны». При моей худобе мне пришлось обернуться в полковничьи брюки дважды. В таком виде, да еще с забинтованной из-за вскочившего нарыва головой, я явился в Москву к своей матери. Увидев меня, она всплеснула руками и пошатнулась. Я сразу крикнул ей: «Мамаша, голова цела».

Через две недели, явившись к воинскому начальнику, я получил приказ ехать немедленно обратно на фронт. Если не поеду, буду отдан под военно-полевой суд. Разозлившись, я умышленно пробыл в Москве еще два дня и затем выехал на фронт в свою часть.

Была зима. Часть наша стояла на отдыхе в деревне. Солдаты и офицеры ютились в грязных хатах, спали на грязной соломе на полу. Меня привело в ужас невообразимое количество вшей, которые кишели в этой соломе и быстро наползли на меня. Ноги мои в тонких валенках сразу окоченели. Мне стало ясно, что я все равно погибну от холода и вшей, даже если меня и не убьют. На мое счастье, через несколько дней моя плохо заштопанная рана открылась и стала кровоточить. Тогда полковой врач отправил меня обратно в Варшавский госпиталь, где, правда, было тепло, но было столько же вшей, как и на фронте.

Рану мою опять подлечили, но признали меня негодным к строевой службе. На этом моя военная карьера и закончилась. Начались мытарства нестроевой военной службы. Первой моей нестроевой службой было наблюдение за военнопленными, продолжавшееся всего несколько дней. Из этого периода запомнился мне только один забавный случай. Ко мне, как к начальнику, обратились военнопленные немецкие офицеры с жалобой, что их кормят недостаточно пропеченным хлебом. К пленным было

исключительно гуманное отношение. Я сейчас же отдал распоряжение улучшить качество выдаваемого им хлеба.

Следующей моей нестроевой должностью была приемка скота на мясо для армии. Помню, я был поставлен в тупик, как решить вопрос, здорова ли сдаваемая корова или больна. Войсковой ветеринар успокоил меня, преподав простое мудрое правило: «если корова жрет — она здорова, если нет — больна». На этой должности я встретился с непредвиденными трудностями: чем коров кормить в пути, когда сена нет, кто будет коров доить и т. д. Количество коров вдруг уменьшилось на одну голову. Меня уверяли, что корова выпрыгнула из поезда. В другой раз количество коров вдруг увеличилось на одну. Оказывается, одна из коров отелилась в пути. А как оприходовать теленка, никому неизвестно!

Все это время я отчаянно нуждался в деньгах. Дело в том, что полагавшийся мне аттестат на деньги не мог за мной угнаться и запаздывал. В конечном счете, когда я попал в Вильно (Вильнюс), я окончательно обнищал и оголодал. Спасли меня писари какого-то продовольственного военного учреждения. «Не извольте беспокоиться, — сказали они мне,— живите у нас в канцелярии, спите здесь на диване, а мы будем вас кормить, пока не появится аттестат». Так я и сделал.

Следующей нестроевой должностью оказалась служба на сенопрессовалке. Должность эта была интересна тем, что в наличии не оказалось ни самой сенопрессовалки, ни сена. Начальником числился интендант высокого ранга, который приезжал на «работу» на паре серых рысаков. Первое, что я сделал, я подал рапорт с просьбой откомандировать меня на работу по моей специальности химика. В ответ я получил строгое предписание в определенный час ежедневно являться на работу. Я стал аккуратно являться и так же аккуратно подавать новые рапорты об откомандировании ввиду полного отсутствия работы и желания помочь армии в изготовлении снарядов, в которых она так нуждалась. Скоро интендант пригрозил мне военным судом. Я сказал, что суд меня устраивает, так как там я всех выведу на чистую воду. Тогда интендант вспылил и предложил мне уходить к черту в отпуск, что я и сделал. В Москве у воинского начальника я случайно встретил своего школьного товарища Орлова. Как работник Главного штаба, он был весь увешан аксельбантами. Узнав о моих злоключениях, он обозвал меня дураком и предложил мне подать через него рапорт в Главное артиллерийское управление. С молниеносной быстротой последовал приказ об отправке меня в качестве войскового химика на частный химический завод взрывчатых веществ, принадлежавший акционерному обществу «Любимов, Сольве и компания» и находившийся в Донецком бассейне. На этом заводе я и проработал около трех лет, до конца войны.

Химический завод этот в мирное время вырабатывал соду, в том числе каустическую, а в военное время производил мелинит. Завод был прекрасно оборудован, располагал превосходными кад-

рами высококвалифицированных рабочих, для которых были созданы хорошие условия работы и жизни. Каждому рабочему был предоставлен отдельный дом со всеми удобствами. При рабочем поселке была начальная школа и больница с родильным отделением.

От работы с пикриновой кислотой одежда, обувь, лица и руки рабочих и инженеров быстро приобретали ярко-желтый оттенок; пожелтел и я. Все работавшие на заводе женщины за неделю до больших праздников переставали ходить на работу, чтобы за это время избавиться от желтизны. Интересно, что на заводе взрывчатых веществ работало много военнопленных.

Я не был сильно загружен работой на заводе, в мои обязанности входила лишь приемка готовой продукции после предварительного исследования средней пробы каждой партии в лаборатории. В свободное время я преподавал физику и химию в специальной школе для рабочих завода. Служившие на заводе инженеры (и я в том числе) решили организовать среднюю школу для детей рабочих и служащих завода. Вся работа по созданию этой школы производилась на совершенно добровольных началах при финансовой помощи со стороны завода и шла очень успешно. До сих пор с удовольствием вспоминаю, как дружно и активно работали все члены этого добровольного общества. Не было случая, чтобы кто-то не выполнил поручения или свалил его на кого-то другого. Несмотря на трудности военного времени, школа выросла как по волшебству.

Вспоминается один забавный случай, происшедший при выполнении моих непосредственных обязанностей. На завод доставлялось большое количество чилийской селитры, упакованной в джутовые мешки. Мешки эти числились за Главным артиллерийским управлением, но оно их не вывозило, несмотря на мои рапорты. Пустые мешки складывались во дворе завода и постепенно скопились в громадном количестве. Как и следовало ожидать, в один прекрасный день пропитанные селитрой мешки загорелись. Пожар вскоре ликвидировали, но мне пришло в голову подать рапорт в ГАУ о том, что мешки сгорели все. Каково же было мое удивление, когда на следующий день ко мне явился неизвестный мне человек и предложил продать ему сгоревшие мешки за 15 тыс. руб. Я попросил его как можно скорее вывезти мешки со двора бесплатно. Мешки мгновенно исчезли, и я избавился от этой обузы.

В 1915 г. в начале моей работы на заводе произошло большое и счастливое событие в моей жизни. Ко мне приехала моя невеста Ольга Михайловна Лебедева. Вскоре была скромно отпразднована наша свадьба. В 1916 г. там же, на заводе, родилась моя старшая дочурка Лена.

После свержения самодержавия мне было предложено привести к присяге временному правительству находящихся в моем подчинении солдат — охрану завода. После этого по всей Украине началась частая смена властей, за которой даже трудно было усле-

дить. Завод продолжал работать, часто неизвестно на кого. Я счел за благо при первом удобном случае взять свою семью и уехать в Москву. Там я явился к воинскому начальнику, получил, к моему удивлению, заработную плату и вскоре был демобилизован.

С начала 1919 г. я окончательно вернулся к научной работе и начал работать в области кристаллографии под руководством моего прежнего учителя Ю. В. Вульфа в Народном университете им. А. Л. Шанявского.

В 1919 г. меня постигло большое горе. В трехлетнем возрасте умерла от дизентерии моя дочурка Лена.

Осенью 1919 г. Уральский горный институт переживал как бы второе рождение. Помещение с трудом было подыскано, но ощущалась большая нехватка научных кадров и оборудования. Тогда в Москву и Петроград была направлена специальная комиссия для подыскания и приглашения на работу научных работников и для приобретения необходимого оборудования. В число приглашенных преподавателей попал и я. Меня заинтересовала работа во вновь организуемом учебном заведении, и я дал свое согласие переехать в Екатеринбург и наладить в Горном институте преподавание кристаллографии. Взяв с собой жену и маленькую дочку Веру, я погрузил их и свой нехитрый багаж в товарный вагон, называвшийся тогда теплушкой, и вместе с другими будущими преподавателями (Н. К. Высоцким, А. А. Гапеевым, П. И. Преображенским и др.) поехал в Екатеринбург. Путешествие продолжалось более 20 дней. Теплушка насквозь промерзала, есть было почти нечего, и все же никто из нас не заболел, и мы благополучно добрались до места назначения. На вокзале нас встретил профессор геодезии Н. Г. Келль. Никакого помещения для нас подготовлено не было. Меня с семьей поселили в дворницкой вместе с проживавшей там многочисленной семьей дворника, где была страшная жара и теснота. Все же там мы немного отогрелись, а через несколько дней нас переселили в комнату, реквизированную у какого-то состоятельного городского жителя. В этой комнате я и начал преподавание кристаллографии. Комната примыкала к пекарне, в ней была невыносимая жара, от которой мы спасались включая вентилятор, разысканный мною в так называемом неликвидном имуществе.

Вскоре Горный институт переехал в отведенное для него здание бывшей женской гимназии и начался подлинно героический период в его жизни. Коллектив научных работников и студентов приступил к колоссальной работе по организации учебного процесса. В условиях голода и разрухи нужно было создать базу для обеспечения научной работы и учебы. Преподаватели и студенты не гнушались никакой, самой черной работой, безотказно делая все, что было нужно для создания лабораторий и организации практических занятий буквально на пустом месте. Атмосфера в институте была дружной и деловой.

В новом здании мне удалось завладеть одной большой комнатой площадью в 50 м² для преподавания кристаллографии и маленькой комнаткой для будущей мастерской. Организация кафедры началась с того, что мы со студентами своими силами сделали входную дверь, столы, стулья, ставни для затемнения, вставили стекла. Витринами для хранения образцов минералов и кристаллов, добытыми в том же неликвидном имуществе, мы разделили большую комнату на две части: аудиторию и лабораторию. Для мастерской необходимо было прежде всего приобрести токарный станок. На его покупку был отпущен институтом 1 млн. руб. Когда дошло дело до расплаты за станок, деньги успели упасть и хозяин станка потребовал за него уже 2 млн. руб. Пришлось второй миллион уплатить из своего кармана.

Дружная работа по организации кафедры сплотила прекрасный коллектив, и дела кафедры сразу пошли успешно. После окончания столярных и слесарных работ по оборудованию аудитории и лаборатории я вместе со студентами приступил к изготовлению моделей и приборов для чтения лекций по кристаллографии и кристаллооптике.

Возникло много трудностей из-за отсутствия вспомогательных приборов и приспособлений для изучения минералов с помощью поляризационного микроскопа. В изготовлении этих приспособлений большую помощь нам оказал В. В. Шахмин, один из уральских горщиков (как их тогда называли). Ранее В. В. Шахмин в течение всего лета занимался поисками драгоценных и полудрагоценных камней. В непроходимых лесных дебрях, в одному ему известных заповедных местах он самым примитивным образом вручную копал ямы (копушки) и добывал камни. С наступлением холодов Шахмин возвращался в Екатеринбург и приступал к их обработке. Он гранил, шлифовал, полировал камни, делая из них ювелирные украшения и разные безделушки. Мастерская горщика была оборудована камнерезной пилой и станком для шлифовки и полировки камней. Все «механизмы» приводились в движение вручную им самим или его женой. Шахмин был малограмотным, свое мастерство он унаследовал от своего отца, тоже горщика, и достиг в нем большого совершенства и большой точности.

Познакомившись с В. В. Шахминым, я поступил к нему в обучение и довольно скоро постиг почти все тайны его ремесла. В свою очередь я обучил его более совершенным и более легким методам шлифовки и полировки шлифов горных пород для петрографических работ, а под конец даже изготовлению кварцевых клиньев для оптического исследования кристаллов. Клинья эти у Шахмина буквально отрывали с руками. Они были остродефицитными, так как до революции выписывались из-за рубежа. В дальнейшем он освоил технику производства пьезокварцевых препаратов и линз для инфракрасной и ультрафиолетовой оптики. Кстати сказать, 90-летний Шахмин здравствует до сих пор и продолжает

изготовлять в своей примитивной мастерской различные препараты.

С легкой руки В. В. Шахмина я пристрастился к работе руками, научился шлифовальному и полировальному делу в совершенстве и мог сам изготовлять необходимые для преподавания препараты. На тему о шлифовке и полировке мною написано несколько научных статей. Любовь к работе руками сослужила мне большую службу впоследствии при осваивании изготовления пьезокварцевых препаратов для мирных и оборонных целей и сохранилась у меня до старости. Здесь, в Свердловске, было заложено начало многих моих работ по кварцу, объединенных в моей книжке «Кварц и его применение», вышедшей в 1940 г.

Занимаясь сортировкой шлифовальных наждаков с помощью сит, я заинтересовался явлением муара, наблюдаемым при наложении двух сит друг на друга. Уподобляя сита кристаллическим решеткам, я связал в дальнейшем явление муара с законами симметрии и вывел ряд закономерностей, относящихся к интерференции волн. Завершением этого цикла работ являются мои статьи по растровой оптике.

Плодом преподавательской деятельности в Свердловске является изданный там курс «Кристаллография» (1923—1925). В 1925 г. я был утвержден в звании профессора.

В Горном институте в то время преподавал знаменитый ученый металлург В. Е. Грум-Гржимайло. Он заинтересовался моими лекциями по росту кристаллов и стал их регулярно посещать. Помню, как я, тогда еще совсем молодой человек, был удивлен и польщен, увидев среди своих слушателей всем известного ученого, большая борода которого резко выделялась на фоне юных лиц студентов.

Один из моих студентов С. В. Горюнов, увлекшись чисто научной, организационной и общественной работой, несколько отстал в учебе по некоторым предметам. Работавшая в Горном институте проверочная комиссия, грозный проверком, постановила исключить Горюнова из института за малую успеваемость. Зная этого юношу как очень способного студента, успешно помогавшего мне в научной работе, я отстоял его перед проверкомом и не ошибся. С. В. Горюнов окончил институт, успешно занимался научной и организационной работой и даже сделался впоследствии министром геологии РСФСР и лауреатом Ленинской премии.

Жизнь в Горном институте протекала быстро, в неустанном труде. К моему удивлению, в конце моего пребывания там я вдруг обнаружил, что без согласования со мной из диплома об окончании института исчезла кристаллография как обязательный предмет. Тогда я решил принять предложение академика А. Е. Ферсмана, часто приезжавшего в то время в Свердловск и даже ночевавшего на столе в нашей квартире, переехать в Ленинград для работы в Минералогическом музее АН СССР, которым он в то

время руководил. В 1925 г. этот переезд осуществился и началась моя работа в Академии наук.

В Минералогическом музее кристаллографией как наукой никто специально не занимался. Я поставил себе целью организовать при музее лабораторию кристаллографии. Постепенно удалось сгруппировать несколько способных работников, так же как и я, увлекавшихся этой отраслью науки. Среди них были: Г. Г. Леммлейн, Б. В. Витовский, Е. В. Цинзерлинг, Б. К. Бруновский, М. П. Шаскольская, К. А. Драгунов и др. Тесно связан с лабораторией был Г. Б. Бокий, хотя и работавший в Горном институте, но часто посещавший нашу лабораторию и заседания научного кружка, организованного при музее А. Е. Ферсманом.

В первое время после переезда в Ленинград я вместе с семьей жил в Петергофе в квартире, принадлежавшей Петергофской гранильной фабрике. Работами этой фабрики я сразу заинтересовался, особенно привлекло мое внимание изготовление часовых камней, бывших тогда остродефицитными. Увлекшись обработкой камня еще в Свердловске, я стал часто посещать фабрику и детально знакомиться с процессом ее работы. Скоро и я уже смог быть полезным фабрике своими указаниями и рекомендациями. Опять, как и в Свердловске, я учился и учил.

Через полгода мне предоставили квартиру в самом Ленинграде в одном из пустующих особняков, нуждавшихся в капитальном ремонте. В квартире не было ни кухни, ни уборной, ни мебели. Нужно было самим ставить перегородки и приводить квартиру в жилое состояние. Понемногу с помощью ближайшего помощника А. Е. Ферсмана, минералога В. И. Крыжановского, наш быт наладился, и можно было целиком заняться научной работой.

В лаборатории с самого ее возникновения началось увлечение кварцем. Благодаря содействию того же Крыжановского к нам в руки попало большое количество гальки кварца, реквизированной у французской фирмы, торговавшей в царское время в Петербурге минералами. Хорошо ограненные кристаллы кварца нам, естественно, не достались. Их взял себе Минералогический музей. Возник вопрос, как определить в гальках кварца направление кристаллографических осей? По полученным нами сведениям пластинки кварца, определенным образом вырезанные параллельно существующим граням, были нужны для радиотехники, в частности военной.

Первое, что нужно было сделать, это сконструировать и изготовить (по необходимости из дерева) самодельные установки для резки, шлифовки и полировки камней, а также для определения кристаллографических осей. После этого можно было приступить к изготовлению пьезокварцевых пластинок. В эту работу включилась большая часть нашего дружного коллектива. Вскоре лабораторию посетил специалист из военного ведомства, который предложил нам изготовлять пьезокварцевые пластинки с определенной частотой колебаний для нужд Красной Армии. Мы сог-

ласились, но поставили два условия: 1) снабдить лабораторию необходимыми приборами для измерения радиочастот и 2) прикомандировать к лаборатории специалиста для работы на этих приборах. Очевидно, пластинки были очень нужны. Сотрудникам лаборатории и мне лично часто приходилось работать ночами и немедленно сдавать готовые пластинки специальному приемщику.

Вскоре наша лаборатория, получившая с этого времени наименование кварцевой, достигла в изготовлении пьезокварцевых пластинок высокой степени совершенства. В 1931 г. появилась под моей редакцией небольшая книжка «Руководство к изготовлению пьезокварцевых препаратов», впоследствии премированная Наркомпросом, и ряд других работ по усовершенствованию техники изготовления пьезокварцевых пластинок для различных целей, в частности для кристаллооптики. Работа в этом направлении продолжалась и не прекратилась после переезда лаборатории в Москву в связи с переводом туда Академии наук СССР.

За время моего девятилетнего пребывания в Ленинграде я организовал в Физико-техническом институте Академии наук специальную лабораторию для выращивания больших кристаллов сегнетовой соли статическим методом, так называемую фабрику кристаллов. Для выращивания этих кристаллов был сконструирован металлический кристаллизатор объемом в 1 м^3, очищен и подготовлен химически чистый раствор сегнетовой соли.

После переезда в Москву в 1934 г. таким же методом и на такой же аппаратуре начал работать в нашей лаборатории Н. Н. Шефталь, выращивая в автоклавах сначала кристаллы сахарозы, а затем сегнетовой соли. На тему о выращивании кристаллов сахарозы статическим методом Н. Н. Шефталь защитил впоследствии кандидатскую диссертацию. Одновременно выращиванием кристаллов сегнетовой соли динамическим методом занимались Б. В. Витовский и Г. Ф. Добржанский. Во время Великой Отечественной войны для выращивания кристаллов сегнетовой соли статическим методом был построен специальный завод, для организации которого был командирован Н. Н. Шефталь.

В Ленинграде я принимал участие в создании лаборатории по обработке драгоценного и поделочного камня в тресте «Русские самоцветы», а также различных мастерских по изготовлению пьезокварцевых пластинок. В Москве это направление прикладной кристаллографии стало быстро развиваться. Под моим руководством была создана в 1937 г. лаборатория треста № 13, где широко развернулись работы по пьезокварцу, сегнетовой соли и синтетическому корунду. В начале Великой Отечественной войны из этой лаборатории возник завод, главным инженером которого работал мой талантливый ученик А. С. Шеин. Работы, поставленные на этом заводе, получили развитие и продолжаются до настоящего времени в целом ряде научно-исследовательских организаций и на заводах. Работы по синтетическому корунду, проводившиеся С. К. Поповым, привели к созданию цеха синте-

тического рубина на Чернореченском химическом заводе и к развитию промышленности часовых камней и нитеводителей.

Еще в бытность мою в Ленинграде в 1927 г. я был командирован Академией наук в Германию для ознакомления с ведущимися там работами по кристаллографии и приобретения аппаратуры для рентгеноструктурного анализа. В Мюнхене я познакомился с Гротом, в Лейпциге с известным в то время минералогом-кристаллографом Ринне, в лаборатории которого мне даже удалось поработать в течение месяца. Ринне предоставил мне возможность ознакомиться со всеми проводившимися в его лаборатории работами, в частности с работами по рентгеноструктурному анализу. После этого я заказал в Берлине всю необходимую для такого анализа аппаратуру. Аппаратура эта была изготовлена, привезена в Ленинград и с моей помощью установлена в специальном помещении, где на ней стал работать Б. К. Бруновский. С помощью этой аппаратуры совместно с английским кристаллографом Джоном Берналом впервые в нашей стране удалось расшифровать структуру минерала катаплеита.

В лаборатории Ринне меня поразил царивший там железный порядок. Все сотрудники и Ринне в том числе приходили на работу ровно в 7 часов утра. Никто не тратил ни минуты времени на ненужное хождение и разговоры. Если кому-нибудь из сотрудников нужна была научная книга, он писал ее заглавие на листочке и клал в соответствующий ящик. На следующий день в 7 часов утра нужная книга уже лежала на столе этого сотрудника. Все необходимые стеклянные и другие мелкие детали для приборов приобретались в находившемся на той же улице магазинчике, который только ими и торговал. Стоили эти детали — гроши. Все стены в лаборатории Ринне были увешаны портретами его учеников, подаренными ему перед отъездом на самостоятельную работу.

К концу моего пребывания в Германии я решил съездить в Норвегию. Страна эта меня давно интересовала, мне хотелось посмотреть природу Норвегии, ее горы, фьорды и главным образом людей. Поразило меня там, что калитки в заборах, ограждавших отдельные владения, никогда не запирались. Любой человек мог пройти через чужой двор или сад на параллельно расположенную улицу. Когда я спросил, почему у них калитки не запираются, мне с удивлением ответили, что заборы поставлены для ограждения садов от животных, а не от людей. Вспоминается мне, как я заблудился, идя по улицам Ушло (так по-норвежски звучит Осло) в советское посольство. Я пытался спросить дорогу у полицейского, но тот меня не понял, как я ему ни втолковывал на немецком французском и английском языках. Только когда я сказал слово «рус», он улыбнулся, потрепал меня по спине, взял под руку и проводил до советского посольства. Удивила меня и норвежская сельская почта. На перекрестках дорог были поставлены высокие скамейки, на которых лежали какие-то свертки и ящики. Оказа-

лось, что это — посылки, адресованные в любой район Норвегии. Все проезжающие машины и повозки останавливаются на перекрестках, забирают посылки и довозят их до пункта, который им по пути.

Как я уже говорил, в 1934 г. Академия наук переехала в Москву. В Москву же была переведена и большая часть коллектива сотрудников Кварцевой лаборатории: Г. Г. Леммлейн, Г. Б. Бокий, Б. К. Бруновский, Е. В. Цинзерлинг, Б. В. Витовский, М. П. Шаскольская, К. А. Драгунов. В Москве в Ломоносовском институте, созданном и возглавлявшемся А. Е. Ферсманом, был организован специальный Кристаллографический сектор, руководителем которого был назначен я, в ту пору уже член-корреспондент Академии наук. В этот сектор влилась и Кварцевая лаборатория. Кроме Кристаллографического сектора в Ломоносовский институт входили еще два сектора: Минералогический и Петрографический.

Получив в Старомонетном переулке хорошее просторное помещение, штат научно-вспомогательных сотрудников и организовав собственную мастерскую, Кристаллографический сектор быстро окреп. В нем стали развиваться следующие самостоятельные направления: учение о симметрии (Шубников), изучение морфологии кристаллов (Леммлейн), рентгеноструктурный анализ кристаллов (Бруновский), рост кристаллов (Шубников, Витовский, Добржанский), механическое двойникование кварца (Цинзерлинг), структура реальных кристаллов (Шаскольская), выращивание кристаллов сахарозы и сегнетовой соли, позднее синтез кварца (Шефталь), изготовление пьезокварцевых изделий (Драгунов), практическая кристаллооптика (Гильварг), выращивание кристаллов корунда (Попов).

В Москве в работе Кристаллографического сектора принял участие З. Г. Пинскер, работавший одновременно в Биогеохимической лаборатории АН СССР. З. Г. Пинскер занимался проектированием и конструированием электронографа собственной оригинальной конструкции и впоследствии возглавил новое направление электронографического структурного анализа. Одним из учеников З. Г. Пинскера, успешно работающим в той же области, является нынешний директор Института кристаллографии Б. К. Вайнштейн. В 1937 г. в Кристаллографический сектор был приглашен Н. В. Белов, занимавшийся еще в Ленинграде у А. Е. Ферсмана изучением структуры кристаллов по литературным данным без применения рентгеновской аппаратуры. Н. В. Белов быстро освоил технику рентгеноструктурного анализа кристаллов и вскоре самостоятельно и очень успешно с помощью многочисленных учеников расшифровал структуру кристаллов различных силикатов. Первыми его учениками были В. П. Бутузов, Л. М. Беляев и Е. Н. Белова.

СИММЕТРИЯ

Фундаментальный вклад академика А. В. Шубникова в развитие теории симметрии кристаллов и анизотропных сред хорошо известен. Идея симметрии была стержневой, определявшей на протяжении более полувека все его научное творчество. Мы назовем здесь лишь некоторые главные идеи и результаты.

1. Идея относительности симметрии, ее структурной обусловленности в зависимости от выделенного структурного уровня и отношений эквивалентности, связывающих элементы структуры в единое целое. Из этой идеи, выдвинутой А. В. Шубниковым в книге «Симметрия» в 1940 г., выросло впоследствии учение о группах цветной симметрии, интерпретируемых в виде групп антисимметрии, подобия, гомологических преобразований и т. д.

2. Идея о приближенном характере определения симметрии реальных объектов. Эта идея, неразрывно связанная с относительностью симметрии, приводила с неизбежностью к необходимости и допустимости моделирования симметрии. Сам А. В. Шубников дал превосходные образцы геометрического моделирования симметрии физических объектов, решения задач о правильных разбиениях плоскости, определения групп движений по их геометрическим инвариантам.

3. Идея материальных фигур и материальных пространств, наделенных негеометрическими свойствами. Эта абстрактная математическая конструкция, реализованная А. В. Шубниковым в двух вариантах на примере групп антисимметрии значных (плюс — минус) пространств или их черно-белых аналогов для двухцветных пространств эквивалентна аппарату теории представлений групп, связывающему симметрию с физикой.

4. Идея универсальной диалектической связи категорий симметрии и дисимметрии. А. В. Шубников показал, что принцип суперпозиции групп симметрии (принцип дисимметрии П. Кюри), справедливый для гетерогенных систем, должен быть дополнен принципом симметризации в гомогенных системах. Обобщенный принцип симметрии — диссимметрии справедлив не только для физических систем, но и для любых объектов, наделенных регулярной (в том или ином отношении) структурой.

5. Будучи сторонником единства теории и практики, принципа, которому он следовал всю жизнь, А. В. Шубников воплотил свои идеи в конкретные разработки, стимулируя популярными выступлениями их практическое использование. Оригинальны шубниковские выводы точечных и пространственных групп антисимметрии соответственно для трехмерных конечных фигур и одномерных лент и стержней, групп симметрии подобия, предельных групп симметрии для одномерных, двумерных и трехмерных континуумов и семиконтинуумов и введенные им понятия о симметрии материальных тензоров с разработкой процедуры ее учета в кристаллофизике и т. д.

Эти замечательные результаты А. В. Шубникова отражены в книгах «Симметрия» (1940), «Основы кристаллографии» (1940), «Атлас кристаллографических групп симметрии» (1946), «Симметрия и антисимметрия конечных фигур» (1951), «Проблема диссимметрии материальных объектов» (1961), «У истоков кристаллографии» (1972), в 70 журнальных статьях (см. библиографический указатель трудов А. В. Шубникова) и во втором издании книги «Симметрия» (1972), которое подытоживает и развивает его идеи.

Объем настоящего сборника не позволяет представить богатое научное наследие А. В. Шубникова в полном объеме. Нам пришлось отказаться от мысли привести здесь извлечения из книг А. В. Шубникова. Из журнальных публикаций отобрано 11 работ, представляющих со многих точек зрения значительный интерес. Приведем их краткую характеристику, указывая в скобках номер работы по библиографическому указателю:

[15] «К вопросу о строении кристаллов» (1916). В этой работе А. В. Шубников решает в духе Е. С. Федорова задачу о правильных разбиениях плоскости метрически эквивалентными фигурами (планигонами) и устанавливает связь этих разбиений с числом (17) двумерных пространственных групп.

[25] «К вопросу о заполнении пространства многогранниками без промежутков» (1924) — заключительная статья федоровского цикла — ставит вопрос о возможности однозначного задания пространственной группы симметрии образцовой фигурой (полное решение вопроса для 230 пространственных групп было получено спустя 30 лет Н. М. Башкировым).

[124] «Правило Ампера и симметрия мира» (1939) открывает цикл философских размышлений А. В. Шубникова о симметрии пространства — времени и о предельных группах симметрии однородных электрических и магнитных полей.

[148] «Новое в учении о симметрии и его применении» (1945); здесь впервые сообщается о выводе 58 точечных групп антисимметрии и указывается на примерах области их возможного применения. Окончательную отделку это открытие получило в книге [173].

[160] «О числе и составе абстрактных групп, отвечающих 32 кристаллографическим классам» (1948). В этой работе, написан-

ной в соавторстве с Н. В. Беловым и Е. Н. Беловой, устанавливается изоморфизм 32 кристаллографических и 18 абстрактных групп. Абстрактная группа выделяет общую групповую структуру для всего семейства изоморфных групп — факт, имеющий фундаментальное значение для физических приложений теоретико-группового метода.

[162] «О симметрии векторов и тензоров» (1949), где А. В. Шубников интерпретирует свойства симметрии однородных векторных и тензорных полей образцовыми фигурами, вводит понятие о симметрии тензора и разрабатывает матричный алгоритм, позволяющий установить симметрию тензора по заданному инварианту (матрице тензора) и, наоборот, определить число независимых компонент тензора по его группе симметрии. [219] «О работах Пьера Кюри в области симметрии» (1956). Здесь А. В. Шубников анализирует основные понятия, входящие в совокупность предложений П. Кюри, вводит представление о «достаточной причине» и показывает, что все предложения П. Кюри являются следствиями им же установленного «принципа суперпозиции групп симметрии», справедливого для гетерогенных систем. О распространении принципа на гомогенные системы, его обобщении и системно-статистической трактовке см. во втором издании книги «Симметрия» (1972) и в сборнике, посвященном А. В. Шубникову (1975).

[258] «Полная систематика точечных черно-белых групп» (1961). В этой и других работах данного цикла делается попытка охватить в рамках единой схемы все многообразие групп изометрических преобразований, включая точечные и пространственные группы и изоморфные им группы антисимметрии. В основу классификации групп положено выделение инвариантных (особенных) элементов — точек, осей и плоскостей. Включение в эту схему групп многоцветной симметрии приведено во втором издании книги «Симметрия» (1972).

[247] «Симметрия подобия» (1960). Впервые определяются преобразования симметрии подобия, устанавливаются законы умножения преобразований, доказывается, что множества таких преобразований образуют группы симметрии подобия, сохраняющие инвариантными аффинные свойства фигур. Дальнейшее развитие и распространение на случай пространственных групп теория симметрии подобия нашла в работах А. М. Заморзаева (1963).

[333] «Антисимметрия» (1966). В работе содержатся результаты, полученные в рамках систематики групп, и формулируются задачи, стоящие не только перед теорией обобщенной симметрии, но и перед кристаллографией вообще.

[336] «Симметрия конечных фигур в современной интерпретации» (1967) — последняя прижизненная публикация А. В. Шубникова — содержит развитие его глубоких идей об относительном характере симметрии, ее структурной обусловленности, возможных обобщений понятия симметрии и о месте, которое занимает метод симметрии в схеме науки. См. по этому поводу также второе издание книги «Симметрия» (1972).

К ВОПРОСУ О СТРОЕНИИ КРИСТАЛЛОВ[1]

(Представлено на заседании Отделения физико-математических наук 20 января 1916 г.)

Введение

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы ближе подойти к разрешению задачи о строении кристаллов. Для достижения этой цели мне кажется необходимым разрешить одну чисто геометрическую задачу — задачу заполнения плоскости и пространства особыми многоугольниками и многогранниками, которые я назову соответственно *планатомами* и *стереоатомами*. В настоящей статье я остановлюсь только на планатомах. Так как между планатомами, с одной стороны, и типическими изогонами Е. С. Федорова[2] — с другой, есть большая аналогия, то мне сначала придется остановиться на этих последних.

Вывод всех возможных изогонов и изоэдров

Теорема I Эйлера. Если обозначим число граней многогранника через F, число вершин через E и число ребер через K, то

$$E + F = K + 2. \tag{1}$$

Доказательство. В самом деле, при склеивании многогранника из его граней мы замечаем, что при прибавлении новой грани ребер прибавляется на единицу больше, чем вершин; последняя грань (крышка) не изменяет ни числа ребер, ни числа вершин. Таким образом, только $F - 2$ прибавлений граней изменяют число ребер в сравнении с числом вершин. Число ребер возрастет при этом в сравнении с числом вершин на $F - 2$, т. е.

$$K = E + (F - 2).$$

---

[1] Изв. АН, сер. 6, 1916, т. 10, № 9, с. 755—779.

[2] По Е. С. Федорову, изогоном называется многогранник, в каждой вершине которого сходится по одному и тому же числу ребер или граней. Изоэдром называется многогранник, у которого все грани одного и того наименования. Типическим изогоном называется многогранник с равными или симметричными гоноэдрами (многогранными углами). Подтипический изоэдр получается из типического изогона так. Опишем сферу около типического изогона, проведем касательные к сфере плоскости через вершины; эти плоскости и образуют подтипический изоэдр. В подтипическом изоэдре все грани имеют не только одно наименование, но они все или равны между собой, или симметричны, т. е. конгруентно или зеркально равны. — (*Прим. ред*).

Теорема II. Для изогонов $K = ME/2$, где M есть число ребер, сходящихся в каждой вершине изогона.

Доказательство. Если в каждой вершине сходится по M ребер, то в E вершинах, казалось бы, сойдутся ME ребер. Произведение ME, однако, следует разделить на 2, потому что каждое ребро соединяет 2 вершины и при подсчете повторяется 2 раза. Итак,

$$K = ME/2. \tag{2}$$

Теорема III. $M < 6$.

Доказательство. Обозначим сумму всех плоских углов изогона через ΣP. Если бы все грани его были треугольниками, то ΣP равнялась бы $2dF$, но среди граней могут быть и четырехугольники, и пятиугольники, и т. д., поэтому

$$\Sigma P \geqslant 2dF.$$

Разделив ΣP на E, получим сумму плоских углов при каждой вершине изогона, которая меньше $4d$, т. е. $4d > \Sigma P/E \geqslant 2dF/E$, откуда

$$2 > F/E. \tag{3}$$

Подставим в формулу Эйлера из выражения (2) значение для K; получаем $M = 2(1 + F/E - 2/E)$.

Принимая во внимание неравенство (3), это последнее равенство преобразуем в $M < 2(1 + 2 - 2/E)$. Отсюда

$$M < 6. \tag{4}$$

Так как в каждой вершине многогранника не может сходиться меньше трех ребер, то единственно возможными для M значениями являются 3, 4 и 5. Из этой теоремы следует также, что в изогоне не может быть более пяти различных по наименованию граней. Теперь выведем все изогоны, последовательно полагая $M = 3, 4, 5$.

$M = 3$. В этом случае в каждой вершине изогона сходятся три грани. Пусть наименования этих граней будут a, b, c, причем не исключается возможность их равенства. Сколько граней наименования a будет иметь многогранник, если число вершин его E? Если при каждой вершине мы имеем по одной грани наименования a, то всего их будет E/a; E приходится делить на a, потому что при таком подсчете каждая грань повторится a раз. Всех граней многогранник будет иметь

$$F = E/a + E/b + E/c = E\,(1/a + 1/b + 1/c).$$

Формула Эйлера принимает теперь вид

$$E\,(1/a + 1/b + 1/c) = K + 2 - E.$$

Принимая во внимание равенство (2), имеем

$$E(1/a + 1/b + 1/c) = 3E/2 + 2 - E$$

или

$$E = \frac{2}{1/a + 1/b + 1/c - 1/2}. \qquad (5)$$

Это уравнение удовлетворяется только в следующих 10 случаях (табл. 1).

Таблица 1

№	a	b	c	E	Название изогона по Федорову
1	3	3	3	4	Сфеноид
2	n	4	4	$2-n$	Трапецоэдрический призмоид
3	3	6	6	12	Притупленный тетраэдр
4	3	8	8	24	» куб
5	3	10	10	60	» додекаэдр
6	4	6	6	24	» октаэдр
7	4	6	8	48	» кубооктаэдр
8	4	6	10	120	» додекаэдроикосаэдр
9	5	5	5	20	Додекаэдр
10	5	6	6	60	Притупленный икосаэдр

№ 2, где a может принимать любое значение, обнимает собой бесчисленное множество многогранников.

$M = 4$. В этом случае формула Эйлера принимает вид

$$E = \frac{2}{1/a + 1/b + 1/c + 1/d - 1}. \qquad (6)$$

и удовлетворяется лишь в пяти случаях (табл. 2).

$M = 5$. Формула Эйлера для этого случая принимает вид

$$E = \frac{2}{1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e - 3/2} \qquad (7)$$

и удовлетворяется только в трех случаях (табл. 3).

Из изложенного выше следует, что всякий изогон должен удовлетворять одному из трех видов формулы Эйлера. Обратного мы утверждать не можем, поэтому по каждому решению уравнения Эйлера мы в действительности должны построить изогон, чтобы утверждать, что он существует. Это построение мы можем сделать совершенно независимо от формулы Эйлера, роль которой при этом сводится к тому, что пользуясь ее решениями, мы можем быть уве-

Таблица 2

№	a	b	c	d	E	Название изогона по Федорову
11	n	3	3	3	$2-n$	Призмоид
12	3	3	4	4	12	Кубооктаэдр
13	3	3	5	5	30	Додекаэдроикосаэдр
14	3	4	4	4	24	Прямой (косой) тетрагоноэдрический притупленный кубооктаэдр
15	3	4	4	5	60	Тетрагоноэдрический притупленный додекаэдроикосаэдр

Таблица 3

№	a	b	c	d	e	E	Название изогона по Федорову
16	3	3	3	3	3	12	Призмоэдр тригональный
17	3	3	3	3	4	24	» тетрагональный
18	3	3	3	3	5	60	» пентагональный

ренными, что построенными нами изогонами исчерпываются действительно все случаи изогонов, так как число последних не должно превышать числа решений. Нас интересуют лишь типические изогоны. Построение их сводится к тому, что мы берем последовательно все случаи симметрии конечных фигур и с каждым из них проделываем следующую операцию. Возьмем точку и поместим ее в произвольном месте по отношению к элементам симметрии; эта точка повторится элементами симметрии, и в результате получится совокупность точек, коими вполне определяется типический изогон, вершинами которого эти точки являются. Такой типический изогон мы будем называть общим для данного класса симметрии в отличие от частных, которые получим, если исходную точку будем помещать на осях или плоскостях симметрии. Из общих изогонов мы получим и общие изоэдры, а из частных частные. По терминологии, принятой в кристаллографии, общие и частные изоэдры суть не что иное, как общие и частные простые формы. На рис. 1 изображен как пример типического изогона притупленный кубооктаэдр (№ 7, табл. 1), из которого может быть получен известный в кристаллографии гексоктаэдр или сорокавосьмигранник. Для более подробного ознакомления с изогонами и изоэдрами отсылаю читателя к книге Федорова [1], нам

же достаточно одного притупленного кубооктаэдра, чтобы на нем показать свойства всех вообще типических изогонов. Из построения типических изогонов мы убеждаемся, что около каждого из них можно описать сферу, потому что точка, повторяясь в элементах симметрии, остается все время на одном и том же расстоянии от центра симметрии (в федоровском смысле); это расстояние и есть радиус описанной сферы. Из построения подтипических изоэдров мы убеждаемся также, что в каждый из них можно вписать шар.

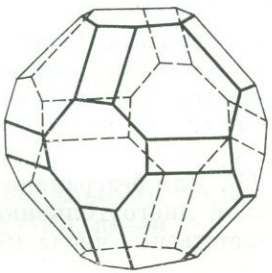


Рис. 1

Около каждой грани типического изогона можно описать круг; этот круг есть сечение описанного шара плоскостью грани.

Посмотрим теперь, сколько граней наименования p имеет изогон. Если при каждой вершине у него таких граней пересекается n_p, то при E вершинах мы встретим их n_pE/p.

Произведение n_pE нужно делить на p потому, что каждая грань наименования p имеет и p вершин, а потому подсчитывается p раз. Если мы пожелаем знать не абсолютные значения чисел граней данного наименования, а отношение этих чисел для граней различного наименования, то придем к отношению

$$(En_p/p) : (Em_q/q) : \ldots = (n_p/p) : (m_q/q) : \ldots, \qquad (8)$$

т. е. число граней данного наименования в изогоне пропорционально числу этих граней при каждой вершине и обратно пропорционально наименованию грани. Для притупленного кубооктаэдра, изображенного на рис. 1, отношение числа четырехугольников к числу шестиугольников и к числу восьмиугольников будет равно (1/4) : (1/6) : (1/8) = 6 : 4 : 3.

В числителях дробей стоят здесь единицы потому, что при каждой вершине притупленного кубооктаэдра мы имеем по одному четырехугольнику, шестиугольнику и восьмиугольнику. На этом мы и закончим рассмотрение изогонов и изоэдров и перейдем к главной задаче.

Вывод всех возможных случаев заполнения плоскости планатомами

Предыдущий вывод типических изогонов сводится к заполнению всеми способами поверхности шара сферическими многоугольниками при условии, чтобы в вершинах сходились равные или симметричные комплексы дуг. Поставим себе теперь ту же задачу, но не для поверхности шара, а для плоскости. Будем называть пучком прямых совокупность отрезков прямых, сходящихся в одной точке. Пучки будут равны или симметричны, если их можно совместить наложением или отражением. Поставленная задача формулируется теперь так. Найти все способы заполнения плоскости многоугольниками без промежутков так, чтобы в каждой вершине любого многоугольника сходились равные или симметричные пучки прямых. Эти многоугольники мы будем называть *планатомами*.

Основная теорема IV. Для безгранично большой части плоскости, сплошь заполненной многоугольниками $E + F = K$, где F, E и K означают соответственно числа многоугольников, их вершин и ребер.

Доказательство. Возьмем какой-нибудь многоугольник и будем пристраивать к нему остальные $F - 1$ многоугольников. Каждый новый многоугольник прибавляет сторон на единицу больше, чем вершин. Следовательно, для плоскости, заполненной многоугольниками, мы имеем равенство $K = E + (F - 1)$ или

$$(E + F)/K = 1 + 1/K.$$

При произвольном увеличении части плоскости член $1/K$ можно сделать сколь угодно малым; левая часть равенства при этом не стремится к нулю, так как вместе со знаменателем возрастает и числитель. Пренебрегая дробью $1/K$, имеем

$$E + F = K. \tag{9}$$

Теорема V. Для плоскости, заполненной планатомами, $M \leqslant 6$, где M — число ребер пучка.

Доказательство. Очевидно, чем меньше углы многоугольников, тем большее число их, а следовательно, и ребер, может сходиться в одной вершине. Из всех многоугольников треугольники имеют наименьшие углы, поэтому в случае заполнения плоскости одними треугольниками M будет наибольшим. Так как сумма углов пучка равна $4d$, а среднее значение угла треугольника равно $2d/3$, то $M = 4d : 2d/3 = 6$. В общем же случае

$$M \leqslant 6. \tag{10}$$

Мы имеем право брать здесь среднее значение угла потому, что все пучки по условию равны между собой.

Теорема VI. $K = ME/2$. (11)

Доказательство. Если в каждой вершине сходятся M ребер, то в E вершинах сойдутся $ME/2$ ребер. Произведение ME нужно разделить на 2 потому, что каждое ребро соединяет 2 вершины и при подсчете повторяется 2 раза.

Пользуясь предыдущими теоремами, преобразуем формулу $E + F = K$ для различных значений M. Мы сказали, что в каждой вершине сходится M ребер. Заметим, что столько же сходится и многоугольников. Пусть наименования их будут: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, причем не исключается возможность равенства этих величин между собой. Если при каждой вершине есть один многоугольник наименования a_1, то всего таких многоугольников при E вершинах будет E/a_1. Здесь E приходится делить на a_1 потому, что каждый многоугольник подсчитывается столько раз, сколько у него вершин. Всех многоугольников при E вершинах будет, следовательно,

$$F = E/a_1 + E/a_2 + E/a_3 + \ldots + E/a_m. \tag{12}$$

Подставляя в основную формулу (9) полученные выше значения для F и K (см. (11) и (12)), имеем

$$E + E/a_1 + E/a_2 + \ldots + E/a_m = ME/2,$$

или

$$M = 2\,(1 + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_m). \tag{13}$$

Полагая $M = 3, 4, 5, 6$, получим следующие частные случаи этого уравнения и его решений.

$M = 3$. В этом случае формула принимает вид

$$1/2 = 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 \tag{14}$$

и удовлетворяется в четырех случаях (табл. 4).

$M = 4$. Формула принимает вид

$$1 = 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + 1/a_4 \tag{15}$$

и удовлетворяется четырьмя решениями (табл. 5).

$M = 5$. Формула принимает вид

$$3/2 = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_5 \tag{16}$$

и удовлетворяется двумя решениями (табл. 6).

$M = 6$. Формула принимает вид

$$2 = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_6 \tag{17}$$

и удовлетворяется одним решением (табл. 7).

Так же как и в случае изогонов, мы можем сказать, что каждый случай заполнения плоскости планатомами должен удовлетворять основному уравнению, но не обратно. Забегая вперед, укажем, что номеру шестому (табл. 5) как раз не имеется соответствующего случая заполнения плоскости планатомами.

Построение систем планатомов. Для построения систем планатомов воспользуемся тем же способом, как и для построения изогонов. Федоровым установлено 17 случаев симметрии бесконеч-

Таблица 4

№	a_1	a_2	a_3
1	3	12	12
2	4	6	12
3	4	8	8
4	6	6	6

Таблица 5

№	a_1	a_2	a_3	a_4
5	3	3	6	6
6	3	3	4	12
7	3	4	4	6
8	4	4	4	4

Таблица 6

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
9	3	3	3	3	6
10	3	3	3	4	4

Таблица 7

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
11	3	3	3	3	3	3

ных плоских фигур. Кроме элементов симметрии конечных фигур бесконечные плоские фигуры допускают существование плоскости скольжения и элемента поступательного движения совмещения [1]. На рис. 2 изображены по Федорову все 17 случаев (классов) симметрии плоских бесконечных фигур, причем плоскости скольжения изображены пунктиром, а элемент поступания, присутствующий во всех случаях, не изображен совсем [2]. Буквы M, R, T, H означают соответственно системы: моноклинную, ромбическую, тетрагональную и гексагональную; цифры обозначают номера класса системы симметрии.

Для построения системы планатомов получим сначала правильную систему точек [2]. Для этого наносим на плоскости согласно одному из 17 случаев все элементы симметрии. Берем затем точку в произвольном положении и повторяем ее элементами симметрии. Для того чтобы получить из данной системы точек систему план-

[1] Элемент поступательного движения совмещения состоит в том, что бесконечная фигура приходит в совмещение сама с собой всякий раз, как мы передвинем ее в некотором направлении на некоторое, всегда одно и то же расстояние. Так, плоскость, разбитая на квадратики, приходит в совмещение сама с собой всякий раз, когда мы передвигаем ее в направлении стороны квадрата на расстояние, равное стороне квадрата. Элемент плоскости скольжения состоит в единовременном действии поступательного движения и отражения и в этом смысле напоминает ось сложной симметрии, причем вращение заменено поступанием на определенное расстояние.

[2] Правильные системы точек впервые выведены были Зонке [3]. Им же начерчены были многие из приведенных ниже фигур, которыми он пользовался только лишь как средством изображать правильные системы точек без какого-либо отношения к делению плоскости на части. Центр тяжести лежит у него в точках, а не в многоугольниках.

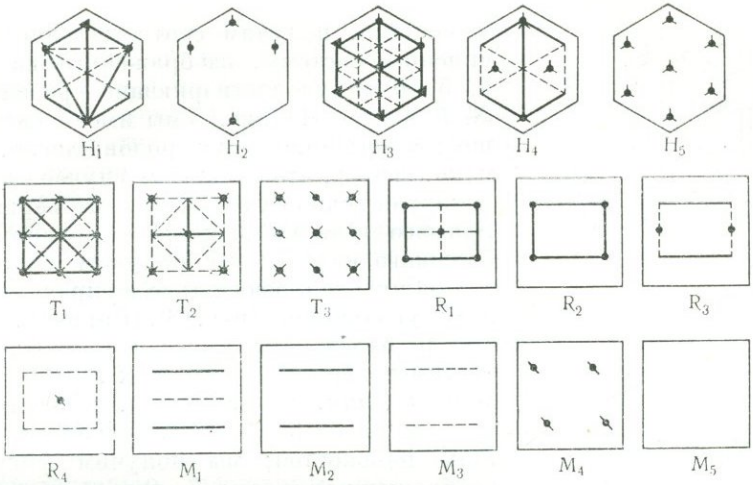


Рис. 2 (Ср. *А. В. Шубников, В. А. Копцик.* Симметрия в науке и искусстве, 2-е изд. М., «Наука», 1972, с. 130, рис. 149. (*Прим. ред.*)].

атомов, нужно во всех случаях поступать так: 1) соединить каждую точку с ближайшей к ней точкой отрезком прямой линии; 2) продолжать этот процесс пока можно, избегая пересечения линий в каких-нибудь иных точках, кроме данных. Если налицо имеется несколько равных кратчайших расстояний, то проводим их все, если они не пересекаются, и не проводим ни одного, если они пересекаются.

Мы поместили исходную точку в случайном положении по отношению к элементам симметрии и получили главную систему точек и планатомов; если же исходная точка будет лежать на каком-либо элементе симметрии, то мы получим подчиненные системы точек и планатомов. Каждой главной системе может быть подчинено несколько систем и, наоборот, каждой подчиненной системе может соответствовать несколько главных. Главные системы, таким образом, совершенно так же относятся к своим подчиненным, как в кристаллографии общие простые формы к частным. Заметим, что симметрия системы точек и планатомов может оказаться выше, чем симметрия исходного класса; это мы можем непосредственно наблюдать на выведенных ниже системах планатомов.

Приступим теперь к построению отдельных случаев систем планатомов, начав с *гексагональной* симметрии.

Класс H_1. Помещая исходную точку внутри треугольника из плоскостей симметрии (рис. 2), получим систему планатомов, изображенную на рис. 3. Легко видеть, что данная система планатомов соответствует решению № 2 основного уравнения и является главной для рассматриваемого класса. Помещая точку последовательно на гипотенузе, большом и малом катете того же тре-

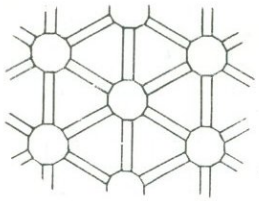


Рис. 3

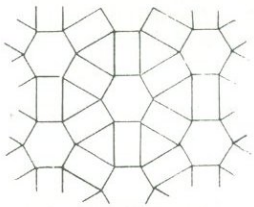


Рис. 4

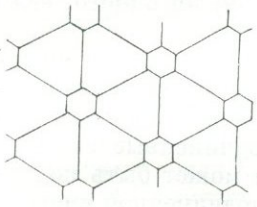


Рис. 5

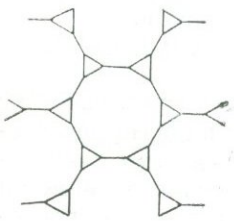


Рис. 6

угольника, получим соответственно подчиненные системы, изображенные на рис. 4, 5, 6 и удовлетворяющие решениям № 7, 4 и 1. На рис. 5 мы имеем систему шестиугольников двух родов; легко, однако, видеть, что в частном случае, когда исходная точка будет лежать от вершины прямого угла на расстоянии, равном $^1/_3$ большого катета, мы получим систему, состоящую исключительно из правильных шестиугольников (рис. 8). Впрочем, этот случай будет нами выведен и иначе. Поместим теперь точку на осях 2-, 3- и 6-го порядка, или, что все равно, в вершинах углов в 90, 60 и 30° все того же треугольника плоскостей; мы получим фигуры, изображенные на рис. 7—9 и соответствующие № 5, 4 и 11 решений основного уравнения. Мы помещали исходную точку последовательно на всех плоскостях и осях симметрии, но оставили без внимания плоскости скольжения. Нетрудно видеть, что, помещая исходную точку на плоскости симметрии, мы получаем вдвое меньше точек, чем в главной системе; точно так же, если исходная точка лежит на оси, то общее число точек будет в 2, 3, 4, 6 раз меньше числа точек главной системы; если же исходная точка лежит на плоскости скольжения, то не изменяется ни общее число точек главной системы, ни наименование планатомов. Таким образом, вывод всех возможных планатомов класса H_1 нужно считать оконченным.

Класс H_2. Главная система планатомов этого класса изображена на рис. 10 и соответствует решению № 9 основного уравнения. Интересно отметить, что рассматриваемая фигура отличается от рис. 3 главным образом тем, что здесь четырехугольники разделены диагоналями на пары треугольников. Того же самого мы не можем сделать с прямоугольниками рис. 4, потому что обе диагонали их заявляют равные права на свое существование и, будучи проведены, пересекаются в точке, которая не связана симметрией с исходной. Рис. 4 является частным случаем

рис. 10 и не противоречит симметрии рассматриваемого класса. Зеркальное изображение рассмотренной главной системы является тоже главной системой этого класса и относится к первой системе, как правая простая форма — к левой. Правые и левые системы мы будем встречать во всех классах, где кроме элемента поступания есть только оси симметрии. Мы можем предвидеть существование трех подчиненных систем планатомов сообразно с тремя особыми положениями исходной точки на осях 6-, 3-, 2-го порядка. Все эти три случая уже были рассмотрены выше и изображены соответственно на рис. 9, 8 и 7. Из этого примера мы убеждаемся, что, действительно, различным классам симметрии могут удовлетворять одни и те же системы планатомов.

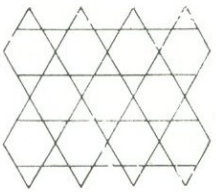


Рис. 7

Класс H_3. Главная система планатомов этого класса симметрии изображена на рис. 11 и соответствует решению № 4 основного уравнения. Частными случаями рис. 11 являются рис. 7 и 8. Подчиненные системы получим, помещая исходную точку на плоскости симметрии и на оси 3-го порядка. Тот и другой случай мы имеем на рис. 12 и 9. При этом рис. 12 соответствует решению № 5 основного уравнения, а его частной формой является рис. 7.

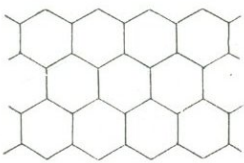


Рис. 8

Класс H_4. Главная система представлена на рис. 13 и соответствует решению № 7 основного уравнения. Частным случаем ее является рис. 4. Помещая исходную точку на плоскости симметрии, на пересечении их и на оси 3-го порядка, получим соответственно рис. 14, 8, 9; из них рис. 14 удовлетворяет решению № 11 основного уравнения. Частным случаем его является рис. 9.

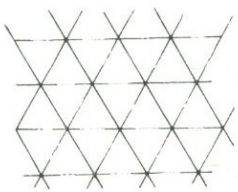


Рис. 9

Класс H_5. Главная система изображена на рис. 15 и удовлетворяет решению № 11 основного уравнения. Существуют правая и левая модификации этой системы. Частным случаем ее является рис. 14 и 9. Единственно возможную подчиненную систему получим, если поместим исходную точку на оси 3-го порядка. Эта



Рис. 10

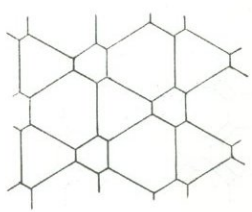


Рис. 11

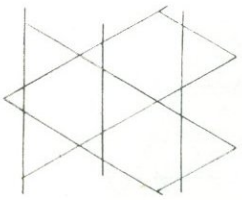


Рис. 12

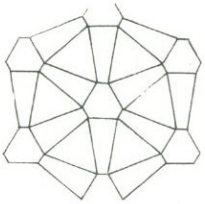


Рис. 13

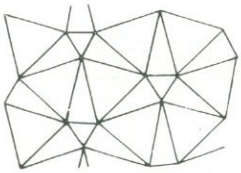


Рис. 14

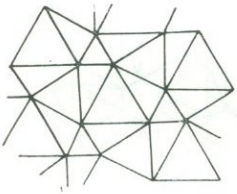


Рис. 15

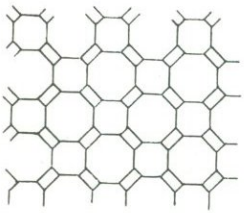


Рис. 16

последняя система планатомов изображена на рис. 9. Перейдем теперь к *тетрагональной симметрии*.

Класс T_1. Главная система изображена на рис. 16 и удовлетворяет решению № 3 основного уравнения. Частный случай ее изображен на рис. 18. Подчиненные системы получим, если поместим исходную точку на гипотенузе или катете треугольника из плоскостей симметрии, на оси 4-го или 2-го порядка. Первые два случая, удовлетворяющие решениям № 8 и 3, изображены на рис. 17 и 18. Оба других случая приводят к одной и той же фигуре (рис. 19), отвечающей решению № 8 основного уравнения.

Класс T_2. Главная система изображена на рис. 20. Она удовлетворяет решению № 8, ее частным случаем является рис. 19. Подчиненные системы получим, помещая исходную точку на плоскости симметрии на осях 4-го и 2-го порядка. Первая изображена на рис. 21 и соответствует решению № 10 основного уравнения, две другие нами уже рассмотрены на рис. 19.

Класс T_3. Главная система изображена на рис. 22 и удовлетворяет решению № 10 основного уравнения. Ее частный случай изображен на рис. 17. Эта система так же, как изображенные на рис. 10 и 15, может быть правой и левой. Подчиненные системы, получающиеся на осях 4-го и 2-го порядка, совпадают обе с системой, изображенной на рис. 19. Как в кристаллографии мы различаем геометрически совершенно тождественные призмы или пирамиды по родам в зависимости от того, какое положение занимают они по отношению к элементам симметрии, так точно одну и ту же систему, например изображенную на рис. 19, мы можем разбить на несколько и назвать одну из них системой первого, другую — системой второго рода и т. д. в зависимости от положения исходной точки по отношению к элементам симметрии. Перейдем к *ромбической симметрии*.

Класс R_1. Главная система изображена на рис. 23 и соответствует решению № 4 основного уравнения. Помещая исходную точку на малой стороне четырехугольника из плоскостей, получим систему, изображенную на рис. 24 и удовлетворяющую решению № 8 основного уравнения. Помещая точку на бóльшей стороне четырехугольника, мы получим в зависимости от расстояния ее от точки пересечения плоскостей и отношения сторон четырехугольника или предыдущую систему, или систему, изображенную на рис. 25 и соответствующую решению № 10 основного уравнения. Вглядываясь в оба последних чертежа, мы замечаем, что каждый из них состоит из шестиугольников, но на рис. 24 эти шестиугольники разделены одной диагональю пополам, а на рис. 25 шестиугольники разделены на три части двумя параллельными линиями. Мы можем себе представить такой случай, когда диагональ будет равна каждой из двух параллельных линий. В этом случае согласно нашему способу построения систем планатомов диагональ и параллельные линии заявляют равные права на существование. Таким образом, из одной и той же системы точек мы можем иногда получить две различные системы планатомов. Этому явлению нет аналогии в кристаллографических простых формах. Помещая исходную точку на оси 2-го порядка, находящейся в центре прямоугольника из плоскостей симметрии, получим систему, изображенную на рис. 26 и соответствующую решению № 8 основного уравнения. Если же исходная точка будет находиться на оси 2-го порядка, лежащей в одной из вершин прямоугольника плоскостей, то получится фигура, изображенная на рис. 27, соответствующая решению № 11 основного уравнения. В частных случаях рис. 23 и 24 могут переходить соответственно в рис. 28 и 26. Первый из них соответствует решению № 8 основного уравнения.

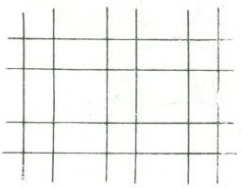


Рис. 17

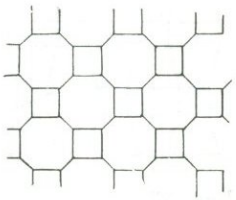


Рис. 18

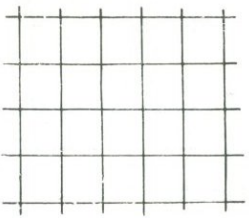


Рис. 19

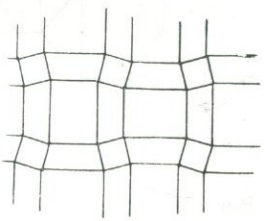


Рис. 20

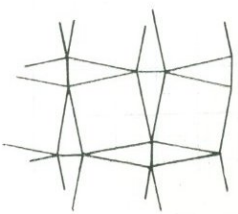


Рис. 21

Класс R_2. Главная система изображена

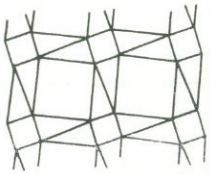


Рис. 22

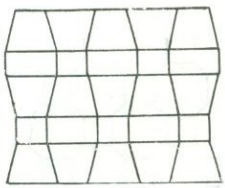


Рис. 23

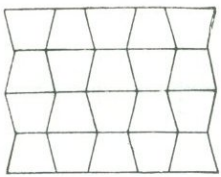


Рис. 24

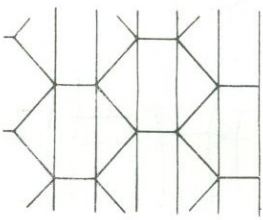


Рис. 25

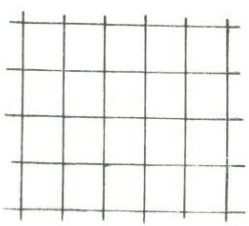


Рис. 26

на рис. 29 и соответствует решению № 8 основного уравнения. Частными случаями ее являются системы, изображенные на рис. 28 и 26. Помещая исходную точку на одной и другой стороне четырехугольника из плоскостей, получим в обоих случаях рис. 28. Если исходная точка будет лежать на оси 2-го порядка, то мы придем к рис. 26. Итак, в этом классе мы имеем три системы разного рода, отвечающие рис. 28, и две системы, отвечающие рис. 26.

Класс R_3. В этом классе одной и той же системе точек соответствуют две главные системы планатомов (рис. 30 и 31), соответствующие решениям № 10 и 8 основного уравнения. Частный случай рис. 30 мы встречали на рис. 25, а частными случаями рис. 31 являются рис. 24, 26, 28. Помещая исходную точку на плоскости симметрии, получим рис. 32 или 33, соответствующие решению № 11 основного уравнения. Частным случаем этих двух систем является система, изображенная на рис. 27. Помещая исходную точку на пересечении плоскостей симметрии и скольжения, придем к рис. 26. К той же фигуре придем, помещая исходную точку на оси 2-го порядка.

Класс R_4. Здесь одной и той же системе точек соответствуют две главные системы планатомов (рис. 34 и 35), соответствующие решению № 11 основного уравнения. Отличие их друг от друга состоит в том, что на рис. 34 два разных треугольника группируются вокруг каждой точки в порядке *а*, *а*, *в*, *в*, *а*, *в*, если один треугольник обозначим буквой *а*, а другой — буквой *в*; на рис. 35 порядок чередования иной: *а*, *а*, *а*, *в*, *в*, *в*. В частном случае рис. 34 принимает вид рис. 24 и именно тогда, когда исходная точка лежит на линии, соединяющей середины противоположных сторон четырехугольника из плоскостей скольжения. Рис. 35 в частном случае принимает вид рис. 33. Помещая точку на оси 2-го порядка, придем к рис. 27. Если же исходная точка

лежит на пересечении плоскостей скольжения, то получается рис. 26.

Класс M_1. Главная система изображена на рис. 24 и 25. Помещая исходную точку на плоскости симметрии, получим рис. 27; если же поместим ее на плоскости скольжения, то получим рис. 26.

Класс M_2. Главной системой служит рис. 28, подчиненной — рис. 26.

Класс M_3. Главная система изображена на рис. 36 и соответствует решению № 11 основного уравнения, подчиненная — на рис. 37 и соответствует тому же номеру решения основного уравнения.

Класс M_4. В этом классе те же системы планатомов, что и в предыдущем.

Класс M_5. Единственной системой является система, изображенная на рис. 37.

Обозначение систем планатомов формулами. Для изогонов мы уже доказали, что число граней данного наименования пропорционально числу их при каждой вершине и обратно пропорционально их наименованию. Докажем то же для систем планатомов. Пусть в каждой точке системы планатомов сходятся: n_3 треугольников, n_4 четырехугольников и т. д. Возьмем очень большую часть плоскости и подсчитаем, сколько в ней имеется многоугольников наименования p. Если при каждой точке мы имеем n_p многоугольников, то при E точках данной части плоскости мы встретим En_p/p многоугольников. Произведение En_p нужно делить на p потому, что каждый многоугольник при таком подсчете повторится p раз. Если нам нужно узнать не абсолютные числа многоугольников, зависящие от переменного числа E, а отношения их при безгранично увеличивающемся числе E, то мы придем к равенству

$$(n_3E/3) : (n_4E/4) : \ldots = (n_3/3) : (n_4/4) : \ldots, \qquad (18)$$

т. е. числа многоугольников относятся друг к другу, как дроби, числителями которых являются числа многоугольников данного наименования при каждой точке

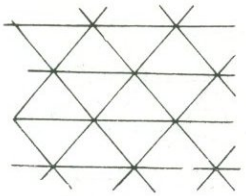


Рис. 27

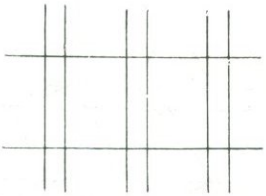


Рис. 28

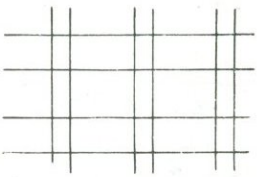


Рис. 29

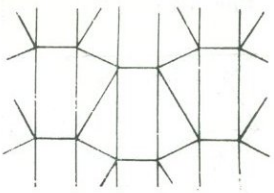


Рис. 30

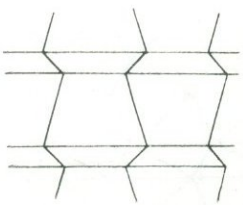


Рис. 31

системы планатомов, знаменателем же — наименования многоугольников. Так как в члены дробей входят только целые числа, то и отношения дробей могут быть приведены к отношениям целых чисел. Каждую систему планатомов мы можем теперь характеризовать определенной формулой, подобной химической формуле. Римскими цифрами будем обозначать наименования входящих в систему многоугольников, а арабскими — целые числа отношения 18.

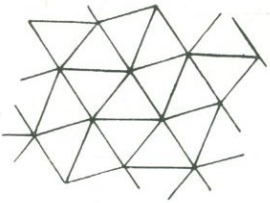


Рис. 32

Так, например, формула $VI_1IV_3III_2$ (см. рис. 4) означает, что в данной системе на один шестиугольник приходятся три четырехугольника и два треугольника. Формула эта получилась так. Мы видим, что в каждой вершине сходятся один шестиугольник, два четырехугольника и один треугольник. Следовательно, $n_6 = 1$, $n_4 = 2$ и $n_3 = 1$, откуда

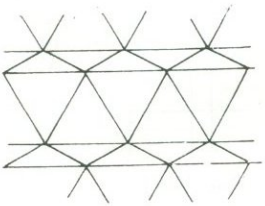


Рис. 33

$$(n_6/6) : (n_4/4) : (n_3/3) = (1/6) : (2/4) : (1/3) = \\ = 1 : 3 : 2.$$

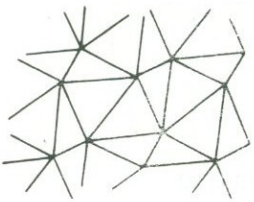


Рис. 34

В нижеприведенной табл. 8 мы даем список всех систем планатомов каждого класса симметрии с обозначением формул и номера решений основного уравнения, соответствующего данной системе.

Мы уже видели, сколь велика аналогия между изогонами и системами планатомов. Эту аналогию можно продолжить. Так, рассматривая каждый случай отдельно, мы наблюдаем, что около каждого планатома можно описать окружность. Интересно отметить, что среди планатомов нет пятиугольников. Подобно тому, как от изогонов можно прийти к

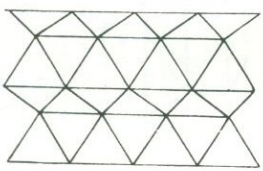


Рис. 35

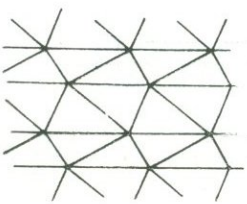


Рис. 36

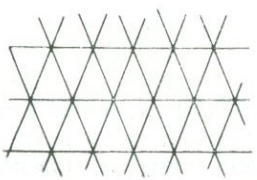


Рис. 37

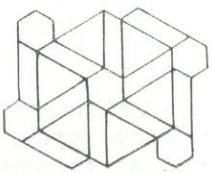


Рис. 38

Таблица 8

Класс	№ решения	Формула	Рис.	Класс	№ решения	Формула	Рис.
H_1	2	$XII_1\,VI_2\,IV_3$	3	H_4	7	$VI_1\,IV_3\,III_2$	13
	7	$VI_1\,IV_3\,III_2$	4		7	$VI_1\,IV_3\,III_2$	4
	4	$VI_2\,VI_1$	5		11	$III_1\,III_2\,III_3$	14
	1	$XII_1\,III_2$	6		4	VI_1	8
	4	VI_1	8		11	III_1	9
	5	$VI_1\,III_2$	7	H_5	11	$III_1\,III_1\,III_1\,III_3$	15
	11	III_1	9		11	$III_1\,III_2\,III_3$	14
H_2	9	$VI_1\,III_2\,III_6$	10		11	III_1	9
	5	$VI_1\,III_2$	7	T_1	3	$VIII_1\,VIII_1\,IV_2$	16
	4	VI_1	8		8	$IV_2\,IV_1\,IV_1$	17
	11	III_1	9		3	$VIII_1\,IV_1$	18
	7	$VI_1\,IV_3\,III_2$	4		8	IV_1	19
H_3	4	$VI_1\,VI_1\,VI_1$	11	T_2	8	$IV_2\,IV_1\,IV_1$	20
	5	$VI_1\,III_2$	7		8	IV_1	19
	4	VI_1	8		10	$IV_1\,III_2$	21
	11	III_1	9	T_3	10	$IV_1\,IV_1\,IV_4$	22
	5	$VI_1\,III_2$	7		8	$IV_2\,IV_1\,IV_1$	17
	5	$VI_1\,III_1\,III_1$	12	T_3	8	IV_1	19
R_1	4	$IV_1\,IV_1\,IV_2$	23	R_3	11	III_1	27
	8	IV_1	26	R_4	11	$III_1\,III_1$	34
	8	$IV_1\,IV_1$	28		11	$III_1\,III_1$	35
	8	IV_1	24		8	IV_1	24
	10	$IV_1\,III_2$	25		11	$III_1\,III_1$	33
	11	III_1	27		11	III_1	27
R_2	8	$IV_1\,IV_1\,IV_1\,IV_1$	29	M_1	8	IV_1	24
	8	$IV_1\,IV_1$	28		10	$IV_1\,III_2$	25
	8	IV_1	26		11	III_1	27
R_3	10	$IV_1\,III_2$	30		8	IV_1	26
	8	$IV_1\,IV_1$	31	M_2	8	$IV_1\,IV_1$	28
	10	$IV_1\,III_2$	25		8	IV_1	26
	8	IV_1	24	M_3	11	$III_1\,III_1$	36
	8	IV_1	26		11	III_1	37
	8	$IV_1\,IV_1$	28	M_4	11	$III_1\,III_1$	36
	11	III_1	32		11	III_1	37
	11	$III_1\,III_1$	33	M_5	11	III_1	37

изоэдрам, так точно и от системы планатомов легко перейти к системе планигонов Федорова. Для этого делим стороны планатомов пополам и из середин проводим перпендикуляры. Точки пересечения перпендикуляров (центры описанных кругов) будут вершинами планатомов.

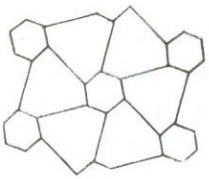


Рис. 39

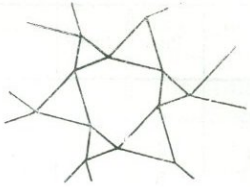


Рис. 40

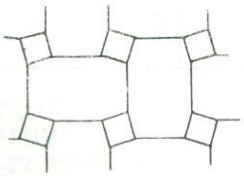


Рис. 41

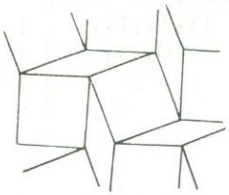


Рис. 42

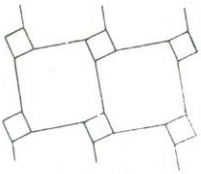


Рис. 43

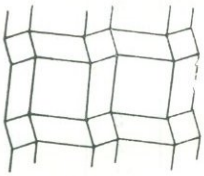


Рис. 44

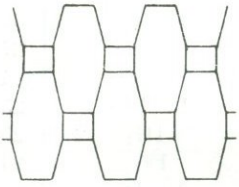


Рис. 45



Рис. 46

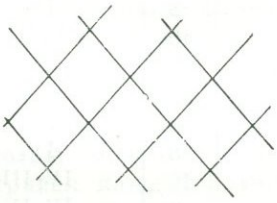


Рис. 47

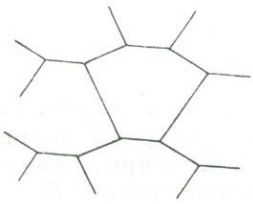


Рис. 48

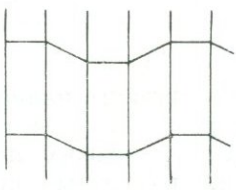


Рис. 49

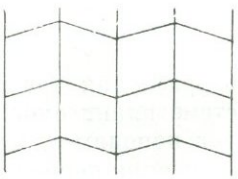


Рис. 50

Вывод неполных систем планатомов

При построении систем планатомов мы соединяли ближайшие точки до тех пор, пока можно, и тогда плоскость оказывалась разделенной на выпуклые многоугольники — планатомы. Бывают, однако, случаи, когда, не доведя этот процесс до конца, мы уже получаем плоскость, разделенную на выпуклые многоугольники. Такую систему выпуклых многоугольников мы будем называть неполной системой планатомов. Неполные системы легко получить из полных, если выкинуть у них по одной или несколько линий из каждого пучка. Неполные системы отличаются от полных только тем, что для них необязательно, чтобы около каждого многоугольника можно было описать окружность. Каждая неполная система удовлетворяет одному из решений основного уравнения и характеризуется формулой.

Класс H_1. В этом классе нет систем, которые мы могли бы превратить в неполные. Вообще, чем выше симметрия, тем меньше мы найдем неполных систем.

Класс H_2. Из рис. 10 получаем две неполных системы планатомов, изображенные на рис. 38 и 39 и удовлетворяющие соответственно № 7 и 4 основного уравнения.

Класс H_3. В этом классе нет неполных систем.

Класс H_4. В этом классе нет неполных систем.

Класс H_5. Из рис. 15 получаем рис. 40, удовлетворяющий решению № 5 основного уравнения.

Класс T_1. В этом классе нет неполных систем.

Класс T_2. Рис. 20 и 21 дают соответственно рис. 41 и 42, удовлетворяющие решениям № 3 и 8 основного уравнения.

Класс T_3. Из рис. 22 получаем рис. 43 и 44, удовлетворяющие решениям № 3 и 8 основного уравнения.

Класс R_1. Рис. 23 и 24 дают соответственно рис. 45 и 46, удовлетворяющие ре-



Рис. 51

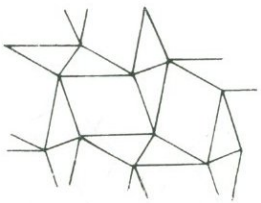


Рис. 52

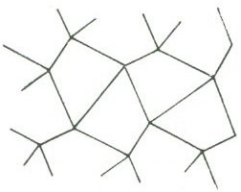


Рис. 53

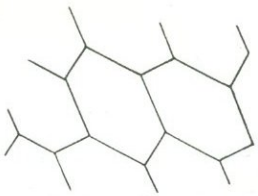


Рис. 54

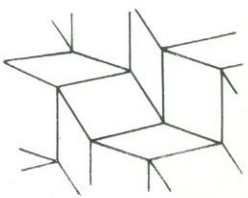


Рис. 55

шениям № 3 и 4 основного уравнения. Рис. 25 и 27 оба дают одну и ту же неполную систему, изображенную на рис. 47 и удовлетворяющую решению № 8 основного уравнения.

Класс R_2. В этом классе нет неполных систем.

Класс R_3. Рис. 30 дает рис. 48 и 49, удовлетворяющие решениям № 4 и 8 основного уравнения. Из рис. 31 получаем тоже рис. 48. Рис. 32 переходит или в рис. 50, или в рис. 51, удовлетворяющие решению № 8 основного уравнения. Рис. 33 переходит тоже в рис. 51. К этому же классу принадлежат выведенные выше рис. 46 и 47.

Класс R_4. Из рис. 34 получаем рис. 52 — 55, удовлетворяющие соответственно решениям № 10, 8, 4, 8 основного уравнения. Из рис. 35 получаем рис. 56 и 57, удовлетворяющие № 10 и 8 основного уравнения. Кроме того, к этому же классу принадлежат выведенные выше рис. 51, 46, 47.

Класс M_1. К этому классу принадлежат рис. 46 и 47.

Класс M_2. В этом классе нет неполных систем.

Класс M_3. Из рис. 36 получаем четыре неполных системы, изображенные на рис. 58—61 и удовлетворяющие соответственно решениям № 10, 8, 4 и 8. Из рис. 37 получаем рис. 62, удовлетворяющий решению № 8 основного уравнения.

Класс M_4. Не отличается от класса R_7.

Класс M_5. Из неполных систем этому классу удовлетворяет только рис. 62.

Все неполные системы сведены в табл. 9.

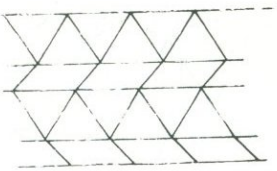


Рис. 56



Рис. 57

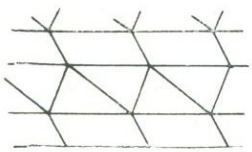


Рис. 58

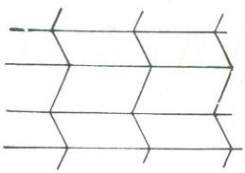


Рис. 59

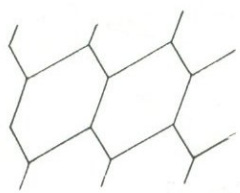


Рис. 60



Рис. 61

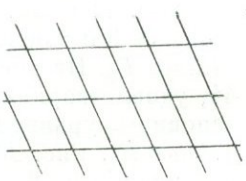


Рис. 62

Таблица 9

Класс	№ решения	Формула	Рис.	Класс	№ решения	Формула	Рис.
H_1	—	—	—	R_4	8	IV_1	53
H_2	7	$VI_1\,IV_3\,III_2$	38		4	VI_1	54
	4	$VI_1\,VI_2$	39		8	$IV_1\,IV_1$	55
H_3	—	—	—		10	$IV_1\,III_2$	56
H_4	—	—	—		8	IV_1	57
H_5	5	$VI_1\,III_2\,III_2$	40		8	IV_1	51
T_1	—	—	—		4	VI_1	46
T_2	3	$VIII_1\,IV_1$	41		8	IV_1	47
	8	$IV_1\,IV_1$	42	M_1	4	VI_1	46
T_3	3	$VIII_1\,IV_1$	43		8	IV_1	47
	8	$IV_1\,IV_1\,IV_2$	44	M_2	—	—	—
R_1	3	$VIII_1\,IV_1$	45	M_3	10	$IV_1\,III_2$	58
	4	VI_1	46		8	$IV_1\,IV_1$	59
	8	IV_1	47		4	VI_1	60
R_2	—	—	—		8	IV_1	61
R_3	4	VI_1	48		8	IV_1	62
	8	$IV_1\,IV_1$	49	M_4	10	$IV_1\,III_2$	58
	8	IV_1	50		8	$IV_1\,IV_1$	59
	8	IV_1	51		4	VI_1	60
	4	VI_1	46		8	IV_1	61
	8	IV_1	47		8	IV_1	62
R_4	10	$IV_1\,III_2$	52	M_5	8	IV_1	62

Заключение

До самого последнего времени на кристаллы смотрели, как на совокупность правильно расположенных молекул. В связи с таким представлением стали изучать правильные системы точек. Если мы припишем каждой молекуле (точке правильной системы) определенную сферу действия, то придем к задаче о делении пространства или плоскости на равные части — стереоэдры или планигоны. В настоящее время под влиянием работ о прохождении рентгеновских лучей через кристаллы такой взгляд на кристаллы подвергается сомнению. Согласно этим работам на кристаллы смотрят как на совокупность атомов, не соединенных в молекулы. Если мы припишем теперь различного рода атомам (или их группам) различные сферы влияния, то придем к той задаче, которая нами поставлена во введении. Решение этой задачи для плоскости составляло главный предмет этой статьи. Ту же задачу для пространства я думаю решить после. Если на кристаллы можно смотреть как на системы стереоатомов, то грани их

можно рассматривать как системы планатомов, полные или неполные. Последнее утверждение ждет, конечно, своего экспериментального подтверждения.

Работа сделана в Кристаллографической лаборатории университета Шанявского в Москве.

Любимовский пост

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Федоров.* Начала учения о фигурах.— Зап. Имп. СПб. Минерал. об-ва, сер. 2, 1885, 21,1.
2. *E. S. Fedorov.* Reguläre Plan und Raumvertheilung.— Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.— Phys. Cl., 1899—1900, **20**, Abteilung 11, 465.
3. *L. Sohncke.* Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung.— Z. für die reine und angew. Mathematik, 1874, **77**, 47.

К ВОПРОСУ О ЗАПОЛНЕНИИ ПРОСТРАНСТВА МНОГОГРАННИКАМИ БЕЗ ПРОМЕЖУТКОВ[1]

Вопрос о заполнении трехмерного пространства многогранниками без промежутков имеет кардинальное значение в кристаллографии и может быть интересен и с чисто геометрической стороны, особенно ввиду того, что он вплотную примыкает к вопросам геометрии n измерений. Условимся считать: p_0 за число вершин,

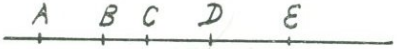


Рис. 1

p_1 за число ребер, p_2 за число граней, p_3 за число трехмерных многогранников, p_4 за число четырехмерных многогранников и т. д.

Возьмем отрезок AB (рис. 1). Очевидно, что для него справедливо равенство

$$p_0 - p_1 = 1. \qquad (1)$$

Приложим к нему отрезок BC. Число вершин и число ребер увеличится при этом на единицу, поэтому равенство (1) остается справедливым и для фигуры ABC. Очевидно, что та же формула будет справедлива и для фигур $ABCD$, $ABCDE$ и т. д. Так обстоит дело, пока на линии отмечено конечное число точек. При бесконечном же их числе на каждую вершину, очевидно, при-

[1] Зап. Всерос. минерал. об-ва, 1924, ч. 53, вып. 1, с. 193—198. Настоящую работу можно рассматривать как вторую часть работы, напечатанной мною в Изв. АН, 1916, с. 755 (см. предыдущую статью — *прим. ред.*).

ходится ровно по одному ребру и равенство (1) превращается в этом случае в равенство

$$p_0 - p_1 = 0, \tag{2}$$

причем уже под p_0 и p_1 мы понимаем не абсолютные, а *относительные числа* вершин и ребер, т. е. в данном случае два равных друг другу целых положительных числа. К формуле (2) можно прийти еще и так. Чтобы узнать, сколько вершин приходится

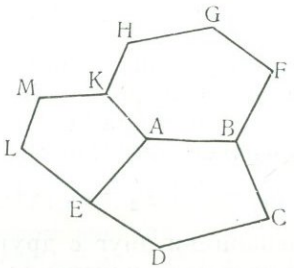


Рис. 2

на одно ребро, нужно p_0 разделить на p_1. Равенство (1) при этом примет вид

$$p_0/p_1 - 1 = 1/p_1. \tag{3}$$

При безграничном увеличении числа ребер p_1 правая часть этого равенства стремится к нулю, дробь же p_0/p_1 стремится к единице, так как и числитель и знаменатель ее оба стремятся к бесконечностям одного и того же порядка.

Мы вывели формулу (2) для одномерного пространства (линии), сплошь заполненного одномерными многогранниками (отрезками). Для двумерного пространства (плоскости) аналогичная формула была выведена мною раньше [1].

Вот этот вывод. Возьмем многоугольник $ABCDE$ (рис. 2). Для него будет справедливо равенство

$$p_0 - p_1 + p_2 = 1, \tag{4}$$

Приложим к нему другой многоугольник $ABFGHK$. Для новой фигуры равенство (4) остается в силе, так как в ней число вершин p_0 увеличилось на n, число ребер d_1 на $n + 1$ и число многоугольников p_2 на единицу. Прибавив к нашей фигуре многоугольник $AKMLE$, мы опять получим фигуру, для которой формула (4) остается в силе, и т. д. Разделив обе части равенства на p_2, т. е. переходя от абсолютных чисел к относительным и пренебрегая дробью $1/p_2$, мы для бесконечного двумерного пространства получим формулу

$$p_0 - p_1 + p_2 = 0. \tag{5}$$

---

[1] См. предыдущую статью — *прим. ред.*

Перейдем теперь к трехмерному пространству, нас особенно интересующему.

Представим себе произвольный многогранник. Для него справедлива формула Эйлера

$$E + F = K + 2, \tag{6}$$

где $E = p_0$, $K = p_1$ и $F = p_2$. Так как число многогранников p_3 равно в данном случае единице, то ту же формулу можно переписать так:

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 1. \tag{7}$$

Возьмем другой многогранник, у которого есть одна грань, равная (точнее зеркально-равная) какой-нибудь грани первого многогранника. Очевидно, что и для этого другого многогранника можно написать аналогичное равенство:

$$p_0' - p_1' + p_2' - p_3' = 1. \tag{8}$$

Сложим эти многогранники друг с другом равными гранями и подсчитаем, какие произошли изменения в числе вершин Δp_0, числе ребер Δp_1, числе граней Δp_2 и числе многогранников Δp_3.

Если n число вершин (и ребер) общей грани их, то нетрудно видеть, что

$$\Delta p_0 = p_0' - n, \quad \Delta p_1 = p_1' - n, \quad \Delta p_2 = p_2' - 1, \quad \Delta p_3 = p_3' - 1.$$

Отсюда получаем

$$\Delta p_0 - \Delta p_1 + \Delta p_2 - \Delta p_3 = 0. \tag{9}$$

А это означает, что для новой фигуры, состоящей из двух многогранников, остается справедливой формула (7), так как левая ее часть не изменилась.

Прикладывая к двум многогранникам третий, четвертый и т. д., убеждаемся, что та же формула остается справедливой и для какой угодно части пространства, заполненного многогранниками. Но новый многогранник может прикладываться к фигуре сразу несколькими гранями. Покажем, что этот случай приводит к предыдущему [1]. В самом деле, при прикладывании нового многогранника происходит процесс слияния двух равных граней в одну. В случае нескольких пар равных граней этот процесс можно представить себе происходящим последовательно; при этом окажется, что равенство (7) остается справедливым после каждого слияния двух граней, а следовательно, оно остается справедливым и вообще. Разделив обе части равенства (7) на p_3 и переходя к пределу, как это мы делали выше, получим для бесконечного пространства

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0. \tag{10}$$

[1] При этом предполагается, что новый многогранник прикладывается смежными по ребру гранями (*Прим. ред*).

Приведем несколько примеров, на которых оправдывается формула (10). Известно, что пространство можно заполнить равными друг другу кубами. Для одного куба мы имеем: $p_0 = 8$, $p_1 = 12$, $p_2 = 6$, $p_3 = 1$.

В пространстве, заполненном кубами, каждая вершина единовременно является вершиной восьми кубов, так что на каждый куб приходится по $^1/_8$ от каждой вершины, т. е. всего $(^1/_8)8 = 1$ вершина, следовательно, $p_0 = 1$; в каждом ребре сливаются по 4 ребра, так что на долю каждого куба приходится по $^1/_4$ от каждого ребра, следовательно, $p_1 = (^1/_4)12 = 3$; в каждой грани сливаются по две грани, следовательно, $p_2 = (^1/_2)6 = 3$. Так как мы относим все числа к одному кубу, то $p_3 = 1$. Итак,

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

Для пространства, заполненного ромбическими додекаэдрами, относительные числа рассчитываются так. Для одного многогранника имеем: $p_0 = 14$, $p_1 = 24$, $p_2 = 12$, $p_3 = 1$.

В пространстве из ромбических додекаэдров в шести вершинах из четырнадцати (по концам осей 4-го порядка) сливаются по 6 и в восьми по 4 вершины, следовательно, на один многогранник приходится вершин $p_0 = (^1/_6)6 + (^1/_4)8 = 3$; в каждом ребре сливаются по три ребра, следовательно, p_1 $(^1/_3)24 = 8$; в каждой грани сливаются по две грани, и следовательно, $p_2 = (^1/_2)12 = 6$; $p_3 = 1$. Итак,

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 3 - 8 + 6 - 1 = 0.$$

Выведем теперь относительные числа для пространства, заполненного октаэдрами и кубооктаэдрами одновременно. Эту бесконечную систему фигур получим из системы кубов, притупив их вершины треугольными гранями октаэдра. Для одного кубооктаэдра имеем: $p_0 = 24$, $p_1 = 36$, $p_2 = 14$, $p_3 = 1$, а для одного октаэдра $p_0 = 6$, $p_1 = 12$, $p_2 = 8$, $p_3 = 1$.

Так как в данной системе фигур все вершины оказываются равноценными друг другу по своему положению (в предыдущих случаях равноценными были и сами многогранники), то расчет удобно вести по отношению к одной вершине. Итак, положим $p_0 = 1$.

Так как в каждой вершине сходятся по 5 ребер, а каждое ребро соединяет по две вершины, то

$$p_1 = (^1/_2) \cdot 5 = {}^5/_2.$$

В каждой вершине сходятся по 4 треугольных грани октаэдра и по 4 восьмиугольных грани куба, следовательно, $p_2 = {}^4/_3 + {}^4/_8 = {}^{11}/_6$. Наконец, в каждой вершине сходятся по 4 кубооктаэдра и по 1 октаэдру, следовательно, $p_3 = {}^4/_{24} + {}^1/_6 = {}^1/_3$. Приводя относительные числа к общему знаменателю и отбрасывая последний, получим

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 6 - 15 + 11 - 2 = 0.$$

Выведенную нами формулу можно обобщить и на случай n-мерного пространства, заполненного n-мерными многогранниками, и тогда получим

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \ldots \pm p_n = 0. \qquad (11)$$

Доказательства этой формулы мы здесь приводить не будем, обратим, однако, внимание на замечательную аналогию между этой формулой и обобщенной формулой Эйлера на случай замкнутых многогранников n-мерного пространства.

Эта последняя формула имеет вид [1].

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \ldots \pm p_{n-1} = 1 - (-1)^n. \qquad (12)$$

При четном n правая часть этого равенства обращается в 0, и формула (12) превращается в формулу (11). Отсюда, в частности, следует, что для элементов выпуклого четырехмерного многогранника мы имеем то же соотношение, что и для трехмерного пространства, сплошь заполненного многогранниками.

Екатеринбург

ЛИТЕРАТУРА

1 *E. Jouffret.* Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions et introduction à la géometrie a dimensions. Paris, Gauthier-Villars, 1903, p. 99.

ПРАВИЛО АМПЕРА И СИММЕТРИЯ МИРА[1]

Б. В. Дерягин в частной беседе, происходившей летом 1936 г. обратил мое внимание на то, что физик Э. Мах не мог логически обосновать, почему в нашем мире направление магнитного поля, возникающего вокруг проводника, по которому течет электрический ток, выводится из правила правого, а не левого буравчика, и допускал принципиальную возможность существования иного зеркального мира с правилом левого буравчика.

Просмотрев работы Э. Маха, я не мог найти в них таких мест, где бы вопрос о симметрии мира был поставлен в той приведенной выше простой и ясной формулировке, которая ему (этому вопросу) была придана Б. В. Дерягиным во время нашей беседы. В начале своего «Историко-критического очерка развития механики» Э. Мах упоминает, что Архимед для вывода законов рычага исходил из принципа симметрии. Я позволю себе сформулировать этот принцип для частного случая, с которым имел дело Архимед, следующим образом. Стержень, подвешенный на нити в точке, лежащей в поперечной плоскости симметрии стержня, должен принять горизонтальное положение. Отдавая должное

[1] Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР, 1939, вып. 1, с. 25—30.

принципу симметрии, Э. Мах, однако, не считает его универсальным и предостерегает читателя против слишком широкого его применения. Вот что Э. Мах говорит по этому поводу: «Даже инстинктивные познания столь великой логической силы, как принцип симметрии, примененный Архимедом, могут ввести в заблуждение. Найдутся, может быть, читатели, которые вспомнят, как было нарушено их духовное равновесие, когда они в первый раз услышали, что лежащая в магнитном меридиане магнитная игла параллельным ей и проходящим над ней электрическим током отклоняется в определенном направлении из плоскости меридиана (т. е., по мнению автора, из плоскости симметрии.— *А. Ш.*). Инстинктивное столь же погрешимо, как и ясно сознаваемое. Оно имеет ценность прежде всего только в области, с которой человек хорошо знаком».

Из приведенной цитаты можно видеть, что вопрос о симметрии мира, связанный с поведением магнитной стрелки в поле прямого тока, в действительности мог быть только навеян Б. В. Дерягину Э. Махом, но не поставлен последним в явной форме.

Что касается сомнений Э. Маха относительно непогрешимости «инстинктивно познаваемого» принципа симметрии, то здесь дело обстоит очень просто. Принцип симметрии, как и всякий другой полезный принцип, действительно непогрешим только в руках человека, хорошо знакомого с этим принципом. Сам Э. Мах, очевидно, не был и не мог быть в свое время хорошо осведомлен в вопросах симметрии, иначе он не мог бы видеть нарушения принципа симметрии там, где он блестяще оправдывается.

После этого введения переходим к изложению главной темы настоящего сообщения.

Правило Ампера — Максвелла

Если электрический ток идет по проводнику от наблюдателя перпендикулярно к чертежу (рис. 1), то образующееся вокруг проводника магнитное поле M направлено по часовой стрелке (пря-

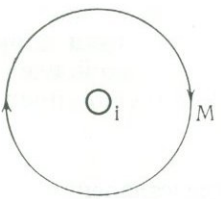


Рис. 1

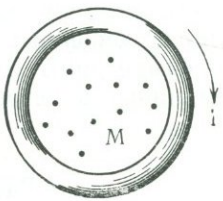


Рис. 2

мое правило). Совершенно аналогично, если магнитное поле M (рис. 2), вызванное замкнутым электрическим током i, пронизывает контур от наблюдателя перпендикулярно к чертежу, то ток направлен по часовой стрелке (обратное правило). При этом под направлением тока разумеют направление, обратное тому,

куда движутся электроны по проводнику, а под направлением магнитного поля понимают то направление, которое указывается северным полюсом магнитной стрелки, помещенной в магнитное поле.

Парадокс Маха

Если правило Ампера задается в такой форме, а это обычно так именно и делается, то, естественно, возникает вопрос, почему же магнитное поле в рис. 2 должно быть направлено от наблюдателя, а не к наблюдателю? Одним из разумных ответов на этот вопрос мог бы быть такой. Если электроны, движущиеся по замкнутому контуру проводника (рис. 2), представляются нами в виде шариков, обладающих полным набором плоскостей симметрии, и если среда (пустота, эфир, воздух и т. д.), в которой явление происходит, обладает плоскостями симметрии, параллельными плоскости чертежа, или центрами симметрии, равномерно в ней распределенными, то мы не имеем никаких оснований предпочесть действительное направление магнитного поля прямо противоположному. Отсюда неизбежный вывод: или мы должны изменить наше представление о форме и симметрии электронов, или среда обладает более низкой симметрией, чем та, которую мы обычно молчаливо ей (среде) приписываем. Так возникает идея о принципиальной возможности существования правой и левой модификаций мира, лишенных элементов симметрии второго рода (плоскостей симметрии). Несостоятельность этой идеи лежит, как мы увидим ниже, в неточности формулировки правила Ампера.

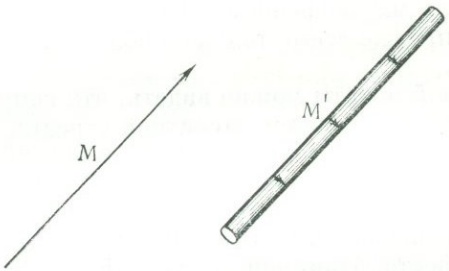


Рис. 3

Расширение представления об амперовых элементарных токах

Сам Ампер пытался свести магнитное поле внутри магнита к элементарным круговым токам. Если бы эту идею Ампера можно было распространить также и на магнитные силовые линии вне магнита, то тогда всякую магнитную линию M (рис. 3), обычно

изображаемую стрелкой, можно было бы заменить силовой трубкой M', обтекаемой амперовыми токами, направление коих определяется тем же правилом Ампера. Эту силовую трубку нет никакой надобности снабжать стрелкой по оси трубки, потому что так называемое «направление» магнитной линии однозначно определяется направлением самих элементарных амперовых токов. В самом деле, если мы будем смотреть вдоль трубки так, чтобы элементарные токи казались нам текущими по часовой стрелке, то магнитная силовая линия будет направлена от нас; в противном случае она будет направлена к нам.

Тождество правого и левого миров при расширенном представлении об элементарных амперовых токах

Если мы теперь заменим в рис. 1 и 2 магнитные линии трубками, обтекаемыми амперовыми токами, то придем к рис. 4 и 5. Оба последних рисунка совершенно эквивалентны рис. 1 и 2 в том смысле, что этими новыми схемами можно пользоваться наравне со старыми для определения направления тока и обратно; но новая интерпретация существенно отличается от старой тем, что она не дает никаких поводов к допущению возможности существования иного зеркального мира, так как в схеме рис. 4 содержится бесконечное множество вертикальных плоскостей симметрии P, проходящих по оси проводника, а в схеме рис. 5 имеется одна горизонтальная плоскость симметрии, совпадающая с плоскостью чертежа; наличие же хотя бы одной плоскости симметрии в любой фигуре или любой среде гарантирует полное тождество между предметом и его зеркальным изображением; поэтому левый мир ничем не должен отличаться от правого.

В тождестве правого и левого мира легко убедиться, и не прибегая к исследованию симметрии рис. 4 и 5, но применяя метод рассуждения «от противного». Допустим, в самом деле, что существует такой мир, в котором правило Ампера применяется наоборот, т. е. в рис. 1 и 2 направление магнитных линий заменяется на обратное. Легко видеть из непосредственного построения, что при замене магнитных линий трубками, в которых элементарные токи текут в обратном направлении, как того требует само измененное правило Ампера, мы неизбежно придем к тем же рис. 4 и 5. Отсюда следует, что правый мир конгруэнтен левому.

Симметрия электрического тока

Слабым пунктом всех предыдущих рассуждений является допущение о возможности сведения всех магнитных явлений к электрическим и расширение представления об элементарных ам-

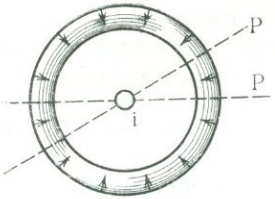


Рис. 4

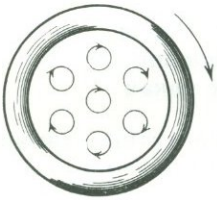


Рис. 5

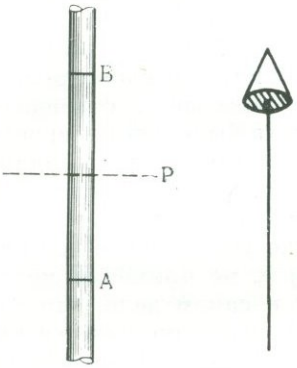


Рис. 6

Рис. 7

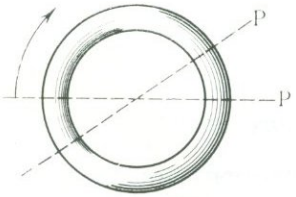


Рис. 8

перовых токах на силовые магнитные линии вне магнита; поэтому в дальнейшем мы постараемся обосновать нашу точку зрения, совершенно обходя это допущение и опираясь только на симметрию электрического тока и магнитных силовых линий.

Пусть мы имеем бесконечно длинный цилиндрический проводник (рис. 6), по которому течет обыкновенный прямой электрический ток. Нас интересует, какую симметрию следует приписать некоторому конечному отрезку AB такого цилиндра, находящемуся между двумя произвольными поперечными сечениями проводника. Мы можем утверждать, что в нашей фигуре отсутствует поперечная, т. е. перпендикулярная к оси цилиндра, плоскость симметрии P, так как при наличии такой плоскости симметрии мы должны были бы иметь дело с таким электрическим током, в котором столько же электронов проходит в единицу времени через поперечное сечение проводника в направлении AB, сколько их проходит в обратном направлении BA, чего в действительности нет. Оба направления AB и FA существенно отличаются друг от друга. Что касается продольных плоскостей симметрии, проходящих через ось вращения цилиндра, то у нас нет никаких оснований отрицать их существование; то же можно сказать и про ось симметрии бесконечного порядка, совпадающую с осью вращения цилиндра. В целом наш цилиндр, по которому течет электрический ток, обладает той же симметрией, как находящийся в покое круглый конус. Поэтому вектор силы тока очень удобно изображать отрезком прямой с коническим наконечником (рис. 7); длина отрезка при этом будет изображать метрическую характеристику тока, т. е. число ам-

пер, а наконечник — направление тока и его симметрию. К сожалению, о симметрии векторов часто забывают, а это может служить источником глубочайших недоразумений. Парадокс Маха, как увидим далее, и есть такое недоразумение, основанное на пренебрежении симметрией векторов.

Переходим теперь к исследованию симметрии электрического тока, протекающего по кольцевому проводнику (рис. 8) в направлении, указанном стрелкой. Рассуждение, аналогичное предыдущему, приводит нас к заключению о том, что в данной «фигуре» отсутствуют плоскости симметрии P, перпендикулярные чертежу и проходящие через центр кольца. Полная симметрия фигуры состоит из оси симметрии бесконечного порядка, проходящей через центр кольца, перпендикулярно плоскости чертежа, и одной плоскости симметрии, параллельной плоскости чертежа и рассекающей кольцо на две замкнутые кольцевые половинки. В целом симметрия кольцевого тока будет такой же, как симметрия вращающегося около своего центра и в своей плоскости диска или как симметрия вращающегося около своей оси круглого цилиндра. Вектор силы тока в данном случае очень удобно изображать отрезком прямой, продетым через диск, снабженный стрелкой (рис. 9); при этом величина отрезка берется пропорциональной числу ампер тока, а стрелка с диском дает представление о направлении тока и симметрии вектора. Конечно, и данный аксиальный вектор мог бы быть изображен также простой стрелкой с наконечником (рис. 7), т. е. так же, как изображается полярный вектор, но такое изображение было бы терпимо до тех пор, пока симметрией вектора можно пренебрегать, и во всяком случае при условии, что связь между обоими изображениями заранее однозначно установлена. Забегая вперед, можно сказать, что в правиле Ампера эта связь установлена и существенный вопрос о симметрии забыт совсем.

Симметрия магнитного поля

Пусть мы имеем бесконечное однородное магнитное поле; выделим из него цилиндрический конечный участок с осью цилиндра, параллельной силовым линиям поля. Какую симметрию имеет этот участок поля? С первого взгляда может показаться, что выделенный участок магнитного поля имеет ту же симметрию, как и цилиндрический отрезок электрического тока (рис. 7), так как в магнитном поле можно различать северный и южный полюсы подобно тому, как в электрическом токе различают положительный и отрицательный полюсы. Однако при ближайшем рассмотрении симметрия однородного магнитного поля оказывается совершенно иной, чем симметрия электрического поля и симметрия прямого цилиндрического электрического тока. Убедиться в этом можно различными способами. Например, если мы пропус-

тим вдоль канала, сделанного по оси круглого магнита, поляризованный луч света, то последний, как это показал Фарадей, «закручивается» по часовой стрелке, если луч выходит из южного полюса магнита навстречу наблюдателю. При обратном ходе поляризованного луча вращение плоскости поляризации происходит в ту же сторону, но для наблюдателя, по необходимости вынужденного изучать явление со стороны северного полюса, вращение будет казаться происходящим против часовой стрелки. Явление

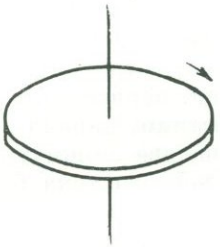


Рис. 9

магнитного вращения плоскости поляризации света со всей убедительностью доказывает отсутствие продольных плоскостей симметрии, которые, как мы знаем, присутствуют в цилиндрическом электрическом токе. Тот факт, однако, что величина вращения плоскости поляризации не изменяется от изменения направления луча, служит аргументом в пользу существования поперечной плоскости симметрии, что находится также в полном согласии и с тем, что для наблюдателя, перемещающего свой глаз от одного полюса к другому при изменении направления луча, вращение плоскости поляризации кажется то правым, то левым. То, что магнитное поле обладает кроме поперечной плоскости симметрии еще осью симметрии бесконечного порядка, совпадающей с осью канала в магните, может быть доказано произвольными поворотами поляризатора, служащего для получения поляризованного луча, на любой угол около оси прибора, отчего ни величина вращения плоскости поляризации, ни яркость луча не изменяются. Подводя итог сказанному, мы с полной уверенностью можем утверждать в соответствии со всеми известными до сих пор фактами, что выбранный нами цилиндрический участок магнитного поля, а следовательно, и вектор напряжения поля, имеет симметрию кругового тока, изображенную на схеме рис. 9, и может быть описан этой схемой количественно и качественно: южный полюс в таком поле не больше отличается от северного, чем правая рука от левой.

После изложенного само собой напрашивается решение последнего вопроса о симметрии кольцевого магнитного поля, или просто кольцевого магнита. В таком магните нет ни северного, ни южного полюсов, но зато есть два более сильно отличающихся полюса — положительный и отрицательный, расположен-

ные по обе стороны средней плоскости, разделяющей кольцо на две кольцевые же половинки. В существовании полярной оси, перпендикулярной этой плоскости, можно убедиться прямым опытом. Если продеть прямой проводник через отверстие железного кольца и возбудить в последнем кольцевое магнитное поле (например, пропусканием электрического тока по обмотке, навитой на кольцо), то в момент возникновения в кольце магнитного поля в прямом проводнике возникнет электрический ток в определенном направлении. В целом симметрия кольцевого магнитного поля может быть изображена стрелкой с коническим наконечником (рис. 7). При желании можно было бы придумать много других опытов для точного установления найденной нами симметрии кольцевого магнитного поля.

Новая формулировка правила Ампера

После установления симметрии электрического тока и магнитного поля правило Ампера может быть сформулировано следующим образом:

1) электрическому току данной симметрии отвечает магнитное поле той же симметрии, и, обратно, магнитному полю данной симметрии отвечает электрический ток той же симметрии;

2) направление стрелки прямолинейного тока совпадает с направлением стрелок внутри кольцевых линий магнитного поля; характер кругового движения положительного электричества в кольцевом электрическом токе совпадает с характером стрелок вокруг силовых линий магнитного поля внутри кольца тока.

Механической моделью для запоминания этого правила может служить резиновое кольцо, надеваемое на стержень. Направление движения стержня относительно кольца в этом случае отвечает направлению прямолинейного тока, а направление «вихревого» движения кольца — направлению стрелок вокруг магнитного поля. Рассматривая рис. 1 и 2, служащие иллюстрациями правила Ампера, легко видеть, что они ему противоречат, так как симметрия тока и поля в них различны. Что касается схем, изображенных на рис. 4 и 5 и построенных в предположении о полной сводимости магнетизма к электричеству, то они в полной мере отвечают требованиям правила в его новой формулировке.

Симметрия мира

Итак, для обоснования тождества правого и левого мира нам не было никакой необходимости расширять представление Ампера об элементарных токах и сводить все магнитные явления к электрическим. Понятое верно правило Ампера не содержит в себе ни-

чего такого, что может дать повод считать мир диссимметричным. Это, конечно, не означает, что в мире нет и не может быть иных явлений, которые такой повод дать могут, но явления эти не имеют ничего общего с правилом Ампера. Парадокс Маха не существует.

Результаты

1. Правило для определения направления магнитного поля, возникающего около электрического тока, обыкновенно иллюстрируется рис. 1 и 2 и мнемонически связывается с движением правого буравчика.

2. В этой форме это правило свидетельствует о диссимметрии нашего мира и наводит на предположение о принципиальной возможности существования другого зеркально-равного мира, в котором все электромагнитные явления происходят по законам нашего мира, но основанным на правиле левого, а не правого буравчика.

3. Это предположение может быть целиком устранено, если принять во внимание истинную симметрию магнитных линий (отсутствие продольных плоскостей симметрии и наличие поперечных плоскостей симметрии) и давно известный *аксиальный* (*но не полярный*, как это до сих пор многие считают) характер магнитных векторов.

4. Правильно понимаемое правило Ампера может быть иллюстрировано рис. 4 и 5.

НОВОЕ В УЧЕНИИ О СИММЕТРИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ[1]

Предисловие. Изучение памятников старины показывает, что человечество уже на заре своей культуры имело представление о симметрии и осуществляло ее в рисунках и в предметах быта. Надо полагать, что при этом человек руководствовался не только эстетическими соображениями, но и уверенностью в большей пригодности для практики правильных форм, нежели уродливых. Играло здесь, по-видимому, известную роль и подражание природе, которой тоже почему-то очень «нравится» созидать симметричные фигуры, будь то космические тела или траектория их движения; живые индивиды человека, животных, растений или

[1] Общее собрание АН СССР. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1945, с. 212—227.

их ткани; кристаллы, жидкие кристаллы или кристаллические решетки; волны морские, звуковые, световые или их бесчисленные интерференционные сочетания; молекулы, атомы, ионы, электронные спины; физические поля, вроде полей магнитного и электрического, и т. д. Все это — природные симметричные фигуры.

Немудрено, что ученые всех стран, времен и народов не могли не интересоваться, что же, собственно, есть симметрия, чем она вызывается в природе и что может дать человеку всестороннее ее изучение? Однако только в прошлом столетии все эти вопросы сдвинулись с мертвой точки.

В результате работ многих авторов, среди которых виднейшая роль выпала на долю нашего русского академика А. Гадолина, учение о симметрии приняло такую форму, которая обеспечила ему дальнейшее развитие.

Что касается причин проявления симметрии в природе, то вопрос этот был серьезно затронут лишь П. Кюри. Судьбе, однако, было угодно отвлечь этого замечательного ученого и человека от занятий по симметрии для не менее важных исследований по радиоактивности. Когда же он готов был вернуться к постоянно волновавшим его вопросам симметрии, он трагически погиб, попав под лошадь извозчика. Из отдельных, сохранившихся в печати высказываний П. Кюри мы знаем, что он видел в симметрии природных явлений проявление законов такой же общности и значения, как законы термодинамики.

О том, какие результаты может дать исследование симметрии, можно видеть на примере открытия явления пьезоэлектричества кристаллов, сделанного братьями Кюри. Напомним, что явление пьезоэлектричества состоит в появлении электрических зарядов на поверхности кристаллов под влиянием механических воздействий: растяжения, сжатия, изгиба, кручения и т. д. Пьезоэлектричество возможно не во всех кристаллах, а только в тех, которые удовлетворяют совершенно определенным требованиям симметрии.

По свидетельству М. Кюри, братья Кюри пришли к этому открытию отнюдь не случайно, а в результате серьезного рассмотрения особенностей определенных групп симметрии кристаллов. Общеизвестно, что в настоящее время явление пьезоэлектричества нашло себе применение в самых разнообразных отраслях знания и техники: в ультраакустике, электроакустике, радиотехнике, военном деле и т. д.

Другим блестящим примером торжества метода симметрии служит завершение вывода чисто умозрительным путем всех видов структуры кристаллов за 20 лет до того, как первые примеры этих структур были открыты экспериментально. Следует отметить, что и в этом деле первую роль пришлось играть нашему гениальному кристаллографу академику Е. С. Федорову, 25-летие смерти которого отмечалось в этом году.

В последнее время, однако, стало все чаще и чаще высказываться мнение о том, что теория симметрии в основном завершена и что дальнейшее ее развитие не может иметь большого научного и практического значения. В подтверждение этого мнения указывают, что за 50 лет после выхода в свет классических работ Федорова по симметрии никаких существенных результатов в этой области получено не было и что теория структуры кристаллов стала развиваться далее не на основе учения о симметрии, а под флагом представлений о координационном числе, плотнейшей укладке ионов и т. д.

Нам кажется, что задержка в развитии учения о симметрии была вызвана не тем, что оно себя изжило, а тем, что оставленное им наследство оказалось столь грандиозным, что потребовалось целых 50 лет, чтобы в нем разобраться. В настоящее время эта кропотливая работа в основном действительно может считаться законченной и путь для дальнейшего развития учения о симметрии — открытым.

Уже первые шаги, сделанные лично нами по этому пути, показали, что он является несомненно правильным. В результате исследования свойств специальных групп симметрии, впервые установленных П. Кюри, нам удалось сначала теоретически предугадать возможность изготовления новых искусственных пьезоэлектриков, названных нами пьезоэлектрическими текстурами, а год спустя совместно с А. С. Шеиным практически осуществить это предвидение.

Сущность этого открытия заключается в следующем. Раньше молчаливо предполагалось, что пьезоэлектрические явления возможны только в одиночных кристаллах. Нами была теоретически выяснена принципиальная возможность этих явлений в любых анизотропных материалах, аморфных и поликристаллических, если только они относятся к определенным группам симметрии. Напомним, что анизотропными мы называем такие материалы, которые по разным направлениям обладают разными свойствами; примером анизотропных материалов может служить дерево, которое колется по волокнам легче, чем поперек их. Оказалось, что сильным пьезоэлектрическим эффектом обладает изготовленный нами новый материал, состоящий из микроскопических игловидных кристалликов сегнетовой соли, ориентированных своей длиной параллельно друг другу. Замечательно, что и обыкновенное дерево (фанера), которое ведь тоже состоит из параллельно расположенных волокон, оказалось пьезоэлектриком, хотя и слабым.

Эта несомненная удача потребовала от нас дальнейшего радикального пересмотра всех основных понятий и представлений, так или иначе относящихся к симметрии. В частности, нам пришлось проанализировать заново понятие параллельности, которое, как можно судить уже из сказанного, должно лежать в основе теоретического рассмотрения свойств текстур, т. е. материалов из

ориентированных микроскопических кристалликов. Часть полученных нами результатов этого пересмотра как раз и служит предметом настоящего сообщения.

1. Общие представления о симметрии. Всякая симметричная фигура состоит из равных частей и обладает свойством совмещаться сама с собой или, как говорят, преобразовываться в себя в результате некоторых производимых над ней операций. Как видим, понятие симметрии складывается из понятия о фигуре,

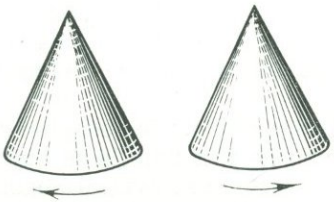


Рис. 1

как объекте симметрии, из понятия равенства частей фигуры и из понятия допустимых симметрических преобразований. Учение о симметрии приобретает то или иное конкретное содержание в зависимости от того, какой смысл будет вложен в эти частные понятия. Дадим анализ каждому из этих понятий отдельно.

2. Материальная фигура. Рассмотрим свойства фигур, обладающих осями симметрии бесконечного порядка. К таким фигурам принадлежат все тела вращения: конус, цилиндр, шар и т. д. Замечательной особенностью всех фигур этого рода является то, что они кроме оси бесконечного порядка обязательно имеют продольные, проходящие по оси плоскости симметрии. Естественно возникает вопрос, могут ли вообще существовать фигуры с осью бесконечного порядка, но без продольных плоскостей симметрии?

Если бы существовал атлас всех известных геометрических фигур, то, просмотрев его с начала до конца, мы не нашли бы в нем фигур, удовлетворяющих указанному требованию. Тем не менее можно дать утвердительный ответ на поставленный вопрос, но для этого, как увидим, необходимо усовершенствовать само понятие фигуры, приписав ей добавочные свойства сверх необходимых метрических свойств. В частности, если мы представим себе, что конус вращается вокруг своей оси (рис. 1), то он уже не будет иметь продольных плоскостей симметрии, вследствие чего и может быть представлен в двух формах — правой и левой. Такие фигуры, для которых наличие дополнительных свойств является существенным, мы и будем называть *материальными фигурами*.

Материальная фигура столь же абстрактна, как и геометрическая, и ее нельзя отождествлять с физическим телом, хотя в известных случаях она и может служить его изображением. Как и чисто геометрическая фигура, она может изображать также яв-

ления и законы природы, причем возможности ее в этом отношении более широки.

Наука давно и весьма плодотворно пользуется понятием материальной фигуры: стрелки, изображающие силы и другие векторы, положительные и отрицательные нормали к поверхностям, углы с направленным правилом отсчета — все это хорошо известные материальные фигуры. Особенно большую роль сыграло и продолжает играть понятие материальной фигуры в кристаллографии. Достаточно указать хотя бы на то, что без привлечения представления о материальной фигуре невозможно провести различия между правыми и левыми формами пирамид, призм и других простых форм, между пятью кубами различной симметрии и т. д.

Следует отметить, однако, что пользование понятием материальной фигуры в науке до сих пор было чисто стихийным; сам термин «материальная фигура» не существовал. Не существует, как известно, и более широкой по смыслу, нежели обыкновенная геометрия, материальной геометрии, которая изучала бы свойства абстрактных материальных фигур, как обычная геометрия изучает свойства обычных фигур. Задача интерпретирования симметрии с помощью материальных фигур, очевидно, должна стать одной из задач этой обобщенной геометрии.

Первое, на чем мы настаиваем,— это, если позволительно так выразиться, узаконение фактического положения вещей в отношении практики интерпретации симметрии материальными фигурами. Мы не можем целиком согласиться с мнением некоторых математиков, для которых учение о симметрии есть просто учение о группах ортогональных преобразований. Для нас корни его лежат в широко понимаемом естествознании; мы не можем отделить операцию преобразования от объекта преобразования; не можем говорить, в частности, о группе симметрии, определяемой одной осью симметрии бесконечности порядка, не имея в руках соответствующего образца фигуры. Симметрия есть широко распространенное явление природы, и его нельзя отождествлять с той или иной математической интерпретацией симметрии. С этой точки зрения дальнейшее усовершенствование учения о симметрии может иметь смысл лишь в том случае, если оно находит или найдет в будущем себе оправдание в практике естествознания.

Выше мы определили материальную фигуру как геометрическую, наделенную хотя бы одним (для наших целей это достаточно) дополнительным свойством. Мы можем, следовательно, говорить о таких материальных фигурах, как фигуры разного цвета, фигуры тяжелые, фигуры из анизотропной материи, фигуры из вещества, вращающего плоскость поляризации, или из вещества двупреломляющего, фигуры, все точки которых совершают те или иные колебания или вращаются вокруг определенных осей, о шарах с вращающимися радиусами, о скрученных цилиндрах и т. д.

В более узком смысле под материальными фигурами мы будем разуметь *фигуры видимые*, в которых то или иное свойство условно изображено так, что мы можем наблюдать его непосредственно глазом и судить о нем по возможности не только качественно, но и количественно. Например, фигуры, нагретые выше и ниже условного нуля градусов, мы могли бы изобразить фигурами, окрашенными в два цвета разной насыщенности, скажем, в красный и зеленый цвета.

3. Многомерность материальной фигуры. Как известно, многие физические свойства, а именно те, которые именуются скалярными, могут быть измерены одним числом, положительным или отрицательным. Если мы припишем фигуре одно дополнительное скалярное свойство, то всякая точка трехмерной материальной фигуры, очевидно, может быть описана четырьмя числами: тремя координатами, определяющими положение точки в пространстве, и одним числом, определяющим физическое состояние точки. Материальные фигуры могут поэтому в отдельных случаях рассматриваться как фигуры четырехмерные; в частности, так именно должно обстоять дело при выводе групп симметрии материальных фигур того или иного сорта; вообще же замена понятия материальной фигуры понятием четырехмерной фигуры может оказаться неверной, так как три координаты материальной фигуры принципиально отличны по своей природе от четвертой.

В рассмотренном нами примере равномерно вращающегося конуса роль четвертой координаты играет время. Четырехмерное «пространство», в котором роль четвертой координаты, всегда положительной, играет время, как известно, имеет большое значение в современной физике; это служит лишним основанием для введения в учение о симметрии представления о материальной фигуре.

4. Полярные и нейтральные фигуры. Различные физические величины могут обладать столь важными признаками сходства, что может оказаться целесообразным объединить эти величины одним общим понятием. Для примера укажем на скалярные величины, характеризуемые одним числом, на векторные величины, определяемые тремя числами, на тензорные величины, разлагаемые на девять компонент, и т. д. Так как физическими величинами изображаются свойства материи, а признак сходства между величинами есть ведь тоже какое-то свойство, то можно вообще говорить о свойствах некоторых свойств, т. е. о свойствах разной степени общности.

Одним из самых общих свойств скалярных физических величин является свойство иметь «знак», т. е. быть положительными или отрицательными в зависимости от обстоятельств. Мы определили выше материальную фигуру как геометрическую фигуру плюс свойство; приписав геометрической фигуре свойство знака, мы приходим к представлению о *фигуре полярной* — такой фигуре,

которая может быть в зависимости от обстоятельств *положительной* или *отрицательной*.

Выше мы показали, что понятие материальной фигуры фактически применялось не только в различных областях знания, но и в самом учении о симметрии. Понятием полярной фигуры также успешно пользовались до сих пор, не употребляя самого термина, например в теории поля и векторном исчислении под именем источников и стоков, но в учение о симметрии оно вводится нами впервые. Значение этого нововведения мы постараемся обосновать ниже.

Введя понятие полярной фигуры, мы уже в силу логической необходимости должны ввести и понятие *нейтральной фигуры* — фигуры, знака не имеющей, или, формально говоря, фигуры одновременно положительной и отрицательной. Обыкновенные геометрические фигуры, очевидно, являются фигурами нейтральными, так как они знака не имеют; ясно, что до сих пор не имело смысла именовать их нейтральными, так как не приходилось противопоставлять их фигурам полярным. Нейтральную фигуру можно рассматривать еще как две полярные фигуры разного знака, слившиеся в одну.

Необходимо указать еще на возможность существования *фигур смешанной полярности*, т. е. фигур, которые состоят из положительных и отрицательных частей.

5. Совместимое и зеркальное равенство фигур. Отложив временно дальнейшее рассмотрение свойств полярных и нейтральных фигур, перейдем к анализу понятия равенства частей фигуры или шире — равенства фигур вообще. Рассмотрим пример простейшей симметричной фигуры, показанной на рис. 2. Как видим, эта фигура состоит из двух асимметричных тетраэдров, обращенных головками к наблюдателю. Каждый из них является зеркальным изображением другого в плоскости симметрии, отмеченной на чертеже штрихом.

Если мы условились считать, что всякая симметричная фигура должна состоять из равных частей, то в нашей фигуре этими равными частями могут быть только тетраэдры. Но всем хорошо известно, что они не равны друг другу в обычном геометрическом смысле, так как не могут быть совмещены друг с другом простым наложением. Нетрудно видеть, однако, что оба тетраэдра могут быть совмещены друг с другом другим способом, а именно отражением в плоскости симметрии. Значит, если мы желаем все-таки считать обе половины нашей фигуры равными между собой, то мы должны расширить понятие равенства фигур и считаться с двумя его видами: *равенством зеркальным* и *равенством совместимым*. Родовым признаком сходства равных фигур является их совместимость; видовым признаком различия служит разница в способе их совмещения.

Одну из зеркально-равных фигур, все равно какую, условились называть *правой*, другую — *левой*.

Примером простейших симметричных фигур, состоящих только из совместимо-равных правых или левых частей, могут служить фигуры, показанные на рис. 3. Слева помещена фигура, состоящая из двух, скажем, левых тетраэдров, справа — фигура, состоящая из двух правых тетраэдров. Нетрудно убедиться в том, что разрозненные тетраэдры каждой фигуры могут быть совмещены друг с другом простым наложением. Легко также видеть, что каждая из двух показанных на рисунке фигур может счи-



Рис. 2

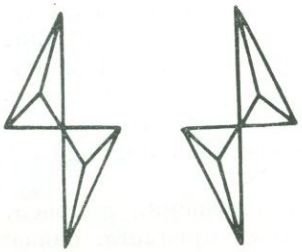


Рис. 3



Рис. 4

таться правой по отношению к другой, левой, иначе говоря, каждая фигура является *энантиоморфной модификацией* (зеркальным изображением) другой.

Сложим обе фигуры, приведенные на рис. 3, так, чтобы получилась одна фигура, показанная на рис. 4. Эта новая фигура, как видим, состоит из четырех равных тетраэдров, но мы можем разложить ее, скажем, по вертикальной плоскости симметрии и на две более крупные части. Каждая из них может быть совмещена с другой двумя способами: наложением и отражением. При желании описанное *двойное равенство* фигур можно рассматривать либо как сочетание двух только что описанных видов равенства, либо как особый третий вид равенства фигур. Как видим, все три вида равенства фигур находят себе применение при описании симметричных фигур, и не должно казаться особенно удивительным, если для развития учения о симметрии понадобятся еще и новые виды или разновидности понятия равенства фигур.

6. Противоположное равенство (антиравенство) фигур. Подобно тому как правая фигура может быть равна левой, так, по нашему предположению, положительная фигура может быть равна отрицательной. Этот вид равенства назовем *противоположным* равенством или *антиравенством*. Так как антиравные фигуры должны быть в то же время зеркально, совместимо или одновременно зеркально и совместимо равны друг другу, то следует различать; *зеркальное*, *совместимое*, а также *двойное* (совместимо-зеркальное) *антиравенство фигур*.

Введение понятия противоположного равенства фигур мы считаем настолько важным, что стоит на нем остановиться под-

робнее. Какие предметы вообще мы считаем равными? Абсолютно одинаковых, не отличимых друг от друга предметов в природе не существует. В природе могут быть только *относительно равные*, т. е. по существу похожие друг на друга вещи,— вещи, равные друг другу лишь по совокупности некоторых определенных признаков. Так как наряду с признаками сходства, которые при желании всегда могут быть найдены, два реальных предмета по необходимости должны обладать и признаками различия, то, в конце концов, от нас зависит, будем ли мы считать рассматриваемые вещи равными, т. е. относить их в одну категорию, или неравными, т. е. вещами разной категории.

Русское слово «сравнивать» означает: мысленно, абстрактно делать предметы *идеально равными* путем устранения всех признаков их различия. Мы видим, следовательно, что при невозможности идеального равенства в природе оно возможно для вещей абстрактных.

Полный произвол в решении вопроса, равны или не равны между собой два данных предмета, связан с целесообразностью того или иного решения, практикой его употребления. Трудность введения новых понятий, в частности понятия противоположного равенства, заключается в том, что обоснование его широкой практикой требует длительного времени. Одним из самых важных и наиболее общих признаков сходства предметов является противоположность их свойств, сходство по противоположности. Для характеристики точного сходства двух предметов принято говорить, что один из них является точным слепком с другого, точной его копией. Но ведь слепок с медали схож с самой медалью прежде всего своей противоположностью, так как выпуклостям слепка отвечают вогнутости медали и наоборот. То же можно сказать и о сходстве копии и оригинала, будь то фотокопия с негатива или копия гравюры с медного клише.

Можно было бы привести достаточно примеров противоположного равенства, но, пожалуй, лучшим из них будет пример антиравенства положительных и отрицательных чисел. Для выражения этого вида равенства в алгебре говорят о «числах, равных между собой по абсолютной величине, но различных по знаку», подчеркиваем — «равных..., но различных». Число $+5$ равно числу -5 по абсолютной величине, но оба числа не равны друг другу по знаку.

7. Кристалл в среде как пример полярной фигуры. Для лучшего усвоения понятия полярных и нейтральных фигур рассмотрим один важный пример из кристаллографии, для которой учение о симметрии является важнейшим вспомогательным орудием исследования. Вопрос ставится так: в каких случаях кристалл можно трактовать как полярную фигуру и в каких случаях как нейтральную фигуру?

Всякий одиночный кристалл, как и всякий вообще природный индивид, должен находиться по необходимости в какой-либо сре-

де: воздухе, собственном расплаве, насыщенном растворе и т. д. Изобразим эту картину кристалла в среде белым многогранником в черном поле (рис. 5, слева). Для того чтобы эта картина стала материальной фигурой в точном, указанном выше смысле, необходимо условиться, какое свойство кристалла и среды мы имеем в виду отобразить этой фигурой. Допустим, что нас сейчас интересует скорость распространения света в кристалле и среде. Положим, что эта скорость в среде больше, нежели в кристалле.

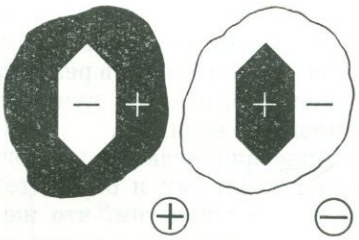


Рис. 5

Если мы условимся сравнивать обе скорости света со средним их значением, то скорость в среде будет выражена некоторым положительным числом, а скорость в кристалле — антиравным отрицательным числом. При этих условиях мы должны рассматривать нашу картину как материальную фигуру смешанной полярности и приписать знак плюс среде и знак минус кристаллу.

Наличие обоих знаков в одной материальной фигуре не может служить препятствием к тому, чтобы рассматривать ее в целом как фигуру одного знака. В этом случае, однако, нас будет интересовать уже не величина разности между каждой скоростью света и средним их значением, а что-нибудь другое, например просто разность между плотностью кристалла и среды. В нашем случае эта величина положительна. Поэтому всей картине в целом мы должны приписать знак плюс, а чтобы отметить качественное различие нового знака от старых, изобразим его символом плюса в кружке.

Если материальную фигуру со знаками (или знаком) одного сорта позволительно рассматривать как четырехмерную фигуру особого рода, т. е. как фигуру, в которой интересен лишь знак четвертой координаты, а не ее абсолютная величина, то фигуру со знаками двух сортов следует уже рассматривать как фигуру пяти измерений. Ясно, что принципиально можно идти и далее в этом направлении, и тогда абстрактная материальная фигура, долженствующая отображать действительность по необходимости не полно, представится нам снабженной множеством разнообразных этикеток плюсов и минусов, напоминая собой облепленный всевозможными ярлыками чемодан путешественника, изображающий также несовершенно, однако более совершенно, чем чемодан без ярлыков, историю поведения своего хозяина.

Если картиной кристаллического индивида в жидкой среде может служить положительная материальная фигура, то жидкий индивид в кристаллической среде может быть изображен отрицательной материальной фигурой, показанной на рис. 5, справа. Этой отрицательной фигуре отвечают в действительности хорошо изученные примеры жидких включений в кристалле. Они захватываются кристаллом во время его роста и впоследствии под влиянием колебаний температуры приобретают форму многогранников, за которыми случайно установилось очень подходящее для нас название отрицательных кристаллов. Известным примером их служат так называемые ледяные цветы, образующиеся внутри льда в местах его загрязнения в результате частичного его плавления под влиянием солнечных лучей и имеющие форму снежинок, но не ледяных, а водяных.

8. Нейтральный кристаллический многогранник. Условившись в понимании положительных и отрицательных кристаллов, мы должны себе отдать отчет и в том, что же есть нейтральный кристалл? Если свойства кристалла и среды становятся тождественными, то исчезает надобность приписывать кристаллу и среде разные знаки. Такой кристалл, очевидно, и будет нейтральным кристаллом. Так как в данном случае не существует никакой границы между кристаллом и средой, то он может быть выделен из нее лишь мысленно; он будет существовать в среде как ее часть, но не как индивид.

Старое учение о симметрии, не знавшее положительных и отрицательных фигур, очевидно, могло относиться только к нейтральным фигурам, в частности к нейтральным, выделенным мысленно из среды, кристаллическим многогранникам, хотя сами исследователи и не отдавали себе в этом вполне ясного отчета.

Когда же и где приходится сталкиваться кристаллографу действительно с нейтральными кристаллическими многогранниками? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что всякий кристаллический индивид, прежде чем стать тем, чем он является в настоящий момент, проходил известные стадии роста. Последние могут быть мысленно воспроизведены в форме концентрических многогранников, некогда соприкасавшихся с питающей кристалл средой и существовавших в качестве непрерывно менявшего свою форму и размеры индивида, а ныне потерявших свою индивидуальность, слившихся со средой, погребенных в ней и лишь в лучшем случае проявляющих себя реально в форме так называемых фантомов, вследствие несовершенства роста и включения посторонних веществ (рис. 6). Таков образ действительно нейтральных кристаллических многогранников, но отнюдь не кристаллических индивидов.

Надобность в привлечении понятия нейтрального кристаллического многогранника встречается не только при исследовании истории образования кристалла, но и во всех тех случаях, когда приходится иметь дело с так называемыми «возможными форма-

ми», мысленно вырезаемыми из кристаллической решетки плоскостями, проходящими по ее узлам (рис. 7).

9. Пустотелые фигуры и поверхности. До сих пор, говоря о фигурах, мы имели в виду главным образом *сплошные многогранники*; все относящиеся к ним понятиям mutatis mutandis могут быть перенесены и на другие фигуры, в частности на *пустотелые фигуры* или вообще на поверхности. Примером пустотелых фигур может служить всякий кристаллический многогран-

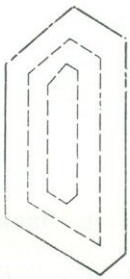


Рис. 6

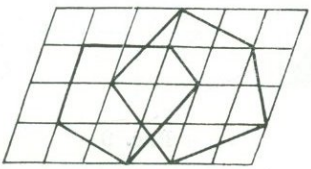


Рис. 7

ник, когда идет речь только о свойствах его поверхности. Поверхность раздела между кристаллом и средой может служить примером полярного пустотелого многогранника. В полярных пустотелых фигурах мы должны различать лицевую и оборотную стороны поверхности. Лицевую сторону пустотелой фигуры кристалла мы видим, рассматривая кристалл снаружи, а оборотную сторону фигуры мы видим, глядя на нее изнутри. Моделью пустотелой полярной фигуры может служить многогранник, сделанный из картона, одна сторона которого выкрашена в белый цвет, а другая — в черный. Для модели нейтральной пустотелой фигуры подходящим будет картон нейтральной, серой окраски с обеих сторон.

Такие модели очень удобны для анализа свойств симметричных фигур, потому что можно выворачивать эти модели наизнанку, что эквивалентно преобразованию положительной фигуры в зеркально-антиравную ей отрицательную фигуру.

10. Фигуры смешанной полярности. Выше мы говорили, что кроме фигур полярных и нейтральных мыслимы фигуры смешанной полярности. Одна из таких фигур показана на рис. 8. По своим геометрическим свойствам это правильный октаэдр, но четыре его грани (на чертеже черные) положительны, а другие четыре грани (на чертеже белые) отрицательны. Формы, образованные равными гранями, называются в кристаллографии *простыми формами*. Расширив понятие равенства фигур, мы, очевидно, должны расширить и понятие простой формы. В рассматриваемом многограннике все грани равны (в новом смысле) между собой, поэтому мы должны считать его простой формой — *октаэдром смешанной полярности.*

Со старой точки зрения исследуемая фигура представляет собой *комбинацию* двух простых форм: черного и белого тетраэдров. Покажем, что обе точки зрения могут прекрасно уживаться между собой. Если нашу фигуру мы представляем себе как неразрывную часть кристаллической среды — как часть, не выделенную в форме индивида, то наш многогранник со всей определенностью следует считать простой формой. В самом деле, для каждой черной грани нашей фигуры есть параллельная белая, но ведь парал-



Рис. 8

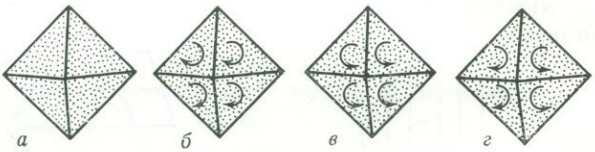


Рис. 9

лельные грани в кристаллической структуре абсолютно тождественны между собой; то, что одна из параллельных граней кажется нам белой, а другая — черной, объясняется только тем, что одна обращена к наблюдателю своей лицевой стороной, а другая — оборотной стороной. Но раз все восемь граней нашей фигуры одинаковы, то мы имеем дело, очевидно, с простой формой, простой не только с новой точки зрения, но даже в известной мере и со старой точки зрения.

Иначе будет обстоять дело, если рассматриваемый многогранник будет изображать собой кристаллический индивид в некристаллической среде. В этом случае лицевая и оборотная стороны одинаковых молекулярных плоскостей решетки, придя в соприкосновение со средой, приобретают дополнительные свойства; черные грани нашей фигуры будут теперь отличаться от белых не только по знаку, но и по другим признакам, вследствие чего фигура станет комбинацией двух тетраэдров.

11. Многообразие простых форм. Введение понятия знака фигур, как это следует уже из предыдущего, значительно расширяет многообразие простых форм; покажем это на том же примере октаэдра. Старое учение о симметрии позволяло различать три, даже, если угодно, четыре сорта нейтральных октаэдров: обыкновенный октаэдр, у которого все грани равны между собой не только совместимо, но и зеркально (рис. 9, *а*), две энантиоморфные модификации октаэдра (рис. 9, *б*, *в*) только с правыми или только с левыми гранями и октаэдр *смешанной зеркальности* (рис. 9, *г*) с правыми и левыми гранями. Не вдаваясь в подробности, укажем, что если мы будем приписывать один знак всем восьми или только четырем граням октаэдра, то число возможных модификаций октаэдра возрастет, считая и старые модификации, с четырех до шестнадцати. Каждая из них занимает в учении о

симметрии строго определенное место и с успехом может отображать реальные свойства кристаллов.

12. Положительный и отрицательный объем. Припишем положительным замкнутым фигурам положительный объем, а соответственным отрицательным фигурам — отрицательный объем. Применительно к реальной действительности положительный объем следует представлять себе как объем положительной фигуры, скажем, кристалла, в отрицательной среде — растворе. Аналогично следует понимать и отрицательный объем. Понятие о положительном и отрицательном объеме, будучи новым в учении о симметрии, не является таковым в других областях знания. В математике оно фигурирует под именем смешанного, скалярно-векторного произведения, а также под именем псевдоскаляра. В физике мы встречаемся с ним в картинах: диэлектрика в проводнике и проводника в диэлектрике, капельки воды в воздухе и пузырька воздуха в воде, положительной дырки в электронном облаке, не заполненных материей пустотах кристаллической структуры и т. д.

13. Новые симметрические преобразования. В самом начале нами было отмечено, что понятие симметрии слагается из понятий: фигуры, равенства фигур и дозволенных симметрических преобразований. Первые два понятия нами освещены достаточно полно и со старой и с новой точек зрения. Переходим к наиболее важному третьему понятию — к понятию симметрической операции.

Старое учение о симметрии допускало симметрические операции двух родов. Операции I рода объединяли в себе все виды движения: повороты, переносы и винтовые движения; операции II рода объединяли собой все зеркальные движения: зеркальные повороты и зеркальные переносы.

Всякая симметрическая операция преобразует равные части фигуры друг в друга, а всю фигуру в целом — в себя. Так как симметричная фигура по новым воззрениям может состоять из противоположно равных частей, а преобразование положительной части в отрицательную неизбежно должно сопровождаться изменением знака, то все новые симметрические преобразования должны иметь в качестве составного элемента *операцию перемены знака* фигуры. Сочетание этой операции со старыми операциями I рода даст новые симметрические преобразования, которые мы назовем преобразованиями III рода; аналогично, если перемена знака сочетается с операциями II рода, то мы будем иметь дело с операциями IV рода. Новым операциям мы дадим старые названия с добавлением приставки анти и будем, следовательно, говорить об *антивращении*, *антиотражении*, *зеркальном антивращении* и т. д. Рассмотрим несколько примеров симметричных фигур, характеризуемых новыми симметрическими преобразованиями.

14. Примеры симметричных фигур. Образец фигуры с одной простой антиосью шестого порядка показан на рис. 10. Как ви-

дим, фигура состоит из трех положительных черных и трех антиравных им отрицательных белых тетраэдров. Если повернуть фигуру в плоскости чертежа на 60°, то черные тетраэдры займут места белых, а фигура в целом придет в новое положение, отличное от исходного; иначе говоря, после одного поворота на 60° преобразования фигуры в себя не произойдет; для того чтобы это имело место, необходимо произвести перемену знака, т. е. применительно к данному случаю произвести замену белой окраски



Рис. 10



Рис. 11

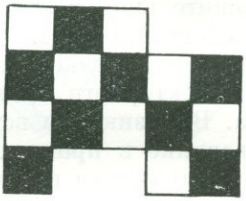


Рис. 12

черной и наоборот. Нет надобности особо отмечать, что рассматриваемая фигура, кроме антиоси шестого порядка, имеет простую ось симметрии третьего порядка.

Фигура с одной зеркальной антиосью шестого порядка показана на рис. 11. Она отличается от предыдущей тем, что три ее черных тетраэдра обращены головками за плоскость чертежа. Фигура преобразуется в себя зеркальным поворотом на 60°, сопровождаемым операцией перемены знака. Примером фигуры, которая обладает многими старыми и новыми элементами симметрии, может служить бесконечное шахматное поле из черных и белых квадратов (рис. 12). Предполагается, конечно, что разными окрасками отмечаются противоположные знаки элементарных квадратов.

Бесконечным фигурам, состоящим из равных черных и белых многоугольников, выполняющих плоскость в соответствии с требованиями симметрии, отвечают в природе, например, колеблющиеся пластинки из упругого материала (телефонные мембраны, пьезокварцевые пластинки и т. д.). В процессе колебания они разбиваются узловыми линиями на выпуклые (положительные) и вогнутые (отрицательные) участки, ритмически преобразующиеся друг в друга.

Здесь уместно заметить, что преобразование положительных фигур в отрицательные наблюдается решительно во всех случаях, когда мы имеем дело со свободными колебаниями, более того, с любым процессом, совершающимся периодически. Это обстоятельство служит, по нашему мнению, сильнейшим аргументом для введения в учение о симметрии операции перемены знака и понятия противоположного равенства фигур; одновременно оно является

прекрасной иллюстрацией закона единства противоположностей и превращения вещи в свою противоположность.

От бесконечных плоских фигур типа шахматного поля — прямой переход к бесконечным пространственным фигурам, состоящим из равных друг другу черных и белых многогранников, выполняющих пространство без промежутков. Такие фигуры, очевидно, с успехом могут быть использованы для интерпретации структуры кристаллов, состоящих из положительных и отрицательных ионов. Учитывая, однако, что понятие знака фигуры мы не связываем обязательно только со знаком электрических зарядов, а трактуем его шире, можно думать, что и всякая иная кристаллическая структура может быть истолкована с помощью положительных и отрицательных многогранников, выполняющих пространство. Верно или неверно это предвидение, покажет будущее, а пока перед учением о симметрии должна встать задача вывода всех возможных типов таких структур.

15. Аналогия между старыми и новыми операциями. Из рассмотрения фигуры шахматного поля можно видеть, что операция перемены знака в чистом ее виде не является для рассматриваемой фигуры симметрическим преобразованием. Нетрудно убедиться, что результат этой операции будет эквивалентен ряду самых разнообразных операций: 1) переносу всей фигуры на один квадрат вправо, влево, вверх и вниз и вообще любому переносу, определяемому какой угодно парой разноименных квадратов; 2) повороту фигуры на 90° вокруг любого узла в плоскости чертежа; 3) отражению в любой прямой, совпадающей с какой-либо стороной произвольного квадрата. Это показывает, что операция перемены знака, несмотря на качественное отличие от старых симметрических преобразований, в ряде случаев может быть истолкована как операция одинаковой с ними природы. Мы увидим далее, что с математической точки зрения вообще нет никакой принципиальной разницы между старыми и новыми операциями.

16. Фигуры наименьшей симметрии. Наибольшее число равных частей, на которое может быть разделена симметричная фигура, характеризует ее величину симметрии. Для примера укажем, что величина симметрии фигур, показанных на рис. 10 и 11, равна шести, так как эти фигуры состоят из шести равных тетраэдров.

Чему же равна величина симметрии каждого отдельно взятого положительного (черного), отрицательного (белого) и отвечающего им нейтрального (серого) тетраэдра (рис. 13)? Относительно положительного и отрицательного тетраэдров вопрос решается просто. Каждая из этих фигур имеет минимальную величину симметрии — единицу, так как и та и другая фигура не может быть разложена на равные части, или, говоря формально, может быть разделена всего на одну равную себе часть. Единственным симметрическим преобразованием этих фигур служит *идентичность* — операция (1 рода) оставления фигуры на месте. Операция перемены знака, очевидно, не будет для этих фигур симметрическим

преобразованием, потому что эта операция переведет положительную фигуру в отрицательную и наоборот, а всякое симметрическое преобразование должно переводить фигуру в себя. Фигуры с величиной симметрии, равной единице, принято называть *асимметричными*.

С первого взгляда кажется, что все только что изложенное целиком должно относиться и к нейтральному тетраэдру. Однако это не так. При определении понятия нейтральной фигуры было

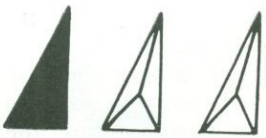


Рис. 13

указано, что ее можно рассматривать как две полярные фигуры разного знака, слившиеся между собой и нейтрализовавшие друг друга. Значит, наш нейтральный тетраэдр состоит не из одной, а из двух антиравных частей и может совмещаться сам с собой не только операцией идентичности, но и операцией перемены знака. Выходит, что все нейтральные фигуры симметричны; асимметричных нейтральных фигур не существует.

17. Перемена знака фигуры как операция в четырехмерном пространстве. Чтобы лучше отдать себе отчет в том, как нейтральный косой тетраэдр может быть симметричной фигурой, рассмотрим свойства *обыкновенного*, т. е., по-нашему, нейтрального косоугольного треугольника. Эта фигура *симметрична*, потому что может совмещаться сама с собой в результате отражения в собственной плоскости, которая является плоскостью симметрии фигуры. Но отражение в плоскости можно рассматривать как перемену знака координат всех точек фигуры по оси, нормальной к ее плоскости. Эта ось является для плоских фигур особенной осью, так как она выходит за пределы того двумерного пространства, в котором располагается плоская фигура. Так как координаты всех точек плоской фигуры по третьей оси всегда равны нулю, то отражение в плоскости фигуры будет эквивалентно изменению знака у нуля или перенесению точек плоскости с одной ее стороны на другую. Ясно, что такое перенесение точек не может вызвать никакого изменения в нейтральной плоской фигуре, почему операция отражения и является в данном случае симметрическим преобразованием.

Для того чтобы отражение в плоскости фигуры перестало быть ее симметрическим преобразованием, необходимо обе стороны фигуры сделать различными, например одну сторону фигуры сделать черной, а другую — белой или одной стороне приписать знак плюс, а другой — знак минус. Только такой двухцветный полярный треугольник будет действительно асимметричной плоской фигурой.

После изложенного должно быть ясно, что введенная нами для трехмерных фигур операция перемены их знака с математической точки зрения может рассматриваться как перемена знака четвертой координаты, которая в трехмерных фигурах всегда равна нулю, перемена знака у нуля. Не вдаваясь в подробности, укажем, что операция перемены знака у нуля не является чем-то новым и необычным: мы встречаемся с ней даже в элементарной математике, различая $+0$ от -0 в таких, например, выражениях, как: $\operatorname{cosec}(+0) = +\infty$; $\operatorname{cosec}(-0) = -\infty$.

18. Параллельность фигур. Мы рассмотрели, какие изменения должны были претерпеть под давлением развивающегося естествознания три главных понятия, на которых строится учение о симметрии: понятие фигуры, понятие равенства фигур и понятие симметрического преобразования. Естественно ожидать, что и все связанные с ними второстепенные понятия также должны претерпеть существенные изменения. Остановимся на двух из них: на понятиях параллельности и выворачивании фигур.

В элементарной геометрии мы знаем всего один вид параллельности прямых. После того как в физике для наглядности интерпретации сил и других векторных величин возникло представление о направленных прямых, изображаемых стрелками, в родовое понятие параллельности прямых пришлось ввести видовые различия; возникла потребность различать два и даже три вида параллельности: прямую параллельность (стрелки направлены в одну сторону), обратную параллельность, или антипараллельность (стрелки направлены в разные стороны), и старую прямо-обратную параллельность (стрелок прямые не имеют), которую можно и не рассматривать как самостоятельный вид параллельности.

Интересно, что уже в нашей работе по пьезоэлектрическим текстурам, работе, целиком основанной на старых представлениях симметрии, нам пришлось столкнуться с необходимостью дальнейшего расчленения понятия параллельности прямых на четыре разновидности, учитывая, что в явлениях природы приходится встречаться еще и с такими прямыми, в которых необходимо различать не только направления *вдоль* них, но и направления обтекания *вокруг* них (рис. 14). Скорость полета снаряда, выпущенного из нарезного ствола, может служить примером таких направленных крутящихся прямых.

До сих пор шла речь о параллельности прямых. Естественно было рассмотреть различные виды параллельного расположения также и других геометрических образов, в частности равных асимметричных многогранников. Если мы возьмем два совместимо или зеркально-равных тетраэдра, то обнаружим, что для них может идти речь только о двух видах параллельного расположения (рис. 15, *а* и *б*): о прямой и обратной параллельности. Распространить понятие четырех разновидностей параллельности на многогранники все же можно, но для этого придется иметь дело с фигурами, вывернутыми наизнанку, т. е. ввести в игру положительные и от-

рицательные многогранники. В самом деле, если наши тетраэдры мы будем мыслить себе пустотелыми, изготовленными из картона, выкрашенного с одной стороны в белый цвет, а с другой стороны — в черный, то осуществимы будут и два других вида (теперь уже разновидности) параллельности, показанные на рис. 15, *в* и *г*. Итак, мы видим, что к понятию отрицательных и положительных фигур можно подойти и со стороны исследования понятия параллельности.

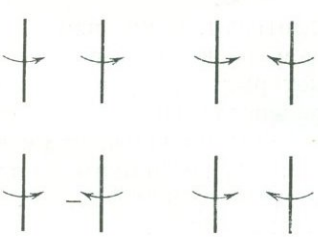


Рис. 14

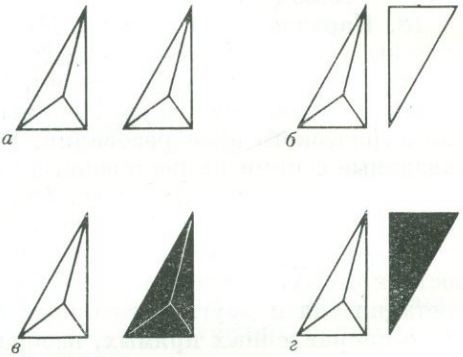


Рис. 15 ▸

19. Выворачивание фигур. Рассмотрим, кстати, и понятие выворачивания фигур, с которым нам только что пришлось встретиться. Принято считать, что геометрическая фигура выворачивается наизнанку при отражении в зеркале. Чтобы убедиться в этом, говорят, что правая перчатка после зеркального отражения преобразуется в левую, так же как и после выворачивания ее наизнанку. После всего изложенного легко показать, что это общепринятое представление требует существенной поправки, а именно: оно верно лишь при условии, если перчатка не имеет изнанки, точнее, если лицо и изнанка у нее одинаковы, если перчатка — нейтральная фигура. Если же правая перчатка подбита мехом, то при отражении в зеркале она, хотя и преобразуется в левую, но при этом не выворачивается мехом наизнанку; чтобы это имело место, нужно переменить знак фигуры. В этом мы видим лишний аргумент для введения новой операции перемены знака.

20. Заключение. Задача усовершенствования учения о симметрии, которую мы себе ставим, задача, целиком основанная на операции перемены знака фигуры, с математической точки зрения, очевидно, сводится к выводу и исследованию всех групп симметрии (групп ортогональных преобразований) трехмерных фигур в четырехмерном пространстве. С точки зрения естествоиспытателя, она сводится к интерпретации этих групп материальными трехмерными фигурами, к изображению и объяснению с их помощью известных явлений природы и предвидению новых.

Часть этой проблемы нами уже решена. Нами выведены все группы симметрии конечных кристаллографических материаль-

ных фигур, т. е. все точечные группы фигур, удовлетворяющих закону рациональности параметров. Общее их число оказалось равным 122. Из них 32 группы относятся к нейтральным фигурам, это — старые точечные кристаллографические группы; столько же групп относится к полярным фигурам; наконец, 58 групп относится к фигурам смешанной полярности[1]. Далее мы установили 17 точечных групп с бесконечными осями. Эти группы, хотя и не относятся к кристаллографическим в узком смысле, но играют в кристаллографии громадную роль и должны, по нашему мнению, найти полезное применение во многих вопросах физики.

В настоящее время мы заняты вопросом выявления на основе новых представлений всего многообразия простых форм. Самая важная и трудоемкая задача — задача исследования пространственных групп, которая должна с наибольшей полнотой осветить проблему структуры кристаллов, пока еще совсем не начата. Впереди маячат и другие важные проблемы симметрии, совсем не задетые в нашем обзоре: проблема диссимметрии, проблема материальных фигур многообразной полярности и т. д. Для нас ясно, что учение о симметрии отнюдь не может считаться законченной областью знания; оно будет жить и развиваться вместе с наукой в целом, с естествознанием в особенности и с ее составной частью — кристаллографией.

О ЧИСЛЕ И СОСТАВЕ АБСТРАКТНЫХ ГРУПП, ОТВЕЧАЮЩИХ 32 КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИМ КЛАССАМ[2]

В «Математических основах структурного анализа кристаллов» Б. Делоне, Н. Падурова и А. Александрова [2], по-видимому, впервые был поставлен вопрос о числе пространственных групп симметрии, различных с абстрактно-групповой точки зрения. Оставляя пока открытым вопрос о том, правильно ли найденное решение (219 абстрактных групп вместо 230 кристаллографических), мы поставили себе целью рассмотреть с указанной точки зрения не пространственные, а точечные кристаллографические группы.

В приводимой ниже таблице дается решение этой задачи. Абстрактные группы занумерованы римскими цифрами. 32 кристаллографических класса даны в общепринятых «интернациональных обозначениях [2]. Для каждого из 32 классов указано полное число (48, 24, 16, ...) симметрических операций условно через элементы симметрии и их «степени». В изоморфных кристал-

[1] Удобнее другая точка зрения (см. пп. 8,17): классические кристаллографические группы относятся к полярным фигурам, а нейтральные группы удвоенного порядка описывают симметрию нейтральных фигур (*прим. ред.*).

[2] Совместно с Н. В. Беловым и Е. Н. Беловой. ДАН СССР, 1948, т. 63, № 6, с. 669—672.



Профессора, преподаватели и студенты кафедры кристаллофизики Горьковского университета (1948 г.)

Сидят (слева направо): А. К. Шевелев, А. В. Шубников, В. Н. Белоусова, А. Елесина, Е. А. Софьенкова; стоят: А. В. Белюстин, Т. Н. Тархова, З. Г. Пинскер, В. И. Макеева, Н. В. Белов

лографических классах, соответствующих одной и той же абстрактной группе, аналогичные операции (элементы симметрии и их «степени») помещены одна под другой. В последнем столбце дана общая характеристика каждой абстрактной группы, объединяющей несколько кристаллографических.

Таким образом, 32 кристаллографическим классам отвечает всего 18 абстрактных групп. 10 абстрактных групп имеют каждая лишь по одному представителю среди кристаллографических, а 8 соответствует от 2 до 4. Четырьмя кристаллографическими классами представлена лишь одна (IX) абстрактная группа.

Легко видеть, что, например, в 4 классах IX группы произведение (левое или правое) всякой пары операций, стоящих на одних и тех же местах в любой из 4 строк, дает результирующую, находящуюся также на одном и том же месте в каждой из 4 строк, а это и есть условие «изоморфизма» соответствующих классов и без выписывания полного квадрата Кэйли.

Основной причиной, соединяющей несколько кристаллографических групп в одну абстрактную, является групповая тождественность операций четных осей: поворотной, зеркальной и инверсионной. Поэтому они обозначены одной буквой L, кото-

рая для зеркальной оси имеет сверху черту, а для инверсионной — кружок. Плоскость симметрии эквивалентна инверсионной оси 2-го порядка, а центр симметрии — зеркальной оси 2-го порядка.

Соответственно во II группе объединены 3 класса, каждый с одной двойной осью, либо поворотной, либо зеркальной, либо инверсионной. В IV группе объединены классы с одной четверной осью. Их только 2, поскольку набор операций четверной инверсионной оси тождествен набору операций четверной зеркальной ($\mathring{L}_4 = \bar{L}_4^{-1}$). В VI же группе мы снова имеем 3 класса соответственно всем 3 видам шестерных осей. В V группе объединены классы, каждый с тройкой двойных осей, одинакового рода или различных, но удовлетворяющих требованию, чтобы произведение любых 2 соответствующих операций всегда давало 3-ю. Таких троек возможно 3.

Нужно помнить, что групповое сходство чисто формальное и в старших группах изоморфно замещают друг друга из двойных осей лишь инверсионные (плоскости симметрии) и поворотные, поскольку зеркальных осей 2-го порядка (центров симметрии) не может быть больше одной. По этим осям («побочным») различаются классы в группе VII и пары классов из VIII и IX. Вообще же в группах VIII и IX, а также в XVII группе классы различаются по изоморфным и главным осям и побочным. Если два сорта побочных осей одинаковы, то результирующая главная ось будет поворотной; если побочные оси различных сортов, то результирующая будет инверсионной или зеркальной осью ($L_2' \times L_2'' = L_6 = P' \times P''$; $L_2' \times P'' = \bar{L}_6$ или $\mathring{L}_6$).

Возвращаясь к вопросу о целесообразности разделения точечных кристаллографических групп на 18, различных абстрактно, вместо 32, различных по элементам симметрии, не можем не обратить внимания на следующее. Принимая такую классификацию, мы тем самым соглашаемся считать одинаковыми многие из тех групп, которые в обычной классификации трактуются как различные; в частности, с новой точки зрения одинаковыми должны считаться моноклинные группы C_2 и C_s с триклинной группой C_i. Между тем кристаллы, отвечающие этим группам, обладают совершенно различными свойствами. Поэтому классическое разделение на 32 группы остается неизменным.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Б. Н. Делоне, Н. Н. Падуров, А. Д. Александров.* Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости с помощью рентгеновских лучей. Л.—М., ГТТИ, 1934, 328 с.

2. International Tables for X-ray Crystallography, vol. I. Symmety Groups. Birmingham, 1952.

3. *А. В. Шубников, В. А. Копцик.* Симметрия в науке и искусстве. М., «Наука», 1972, 339 с.

		Операции группы	Операции порядка
I	$C_1 = 1$	$L_1 = 1$	1-го 1
II *	$C_2 = 2$	$1,\ L_2$	1-го . . . . . 1 2-го . . . . . 1 Итого . . . 2
	$C_s = m$	$1,\ P\ (= \mathring{L}_2)$	
	$C_i = \bar{1}$	$1,\ C\ (= \overline{L}_2)$	
III	$C_3 = 3$	$1,\ L_3,\ L_3^{-1}$	1-го . . . . . 1 3-го . . . . . 2 Итого . . . 3
IV	$C_4 = 4$	$1,\ L_4,\ L_4^{-1},\ L_2\ (= L_4^2)$	1-го . . . . . 1 2-го . . . . . 1 4 го . . . . . 2 Итого . . 4
	$S_4 = \bar{4}$	$1,\ \overline{L}_1,\ L_4^{-1},\ L_2\ (= \overline{L}_4^2)$	
V	$V = D_2 = 222$	$1,\ L_2',\ L_2'',\ L_2'''$	1-го . . . . . 1 2-го . . 1 + 1 + 1 = 3 Итого . . . 4
	$C_{2h} = \dfrac{2}{m}$	$1,\ L_2,\ P\ (= \mathring{L}_2),\ C\ (= \overline{L}_2)$	
	$C_{2v} = mm$	$1,\ L_2,\ P'\ (= \mathring{L}_2'),\ P''\ (= \mathring{L}_2'')$	
VI	$C_6 = 6$	$1,\ L_6,\ L_6^{-1},\ L_3\ (= L_6^2),\ L_3^{-1},$ $L_2\ (= L_6^3)$	1-го . . . . . 1 2-го . . . . . 1 3-го . . . . . 2 6-го . . . . . 2 Итого . . . 6
	$C_{3i} = S_6 = \bar{3}$	$1,\ \overline{L}_6,\ \overline{L}_6^{-1},\ L_3\ (= \overline{L}_6^2),\ L_3^{-1},$ $L_2\ (= \overline{L}_6^3)$	
	$C_{3h} = \bar{6}$	$1,\ \mathring{L}_6,\ \mathring{L}_6^{-1},\ L_3\ (= \mathring{L}_6^2),\ L_3^{-1},$ $L_2\ (= \mathring{L}_6^3)$	
VII	$D_3 = 32$	$1,\ L_3,\ L_3^{-1},\ 3L_2$	1-го . . . . . 1 2-го . . . . . 3 3-го . . . . . 2 Итого . . . 6
	$C_{3v} = 3m$	$1,\ L_3,\ L_3^{-1},\ 3P\ (= 3\mathring{L}_2)$	
VIII	$D_4 = 42$	$1,\ L_4,\ L_4^{-1},\ L_2\ (= L_4^2),\ 2L_2',$ $2L_2''$	1-го . . . . . 1 2-го . . 1 + 2 + 2 = 5 4-го . . . . . 2 Итого . . . 8
	$C_{4v} = 4m$	$1,\ L_4,\ L_4^{-1},\ L_2\ (= L_4^2),$ $2P'\ (= 2\mathring{L}_2'),\ 2P''\ (= 2\mathring{L}_2'')$	
	$V_d = D_{2d} = \bar{4}2$	$1,\ \overline{L}_4,\ \overline{L}_4^{-1},\ L_2\ (= \overline{L}_4^2),\ 2L_2',$ $2P''\ (= 2\mathring{L}_2'')$	

Продолжение

		Операции группы	Операции порядка
IX	$D_6 = 62$	$1,\ L_6,\ L_6^{-1},\ L_3 (= L_6^2),\ L_3^{-1},$ $L_2 (= L_6^3),\ 3L'_2,$ $3L''_2\ (= 3L'_2 \times L_2)$	1-го . . . . . 1 2-го . . 1 + 3 + 3 = 7 3-го . . . . . 2 6-го . . . . . 2 Итого . . 12
	$C_{6v} = 6m$	$1,\ L_6,\ L_6^{-1},\ L_3 (= L_6^2),\ L_3^{-1},$ $L_2\ (= L_6^3),\ 3P',$ $3P''\ (= 3P' \times L_2)$	
	$D_{3d} = \bar{3}m$	$1,\ \overline{L}_6,\ \overline{L}_6^{-1},\ L_3\ (= \overline{L}_6^2),\ \overline{L}_3^{-1},$ $C\ (= \overline{L}_6^3),\ 3L'_2,$ $3P''\ (= 3L'_2 \times C)$	
	$D_{3h} = \bar{6}m$	$1,\ \mathring{L}_6,\ \mathring{L}_6^{-1},\ L_3\ (= \mathring{L}_6^2),\ L_3^{-1},$ $P\ (= \mathring{L}_3^6),\ 3L'_2,$ $3P''\ (= 3L'_2 \times P)$	
X	$V_h = D_{2h} =$ $= mmm$	$1,\ L'_2,\ L''_2,\ L'''_2,\ P'\ (= \mathring{L}'_2),\ P'',$ $P''',\ C\ (= \overline{L}_2)$	1-го . . . . . 1 2-го 1 + 1 + 1 + + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 Итого . . . 8
XI	$C_{2h} = \dfrac{4}{m}$	$1,\ L_4,\ L_4^{-1},\ \mathring{L}_4,\ \mathring{L}_4^{-1},$ $L_2\ (= L_4^2 = \mathring{L}_4^2),\ P,\ C$	1-го . . . . . 1 2-го . . 1 + 1 + 1 = 3 4-го . . . . 2 + 2 = 4 Итого . . . 8
XII	$D_{4h} = \dfrac{4}{m}\,mm$	$1,\ L_4,\ L_4^{-1},\ \mathring{L}_4,\ \mathring{L}_4^{-1},$ $L_2\ (= L_4^2 = \mathring{L}_4^2),$ $P,\ C,\ 2L'_2,\ 2L''_2,\ 2P',\ 2P''$	1-го . . . . . 1 2-го 1 + 1 + 1 + + 2 + 2 + 2 + 2 = 11 4-го . . . . 2 + 2 = 4 Итого . . 16
XIII	$C_{6h} = \dfrac{6}{m}$	$1,\ L_6,\ L_6^{-1},\ \overline{L}_6,\ \overline{L}_6^{-1},\ \mathring{L}_6,\ \mathring{L}_6^{-1},$ $L_3 (= L_6^2 = \overline{L}_6^2 = \mathring{L}_6^2),\ L_3^{-1},$ $L_2 (= L_6^3),\ P\ (= \mathring{L}_6^3),$ $C\ (= \overline{L}_6^3)$	1-го . . . . . 1 2-го . . 1 + 1 + 1 = 3 3-го . . . . . 2 6-го . . 2 + 2 + 2 = 6 Итого . . 12

Окончание

		Операции группы	Операции порядка
XIV	$D_{6h} = \frac{6}{m}\,mm$	$1,\ L_6,\ L_6^{-1},\ \overline{L}_6,\ \overline{L}_6^{-1},\ \mathring{L}_6,\ \mathring{L}_6^{-1},$ $L_3\ (=L_6^2=\overline{L}_6^2=\mathring{L}_6^2),\ L_3^{-1},$ $L_2,\ P,\ C,\ 3L_2',\ 3L_2'',\ 3P',\ 3P''$	1-го . . . . . 1 2-го 1 + 1 + 1 + +3 + 3 + 3 + 3 = 15 3-го . . . . . 2 6-го . . 2 + 2 + 2 = 6 Итого . . 24
XV	$T = 23$	$1,\ 3L_2,\ 4L_3,\ 4L_3^{-1}$	1-го . . . . . 1 2-го . . . . 3 × 1 = 3 3-го . . . . 4 × 2 = 8 Итого . . 12
XVI	$T_h = m3$	$1,\ 3L_2,\ 4\overline{L}_6,\ 4\overline{L}_6^{-1},\ 4L_3\ (=4\overline{L}_6^2),$ $4L_3^{-1},\ 3P,\ C$	1-го . . . . . 1 2-го 3×1+3×1+1 = 7 3-го . . . . 4 × 2 = 8 6-го . . . . 4 × 2 = 8 Итого . . 24
XVII	$O = 43$ $T_d = \overline{4}3$	$1,\ 3L_4,\ 3L_4^{-1},\ 3L_2\ (=3L_4^2),$ $4L_3,\ 4L_3^{-1},\ 6L_2'$ $1, 3\overline{L}_4,\ 3\overline{L}_4^{-1},\ 3L_2\ (=\overline{3L}_4^2),$ $4L_3,\ 4L_3^{-1},\ 6P'$	1-го . . . . . 1 2-го 3 × 1 + 6 × 1 = 9 3-го . . . . 4×2 = 8 4-го . . . . 3×2 = 6 Итого . . . 24
XVIII	$O_h = m3m$	$1,\ 3L_4,\ 3L_4^{-1},\ 3L_4,\ 3\overline{L}_4^{-1},$ $3L_2\ (=3L_4^2=3\overline{L}_4^2),\ 4\overline{L}_3,$ $4\overline{L}_6^{-1},\ 4L_3\ (=\overline{4L}_6^2),\ 4L_3^{-1},$ $C\ (=4\overline{L}_6^3),\ 3P,\ 6L_2',\ 6P''$	1-го . . . . . 1 2-го 3×1 + 6×1 + + 3×1×6 + + 1 + 1 = 19 3-го . . . . 4×2 = 8 4-го 3×2 + 3×2 = 12 6-го . . . . 4 × 2 = 8 Итого . . . 48

* Вводим представляющиеся естественными (см. далее в тексте) обозначения: для поворотных осей L_n, для зеркальных $\overline{L}_n$ и для инверсионных $\mathring{L}_n$.

(Так как в «интернациональных» обозначениях [2] символ $\bar{g}=g\bar{1}=\bar{1}g$ закреплен за инверсионными операциями, зеркальные удобнее обозначать символом $\tilde{g}=gm_\perp=m_\perp g$ [3]—*прим. ред.*)

О СИММЕТРИИ ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ[1]

(Доложено на сессии Отделения физико-математических наук АН СССР 16 февраля 1949 г.)

Постановка проблемы

Понятие симметрии было выработано сначала только для геометрических фигур. Е. С. Федоров в своем «Сокращенном курсе кристаллографии» 1910 г. так и пишет: «Симметрия есть свойство геометрических фигур повторять свои части...». В ряде наших работ [1—3] мы стремились показать, что понятие симметрии целесообразно распространить также и на «материальные фигуры», т. е. на такие фигуры, которым мы приписываем некоторые добавочные свойства сверх свойств чисто геометрических. В свете этих представлений мы должны, например, приписать различную симметрию кубу с шестью белыми гранями и кубу с пятью белыми и одной черной гранями.

В кристаллофизике часто говорят также о симметрии физических явлений, не уточняя ближе, что, собственно, при этом имеется в виду. Легко показать, что в простейших случаях симметрия физических явлений может быть сведена к симметрии фигур — часто геометрических или материальных. В самом деле, говоря, например, об оптической симметрии кристалла каменной соли, мы имеем в виду симметрию сферы, построенной по радиусам-векторам, пропорциональным скоростям света в соответствующих направлениях кристалла; аналогично симметрия вращения плоскости поляризации в кристаллах хлорноватокислого натрия может быть представлена сферой с радиусами-векторами, пропорциональными соответственным величинам удельного вращения плоскости поляризации. В обоих случаях симметрия физических свойств представляется фигурами — сферами, но в первом случае мы имеем дело с обыкновенной геометрической сферой, обладающей бесконечным множеством плоскостей симметрии, а во втором случае — со сферой без плоскостей симметрии, т. е. либо с правой, либо с левой сферой, в зависимости от характера вращения плоскости поляризации.

Такие сферы уже не являются чисто геометрическими фигурами, так как мы приписываем их точкам дополнительное свойство вращения, которое является излишним и несущественным для точек обыкновенной геометрической сферы.

Известно, что многие физические явления, происходящие в кристаллах, могут быть описаны с помощью векторов и тензоров. Приписывая физическим явлениям определенную симметрию, естест-

---

[1] Изв. АН СССР, сер. физ., 1949, т. 13, № 3, с. 347—375.

венно перенести понятие симметрии и на те величины, которыми эти явления описываются, т. е. на векторы и тензоры. Первой задачей, которую мы ставим себе в настоящей работе, как раз и является установление понятия симметрии векторов и тензоров. Вторая наша задача состоит в выводе всех возможных групп симметрии векторов и тензоров.

Симметрия конечных фигур

Симметрические операции конечных фигур. Симметричной фигурой называется, как известно, такая фигура, которая может совмещаться сама с собой, или, как говорят, преобразовываться в себя симметрическими операциями. Для конечных фигур — мы будем пока иметь в виду только конечные фигуры — симметрические операции исчерпываются *поворотами и зеркальными поворотами* фигуры на рациональную часть полного оборота вокруг некоторых осей. В случае простых поворотов эти оси называются просто *осями симметрии*; в случае зеркальных поворотов, т. е. поворотов, сопровождаемых отражением в плоскости, нормальной к оси вращения, последняя называется *зеркальной осью симметрии*. Операция поворота фигуры на полный оборот, эквивалентная оставлению фигуры на месте, называется *идентичностью*. Операция зеркального поворота на полный оборот эквивалентна *простому отражению* в плоскости симметрии. Операция зеркального поворота на полоборота, эквивалентная отражению в точке (*центре симметрии*), называется *инверсией*. Совокупность всех операций симметрии, коими данная фигура может совмещаться сама с собой, образует *группу симметрии*; основное свойство группы: две последовательно произведенные операции группы эквивалентны некоторой одной операции той же группы. Все операции симметрии конечных фигур оставляют на месте по меньшей мере одну *точку фигуры*. Такие точки фигуры называются особенными, а группы симметрии конечных фигур — точечными группами.

Представление симметричных операций схемами косинусов [1]. Пусть рассматриваемая нами симметричная фигура отнесена к прямоугольной системе координат X_1, X_2, X_3, начало которой совпадает с особенной точкой фигуры. Если заменим старую прямоугольную систему координат X_1, X_2, X_3 какой-либо новой, прямоугольной же системой X_1', X_2', X_3', оставляя начало на месте, то преобразование это может быть точно определено углами между старыми и новыми осями. Обычно даются не сами эти углы, а их косинусы, которые обозначаются буквой c с двумя индексами,

[1] О применении схем косинусов (матриц) для описания групп симметрии см. в [4]. Там же дана и литература по этому вопросу (см. также [5]— *прим. ред.*)

причем первый индекс является номером старой оси, а второй индекс — номером новой оси. Например,

$$c_{13} = \cos(X_1X_3'), \quad c_{32} = \cos(X_3X_2'), \quad c_{22} = \cos(X_2X_2').$$

Под углами между осями всегда разумеют углы, образованные положительными концами осей. Углы между осями могут принимать любые значения от 0 до 180°. При этих условиях косинус угла однозначно определяет угол, тогда как, например, одному синусу отвечают два угла. Вот почему для описания преобразований системы координат применяются именно косинусы.

Так как каждая старая ось может комбинироваться с каждой новой, то полное число косинусов равно девяти. Обычно они записываются в такой форме

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}. \end{matrix} \qquad (1)$$

В этом случае первые индексы являются номерами строк, а вторые — номерами столбцов.

Из девяти косинусов вполне независимыми являются только три, так как всегда имеют место следующие две группы соотношений между косинусами.

1. Если мы возьмем какую-либо строку или столбец схемы косинусов, то сумма квадратов выделенных этим способом косинусов будет равна единице. Например,

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 &= 1 \text{ (выделен первый столбец)}, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 &= 1 \text{ (выделена вторая строка)}. \end{aligned} \qquad (2)$$

2. Если выделить какую-либо пару строк или столбцов, то сумма, составленная из произведений сходственно расположенных косинусов, будет равна нулю. Например,

$$\begin{aligned} c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} &= 0 \text{ (выделены два первых столбца)}, \\ c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} &= 0 \text{ (выделены первая и третья строки)}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Напомним, что *правой* называют систему, в которой правой руке человека соответствует положительный конец оси X_1, левой руке — положительный конец оси X_2 и голове — положительный конец оси X_3. *Левая* система является зеркальным изображением правой: для получения левой системы достаточно оси X_1 и X_2 поменять местами.

Очевидно, что схемами косинусов описываются не только все переходы от правой системы к правой, или, что то же,— от левой к левой, но также все переходы от правой к левой и, наоборот, от

левой к правой. Переходы к одноименной системе координат представляют собою повороты, тогда как переходы к энантиоморфной системе являются в общем случае зеркальными поворотами и могут в частных случаях сводиться к простому отражению или инверсии.

Мы предполагали, что изменяет свое положение система координат, фигура же остается на месте. Так как в конечном счете бывает важно лишь относительное изменение положения фигуры и системы координат, то теми же схемами косинусов могут быть описаны все повороты и все зеркальные повороты фигуры относительно неподвижной системы координат. Поскольку все симметрические операции конечных фигур исчерпываются поворотами и зеркальными поворотами, указанными выше схемами косинусов могут быть описаны все симметрические операции конечных фигур.

Приведем несколько примеров.

Допустим, что плоскость X_1X_2 является плоскостью симметрии фигуры, тогда отражение в этой плоскости будет симметрической операцией. Легко проверить, что она может быть представлена схемой

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{matrix} \tag{4}$$

В самом деле, после отражения фигуры в плоскости X_1X_2 оси X_1 и X_2 останутся на своих местах, а ось X_3 изменит свое направление на обратное, поэтому косинусы c_{11} и c_{22}, как косинусы углов, равных 0°, будут равны единицам, а косинус c_{33}, как косинус 180°, будет равен отрицательной единице. Остальные косинусы, как косинусы углов в 90°, должны быть равны нулям.

Если ось X_3 является осью второго порядка, то операция поворота на 180° вокруг этой оси представится схемой

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix} \tag{5}$$

Если начало координат представляет собой центр симметрии, то операция инверсии представится схемой

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{matrix} \tag{6}$$

Рассмотрим более сложный случай. Пусть ось X_3 — ось симметрии бесконечного порядка фигуры. Тогда поворот на любой угол α вокруг этой оси есть симметрическая операция. Найдем общую форму соответствующей схемы косинусов. Рассмотрим

рис. 1, на котором изображены обе системы координат — старая и новая,— отвечающие рассматриваемому случаю, причем оси X_3 и X_3' расположены нормально к плоскости чертежа. Легко усмотреть из рисунка, что в данном случае имеют место следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = c_{22} = \cos\alpha,\\
&c_{33} = 1,\\
&c_{21} = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\\
&c_{12} = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha,\\
&c_{31} = c_{32} = c_{13} = c_{23} = 0.
\end{aligned}
$$

Разместив полученные значения косинусов в принятом порядке, будем иметь

$$
\begin{matrix}
\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\
\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\
0 & 0 & 1.
\end{matrix}
\qquad (7)
$$

Обозначая, для краткости, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ начальными буквами c и s, окончательно получим для рассматриваемой операции следующую схему, именуемую *ротором*

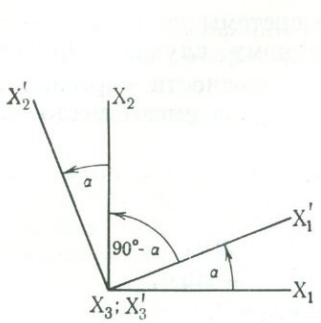
$$
\begin{matrix}
c & -s & 0\\
s & c & 0\\
0 & 0 & 1.
\end{matrix}
\qquad (8)
$$

Заметим, что в схемах косинусов стоят только косинусы, хотя некоторые из них, как, например, в данном случае, могут быть численно равны синусам.

Симметрия полярных векторов

Вектором в широком смысле называют всякую направленную величину, которую можно изобразить прямолинейным отрезком; при этом принимается, что длина отрезка пропорциональна численному значению вектора, а направление отрезка совпадает с направлением вектора. Примерами векторов могут служить величины: сила, ускорение, напряженность электрического поля и т. д.

В более узком смысле под векторами разумеют только такие из величин, изображаемых направленными отрезками прямой, которые могут разлагаться на слагающие (компоненты) по правилу параллелограмма (параллелепипеда). Если вектор p представить себе диагональю параллелепипеда с ребрами, идущими по осям X_1, X_2, X_3 прямоугольной системы, то компонентами p_1, p_2, p_3 вектора будут сами эти ребра (рис. 2).



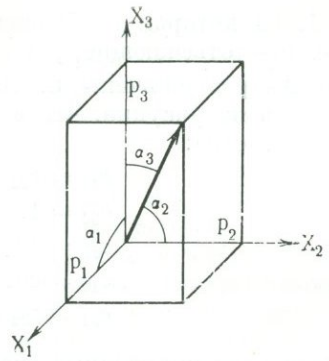


Рис. 1. Преобразование прямоугольной системы координат X_1, X_2, X_3 в прямоугольную же систему X'_1, X'_2, X'_3 путем поворота фигуры на угол α вокруг оси X_3.

Рис. 2. Схема разложения вектора по правилу параллелепипеда в прямоугольной системе координат X_1, X_2, X_3.

Легко видеть, что вектор однозначно определяется по величине и направлению тремя его компонентами, а именно: абсолютная величина вектора определяется соотношением

$$|p| = +\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \tag{9}$$

а его направление (направляющие косинусы) — соотношениями:

$$\cos\alpha_1 = p_1/p, \qquad \cos\alpha_2 = p_2/p, \qquad \cos\alpha_3 = p_3/p. \tag{10}$$

Из аналитической геометрии мы знаем, что компоненты вектора, которые численно равны координатам конца вектора, преобразуются при обратном переходе от новой к старой системе координат по формулам:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_{11}p'_1 + c_{12}p'_2 + c_{13}p'_3, \\ p_2 &= c_{21}p'_1 + c_{22}p'_2 + c_{23}p'_3, \\ p_3 &= c_{31}p'_1 + c_{32}p'_2 + c_{33}p'_3, \end{aligned} \tag{11}$$

где p_1, p_2, p_3 — старые компоненты вектора, p'_1, p'_2, p'_3 — новые компоненты вектора и c_{ik} — косинусы углов между старой осью X_i и новой осью X'_k.

Условимся записывать эти формулы более компактно в форме таблички

	p'_1	p'_2	p'_3
p_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
p_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
p_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

(12)

где в строке над горизонтальной чертой выписываются новые компоненты, в столбце левее вертикальной черты — старые компоненты, а в строках и столбцах, определяемых старыми и новыми компонентами,— известные нам косинусы. В этой форме записи, как видим, сохранен порядок расположения косинусов, принятый в ранее описанных схемах косинусов.

Еще более коротко уравнения преобразования компонент вектора могут быть представлены одной формулой

$$p_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} p'_k. \tag{13}$$

Если старые координаты принять за новые, а новые — за старые, то эта формула перепишется так:

$$p'_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ki} p_k. \tag{14}$$

Сравнивая между собой обе последние формулы, мы видим, что в обоих случаях первый индекс у c берется от старой компоненты, второй — от новой компоненты.

В векторном исчислении разъясняется, что формулы преобразования компонент вектора могут быть положены в основу наиболее рационального определения понятия вектора и притом лишь так называемого *полярного* вектора. Согласно этому определению мы будем в дальнейшем под полярным вектором разуметь такую тройку действительных чисел (откладываемых по координатным осям), которая при переходе от одной системы координат к другой преобразуется в новую тройку чисел по формулам (11) — (14).

Заметим, что, каким бы преобразованиям с помощью схем косинусов (c_{ik}) ни подвергался полярный вектор, *сам вектор* (т. е. его величина и направление) этими преобразованиями не изменяется. Ясно, что в противном случае понятие вектора было бы лишено физического смысла, так как странно было бы иметь дело с величинами, которые менялись бы по существу в зависимости от способа их описания.

Если дело обстоит так, мы можем для описания вектора выбрать такую систему координат, какую считаем для себя удобной. Такой системой, в частности, будет та, в которой ось X_3 совпадает по направлению с самим вектором. Ясно, что в этом случае третья компонента вектора будет равна самому вектору ($p_3 = p$), тогда как две другие его компоненты будут равны нулю ($p_1 = p_2 = 0$).

После этого введения мы можем перейти к поставленному нами вопросу о симметрии полярного вектора. Если бы полярный вектор был просто прямолинейной стрелкой без всяких приписываемых ей дополнительных свойств, так или иначе вытекающих из формул преобразования, то поставленный вопрос просто свелся бы к непосредственному рассмотрению свойств стрелки как неко-

торой материальной фигуры. Так как поворот стрелки на любой угол вокруг нее самой не может изменить ни ее величины, ни ее направления, а для вектора существенными являются только его величина и направление, то мы могли бы утверждать, что полярный вектор обладает осью симметрии бесконечного порядка, совпадающей по направлению с вектором. Аналогично мы убедились бы в наличии у полярного вектора бесконечного множества продольных плоскостей симметрии. Далее, мы констатировали бы отсутствие у полярного вектора поперечной плоскости симметрии, поскольку стрелка направлена в одну сторону от начала к концу вектора. Окончательно мы установили бы, что симметрия вектора отвечает группе $\infty \cdot m$*.

Теперь, после того как полярный вектор, в роли некоторой тройки чисел, перестал для нас быть просто фигурой, вопрос о симметрии вектора должен осложниться, и нам прежде всего надлежит разъяснить, что же, собственно, мы будем разуметь в данном и подобных случаях под симметрией. Будем считать, что вектор обладает тем или иным элементом симметрии, если в результате применения соответствующей операции симметрии каждый компонент вектора численно преобразуется в себя.

Установив понятие симметрии применительно к новому определению вектора, мы легко можем проверить, что найденная нами для прямолинейной стрелки симметрия $\infty \cdot m$ будет в то же время и симметрией полярного вектора в новом, точном смысле. Чтобы доказать это, предположим сначала, что полярный вектор совпадает по направлению с осью X_3, т. е. $p_3 = p$, $p_1 = p_2 = 0$.

Повернем вектор на произвольный угол α вокруг оси X_3 и посмотрим, действительно ли при этом каждая его компонента преобразуется в себя, как этого требует наличие в векторе оси бесконечного порядка. Как было показано раньше, поворот системы координат на угол α вокруг оси X_3 описывается схемой косинусов (8)

$$\begin{matrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Подставляя их в формулы преобразования (14), действительно убеждаемся в том, что каждая компонента преобразуется в себя:

$$p_1' = c_{11}p_1 + c_{21}p_2 + c_{31}p_3 = 0,$$
$$p_2' = c_{12}p_1 + c_{22}p_2 + c_{32}p_3 = 0,$$
$$p_3' = c_{13}p_1 + c_{23}p_2 + c_{33}p_3 = p_3.$$

---

* Мы будем пользоваться здесь символикой групп симметрии, описанной в цитированных выше «Основах кристаллографии». Символом ∞ обозначается ось бесконечного порядка, символом m — плоскость симметрии, точка $(\cdot)$ — знак параллельности, двоеточие $(:)$ — знак перпендикулярности (символы $\overline{g} = gm_\perp = m_\perp g$ обозначают зеркальные оси, $\overline{2}$ — центр симметрии — *прим. ред.*).

Итак, мы доказали, что ось X_3, совпадающая по направлению с самим вектором, является осью бесконечного порядка вектора.

Докажем теперь, что продольная по отношению к вектору плоскость X_1X_3 есть плоскость симметрии вектора. В самом деле, если мы произведем отражение в этой плоскости, т. е. применим для формул преобразования схему косинусов

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{matrix}$$

то будем опять иметь

$$\begin{aligned} p_1' &= 0, \\ p_2' &= 0, \\ p_3' &= p_3. \end{aligned}$$

Как видим, в этом случае опять каждая компонента вектора преобразуется в себя. Значит плоскость X_1X_3 есть действительно плоскость симметрии вектора. При наличии оси ∞ эта плоскость должна быть повторена бесконечное множество раз.

Легко убедиться, что наш вектор не имеет никаких других элементов симметрии и, в частности, что он не имеет поперечной плоскости симметрии. Действительно, если мы произведем отражение в поперечной плоскости X_1X_2, применив в формулах преобразования схему косинусов

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{matrix}$$

то получим

$$\begin{aligned} p_0' &= 0, \\ p_2' &= 0, \\ p_3' &= -p_3. \end{aligned}$$

Как видим, третья компонента в результате описанной операции изменяет свой знак, т. е. не преобразуется в себя.

Итак, окончательно, полярный вектор обладает симметрией $\infty \cdot m$, как и простая прямолинейная стрелка. Название *полярный*, как видим, для него вполне оправдывается, так как он не содержит элементов симметрии с операциями, совмещающими начало вектора с его концом.

Мы взяли для рассмотрения вектор в том его частном положении, когда он был направлен по оси X_3, но распространили наш вывод о симметрии на полярный вектор любой ориентации по отношению к системе координат, поскольку свойства вектора, как было отмечено выше, не должны зависеть от выбора системы координат. Легко показать, что это ограничение не является обязатель-

ным. Возьмем вектор p в его общем положении, как он, например, изображен на рис. 2. Если теперь повернем систему координат на любой угол вокруг оси, совпадающей по направлению с вектором, то увидим непосредственно, что в результате этого поворота все компоненты вектора, отложенные по координатным осям, изменят свою ориентацию в пространстве, но никоим образом не изменят своих численных значений, а это ведь и означает по принятому выше, что компоненты вектора, а следовательно, и сам



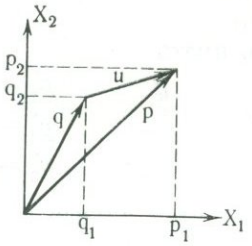


Рис. 4. Преобразование вектора q в вектор p с помощью вектора смещения u

◂ **Рис. 3.** Внешний вид одного из возможных пироэлектрических кристаллов, обладающих симметрией $3 \cdot m$

вектор этими поворотами преобразуются в себя, т. е. ось поворота есть ось симметрии бесконечного порядка. Аналогично можно показать, что и продольные плоскости являются для вектора плоскостями симметрии и что в целом полярный вектор обладает симметрией $\infty \cdot m$.

Чтобы покончить с полярными векторами, рассмотрим один пример из кристаллофизики. Известно, что многие кристаллы способны электризоваться при нагревании (явление пироэлектричества). Предполагается, что в чистом виде это явление может наблюдаться только в кристаллах, обладающих постоянной электрической поляризацией. Последняя измеряется *вектором поляризации*, который является полярным вектором и численно равен плотности зарядов на гранях кристалла, расположенных нормально к направлению вектора. Пусть изображенный на рис. 3 кристалл является одним из возможных пироэлектрических кристаллов с симметрией $3 \cdot m$, как у типичного представителя таких кристаллов, турмалина. В силу однородности кристаллического строения заряд верхней грани кристалла, обусловленный постоянной внутренней поляризацией кристалла, должен быть распределен по поверхности грани совершенно равномерно. Поэтому если мы для определения величины вектора поляризации выберем площадку в один квадратный сантиметр на грани сначала так, как показано на рисунке, а затем повернем площадку на какой-либо

угол вокруг оси X, то в обоих случаях обнаружим на ней один и тот же заряд, а значит, получим одно и то же значение вектора поляризации. Но поворот вектора на произвольный угол без изменения его величины означает наличие в нем оси бесконечного порядка. Аналогично решается вопрос и о продольных плоскостях симметрии вектора поляризации. Отсюда следует, что вектор постоянной поляризации обладает симметрией $\infty \cdot m$, как и всякий полярный вектор, что не мешает самому кристаллу обладать более низкой симметрией.

Симметрия полярных тензоров

1. Пусть компоненты полярных векторов q и p связаны между собой линейными соотношениями

$$\begin{array}{c|ccc} & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline p_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ p_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{array} \tag{15}$$

отличающимися от соотношений (12) по существу только тем, что в них вместо косинусов c_{ik}, связанных между собой условиями (2) и (3), входят некоторые постоянные коэффициенты a_{ik}, для которых эти условия не обязательны.

Совокупность величин a_{ik}, которую принято записывать символом (a_{ik}) или в развернутом виде

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{array} \tag{16}$$

вполне аналогичной схеме косинусов (1), называют *тензором* или, точнее, *полярным тензором второго порядка.*

Слово «полярный» в применении к тензору означает, что им обусловлена линейная зависимость между двумя полярными векторами. То же слово в применении к прямым и плоскостям имеет совершенно другой и даже до известной степени противоположный смысл, ибо так называемые полярные тензоры, как увидим далее, всегда обладают центром симметрии и в силу этого обстоятельства не могут быть полярными в обычном кристаллографическом смысле.

Из определения тензора видно, что его можно рассматривать как некоторую величину, с помощью которой данный вектор q преобразуется в вектор p (рис. 4) или данный пучок векторов q преобразуется в какой-то другой пучок векторов p. Учитывая же, что всякую фигуру можно формально рассматривать как пучок векторов, исходящих из какой-либо точки ко всем точкам фигуры, тензор можно трактовать как некий оператор, с помощью ко-

торого одна фигура определенным образом преобразуется в другую. Заметим, что симметрические операции, осуществляемые с помощью ранее описанных схем косинусов, являются частными случаями тензорных преобразований, и сами эти схемы представляют собой тензоры специального характера. Примером тензора может служить также так называемая однородная деформация тела, слагающаяся в общем случае из девяти компонент: трех относительных удлинений вдоль координатных осей и шести относительных сдвигов. Как известно, однородной деформацией шар, мысленно выделенный где-либо внутри тела, всегда преобразуется в эллипсоид.

В тензорном исчислении доказывается, что при переходе от старой к новой прямоугольной системе координат с тем же началом — переходе, осуществляемом с помощью той или иной схемы косинусов, компоненты a_{ik} тензора преобразуются в новые компоненты a'_{ik} и обратно a'_{ik} в a_{ik} по формулам:

$$a_{ik} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} c_{il}a_{km}a'_{lm},$$
$$a'_{ik} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} c_{li}c_{mk}a_{lm}. \qquad (17)$$

Для примера приводим эту формулу в развернутом виде для преобразования a_{13} в a'_{13}:

$$a'_{13} = c_{11}c_{13}a_{11} + c_{11}c_{23}a_{12} + c_{11}c_{33}a_{13} + c_{21}c_{13}a_{21} + c_{21}c_{23}a_{22} + c_{21}c_{33}a_{23} + c_{31}c_{13}a_{31} + c_{31}c_{23}a_{32} + c_{31}c_{33}a_{33}.$$

Эти формулы вполне аналогичны формулам преобразования вектора (13), (14). Особо следует подчеркнуть то же правило расстановки индексов у c, а именно: на первые места ставятся индексы от старых компонент тензора (без штрихов), на вторые — индексы от новых компонент (со штрихами). Все отличие сводится к тому, что в формулах преобразования вектора косинусы c_{ik} входят в каждый член множителем один раз, а в формулах для тензора два раза. Соответственно этому вектор можно трактовать как тензор первого порядка, а рассматриваемый тензор — как тензор второго порядка. Различие в порядке обеих величин выступает еще отчетливее, если обратить внимание на то, что число компонент вектора равно трем, т. е. трем в первой степени, а число компонент тензора равно девяти, т. е. трем во второй степени. Очевидно, что с этой точки зрения обычные величины, характеризуемые одним числом, *скаляры*, можно рассматривать как тензоры нулевого порядка, поскольку они имеют одну (три в нулевой степени) компоненту.

Пользуясь формулами преобразования (17), можно доказать, что при переходе к новой системе координат *сам тензор* не изме-

няется. Мы хотим этим сказать следующее. Если с помощью данного тензора a_{ik}, отнесенного к некоторой декартовой системе осей X_1, X_2, X_3, вектор q преобразуется в вектор p, а этот последний после перехода к новой декартовой системе осей X_1', X_2', X_3' преобразуется в вектор p', то тот же вектор p' мы должны получить и другим путем, а именно: если сначала преобразуем тензор a_{ik} и вектор q путем перехода к новой системе соответственно в тензор a'_{ik} и вектор q', а затем этот последний преобразуем с помощью тензора a'_{ik}.

После сделанного введения нетрудно будет видеть, что выработанное нами для вектора понятие симметрии целиком может быть перенесено и на тензоры, а именно: мы будем считать, что тензор обладает тем или иным элементом симметрии, если в результате применения соответствующего симметрического преобразования все компоненты тензора преобразуются в себя ($a'_{ik} = a_{ik}$).

2. Опираясь на это определение, докажем, что всякий полярный тензор второго порядка, в том числе и тензор (16) общего вида, обладает центром симметрии ($\bar{2}$). Если это верно, то после инверсии, выражаемой схемой косинусов

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{matrix}$$

каждая компонента тензора (a_{ik}) должна преобразоваться в себя. Применив формулы (17) для каждой из девяти компонент тензора, легко убедиться, что это как раз и имеет место. Например,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= c_{11}c_{11}a_{11} = a_{11}, \\ a'_{12} &= c_{11}c_{22}a_{12} = a_{12}, \\ a'_{13} &= c_{11}c_{33}a_{13} = a_{13}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Итак, все группы симметрии полярных тензоров мы должны искать среди групп, обладающих центром симметрии. К ним принадлежат следующие группы:

$$\begin{matrix} \bar{2} & \bar{6} & \overline{10}, & \ldots & \\ 2:m & 4:m & 6:m & \ldots & \infty:m \\ \bar{6}\cdot m & \overline{10}\cdot m & \overline{14}:m & \ldots & \infty:m \\ m\cdot 2:m & m\cdot 4:m & m\cdot 6:m & \ldots & m\cdot\infty:m, \end{matrix}$$

а также группы

$$\bar{6}/2, \quad \bar{6}/4, \quad 3/\overline{10}, \quad \infty/\infty\cdot m.$$

В приведенных символах групп симметрии простые оси симметрии обозначены числами, указывающими порядок осей, зеркальные оси — числами с черточкой над цифрой, плоскости симмет-

рии — буквой m; точка является знаком параллельности, двоеточие — знаком перпендикулярности и косая черта — знаком косого расположения осей симметрии друг относительно друга. В символ группы входят только *образующие* элементы симметрии, достаточные для характеристики всей группы.

В дальнейших рассуждениях мы будем исходить из предположения, что тензор общего вида (16) не имеет никаких других элементов симметрии, кроме обязательного центра симметрии. Это предположение будет оправдано тем, что симметрия $\overline{2}$ исходного тензора будет постепенно, т. е. путем добавления отдельных элементов симметрии, переведена в шаровую симметрию $\infty/\infty \cdot m$.

3. Теперь посмотрим, не может ли тензор (16) обладать, кроме центра симметрии, также и другими элементами симметрии, и если может, то при каких условиях. Предположим, например, что тензор имеет ось второго порядка и что она совпадает по направлению с осью X_3.

Схема косинусов, отвечающая операции поворота вокруг оси X_3 на угол в 180°, имеет форму

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Применяя ее к формулам преобразования (17), получим следующие результаты:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= c_{11}c_{11}a_{11} = a_{11}, \\
a'_{12} &= c_{11}c_{22}a_{12} = a_{12}, \\
a'_{13} &= c_{11}c_{33}a_{13} = -a_{13} = 0, \\
a'_{21} &= c_{22}c_{11}a_{21} = a_{21}, \\
a'_{22} &= c_{22}c_{22}a_{22} = a_{22}, \\
a'_{23} &= c_{22}c_{33}a_{23} = -a_{23} = 0, \\
a'_{31} &= c_{33}c_{11}a_{31} = -a_{31} = 0, \\
a'_{32} &= c_{33}c_{22}a_{32} = -a_{32} = 0, \\
a'_{33} &= c_{33}c_{33}a_{33} = a_{33}.
\end{aligned}$$

Мы видим, что, в то время как пять компонент a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{33} тензора после рассматриваемого поворота системы координат преобразовались в себя, остальные четыре компоненты a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32} преобразовались в те же величины с обратными знаками. Отсюда следует, что тензор (16) вообще не обязан иметь предположенной оси симметрии. Только при условии, если каждая из указанных четырех компонент была равна нулю, перемена их знаков не может повлечь за собой изменения их величины. Отсюда окончательно вытекает, что, если ось X_3 является осью второго поряд-

ка, тензор должен иметь форму

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}, \end{matrix} \qquad (18)$$

где неравные нулю компоненты все могут быть между собой различными. Так как этот тензор по предыдущему должен обладать еще и центром симметрии, то по правилам последовательного применения (умножения) операций симметрии этот тензор должен иметь также и поперечную плоскость симметрии. Ниже будет показано, что добавление какого-либо нового элемента симметрии к этим трем должно изменить форму данного тензора, поэтому мы можем утверждать, что этот тензор обладает именно симметрией $2 : m$, а не содержит эту группу в себе в качестве подгруппы.

Выше мы отметили, что тензор не может менять свое основное свойство — определенным образом превращать вектор q в вектор p — в зависимости от выбора системы координат. В равной мере не может изменяться и другое важное свойство тензора — его симметрия, что можно доказать в общем виде, опираясь на формулы преобразования (17). Поэтому и только что рассмотренный нами тензор (18) будет всегда обладать симметрией $2 : m$, к какой бы новой системе координат он ни был отнесен, хотя обнаружить эту симметрию бывает не так просто в тех случаях, когда после перехода к новой системе координат те компоненты, которые в исходной системе координат были равны нулю, приобретают значения, не равные нулю.

4. Посмотрим теперь, можно ли к полученному нами тензору (18) добавить, кроме поперечной, еще и продольную плоскость симметрии, совместив ее, например, с плоскостью X_1X_3, и если можно, то как это отзовется на форме тензора?

Операция зеркального отражения в плоскости X_1X_3 осуществляется с помощью схемы косинусов

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Подставляя эти значения косинусов в формулы преобразования (17), увидим, что компоненты a_{12} и a_{21} преобразуются при этих условиях в себя с обратным знаком, а так как по условию они в то же время должны преобразовываться просто в себя, то одновременное осуществление обоих требований возможно лишь тогда, когда $a_{12} = a_{21} = 0$. Другие компоненты тензора (18) отражением в продольной плоскости не изменяются. Окончательно тензор (18) преобразуется в тензор

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}. \end{matrix} \qquad (19)$$

Так как добавление одной продольной плоскости X_1X_3 к группе $2:m$ означает добавление также и второй продольной плоскости X_2X_3, перпендикулярной к первой, то полная симметрия полученного тензора (19) будет, очевидно, соответствовать группе $m\cdot 2:m$.

5. Рассмотрим, далее, как должна измениться форма тензора общего вида (16), если одна из его координатных осей, скажем ось X_3, будет осью бесконечного порядка.

Поскольку ось бесконечного порядка есть в то же время ось второго порядка, то в искомом тензоре, как и в тензоре (18), обладающем осью второго порядка, четыре компоненты a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32} должны быть равны нулю. Остается решить, что произойдет с остальными пятью компонентами.

Схема косинусов, отвечающая поворотам на любой угол α вокруг оси ∞, совпадающей с координатной осью X_3, как мы знаем, должна иметь вид

$$\begin{matrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Применяя ее к формулам преобразования для компонент a'_{11} и a'_{33}, будем иметь

$$a'_{11} = c^2a_{11} + csa_{12} + csa_{21} + s^2a_{22}, \quad a'_{33} = a_{33}.$$

Так как по условию компоненты тензора должны преобразовываться в себя, штрихи в левых частях этих равенств могут быть убраны. Первое из приведенных выражений после замены c^2 на $1-s^2$ и несложных преобразований может быть тогда переписано в форме

$$\frac{a_{12}+a_{21}}{a_{11}-a_{22}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Это равенство может сохраняться при всех значениях угла α только при условии, если числитель и знаменатель в левой части одновременно равны нулю, т. е. если

$$a_{21} = -a_{12}, \quad a_{11} = a_{22}.$$

Как видим, достаточно было рассмотреть преобразование только одной компоненты a_{11}, чтобы решить вопрос о четырех интересующих нас компонентах. Второе равенство показывает, что компонента a_{33} при поворотах вокруг оси ∞ не изменяется. Окончательно тензор общего вида в этом специальном случае принимает форму

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}. \end{matrix} \tag{20}$$

Так как полученный нами тензор (20) обладает одновременно и центром симметрии и осью бесконечного порядка, то он должен

также иметь и поперечную плоскость симметрии, поскольку операция отражения в ней есть произведение инверсии на поворот вокруг оси ∞ на 180°. В целом симметрия тензора (20) будет отвечать группе $\infty : m$.

6. Далее представляет интерес решить вопрос, что произойдет с только что рассмотренным тензором (20), если к нему будет добавлена продольная плоскость симметрии, совпадающая, скажем, с координатной плоскостью X_1X_3.

Как уже говорилось выше, операция зеркального отражения в этой плоскости осуществляется с помощью схемы косинусов

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Пользуясь ею и формулами (17), получим для преобразованной компоненты a_{12} выражение

$$a'_{12} = c_{11}c_{22}a_{12} = -a_{12}.$$

Кроме того, по условию $a'_{12} = a_{12}$, откуда $a_{12} = 0$, а так как в тензоре (20) $a_{21} = -a_{12}$, то и $a_{21} = 0$. Другие компоненты тензора (20), как легко проверить, остаются после отражения в плоскости X_1X_3 без изменения. Окончательно тензор (20) переходит в тензор

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}. \end{matrix} \qquad (21)$$

Так как добавление одной продольной плоскости симметрии к оси ∞ порождает бесчисленное множество продольных плоскостей, то полная симметрия полученного нами тензора (21) будет отвечать группе $m \cdot \infty : m$.

7. Нам остается рассмотреть еще только один случай симметрии тензоров. Мы знаем, что добавление к группе $m \cdot \infty : m$ любого элемента симметрии, выводящего ось ∞ из ее положения, преобразует эту группу в шаровую группу $\infty/\infty \cdot m$. Возьмем в качестве этого элемента симметрии ось 4, нормальную к оси ∞ и совпадающую по направлению, скажем, с координатной осью X_1. Отвечающая этому случаю схема косинусов будет

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0. \end{matrix}$$

Формулы преобразования (17) дают

$$a'_{33} = c_{23}c_{23}a_{22} = a_{22} = a_{11}.$$

Окончательно тензор (21) преобразуется в тензор

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{matrix} \qquad (22)$$

шаровой симметрии $\infty/\infty \cdot m$.

Мы описали шесть групп симметрии, и, собственно, шесть форм тензоров второго порядка, отнесенных к специально выбранным системам координат, которые мы будем именовать *главными* системами. Полученный нами результат суммирован в табл. 1.

Таблица 1

Симметрия и форма полярных тензоров

Симметрия тензора	Форма тензора	Расположение осей
$\bar{2}$	$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$	Произвольное
$2:m$	$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Ось 2 совпадает с осью X_3
$m\cdot 2:m$	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Оси 2 совпадают с осями X_1, X_2, X_3
$\infty:m$	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Ось ∞ совпадает с осью X_3
$m\cdot\infty:m$	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Ось ∞ совпадает с осью X_3
$\infty/\infty\cdot m$	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{matrix}$	Произвольное

8. Нам остается доказать, что указанными шестью группами симметрии исчерпываются все группы симметрии полярных тензоров второго порядка.

Выше было доказано, что группами симметрии полярных тензоров второго порядка могут быть только группы, содержащие центр симметрии. Таких групп вообще существует бесчисленное

множество. Они целиком охватываются следующими рядами:

$$\begin{array}{llll} \boxed{\overline{2}} & \overline{6} & \overline{10} & \ldots \\ \boxed{2:m} & 4:m & 6:m & \ldots \boxed{\infty:m} \\ \overline{6}\cdot m & \overline{10}\cdot m & \overline{14}\cdot m & \ldots \\ \boxed{m\cdot 2:m} & m\cdot 4:m & m\cdot 6:m & \ldots \boxed{m\cdot\infty:m} \\ \overline{6}/2 & \overline{6}/4 & 3/\overline{10} & \boxed{\infty/\infty\cdot m} \end{array} \tag{23}$$

В этих рядах шесть ранее установленных групп выделены в рамки. Обратим внимание на то, что все другие перечисленные группы содержат по меньшей мере одну ось конечного порядка, большего двух. Докажем, что присутствие такой оси в тензоре означает, что она одновременно является для него осью ∞.

Предположим, что эта ось направлена по X_3. Ранее мы видели, что симметрическая операция поворота вокруг такой оси на элементарный угол α может быть выражена схемой косинусов

$$\begin{array}{ccc} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{array}$$

где $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$. Поскольку порядок оси конечен и больше 2, постольку $0° < \alpha < 180°$. Применяя формулы преобразования, получим в рассматриваемом случае для новых компонент a'_{ik} тензора следующие выражения:

$$\begin{aligned} &1)\ a'_{11} = c^2a_{11} + csa_{12} + csa_{21} + s^2a_{22}, \\ &2)\ a'_{12} = -csa_{11} + c^2a_{12} - s^2a_{21} + csa_{22}, \\ &3)\ a'_{13} = ca_{13} + sa_{23}, \\ &4)\ a'_{21} = -csa_{11} - s^2a_{12} + c^2a_{21} + csa_{22}, \\ &5)\ a'_{22} = s^2a_{11} - csa_{12} - csa_{21} + c^2a_{22}, \\ &6)\ a'_{23} = -sa_{13} + ca_{23}, \\ &7)\ a'_{31} = ca_{31} + sa_{32}, \\ &8)\ a'_{32} = -sa_{31} + ca_{32}, \\ &9)\ a'_{33} = a_{33}. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как поворот на угол α есть по предположению операция симметрии, то каждая компонента должна преобразовываться этой операцией в себя. Мы можем поэтому убрать все штрихи в левых частях приведенных равенств.

С первым из этих равенств мы уже встречались на стр. 112. Исследуя его, мы получили соотношения:

$$a_{21} = -a_{12},\ a_{22} = a_{11}.$$

Рассмотрим теперь третье из равенств (24). Представив его в форме

$$(1 - c)a_{13} = sa_{23}$$

и сделав подстановки

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a_{23}}{a_{13}}.$$

Тем же приемом можно показать, исследуя шестое из равенств (24), что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

Сопоставление обоих результатов с учетом того, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \neq \infty$ и все a_{ik} — действительные числа, дает

$$a_{23}^2 = -a_{13}^2 \quad \text{или} \quad a_{13} = a_{23} = 0.$$

Применяя тот же прием к седьмому и восьмому из равенств (24), легко показать также, что и

$$a_{31} = a_{32} = 0.$$

Наконец, последнее, девятое, из равенств (24) показывает непосредственно, что компонента a_{33} при любом повороте вокруг оси X_3 вообще не изменяется. Сопоставляя между собою все полученные результаты, мы видим, что тензор (a_{ik}) общего вида при изложенных условиях должен иметь форму

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{22} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}. \end{matrix}$$

Ранее, однако, было доказано, что такой тензор имеет ось ∞, что и требовалось доказать.

Так как переименование оси симметрии порядка выше двух в группах с центром симметрии (23) может привести только к трем ранее установленным для тензоров группам $\infty : m$, m, $\infty : m$, $\infty/\infty \cdot m$, то выведенными нами выше шестью группами (табл. 1) исчерпываются все группы симметрии тензоров второго порядка.

Симметрия антисимметричного полярного тензора (аксиального вектора)

В кристаллофизике наряду с полярными векторами большую роль играют так называемые *аксиальные векторы*. К определению аксиального вектора и установлению общих его свойств, как известно, проще всего подойти, исследуя свойства *момента силы* —

величины, которая может служить конкретным примером аксиального вектора.

Пусть мы имеем вал радиуса R, способный вращаться вокруг своей оси (рис. 5). К валу приложена сила F, нормальная к радиусу R и к образующей вала. Сила F является полярным вектором, радиус R также рассматривается как полярный вектор с началом в центре кругового сечения вала. Моментом силы F называется величина M, численно равная произведению длины R

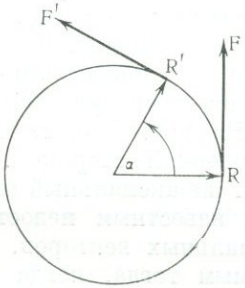


Рис. 5. Чертеж к определению симметрии аксиального вектора



Рис. 6. Рациональный способ изображения аксиального вектора ▸

на длину F и ориентированная в пространстве соответственно расположению оси вала.

Если мы повернем R и F на какой-либо угол α вокруг оси вала так, что R и F займут положение R' и F', то новое произведение $R'F'$, очевидно, будет равно прежнему произведению RF. Не изменится, конечно, и расположение оси вала. Отсюда, по определению, не должен измениться и сам вектор в целом. Хорошо известно, что и физический эффект, производимый силой F, ничем существенным не отличается от эффекта, вызываемого силой F'. Свойство той или иной величины не изменяться (преобразовываться в себя) при поворотах на любой угол вокруг определенной оси означает, что ось эта является осью бесконечного порядка данной величины. Итак, вектор момента силы обладает осью бесконечного порядка, совпадающей по направлению с направлением вектора.

Если мы произведем теперь мысленно отражение всей изображенной на рис. 5 картины в плоскости чертежа, то опять не обнаружим в интересующей нас величине никаких изменений. Это означает, что плоскость чертежа есть плоскость симметрии нашего вектора.

Сочетание оси ∞ с поперечной плоскостью m вызывает существование центра симметрии. В целом вектор будет иметь симметрию $\infty : m$.

Из определения величины момента силы, далее, следует, что она не меняется, если один из образующих векторов R и F будет увеличен, а другой уменьшен в одно и то же число раз при сохранении их направлений. Значит, один и тот же аксиальный вектор M может быть изображен с помощью двух полярных векторов многими способами.

Момент силы вызывает вращение вала; направление вращения всегда может быть точно указано, как на рис. 5, изогнутой стрелкой. Вращение представляется нам совершающимся то по часовой стрелке, то против нее в зависимости от того, с какой стороны оси вращения мы его наблюдаем. Значит, и в аксиальном векторе мы можем различать две стороны: левую, или северную,— с вращением против часовой стрелки и правую, или южную,— с вращением по часовой стрелке. На рис. 5 аксиальный вектор обращен к наблюдателю своей северной стороной.

То обстоятельство, что один и тот же аксиальный вектор может изображаться различно, является известным недостатком описанного способа изображения аксиальных векторов. Этот недостаток становится особенно ощутимым тогда, когда аксиальный вектор задан только своим численным значением и расположением оси вращения в пространстве, а образующие векторы R и F остаются нам неизвестными, или, еще хуже, когда мы имеем основание один из векторов R и F считать равным нулю, а другой — бесконечности. Целесообразно поэтому ввести другое изображение аксиальных векторов — изображение отрезком прямой с окружающей его круговой стрелкой (рис. 6). Принимается, что длина отрезка пропорциональна численному значению аксиального вектора; положение отрезка в пространстве соответствует положению оси аксиального вектора, а характер вращения задается направлением круговой стрелки.

Заметим, что предлагаемый здесь способ изображения аксиальных векторов не является общепринятым. Обычно аксиальный вектор изображают, как и полярный вектор, прямолинейной стрелкой, считая ее начало южным полюсом, а ее конец — северным полюсом. В большинстве случаев это не приводит ни к каким недоразумениям, однако в вопросах, так или иначе связанных с симметрией, такое отождествление полярного и аксиального векторов явно недопустимо и может приводить к серьезным ошибкам.

Аксиальный вектор имеет определенные черты сходства и различия с полярным вектором. Сходство полярного и аксиального векторов состоит в следующем: 1) оба вектора изображаются отрезками прямой; 2) в обоих случаях мы можем отличить начало вектора, именуемое у полярного вектора отрицательным, а у аксиального вектора — южным полюсом, от его конца — положительного и соответственно северного полюса; 3) в обоих случаях применимо разложение вектора на компоненты по правилу параллелограмма (параллелепипеда); 4) преобразование компонент

обоих векторов при переходе к новой системе координат производится по одним и тем же формулам (13) и (14), если дело идет только об абсолютных значениях компонент, а не об их знаках.

Различие между полярным и аксиальным векторами сводится к следующему: 1) полярный и аксиальный векторы отличаются друг от друга своей симметрией: полярный вектор имеет симметрию $\infty \cdot m$, аксиальный вектор — симметрию $\infty : m$; 2) концы полярного вектора не равны друг другу ни совместимо, ни зеркально, тогда как концы аксиального вектора равны друг другу зеркально, хотя и не равны совместимо; концы полярного вектора отличаются поэтому друг от друга более существенно, чем концы аксиального вектора, которые разнятся друг от друга не больше, чем правая рука от левой, вследствие чего можно оспаривать целесообразность обычая именовать концы аксиального вектора «полюсами»; 3) компоненты аксиального вектора преобразуются при переходе к новой системе координат по формулам:

$$p_i = \pm \sum_{k=1}^{3} c_{ik} p'_k,$$
$$p'_i = \pm \sum_{k=1}^{3} c_{ki} p_k, \tag{25}$$

которые отличаются от соответствующих формул (13), (14) для полярных векторов только наличием $\pm$ перед знаками суммы, причем плюс применяется в тех случаях, когда старая и новая системы одинаковы, т. е. обе правые или левые, а минус берется тогда, когда обе системы друг другу энантиоморфны.

В тензорном исчислении доказывается, что аксиальный вектор можно рассматривать как полярный тензор специальной формы, именуемый *антисимметричным* тензором. В нем компоненты, расположенные симметрично относительно *главной диагонали* (проходящей по ряду $a_{11}a_{22}a_{33}$), равны друг другу по абсолютной величине и обратны по знаку, а компоненты, расположенные по главной диагонали, равны нулю, т. е.

$$a_{ik} = -a_{ki},$$

компоненты же a_{32}, a_{13}, a_{21} являются соответственно компонентами p_1, p_2, p_3 аксиального вектора

$$\begin{matrix} 0 & -a_{21} & +a_{13} \\ +a_{21} & 0 & -a_{32} \\ -a_{13} & +a_{32} & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & -p_3 & +p_2 \\ +p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & +p_1 & 0. \end{matrix} \tag{26}$$

Докажем, что антисимметричный тензор всегда может быть приведен к простейшей форме

$$\begin{matrix} 0 & -a_{21} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \tag{27}$$

путем надлежащего преобразования координат. Если такое преобразование осуществимо, то с помощью обратной операции должно быть осуществимо и обратное преобразование последнего тензора (27) в первый (26). Очевидно, наше положение будет доказано, если будет доказана осуществимость этого обратного процесса, что сейчас и будет сделано.

Применяя к тензору (27) формулы преобразования (17), будем иметь:

$$
\begin{aligned}
a'_{11} &= c_{11}c_{21}a_{12} + c_{21}c_{11}a_{21} = 0,\\
a'_{12} &= c_{11}c_{22}a_{12} + c_{21}c_{12}a_{21},\\
a'_{13} &= c_{11}c_{23}a_{12} + c_{21}c_{13}a_{21},\\
a'_{21} &= c_{12}c_{21}a_{12} + c_{22}c_{11}a_{21} = -a'_{12},\\
a'_{22} &= c_{12}c_{22}a_{12} + c_{22}c_{12}a_{21} = 0,\\
a'_{23} &= c_{12}c_{23}a_{12} + c_{22}c_{13}a_{21},\\
a'_{31} &= c_{13}c_{21}a_{12} + c_{23}c_{11}a_{21} = -a'_{13},\\
a'_{32} &= c_{13}c_{22}a_{12} + c_{23}c_{12}a_{21} = -a'_{23},\\
a'_{33} &= c_{13}c_{23}a_{12} + c_{23}c_{13}a_{21} = 0.
\end{aligned}
$$

Из этих формул видно, что в преобразованном тензоре все компоненты главной диагонали равны нулю ($a'_{11} = a'_{22} = a'_{33} = 0$), а компоненты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу с обратным знаком ($a_{32} = -a_{23}$; $a_{13} = -a_{31}$; $a_{21} = -a_{12}$), а это и означает, что тензор вида (27) и тензор вида (26) могут быть всегда преобразованы друг в друга.

Если антисимметричный тензор является одновременно аксиальным вектором, то он, тензор, должен обладать и всеми свойствами аксиального вектора и, в частности, его симметрией $\infty : m$. Выше было доказано, что той же симметрией $\infty : m$ обладает тензор вида

$$
\begin{matrix}
a_{11} & -a_{21} & 0\\
a_{21} & a_{11} & 0\\
0 & 0 & a_{33}.
\end{matrix}
$$

Значит, интересующий нас антисимметричный тензор должны рассматривать как частный вариант этого тензора. То, что в антисимметричном тензоре все компоненты главной диагонали равны нулю, не должно как-либо сказаться на его симметрии. Принадлежность антисимметричного тензора к тензорам с симметрией $\infty : m$ может быть, конечно, доказана и непосредственно ранее изложенным путем применения формул (17) в сочетании с требованием $a'_{ik} = a_{ik}$; мы считаем возможным опустить здесь соответствующие выкладки ввиду их простоты.

Общепринятая классификация тензоров второго порядка и сопоставление ее с классификацией по признаку симметрии

В математике различают три рода тензоров второго порядка: тензоры *симметричные*, *антисимметричные* и *несимметричные*. Отметим еще раз, что эти названия не имеют ничего общего с симметрией тензора в принятом нами смысле.

Симметричными тензорами в математике называют тензоры, у которых все компоненты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу

$$a_{ik} = a_{ki}. \tag{28}$$

С антисимметричными тензорами мы познакомились в предыдущем параграфе. Они характеризуются соотношением

$$a_{ik} = -a_{ki}, \tag{29}$$

которое в применении к компонентам главной диагонали означает, что каждый из них равен нулю.

Все прочие тензоры, т. е. все тензоры, которые не являются ни симметричными, ни антисимметричными, принадлежат к категории несимметричных.

В тензорном исчислении доказывается, что принадлежность тензора к тому или иному из этих трех родов не нарушается при переходе от одной декартовой к другой такой же системе координат. Доказывается также, что симметричный тензор всегда может быть преобразован переходом к новой системе координат так, что все его компоненты, не лежащие на главной диагонали, обратятся в нули, т. е. что всякий симметричный тензор может быть приведен к виду

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}, \end{matrix}$$

где a_{11}, a_{22}, a_{33} вообще не равны между собой, но могут быть и равными друг другу попарно или вместе.

Сопоставляя между собой только что изложенную математическую классификацию тензоров с ранее приведенной классификацией по признаку симметрии тензоров (табл. 1), легко установить следующее.

Все симметричные тензоры относятся к тензорам, принадлежащим к типам $m \cdot 2 : m$, $m \cdot \infty : m$, $\infty/\infty \cdot m$, т. е. к тензорам, обладающим по меньшей мере тремя плоскостями симметрии (симметрия эллипсоидов). Справедливо также и обратное положение, т. е. к тензорам типов $m \cdot 2 : m$, $m \cdot \infty : m$, $\infty/\infty \cdot m$ относятся только симметричные тензоры.

Антисимметричные тензоры целиком входят в категорию тензоров с симметрией $\infty : m$ (симметрия вращающегося цилин-

дра), но в ту же категорию входят также и те из несимметричных тензоров, для которых правило

$$a_{ik} = a_{ki}$$

прилагается только для компонент с неравными индексами

$$i \neq k.$$

К таким тензорам относится, например, известный нам ротор

$$\begin{matrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Несимметричные тензоры целиком входят в тензоры типов $\overline{2}$, $2 : m$, $\infty : m$, причем в типы $\overline{2}$ и $2 : m$ входят только несимметричные тензоры, а в тип $\infty : m$, как сказано выше, входят также все антисимметричные тензоры.

Окончательно результат сопоставления всех родов тензоров второго порядка может быть представлен в виде следующей таблички.

$\overline{2}$	$2 : m$	$\infty : m$	$m \cdot 2 : m$	$m \cdot \infty : m$	$\infty / \infty \cdot m$
Несимметричные тензоры		Антисимметричные тензоры	Симметричные тензоры		

Симметрия аксиальных тензоров второго порядка

1. Под аксиальными тензорами второго порядка мы будем разуметь тензор (a_{ik}), отличающийся от соответствующего полярного тензора только тем, что в формулах преобразования компонент тензора

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \pm \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} c_{il} c_{km} a'_{lm}, \\ a'_{ik} &= \pm \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} c_{li} c_{mk} a_{lm} \end{aligned} \qquad (30)$$

стоят оба знака — плюс и минус,— причем плюс берется в том случае, если новая и старая системы координат одинаковы (обе правые или обе левые), минус же применяется тогда, когда одна система энантиоморфна другой. Примером аксиального тензора может служить тензор вращения плоскости поляризации. Как

известно, вращение плоскости поляризации наблюдается, например, при пропускании линейно поляризованного света через кристалл правого или левого кварца по его оптической оси.

2. Легко доказать, что аксиальный тензор *не может* иметь центра симметрии. В самом деле, если бы аксиальный тензор имел центр симметрии, то после инверсии, характеризуемой схемой косинусов

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{matrix}$$

каждая компонента тензора преобразовалась бы в себя, т. е.

$$a_{ik}' = a_{ik}.$$

В действительности же в результате применения формулы преобразования (30) со знаками минус (при инверсии правая система переходит в левую) обнаруживается, что каждая новая компонента равна соответствующей старой с обратным знаком

$$a_{11}' = -c_{11}c_{11}a_{11} = -a_{11},$$
$$a_{12}' = -c_{11}c_{22}a_{12} = -a_{12},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

а это и означает, что инверсия в данном случае не является симметрической операцией или, формально, она является таковой только для тензора, каждая компонента которого равна нулю. Следовательно, в отличие от полярных тензоров, для которых центр симметрии является обязательным, аксиальные тензоры не могут обладать им вовсе. Таким образом, все группы симметрии аксиальных тензоров мы должны искать среди *ацентрических* групп. К ним принадлежат следующие группы:

I)	1	2	3	$\ldots$	∞
II)	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\ldots$	
III)	m	$3:m$	$5:m$	$\ldots$	
IV)	m	$2\cdot m$	$3\cdot m$	$\ldots$	$\infty\cdot m$
V)	$2:2$	$3:2$	$4:2$	$\ldots$	$\infty:2$
VI)	$\overline{4}\cdot m$	$\overline{8}\cdot m$	$\overline{12}\cdot m$	$\ldots$	
VII)	$m\cdot 3:m$	$m\cdot 5:m$	$m\cdot 7:m$	$\ldots$	
VIII)	$3/2$	$3/4$	$3/4$	$3/5$	∞/∞.

Подобно тому как при рассмотрении свойств полярных тензоров мы исходили из предположения, что тензор общего вида (16) обладает минимальной из возможных для них симметрией — симметрией $\overline{2}$, так и в данном случае мы будем предполагать, что аксиальный тензор общего вида (16) будет обладать минимальной

симметрией *1* (отсутствие всякой симметрии). Мы увидим далее, что это предположение оправдывается тем, что эта симметрия будет постепенно, т. е. путем добавления отдельных элементов симметрии, переведена в максимальную ацентрическую симметрию ∞/∞ — в симметрию шара без центра симметрии.

3. Займемся сначала группами ряда I, к которому принадлежат все группы, определяемые одной простой осью симметрии.

Найдем условия, при которых аксиальный тензор может обладать осью симметрии второго порядка. Пусть этой осью будет ось X_3, тогда поворот вокруг нее на угол в 180° будет симметрической операцией. Так как в результате простых поворотов правая система координат остается правой, то формулы преобразования (30) в данном случае следует применять со знаками плюс, а тогда они не будут отличаться от соответствующих формул (17) для полярных тензоров. Отсюда следует, что и условия, при которых ось X_3 может быть двойной осью симметрии аксиального тензора, должны быть теми же, что и для полярного тензора, а это означает, что аксиальный тензор в этом случае должен иметь форму (18), т. е.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}. \end{matrix} \tag{31}$$

4. Если порядок оси симметрии, совпадающей по направлению с осью X_3, будет больше двух, то аксиальный тензор будет иметь форму

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix} \tag{32}$$

по аналогии с таким же случаем для полярного тензора (20). Эту форму будет, следовательно, иметь также аксиальный тензор, обладающий осью симметрии бесконечного порядка.

Мы исчерпали, таким образом, все группы ряда I и можем перейти к другим рядам.

5. Рассмотрим группы ряда V. Так как в эти ряды входят только группы, содержащие одни простые оси симметрии, а для таких групп формулы преобразования (30) применяются со знаками плюс и потому не отличаются от соответствующих формул (17) для полярных векторов, мы можем сразу утверждать, что аксиальный тензор, обладающий симметрией $2:2$, будет иметь форму полярного тензора, обладающего симметрией $m \cdot 2:m$, т. е. форму

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}. \end{matrix} \tag{33}$$

Аналогично аксиальный тензор, обладающий симметрией $\infty : 2$, будет иметь форму полярного тензора с симметрией $m \cdot \infty : m$

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix} \qquad (34)$$

и, наконец, аксиальный тензор шаровой симметрии (без центра симметрии) (группа ∞/∞ из ряда VIII) будет иметь форму полярного тензора с шаровой симметрией $\infty/\infty \cdot m$

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}. \end{matrix} \qquad (35)$$

6. Переходим к группам, содержащим простые оси с поперечными или продольными плоскостями симметрии (ряды III, IV). Простейшая относящаяся сюда группа есть группа m. Определим форму аксиального тензора, обладающего плоскостью симметрии, расположенной нормально к оси X_3. Отражение в этой плоскости, описываемое схемой косинусов

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{matrix}$$

есть операция, преобразующая данную систему координат в энантиоморфную ей систему, поэтому формулы (30) следует применять со знаками минус. Выполнив преобразования для всех девяти компонент аксиального тензора, получим

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{33} = 0.$$

Остальные компоненты тензора отражением в этой плоскости преобразуются в себя. Отсюда следует, что искомый аксиальный тензор, т. е. тензор с одной плоскостью симметрии X_1X_2, должен иметь форму

$$\begin{matrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0. \end{matrix} \qquad (36)$$

Если плоскость симметрии будет расположена перпендикулярно к оси X_1 или к оси X_2, получим соответственно следующие две формы аксиального тензора:

$$\begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0. \end{matrix} \qquad (37)$$

7. Теперь не представит трудности определить, какую форму должен иметь тензор, обладающий симметрией $2 \cdot m$. Если при-

нять, что ось 2 совпадает с X_3, а две плоскости симметрии перпендикулярны двум другим координатным осям, искомый тензор должен одновременно обладать свойствами тензора (31) и тензоров (37), т. е. должен иметь форму

$$\begin{matrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{matrix} \tag{38}$$

Далее, следовало бы решить вопрос, какую форму должен иметь тензор, определяемый одной простой осью порядка выше двух и продольной плоскостью симметрии. Такой тензор должен был бы обладать одновременно свойствами последнего тензора (38) и свойствами тензора (20) с одной осью бесконечного порядка. Легко, однако, видеть, что в этом случае все компоненты тензора обратились бы в нули. Иначе говоря, аксиальных тензоров этого типа не существует.

Не существует также и аксиальных тензоров с симметрией $3 : m$, $5 : m$ и т. д. Такие тензоры должны одновременно обладать свойствами тензора (32) с одной осью порядка выше двух и тензора (36) с одной плоскостью симметрии, нормальной к этой оси, а это означает, что все компоненты искомого тензора должны быть равны нулю.

8. Переходим к группам с одной четной зеркальной осью без центра симметрии, т. е. к группам ряда II и VI. Простейшая из этих групп есть группа $\overline{4}$. Так как ось $\overline{4}$ есть одновременно ось 2, искомый тензор должен обладать свойствами тензора (31), т. е. его компоненты a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32} равны нулям. Применяя к остальным компонентам формулы преобразования (30) со знаками минус и пользуясь отвечающей зеркальному повороту на 90° схемой косинусов

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1, \end{matrix}$$

получаем

$$\begin{aligned} a'_{11} &= -c_{21}^2 a_{22} = -a_{22}, \\ a'_{12} &= -c_{21}c_{12}a_{21} = a_{21}, \\ a'_{21} &= -c_{12}c_{21}a_{12} = a_{12}, \\ a'_{22} &= -c_{12}^2 a_{11} = -a_{11}, \\ a'_{33} &= -c_{33}^2 a_{33} = -a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Искомый тензор будет, следовательно, иметь форму

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{matrix} \tag{39}$$

Этот тензор, как и всякий симметричный тензор, может быть преобразован так, что все его боковые компоненты обратятся в нули. Покажем, что для этого достаточно произвести поворот системы координат вокруг оси X_3 на некоторый угол α, который сейчас будет определен. Как известно, этот поворот осуществляется с помощью схемы косинусов

$$\begin{matrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Пользуясь этой схемой и формулами преобразования (30) со знаком плюс, получим для новой боковой компоненты a'_{12} следующее выражение:

$$a'_{12} = (c^2 - s^2)\, a_{12} - 2csa_{11}.$$

По условию она должна обратиться в нуль. Отсюда

$$(c^2 - s^2)\, a_{12} = 2csa_{11},$$

$$a_{12}/a_{11} = 2cs/(c^2 - s^2) = \sin 2\alpha/\cos 2\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Итак, для того чтобы боковая компонента $a_{12} = a_{21}$ тензора (39) обратилась в нуль, нужно произвести поворот системы координат на угол α, определяемый из формулы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Посмотрим, что же произойдет при таком повороте со всеми другими компонентами тензора (39). Пользуясь теми же средствами преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned} a'_{11} &= (c^2 - s^2)\, a_{11} + 2csa_{12}, \\ a'_{22} &= -(c^2 - s^2)\, a_{11} - 2csa_{12} = -a'_{11}, \\ a'_{13} &= 0, \\ a'_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в новой системе координат (после удаления штрихов) тензор (39) будет иметь форму

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{matrix} \qquad (40)$$

Мы исходили из предположения, что этот тензор (все равно — в старой или новой форме) обладает зеркальной осью $\overline{4}$. Легко показать, что наряду с этим элементом симметрии тензор (40) обладает двумя осями симметрии, совпадающими с координатными осями X_1 и X_2. Так как ось $\overline{4}$ является одновременно осью второго порядка, то вместе с двумя другими осями второго порядка, если

Таблица 2

Симметрия и форма аксиальных тензоров

Симметрия тензора	Форма тензора	Расположение осей
1	$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$	Оси расположены произвольно
2	$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Ось 2 совпадает с осью X_3
2 : 2	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Оси 2 совпадают с осями X_1, X_2, X_3
∞	$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Ось ∞ совпадает с осью X_3
∞ : 2	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	Ось ∞ совпадает с осью X_3
∞/∞	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{matrix}$	Оси расположены произвольно
m	$\begin{matrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{matrix}$	Плоскость m перпендикулярна оси X_3
$2 \cdot m$	$\begin{matrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	Ось 2 совпадает с осью X_3; плоскости m перпендикулярны осям X_1, X_2
$\bar{4} \cdot m$	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	Ось $\bar{4}$ совпадает с осью X_3; ось 2 совпадает с осями X_1, X_2

они есть, она должна составить группу $2 : 2$, т. е. наш тензор должен обладать свойствами тензора (33), принадлежащего этой группе. Но тензор (33) характеризуется тем, что все его боковые компоненты равны нулю, а все его диагональные компоненты различны между собой. Исследуемый нами тензор (40) обладает всеми этими свойствами, а это и означает, что он имеет наряду с осью $\bar{4}$ две боковые оси 2 и, как следствие,— еще две плоскости симметрии, проходящие по оси X_3 и делящие углы между боковыми осями пополам (группа $\bar{4} \cdot m$).

9. Переходя к группам ряда II и ряда VI с зеркальными осями более высокого порядка, легко убедиться, что аксиальных тензоров, отвечающих этим группам, не существует по той простой причине, что все эти тензоры, обладая одной простой осью порядка выше двух и одной осью $\bar{4}$, должны одновременно иметь свойства тензора (32) и тензора (40), а это означает, что все компоненты искомых тензоров равны нулю.

10. Нам осталось рассмотреть только ряд VII и первые четыре группы ряда VIII. Предположив, что тензор имеет симметрию, отвечающую простейшей группе $m \cdot 3 : m$ ряда VII, мы должны приписать этому тензору также свойства тензора с симметрией $3 : m$, но таких тензоров, как мы знаем, не существует, поэтому не может быть и тензоров с симметрией $m \cdot 3 : m$. То же относится и ко всем другим группам этого ряда.

Используя уже известные средства, можно доказать, что оставшиеся группы ряда VIII не дают никаких новых форм тензоров.

11. Итак, окончательно нами установлено девять групп симметрии и, соответственно, девять канонических (отнесенных к принятой системе осей) форм аксиальных тензоров. Этими группами являются следующие:

$$\frac{1,\ 2,\ 2:2\,|\,\infty,\ \infty:2,\ \infty/\infty}{m,\ 2\cdot m\,|\ \ \bar{4}\cdot m}.$$

Из них шесть групп содержат только элементы симметрии первого рода (простые оси). Остальные три группы имеют элементы симметрии второго рода (плоскости симметрии и зеркальные оси). Из шести групп с одними простыми осями три группы являются предельными (с осями ∞). Из трех групп, содержащих элементы симметрии второго рода, одна группа обладает зеркальной осью $\bar{4}$ Формы тензоров, отвечающих указанным девяти группам симметрии, приведены для лучшего обозрения в табл. 2.

Выводы

Полученные нами результаты в переводе на язык физической кристаллографии означают следующее.

1. Все анизотропные тела в отношении свойств, описываемых полярным вектором, например, в отношении свойства пироэлектричества, обладают симметрией $\infty \cdot m$. Указанными свойствами могут обладать только такие анизотропные тела (кристаллы, текстуры, жидкие кристаллы и т. д.), которые обладают минимальной симметрией, характеризуемой наличием особенной полярной оси симметрии, т. е. анизотропные тела классов

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & \infty \\ m & 2\cdot m & 3\cdot m & \dots & \infty\cdot m. \end{array}$$

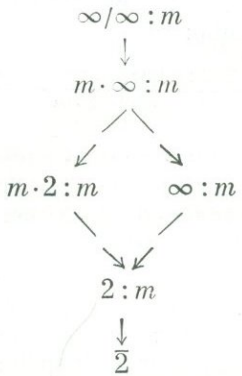
Эти группы минимальной симметрии являются подгруппами группы $\infty \cdot m$.

2. Все анизотропные тела в отношении свойств, описываемых аксиальным вектором, например в отношении свойства постоянной магнитной поляризации, имеют симметрию $\infty : m$. Указанными свойствами могут обладать все анизотропные тела, характеризуемые особенной вращательной осью симметрии (которая одновременно может быть полярной), т. е. анизотропные тела классов

$$\begin{array}{lllll} 1 & 2 & 3 & \ldots & \infty \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} & \ldots & \\ m & 2:m & 3:m & \ldots & \infty : m. \end{array}$$

Эти группы являются подгруппами группы $\infty : m$.

3. Любое однородное анизотропное тело в отношении свойств, описываемых полярным тензором общего вида, например в отношении свойства пластической деформации, должно быть причислено к одной из следующих шести групп симметрии:



Они представлены здесь так, что всякая расположенная ниже группа является подгруппой, расположенной выше.

По этим группам симметрии полярных тензоров все царство анизотропных однородных сред разбивается на шесть *классов симметрии полярного тензора*.

В табл. 3 указано, какой именно минимальной симметрией должно обладать данное анизотропное тело, чтобы быть причисленным к тому или иному классу. Все группы минимальной симметрии, объединенные в один класс, являются подгруппами группы, характеризующей класс.

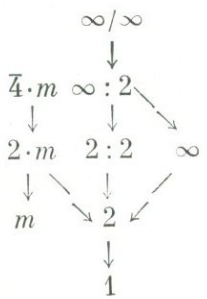
4. Если речь идет о свойствах, описываемых так называемым *симметричным* полярным тензором ($a_{ik} = a_{ki}$), например о свойстве упругой деформации, то из групп симметрии тензора выпадает группа $\infty : m$, и соответствующие ей группы минимальной симметрии попадают в табл. 3 в столбец $m \cdot 2 : m$.

Таблица 3

Группы симметрии полярного тензора общего вида и отвечающие им группы минимальной симметрии

Симметрия полярного тензора	$\bar{2}$	$2:m$	$m\cdot 2:m$	$\infty:m$	$m\cdot\infty:m$	$\infty/\infty\cdot m$
Минимальная симметрия	$\frac{1}{2}$	2	$2\cdot m$	3	$3:2$	$3/2$
		m	$2:2$	4	$4:2$	$3/4$
		$2\cdot m$	$m\cdot 2:m$	5	.	$3/5$
				.	.	$\bar{6}/2$
				.	.	$3/\bar{4}$
				.	$\infty:2$	$\bar{6}/4$
				∞	$3\cdot m$	$3/\bar{1}0$
					$4\cdot m$	∞/∞
				$\bar{4}$	.	$\infty/\infty\cdot m$
				$\bar{6}$	.	
				$\bar{8}$	$\infty\cdot m$	
				.	$\bar{4}\cdot m$	
				.	$\bar{6}\cdot m$	
				.	.	
				$3:m$	.	
				$4:m$	.	
				$5:m$	$m\cdot 3:m$	
					$m\cdot 4:m$	
				.	.	
				.	.	
				.	.	
				$\infty:m$	$m\cdot\infty:m$	

5. Однородные анизотропные тела в отношении свойств, описываемых аксиальным тензором общего вида, разделяются на девять *классов симметрии аксиального тензора* согласно схеме



Обладать этими свойствами могут не все однородные тела а лишь те, группы минимальной симметрии которых являются под

Таблица 4

Группы симметрии аксиального тензора общего вида и отвечающие им группы минимальной симметрии

Симметрия аксиального тензора	1	2	2 : 2	∞	∞ : 2	∞/∞	m	$2 \cdot m$	$\bar{4} \cdot m$
Минимальная симметрия	1	2	2 : 2	3 4 5 . . . ∞	3 : 2 4 : 2 5 : 2 . . . ∞ : 2	3/2 3/4 3/5 ∞/∞	m	$2 \cdot m$	$\bar{4} \cdot m$ $\bar{4}$

группами указанных девяти групп. В табл. 4 указано, какой именно минимальной симметрией должно обладать анизотропное тело, чтобы быть отнесенным к данному классу.

6. Если речь идет о свойствах, описываемых симметричным аксиальным тензором ($a_{ik} = a_{ki}$), например о свойстве вращения плоскости поляризации, то из групп симметрии тензора выпадают группы *1*, *2*, ∞, m, $2 \cdot m$. Соответственно этому подгруппы, отвечающие группам *1*, *2*, ∞, распределяются в столбце ∞ : *2*, а группы m, $2 \cdot m$ попадают в столбец $\bar{4} \cdot m$.

Институт кристаллографии АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Шубников.* Симметрия. М.— Л., Изд-во АН СССР (Науч.-попул. сер.), 1940. 176 с.
2. *А. В. Шубников, Е. Е. Флинт, Г. Б. Бокий.* Основы кристаллографии. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940. 486 с.
3. *А. В. Шубников.* Новое в учении о симметрии и его применении.— В кн.: Общее собрание Академии наук СССР 14—17 октября 1944 г. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1945. 212.
4. *F. Seitz.* Z. Kristallogr., 1934, 88, 433; 1935, **90**, 289; 1935, **94**, 100.
5. *А. В. Шубников, В. А. Копцик.* Симметрия в науке и искусстве. М., «Наука», 1972, с. 339.

О РАБОТАХ ПЬЕРА КЮРИ В ОБЛАСТИ СИММЕТРИИ[1]

П. Кюри известен в широких кругах научных работников как автор замечательных работ в области радиоактивности и почти совсем не известен как автор глубоких исследований в области симметрии и ее приложений в физике. Между тем эти исследования, если бы они были продолжены П. Кюри, могли бы, вероятно, иметь для развития естествознания в целом немногим меньшее значение, чем работы по радиоактивности для развития физики и химии. По свидетельству М. Кюри сам П. Кюри неоднократно высказывал сожаление о том, что исследования по радиоактивности увели его в сторону от исследований в области симметрии.

Для работ П. Кюри по симметрии, как, впрочем, и для всех его работ, характерна чрезвычайная краткость их изложения. В полном собрании сочинений П. Кюри, куда входит 61 его работа и довольно большая вводная статья М. Кюри, содержится около 610 страниц. Это означает, что в среднем на одну работу Пьера Кюри приходится менее десяти страниц. Следует отметить, однако, что если указанная сжатость изложения нисколько не затрудняет чтения большинства его работ, этого нельзя сказать об его исследованиях по симметрии. Возможно, что именно это обстоятельство было причиной того, что они не были достаточно поняты и оценены физиками.

В одной из своих работ по симметрии П. Кюри пишет: «Я думаю, что в изучение физических явлений представляло бы интерес ввести соображения симметрии, столь привычные для кристаллографов». «Физики часто пользуются условиями, вытекающими из симметрии, но обычно пренебрегают точным определением симметрии явления, потому что достаточно часто эти условия оказываются простыми и a priori почти очевидными».

Это его замечание, сделанное им 62 года назад, полностью сохраняет свою силу и до сих пор. Об этом свидетельствует хотя бы то, что почти во всех современных учебниках физики мы встречаем термин «осевая симметрия», который считается не требующим никаких разъяснений; между тем осевых симметрий, т. е. групп симметрии, содержащих единственную ось бесконечного порядка, существует не одна, а пять различных. Мы должны остановиться на этом вопросе более подробно.

П. Кюри был первым, кто выделил как особо важные для физики те группы симметрии, которые мы теперь называем *предельными точечными группами симметрии*. Всего таких групп существует семь. Они легко запоминаются по простейшим образцовым фигурам, обладающим соответствующей симметрией (рис. 1).

---

[1] Успехи физ. наук, 1956, т. 59, вып. 4, с. 591—602.

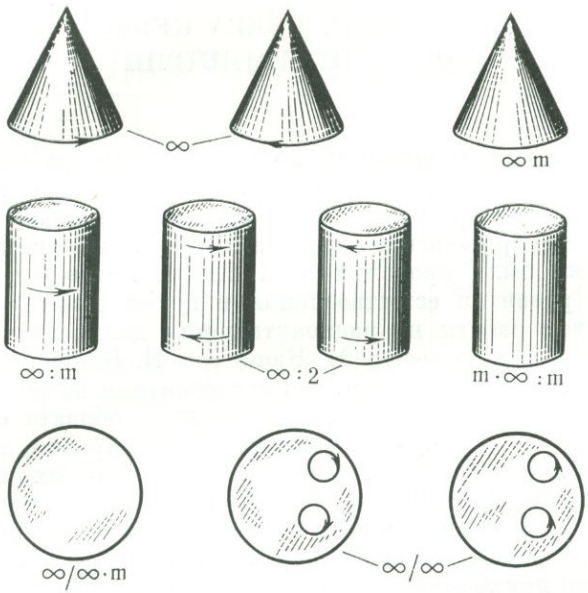


Рис. 1. Семь точечных предельных групп симметрии, представленных образцовыми фигурами

Первая группа ∞ не имеет никаких элементов симметрии, кроме оси бесконечного порядка; это группа вращающегося конуса. Она допускает существование *энантиоморфных* (правых и левых) форм: конус, вращающийся вправо, и конус, вращающийся влево. Вторая группа $\infty \cdot m$, кроме оси бесконечного порядка, имеет только бесконечное множество *продольных* плоскостей симметрии. Это группа покоящегося конуса, не допускающая существования энантиоморфных форм. Третья группа $\infty : m$ имеет только следующие элементы симметрии: ось бесконечного порядка, одну поперечную плоскость симметрии и центр симметрии. Это группа вращающегося цилиндра. Важно отметить, что эта группа, как и предыдущая, не допускает существования энантиоморфных форм. Это означает, что цилиндр, вращающийся вправо, не отличается от цилиндра, вращающегося влево, в отношении правизны и левизны: один может быть совмещен (при перевертывании) с другим простым наложением без отражения в плоскости. Четвертая группа $\infty : 2$ имеет только ось бесконечного порядка и бесконечное множество поперечных осей симметрии второго порядка. Это группа скрученного цилиндра. Она допускает существование энантиоморфных форм (правый и левый винты). Пятая группа $m \cdot \infty : m$ содержит только ось бесконечного порядка, бесконечное множество продольных и одну поперечную плоскости симметрии, а также бесконечное множество поперечных осей второго порядка

и центр симметрии. Это группа покоящегося цилиндра, не допускающая существования энантиоморфных форм.

Перечисленными группами как раз и исчерпываются те группы симметрии, которые без детального их различения часто именуются осевой симметрией. Кроме них существуют еще две предельные группы — шестая и седьмая. Шестая группа $\infty/\infty \cdot m$ — это группа симметрии обыкновенного шара, содержащая в себе бесконечное множество осей бесконечного порядка, бесконечное множество плоскостей симметрии и центр симметрии. Эта группа не допускает существования энантиоморфных фигур. Седьмая группа ∞/∞ — это группа симметрии шара без плоскостей и центра симметрии, но с бесконечным множеством осей бесконечного порядка. Эта группа допускает существование энантиоморфных — правых и левых — шаров. Можно (формально) считать, что в правом шаре все его диаметры скручены по правому винту, в левом — по левому винту.

Пользуясь предельными группами симметрии, П. Кюри впервые установил один из наиболее существенных признаков отличия электрического поля от магнитного и на этой основе до конца разъяснил, почему, в противоположность положительным и отрицательным электрическим зарядам северный магнетизм не может быть отделен от южного. Суть дела заключается в том, что цилиндрический магнит вместе с окружающим его магнитным полем имеет симметрию $\infty : m$ вращающегося цилиндра, тогда как электрический аналог магнита — вольтов столб или цилиндрический диэлектрик, поляризованный вдоль своей оси, имеют симметрию $\infty \cdot m$ покоящегося конуса. Это означает, что магнит, в соответствии с представлением о существовании в нем амперовых токов (вращающихся электронов), имеет поперечную и не имеет продольных плоскостей симметрии, тогда как вольтов столб, наоборот, имеет бесконечное количество продольных плоскостей симметрии и не имеет поперечной. Это означает также, что амперовы токи на северном и южном полюсах магнита текут в *одном направлении*, которое мы *называем* либо направлением по часовой стрелке, либо направлением против часовой стрелки в зависимости от того, смотрим ли мы на магнит со стороны южного или северного полюса. Невозможность отделения северного магнетизма (магнитной массы) от южного как раз и означает невозможность раздельного существования правого и левого вращения, поскольку всякое вращение является одновременно и правым и левым.

В учении о симметрии мы называем *равными* такие части симметричной фигуры, которые преобразуются друг в друга операциями симметрии. При этом нам приходится различать два вида равенства: равенство совместимое и равенство зеркальное. Возможно, конечно, и такое равенство, которое одновременно является и совместимым, и зеркальным. Полюса магнита друг другу *равны*, поскольку один преобразуется в другой отражением в поперечной плоскости симметрии; но это равенство является чисто

зеркальным, так как указанное преобразование осуществляется только *операцией второго рода*, т. е. операцией, содержащей отражение: в данном случае отражением в поперечной плоскости симметрии или инверсией (отражением в центре). Значит, северный полюс отличается от южного только в отношении правизны и левизны, т. е. не более чем правая рука от левой. Иначе обстоит дело с электрическими полюсами вольтова столба. Они *не преобразуются* друг в друга никакими операциями симметрии этого

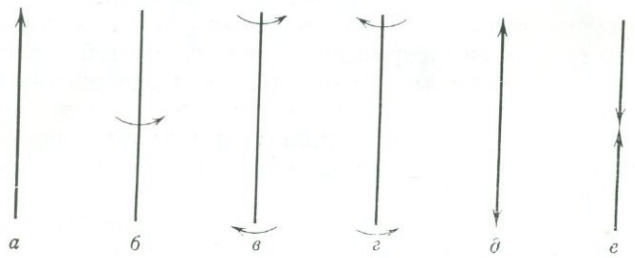


Рис. 2. Примеры направленных величин

а — полярный вектор (напряженность электрического поля); *б* — аксиальный вектор (напряженность магнитного поля); *в*, *г* — аксиальный тензор (величина левого и правого удельного вращения плоскости поляризации); *д*, *е* — полярный тензор (растягивающее и сжимающее напряжение)

объекта; они *не равны* друг другу. В этом — существенная разница между магнитной и электрической полярностью. Заслугой Пьера Кюри является то, что он эту разницу осознал впервые и до конца.

Здесь уместно было бы сделать следующее отступление. Нам кажется, что одной из основных задач всякой науки является, коротко говоря, сравнивать несравнимое и различать неразличимое, т. е. находить существенные признаки сходства и различия там, где ранее они не были заметны. До П. Кюри физики интересовались больше признаками сходства, нежели признаками отличия между электрическим и магнитным полями, находя себе в этом деле поддержку со стороны математиков. Это можно видеть хотя бы из того, что векторы напряженности электрического и магнитного полей изображались и, странным образом, продолжают изображаться до сих пор одинаковым способом — прямолинейной стрелкой (рис. 2, *а*), несмотря на то, что электрический вектор является полярным — и для него такое изображение правильно отображает его симметрию,— а магнитный вектор является аксиальным — и для него такое изображение неправильно отображает его симметрию: прямолинейная стрелка не имеет той поперечной плоскости симметрии, которую имеет всякий аксиальный вектор. Изображением аксиального вектора, правильно отображающим его симметрию, очевидно, мог бы быть отрезок прямой, имеющий длину, пропорциональную величине вектора, и круговую стрелку, указывающую направление вращения, при-

писываемое этому вектору (рис. 2, *б*). Как видим, П. Кюри действительно опередил своих современников, обнаружив в магнитном и электрическом полях такой существенный признак их различия, как различие в отношении симметрии, другими не замеченное.

В развитии разных наук мы часто наблюдаем возврат к старым идеям на новой основе и зарождение новых идей на старой основе. Это имеет прямое отношение к рассматриваемому нами вопросу о симметрии полярных и аксиальных векторов. Обнаруженная П. Кюри разница между полярным и аксиальным векторами, заключающаяся в том, что аксиальный вектор имеет, а полярный не имеет поперечной плоскости симметрии, в настоящее время смягчается введением в учение о симметрии понятия противоположного равенства и, соответственно, понятия антисимметрических преобразований и элементов антисимметрии. Используя эти понятия, мы приходим к заключению, что полярный вектор, изображаемый прямолинейной стрелкой, имеет поперечную *плоскость антисимметрии*, которая обладает тем свойством, что прямолинейная стрелка после отражения в этой плоскости, сопутствуемого *переменой знака* фигуры (заменой положительного знака конца вектора на отрицательный и отрицательного на положительный), преобразуется в себя (совмещается с собой).

Когда студент-физик впервые знакомится с предельными группами симметрии, наибольшее недоумение с его стороны встречает группа симметрии шара без плоскостей симметрии, обозначаемая нами символом ∞/∞. Совершенно невероятным кажется, что такие шары могут где-то встретиться. Наш обзор результатов работ П. Кюри в области учения о симметрии не достиг бы цели, если бы мы не воспользовались здесь случаем, чтобы ответить на этот вопрос. Для этого нам необходимо вспомнить, что́ представляет собою хорошо известная величина удельного вращения плоскости поляризации. Прежде всего должно отметить, что эта величина является величиной *направленной*; в кристаллах она изменяет свое значение с изменением направления. Так как с этой величиной мы связываем представление о некотором вращении, то сначала естественно возникает мысль причислить ее к аксиальным векторам, имеющим симметрию $\infty : m$ вращающегося цилиндра. Нетрудно видеть, однако, что такое решение вопроса было бы неправильным. Это следует из того, что величина удельного вращения не изменяет своего знака при изменении направления вперед на направление назад, т. е. правое вращение остается правым, левое левым (это не относится к магнитному вращению плоскости поляризации). Это означает, что удельное вращение является не вектором, а тензором и притом аксиальным тензором, имеющим симметрию $\infty : 2$ цилиндра, закрученного по правому или левому винту. Такую величину удобно изображать отрезком прямой с двумя круговыми стрелками (рис. 2, *в*, *г*), направленными в одну сторону с точки зрения наблюдателя, смотрящего на эти стрелки по очереди с одного и другого конца отрезка, т. е. так, как фактически изу-

чается явление вращения плоскости поляризации. В изотропных средах, вращающих плоскость поляризации, например, в водном растворе сахара, удельное вращение по всем направлениям одинаково, т. е. индикатриса вращения (гирационная поверхность) таких сред является шаром, который, очевидно, не имеет плоскостей симметрии и может быть то правым, то левым в зависимости от характера вращения.

П. Кюри не был единственным из ученых, понимавших, что свойством симметрии могут обладать не только кристаллы и другие вещественные объекты, но и физические поля, а также и физические явления. Важно то, что это понимание было у П. Кюри более глубоким, чем у кого бы то ни было из его современников, и что размышления П. Кюри о симметрии кристаллов и происходящих в них явлений привели его к важным обобщениям, о которых речь будет далее. Касаясь этого вопроса, М. Кюри пишет в своих воспоминаниях о Пьере Кюри, что открытие братьями Кюри пьезоэлектрической поляризации «отнюдь не является случайным. Оно возникло в результате размышления о симметрии окристаллизованной материи, которое позволило братьям предвидеть возможность этой поляризации».

Переходим к общим принципам симметрии, изложенным П. Кюри в его замечательной работе «О симметрии в физических явлениях».

Эта работа начинается со следующих выделенных курсивом строк.

«Характеристическая для того или иного явления симметрия есть максимальная симметрия среды, совместимая с существованием явления».

«Явление может существовать в среде, которая обладает либо характеристической симметрией, либо одной из ее подгрупп».

«Иначе говоря, некоторые элементы симметрии среды могут сосуществовать с явлением, но они не являются обязательными. Обязательным является лишь отсутствие некоторых элементов симметрии. Это она — диссимметрия — творит явления».

Приведем несколько примеров из кристаллофизики, разъясняющих смысл этих положений П. Кюри.

Возьмем кристалл турмалина, который, как известно, обладает симметрией $3 \cdot m$ (одна ось третьего порядка и три пересекающиеся по ней, продольные, плоскости симметрии). Известно также, что турмалин при равномерном нагревании электрически поляризуется, т. е. в нем возникает однородное электрическое поле, направленное вдоль оси (пироэлектрический эффект). Мы уже видели выше, что однородное электрическое поле в каждой своей точке обладает симметрией $\infty \cdot m$. В рассматриваемом примере средой, в которой возникает пироэффект, является турмалин. Однако турмалин не является единственной средой, обладающей этим свойством: пироэффект возможен также и в других средах (кристаллах и текстурах), если по симметрии они принадлежат либо к группе

$\infty \cdot m$, либо к одной из подгрупп ($1, 2, 3 \ldots m, 2 \cdot m, 3 \cdot m, \ldots$) этой группы максимальной симметрии. Общим свойством всех этих групп является то, что в них «отсутствуют» определенные элементы симметрии: центр симметрии, поперечная плоскость симметрии и бесконечное множество осей симметрии (простых и зеркальных), расположенных перпендикулярно и косо по отношению к существующей оси. Совокупность этих *отсутствующих* элементов симметрии и составляет то, что П. Кюри называет диссимметрией. Подводя итог, мы можем поэтому сказать, что пироэффект возможен во всех средах, обладающих указанной диссимметрией. Она и «творит явление».

Термин диссимметрия имеет широкое распространение в кристаллографической, химической и физической литературе. Впервые он был, по-видимому, введен в науку Л. Пастером, который под диссимметрией разумел свойство определенных фигур не совмещаться простым наложением со своим зеркальным изображением. Примером таких фигур может служить фигура руки человека: известно, что фигура правой руки не может быть совмещена простым наложением со своим зеркальным изображением, т. е. с фигурой левой руки. В настоящее время мы можем определить диссимметрию Л. Пастера как отсутствие в фигуре элементов симметрии второго рода; им отвечают операции симметрии, эквивалентные нечетному числу отражений в плоскостях (простое отражение в одной плоскости, инверсия, зеркальные повороты, скользящее отражение). Понятие диссимметрии у П. Кюри шире. Под диссимметрией он разумеет просто совокупность всех элементов симметрии, отсутствующих в фигуре. Очень важно отметить следующее существенное различие между симметрией (совокупностью присутствующих элементов симметрии) и диссимметрией (совокупностью отсутствующих элементов симметрии). Известно, что полная совокупность операций симметрий, отвечающих всем присутствующим в фигуре элементам симметрии, образует *группу* в математическом смысле. Это означает, что *произведение* любых двух операций группы эквивалентно по результату какой-либо одной операции той же группы. В противоположность этому полная совокупность операций симметрии, отвечающих всем отсутствующим в фигуре элементам симметрии, не образует группы в математическом смысле. По П. Кюри, для предсказания новых явлений диссимметрия более существенна, чем симметрия. Поскольку, однако, замечает он, число отсутствующих элементов симметрии всегда бесконечно велико, проще перечислять элементы симметрии (присутствующие), чем элементы диссимметрии (отсутствующие элементы симметрии).

В широких научных кругах диссимметрию — идет ли речь о диссимметрии Л. Пастера или о диссимметрии П. Кюри — часто смешивают с *асимметрией*, т. е. полным отсутствием симметрии. Асимметрия, очевидно, является лишь частным случаем диссимметрии. Диссимметрию смешивают иногда с *антисимметрией* —

противоположной симметрией, описываемой специальными группами четырехмерной симметрии.

Развивая свои основные положения, цитированные нами выше, П. Кюри приходит к следующему чрезвычайно важному выводу: «Когда несколько различных явлений природы накладываются друг на друга, образуя одну систему, диссимметрии их складываются. В результате остаются лишь те элементы симметрии, которые являются общими для каждого явления, взятого отдельно».

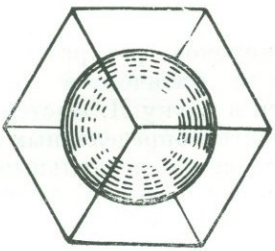


Рис. 3. Сложная фигура, составленная из куба и конуса

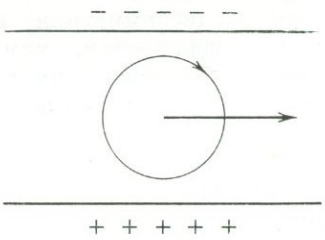


Рис. 4. К объяснению явления Холла

Это положение П. Кюри является далеко не тривиальным распространением на *физические явления* тривиальной для геометрических фигур истины, заключающейся в том, что при соединении двух (или многих) не равных друг другу симметричных *составляющих* фигур в одну *составную* в последней остаются лишь те элементы симметрии, которые являются общими для всех составляющих фигур *при заданном способе их размещения в пространстве*. Допустим, например, что нам дан куб и конус, расположенные относительно друг друга так, что ось конуса совпадает с диагональю куба (рис. 3). Непосредственно видно, что составная фигура обладает симметрией $3 \cdot m$ (одна ось третьего порядка и три продольные плоскости симметрии). Легко усмотреть, что эти элементы симметрии содержатся и в кубе, и в конусе. Легко видеть также, что отсутствующие в кубе и в конусе элементы симметрии будут отсутствовать и в составной фигуре: диссимметрия составной фигуры выше; она складывается из диссимметрий составляющих фигур.

Утверждаемая П. Кюри возможность перенесения этой геометрической истины на физические явления означает возможность *изображения* физических явлений фигурами, в частности, такими *материальными* фигурами, которым мы, кроме чисто геометрических, приписываем также и некоторые физические свойства. С примерами таких фигур мы уже встречались: это вращающийся цилиндр, изображающий магнитное поле или магнитную поля-

ризацию вещества, скрученный цилиндр, изображающий вращение плоскости поляризации в кристаллах, и т. д.

Приведем несколько простых примеров применения рассматриваемого положения П. Кюри.

Представим себе поток воды, текущий по каналу в направлении, указанном на рис. 4 прямолинейной стрелкой. В воду погружен цилиндр, вращающийся вправо (по часовой стрелке) вокруг неподвижной оси, нормальной к поверхности воды. Легко видеть, что в этих условиях половина боковой поверхности цилиндра движется по течению воды, ускоряя его; другая половина движется против течения, замедляя его. В результате уровень воды у одного берега прибывает (+), у другого убывает (—). Эта диссимметрия возникает в результате сложения диссимметрий прямолинейной и круговой стрелок, вследствие чего остается лишь один общий им элемент симметрии — плоскость симметрии, параллельная поверхности воды. В фигурах же, обладающих только одной плоскостью симметрии (таких, как фигура человека), все направления, параллельные плоскости симметрии (такие, как вверх и вниз, вперед и назад, но не вправо и влево к фигуре человека), полярны, т. е. их концы не одинаковы между собой. Описанное механическое явление в точности отвечает эффекту Холла в электродинамике. Если постоянный электрический ток пропускать по тонкой металлической пластинке, расположенной между полюсами магнита, то на краях пластинки возникает разность потенциалов. Магнитное поле имеет симметрию вращающегося цилиндра, электрическое поле — симметрию прямолинейной стрелки (конуса). Комбинация обеих фигур имеет всего одну плоскость симметрии, общую и круговой, и прямолинейной стрелкам.

В научных кругах большей известностью, нежели только что рассмотренный *принцип суперпозиции симметрий*, пользуются (без должного их понимания) три принципа симметрии П. Кюри, коими устанавливается связь между симметрией причины и следствия. Эту известность они получили, как нам кажется, благодаря тому, что в опубликованных М. Кюри воспоминаниях о муже они выделены курсивом и занумерованы как наиболее важные. Сам П. Кюри, как уже упоминалось выше, курсивом их не выделяет и не нумерует.

Вот эти принципы.

1. «Когда определенные причины порождают известные следствия, элементы симметрии причины должны содержаться в порожденных следствиях».

2. «Когда известные следствия обнаруживают известную диссимметрию, эта последняя должна содержаться и в причинах, породивших эти следствия».

3. «Положения, обратные двум предыдущим, неправильны, по крайней мере, на практике, т. е. следствия могут быть симметричнее вызывающих их причин».

Трудность понимания этих принципов заключается в неясности, что в конкретных случаях следует понимать под причиной и следствием и что́ следует разуметь под их симметрией и диссимметрией.

Мы можем дать здесь следующее истолкование этих принципов, сводя их к одному принципу суперпозиции симметрий. Допустим, что к кубику каменной соли приложено сжимающее напряжение t_{33}, направленное вдоль одной из осей четвертого порядка



Рис. 5. Сжатие кубика каменной соли

этого кристалла (рис. 5). Спрашивается, какую симметрию должен при этих условиях приобрести кристалл?

Условимся за причину принимать все исходные данные, т. е. заданное, но пока еще никуда не приложенное напряжение t_{33} и заданный, но пока еще не напряженный и не деформированный кристалл, а за следствие то, что спрашивается, т. е. деформированный и напряженный кристалл. Тензор сжимающего напряжения мы привыкли изображать противоположно направленными прямолинейными стрелками (рис. 2, *е*). Такая пара стрелок имеет симметрию покоящегося цилиндра $m \cdot \infty : m$ (одна ось бесконечного порядка, одна поперечная и множество продольных плоскостей симметрии, множество поперечных осей второго порядка и центр симметрии). Можно *доказать*, что ту же симметрию имеет и *величина* тензора

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix},$$

которым описывается указанное напряжение. Это следует из того, что все девять компонент рассматриваемого тензора преобразуются в себя всеми операциями симметрии указанной группы и никакими другими. Мы делаем отсюда заключение, что симметрия напряжения и симметрия тензора напряжения — это одно и то же. Таким образом, при применении принципов П. Кюри можно и должно за симметрию свойств и явлений принимать симметрию тех величин (тензоров различного ранга) или тех фигур, коими они (свойства и явления) описываются.

В нашем случае симметрия причины слагается из симметрии $m \cdot \infty : m$ напряжения и симметрии $\bar{6}/4$ каменной соли (симметрии

простого куба). Высшей подгруппой обеих этих групп (в предположении, что все элементы симметрии их пересекаются в одной точке) является группа $m \cdot 4 : m$ (одна ось четвертого порядка, одна поперечная и четыре продольные плоскости симметрии, четыре двойные оси и центр симметрии), присущая тетрагональным кристаллам. Ту же симметрию должен, очевидно, приобрести и деформированный кристалл, что на самом деле и наблюдается.

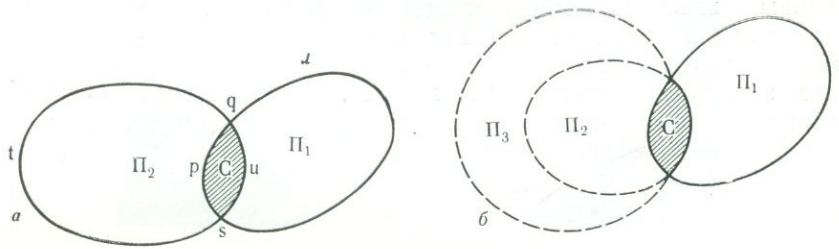


Рис. 6. Для объяснения принципа суперпозиции симметрий:
а — группы симметрии Π_1 и Π_2 порождают группу C; *б* — группы симметрии Π_1 и C порождают какую-то одну из многих групп $\Pi_2, \Pi_3, \ldots$

Изложенному можно дать следующее наглядное толкование (рис. 6). Обозначим одну из групп симметрии причины, т. е., говоря точнее, совокупность всех ее операций симметрии, фигурой $\Pi_1 = pqrsp$, а другую группу симметрии причины фигурой $\Pi_2 = tsuqt$ (рис. 6,*а*). Тогда симметрия следствия однозначно представится заштрихованной фигурой C, которую можно рассматривать как своеобразное произведение $\Pi_1\Pi_2 = C$ групп Π_1 и Π_2 при заданном расположении их элементов симметрии. Ясно, что одновременно однозначно определится диссимметрия следствия C *по отношению* к Π_1 (те из присутствующих в Π_1 элементов симметрии, которые отсутствуют в C), т. е. $D_1 = \Pi_1 - C = sugrs$, и диссимметрия C *по отношению* к Π_2, т. е. $D_2 = \Pi_2 - C = tspqt$.

Если представить себе, что заданными группами, т. е. «причиной» будут две группы Π_1 и C (рис. 6,*б*), то третья группа Π_2, как видно из рисунка, по ним однозначно определена быть не может. Применительно к рассмотренному нами примеру это означает следующее: если нам известна симметрия деформированного кристалла и симметрия деформирующего напряжения, то по этим данным мы не можем решить, какую симметрию имел кристалл до деформации.

Из изложенного видно, что все три принципа П. Кюри, связывающие симметрию причины и симметрию следствия, в конечном счете могут быть действительно сведены к им же сформулированному принципу суперпозиции симметрий.

Свои размышления о симметрии П. Кюри завершает замечанием, в котором говорится, что выводы из рассмотрения сим-

метрии могут быть двух родов: 1) неоспоримые, но отрицательные выводы, которые отвечают положению — нет следствий без причины, и 2) положительные выводы, которые, однако, не дают той уверенности, как отрицательные; они отвечают положению — нет причины без следствия.

К неоспоримым отрицательным относится, например, утверждение, что в кристаллах, обладающих центром симметрии, невозможны пьезоэлектрические явления. К неуверенным положительным выводам можно отнести обратное положение: пьезоэлектричество возможно только в кристаллах без центра симметрии, но оно не является обязательным.

В заключение отметим, что идеи П. Кюри в области учения о симметрии нельзя считать до конца оформленными. Это сделают будущие поколения.

СИММЕТРИЯ ПОДОБИЯ[1]

(Предварительное сообщение)

К истории вопроса. История зарождения и развития понятия о симметрии подобия в среде ученых, художников и архитекторов уходит в далекое прошлое. Леонардо да Винчи был одним из первых, сознательно применявших симметрию подобия под видом перспективы. Он же пользовался при создании разнообразных конструкций построением, которое было названо им *золотым сечением* [1]. Следует отметить, что это построение, имеющее, как будет ясно из дальнейшего, прямое отношение к симметрии подобия, было хорошо известно еще древним геометрам. Интересовался законами подобия также Гёте, видя в закрученных формах растений и животных важную для природы *спиральную тенденцию*, а в законе чередования позвонков у животных — намек на бесконечную смену поколений (стр. 51, 72 работы [9]).

Отдельные случаи проявления симметрии подобия изучались многими учеными [2—8]. Симметрия подобия наблюдалась в законах расположения листьев у растений (филотаксис), в правильной укладке семян в плодовых телах подсолнечника, ромашки (рис. 1) и ряда других растений, в спиральных формах раковин моллюсков (рис. 2), в конических формах многих деревьев (например ели), в скелетных формах и пирамидах роста кристаллов и в других разнообразных формах индивидов живой и неживой природы.

---

[1] Кристаллография, 1960, т. 5, вып. 4, с. 489—496.

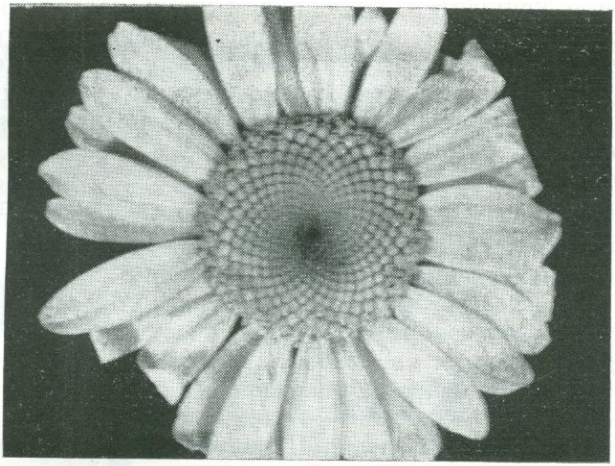


Рис. 1. Пример проявления симметрии подобия в плодовом теле ромашки

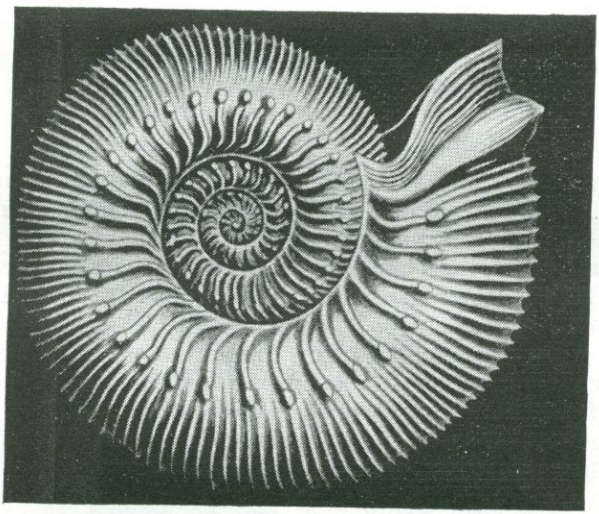


Рис. 2. Раковина аммонита из атласа Геккеля

Некоторые конкретные случаи симметрии подобия описывались строго математически с помощью непрерывных дробей и, в частности, приводились к уже упомянутому золотому сечению.

Общая идея возможности математического описания таких закономерностей с помощью специальных групп, именуемых нами ниже группами L, была высказана впервые Г. Вейлем в его книге «Симметрия» [9].

В настоящей работе мы делаем попытку раскрыть для фигур на плоскости конкретное содержание этой идеи путем рассмот-



Рис. 3. Пример фигуры, имеющей симметрию подобия K

Фигура состоит из бесконечного множества черных треугольников. На рисунке показан способ построения этой фигуры

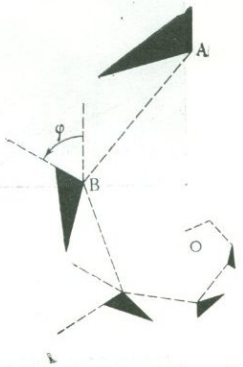


Рис. 4. Способ построения фигуры, имеющей симметрию подобия L

На примере треугольников A и B показано, каким образом смежные части фигуры (черные треугольники) преобразуются друг в друга

рения групп, в состав которых могут входить наряду с новыми операциями симметрии подобия также и операции классической симметрии. Каждая группа иллюстрируется одной или несколькими относящимися к ней фигурами.

Операции симметрии подобия. Общее определение симметрии подобия. В самом широком смысле под симметричной фигурой мы разумеем такую фигуру, которая состоит из р а в н ы х и о д и н а к о в о расположенных относительно друг друга частей. В классическом учении о симметрии, как известно, принимаются только два вида равенства фигур и их частей — равенство совместимое и равенство зеркальное. В учении о симметрии подобия равными считаются не только действительно равные фигуры, но и все подобные им, т. е. все фигуры *одной и той же формы*.

Одинаковое расположение частей фигуры достигается путем *размножения* данной части с помощью определенных операций, преобразующих любую из частей в любую другую подобную, а всю фигуру в себя.

Операция К. Простейшей операцией симметрии подобия является операция переноса всех подобных частей фигуры в параллельное положение с одновременным увеличением или умень-

шением масштаба частей и расстояний между ними в n раз. При этом переносе соответственные точки подобных частей фигуры движутся прямолинейно.

Прямые, проходящие через соответственные точки частей, сходятся в *особенной точке* фигуры. Фигура определяется двумя ее смежными частями в параллельном положении. Операция осуществляется построением, показанным на рис. 3. Получаемая с помощью описываемой операции K и ее повторений фигура состоит из бесконечного множества частей, уменьшающихся при приближении к особенной точке и увеличивающихся при удалении от нее. Уменьшающиеся части исчезают в особенной точке, увеличивающиеся уходят в бесконечность.

Операция L. Эта операция слагается из последовательно произведенных поворота фигуры вокруг фиксированной оси на некоторый угол φ и операции K — переноса фигуры в направлении к оси (особенной точке). Порядок следования этих операций безразличен. Операция L осуществляется построением (рис. 4) по двум заданным подобным частям A, B фигуры на плоскости в непараллельном положении. Важно отметить, что при наличии операции L отдельно взятые составляющие операции φ и K могут и не быть самостоятельными операциями симметрии подобия. На рис. 4 показан именно этот случай.

На рис. 5, *а* дан другой пример фигуры, построенной с помощью операции L и ее повторений. Нетрудно доказать, хотя это видно и непосредственно из рис. 5, *а*, что соответственные точки частей фигуры должны лежать на логарифмической спирали. Условимся операцию L именовать *спиральным движением* вокруг *оси подобия*, а саму ось обозначать тем же символом L.

Следует обратить внимание на то, что элементарный угол φ поворота фигуры вокруг оси подобия может быть равен как рациональной, так и иррациональной доле полного оборота. На рис. 5, *б* дан пример фигуры, построенной с помощью операции L ($\varphi = -\pi/5$) с углом φ, равным 1/10 полного оборота по часовой стрелке, если следовать по спиралям от центра к периферии. Такой характер вращения мы отмечаем знаком минус.

Элементарный угол поворота вокруг оси подобия в отличие от соответствующего угла поворота вокруг простой оси симметрии может быть равен не только целой, но и дробной доле полного оборота. Например, фигура на рис. 5, *в* имеет угол $\varphi = +2\pi/15$, а фигура на рис. 5, *г* имеет угол $\varphi = -3\pi/5$.

Фигуры, построенные с помощью одной оси подобия с рациональным углом φ, разделяются на сектора, имеющие симметрию K. При иррациональном φ фигура на такие сектора не разделяется.

Нетрудно видеть, что операция K по своему результату не отличается от операции L ($\varphi = 2\pi$).

Операция M. Эта операция является аналогом операции простого или скользящего отражения в классическом учении о сим-

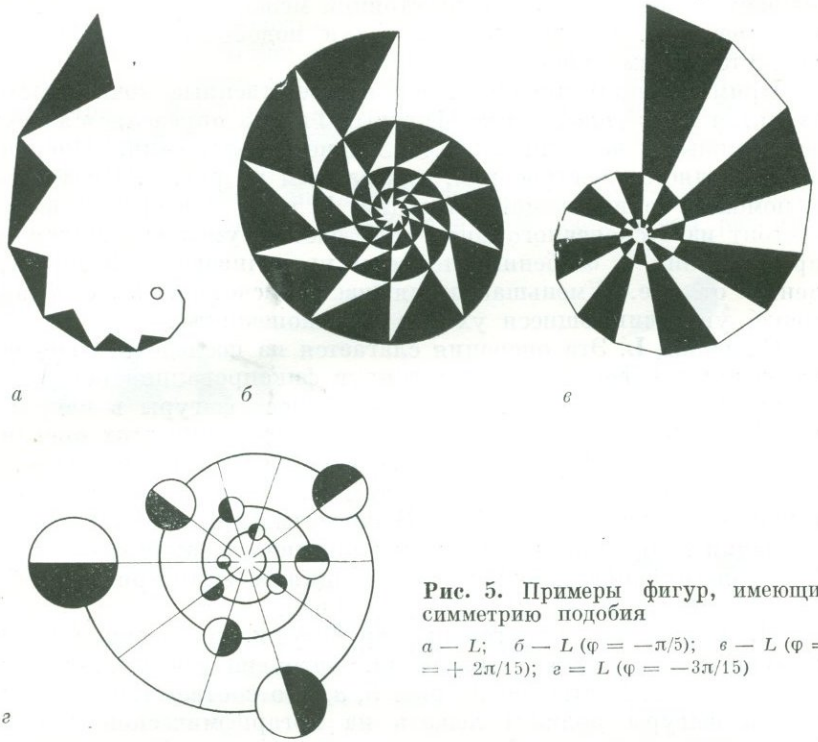


Рис. 5. Примеры фигур, имеющих симметрию подобия

а — L; *б* — L ($\varphi = -\pi/5$); *в* — L ($\varphi = +2\pi/15$); *г* = L ($\varphi = -3\pi/15$)

метрии. Условимся называть ее *отражением в плоскости подобия*. В общем виде эта операция осуществляется по схеме, показанной на рис. 6.

Даны две зеркально подобные фигуры в виде двух прямоугольных треугольников — одного с гипотенузой AB и другого с гипотенузой $A'B'$. Предполагается, что они являются смежными частями одной фигуры.

Берем произвольную точку первой фигуры. В конкретном случае удобно взять точку A. Соединяем ее с соответствующей точкой A' второй фигуры. Этим определяется угол φ с вершиной A. Поворачиваем фигуру с диагональю $A'B'$ на угол φ вокруг A' по часовой стрелке, одновременно укорачивая отрезок $A'B'$ в новом положении треугольника до длины $A'A''$ так, чтобы было соблюдено условие

$$A'A''/AA' = A'B'/AB.$$

Так получаем точку A'' третьей фигуры. Гипотенузу $A''B''$ этой фигуры получаем, проводя из точки A'' прямую параллельно AB и откладывая от A'' по этой прямой отрезок $A''B''$, вычисляемый из равенства

$$A''B''/A'B' = A'B'/AB.$$

Четвертая часть искомой фигуры получается из третьей тем же приемом, каким вторая часть получается из первой и т. д.

Так получаем два ряда правых и левых фигур, исчезающих в особенной точке O, лежащей в пересечении прямых AA'' и $A'A'''$ и прямых BB'' и $B'B'''$. Биссектриса угла AOA' изображает собою плоскость подобия. Мы проследили процесс размножения

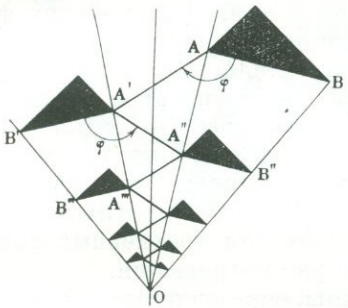
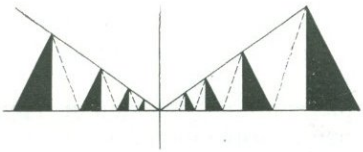


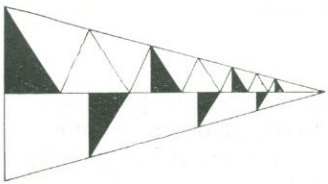
Рис. 6. Общий способ построения фигуры, имеющей симметрию подобия M, по двум заданным зеркально подобным частям AB и $A'B'$, ориентированным произвольно

Плоскость подобия идет по биссектрисе угла AOA'

Рис. 7. Частные случаи построения фигуры, имеющей симметрию подобия M



а



б

заданных частей искомой фигуры в сторону их уменьшения. Обратным построением можно получить части увеличивающиеся. Условимся плоскость подобия обозначать тем же символом M, каким обозначается и порождающая ее операция отражения.

На рис. 7, *а* дан частный случай построения фигуры, обладающей плоскостью подобия. В этом примере плоскость M больше напоминает собою обыкновенную плоскость симметрии. На рис. 7, *б* она скорее напоминает плоскость скольжения.

Операция N. Описанными операциями K, L, M исчерпываются все мыслимые операции симметрии подобия двумерных фигур, если не считать относящихся к тем же фигурам операций обычной симметрии, которые, как уже говорилось, являются одновременно операциями симметрии подобия. Переходя к трехмерным фигурам, отметим только одну операцию N, которую можно рассматривать как произведение операции L ($\varphi \neq \pm 2\pi$) на операцию $K = L\,(\varphi = 2\pi)$ при условии, что соответствующие оси взаимно перпендикулярны и что каждая из указанных операций, отдельно взятая, не обязательно является операцией симметрии подобия фигуры.

Пример трехмерной фигуры, имеющий ось N, показан на рис. 8.

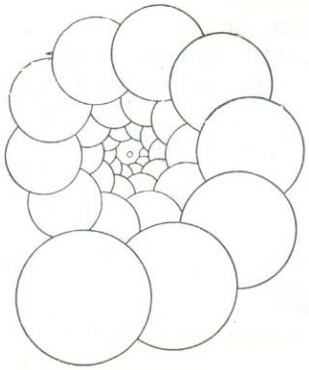


Рис. 8. Пример трехмерной фигуры, имеющей симметрию подобия N

Ось подобия нормальна к плоскости чертежа

Группы симметрии подобия. Группы, определяемые одной операцией. Сюда относятся группы, состоящие из заданной операции, ее степеней и степеней операции, обратной по отношению к заданной. Эти группы могут быть обозначены символом заданной операции. Для плоских фигур такими группами могут быть только K, L, M. Примеры фигур, принадлежащих к этим группам, приведены на рис. 1—7. Для трехмерных фигур такими группами могут быть как группы K, L, M, так и группа N. Вопрос о других возможных группах для трехмерных фигур здесь не рассматривается.

Группы, определяемые двумя операциями первого рода. Сюда относятся группы ряда

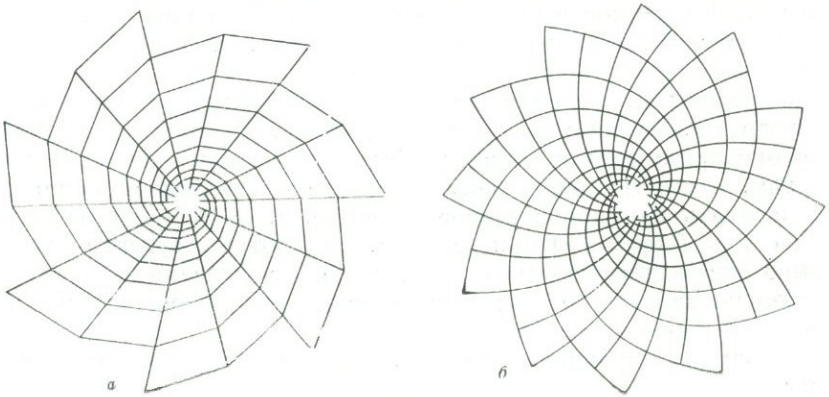
$$2\cdot L,\quad 3\cdot L,\quad 4\cdot L,\ \ldots$$

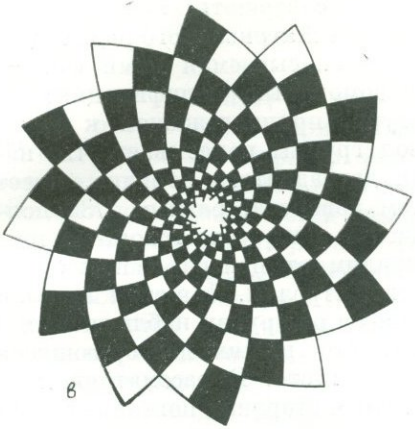
Группы этого ряда задаются осью симметрии любого порядка и совпадающей с ней осью подобия L.

На рис. 9, *а* дан пример фигуры, принадлежащей к группе $7\cdot L$ ($\varphi = -\pi/7$). В соответствии с этим символом фигура может совмещаться с собою как поворотами фигуры вокруг оси 7 на углы, кратные $2\pi/7$, так и спиральными поворотами на углы, кратные углу $\varphi = -\pi/7$. Знак минус перед значением угла показывает, как уже говорилось, что при спиральном движении

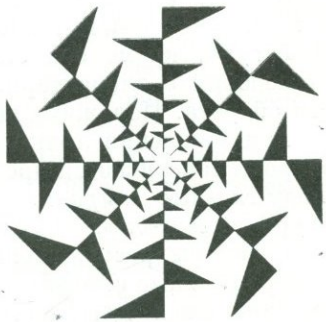
Рис. 9. Полимеры фигур, имеющих симметрию подобия

а) $7\cdot L$ ($\varphi = -\pi/7$); *б*) $12\cdot L$ ($\varphi = +\pi/16$); *в*) $6\cdot L$ ($\varphi = -\pi/8$); *г*) $8\cdot M$; *д*) $12\cdot mL$ ($\varphi = \pi/12$); *е*) $12\cdot mL$ ($\varphi = \pi/12$); *ж*) — $12\cdot mK$; *з*) $3\cdot mM$

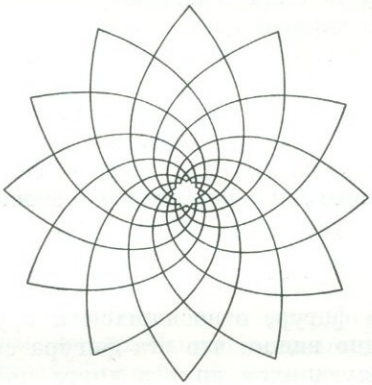




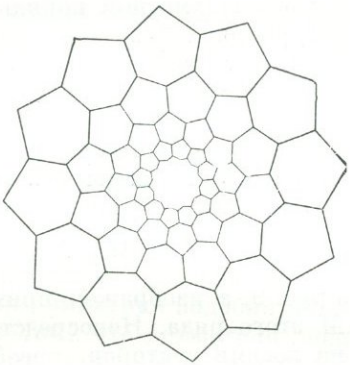
в



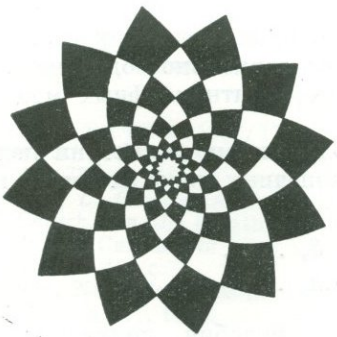
г



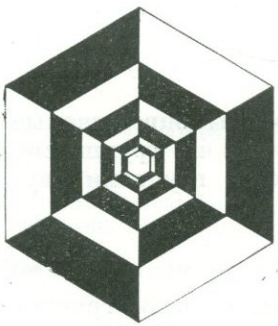
д



е



ж



з

от центра к периферии приходится совершать повороты по часовой стрелке. Поскольку группы рассматриваемого ряда содержат только операции первого рода, описываемая нами фигура может существовать в двух энантиоморфных модификациях.

На рис. 9, *б* изображена фигура, принадлежащая к группе $12 \cdot L$ ($\varphi = +\pi/16$). Этот символ группы показывает, что наша фигура, кроме оси симметрии двенадцатого порядка, имеет ось подобия с элементарным углом поворота, равным 1/32 полного оборота. Положительное значение этого угла говорит о том, что при движении точки по спиралям от центра к периферии повороты совершаются против часовой стрелки. При этом имеются в виду *главные спирали*, отличающиеся от других наблюдаемых в фигуре *производных спиралей* тем, что в них повторяющиеся части фигуры расположены наиболее густо. В рассматриваемом примере главные спирали идут по малым сторонам повторяющихся криволинейных четырехугольников, целиком заполняющих плоскость фигуры.

Если в описанной фигуре одну половину четырехугольников покрасить в шахматном порядке в черный цвет, то получим новую фигуру (рис. 9, *в*) более низкой симметрии $6 \cdot L$ ($\varphi = -\pi/8$). Все главные спирали, хорошо воспринимаемые глазом, идут по малым диагоналям черных (или белых) четырехугольников. Отрицательный знак угла φ говорит о том, что главные спирали завиты вправо — по часовой стрелке, если идти по ним из центра.

Группы, определяемые осью симметрии и параллельной ей плоскостью подобия. Эти группы образуют ряд

$$2 \cdot M, \quad 3 \cdot M, \quad 4 \cdot M, \ldots$$

На рис. 9, *г* изображен пример фигур, относящихся к группе $8 \cdot M$ этого ряда. Непосредственно видно, что эта фигура состоит из восьми секторов, преобразующихся друг в друга поворотами вокруг единственной оси *8* на углы, кратные 1/8 полного оборота. При этом каждая отдельно взятая часть имеет симметрию подобия M (ср. рис. 7, *б*).

Замечательным свойством фигур, принадлежащих к этому ряду, является то, что они, состоя из зеркально подобных частей, все же могут существовать в двух энантиоморфных модификациях.

Группы, определяемые тремя элементами симметрии подобия. Известно, что группы симметрии конечных плоских фигур исчерпываются группами двух рядов

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots,$$
$$m, \quad 2 \cdot m, \quad 3 \cdot m, \ldots$$

Мы рассмотрели группы симметрии подобия, получаемые комбинированием групп первого ряда с группами L и M. Остается рассмотреть комбинации групп второго ряда с теми же L и M.

Этим приемом получаем два ряда новых групп

$$mL,\quad 2{\cdot}mL,\quad 3{\cdot}mL,\quad \ldots,$$
$$mM,\quad 2{\cdot}mM,\quad 3{\cdot}mM,\quad \ldots$$

На рис. 9, *д* дан пример фигуры, принадлежащей к группе $12{\cdot}mL$ ($\varphi = \pi/12$) первого ряда. Символ этой группы показывает, что фигура имеет одну ось симметрии двенадцатого порядка, двенадцать плоскостей симметрии и ось подобия с элементарным углом поворота, равным 1/24 полного оборота. На рис. 9, *е* изображена фигура, имеющая ту же симметрию подобия, что и предыдущая фигура. Новая фигура интересна тем, что ею демонстрируется закон плотнейшей гексагональной упаковки в плодовых телах многих растений.

Если на рис. 9,*а* раскрасить повторяющиеся части в шахматном порядке в два разных цвета, то получим фигуру, имеющую симметрию подобия $12{\cdot}mL$ ($\varphi = \pi/6$), поскольку элементарный угол поворота, отвечающий оси L, увеличится вдвое (рис. 9, *ж*). Эту группу проще, однако, трактовать как группу $12{\cdot}mK$ в связи с тем, что в ней главные черные спирали преобразованы в окружности, а им перпендикулярные спирали вытянуты в прямые ряды по радиусам фигуры. Примером фигур, принадлежащих к группам второго ряда, может служить фигура, приведенная на рис. 9, *з*. Эта фигура относится к группе $3{\cdot}mM$, содержащей, кроме оси третьего порядка и трех обыкновенных плоскостей симметрии, три плоскости подобия и не показанную в символе ось подобия с углом $\varphi = \pi/3$.

Заключение. Мы закончили краткий обзор групп симметрии подобия плоских фигур. Далее предстоит развить этот отдел более подробно и дать вывод групп симметрии подобия для трехмерных фигур. Мы не сомневаемся в том, что симметрия подобия должна найти себе широкое применение в декоративном искусстве и архитектуре, а также в науках о живой природе при описании морфологических свойств растений и животных. Не исключена возможность использования теории симметрии подобия и в кристаллографии при изучении разнообразных ритмических явлений, сопутствующих образованию кристаллов.

ЛИТЕРАТУРА

1. БСЭ. Золотое сечение. 1952, **17**, 157.
2. *Ch. Bonnet.* Recherches sur l'Usage des Feuilles dans les Plantes. Goettige et Leide, 1754, p. 159.
3. *A. Bravais, L. Bravais.* Ann. sci. natur., **7**, 41, 67, 1837.
4. *A. H. Church.* On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws. 1904.
5. *Г. В. Вульф.* Симметрия и ее проявление в природе. М., Изд-во И. Д. Сытина, 1908. 134 с.
6. *S. Colman.* Nature's Harmonic Unity: A Treatise on its Relation to Proportional Form. N. Y., 1912.
7. *Th. A. Cook.* The Curves of Life. London, 1914.
8. *F. M. Jaeger.* Lectures on the Principle of Symmetry and its Applications in all Natural Sciences. Amsterdam, 1920, p. 160.
9. *Г. Вейль.* Симметрия. М. Изд-во «Наука», 1968. (H. Weyl. Symmetry. Prindeston, New Jersey. 1952, p. 1).

ПОЛНАЯ СИСТЕМАТИКА ТОЧЕЧНЫХ ЧЕРНО-БЕЛЫХ ГРУПП[1]

Предлагаемая систематика составлена по образцу опубликованной ранее систематики точечных групп классической симметрии [1]. Систематика точечных черно-белых групп представлена табл. 1. Ею охвачены как кристаллографические, так и некристаллографические черно-белые группы. Тривиальные неполярные (серые) и полярные (белые) группы антисимметрии оставлены без внимания. Для обозначения групп мы пользуемся ранее разработанной нами символикой [2]. Цифрами без черточек сверху и снизу обозначаются простые оси соответствующего порядка. Цифры с черточкой над ними обозначают зеркальные оси. Цифры с черточкой под ними символизируют антиоси. Цифры с двумя черточками — одной сверху и одной снизу — обозначают зеркальные антиоси. Буква m — простая плоскость симметрии, та же буква с черточкой внизу ($\underline{m}$) — антиплоскость симметрии. Точка, поставленная между двумя символами элементов симметрии, означает их параллельность, двоеточие — перпендикулярность, косая черта — косой наклон их относительно друг друга. Символом бесконечности обозначается простая ось бесконечного порядка, тем же символом с черточкой внизу — зеркальная антиось того же порядка, которая, напомним, является в то же время простой осью бесконечного порядка.

Наша систематика относится только к точечным группам трехмерных фигур, но с соответствующими поправками может быть распространена также и на группы двумерных фигур — односторонних и двусторонних.

Всякая антисимметричная (черно-белая), как и всякая просто симметричная фигура, может быть мысленно расчленена без остатка на целое число равных частей, если под равными разумеются такие части, которые преобразуются друг в друга какой-либо операцией той точечной группы симметрии (антисимметрии), к которой принадлежит фигура. Это свойство симметричных (в любом смысле) фигур может быть положено в основу определения самого понятия симметрии, а именно, симметричной можно назвать такую фигуру, которая делится без остатка на равные части, одинаковым образом расположенные относительно друга друга. Разбиение всех симметричных фигур (за исключением тех, которые обладают хотя бы одной осью бесконечного порядка) в принципе всегда можно осуществить так, что равные части будут *асимметричными* — не совместимыми с собою никакими операциями данной группы, кроме единичной операции. Разделение фигуры на равные асимметричные доли без остатка можно реализовать бесконечным числом способов (рис. 1). Это замеча-

[1] Кристаллография, 1961, т. 6, вып. 4, с. 490—495.

ние относится также к тем фигурам, которые с первого взгляда могут разрезаться на асимметричные части единственным способом: по плоскостям симметрии (антисимметрии) (рис. 2). То максимальное число асимметричных частей, на которое делится без остатка данная фигура, называется *порядком* соответствующей группы. Порядок той группы, к которой относится данная фигура, можно установить также иным путем. Можно, например, сначала выделить из фигуры мысленно какую-либо асимметричную

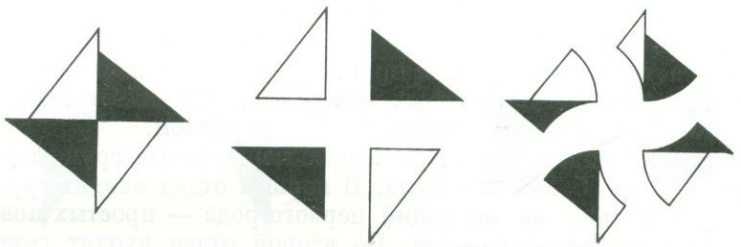


Рис. 1. Деление черно-белых фигур на равные части без остатка

часть, а затем сосчитать, сколько раз она повторяется в фигуре. То обстоятельство, что при таком повторении равные части могут частично накладываться друг на друга, определению порядка группы не мешает.

Точечными группами обычно описывается симметрия (классическая или обобщенная) конечных фигур. Отсюда, однако,

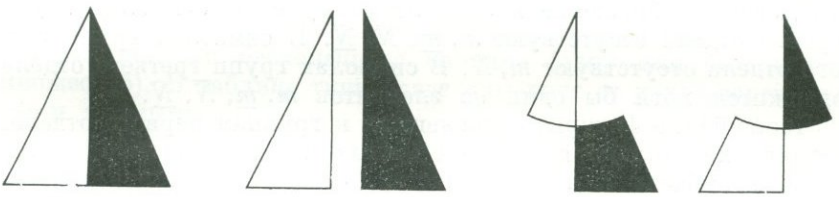


Рис. 2. Деление черно-белых фигур, обладающих плоскостями антисимметрии, на равные части

совсем не следует, что бесконечные фигуры не могут по своей симметрии относиться к точечным группам. Любая бесконечная симметричная фигура с одной особенной точкой — такая, например, как тройка пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных плоскостей,— может служить примером таких фигур. Понятие точечной группы может быть использовано, вообще, для описания симметрии любой фигуры в любой ее точке. Общее определение группы симметрии фигуры в данной точке будет тогда таким: группой симметрии фигуры в данной точке называется группа симметрических операций, преобразующих фи-

гуру в себя и оставляющих на месте эту точку. Это означает, например, что симметрия куба в одной из его вершин есть $3 \cdot m$, в середине одной из его граней $4 \cdot m$, в середине одного из его ребер $2 \cdot m$, в произвольной точке 1. Симметрия кубической гранецентрированной решетки Бравэ в центре одной из ее элементарных ячеек — $6/4$, где-либо на диагонали ячейки $3 \cdot m$, в произвольной точке указанной решетки 1.

Всякая антисимметричная черно-белая фигура состоит из одинакового числа черных и белых частей. Если фигура состоит из правых и левых частей, то число правых всегда равно числу левых. Если среди белых частей есть правые и левые, то и среди черных частей должны быть правые и левые. Иначе говоря, в антисимметричных черно-белых фигурах всегда имеет место паритет между правым и левым, черным и белым.

Из табл. 1 видно, что все точечные черно-белые группы укладываются в три больших отдела. В первый отдел входят группы, состоящие только из операций первого рода — простых поворотов и простых антиповоротов. Во второй отдел входят группы, содержащие, кроме указанных поворотов, некоторые антиоперации второго рода — антиотражения в плоскостях, зеркальные антиповороты, антиинверсию. Запрещенными операциями для групп этого отдела являются все операции второго рода классической симметрии. Иначе говоря, в группах этого отдела отсутствуют простые плоскости симметрии, зеркальные оси и центр симметрии. В третий отдел входят группы, содержащие операции второго рода классической симметрии.

Перечисленные особенности групп трех отделов находят себе следующее отображение в символике групп. В символах групп первого отдела отсутствуют m, $\underline{m}$, $\overline{N}$, $\underline{\overline{N}}$. В символах групп второго отдела отсутствуют m, $\overline{N}$. В символах групп третьего отдела содержится хотя бы один из элементов m, $\underline{m}$, $\overline{N}$, $\underline{\overline{N}}$.

Черно-белые фигуры, относящиеся к группам первого отдела, состоят либо только из правых (белых и черных), либо только из левых (белых и черных) частей. Это означает, что группы первого отдела допускают энантиоморфизм, который мы будем называть *простым* в отличие от *значного* (о нем см. ниже). Иными словами, всякая правая (левая) фигура, принадлежащая к какой-либо группе этого отдела, при отражении в произвольной плоскости или при инверсии в произвольной точке преобразуется в другую левую (правую) фигуру, не совместимую простым наложением с первоначально взятой фигурой (рис. 3). Нетрудно обнаружить, что при изменении знака частей черно-белой правой (левой) фигуры, т. е. в результате перекрашивания белых частей фигуры в черный цвет, а черных в белый цвет, она не претерпит энантиоморфного превращения, а перейдет в новую фигуру, отличающуюся от исходной только своим положением в пространстве — новая фигура совпадает с исходной, повернутой вокруг оси на определенный угол.

Черно-белые фигуры, относящиеся к группам второго отдела, состоят либо из правых белых и левых черных частей, либо, наоборот, из левых белых и правых черных частей. Легко убедиться, что всякая фигура рассматриваемого отдела может преобразовываться в свой зеркальный антипод как при зеркальном отражении и инверсии, так и при изменении знака своих белых и черных частей. Такой двойственный энантиоморфизм мы условно называем *значным*. На рис. 4 дан простейший пример значного

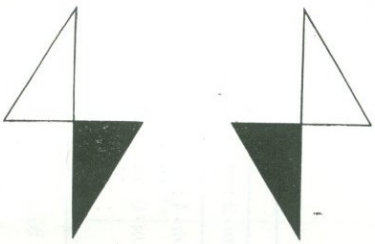


Рис. 3. Классический энантиоморфизм черно-белых фигур

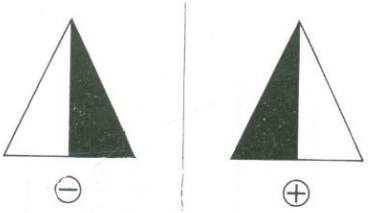


Рис. 4. Простейший пример значного энантиоморфизма

энантиоморфизма: левая фигура преобразуется в правую как отражением в плоскости, так и соответствующим изменением цвета частей фигуры.

Фигуры, относящиеся к группам третьего отдела, энантиоморфных модификаций не имеют.

Черно-белые фигуры и группы антисимметрии делятся на четырнадцать *типов*, обозначаемых символами *предельных групп*, содержащих оси бесконечного порядка (одну или бесконечное множество). В таблице типы разделены друг от друга вертикальными прямыми.

Типы в свою очередь разделяются на *ряды*. Ряды групп располагаются в таблице вертикально по *старшинству*: порядок групп возрастает сверху вниз. Ряды, заканчивающиеся предельной группой с одной осью бесконечного порядка, содержат бесконечное множество групп. Каждый из таких рядов задается в таблице тремя простейшими группами. Продолжения рядов отмечены многоточиями. Ряды, заканчивающиеся шаровыми группами (имеющими бесконечное число осей бесконечного порядка), содержат конечное число групп: две в ряде $\underline{\infty}/\infty$, пять в ряде $\infty/\infty \cdot \underline{m}$ и три в ряде $\underline{\infty}/\infty \cdot m$.

В пределах одного типа встречаются *четные и нечетные* ряды. В одних случаях четные ряды характеризуются присутствием, а нечетные отсутствием центра или антицентра симметрии. В других случаях четные ряды характеризуются присутствием, а нечетные отсутствием неполярных направлений в поперечных направлениях по отношению к главной оси.

Таблица 1

Точечные черно-белые группы

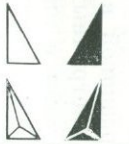
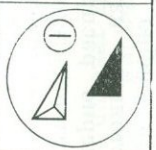
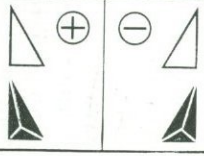
Энантиоморфизм				Значный энантиоморфизм			
$\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{6}$ $\vdots$	$\underline{2}:2$ $\underline{4}:2$ $\underline{6}:2$ $\vdots$	$\boxed{\underline{2}:2}$ $\boxed{1:\underline{2}}$ $4:\underline{2}$ $3:\underline{2}$ $6:\underline{2}$ $5:\underline{2}$ $\vdots$ $\vdots$	$3/\underline{4}$	$\underline{\bar{2}}$ $\underline{\bar{4}}$ $\underline{\bar{1}}$ $2:\underline{m}$ $\underline{\bar{6}}$ $\underline{\bar{8}}$ $\underline{\bar{3}}$ $4:\underline{m}$ $\underline{\overline{10}}$ $\underline{\overline{12}}$ $\underline{\bar{5}}$ $6:\underline{m}$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$2\cdot\underline{m}$ $\boxed{1\cdot\underline{m}}$ $4\cdot\underline{m}$ $3\cdot\underline{m}$ $6\cdot\underline{m}$ $5\cdot\underline{m}$ $\vdots$ $\vdots$	$\underline{m}\cdot2:\underline{m}$ $\boxed{\underline{m}\cdot1:\underline{m}}$ $\underline{\bar{4}}\cdot\underline{m}$ $\boxed{\underline{\bar{2}}\cdot\underline{m}}$ $\underline{m}\cdot4:\underline{m}$ $\underline{m}\cdot3:\underline{m}$ $\underline{\bar{8}}\cdot\underline{m}$ $\underline{\bar{6}}\cdot\underline{m}$ $\underline{m}\cdot6:\underline{m}$ $\underline{m}\cdot5:\underline{m}$ $\underline{\overline{12}}\cdot\mathbf{m}$ $\underline{\overline{10}}\cdot\mathbf{m}$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$3/\underline{\bar{4}}$ $\underline{\bar{6}}/2$ $\underline{\bar{6}}/4$ $3/\underline{\overline{10}}$
$\underline{\infty}$	$\underline{\infty}:2$	$\infty:\underline{2}$	$\underline{\infty}/\infty$	$\infty:\underline{m}$	$\infty\cdot\underline{m}$	$\underline{m}\cdot\infty:\underline{m}$	$\infty/\infty\cdot\underline{m}$

Отсутствие энантиоморфизма

$\underline{2}:m$ $\underline{2}:\underline{m}$ $\underline{4}:m$ $\underline{4}:\underline{m}$ $\underline{6}:m$ $\underline{6}:\underline{m}$ $\vdots$ $\vdots$	$\underline{2}\cdot m$ $\underline{4}\cdot m$ $\underline{6}\cdot m$ $\vdots$	$\underline{m}\cdot2:m$ $\boxed{\underline{m}\cdot1:\underline{m}}$ $\underline{\bar{4}}\cdot\underline{m}$ $\boxed{\underline{\bar{2}}\cdot\underline{m}}$ $\underline{m}\cdot4:m$ $\underline{m}\cdot3:m$ $\underline{\bar{8}}\cdot\underline{m}$ $\underline{\bar{6}}\cdot\underline{m}$ $\underline{m}\cdot6:m$ $\underline{m}\cdot5:m$ $\underline{\overline{12}}\cdot\underline{m}$ $\underline{\overline{10}}\cdot\underline{m}$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$m\cdot2:\underline{m}$ $\boxed{\underline{m}\cdot\underline{2}:\underline{m}}$ $m\cdot\underline{4}:\underline{m}$ $\underline{m}\cdot\underline{4}:\underline{m}$ $m\cdot\underline{6}:\underline{m}$ $\underline{m}\cdot\underline{6}:\underline{m}$ $\vdots$ $\vdots$	$\boxed{\underline{m}\cdot2:\underline{m}}$ $\boxed{\underline{m}\cdot1:\underline{m}}$ $\underline{\bar{4}}\cdot\underline{m}$ $\boxed{\underline{\bar{2}}\cdot\underline{m}}$ $\underline{m}\cdot4:\underline{m}$ $\underline{m}\cdot3:\underline{m}$ $\underline{\bar{8}}\cdot\underline{m}$ $\underline{\bar{6}}\cdot\underline{m}$ $\underline{m}\cdot6:\underline{m}$ $\underline{m}\cdot5:\underline{m}$ $\underline{\overline{12}}\cdot\underline{m}$ $\underline{\overline{10}}\cdot\underline{m}$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\underline{\bar{6}}/\underline{4}$ $\underline{\bar{6}}/\underline{4}$
$\underline{\infty}:m$	$\underline{\infty}\cdot m$	$\underline{m}\cdot\infty:m$	$m\cdot\underline{\infty}:m$	$\underline{m}\cdot\infty:\underline{m}$	$\underline{\infty}/\infty\cdot m$	

Таблица 2

Предельные точечные черно-белые группы

$\underline{\infty}$			$\infty \cdot \underline{m}$			$\underline{m} \cdot \infty : m$	
$\underline{\infty} : 2$			$\underline{m} \cdot \infty : \underline{m}$			$m \cdot \underline{\infty} : m$	
$\infty : \underline{2}$			$\infty / \infty \cdot \underline{m}$				
$\underline{\infty} / \infty$			$\underline{\infty} : m$			$m \ \infty : \underline{m}$	
$\infty : \underline{m}$			$\underline{\infty} \cdot m$			$\underline{\infty} / \infty \cdot m$	

В табл. 1 рамкой обведены некоторые *лишние группы*, т. е. группы, которые при составлении таблицы один раз уже были записаны в иной форме и без рамки.

Каждая из непредельных точечных черно-белых групп может быть *принципиально* изображена некоторой образцовой конечной фигурой, составленной из конечного числа асимметричных белых и черных тетраэдров, как это было показано нами в книге [2]. При возрастании порядка групп этот способ их изображения, естественно, должен встречать все бóльшие и бóльшие технические трудности вследствие постепенного увеличения необходимого количества тетраэдров. Ясно, что предельные группы, требующие для своего изображения бесконечного количества тетраэдров, указанным способом изобразить невозможно.

Учитывая это, мы предложили рассматривать предельные группы антисимметрии как точечные подгруппы тех пространственных групп, которыми удобно описывается симметрия воображаемых текстур, состоящих из множества черных и белых частиц (точек), равномерно распределенных в пространстве в ориентированном или дезориентированном положении [3]. В условной форме все предельные точечные черно-белые группы изображены в табл. 2 при помощи образцов тех асимметричных частиц (тетраэдров), из которых состоит соответствующая текстура. Одна грань каждого тетраэдра представляет собой прямоугольный треугольник. Тетраэдр изображается одной такой гранью, если ею заслонена четвертая вершина тетраэдра, обращенная в сторону от наблюдателя. Тетраэдр изображается тремя гранями, если четвертая вершина обращена к наблюдателю и прямоугольная грань заслонена этими тремя гранями.

Рассмотрим, для примера, простейшую из предельных групп — группу $\underline{\infty}$. Из табл. 2 видно, что текстура, отвечающая этой группе, состоит из, условно, правых белых и правых черных тетраэдров (первая клетка таблицы). Так изображена правая текстура групп $\underline{\infty}$. К этой же группе относится левая текстура, состоящая из левых черных и левых белых тетраэдров (вторая клетка табл. 2). Следовательно, текстура типа $\underline{\infty}$ может существовать в двух энантиоморфных (в классическом смысле) модификациях. Чтобы составить себе полное представление, скажем, о правой текстуре, следует мысленно «размножить» правые (черный и белый) тетраэдры путем всевозможных переносов их по всем направлениям трехмерного пространства и одновременно путем всевозможных поворотов вокруг единственной оси ∞ (она же ось $\underline{\infty}$). Полученная текстура будет *геометрически* полярной, поскольку все ее частицы будут направлены своей четвертой вершиной в одну сторону. Чтобы получить из правой текстуры левую, следует правую отразить в плоскости или подвергнуть инверсии в точке. Переменой знаков тетраэдров рассматриваемую текстуру нельзя преобразовать в энантиоморфную. *Значным* энантиоморфизмом текстуры типа $\underline{\infty}$ не обладают.

Рассмотрим в качестве более сложного примера текстуру типа $\underline{m} \cdot \infty : \underline{m}$. Из табл. 2 видно, что эта текстура может существовать в двух *значно энантиоморфных* модификациях. Остановимся на первой из них, отмеченной знаком +. Она состоит только из правых белых и левых черных тетраэдров, но одна половина белых (черных) ориентирована своей четвертой вершиной *вперед* (к наблюдателю), а другая — *назад* (от наблюдателя). После «размножения» этих тетраэдров уже описанным способом получается текстура, в которой можно различить четыре сорта тетраэдров. Вторая модификация, отмеченная знаком минус, отличается от первой только тем, что у нее белые тетраэдры являются левыми, а черные — правыми. Вторая получается из первой либо отражением в плоскости (или инверсией), либо переменой знака тетраэдров: заменой белого цвета черным и черного белым.

В табл. 2 входят три шаровые группы: группы изотропных текстур (сред). В них тетраэдры не имеют определенной ориентировки. Для получения этих сред заданные тетраэдры размножаются совершенно произвольными переносами и поворотами. Образцы тетраэдров изотропных текстур изображены нами условно внутри окружностей.

Пользуясь случаем, отметим, что в нашей работе [2] текстурам типа $\infty : \underline{m}$ ошибочно приписан классический энантиоморфизм вместо более общего значного[1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Шубников.* Кристаллография, 1959, **4**, вып. 3, 286.
2. *А. В. Шубников.* Симметрия и антисимметрия конечных фигур. Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.
3. *А. В. Шубников.* Кристаллография, 1958, **3**, вып. 3, 263; 1959, **4**, вып. 2, 276.

АНТИСИММЕТРИЯ[2]

Антисимметрия включает в себя классическую симметрию и естественным образом из нее вытекает, поэтому нам по необходимости придется начать с классической симметрии.

---

[1] Относительно иной интерпретации предельных групп антисимметрии — группами симметрии однородных пространств — см. в кн. А. В. Шубников, В. А. Копцик. Симметрия в науке и искусстве. М., изд-во «Наука», 1972, с. 339 (*прим. ред.*)

[2] Доклад на Седьмой генерал. ассамблее Международного союза кристаллографов. М., «Наука», 1966. 28 с.

Диссимметрия. Простейшими конечными фигурами классической симметрии являются фигуры диссимметричные, т. е. такие фигуры, которые могут совмещаться с собою только операциями первого рода — простыми поворотами вокруг осей разного порядка. Следует различать четные повороты от нечетных, т. е. повороты, кратные четным и нечетным долям окружности. Совокупность всех поворотов диссимметричной фигуры образует группу в математическом смысле. Всего таких групп для конечных кристаллографических фигур существует одиннадцать, для некристаллографических — бесконечное множество. Диссимметричных групп, содержащих только четные операции, не существует и существовать не может хотя бы потому, что всякая группа должна иметь в своем составе единичную операцию. Зародыш антисимметрии, по нашему мнению, содержится уже в самом этом различии между четными и нечетными операциями поворотов. На рис. 1 одиннадцать диссимметричных кристаллографических групп представлены образцовыми фигурами. Пять первых фигур состоят из асимметричных тетраэдров, обращенных к нам одной своей гранью. Четыре следующие фигуры состоят из таких же асимметричных тетраэдров, но половина из них обращена к нам тремя гранями. Две последние фигуры состоят из асимметричных пятиугольных пирамид с вершинами в центре фигур. Существенной особенностью всех диссимметричных фигур является то, что каждая из них может реализоваться в двух энантиоморфных модификациях — правой и левой.

Тридцать две кристаллографические группы. Учение о диссимметрии в свое время было расширено введением операций второго рода, т. е. зеркальных поворотов, к которым, в частности, относятся отражение в плоскости симметрии и инверсия в центре симметрии. Такое расширение было продиктовано тем, что всем минералогам давно было известно существование кристаллов, обладающих плоскостями симметрии. В результате присоединения операций второго рода число точечных кристаллографических групп возросло с одиннадцати до тридцати двух. В состав этих групп входят группы следующих трех категорий: 1) одиннадцать только что показанных диссимметричных групп, 2) одиннадцать групп, содержащих инверсию в центре симметрии (рис. 2) и 3) десять остальных групп, не входящих в обе первые категории. Центросимметричные группы получаются из диссимметричных добавлением к каждой из них инверсии, в результате чего могут возникнуть также и плоскости симметрии. Маленькие кружочки на рисунке свидетельствуют о существовании в фигурах плоскости симметрии, параллельной плоскости чертежа. Следует обратить внимание на то, что в каждой фигуре число правых частей равно числу левых, т. е. между правыми и левыми частями имеет место полный паритет, полное равноправие. Десять остальных

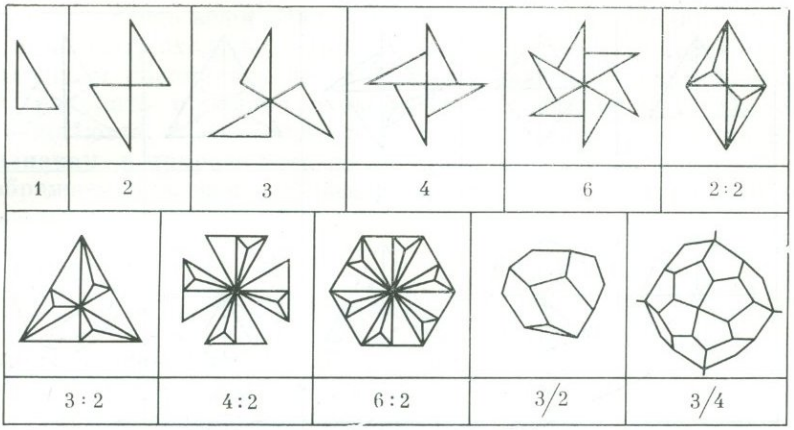


Рис. 1. Одиннадцать диссимметричных кристаллографических групп, содержащих только повороты

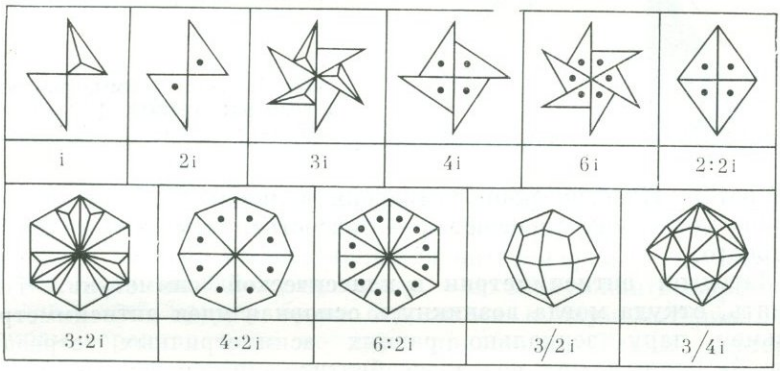


Рис. 2. Одиннадцать центросимметричных кристаллографических групп

ных кристаллографических групп представлены фигурами на рис. 3. Эти фигуры, как и только что показанные на предыдущем рисунке, состоят наполовину из правых и наполовину из зеркально равных левых частей. Паритет между правыми и левыми частями, очевидно, имеет место и в этом случае.

Подводя итог тому, что мы знаем о диссимметрии и о классической симметрии в целом, можно сказать следующее.

Диссимметрия основана на признании только одного вида равенства асимметричных частей фигур, равенства совместимого, т. е. равенства в евклидовом смысле. Чтобы построить любую диссимметричную фигуру, достаточно задать всего одну асимметричную ее часть. Целая фигура получается путем размножения заданной части с помощью операций первого рода — одних

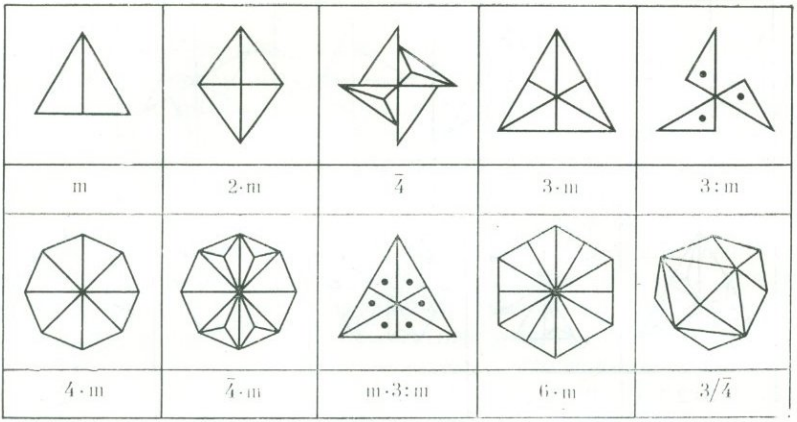


Рис. 3. Десять нецентросимметричных кристаллографических групп, содержащих зеркальные повороты

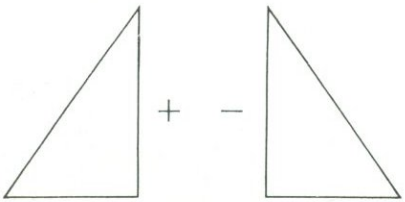


Рис. 4. Два асимметричных тетраэдра: правый (+) и левый (—)

поворотов. Классическая симметрия в целом основана на признании двух видов равенства — равенства совместимого и зеркального.

Зародыш антисимметрии в классической симметрии. Чтобы понять, откуда могла возникнуть основная идея антисимметрии, возьмем пару зеркально равных асимметричных тетраэдров (рис. 4). Глядя на них, нельзя не обратить внимания на то, что наблюдаемое в них сходство является тем сходством, которое определяется некоторой их противоположностью. Отсюда чистой случайностью представляется то, что правая фигура не была названа в свое время положительной, а левая — отрицательной, и зеркальное равенство фигур не было названо противоположным равенством или антиравенством.

Сказанное позволяет нам, внося поправку в историю развития учения о симметрии, ввести в это учение понятие знака энантиоморфизма, приписав условно правым фигурам положительный знак (+), а левым фигурам — отрицательный знак (—).

Здесь мы должны вскользь коснуться вопроса о равенстве вещей вообще. Если мы возьмем любые две вещи, то при желании всегда можно найти в них сколько угодно признаков сходства и различия. Сравнивать вещи — это значит делать их равными, т. е. искусственно удалять из них все признаки различия и оставлять только признаки сходства. Различать вещи означает,

наоборот, делать вещи различными, сознательно устраняя из них все признаки сходства. При изучении явлений природы часто приходится сравнивать несравнимое и различать неразличимое, т. е. находить признаки сходства или различия там, где они не ожидаются. Абсолютного равенства, равенства вещей по всем признакам, в природе нет, но оно мыслимо среди абстрактных, воображаемых вещей, например среди геометрических или материальных фигур.

Гибридные группы

Группы, содержащие только повороты и зеркальные антиповороты. Из всех свойств или признаков сходства и различия фигур нас будут в дальнейшем интересовать только такие свойства,

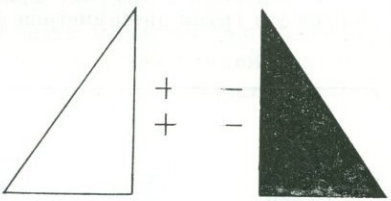


Рис. 5. Два асимметричных тетраэдра: правый белый (‡) и левый черный (=)

которые встречаются в двух модификациях — положительной и отрицательной. В рассмотренной нами паре зеркально равных тетраэдров каждый из них является антифигурой (античастицей) другого только по одному признаку — по знаку энантиоморфизма.

Следующий пример будет относиться к двум материальным фигурам, сравниваемым по двум признакам. Таким примером может служить пара зеркально равных асимметричных тетраэдров, отличающихся друг от друга не только по знаку энантиоморфизма, но и по знаку какой-либо физической величины, например по знаку электрического заряда (рис. 5). Различие по знаку заряда можно условно интерпретировать белым и черным цветом фигур. Белый правый тетраэдр в этом случае будет иметь два знака: верхний плюс, означающий правизну, и нижний плюс — белизну. Черный левый тетраэдр тоже будет иметь два знака: верхний минус, означающий левизну, и нижний минус, означающий черноту.

Имея в руках только одну эту пару фигур, можно путем размножения их соответствующими операциями симметрии построить сколько угодно симметричных фигур. Такими операциями для конечных фигур могут быть только простые и антизеркальные повороты. Всякий антизеркальный поворот состоит из простого поворота, сопутствуемого отражением в плоскости или в точке, и изменения цвета.

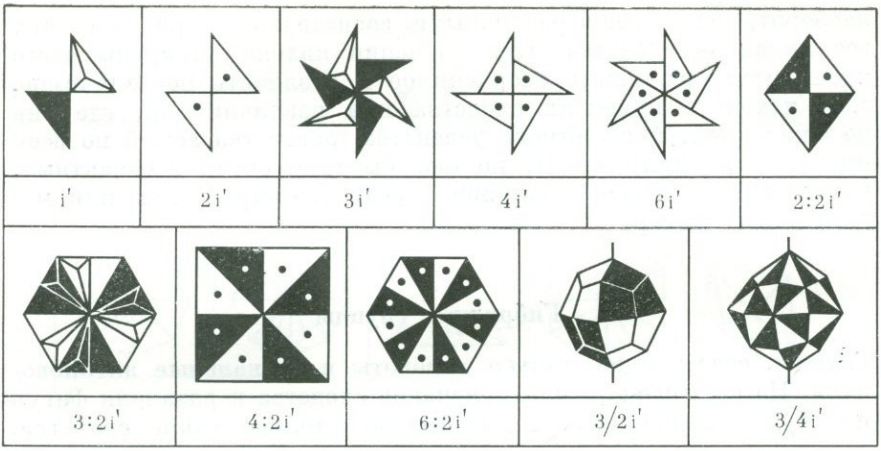


Рис. 6. Одиннадцать гибридных кристаллографических групп, получаемых из одиннадцати групп диссимметрии (рис. 2) добавлением к ним антиинверсии i'

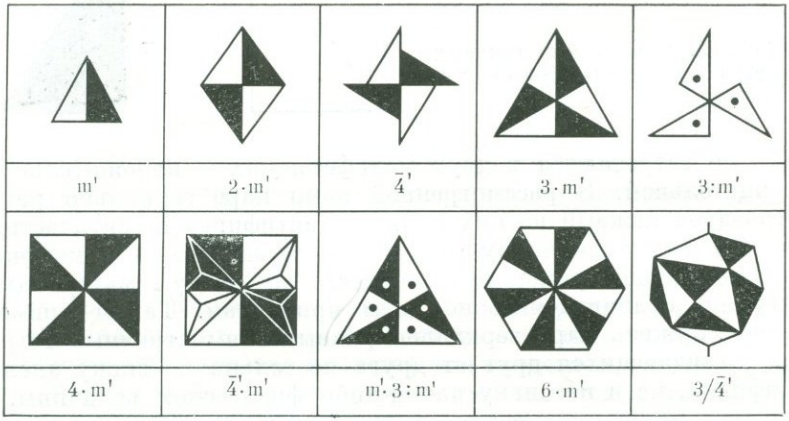


Рис. 7. Десять гибридных групп, получаемых из десяти групп (рис. 3) путем покраски всех левых (или правых) белых тетраэдров в черный цвет

Нетрудно доказать, что число точечных кристаллографических групп, в основе которых лежат две только что показанные асимметричные фигуры, равно тридцати двум. Это те группы, которые состоят только из простых допускаемых кристаллографией поворотов и соответствующих антизеркальных поворотов. В эти тридцать две группы входят: 1) одиннадцать уже показанных нами диссимметричных групп, состоящих только из простых поворотов, 2) одиннадцать групп (рис. 6), содержащих антиинверсию, которую современные физики называют комбиниро-

ванной инверсией, и 3) десять черно-белых групп, не содержащих антиинверсии (рис. 7).

Интересно отметить, что каждая из описанных тридцати двух групп изоморфна в математическом смысле одной вполне определенной группе классической симметрии. Это обстоятельство побудило нас назвать эти тридцать две группы гибридными в том смысле, что они с абстрактно-групповой точки зрения могут быть отнесены как к группам антисимметрии, так и к группам классической симметрии. Чтобы вывести все эти группы, достаточно все правые или все левые части образцовых фигур классической симметрии просто покрасить в черный цвет.

Группы, содержащие только повороты и антиповороты. Кроме только что рассмотренных гибридных групп, существуют еще тридцать две новые гибридные группы. В их основу можно положить правый белый и правый черный тетраэдры (рис. 8) (вместо них можно взять два левых тетраэдра разного цвета). Правый белый по-прежнему имеет два плюса. У правого черного тетраэдра верхний знак по условию должен быть плюсом, означающим правизну, нижний знак должен быть минусом, означающим черноту. Каждый из тетраэдров является античастицей другого только по одному нижнему знаку и не является античастицей по верхнему знаку.

Имея достаточное количество таких тетраэдров, можно построить из них бесконечное множество образцовых фигур для точечных групп, содержащих только операции первого рода — повороты и антиповороты. В состав кристаллографических групп этого рода входят: 1) одиннадцать ранее показанных диссиметричных групп, 2) одиннадцать серых групп (рис. 9), содержащих в себе в качестве обязательной операции операцию перемены второго знака всех асимметричных частей фигуры с оставлением их на месте, и 3) десять черно-белых групп, не содержащих указанной операции (рис. 10). Всего таких групп — тридцать две.

Относительно серых групп и операции перемены второго знака (цвета, заряда) необходимо сделать следующее замечание. Предполагается, что при мысленном совмещении правой (или левой) белой фигуры с правой черной должна получиться серая, бесцветная фигура или, что одно и то же, при совмещении правой фигуры, заряженной положительно, с правой фигурой, заряженной отрицательно, должна получиться правая фигура, лишенная заряда.

Новые тридцать две группы мы относим опять к категории гибридных групп, поскольку каждая из этих групп изоморфна одной определенной группе классической симметрии.

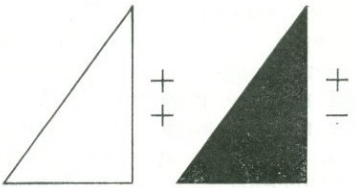


Рис. 8. Два антиравных (по цвету) тетраэдра

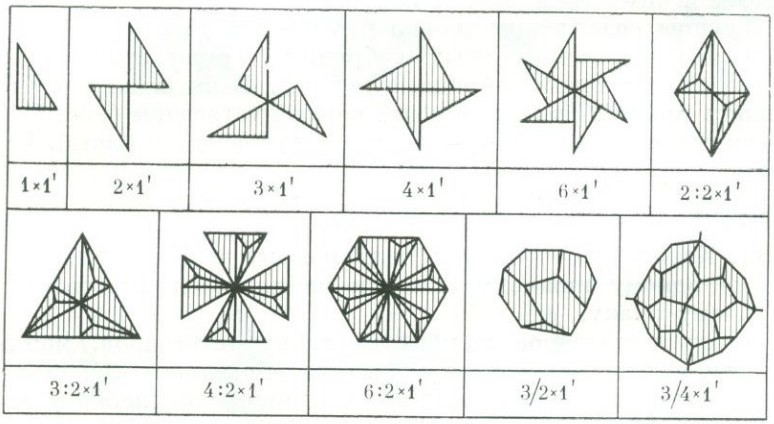


Рис. 9. Одиннадцать гибридных «серых» групп, получаемых из диссимметричных групп (рис. 1) добавлением к ним операции перемены цвета

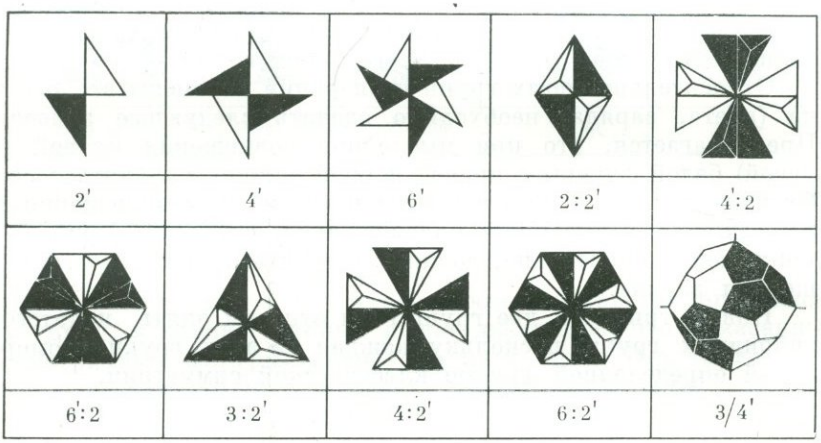


Рис. 10. Десять гибридных групп, получаемых из диссимметричных белых групп (рис. 1) четного порядка покраской половины тетраэдров в черный цвет

Группы антисимметрии в их полном составе

Четыре рода операций в антисимметрии. Вернемся опять к двузначным асимметричным тетраэдрам. Всего таких тетраэдров существует четыре (рис. 11): правый белый (*а*), левый белый (*б*), левый черный (*в*) и правый черный (*г*). Из предыдущего мы знаем, что с помощью только одного из этих тетраэдров можно вывести все точечные группы диссимметрии, а с помощью одной, любым

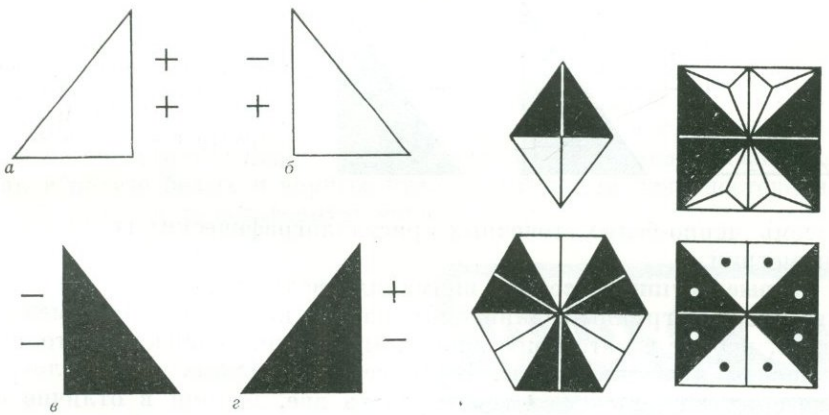


Рис. 11. Асимметричные тетраэдры четырех родов, соответствующие четырем родам операций в антисимметрии

Рис. 12. Примеры групп антисимметрии, содержащих операции всех четырех родов

образом выбранной пары тетраэдров можно вывести либо все классические точечные группы, либо все гибридные группы первой или второй категории. Естественно, возникает вопрос, какие группы могут быть выведены, если за основу взять какую-либо тройку тетраэдров. Детальное рассмотрение этого вопроса приводит к следующему выводу.

Если образцовая фигура той или другой группы содержит в себе тетраэдры любых трех родов, то в той же фигуре должны содержаться тетраэдры четвертого рода. Четырем родам ассиметричных тетраэдров соответствуют четыре рода операций, преобразующих фигуру в себя. Отсюда видно, что далее может идти речь только о группах антисимметрии, содержащих операции четырех родов.

Черно-белые группы, содержащие операции четырех родов. Всего точечных групп этой категории существует бесконечное множество, из них кристаллографических черно-белых групп — двадцать семь. Порядок простейших групп равен четырем. По-

рядок остальных групп равен числу, кратному четырем. Примеры фигур этой категории даны на рис. 12. Первая фигура изображает черно-белую группу четвертого порядка, вторая фигура — группу восьмого порядка, третья — группу двенадцатого порядка, четвертая — группу шестнадцатого порядка. Двадцать семь рассматриваемых черно-белых негибридных точечных кристаллографических групп вместе с ранее перечисленными черно-белыми гибридными группами составляют всего пятьдесят

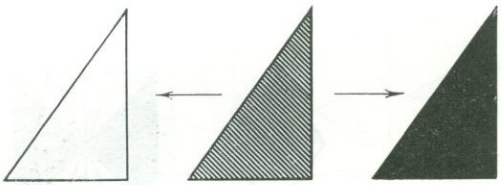


Рис. 13. Серый симметричный тетраэдр, состоящий из двух асимметричных тетраэдров — белого и черного

восемь черно-белых точечных кристаллографических групп антисимметрии.

Серые группы. Особого внимания заслуживают так называемые «серые» группы. Одиннадцать из них, как уже было отмечено выше, входят в категорию гибридных групп, содержащих только повороты и антиповороты. Всего серых точечных кристаллографических групп существует тридцать две, но они в отличие от гибридных групп не изоморфны тридцати двум классическим группам, поскольку порядок каждой из них в два раза больше порядка соответствующей классической группы. Остановимся более подробно на простейшей серой группе, обозначаемой международным символом $1'$ (единицей со штрихом). Эта группа состоит всего из двух операций: из единичной операции и операции перемены второго знака (цвета).

Наглядное представление об этой группе дает образцовая фигура, представляющая собою серый правый (или левый) тетраэдр, состоящий из двух совместимо равных тетраэдров — белого и черного, вложенных друг в друга. Серый тетраэдр не является асимметричной фигурой. Ему нельзя приписать никакого знака. Серый тетраэдр можно рассматривать как две виртуальные античастицы, на которые при известных обстоятельствах может распасться серый тетраэдр (рис. 13), и, наоборот, как две античастицы, которые при некоторых обстоятельствах могут, аннигилируя друг друга, образовать беззначную (без второго знака) серую частицу. Если рассматривать операции антисимметрии как преобразование пространства в себя, то само пространство в учении об антисимметрии следует представлять себе серым.

Здесь уместно обратить внимание на то, что ни в классической симметрии, ни в антисимметрии нет и не может быть групп, содержащих самостоятельную операцию перемены знака энан-

тиоморфизма, т. е. нет операции преобразования правой фигуры в левую с оставлением правой на месте. Другими словами, нет фигур, серых в отношении правизны и левизны.

Примеры применения антисимметрии

Антисимметрия в прикладном искусстве. В нашем докладе мы не можем подробно останавливаться на многочисленных применениях симметрии и антисимметрии в науке, технике и декоративном искусстве. Стихийное использование антисимметрии в геометрическом орнаменте началось очень давно и продолжается до сих пор. Для иллюстрации сказанного приведем один широко известный пример греческого черно-белого орнамента, изображенного на рис. 14, и один пример современной графики, взятый из известного альбома Эшера (рис. 15). Картина показывает, как в полете белых и черных птиц белый левый день постепенно преобразуется в негативную черную ночь.

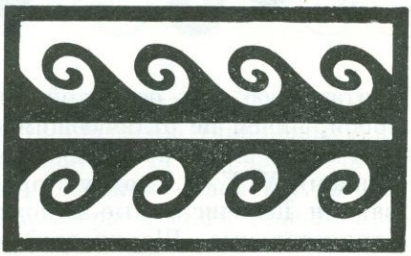
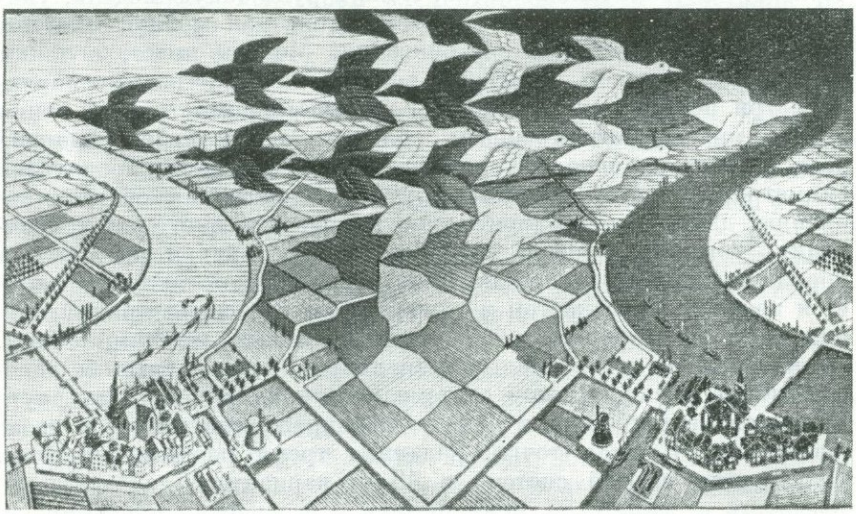


Рис. 14. Пример греческого антисимметричного орнамента

Рис. 15. «День и ночь» по Эшеру



Антисимметрия координатных систем. Следующий пример использования антисимметрии может показаться неожиданным и странным. Этот пример должен продемонстрировать, как понятие антисимметрии может быть использовано для углубленного понимания употребляемых в кристаллографии координатных систем. Рассмотрим прямоугольную систему координат в том виде, как она применяется для описания кристаллов кубической сингонии. В соответствии с требованиями симметрии мы должны

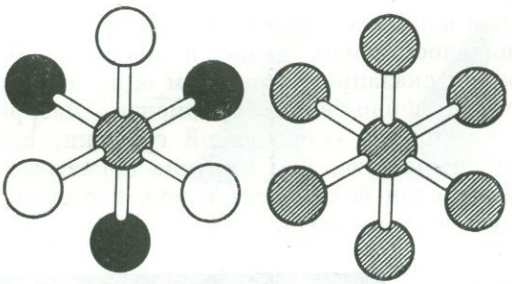


Рис. 16. Примеры антисимметричных координатных систем

считать все три оси этой системы абсолютно равными между собой, ничем не отличающимися друг от друга. На этом основании мы не имеем права обозначать их, как общепринято, разными буквами X, Y, Z. В одну сторону по осям, как известно, откладываются целочисленные положительные координаты, в другую — отрицательные. Шариковая модель такой системы показана на рис. 16 слева. Белым шарикам отвечают положительные числа, черным — отрицательные числа. Взяв в руки такую модель, увидим, что она относится не к кубической, как можно было бы ожидать, а к тригональной сингонии. Модель имеет, с точки зрения классической симметрии, только одну ось третьего порядка и три пересекающиеся по ней плоскости симметрии. С точки зрения антисимметрии модель обладает одной антизеркальной осью шестого порядка, антицентром и теми же тремя плоскостями симметрии. Отсюда заключаем, что рассмотренная система координат для описания кристаллов кубической сингонии не подходит. Тогда сам собою возникает вопрос, какая же система координат для указанной цели подходит? Такой системой является изображенная на том же рисунке справа серая прямоугольная система координат с неполярными осями — такими осями, по которым могут откладываться только натуральные беззначные целые числа. В этой системе неотличимыми друг от друга являются не только сами оси, но и направления вперед и назад вдоль них. Каждая точка, заданная тремя разными числами, реализуется в этой системе в 48-ми вариантах.

Двойная антисимметрия и заключение к первой части доклада

Нам осталось еще сделать небольшую экскурсию в область точечных групп так называемой двойной антисимметрии. Для построения образцовых фигур к этим группам необходимо иметь в качестве строительных кирпичей асимметричные части фигуры восьми родов. Для наших целей удобно взять асимметричные

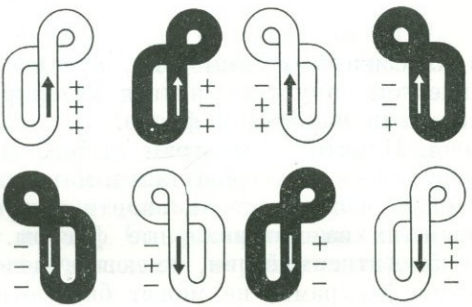


Рис. 17. Восемь асимметричных фигур с тремя знаками

кольца (рис. 17). Каждое кольцо имеет три знака. Верхний знак по-прежнему является знаком энантиоморфизма (правизны и левизны). Второй сверху знак есть знак цвета (заряда). Третий знак может быть приписан любому значному свойству. У нас он показывает направление стрелки вверх и вниз. Можно принять, если угодно, это направление за направление электрического тока, которому отвечает соответствующее асимметричное магнитное поле некоторой элементарной части кристалла или любого другого антисимметричного объекта. Если сопоставим первую белую фигуру, имеющую три плюса, со второй черной, имеющей два плюса и один минус, то можно будет сказать, что одна из них является антифигурой по отношению к другой — антифигурой только по одному признаку. Первая и четвертая фигуры — это антифигуры относительно друг друга по двум признакам. Первая фигура и расположенная под ней пятая фигура являются антифигурами по трем признакам и т. д. Двойная антисимметрия, основанная на признании равенства и антиравенства между восемью разновидностями асимметричных фигур, должна пользоваться операциями восьми родов.

Мы рассмотрели симметрию в ее трех аспектах: классическую симметрию, антисимметрию и двойную антисимметрию. Ясно, что дальнейшее развитие учения о симметрии может идти по пути создания антисимметрии тройной, четверной и т. д.

Подводя итог первой части нашего доклада, нам хотелось бы сформулировать несколько важных положений, относящихся к симметрии, вообще, и к классической симметрии, в частности,

поскольку последняя играет особенную роль среди всех других видов симметрии. Вот эти положения.

1. Группы классической симметрии входят в состав групп симметрии любого профиля. Нет никакой симметрии там, где нет классической.

2. В классической симметрии нет самостоятельной операции преобразования правой асимметричной фигуры в левую с оставлением правой на месте. Другими словами, в классической симметрии нет асимметричных фигур серых по знаку энантиоморфизма.

3. Несмотря на то что зерно антисимметрии содержится уже в классической симметрии, правизну и левизну фигур в классической симметрии нельзя интерпретировать двумя противоположными окрасками фигур.

4. Понятие симметрии любого профиля относится только к фигурам — геометрическим и материальным. Приписывая элементарным частицам знак энантиоморфизма, мы тем самым принимаем их за материальные фигуры.

5. Антисимметрия, имеющая дело с черными, белыми и серыми фигурами, не может быть отнесена к цветной симметрии хотя бы потому, что в антисимметрии нет операций преобразования белой или черной фигуры в серую.

6. В антисимметрии практически используется принцип единства противоположностей, не играющий никакой роли в цветной симметрии.

Простые черно-белые волны

Линейные волны. Вторая часть нашего доклада будет посвящена не столько антисимметрии, сколько тем средам, которые, обладая пространственной антисимметрией, до сих пор с точки зрения антисимметрии не изучались. Речь будет идти о растровых (муаровых) средах в движении, или, что одно и то же, о простых и групповых волнах.

В первом приближении распространение линейных и плоских волн любой физической природы можно интерпретировать картиной (рис. 18) черных и белых полос одинаковой ширины, движущихся с постоянной скоростью в направлении нормали к фронту волн. Длина волны на рисунке равна суммарной ширине одной черной и одной белой полос. Глядя в щель A, наблюдатель увидит, что в ней происходят колебания, т. е. щель периодически заслоняется то белыми, то черными полосами. При желании наблюдатель может определить частоту колебаний, их период, волновое число и путь, пройденный волнами за данный промежуток времени.

Описанная модель является наиболее простой и в некотором смысле универсальной. Она одинаково пригодна для волн с поперечными и продольными, круговыми и эллиптическими коле-

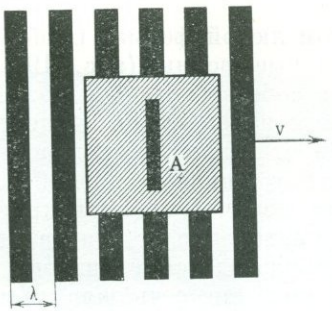


Рис. 18. Модель плоских волн любой физической природы

баниями, для волн на поверхности жидкости, волн звуковых, электромагнитных и т. д. Черному и белому цвету полуволн соответствуют два противоположных состояния или, как говорят, две противоположные фазы колебаний. Фигурирующая в нашей модели скорость есть, очевидно, фазовая скорость. Обычно под скоростью волн разумеется именно фазовая скорость.

Радиальные и кольцевые волны. От рассмотренных черно-белых плоских или линейных волн легко перейти к волнам с

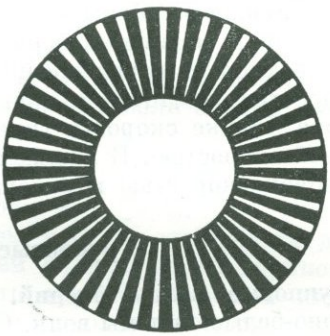


Рис. 19. Модель радиальных волн



Рис. 20. Модель кольцевых волн



Рис. 21. Архимедова спираль

фронтом любой формы. Особый интерес представляют двумерные радиальные волны (рис. 19), вращающиеся вправо или влево вокруг собственного центра, и волны кольцевые (рис. 20), движущиеся по радиусам концентрических окружностей к их центру или от центра. Упрощенно движение кольцевых волн можно показать с помощью черно-белой Архимедовой спирали (рис. 21). При вращении спирали вокруг ее центра волны бегут по радиусам к центру или от центра в зависимости от того, в какую сторону производится вращение.

До сих пор речь шла только о бегущих волнах, о волнах, движущихся с постоянной скоростью. При скорости, равной нулю, бегущие волны становятся волнами неподвижными. Неподвижные волны (растры) нельзя смешивать с хорошо известными в физике стоячими волнами. Последние можно представить себе в виде системы черных и белых полос, меняющих свою окраску на противоположную с постоянной частотой.

Когда несколько систем синусоидальных волн, накладываясь друг на друга, вступают во взаимодействие, то возникают новые несинусоидальные волны. Условимся называть их групповыми волнами. В дальнейшем нас будут интересовать только простейшие групповые волны — волны, образующиеся при суперпозиции всего двух первичных черно-белых волн. Наши групповые волны отличаются от порождающих их черно-белых волн своей длиной, скоростью, частотой и другими параметрами. Заметим вскользь, что в физике скорость групповых волн принято называть групповой скоростью. В наших моделях эту скорость лучше называть фазовой скоростью групповых волн.

Групповые черно-белые волны

Групповые волны биений. Возьмем две одинаковые линейные черно-белые системы волн. Очевидно, их можно наложить друг на друга так, что черные полосы одной системы совпадут с белыми полосами другой системы. Обе системы волн тогда исчезнут. Такие две системы волн, которые при суперпозиции могут уничтожить друг друга, принято называть когерентными. Наши черно-белые волны являются, следовательно, когерентными. Идеально когерентных синусоидальных волн в природе не существует.

Простейшими групповыми волнами являются волны биений. Они получаются суперпозицией в параллельном положении двух систем черно-белых линейных волн с неодинаковыми, но близкими друг другу длинами волн. На рис. 22, *а* волны биений показаны в увеличении, позволяющем видеть тонкую структуру волн. На рис. 22, *б* групповые волны биений показаны в таком масштабе, что наблюдатель, удалив этот рисунок от себя на некоторое расстояние, не будет видеть истинной структуры групповых волн и вследствие этого может принять их за простые, первичные черно-белые волны (в докладе вместо рис. 22, *б* волны

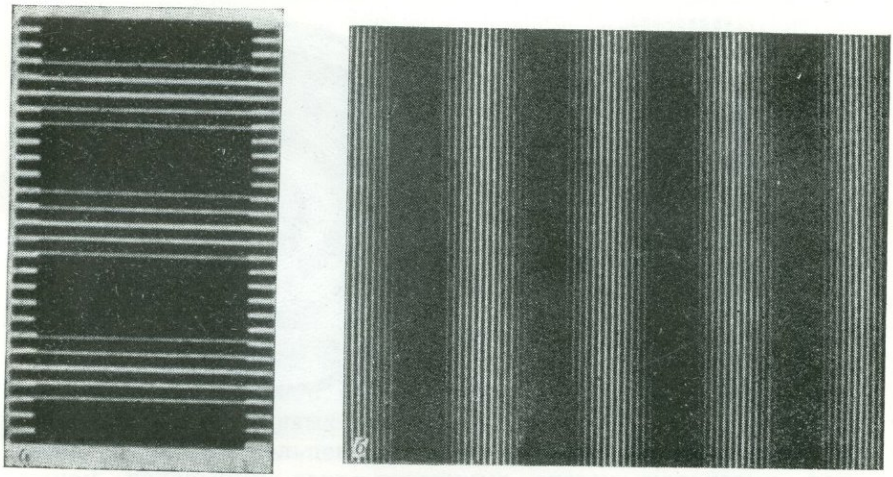


Рис. 22. Групповые линейные волны биений, образованные из первичных длинных (*а*) и коротких (*б*) волн

биений показываются на экране с помощью двух наложенных друг на друга растров). Длина L групповых волн биений вычисляется по формуле

$$L = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad (1)$$

где L, λ_1, λ_2 — длины первичных волн и $\lambda_1 > \lambda_2$.

Из этой формулы видно, что чем меньше отличаются друг от друга длины первичных волн, тем больше длина групповых волн. Теоретически можно получить групповые волны любой длины, на практике же приходится довольствоваться длиной групповых волн, превышающей длину первичных волн не более чем в десять раз.

Показанные волны биений были волнами неподвижными. Если одну или обе системы первичных волн привести в движение вдоль волновой нормали, то в общем случае будут двигаться и групповые волны вдоль той же нормали. Скорость V групповых волн тогда может быть вычислена по формуле

$$V = (\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1)/(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad (2)$$

где V_1 — скорость волн длиною λ_1; V_2 — скорость волн длиною λ_2.

Из этой формулы вытекает следующее. Если оставить на месте более длинные первичные волны и привести в движение менее длинные первичные волны, то групповые волны побегут в том же направлении, куда движутся менее длинные первичные волны. Если, наоборот, неподвижными будут менее длинные волны, а движущимися — более длинные волны, то групповые волны

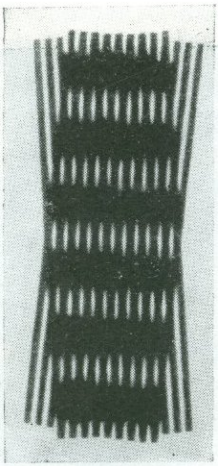


Рис. 23. Групповые линейные волны скрещения

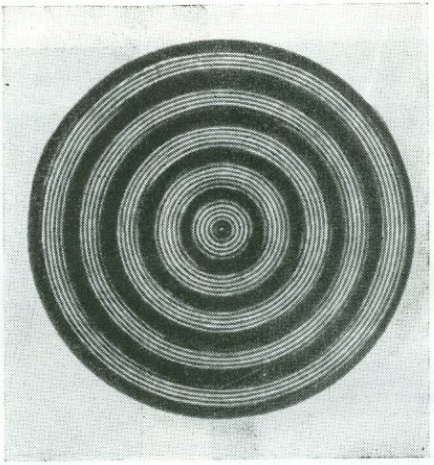


Рис. 24. Групповые кольцевые концентрические волны

побегут в обратном направлении. В обоих случаях групповые волны бегут со значительно большей скоростью, чем первичные волны (в докладе движение групповых волн показывается на экране с помощью специального прибора).

Групповые волны скрещения. Переходим к описанию групповых волн, образующихся в результате суперпозиции двух одинаковых линейных систем волн под малым углом. Из рис. 23 видно, что эти волны заметно отличаются от ранее рассмотренных наличием в них своеобразной двойной периодичности по двум взаимно перпендикулярным направлениям: на рисунке длины волн по вертикали больше длин волн по горизонтали. Назовем более длинные волны нормальными, а более короткие — тангенциальными. Нетрудно доказать, что между длиной первичных волн λ, малым углом пересечения первичных волн α и нормальной длиной групповых волн L имеет место соотношение

$$\lambda = 2L \sin \frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

в точности совпадающее с формулой Брегга — Вульфа. В этой формуле длине групповых волн отвечает межплоскостное расстояние в кристаллической решетке, длине первичных волн — длина падающих и отраженных от кристалла рентгеновских волн и половине угла пересечения первичных волн — угол скольжения падающих на кристалл и отраженных от него рентгеновских волн. Показанная на рисунке система групповых волн, таким

образом, изображает собою систему отражающих плоскостей кристаллической решетки, а две пересекающиеся первичные системы волн — параллельный пучок падающих и параллельный пучок отраженных рентгеновских волн.

Если, оставляя на месте биссектрису малого угла пересечения первичных волн, будем вращать обе системы с одинаковой угловой скоростью в разные стороны, то при увеличении этого угла групповые волны будут сближаться и их длина будет уменьшаться. При этом та из групповых волн, которая проходит через ось вращения, будет оставаться на месте (в докладе это явление демонстрируется на экране с помощью специального прибора).

Кольцевые групповые волны. Все описанные выше групповые волны, получаемые суперпозицией двух первичных систем линейных волн, могут быть воспроизведены с соответствующими поправками для кольцевых и радиальных волн. На рис. 24 изображены групповые кольцевые волны, получаемые при концентрическом наложении двух первичных систем кольцевых волн разной длины. Рассматриваемые кольцевые групповые волны обладают всеми особенностями ранее описанных линейных волн биений, изображенных на рис. 22. В частности, групповые кольцевые волны будут двигаться от центра к периферии, если более длинные первичные волны будут стоять на месте, а менее длинные будут приведены в движение тоже от центра к периферии, и, наоборот, групповые волны побегут в обратном направлении (от периферии к центру), если на месте будут стоять менее длинные первичные волны, а более длинные будут приведены в движение от центра к периферии.

При неконцентрическом наложении двух неодинаковых первичных систем кольцевых волн групповые волны дают картину, совпадающую с картиной интерференции световых когерентных монохроматических волн, исходящих из двух точечных источников в опыте Юнга (рис. 25).

Радиальные групповые волны получаются суперпозицией двух первичных радиальных систем с общим центром и неодинаковыми длинами волн, выраженными в градусах. Картина групповых радиальных волн, показанная на рис. 26, аналогична картине волн биений. Существенная разница между обеими картинами состоит в том, что картина волн биений мыслится состоящей из бесконечного числа волн, тогда как картина радиальных групповых волн должна состоять из целого числа волн. На рисунке это число равно шести. Если, оставляя на месте одну первичную систему, будем вращать вокруг центра другую, то будут вращаться и вторичные волны. При этом, как и в волнах биений, групповые радиальные волны будут вращаться в ту же сторону, куда движутся менее длинные первичные волны. В обоих случаях групповые волны должны вращаться со значительно большей скоростью, чем первичные.

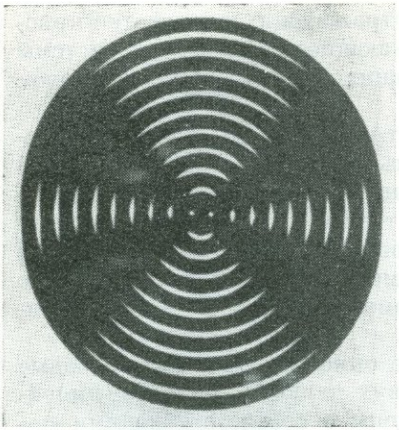


Рис. 25. Групповые кольцевые неконцентрические волны

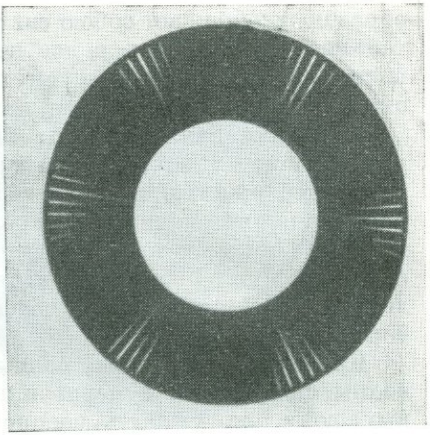


Рис. 26. Групповые радиальные концентрические волны

Групповые волны биений без видимых первичных волн. Возьмем два одинаковых линейных растра с длинами волн порядка одного-двух миллиметров. Соединим их в параллельном положении (рис. 27) в одно целое так, чтобы между ними оставался пустой промежуток толщиной около двух сантиметров. Если поднесем такой сдвоенный растр вплотную к глазу, адаптируя его

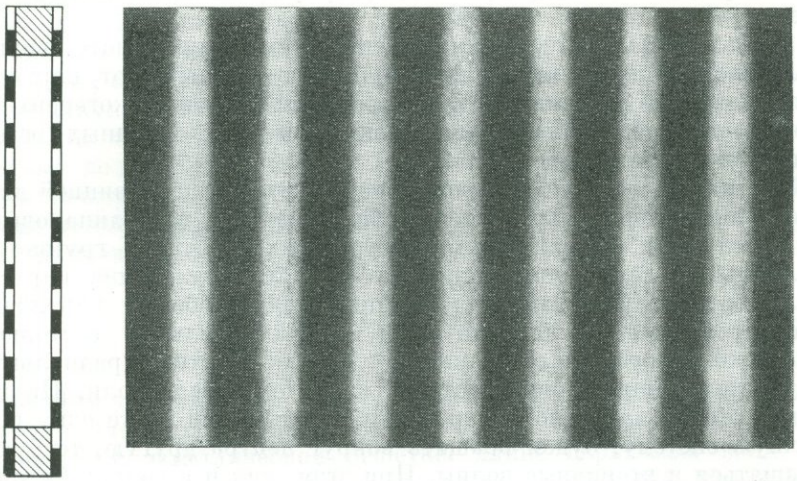


Рис. 27. Схема двух одинаковых линейных растров, соединенных в параллельном положении с помощью двух прокладок

Рис. 28. Групповые линейные волны без видимых первичных волн

на бесконечность, то увидим черно-белые групповые волны биений, но вовсе не увидим те первичные волны, из которых эти групповые волны составлены. Если далее будем двигать наш сдвоенный растр вправо и влево, вверх и вниз, вперед и назад, не допуская никаких поворотов вокруг вертикальной и двух горизонтальных осей, то наблюдаемые нами групповые волны будут во всех случаях оставаться на месте. Описанное явление не имеет ничего общего с обманом зрения. Его может «видеть» не только глаз человека, но и установленный на бесконечность объектив фотоаппарата. На рис. 28 показаны групповые волны биений, полученные путем фотографирования сдвоенного растра, непосредственно прикрепленного к объективу фотоаппарата.

СИММЕТРИЯ КОНЕЧНЫХ ФИГУР В СОВРЕМЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ[1]

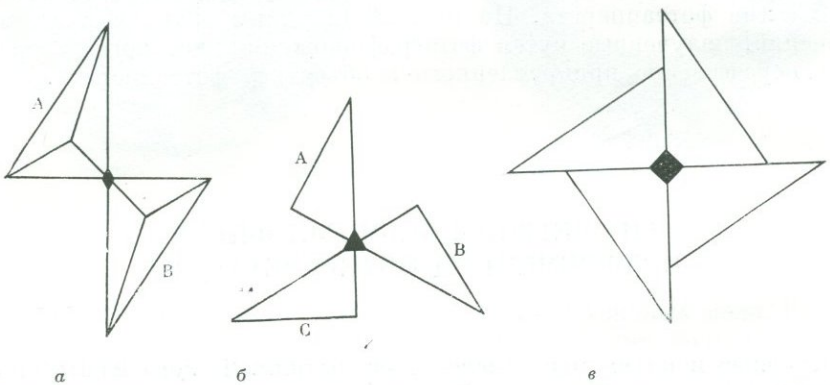
Основные понятия и определения симметрии. Фигура называется симметричной, если она может совмещаться с собой в *разных позициях*. Совмещение фигуры с собой осуществляется *операциями симметрии*. Различают *операции первого* и *второго рода*. Для конечных фигур операциями симметрии первого рода могут быть только такие операции, которые по своему результату эквивалентны *поворотам* фигуры вокруг *осей симметрии* на углы, кратные целой доле окружности. Операциями второго рода для конечных фигур являются такие же повороты, но сопровождаемые отражением в плоскости, нормальной к оси поворота, именуемой в этом случае *зеркальной осью*. Фигуры, совмещающиеся с собой только операциями первого рода, называются *диссимметричными*. Диссимметрия рассматривается нами, следовательно, как частный случай симметрии. Совокупность всех неэквивалентных между собой операций симметрии данной фигуры, *канонических операций*, образует *группу симметрии* этой фигуры.

Примеры диссимметричных фигур, обладающих только одной осью симметрии. Перечисленные понятия и определения симметрии требуют детального разъяснения на конкретных примерах *образцовых симметричных фигур*. В качестве таковых мы будем пользоваться фигурами, состоящими из равных друг другу в обычном геометрическом смысле *асимметричных частей*, не делящихся на равные доли. Рассмотрим одну из простейших дис-

---

[1] Проблемы кристаллохимии минералов и эндогенного минералообразования. М., «Наука», 1967, с. 96—114.

симметричных фигур, например фигуру, изображенную на рис. 1, *а*. Как видим, фигура эта состоит из двух, неотличимых друг от друга, неправильных асимметричных тетраэдров, обращенных к наблюдателю тремя своими треугольными гранями. Четвертая грань заслонена этими тремя и потому читателю не видна: виден только контур этой грани. Если повернем фигуру на пол-оборота вокруг оси, проходящей через точку соприкосновения тетраэдров, нормально к плоскости рисунка, то фигура



а *б* *в*

Рис. 1. Фигура, обладающая только одной поворотной осью второго порядка (*а*), одной осью третьего порядка (*б*), одной осью четвертого порядка (*в*)

совместится с собой, т. е. придет в новое положение, ничем не отличающееся от заданного. Убедиться в том, что фигура после поворота действительно пришла в новое положение, можно, сделав обе равные части фигуры условно различными. Для этого достаточно обозначить их разными номерами или, как на рисунке, разными буквами A и B. Тогда, повернув фигуру вокруг указанной оси на пол-оборота, увидим, что часть A перешла в позицию B, а часть B — одновременно в позицию A. Это означает, что и фигура в целом тоже перешла в новую позицию, Если теперь повторим поворот на 180° вокруг той же оси еще один раз, то фигура вернется в заданное положение. По своему результату два последовательно произведенных поворота на 180°, очевидно, должны быть эквивалентны целому повороту на 360°, а сам этот целый поворот должен быть эквивалентен по результату оставлению фигуры на месте в исходном положении. Подводя итог, можно сказать, что рассматриваемая фигура, состоящая из двух неотличимых друг от друга асимметричных тетраэдров, может совмещаться с собой только в двух разных позициях и только двумя поворотами: на 180° и на 0° (или 360°) вокруг указанной оси. В соответствии со сказанным эту *ось симметрии* принято называть осью второго порядка. Обычно ее изображают маленькой черной чечевичкой (двуугольником).

Вторым примером фигур с одной поворотной осью симметрии может служить фигура, состоящая из трех асимметричных тетраэдров, ничем не отличающихся друг от друга (рис. 1, *б*). В данном случае три тетраэдра обращены к читателю только одной из своих граней. Три другие грани каждого тетраэдра заслонены одной видимой гранью. Чтобы сделать три одинаковых тетраэдра нашей фигуры условно различными, мы, как и в ранее рассмотренной фигуре, обозначили их буквами *A*, *B*, *C*. Нетрудно убедиться в том, что фигура может совмещаться с собой всего в трех позициях и всего тремя неэквивалентными друг другу по результату операциями симметрии. Такими *каноническими* операциями симметрии мы будем считать повороты нашей фигуры вокруг оси третьего порядка вправо на углы 120, 240, 360°. На рисунке эта нормальная к плоскости бумаги ось обозначена маленьким черным треугольником. Нетрудно убедиться, что рассматриваемая фигура может совмещаться с собой множеством других поворотов вокруг той же оси, например теми же поворотами в 120, 240, 360°, но не вправо, как предполагалось, а влево. Однако каждый из этих поворотов не будет отличаться по результату от одного из канонических поворотов вправо. Например, поворот на 120° влево от поворота на 240° вправо. В дальнейшем за операции симметрии мы будем принимать только канонические операции. Подводя итог, можно сказать, что рассмотренная нами образцовая фигура, состоящая из трех неотличимых друг от друга по форме и по взаимному расположению асимметричных тетраэдров, может совмещаться с собой только в трех разных позициях и только тремя каноническими поворотами на углы, кратные 120°.

После всего изложенного нетрудно прийти к утверждению, что, кроме описанных выше образцовых фигур с одной осью второго и третьего порядка, можно построить образцовые диссимметричные фигуры, обладающие только одной поворотной осью любого более высокого порядка. На рис. 1, *в* дан пример фигуры, имеющей всего одну ось четвертого порядка. Эта фигура, состоящая из четырех асимметричных частей, очевидно, может совмещаться с собой в четырех разных позициях четырьмя каноническими поворотами на углы, кратные одной четверти полного оборота.

Единичная операция. Обращает внимание то обстоятельство, что мы начали описание диссимметричных фигур с фигур, имеющих ось второго и более высокого порядка, и лишь вскользь упомянули асимметричные фигуры, которые, казалось бы, должны обладать всего одной осью первого порядка. На самом деле не только асимметричная, но и всякая другая фигура обладает бесконечным количеством таких осей. Любая как угодно расположенная в пространстве прямая является для любой фигуры осью первого порядка. Учение о симметрии могло принять строгий и законченный вид, только после того как было понято,

что все операции поворотов на 360° вокруг осей первого порядка приводят к одному и тому же результату, эквивалентному оставлению фигуры на месте в заданной позиции (рис. 2). Для асимметричных фигур в учении о симметрии заданная позиция является единственной позицией. Формальная операция совмещения фигуры с собой путем оставления ее на месте называется *отождествлением* или *единичной операцией*. Для асимметричных фигур единичная операция является единственной операцией симметрии. В теории симметрии, таким образом, асимметрия рассматривается как простейший частный случай симметрии. Как уже было отмечено, асимметричная фигура не может быть механически разделена (разрезана) на равные в евклидовом смысле части, т. е. на совместимо равные.

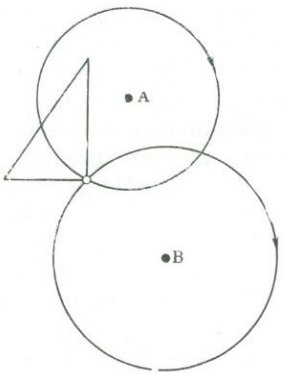


Рис. 2. Асимметричный тетраэдр совмещается с собой при полном обороте вокруг осей *A* и *B*

Примеры диссимметричных фигур, обладающих несколькими осями симметрии. Простейшая из фигур этого рода показана на рис. 3. Фигура имеет всего три взаимно перпендикулярные оси второго порядка. На рисунке видно, что она состоит из четырех совместимо равных асимметричных тетраэдров и соответственно может совмещаться с собой четырьмя операциями симметрии в четырех разных позициях: тремя каноническими поворотами на 180° вокруг трех осей и единичной операцией.

Следующая образцовая фигура (рис. 4) содержит в качестве *особенной*, *главной* оси ось третьего порядка и три поперечные по отношению к ней оси второго порядка, пересекающиеся между собой под углом 120°. Главную ось на чертежах обычно ориентируют перпендикулярно к плоскости бумаги, как на нашем рисунке. Рассматриваемая образцовая фигура состоит из шести равных друг другу асимметричных частей и соответственно может совмещаться с собой шестью каноническими операциями симметрии: поворотами вправо на 120 и 240° вокруг главной оси третьего порядка, тремя поворотами на угол в 180° вокруг трех осей второго порядка и единичной операцией.

К фигурам, обладающим несколькими осями, из коих одна является главной, должна быть отнесена также фигура, изображенная на рис. 5. Главной осью этой фигуры является ось четвертого порядка, расположенная на рисунке нормально к плоскости бумаги. Четыре другие оси второго порядка, пересекающиеся между собой под углами в 90°, лежат в этой плоскости. Фигура состоит из восьми равных друг другу асимметричных

частей и соответственно может совмещаться с собой только восемью каноническими операциями симметрии: поворотами на четверть, две четверти, три четверти оборота вокруг оси четвертого порядка, четырьмя поворотами на 180° вокруг четырех осей второго порядка и единичной операцией.

Экстраполируя изложенное выше, можно предвидеть существование бесконечного множества диссимметричных фигур, обладающих главной осью любого порядка и поперечными по отно-

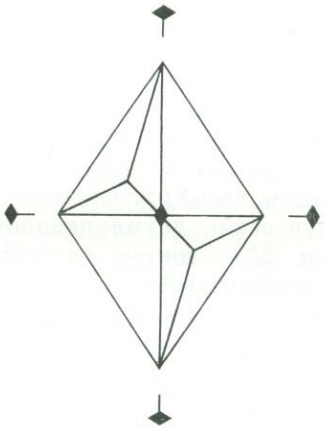


Рис. 3. Фигура, обладающая тремя взаимно перпендикулярными осями второго порядка

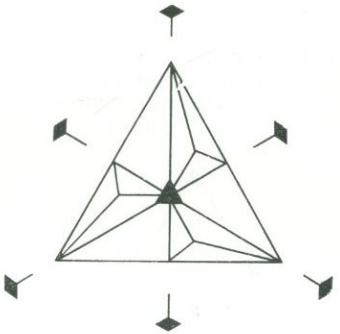


Рис. 4. Фигура, обладающая главной осью третьего порядка и тремя поперечными по отношению к ней осями второго порядка

шению к ней осями второго порядка, число которых равно порядку главной оси.

Четыре изометрические фигуры, совмещающиеся с собой только операциями первого рода. Хорошо известны так называемые правильные многогранники. Их всего пять: правильный тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр и икосаэдр. Все они, как увидим далее, могут совмещаться с собой операциями не только первого, но и второго рода. Покажем, что три из них — тетраэдр, октаэдр и додекаэдр — могут быть так составлены из асимметричных долей, что для совмещения этих трех многогранников с собой останутся только повороты вокруг осей.

Начнем с тетраэдра. Его гранями являются четыре правильных треугольника. На рис. 6 тетраэдр обращен одной своей гранью, параллельной плоскости рисунка, к наблюдателю. Три другие грани заслонены этой одной. В данной ориентировке тетраэдра видны выходы всех четырех осей симметрии третьего порядка, изображенных маленькими черными треугольниками, и выходы трех осей второго порядка, изображенных маленькими черными

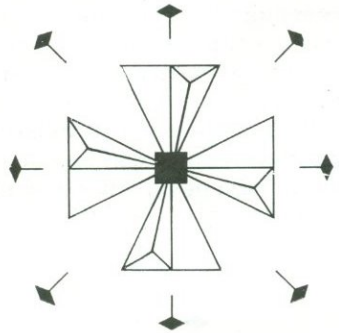


Рис. 5. Фигура, обладающая главной осью четвертого порядка и четырьмя поперечными осями второго порядка

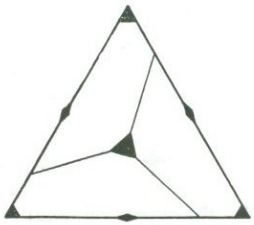


Рис. 6. Правильный тетраэдр, обращенный к наблюдателю одной своей гранью, разделенной на три асимметричных четырехугольника

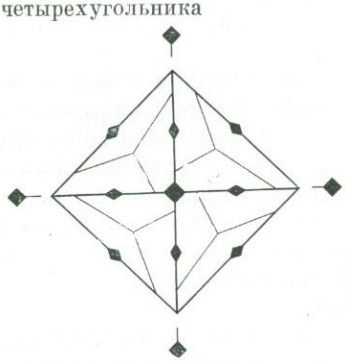


Рис. 7. Диссимметричный октаэдр, состоящий из 24 асимметричных четырехгранных пирамид

Видно только 12 четырехугольных оснований этих пирамид

двуугольниками. Соединив центр треугольника с какой-либо точкой его ребра, не лежащей ни в конце, ни в середине ребра, получим некоторый отрезок прямой. Повторив его поворотами на 120 и 240° вокруг центра треугольника, тем самым разделим треугольник на три асимметричные четырехугольные доли. Если примем их за основания пирамид с вершиной в центре тетраэдра, то его можно считать составленным из двенадцати асимметричных четырехугольных пирамид. Такой тетраэдр будет совмещаться с собой следующими двенадцатью поворотами вокруг осей: двумя поворотами на 120 и 240° вокруг каждой из четырех осей третьего порядка (всего 8 операций), поворотом на 180° вокруг каждой из трех осей второго порядка (всего три операции) и единичной операцией.

Переходим ко второй образцовой фигуре — октаэдру, составленному из асимметричных долей. В этом случае удобно расположить октаэдр так, чтобы одна из его трех осей четвертого порядка была ориентирована перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 7). Разделив каждую из восьми треугольных граней октаэдра на три равные асимметричные четырехугольные доли, получим всего 24 такие доли. Если примем каждый из этих неправильных четырехугольников за основание пирамиды с вершиной в центре октаэдра, то получим фигуру, которая может совмещаться с собой всего 24 операциями первого рода: 9 поворотами на 90, 180, 270° вокруг каждой из трех осей четвертого порядка, 8 поворотами на 120, 240° вокруг четырех осей третьего порядка, 6 поворотами на 180° вокруг шести осей второго порядка и одной единичной операцией. На рисунке показаны выходы

осей четвертого и второго порядков, но не показаны выходы осей третьего порядка в точках, где сходятся по три ребра асимметричных долей граней октаэдра.

Третья изометрическая образцовая фигура, совмещающаяся с собой только операциями первого рода, может быть получена из правильного додекаэдра путем разделения его на 60 асимметричных пирамид с общей для них вершиной в центре додекаэдра и с неправильными четырехугольными основаниями. Чтобы не усложнять чертеж, на рис. 8 показано разделение только одной из двенадцати граней на асимметричные четырехугольные доли. Разделенный на 60 асимметричных пирамид правильный додекаэдр соответственно может совмещаться с собой 60 операциями первого рода. Это следует из того, что правильный додекаэдр содержит 6 осей пятого порядка, 10 осей третьего порядка и 15 осей второго порядка.

Существует еще одна, четвертая, изометрическая фигура, совмещающаяся с собой только всевозможными поворотами вокруг бесконечного множества осей и не совмещающаяся с собой ни одной операцией симметрии второго рода. Это — диссимметричный шар. Подробности о нем будут изложены ниже.

В заключение заметим, что все изометрические фигуры обладают только одной о с о б е н н о й т о ч к о й, оставляемой на месте всеми операциями симметрии фигуры, и вовсе не имеют ни одной особенной прямой и ни одной особенной плоскости.

Энантиоморфизм. Каждая из диссимметричных фигур может реализоваться в двух *энантиоморфных*, *зеркально равных модификациях*: правой и левой. Совершенно безразлично,

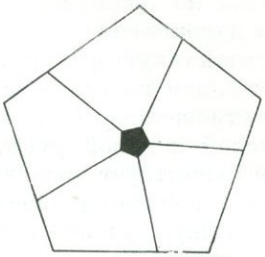


Рис. 8. Одна грань пентагонального додекаэдра, разделенная на пять неправильных четырехугольников

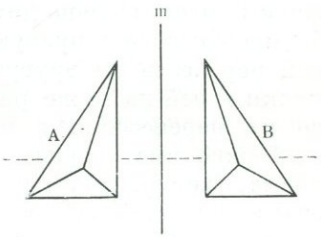


Рис. 9. Построение, доказывающее, что отражение в плоскости симметрии эквивалентно по результату зеркальному повороту на 360° вокруг зеркальной оси первого порядка

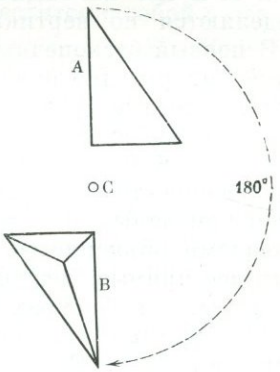


Рис. 10. Построение, доказывающее, что инверсия в центре симметрии эквивалентна по результату зеркальному повороту на 180° вокруг зеркальной оси второго порядка

какая из них будет названа правой, но, приняв одну за правую, мы должны считать вторую левой. Л. Пастер называет дисимметричной такую фигуру, которая не может совмещаться простым наложением со своим зеркальным изображением. Энантиоморфными по отношению друг к другу, например, следует считать фигуры правой и левой руки. В зеркале правая рука выглядит левой. Не существует абсолютного критерия правизны и левизны. Правизна познается через левизну и левизна через правизну. Если правизну условно принять за положительное свойство фигур, то левизну приходится считать отрицательным свойством и наоборот. Все описанные нами выше диссимметричные фигуры были построены из асимметричных частей, принадлежащих только к одной энантиоморфной модификации. Назовем ее правой. На рис. 9 дан пример двух зеркально равных и зеркально расположенных относительно друг друга асимметричных тетраэдров. Чтобы преобразовать правую фигуру в левую, можно все точки правой перенести на другую сторону некоторой плоскости по нормалям к ней на те же расстояния, на которых точки находились до их перенесения в новую позицию.

Важно иметь в виду, что, кроме диссимметричных, правых и левых, фигур, существуют фигуры, нейтральные в отношении *знака энантиоморфизма* — правизны и левизны. Такие фигуры можно назвать *право — левыми*. Примером их может служить фигура обыкновенного кирпича. Не существует правых и левых кирпичей, зеркальное изображение кирпича ничем не отличается от оригинала. Фигура кирпича не относится к диссимметричным фигурам.

Обзор диссимметричных фигур содержится в прилагаемой табл. 1. В ней мы видим, что все интересующие нас фигуры распределяются по вертикальным рядам.

В первый бесконечный ряд 1, 3, 5, . . ., ∞ входят все образцовые фигуры, имеющие только по одной оси нечетного порядка. Целые нечетные числа здесь рассматриваются как символы соответствующих осей, и, как увидим далее, групп симметрии.

Во второй бесконечный ряд 2, 4, 6, . . . , ∞ входят фигуры, обладающие только одной осью четного порядка. Разделение рассматриваемых фигур на два ряда с нечетными и четными символами объясняется тем, что в фигурах с нечетными символами все прямые, лежащие в плоскости, нормальной к оси, п о л я р н ы, а в фигурах с четными символами неполярны. В полярных прямых направление в п е р е д отличается от направления н а з а д. В неполярных прямых направления вперед и назад одинаковы.

В третьем бесконечном ряду 1 : 2, 3 : 2, 5 : 2, . . . , ∞ : 2 помещены фигуры с главной осью нечетного порядка и поперечными по отношению к ней осями второго порядка. Число осей второго порядка в каждой фигуре равно порядку главной оси. В символах этого ряда на первом месте стоит символ главной

оси, а на втором — символ оси второго порядка. Двоеточие означает перпендикулярность главной оси к осям второго порядка. Легко доказать, что, задав главную ось и одну боковую ось второго порядка, мы тем самым выводим и все другие оси второго порядка, содержащиеся в фигуре. Заметим еще, что символы 2 и 1 : 2 означают одно и то же. Вся разница сводится к тому, что в фигуре, обозначенной символом 2, ось второго порядка мыслится расположенной нормально к плоскости чертежа, а в символе 1 : 2 предполагается, что та же ось лежит в плоскости чертежа.

В четвертом бесконечном ряду $2:2,\ 4:2,\ 6:2,\ \ldots,\ \infty:2$ помещены фигуры с главной осью четного порядка и поперечными по отношению к ней осями второго порядка.

Первые два бесконечных ряда фигур сходятся в *предельной фигуре* ∞, вторые два ряда — в предельной фигуре $\infty:2$.

В пятом *конечном* ряду помещены описанные выше изометрические фигуры, происходящие из правильных многогранников.

Примеры фигур с одной зеркальной осью. Для конечных фигур операциями второго рода называются, как уже говорилось, повороты фигуры на углы, кратные целой доле окружности, сопутствуемые отражением в плоскости, нормальной к оси поворота. Сама ось в этом случае именуется зеркальной осью. Забегая вперед, заметим, что указанная плоскость совсем необязательно должна быть плоскостью симметрии.

Приведем несколько примеров фигур, обладающих только одной зеркальной осью. Вернемся к ранее рассмотренному рис. 9, на котором изображены два зеркально равных и зеркально расположенных относительно друг друга асимметричных тетраэдра: правый A и левый B. Примем эту пару тетраэдров за одну фигуру. Нетрудно убедиться, что фигура эта совместится с собой в результате сложной операции, состоящей из поворота вокруг прерывистой прямой на угол 360° (или на 0°) и дальнейшего отражения в плоскости m. Так как указанный поворот по своему результату эквивалентен оставлению фигуры на месте, то сложный зеркальный поворот в данном случае эквивалентен по результату только одному отражению в плоскости m, которая и будет при этом *плоскостью симметрии*. Зеркальные оси принято обозначать целыми числами, равными порядку оси, с черточкой наверху. Зеркальная ось первого порядка должна была бы поэтому обозначаться символом $\bar{1}$, но на практике ее обычно обозначают буквой m. Важно отметить, что плоскость симметрии мыслится отражающей обеими своими сторонами. Этим она существенно отличается от зеркальной плоскости. Изображенная на рис. 9 фигура, состоящая из двух зеркально равных асимметричных тетраэдров, совмещается с собой в двух разных позициях двумя операциями: единичной операцией, принадлежащей к операциям первого рода, и операцией отражения в плоскости симметрии — операцией второго рода. Отражением в плоскости симметрии правый тетраэдр A преобразует-

ся в левый B, а левый одновременно — в правый. Единичной операцией оба тетраэдра преобразуются в себя.

Рассмотрим теперь следующую операцию второго рода — зеркальный поворот $\overline{2}$ на 180°. Возьмем асимметричный правый тетраэдр A (рис. 10), обращенный к наблюдателю одной своей гранью. Если повернем его на 180° вокруг нормальной к плоскости чертежа оси, обозначенной маленьким кружком, то тетраэдр займет новую позицию, но по-прежнему будет обращен к наблюдателю той же гранью. Если, далее, отразим тетраэдр в плоскости чертежа, которая в данном случае не является плоскостью симметрии, то заданный тетраэдр станет левым B, обращенным тремя своими гранями к наблюдателю. Если затем примем описанную пару тетраэдров за целую фигуру, то из рисунка будет видно, что проделанная нами сложная операция зеркального поворота может быть осуществлена с тем же результатом значительно проще, а именно перенесением всех точек фигуры в диаметрально противоположную позицию относительно центра симметрии C, расположенного в плоскости чертежа. Перенесение всех точек фигуры в диаметрально противоположное по отношению к центру симметрии положение можно назвать отражением в точке или *инверсией*. Отражения в центре симметрии и в плоскости симметрии обладают тем сходством, что обе эти операции преобразуют правые части фигуры в левые и левые в правые. Отличие между обеими операциями сводится к тому, что части фигуры, отраженные в плоскости симметрии, располагаются зеркально, отраженные же в центре симметрии — не зеркально, а *диаметрально противоположно*. Мы вынуждены здесь отметить, что непонимание этих простых вещей является предметом многих недоразумений.

Чтобы до конца разъяснить смысл операций второго рода, нам необходимо привести еще два примера фигур, обладающих одной зеркальной осью.

В первом примере на рис. 11 изображена образцовая фигура с одной зеркальной осью четвертого порядка, обозначаемой символом $\overline{4}$. Как видим, фигура состоит из двух правых асимметричных тетраэдров A, C и двух левых тетраэдров B, D. Тетраэдр A преобразуется в B, а вся фигура в целом совмещается с собой зеркальным поворотом ее на $^1/_4$ окружности вправо вокруг зеркальной оси четвертого порядка, изображенной на рисунке маленьким белым квадратом. Тетраэдр A преобразуется в C, а вся фигура совмещается с собой простым поворотом на $^1/_2$ оборота вправо или влево вокруг простой оси второго порядка, совпадающей по направлению с зеркальной осью. Простая ось изображена маленьким черным двуугольником. Наконец, тетраэдр A преобразуется в D, а вся фигура совмещается с собой зеркальным поворотом на $^3/_4$ полного оборота вправо или, что одно и то же, на $^1/_4$ оборота влево вокруг зеркальной оси четвертого порядка.

В качестве второго примера возьмем фигуру с одной зеркальной осью третьего порядка (рис. 12). Эта фигура состоит из трех

правых тетраэдров A, C, E и трех заслоненных ими, невидимых на рисунке левых тетраэдров B, D, F. Каждый левый тетраэдр зеркально равен и зеркально расположен по отношению к заслонившему его правому тетраэдру. Это означает, что та воображаемая плоскость, которая отделяет правые тетраэдры от левых, является плоскостью симметрии рассматриваемой фигуры. Наличие этой плоскости условно изображается тремя жирными точками — шляпками тех «гвоздиков», которыми правые тетраэдры соединены с ле-

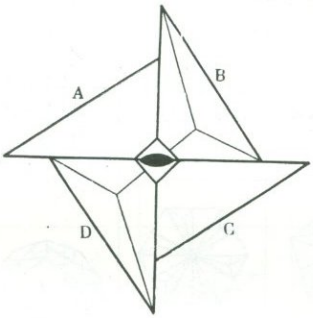


Рис. 11. Фигура, обладающая зеркальной осью четвертого порядка, совмещенной с простой осью второго порядка

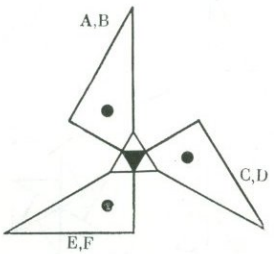


Рис. 12. Фигура, обладающая зеркальной осью третьего порядка, совмещенной с простой осью того же порядка

выми. Легко проверить, что рассматриваемая фигура может совмещаться с собой в шести разных позициях: двумя зеркальными поворотами вправо на $^1/_3$ и на $^2/_3$ полного оборота, двумя простыми поворотами на те же углы, отражением в плоскости симметрии и единичной операцией. Можно сказать поэтому, что наша фигура обладает не только зеркальной осью третьего порядка, обозначенной на рисунке маленьким белым треугольником, но и простой осью того же порядка, совпадающей по своему направлению с зеркальной осью третьего порядка. Как принято, простая ось обозначена у нас маленьким черным треугольником. В тексте зеркальная ось третьего порядка обозначается символом $\overline{3}$.

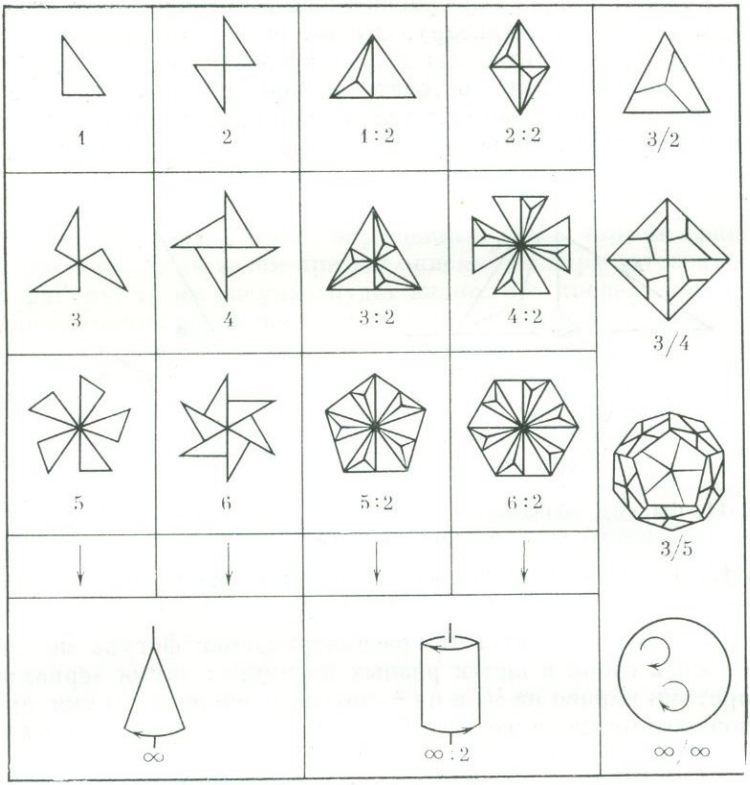
Обзор центросимметричных фигур. Чтобы понять, что собою представляют центросимметричные фигуры, достаточно сравнить табл. 1 и 2. Сразу видно, что обе таблицы содержат одинаковое число клеток, сверстанных в одинаковое число вертикальных рядов.

Каждой клетке табл. 1 соответствует одна определенная клетка табл. 2. Каждому символу фигуры в табл. 1 отвечает определенный символ соответствующей фигуры в табл. 2. Например, символу 2 отвечает символ $2i$, символу $3:2$ — символ $3:2i$ и т. д.

Каждому бесконечному вертикальному ряду фигур табл. 1 отвечает определенный бесконечный ряд табл. 2, например, ряду $2, 4, 6, \ldots, \infty$ ряд $2i, 4i, 6i, \ldots, \infty i$, ряду $1:2, 3:2, 5:2, \ldots, \infty:2$ ряд $1:2i, 3:2i, 5:2i, \ldots, \infty:2i$ и т. д.

Таблица 1

Предельные группы — ∞, ∞: 2, ∞/∞.



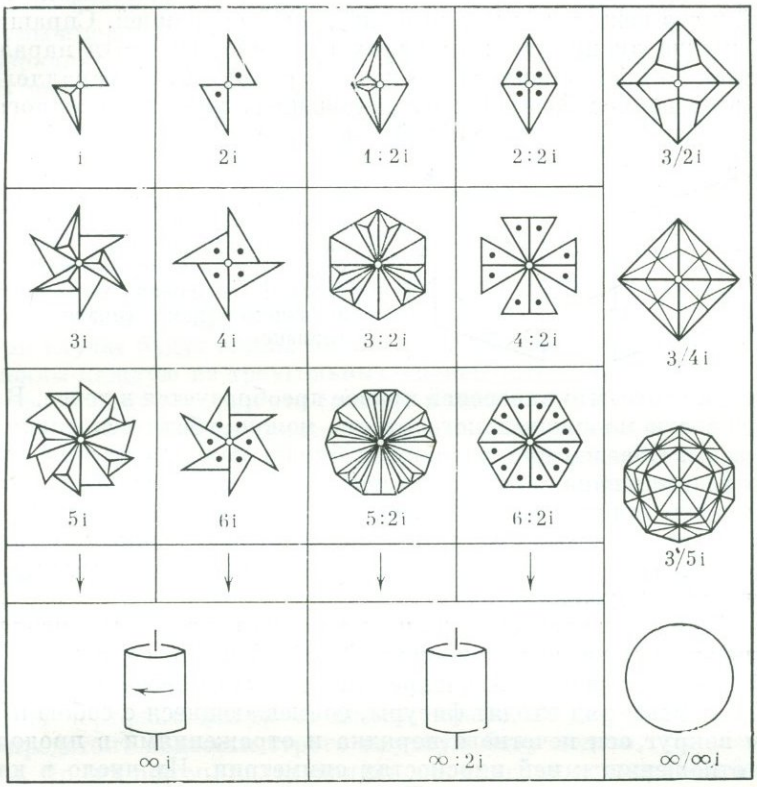
Четыре изометрические центросимметричные образцовые фигуры; в табл. 2 они расположены в пятом вертикальном ряду.

Первая сверху фигура представляет собой октаэдр, разделенный на 24 асимметричные пирамиды, сходящиеся своими вершинами в центре октаэдра. Основаниями пирамид служат неправильные четырехугольники. Из них видно только двенадцать, обращенных к наблюдателю. Другие двенадцать заслонены этими видимыми. Фигура имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся по трем взаимно перпендикулярным осям второго порядка, четыре оси третьего порядка (они же зеркальные оси шестого порядка) и центр симметрии. Соответственно со сказанным фигура может совмещаться с собою 24 операциями: двенадцатью первого рода и столькими же второго рода.

Вторая сверху фигура тоже является октаэдром, но разделенным не на 24, а на 48 асимметричных пирамид с треугольными основаниями. Эта фигура имеет три взаимно перпендикулярные оси четвертого порядка, четыре оси третьего порядка (они же зеркаль-

Таблица 2

Предельные группы — ∞i, $\infty : 2i$, $\infty/\infty i$



ные оси шестого порядка), шесть осей второго порядка, девять плоскостей симметрии и центр симметрии. Фигура может совмещаться с собою 24 операциями первого рода и столькими же операциями второго рода.

Третья фигура — это правильный пентагональный додекаэдр, расчлененный на 120 асимметричных долей. Фигура имеет двенадцать правильных пятиугольных граней, каждая из них делится на десять частей. Фигура совмещается с собою 60 операциями первого рода и столькими же операциями второго рода.

Четвертая фигура — обыкновенный шар, совмещающийся с собою всеми мыслимыми для конечных фигур операциями первого и второго рода.

Специфика центросимметричных фигур. Принятая нами в этой работе особая символика для центросимметричных фигур, отнюдь не претендующая на всеобщее употребление, имеет целью разъяснить следующее, широко распространенное даже среди многих специалистов-кристаллографов недоразумение.

Вообразим себе идеальный косоугольный параллелепипед, изготовленный, скажем, из гипса. Предполагается известным, что такой параллелепипед может совмещаться с собою только инверсией в его центре симметрии и единичной операцией. Спрашивается, можно ли при этих условиях как-либо, не портя параллелепипеда, отличить одну из его граней от другой, ей параллельной. На этот вопрос большинство опрошенных нами кристаллографов дало неверный отрицательный ответ, свидетельствующий о непо-

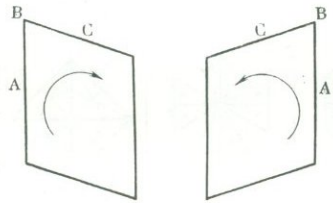


Рис. 13. Построение, доказывающее, что в косоугольном параллелепипеде одна грань может быть отлична от параллельной ей грани по знаку энантиоморфизма (правизне и левизне)

нимании того, что инверсией правое преобразуется в левое. В справедливости положительного ответа можно убедиться следующим образом. Обведем карандашом на бумаге каждую из двух избранных взаимно параллельных граней параллелепипеда, стараясь расположить длинное ребро одной и другой грани параллельно длинной стороне листа бумаги. Так получим две разные картины выбранных нами граней (рис. 13). Одна является зеркальным изображением другой.

Обзор образцовых фигур, не входящих в категорию центросимметричных и диссимметричных. Такие фигуры собраны у нас в табл. 3. Все эти фигуры распределены в шести бесконечных рядах.

В первый ряд входят фигуры, совмещающиеся с собою поворотом вокруг оси нечетного порядка и отражениями в продольных по отношению к ней плоскостях симметрии. Их число в каждой фигуре равно порядку оси. Точка в формуле симметрии является знаком параллельности (продольности) между каждой плоскостью симметрии и единственной осью.

От первого ряда второй бесконечный ряд фигур отличается только тем, что в нем вместо осей нечетного порядка содержатся оси четного порядка. Оба ряда ведут к фигуре, обладающей симметрией конуса.

В третий бесконечный ряд входят образцовые фигуры, из которых каждая содержит всего одну зеркальную ось порядка, кратного четырем. Каждая из этих зеркальных осей является одновременно простой осью вдвое меньшего порядка.

В четвертый бесконечный ряд входят фигуры с главной осью нечетного порядка и единственной поперечной плоскостью симметрии. С интересными особенностями этих фигур мы познакомились при описании фигуры, изображенной на рис. 12. Оба ряда, третий и четвертый, ведут к предельной фигуре, имеющей симметрию вращающегося цилиндра. Мы уже встречались с этой фигурой при описании двух первых бесконечных рядов в табл. 2. Там вра-

щающемуся цилиндру мы приписали симметрию $\infty\, i$, а здесь, в табл. 3, мы ту же симметрию обозначаем символом $\infty : m$.

В пятом бесконечном ряду изображены фигуры, содержащие в качестве главной оси зеркальную ось порядка, кратного четырем. Фигуры имеют продольные плоскости числом, вдвое меньшим порядка зеркальной оси, и столько же поперечных осей второго порядка.

В шестом бесконечном ряду сосредоточены фигуры, обладающие главной осью нечетного порядка, продольными плоскостями симметрии в количестве, равном порядку оси, одной поперечной плоскостью симметрии и поперечными осями второго порядка в количестве, равном числу продольных плоскостей. Главная ось является одновременно и зеркальной осью своего же порядка.

В табл. 3 входит еще одна изометрическая образцовая фигура, имеющая симметрию $3/\bar{4}$. Проще всего интерпретировать ее как правильный тетраэдр, поставленный на одно из своих шести ребер. В этом случае будут видны только две из четырех его граней. Если разделим каждую из треугольных граней тетраэдра на шесть равных треугольников, как это сделано в табл. 3, то всего будет получено 24 таких асимметричных треугольника, из них двенадцать будут обращены к наблюдателю. Приняв каждый из асимметричных треугольников за основание пирамиды с вершиной в центре тетраэдра, увидим, что он будет тем самым составлен из 24 асимметричных долей и соответственно может совмещаться с собой в 24 позициях. На табл. 3 этот своеобразный гексатетраэдр обращен к наблюдателю одной из своих осей второго порядка. На фигуре ясно видны две из шести плоскостей симметрии.

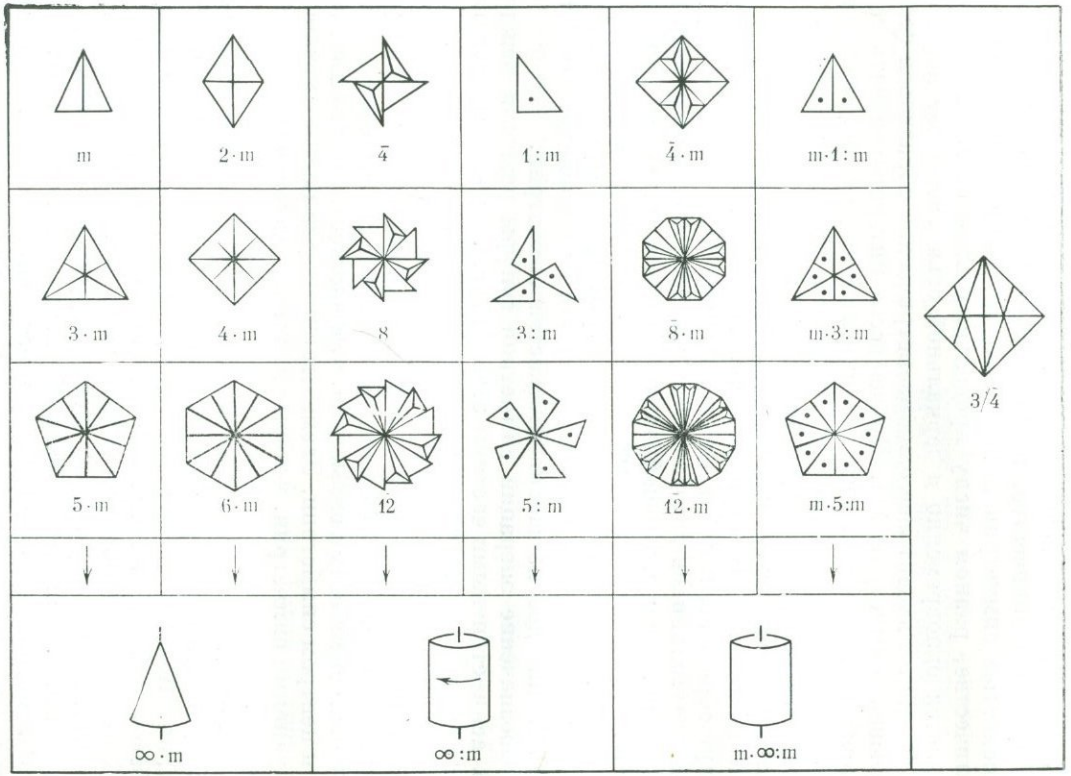
Обозначение операций симметрии фигуры равными между собой асимметричными частями этой фигуры. Выше мы познакомились по чертежам фигур со всеми типами их симметрии. Далее нам предстоит подвести строго научную базу под то, что мы уже знаем. До сих пор мы пользовались для описания симметрии фигур следующими так называемыми *элементами симметрии*: простыми и зеркальными осями симметрии, а, в частности, также плоскостями и центром симметрии. Элементы симметрии нельзя смешивать с операциями симметрии, которые являются *элементами групп симметрии*.

Напомним, что группой симметрии данной фигуры называется совокупность всех ее неэквивалентных друг другу операций симметрии. Каждая из них, за исключением единичной операции, переводит фигуру в новую определенную позицию. Отличить ее от всех других позиций можно при условии, если абсолютно равные (совместимо или зеркально) части фигуры будут сделаны условно различными. Для этого можно обозначить их разными буквами.

Рассмотрим какую-нибудь симметричную фигуру, скажем ту, которая изображена на рис. 14, *а*. Непосредственно видно, что она имеет единственную зеркальную ось шестого порядка, включающую в себя простую ось третьего порядка и центр симметрии. Простая ось совпадает по направлению с зеркальной. Символ

Таблица 3

Предельные группы — $\infty \cdot m$, $\infty : m$, $m \cdot \infty : m$.



группы: $\bar{6} = 3i$. Обозначим шесть равных между собою асимметричных частей фигуры буквами A, B, C, D, E, F. Часть A назовем условно *первой*. Когда фигура подвергается какой-либо одной из принадлежащих ей операций симметрии, то первая часть фигуры переходит в позицию некоторой другой части. Мы можем поэтому обозначить произведенную операцию символом той части, в которую преобразуется первая часть. Сколько же всего канонических операций содержит рассматриваемая группа симметрии? Очевидно, столько, сколько равных частей имеет наша фигура, т. е. шесть. Перечислим все эти операции: A — единичная операция, B — зеркальный поворот вправо на 60°, C — простой поворот вправо на 120°, D — инверсия в центре симметрии, E — простой поворот вправо на 240°, F — зеркальный поворот вправо на 300°.

Из ранее изложенного мы знаем, что инверсия D в центре симметрии эквивалентна зеркальному повороту фигуры на 180°, что поворот E вокруг простой оси вправо на 240° эквивалентен по результату повороту вокруг той же оси влево на 120° и что зеркальный поворот вправо на 300° эквивалентен повороту влево на 60°.

Порядок группы симметрии. Рассмотренная нами группа симметрии образцовой фигуры содержит в себе всего шесть элементов, т. е. шесть неэквивалентных по результату канонических операций. Полное число всех канонических операций какой-либо группы симметрии называется *порядком* группы. Порядок группы симметрии рассмотренной фигуры, следовательно, равен шести. В образцовых фигурах, составленных из равных между собой частей, порядок группы равен числу этих частей. Сказанное можно выразить иначе следующим образом. Так как каждая операция симметрии фигуры определяется однозначно только одной асимметричной частью этой фигуры, то порядок группы симметрии должен быть равен числу равных частей фигуры, на которые она может быть разделена или из которых она может быть составлена. Порядок группы, по Е. С. Федорову, называется *величиной симметрии*.

Повторение операций симметрии и их степени. Возьмем какую-нибудь симметричную фигуру, например, показанную на рис. 14, *а*. Подвергнем ее два раза подряд зеркальному повороту на 60° вправо. После первого зеркального поворота тетраэдр A перейдет в позицию B, а после второго такого же зеркального поворота B перейдет в C. В подобных случаях говорят, что квадрат операции B эквивалентен по результату простому повороту C. Далее из рисунка видно, что куб операции B эквивалентен инверсии D и т. д. В математической форме найденные соотношения записываются так:

$$B^2 = C, \quad B^3 = D, \quad B^4 = E, \quad B^5 = F.$$

Аналогично

$$C^2 = E.$$

Не все *степени* одной операции являются разными операциями. Многие из них могут быть эквивалентными друг другу, например, $B^6 = A$, $B^7 = B$, $B^8 = C$, $C^3 = A$, $C^4 = C$, $C^5 = E$ и т. д.

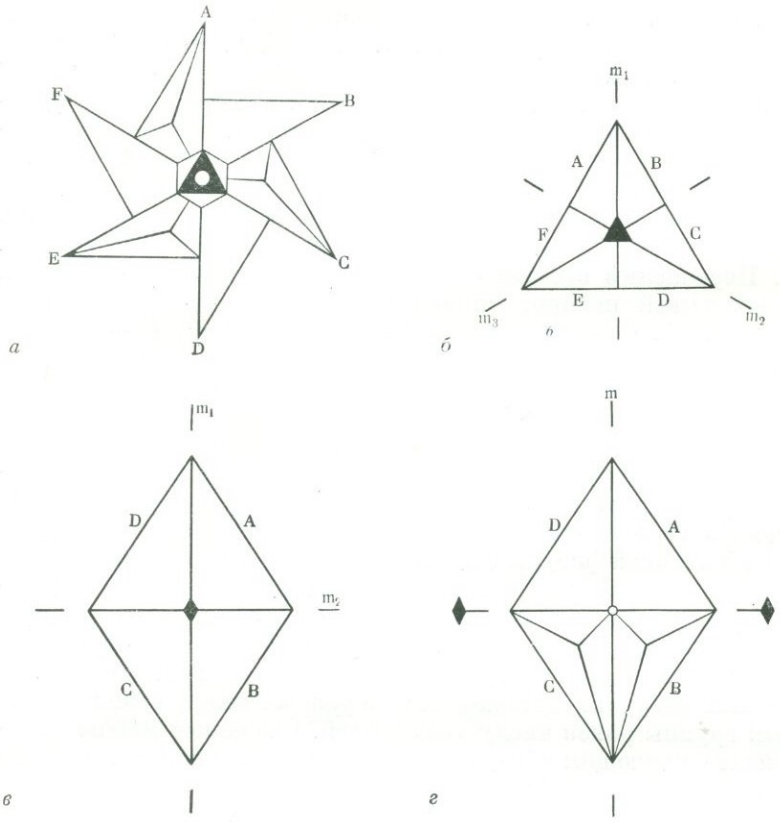


Рис. 14. Фигуры, принадлежащие к группам
а — $\bar{6}$; *б* — $3 \cdot m$; *в* — $2 \cdot m$; *г* — $2 : m = 2i$

Произведение операций симметрии. Операция, эквивалентная по результату нескольким последовательно произведенным операциям, называется *произведением* этих *операций* и обозначается, как в алгебре, выписанными в строчку символами этих операций. При этом существенным является та последовательность, в которой расположены символы. Возьмем фигуру, обладающую одной простой осью третьего порядка и тремя продольными по отношению к ней плоскостями симметрии (рис. 14, *б*). Рассмотрим, что представляет собой произведение BC. Отдельно взятая операция B есть отражение фигуры в плоскости симметрии m_1. Отдельно взятая операция C есть поворот вправо фигуры на $^1/_3$ полного оборота вокруг оси третьего порядка. После совершения операции B первая часть A фигуры перейдет в положение B. Дальнейший поворот C переведет часть B в позицию D. Отсюда заключаем, что $BC = D$,

т. е. произведение BC по своему результату эквивалентно операции D — отражению в плоскости m_3. Нетрудно убедиться, что, поменяв местами B и C, получим новый результат: $CB = F$, т. е. отражение в плоскости симметрии m_2. Если вследствие перестановки двух операций их произведение дает новый результат, операции эти называются *неперестановочными*. Если, наоборот, перестановка операций не изменяет результата, операции считаются *перестановочными*. Примером двух перестановочных операций могут служить операции B и C (рис. 14, *в*). Операция B есть отражение фигуры в плоскости симметрии m_2, операция C есть поворот фигуры на 180° вокруг оси второго порядка.

Если совершим сначала операцию B, а затем операцию C, то получим результат, эквивалентный операции D, т. е. отражение фигуры в плоскости m_1 — $BC = D$.

Если поменять местами сомножители B и C, т. е. сначала повернуть фигуру на 180° вокруг оси второго порядка, а затем отразить ее (фигуру) в плоскости m_2, то получим тот же результат D, $CB = D$. Иначе говоря, операции C и B являются перестановочными.

Произведение может быть составлено не только из двух, но и из скольких угодно операций, например $BCD = A$.

Прямые и обратные операции. Для конечных фигур операциями симметрии, как мы знаем, могут быть только простые и зеркальные повороты вокруг соответствующих осей — простых и зеркальных. Условимся называть операции с поворотами вправо *прямыми операциями*, а операции с поворотами влево — *обратными операциями* по отношению к прямым.

Если в какую-либо группу симметрии входит некоторая прямая операция, то в ту же группу должна входить и обратная операция. Вернемся к фигуре, изображенной на рис. 14, *а*. В ее группу симметрии входит операция C простого поворота вправо вокруг оси третьего порядка на угол в 120°. Обратной по отношению к операции C является поворот фигуры вокруг той же оси на тот же угол влево, т. е. операция E. Сама эта обратная операция может интерпретироваться как прямая операция поворота вправо на угол 240°. Другим примером может служить на той же фигуре прямая операция B зеркального поворота вправо на угол 60°. По отношению к этой операции обратной будет операция F, которая в свою очередь может рассматриваться как прямая операция зеркального поворота на 300°.

Нетрудно убедиться на любом примере симметричных фигур, что произведение всякой операции на обратную по отношению к ней эквивалентно единичной операции, например, $CE = A$, $BF = A$.

Операции, обратные по отношению к себе. Всего существует четыре такие операции. На рис. 14, *г* показана фигура, группа симметрии которой состоит только из этих четырех операций. Начнем с единичной операции A. Нам уже известно, что ее можно рассматривать как поворот фигуры на 360° вокруг любой оси вправо, при-

водящий фигуру в заданную позицию. Но к тому же результату должен привести и обратный поворот. Это как раз и означает, что A есть обратная по отношению к себе операция.

Операция B на том же рисунке есть поворот фигуры вокруг оси второго порядка на 180°. Такой поворот вправо и влево приводит к одному результату. Отсюда следует, что операция B есть тоже обратная операция по отношению к себе.

Операция C есть инверсия, но сама инверсия, как было ранее выяснено, есть зеркальный поворот на 180° вокруг произвольной оси, а поворот на 180° вправо и влево приводит к одному результату. Значит, и инверсия есть операция, обратная по отношению к себе.

Операция D есть отражение в плоскости симметрии m, но выше было показано, что отражение в плоскости приводит к тому же результату, что и зеркальный поворот вокруг произвольной оси на 360° вправо и влево. Это означает, что и операция D есть операция, обратная по отношению к себе.

Квадрат каждой из этих операций эквивалентен единичной операции: $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = A$.

Четыре групповые аксиомы. Группы симметрии, как и все другие математические группы, состоящие из тех или иных элементов, подчиняются следующим четырем аксиомам:

1) произведение любых двух операций симметрии данной фигуры есть операция симметрии той же группы;

2) во всякую группу симметрии данной фигуры в качестве обязательной операции входит единичная операция, эквивалентная по результату оставлению фигуры на месте;

3) каждая операция группы имеет по отношению к себе обратную операцию, входящую в ту же группу; произведение этих двух операций эквивалентно единичной операции;

4) в произведениях из трех операций справедливым считается сочетательный закон: $K\,(LM) = (KL)\,M$.

Таблица Кэли и кристаллографические группы. Возьмем любую симметричную фигуру, например ту, которая изображена на рис. 14, *г*. Запишем в первой строке и в первом столбце таблицы умножения все четыре операции фигуры. Условимся операции, поставленные в первом столбце, считать первыми операциями произведений, а операции в первой строке — за вторые операции произведений. В местах пересечения четырех других строк и столбцов будем записывать соответствующие произведения двух операций. Так получим таблицу Кэли для группы симметрии рассматриваемой фигуры

	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	A	D	C
C	C	D	A	B
D	D	C	B	A

В теории групп группы, изображаемые одной и той же таблицей Кэли, называются *изоморфными*. С точки зрения абстрактной теории все изоморфные друг другу группы принимаются за одну и ту же группу. Учение о симметрии часто отождествляется с теорией групп. Кристаллографы не могут согласиться с этой точкой зрения хотя бы потому, что кристаллы, принадлежащие к трем простейшим изоморфным группам m, i, 2, обладают совершенно различными свойствами. Например, кристаллы, принадлежащие к группе 2, могут в принципе встречаться в двух энантиоморфных модификациях, а кристаллы, относящиеся к группам m, i, этим свойством обладать не могут. С другой стороны, кристаллы, принадлежащие к центросимметричной группе i, не могут обладать пироэлектрическими свойствами, наблюдаемыми в кристаллах, принадлежащих к группам m, 2 и т. д.

Как известно, всего кристаллографических групп симметрии существует 32. Все они входят в состав наших трех табл. 1—3. При отборе кристаллографических групп из этих таблиц следует учесть, что к кристаллографическим группам относятся только те группы, которые не имеют осей пятого, седьмого и более высокого порядков. Следует иметь также в виду, что некоторые из простейших групп в таблицах повторяются дважды в разной форме, например,

$$m = 1 : m, \quad 2 \cdot m = m \cdot 1 : m, \quad 2i = 1 : 2i \text{ и т. д.}$$

Наша работа посвящена группам симметрии конечных фигур. Все конечные фигуры имеют по меньшей мере одну *особенную точку*, не повторяющуюся операциями симметрии. На этом основании все группы симметрии конечных фигур именуются *точечными группами*. С точки зрения абстрактной теории групп кристаллографических групп существует не 32, а 18, поскольку некоторые кристаллографические группы являются изоморфными между собой. В нашей работе все группы симметрии конечных фигур разделены на уже описанные три категории. Все группы входят в четырнадцать бесконечных рядов и только девять изометрических групп не входят ни в один из бесконечных рядов. В число 32 кристаллографических групп входят 11 групп первой категории, 11 групп второй категории и 10 групп третьей категории.

Паритет между правизной и левизной. Всякая фигура, совмещающаяся с собой операциями второго рода, должна совмещаться с собой также и операциями первого рода. Число канонических операций первого рода должно быть в этом случае равно числу операций второго рода. Это означает, что в образцовых симметричных фигурах число правых асимметричных долей должно быть равно числу левых. В самом общем виде это правило может быть сформулировано следующим образом: в учении о симметрии имеет место полный паритет между правизной и левизной. Применительно к диссимметричным фигурам, совмещающимся с собой только операциями первого рода, это правило оправдывается тем, что каж-

дая из диссимметричных фигур может осуществляться в двух энантиоморфных модификациях — правой и левой.

Здесь необходимо заметить, что распространять указанное правило, имеющее силу в учении о симметрии идеальных фигур, совсем необязательно на природу, в частности на живую природу, где паритет правизны и левизны осуществляется весьма приближенно или в ряде случаев не осуществляется вовсе.

Необразцовые фигуры. До сих пор для описания групп симметрии мы пользовались исключительно образцовыми фигурами, состоящими из асимметричных частей, и лишь однажды вспомнили о фигуре кирпича, явным образом не разделенного на асимметричные части. Такое однообразие образцовых фигур помогло нам достаточно просто, как нам кажется, разъяснить, что под *порядком* группы можно разуметь просто число равных между собой (совместимо или зеркально) частей фигуры, или, что одно и то же, число ее канонических операций симметрии.

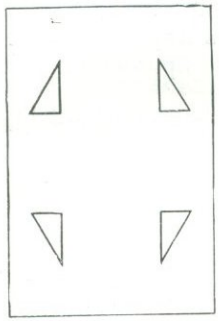


Рис. 15. Преобразование обыкновенной симметричной фигуры в образцовую

Здесь мы должны обратить внимание на то, что любую необразцовую фигуру можно с тем же успехом использовать как образцовую. Возьмем для примера фигуру того же кирпича (рис. 15). В проекции на плоскость, параллельную его большой грани, он выглядит прямоугольником. Поставив где-либо на этой грани асимметричную метку, нетрудно, не имея даже никакого представления о симметрии вообще, разместить на этой же грани и ей параллельной такие же метки в одинаковых местах и одинаковым образом. Совокупность таких восьми меток — это и есть образцовая симметричная фигура, принадлежащая к группе $2 : 2i$.

Предельные группы. Мы называем *предельными* такие группы, в состав которых входят бесконечно малые повороты. Фигуры предельной симметрии обладают одной или бесконечным множеством осей симметрии бесконечного порядка. По Пьеру Кюри, существует всего семь предельных групп симметрии. Рассмотрим подробно каждую из них.

Простейшая предельная группа имеет символ ∞. В качестве образцовой фигуры, принадлежащей к этой группе, можно принять вращающийся конус, изображенный в табл. 1. Такой конус не имеет поперечной плоскости симметрии и ни одной продольной плоскости симметрии. От всех фигур, принадлежащих к группам конечного порядка, вращающийся конус отличается тем, что мы приписываем ему, кроме чисто геометрических свойств, одно физическое свойство — вращение, тогда как все фигуры, принадле-

жащие к группам конечного порядка, мы мыслим себе обладающими только геометрическими свойствами. Это не мешает нам предвидеть возможность существования определенных физических свойств у кристаллов, по своей симметрии всегда принадлежащих к группам конечного порядка. Группа ∞ является предельной как для ряда групп $1, 3, 5, \ldots, \infty$, так и для ряда групп $2, 4, 6, \ldots, \infty$. Значит ли это, что в данном случае стоит различать нечетную бесконечность от четной? Вращающийся конус, как фигура, относящаяся к группе, состоящей только из операций первого рода, может реализоваться в двух энантиоморфных модификациях — правой и левой.

Переходим ко второй предельной группе, имеющей символ $\infty : 2$. Эта группа характеризуется наличием оси бесконечного порядка и бесконечным множеством поперечных осей второго порядка. Мы изображаем эту группу симметрии скрученным цилиндром. Существуют две энантиоморфные модификации этой фигуры: цилиндр, скрученный по правому винту, и цилиндр, скрученный по левому винту. Из физических свойств кристаллов симметрией $\infty : 2$ обладает так называемое вращение плоскости поляризации. На самом деле в этом свойстве кристаллов мы имеем дело не с вращением плоскости поляризации, а с ее закручиванием. Левому винту отвечает правое вращение и, наоборот, правому винту — левое вращение. В рассматриваемой группе $\infty : 2$ сходятся два бесконечных ряда групп:

$$1:2,\quad 3:2,\quad 5:2,\ldots,\infty:2,$$
$$2:2,\quad 4:2,\quad 6:2,\ldots,\infty:2.$$

Третья группа симметрии ∞/∞ содержит в себе все мыслимые простые повороты вокруг бесконечного множества осей, пересекающихся в одной точке, которая не является центром симметрии. Эта группа задается всего двумя осями симметрии бесконечного порядка, пересекающимися под любым углом. Примером фигуры, обладающей этой симметрией, может служить шар, изготовленный из аморфного вещества, вращающего плоскость поляризации, например из расплавленной и быстро охлажденной до достаточно низкой температуры сегнетовой соли. Следует различать две энантиоморфные модификации такого диссимметричного шара.

Четвертая предельная группа $\infty \cdot m$ (табл. 3) может быть представлена неподвижным конусом, имеющим ось бесконечного порядка и бесконечное количество продольных по отношению к ней плоскостей симметрии. В этой группе сходятся два бесконечных ряда групп:

$$m,\quad 3\cdot m,\quad 5\cdot m,\ldots,\infty\cdot m,$$
$$2\cdot m,\quad 4\cdot m,\quad 6\cdot m,\ldots,\infty\cdot m.$$

Характерной особенностью этих групп является то, что во всех отвечающих им фигурах главная ось полярна в геометричес-

ком, а часто и в электрическом смысле, т. е. направление *вперед* по оси отличается от направления *назад*.

Пятая предельная группа $\infty\, i = \infty : m$ (табл. 2, 3) интересна тем, что в ней сходятся четыре бесконечных ряда:

$$\begin{aligned} &i, \quad 3i, \quad 5i, \quad \ldots, \infty\, i, \\ &2i, \quad 4i, \quad 6i, \quad \ldots, \infty\, i, \\ &\overline{4}, \quad \overline{8}, \quad \overline{12}, \quad \ldots, \infty : m, \\ &1 : m, \; 3 : m, \; 5 : m, \ldots, \infty : m. \end{aligned}$$

Пятая предельная группа может быть изображена вращающимся цилиндром. Симметрией вращающегося цилиндра обладает однородное магнитное поле.

Шестая предельная группа $\infty : 2\, i = m \cdot \infty : m$ может быть представлена неподвижным цилиндром. Эта группа является *старшей* по отношению ко всем группам четырнадцати бесконечных рядов. Это означает, что каждая группа любого бесконечного ряда является подгруппой группы неподвижного цилиндра. Подгруппой данной группы вообще называется такая группа, все операции которой входят в данную группу.

Седьмой предельной группой $\infty / \infty i$ является группа обыкновенного шара, обладающего всеми мыслимыми операциями, содержащимися во всех простых и зеркальных осях, пересекающихся в одной точке — центре симметрии шара.

Предельные группы играют громадную роль в изучении физических свойств кристаллов и анизотропных сред вообще.

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

Труды Алексея Васильевича Шубникова в области кристаллофизики — выдающийся вклад в кристаллографию, физику твердого тела и смежные дисциплины. Развив взгляд Ю. В. Вульфа на кристаллографию, как на преимущественно физическую дисциплину, А. В. Шубников создал школу, в работах которой кристаллографический и физический подход дополняют друг друга.

Особенностью исследований А. В. Шубникова в области кристаллофизики является последовательное применение теории симметрии к изучению анизотропии и связанных с ней физических свойств материальной среды. На этом пути Алексей Васильевич развил и, по существу, заново сформулировал принцип симметрии П. Кюри, а также обобщил более ранние работы Пастера и Вант-Гоффа о влиянии диссимметрии молекул на оптическую активность среды. Этот симметрийный подход лежит в основе многочисленных работ А. В. Шубникова, среди которых одно из первых мест занимает открытие в 1940 г. пьезоэлектрических текстур. Другим крупным открытием А. В. Шубникова является предсказанная им (и впоследствии реализованная в электронной микроскопии) возможность визуального наблюдения атомов и молекул при прохождении монохроматических лучей через два наложенных друг на друга кристаллических растра.

При отборе статей А. В. Шубникова по физическим свойствам кристаллов для издания его избранных трудов редколлегия сочла целесообразным опубликовать раздел по кристаллофизике, написанный в свое время А. В. Шубниковым для учебника «Основы кристаллографии» (авторы А. В. Шубников, Е. Е. Флинг, Г. Б. Бокий). Этот учебник давно стал библиографической редкостью. В раздел внесены многочисленные исправления опечаток, сделанные самим Алексеем Васильевичем, когда он начал подготовку и написание нового учебника по кристаллофизике. К сожалению, в настоящий раздел не вошло несколько работ А. В. Шубникова по фигурам Хладни на текстурных пьезоэлектрических пластинках, по растровой оптике и растровой модели обыкновенных и групповых волн. Это связано с невозможностью воспроизвести в настоящем издании богатый иллюстративный материал, с которым читатель может ознакомиться по оригинальным статьям, указанным в библиографии.

О ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ АМОРФНЫХ И КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ[1]

(Представлено академиком А. Е. Ферсманом на заседании Отделения физико-математических наук 18 января 1928 г.)

Известно, что пьезоэлектрическими свойствами могут обладать все кристаллы, не имеющие центра симметрии [1, 2]. В таких кристаллах всегда можно найти одну или несколько серий параллельных прямых (пьезоэлектрических осей), обладающих такими свойствами: если сдавить или растянуть кристалл вдоль этих прямых, то на противоположных концах их возникают электрические заряды разного знака. В твердых аморфных и спутанно-кристаллических (практически изотропных) телах пьезоэлектрических явлений наблюдаться не может, так как это противоречило бы шаровой симметрии этих тел. Существуют, однако, случаи, когда аморфные тела и кристаллические агрегаты под влиянием внешних сил становятся анизотропными, тем самым частично приобретая свойства отдельных кристаллов. Так, растянутая резина по оптическим свойствам не отличается от положительного одноосного кристалла, причем оптическая ось в этом случае совпадает с осью растяжения. Точно так же стекло, помещенное в однородное электрическое поле, становится двоякопреломляющим (эффект Kerr'a [3]), а в магнитном поле приобретает способность вращать плоскость поляризации лучей (эффект Faraday [4]). Далее, такие, например, кристаллические агрегаты, как волокнистые минералы (асбест, селенит и т. д.) или подвергнутые механической обработке металлы, обладают явно выраженной анизотропией при испытании их прочности на разрыв в различных направлениях. Исходя из этих аналогий можно ожидать, что всякий диэлектрик, будь то кристалл, аморфное тело или кристаллический агрегат, помещенный в однородное электрическое поле, будет обладать пьезоэлектрическими свойствами, причем электрическая ось в данном случае будет совпадать с направлением силовых линий поля. В самом деле, при диэлектрической поляризации во всей толще диэлектрика некие структурные единицы — диполи ориентируются своими осями параллельно электрическим линиям сил, причем одноименные полюсы их направлены в одну и ту же сторону. Такое расположение диполей гарантирует отсутствие центра симметрии и потому делает данный диэлектрик вполне аналогичным пьезоэлектрическому кристаллу.

---

[1] Совместно с Б. К. Бруновским. Изв. АН СССР, сер. 7. Отд-ние физ.-матем наук. 1928, № 4—5, с. 367—374.



А. В. Шубников
(1960)

Для качественной проверки нашей гипотезы мы проделали большое количество опытов, к описанию которых мы теперь и перейдем.

Устройство прибора. В качестве прибора, с помощью которого мы могли констатировать предполагаемый пьезоэлектрический эффект, мы воспользовались обыкновенным четырехламповым усилителем, собранным по «*схеме с сопротивлениями*», причем сетка первой лампы была соединена непосредственно с маленькой проволочной антенной длиной около 50 *см* и оставалась *незаземленною*. Прибор во избежание дрожаний подвешивался на шнурах к кронштейнам, укрепленным на фундаментальной стене.

Производство опытов. После кропотливой работы по устранению влияния побочных обстоятельств, самым неожиданным образом внедряющихся в эксперимент и мешающих наблюдению основного явления, мы выбрали три следующие схемы работы.

1. По первой схеме диэлектрик неопределенной формы и размеров подвешивается на обыкновенной нитке на расстоянии 5—10 *см* от антенны. Экспериментатор, избегая во время опыта всяких лишних движений и прикосновений к окружающим проводникам, ударяет несколько раз по испытуемому диэлектрику куском того же диэлектрика (позже без особого риска получить неправильный результат мы производили удар латунной палочкой, изолирован-

ной от руки работника эбонитовой ручкой). Второй наблюдатель, находящийся в другой комнате, слушает в телефон, считая число ударов и оценивая их силу баллами. Опыт ставился обычно так, что наблюдатель заранее не знает ни вещества, взятого для опыта, ни числа ударов, которые предположено сделать. После достаточной практики нам удавалось не только однообразно для каждого вещества оценивать силу воспринятых в телефон звуков, но по характеру их даже отличать друг от друга типичные диэлектрики. Так, от пьезоэлектрических кристаллов, как сегнетовая соль и кварц, воспринимались в телефон звенящие звуки: от сегнетовой соли более сильные, чем от кварца, тальковый камень давал отрывистые очень сильные звуки, эбонит — менее сильные, стекло — слабые звуки. В целях устранения ошибок, возникающих вследствие того, что экспериментатор не может во всех случаях производить от руки одинаково сильные удары по диэлектрику и не может

Таблица 1

Перечень кристаллов в порядке их слышимости в телефон при ударе

1. Киноварь	29. Лейцит	57. Эпидот
2. Тальк	30. Bi-блеск	58. Десмин
3. Хлорит	31. Zn-обманка	59. Апатит
4. Жировик	32. Роговая обманка	60. Целестин
5. Селенит	33. Гранат.	61. Антимонит
6. Кварц	34. Хлоритоид	62. Блеклая руда
7. Доломит	35. Перовскит	63. Шпинель
8. Турмалин	36. Эшинит	64. Фосфорит
9. Сера	37. Белоречит	65. Обсидиан
10. Ретицид	38. Лейхтенбергит	66. Оникс мраморный
11. Бурый железняк	39. Везувиан	67. Силлиманит
12. Ni-колчедан	40. Красн. железняк	68. Ильменит
13. Лазурит	41. Велуит	69. Арсенопирит
14. Янтарь	42. Вивианит	70. Глауконит
15. Озокерит	43. Скаполит	71. Самарскит
16. Аметист	44. Крокоит	72. Рутил
17. Корунд	45. Мышьяк	73. Арагонит
18. Опал	46. Амаз. камень	74. Мо-блеск
19. Гельвин	47. Цинвальдит	75. Элеолит
20. Хризопраз	48. Хиастолит	76. Асбест
21. Хризоколла	49. Сидерит	77. Актинолит
22. Стронцианит	50. Магнезит	78. Манганит
23. Содалит	51. Марказит	79. Барит
24. Главколит	52. Диаспор	80. Антрацит
25. Ортит	53. Сфен	81. Церуссит
26. Лепидолит	54. Обсидиан коричн.	82. Диопсид
27. Лепидомелан	55. Лабрадор	83. Куприт
28. Шмальтин	56. Мрамор	84. Серн. колчедан

при этом держать строго постоянным расстояние между диэлектриком и антенной, мы изменили наш метод работы следующим образом.

2. По второй схеме антенну присоединили к будильнику, подвешенному на шелковых нитях к кронштейну, укрепленному на стене. Звонок будильника был заменен латунным суппортом, к которому могли привинчиваться небольшие (1,1 *см* в диаметре и 0,5 *см* высотой) круглые деревяшки. Приспособление было устроено таким образом, чтобы диэлектрик можно было подставить во всех случаях более или менее однообразно под удары молоточка будильника. Заведя последний, мы уходили в другую комнату и ждали момента, когда заработает молоточек. Далее, как и в предыдущем случае, мы старались оценить силу слышимых звуков баллами. При этом методе работы качество звуков различать было уже много труднее, чем в предыдущем, так как куски испытуемых веществ не могли свободно колебаться, будучи приклеенными к деревяшкам. Всего этим способом было исследовано нами 84 минерала и других веществ.

Результат, касающийся только минералов, представлен в таблице 1.

3. По третьему методу диэлектрик употреблялся в форме квадратной пластинки со стороной 15—20 *см*. Мы испытали три диэлектрика: эбонит, стекло и дерево, пропитанное сплавом канифоли и воска. Пластинки держали в руке вертикально на расстоянии около 10 *см* от антенны. Удар производился латунной палочкой с эбонитовой ручкой. Для каждого диэлектрика было сделано по четыре опыта согласно табл. 2, на которой представлены как условия опытов, так и их результаты.

Наибольшую разницу в интенсивности звуков получили мы для пропитанного дерева, потом для эбонита, стекло дало наиболее слабый эффект.

Обсуждение результатов опытов. Описанные опыты, особенно последние, вполне объясняются высказанной нами гипотезой. В самом деле, около незаземленной антенны мы имеем слабое электрическое поле, пронизывающее помещенные в него диэлектрики. Удар по ним приводит в колебание диполи, в результате чего возникают возмущения в электрическом поле, которые и воспринимаются в телефон.

В опытах с пластинками, если последняя ориентирована перпендикулярно к линиям сил поля сетки, мы имеем наилучшие условия для диэлектрической ее поляризации. При ударе в середину мы смещаем лишь незначительную часть диполей и звук получается слабый; наоборот, при ударе в ребро деформации подвергается почти вся пластинка и мы слышим сильный звук. При ориентировке вдоль линий сил в игру входит лишь небольшая часть электрического поля, поэтому при ударе по ребру или в середину пластинки звук в телефон получается слабый. Следующие добавочные опыты еще более убеждают нас в справедливости нашей гипо-

Таблица 2

Ориентировка пластинки	Характер удара	Результат опыта
Пластинка расположена в одной из плоскостей, проходящих через антенну	Удар по ребру пластинки	Слабый звук
	Удар в середину пластинки	Слабый звук
Пластинка повернута около вертикальной оси на 90° относительно предыдущего положения	Удар по ребру пластинки	Сильный звук
	Удар в середину пластинки	Слабый звук

тезы. Этими опытами мы имели в виду устранить возражения против нашей точки зрения, естественным образом возникающие в ходе самой работы.

Заземление сетки. Заземляя сетку первой лампы и присоединяя к ней колебательный контур, можно превратить наш прибор в обыкновенный ламповый приемник. С помощью такого приемника не удается воспринимать звуки не только от ударов по аморфным диэлектрикам (стекло, эбонит, сургуч и т. д.), но и от ударов по пьезоэлектрическим кристаллам (кварц, сегнетова соль). Между тем прибор вполне надежно воспринимал волны радиостанций и очень слабые разряды между проводниками самых разнообразных размеров, вплоть до проволочек в два-три миллиметра, заряженных трением. Отсюда следует, что при ударе или совсем не возникает электромагнитных волн или волны эти настолько слабы, что их не приходится принимать во внимание и во всех других опытах. Таким образом, наличие поля сетки является необходимым условием удачи опыта.

Роль прикосновений и ударов. При работе следует учитывать следующее обстоятельство. Если вблизи от нашего прибора с незаземленной сеткой находится массивный проводник, например металлический штатив, то при прикосновении к нему другим проводником, не соединенным с первым металлически, в телефоне слышим ясный отрывистый звук, соответствующий резкому перераспределению линий сил поля, связанному с выравниванием потенциалов проводников. Таких звуков мы не слышим при размыкании проводников, ибо в этом случае нет выравнивания потенциалов и резкого перераспределения линий сил. Не слышим мы звуков также, если оба проводника соединены медной проволокой не только при их соприкосновении, но и при ударе одного проводника о другой. Вообще удар как таковой может быть воспринят в телефон лишь в том случае, если он приводит в механическое сотрясе-

ние сетки ламп. В этом случае мы слышим характерный музыкальный тон, легко отличимый от всех тех звуков, которые возникают при ударе по диэлектрикам. Как сказано выше, мы устранили звуки, возникающие от удара как такового, подвешиванием прибора на нитях. При прикосновении изолированного проводника к диэлектрику никаких звуков не получается. Итак, звуки при ударе о диэлектрики невозможно объяснить перераспределением линий сил от прикосновений и механическими сотрясениями сеток ламп.

Роль поверхностных зарядов. Если диэлектрик находится в электрическом поле, то на стороне, обращенной навстречу полю, и на противоположной ей стороне возникают поверхностные заряды. Можно было бы думать, что изучаемое нами явление сводится к влиянию на поле сетки колебаний этих поверхностных зарядов или случайных зарядов, которые всегда присутствуют на диэлектриках, а не самой поляризации во всей толще диэлектриков. При ближайшем рассмотрении объяснение это не выдерживает критики. Действительно, если бы поверхностные заряды играли здесь какую-либо роль, тогда мы должны были бы получить эффект при соударении двух проводников, соединенных металлически, между тем, как мы видели, этого не бывает.

Что касается случайных свободных зарядов, то говорить о них в случае, например, талькового камня или тающего льда едва ли можно, ибо оба эти вещества являются достаточно плохими изоляторами. Между тем опыт удается с обоими веществами. Кроме того, просматривая список испытанных нами минералов, мы не найдем никакого соотношения между их изоляционными свойствами и силой полученных от них звуков.

Роль разрядов. Известно, что при трении разнородных тел друг о друга на их поверхностях возникают разряды разного знака. При разнимании этих тел могут возникнуть разряды. Не эти ли разряды слышим мы в телефон при ударе о диэлектрики?

Что разряды, даже очень слабые, можно улавливать в телефон нашего прибора, в этом нет никаких сомнений. Так, если капнуть ртуть на желобок, изготовленный из дерева, покрытого слоем замазки из канифоли и воска, заставляя далее капельки катиться в другой стеклянный сосуд со ртутью, то замечаем следующее. При ударе капельки о желобок никаких звуков в телефон не слышно; ничего не слышно также при движении капельки по желобку и при отрывании ее от желобка; только в момент слияния капельки с налитой в стакан ртутью в телефон слышен звук, отвечающий разряду, происходящему между заряженной капелькой и незаряженной ртутью, находящейся в сосуде. Все это говорит за то, что при ударе металлической палочкой по диэлектрику и отскакивании ее никаких разрядов, могущих быть воспринятыми в телефон, не возникает. Ничего не слышно бывает в телефон также при натирании эбонитовой палочки сукном.

Из изложенного следует, что электризация и разряды при трении не играют никакой роли в изучаемом нами явлении. За это же говорит также и то, что при самом энергичном трении друг о друга двух неровных кусков полевого шпата или кварца звуки, воспринимаемые в телефон, оказываются много слабее, чем при ударах этих тел друг о друга. Между тем, если бы электризация при трении здесь могла бы играть какую-либо роль, дело должно было бы обстоять как раз наоборот. Здесь следует к тому же упомянуть, что сам факт электризации при трении двух одинаковых тел друг о друга можно вообще оспаривать.

Выводы. Итак, из всего изложенного можно сделать следующие выводы.

1. Всякий диэлектрик, помещенный в электрическое поле, вследствие ориентировки его молекул или иных структурных единиц становится пьезоэлектрическим в большей или меньшей мере.

2. При ударе диэлектрик приходит в колебания, т. е. периодически сжимается и растягивается. Как следствие этих деформаций, внутри него возникает добавочное электрическое поле, меняющее свое направление вместе с колебаниями.

3. Это добавочное поле периодически усиливает или ослабляет электрическое поле, в которое предварительно был помещен диэлектрик.

4. Для качественного наблюдения этих пьезоэлектрических колебаний может служить обыкновенный ламповый усилитель с незаземленной сеткой первой лампы, если испытуемый диэлектрик поместить по одному из трех описанных способов вблизи от сетки первой лампы.

Ленинград
Минералогический музей АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *I. Curie, P. Curie.* C. r. Acad. Sci., 1880, **91**, 294.
2. *B. Brewster.* Phil. Trans. Roy. Soc., 1815, 1; 1816, 46, 156; 1830, 87.
3. *J. Kerr.* Phil. Mag., 1875, ser. 4, **50**, 337, 446.
4. *M. Faraday.* Phil. Trans. Roy. Soc., 1845, 1.

СИММЕТРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЛУЧА[1]

Изображение луча двумя синусоидами. Поляризованный электромагнитный луч, вернее, мгновенное состояние электромагнитных колебаний, распространяющихся вдоль прямой, обыкновенно изображают двумя синусоидами, расположенными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 1). Максимумы обеих синусоид отвечают одним и тем же точкам прямой. Одна синусоида изображает напряжение E электрического поля в каждой точке луча, другая служит для изображения напряжения магнитного поля M в соответственных точках луча. Синусоиды располагают в двух взаимно перпендикулярных плоскостях потому, что оба поля для луча, проходящего по изотропной среде, друг другу перпендикулярны.

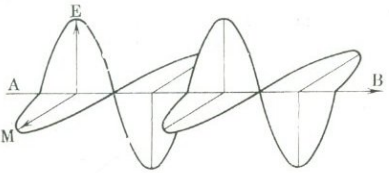


Рис. 1. Обыкновенная модель поляризованного электромагнитного луча

E — электрическое поле, M — магнитное поле, AB — направление вектора Пойнтинга (направление распространения электромагнитной энергии)

Правило Пойнтинга. Для того чтобы составить себе представление о поляризованном луче во времени, следует изобразить обе синусоиды движущимися со скоростью света вдоль прямой по направлению от A к B, определяемому правилом левой руки, иначе называемым правилом Пойнтинга: если указательный палец левой руки расположить по направлению магнитного поля, а средний — вдоль электрического поля, то большой палец укажет направление луча.

Симметрия диаграммы луча. Непосредственное рассмотрение мгновенной диаграммы поляризованного электромагнитного луча показывает присутствие в ней одной двойной винтовой оси, совпадающей с прямой AB. Кроме этого элемента симметрии, диаграмма содержит бесконечное множество центров симметрии C, совпадающих с точками пересечения синусоид, и бесконечное множество поперечных плоскостей симметрии m, проходящих через соответственные максимумы электрической и магнитной синусоид. Обе плоскости, в которых расположены синусоиды, являются плоскостями скользящего отражения. Очевидно, что диаграмма содержит в себе еще и ось переносов, совпадающую по направлению с винтовой осью. Так как обе синусоиды физически различны, то нельзя говорить о наличии в диаграмме продольных плоскостей симметрии, делящих двугранный угол плоскостей синусоид пополам. Расположение главнейших элементов симметрии диаграммы показано на рис. 2.

[1] Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР, 1939, вып. 1, с. 31—34.

Вопрос о полярности диаграммы луча. Наличие центров и поперечных плоскостей симметрии в диаграмме луча свидетельствует о зеркальном равенстве направлений $\overrightarrow{AB}$ и $\overleftarrow{AB}$. Это означает, что $\overrightarrow{AB}$ должно отличаться от $\overleftarrow{AB}$ не больше, чем правая рука отличается от левой. Зеркальное равенство обоих направлений может быть констатировано, например, если мы представим себе человека, идущего по плоскости магнитных векторов вдоль луча. Тогда при движении от A к B электрическое поле E будет направлено



Рис. 2. Главнейшие элементы симметрии предыдущей модели

m — плоскости симметрии, с — центры симметрии. Прямая, перпендикулярная к плоскостям симметрии, есть двойная винтовая ось

вверх или вниз всякий раз, когда магнитное поле M направлено соответственно вправо или влево. Иначе будет обстоять дело при движении от B к A. В этом случае направлению электрического поля вверх и вниз будет отвечать направление магнитного поля влево и вправо. Итак, оба направления прямой AB энантиоморфны друг другу, и потому сама прямая неполярна. Между тем природный поляризованный луч, проходящий через «пустоту», полярен.

Необоснованность правила Пойнтинга. Из рассмотрения диаграммы мгновенного состояния поляризованного луча невозможно сделать вывод о необходимости, или хотя бы возможности, движения синусоид в одном из направлений прямой AB. Наоборот, наличие поперечных плоскостей симметрии в диаграмме свидетельствует скорее о ее полной неподвижности. Правило Пойнтинга, таким образом, не вытекает из существа самой диаграммы, а добавляется к ней совершенно искусственно. Если бы это было не так, как мы утверждаем, то законно было бы предположение о возможности существования какой-то иной среды («пустоты»), для которой было бы справедливо аналогичное правилу Пойнтинга правило правой руки, причем количественная сторона теории всех электромагнитных явлений в этой среде оставалась бы такой же, какой мы ее знаем для нашего мира. Правило Пойнтинга выведено из опыта, но не из электромагнитной теории [1].

Более рациональная диаграмма поляризованного луча. Для построения более рациональной модели поляризованного луча совершенно достаточно знать, что магнитное поле аксиально и что поэтому изображать его целесообразно не прямолинейными стрелками, как это сделано в описанной диаграмме, а отрезками прямой с обтекающими их стрелками (рис. 3). Лишая магнитное поле полярности, неправильно приписываемой ему, мы вынуждены заменить в старой диаграмме поляризованного луча магнитную синусоиду двумя синусоидами, расположенными симметрично по от-



Рис. 3. Изображение магнитных силовых линий отрезками прямой с обтекающими стрелками

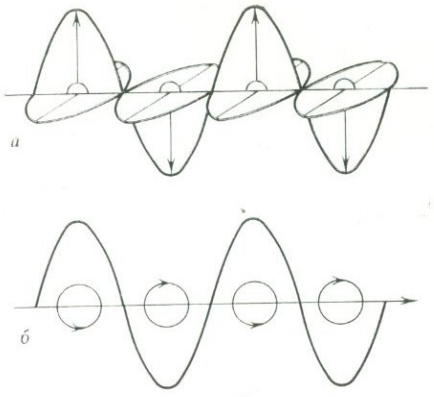


Рис. 4. Вторая модель поляризованного луча в перспективе (*а*) и в проекции на плоскость электрической синусоиды (*б*)

ношению к плоскости электрической синусоиды, после чего диаграмма поляризованного луча примет желаемый вид (рис. 4).

Симметрия новой диаграммы. Новая диаграмма обладает уже иной симметрией, как увидим ниже, и совпадает с симметрией реального поляризованного луча. Полярность прямой ясно выступает из расположения круговых стрелок и выражается в том, что все стрелки, расположенные вне (или внутри) полей, ограниченных прямой и синусоидой, смотрят в одну сторону. Диаграмма содержит плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью электрической синусоиды. Плоскость магнитной синусоиды совмещена с плоскостью скользящего отражения. Линия пересечения обеих плоскостей есть двойная полярная винтовая ось и одновременно ось переносов. Принимая во внимание, что плоскость скользящего отражения макроскопически воспринимается как обыкновенная плоскость симметрии, нетрудно придти к заключению, что симметрия нашей новой диаграммы совпадает с симметрией реально поляризованного луча. Полярностью винтовой оси обусловливаются однозначность направления вектора Пойнтинга и принципиальная невозможность существования иной среды, в которой все электромагнитные явления протекали бы с количественной стороны так же, как в существующей пустоте, и которая отличалась бы от пустоты только тем, что для этой среды было бы справедливо правило правой руки вместо правила левой руки. Здесь следует подчеркнуть, что симметрией диаграммы обусловливается не сам выбор направления вектора Пойнтинга, а устанавливается только разница между направлением вектора Пойнтинга и противоположным направлением. Действительное направление вектора Пойнтинга, очевидно, можно вывести из электромагнитной теории при правильном понимании симметрии явления.

Поперечны ли колебания в электромагнитном луче? *Третья модель луча.* Обе рассмотренные диаграммы поляризованного луча указывают на поперечность направлений электрического и маг-



Рис. 5. Третья модель поляризованного луча

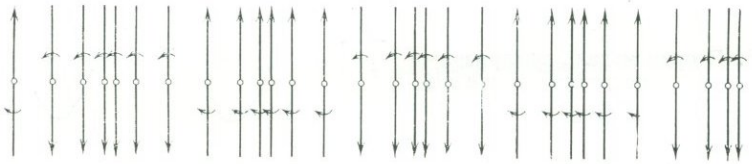


Рис. 6. Четвертая, наиболее рациональная, модель поляризованного луча
Электрические линии изображены вертикальными стрелками, магнитные линии — кружочками с обтекающими стрелками

нитного полей по отношению к направлению луча, но ничего не говорят о характере самих колебаний, так как одинаковыми синусоидами могут быть изображены лучи как с продольными, так и с поперечными колебаниями. Нам приходится останавливаться на этом совершенно ясном положении потому, что за время господствования эфирно-волновой теории света у многих ученых, принявших электромагнитную теорию, но специально не занимавшихся ею, сохранилось мнение о поперечном характере колебаний в лучах света. Укреплению этого ложного мнения, несомненно, способствовала разобранная нами диаграмма поляризованного луча, в которой поперечность расположения полей при поверхностном подходе легко может быть принята за поперечность колебаний. Наша новая модель луча, очевидно, страдает тем же недостатком. Вот почему нам кажется желательным разобрать здесь, с точки зрения симметрии, и третью, уже известную, но почему-то мало популярную модель луча, которой, между прочим, пользовался и А. Эйхенвальд для интерпретации явлений отражения и преломления света [2].

Согласно этой модели электрические и силовые магнитные линии, конечно, располагаются тоже перпендикулярно к лучу, но густота этих линий изменяется вдоль луча по закону синуса, причем наибольшей густоте электрических линий отвечает и наибольшая густота перпендикулярных им магнитных линий. Располагая электрические линии в плоскости чертежа, а магнитные — перпендикулярно к чертежу и применяя обычный способ изображения силовых линий стрелками, получим третью известную модель луча, изображенную на рис. 5. В ней магнитные линии, направленные от наблюдателя, показаны черными кружочками; обратно идущие

линии изображены белыми кружочками. Эта модель со всей определенностью указывает нам на то, что в электромагнитных лучах колебания продольны, и вполне объясняет отрицательный результат поисков еще каких-то особых лучей света с продольными колебаниями, кроме лучей, хорошо известных.

Четвертая модель луча. Обладая известными преимуществами в сравнении с первой моделью, третья модель в отношении своей симметрии (см. рис. 2) повторяет все недостатки первой, как в этом легко убедиться из рассмотрения рис. 5. Заменяя в третьей модели прямолинейные стрелки магнитных линий прямыми с круговыми стрелками (см. рис. 3), приходим к четвертой и последней модели, соединяющей в себе достоинства второй и третьей (рис. 6). Новая модель наглядно иллюстрирует истинную симметрию поляризованного луча, его полярность (законность существования вектора Пойнтинга) и продольный характер колебаний в луче.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Ф. Миткевич.* Физические основы электротехники. М. — Л., Госиздат, 1928. 464 с.
2. *А. Эйхенвальд.* Электричество. Ч. I. М., Госиздат, 1932. 636 с.

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В ДВОЙНИКАХ КВАРЦА[1]

Кварц обыкновенно встречается в природе в форме двойников. При отборе сырья для производства пьезокварцевых пластинок чаще всего приходится иметь дело с дофинейскими и бразильскими двойниками.

Дофинейский двойник представляет собой сросток двух правых или двух левых кристаллов, в котором решетка одного кристалла повернута относительно решетки другого на угол в 180° вокруг оптической оси. Граница раздела обоих компонентов представляет собою обычно совершенно неправильную поверхность. Вследствие того, что в дофинейском двойнике оптические оси обоих сросшихся кристаллов параллельны друг другу, двойник этот в отношении оптических свойств не отличается от монокристалла кварца. Иначе обстоит дело с пьезоэлектрическими свойствами. В дофинейском двойнике электрические оси обоих кристаллов имеют прямо противоположные направления; поэтому принято считать, что электрическая поляризация, возникшая под влиянием механических напряжений в одном из сросшихся кристаллов, должна частично или полностью компенсироваться поляризацией обратного направления в другом кристалле. При таких обстоятельствах не-

[1] Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1949, вып. 5, с. 117—122.

посредственное использование двойников, т. е. изготовление пьезопластинок из двойников как таковых, без предварительного выделения из них монокристальных областей кварца, естественно, представляется невозможным.

Бразильский двойник — сросток правого кварца с левым. Двойниковый шов проходит по рациональным плоскостям. В бразильском двойнике, как и в дофинейском, оптические оси обоих компонентов параллельны, а электрические оси — антипараллельны. Так как оба кристалла в бразильском двойнике отличаются друг от друга знаком вращения плоскости поляризации, то двойник этот легко обнаруживается оптически. Что касается пьезоэлектрических свойств бразильского двойника, то о них можно повторить то же, что было сказано выше применительно к дофинейским двойникам.

Часто в одном и том же куске кварца можно наблюдать одновременно дофинейские и бразильские двойники. В этом случае не исключена возможность такого сочетания компонентов двойника, при котором в непосредственном соприкосновении оказываются решетки правого и левого кварца с прямо параллельным расположением электрических осей. Это сочетание кристаллов названо нами двойником Лейдольта — по имени автора, впервые наблюдавшего такие сочетания. Обычно принимают, что двойники Лейдольта по пьезоэлектрическим свойствам не должны отличаться от монокристаллов. По оптическим свойствам двойник Лейдольта, конечно, не может быть отличен от бразильского двойника.

Указанные соотношения между монокристаллом (*м*), дофинейским двойником (*д*), бразильским двойником (*б*) и двойником Лейдольта (*л*) могут быть представлены схемой

Оптические свойства $м = д \neq б = л$ Пьезоэлектрические свойства $м = л \neq б = д$

Более детальное рассмотрение вопроса, к которому мы сейчас и переходим, приводит к заключению, что эти, казалось бы, очевидные соотношения нуждаются в существенной поправке.

Известно, что пьезоэлектрические свойства монокристалла кварца могут быть описаны по Фохту [1] тензором

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	d_{11}	d_{12}	0	d_{14}	0	0
I_2	0	0	0	0	d_{25}	d_{26}
I_3	0	0	0	0	0	0,

(1)

где $d_{12} = -d_{11}$, $d_{25} = -d_{14}$, $d_{26} = -2d_{11}$, I_1, I_2, I_3 — компоненты поляризации, возникающей под действием нормальных напряжений t_{11}, t_{22}, t_{33}, действующих вдоль осей X_1, X_2, X_3, и касательных напряжений t_{23}, t_{31}, t_{12}, действующих вокруг тех же осей. За оси X_1, X_2, X_3 приняты соответственно электрическая, механическая и оптическая оси кварца (2).

Предположим, что дофинейский двойник подвергается действию механического напряжения и что нас интересует суммарный пьезоэлектрический эффект, который при этом получается в двойнике. Если пьезоэлектрический эффект одного кристалла двойника будем описывать с помощью указанного тензора, то пьезоэлектрический эффект другого кристалла, возникающий одновременно, необходимо описывать уже другим тензором — тем тензором, который получается из первого поворотом системы координат вокруг оптической оси X_3 на угол в 180°. Новый тензор будет иметь вид

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	$-d_{11}$	$-d_{12}$	0	d_{14}	0	0
I_2	0	0	0	0	d_{25}	$-d_{26}$
I_3	0	0	0	0	0	0.

(2)

Мы видим, что оба тензора отличаются друг от друга знаками модулей d_{11}, d_{12}, d_{26}, но не отличаются между собой ни величиной, ни знаками модулей d_{14} и d_{25}. В переводе на язык физики это означает следующее.

1. Нормальные (растягивающие или сжимающие) напряжения t_{11}, t_{22}, действующие вдоль электрической и механической осей, вызывают в обоих кристаллах дофинейского двойника одинаковую по абсолютной величине, но обратную по знаку поляризацию. Иначе говоря, пьезоэффекты в обоих кристаллах будут компенсировать друг друга. В общем случае, при неодинаковой величине срастающихся кристаллов эта компенсация будет частичной.

2. Пьезоэффекты, вызванные в обоих кристаллах касательным (сдвиговым, скалывающим) напряжением t_{12}, действующим вокруг оптической оси, также будут частично компенсировать друг друга. Касательные напряжения t_{23} и t_{31}, действующие вокруг электрической оси X_1 и механической оси X_2, наоборот, всегда будут вызывать в обоих кристаллах пьезоэффекты, складывающиеся арифметически. Дофинейский двойник не будет в этом случае отличаться от монокристалла, имеющего одинаковый с двойником размер. Такова первая поправка, которую нужно внести в ранее приведенную схему.

Переходим к бразильским двойникам. В бразильском двойнике решетка одного компонента преобразуется в решетку другого отражением в плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью X_2X_3. Если пьезоэлектрические свойства одного кристалла двойника опять описывать тензором (1), то для второго кристалла того же двойника придется взять новый тензор, получаемый из первого отражением в плоскости X_2X_3. Новый тензор будет иметь следующий вид:

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	$-d_{11}$	$-d_{12}$	0	$-d_{14}$	0	0
I_2	0	0	0	0	$-d_{25}$	$-d_{26}$
I_3	0	0	0	0	0	0.

(3)

Как видим, этот тензор отличается от тензора (1) только знаками модулей d_{ik}. Отсюда следует, что любое механическое напряжение должно всегда вызывать в обоих кристаллах двойника поляризацию противоположного направления. Бразильский двойник в отношении пьезоэлектрических явлений всегда будет проявлять себя как двойник.

В двойнике Лейдольта тензор второго кристалла будет иметь форму

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	d_{11}	d_{12}	0	$-d_{14}$	0	0
I_2	0	0	0	0	$-d_{25}$	d_{26}
I_3	0	0	0	0	0	0.

(4)

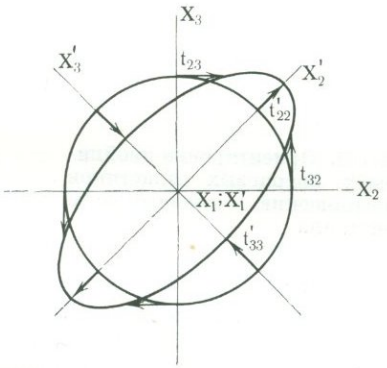
Этот тензор отличается от тензора (1) только знаками модулей d_{14} и d_{25}. Это означает, что двойник Лейдольта не должен отличаться от монокристалла в тех случаях, когда двойник подвергается нормальным напряжениям t_{11} и t_{22}, действующим вдоль электрической и механической осей, а также когда он подвержен действию касательного напряжения t_{12} вокруг оптической оси. Этот двойник будет себя вести, однако, как двойник, если он будет подвергаться касательным напряжениям t_{23} и t_{31}. Иначе говоря, двойник Лейдольта является полной противоположностью дофинейского двойника.

На основании изложенного приведенная выше схема, иллюстрирующая оптические и пьезоэлектрические свойства двойников, должна быть исправлена так:

Оптические свойства	Пьезоэлектричество, обусловленное напряжениями	Пьезоэлектричество, обусловленное напряжениями
	t_{11}, t_{22}, t_{12}	t_{23}, t_{31}
$м = д \neq б = л$	$м = л \neq д = б$	$м = д \neq б = л$

В этой табличке обращает на себя внимание то, что соотношения, записанные в первом столбце, оказались тождественными соотношениям, записанным в третьем столбце, тогда как соотношения, помещенные во втором столбце, в таблице не повторены. Указанное обстоятельство заставляет нас, с одной стороны, искать более близкую аналогию между пьезоэлектрическими и оптическими явлениями в кварце и кристаллах вообще, а с другой стороны, искать достаточные основания для разложения оптических явлений на те же категории, на которые естественным образом разложились у нас пьезоэлектрические явления. Этим вопросом следовало бы заняться особо; здесь же нам хотелось сделать некоторые практические выводы, имеющие отношение к изготовлению пьезоэлектрических пластинок.

Так как двойники Лейдольта в чистом виде встречаются редко, то соотношение $м = л$, приведенное в среднем столбце нашей таблицы, практически для изготовления пьезоэлементов использовано быть не может. Об использовании бразильских двойников для той же цели по указанным выше причинам не может быть и речи. Иначе обстоит дело с соотношением $м = д$, приведенным в третьем столбце таблицы. Оно указывает на возможность использования широко распространенных дофинейских двойников в тех случаях, когда



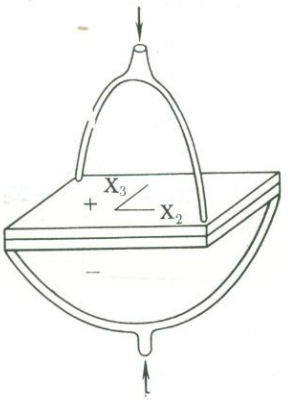


Рис. 1. Чистое скалывающее напряжение $t_{23} = t_{32}$, осуществляемое с помощью нормальных напряжений t'_{32} и t'_{33}

Рис. 2. Практическое осуществление касательного напряжения $t_{23} = t_{32}$ в биморфной кварцевой пластинке

в качестве возбудителя поляризации применяется касательное напряжение $t_{23} = t_{32}$ или $t_{31} = t_{13}$.

Рассмотрим сначала напряжение $t_{23} = t_{32}$, отнесенное к главным осям X_1, X_2, X_3 кварца. Это касательное напряжение, как известно, в чистом виде, т. е. без сопутствующих нормальных напряжений, действующих вдоль указанных осей, может быть осуществлено с помощью одновременно действующих нормальных напряжений t'_{22} и t'_{33}, отнесенных к новым осям X'_1, X'_2, X'_3, которые получаются из старых осей поворотом системы координат на угол 45° вокруг оси X_1 (рис. 1). Чистое касательное напряжение $t_{23} = t_{32}$ должно деформировать окружность, мысленно проведенную в изотропной среде в плоскости X_2X_3 в эллипс, как показано на рисунке.

На практике касательное напряжение $t_{23} = t_{32}$ может быть реализовано, хотя и не совсем в чистом виде, путем двойного изгиба по углам (рис. 2) биморфного кварцевого элемента, склеенного из двух двойниковых кварцевых пластинок, ориентированных по отношению к главным осям, как указано на рис. 3, и повернутых

относительно друг друга на угол 90° вокруг электрической оси X_1. При указанном на рис. 2 способе механического воздействия на биморфный элемент напряжение t_{23} отрицательно, а так как пьезоэлектрический модуль d_{14} для кварца тоже отрицателен, то компонента поляризации I_1, равная произведению этих величин, как это видно из тензоров (1) и (2), должна быть положительна $I_1 = d_{14} \cdot t_{23} > 0$.

Это означает, что верхняя грань нашего биморфного элемента в указанных условиях будет заряжаться положительно.

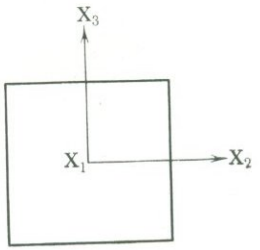


Рис. 3. Ориентировка двойниковых кварцевых пластинок по отношению к главным осям кристалла

Аналогично решается вопрос и относительно биморфных элементов, работающих под действием касательного напряжения $t_{31} = t_{13}$. Такие элементы могут быть изготовлены из пластинок двойникового по дофинейскому закону кварца, вырезанных основными гранями перпендикулярно к механической оси кварца и боковыми гранями — параллельно осям X_1 и X_3. Как и в ранее описанном биморфном элементе, пластинки склеиваются между собой в скрещенном по отношению к осям X_1 и X_3 положении и возбуждаются противоположными изгибами элемента по углам.

Выводы. Известно, что дофинейские двойники кварца не отличаются от монокристаллов в отношении оптических свойств. Это следует из того, что оптические оси обоих компонентов двойника расположены параллельно друг другу и знаки вращения плоскости поляризации обоих компонентов одинаковы. В отношении пьезоэлектрических явлений обычно предполагают, что их вообще не может быть в дофинейских двойниках в идеальном случае (50-процентный двойник), так как электрические оси в обоих компонентах антипараллельны друг другу, вследствие чего возникшая под влиянием механического напряжения электрическая поляризация одного компонента должна компенсироваться обратной электрической поляризацией другого компонента. Детальное рассмотрение этого вопроса показывает, однако, что взаимная компенсация обеих поляризаций будет происходить только в тех случаях, когда пьезоэлектрический эффект вызывается нормальными напряжениями вдоль электрической и механической осей кварца; в тех же случаях, когда используются касательные напряжения вокруг этих осей, пьезоэлектрические явления в дофинейских двойниках не должны отличаться от соответствующих явлений в

монокристаллах. Это можно показать, в частности, на биморфных пьезоэлементах, которые могут быть изготовлены склеиванием двух двойниковых пластинок, вырезанных нормально к электрической оси кристалла и повернутых относительно друг друга на 90° вокруг электрической оси.

Институт кристаллографии АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Voigt.* Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig — Berlin, Teubner, 1928. 964 S.
2. *А. В. Шубников, Е. Е. Флинт, Г. Б. Бокий.* Основы кристаллографии. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1940. 486 с.

МОЖЕТ ЛИ КРИСТАЛЛ ОДНОВРЕМЕННО БЫТЬ ИЗОТРОПНЫМ И АНИЗОТРОПНЫМ?[1]

Лица, впервые знакомящиеся с физической кристаллографией, а иногда и квалифицированные кристаллографы, часто не могут понять, каким образом один и тот же кристалл может быть одновременно анизотропным и прерывным в отношении одних свойств, и изотропным и непрерывным в отношении других свойств, иметь симметрию куба в отношении одних свойств и симметрию шара в отношении других свойств. То, что, например, кристаллы каменной соли имеют по всем направлениям одинаковые показатели преломления, одинаковую электропроводность, одинаковую диэлектрическую проницаемость и т. д., эти лица склонны объяснять либо несовершенством техники измерения, либо тем, что до сих пор мы имели дело лишь с такими кристаллами, в которых названные величины незначительно изменяются с изменением направления. При этом указывают, что, например, поверхность модулей упругости кристаллов кубической системы не является шаром и имеет симметрию куба, что раньше поверхность величины намагниченности кристаллов кубической системы считалась шаром, а теперь оказалось, что для ферромагнитных кристаллов она не шар, а поверхность, имеющая симметрию куба и т. д.

В этой заметке мы хотим показать, что, несмотря на некоторую резонность указанных и подобных им сомнений, сосуществование в одном и том же кристалле таких, казалось бы, противоречивых и исключающих друг друга свойств, как прерывность и непрерыв-

[1] Успехи физ. наук, 1951, т. 44, вып. 1, с. 3—6.

ность, изотропия и анизотропия и т. д., является логически необходимым.

Пусть, для примера, мы имеем какой-либо кусок идеально построенного кристалла каменной соли (рис. 1). Как и всякий другой кристалл, наш кристалл имеет решетчатое строение, обладает свойствами анизотропии и причисляется к одному из 32 кристаллографических классов симметрии, в данном случае — к классу $\overline{6}/4$.

Выделим мысленно из нашего кристалла по его плоскостям

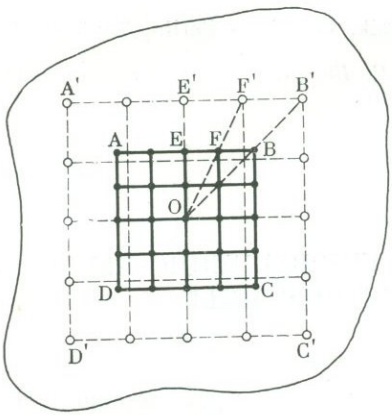


Рис. 1

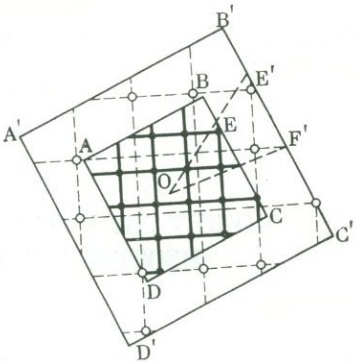


Рис. 2

спайности участок в форме куба $ABCD$ и посмотрим, что с ним произойдет при термическом расширении, т. е. при равномерном нагревании кристалла, не вызывающем фазовых превращений. Очевидно, что куб $ABCD$ должен при этом преобразоваться в куб $A'B'C'D'$ несколько большего размера. Никакого искривления граней куба при этом в идеальном кристалле произойти не может, так как иначе он потерял бы свое решетчатое строение, т. е. в точном соответствии с общепринятым определением понятия «кристалл» перестал бы быть кристаллом. Нельзя допустить, чтобы кристалл каменной соли имел строго решетчатое строение только при какой-то одной температуре и изменял его при нагревании и охлаждении.

Приняв это, определим, чему должен быть равен коэффициент расширения кристалла по разным его направлениям. Из чертежа видно, что в направлении OE линейный коэффициент теплового расширения α равен $EE'/(OE \cdot \Delta t)$, где Δt — разность температур: окончательной и первоначальной. Это следует из того, что при нагревании точка E переходит в точку E' и вектор OE — в вектор OE'. По той же причине коэффициент расширения в направлении OF должен быть равен $FF'/(OF \cdot \Delta t)$, а в направлении OB он дол-

жен быть равен $BB'/(OB \cdot \Delta t)$. Из подобия треугольников OEF и $OE'F'$ и треугольников OEB и $OE'B'$ следует, что $EE'/OE = FF'/OF = BB'/OB$. Это означает, что коэффициенты расширения нашего идеального кристалла по всем направлениям точно равны друг другу. Это означает также, что поверхность коэффициентов расширения, т. е. геометрическое место концов радиусов-векторов, по величине и направлению равных коэффициентам расширения, есть идеально построенная сфера.

В нашем чертеже за начало координат была взята точка, совпадающая с узлом решетки, и за направления, по которым определялся коэффициент расширения, были взяты рациональные кристаллографические направления. Нетрудно видеть, что эти условия не являются необходимыми. Чтобы показать это, повторим наше рассуждение для куба $ABCD$, ориентированного в кристаллической решетке совершенно произвольно (рис. 2). Такой куб в результате теплового расширения, как и раньше, должен преобразоваться в куб $A'B'C'D'$ несколько большего размера. При этом все ряды узлов первого куба должны без искривления переходить в ряды узлов второго куба и грани первого куба, в общем случае иррациональные, переходить без искривления в соответственные грани второго куба. Последнее замечание следует понимать так. Если иррациональная грань BC проходит через точки E, F, не являющиеся узлами решетки, то грань $B'C'$ должна проходить через аналогично расположенные в ней точки E', F'. При тепловом расширении точка E переходит в E', точка F переходит в F' и вообще каждая точка на поверхности первоначального куба переходит в соответственную точку на поверхности второго куба. Из подобия треугольников OEF и $OE'F'$ следует, однако, что $EE'/OE = FF'/OF$, а это по предыдущему означает, что коэффициенты расширения по всем направлениям и на этот раз оказываются равными между собой. Это означает также, что и в этом случае поверхность коэффициентов расширения есть сфера и притом та же самая сфера, хотя центром ее служит теперь точка, не совпадающая с узлом решетки.

Из изложенного следует, что идеальный кристалл каменной соли и все вообще кристаллы кубической системы, будучи явным образом анизотропными в отношении ряда свойств (упругость, прочность и т. д.), являются изотропными в отношении термического расширения.

Так как при описании явления термического расширения любая точка кристаллической решетки (узловая или не узловая) может считаться центром сферической поверхности коэффициентов расширения, т. е. все точки решетки являются равноценными и не различимыми друг от друга, то все кристаллы могут и должны рассматриваться в отношении указанного явления как среды однородной непрерывной структуры. Все кристаллы кубической системы в отношении теплового расширения имеют симметрию шара $\infty/\infty \cdot m$.

Аналогично можно доказать, что поверхность коэффициентов теплового расширения кристаллов гексагональной и тетрагональной систем имеет круговое сечение по плоскости, нормальной к главной оси кристаллов.

Изложенное лишний раз показывает, что симметрия и диссимметрия, изотропия и анизотропия, прерывность и непрерывность кристаллов суть свойства относительные. Не существует симметрии кристаллов вообще, а существует симметрия кристаллов в отношении тех или иных его свойств; не существует анизотропии кристаллов вообще, а существует анизотропия кристаллов в отношении некоторых его свойств; не существует прерывного (решетчатого) строения кристаллов вообще, а существует прерывное строение в отношении определенных его свойств.

О СВЯЗИ МЕЖДУ МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ ДИССИММЕТРИЕЙ НЕКОТОРЫХ КРИСТАЛЛОВ[1]

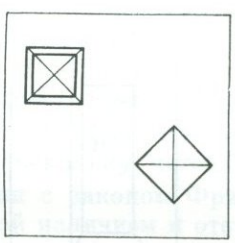
В 1886 г. Браунс [1] изучал фигуры травления кристаллов NaCl и KCl. Опыт показал, что на гранях куба этих кристаллов при травлении их водой обычно получаются фигуры в форме квадратно-пирамидальных ямок с ребрами основания, параллельными либо ребрам грани куба, либо ее диагоналям (рис. 1). Такие фигуры могут быть образованы гранями только ромбододекаэдра {110}, пирамидального куба {*Okl*} и тетрагонтриоктаэдра {*hhl*}. Известно, что эти простые формы свойственны только классу $\bar{6}/4$ сорокавосьмигранника и классу *3/4* пентагон-триоктаэдра, откуда следует, что кристаллы NaCl и KCl порознь или вместе должны принадлежать к одному из указанных классов.

Более детальное исследование показало, что на кристаллах KCl можно получить также и косо расположенные фигуры травления (рис. 2). Квадратный контур их повернут относительно ребер куба на 14—15° вправо, а их углубление образовано гранями пентагон-триоктаэдра. На кристаллах NaCl косые фигуры травления не получаются. Отсюда был сделан вывод, что кристаллы NaCl принадлежат к классу $\bar{6}/4$, а кристаллы KCl — к классу *3/4*. Еще раньше Браунса Чермак [2] открыл косые фигуры на кристаллах NH_4Cl. Естественно, что эти кристаллы тоже были отнесены к классу *3/4*.

---

[1] Совместно с В. С. Подиско. Труды Ин-та кристаллогр., 1955, вып. 11, с. 212—220.

В этом результате обращали на себя внимание следующие три обстоятельства. Во-первых, казалось странным и непонятным то, что такие близкие по своей химической природе вещества, как KCl и NaCl, оказались принадлежащими к разным классам. Во-вторых, удивительно, что все кристаллы KCl и NH_4Cl принадлежат только к одной из двух возможных энантиоморфных модификаций, которую условно назовем правой, поскольку из косо расположенных фигур травления на этих кристаллах образуются только по-



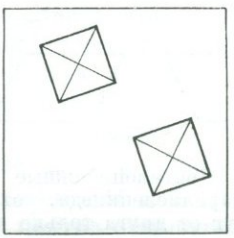


Рис. 1. «Прямые» фигуры травления на гранях куба кристаллов NaCl, KCl, NH_4Cl и т. д.

Рис. 2. «Косые» фигуры травления на гранях куба кристаллов KCl и NH_4Cl

вернутые вправо. В-третьих, оказалось, что ни кристаллы KCl, ни кристаллы NH_4Cl не обладают способностью вращения плоскости поляризации.

Шпрокхоф [3] обнаружил косо расположенные и повернутые всегда в одну сторону фигуры травления на кристаллах KBr, RbCl, RbBr, CsBr. Эти кристаллы также были отнесены по указанному признаку к классу *3/4* [4, 5]. Способностью вращения плоскости поляризации эти кристаллы не обладают.

Параллельно с изучением перечисленных выше веществ велись работы [4] по исследованию кристаллов Cu_2O, $Ba(NO_3)_2$, $Pb(NO_3)_2$, $Sr(NO_3)_2$, которые, обнаруживая явную диссимметрию в своей внешней форме, также не имели второй энантиоморфной модификации. По характеру простых форм, входящих в огранку этих кристаллов, они были отнесены к классу *3/2*. Теоретически в кристаллах этого класса могут наблюдаться как оптическая активность, так и пьезоэлектрические явления. В действительности эти свойства в указанных кристаллах обнаружены не были.

Позднее А. В. Шубников [6] показал, что кристаллы $K_2Cr_2O_7$, которые раньше причислялись к пинакоидальному классу $\bar{2}$ триклинной системы, должны быть по морфологическим признакам отнесены к моноэдрическому классу *1*. Теоретически в кристаллах этого асимметрического класса возможны как оптическая активность, так и пьезоэлектрические и пироэлектрические явления. Ни одно из этих свойств на самом деле обнаружено не было. Эта

работа была подвергнута тщательной и всесторонней проверке со стороны В. С. Подиско [7]. В результате открытая А. В. Шубниковым морфологическая диссимметрия кристаллов $K_2Cr_2O_7$ была подтверждена со всей определенностью.

Сущность вопроса сводится к следующему. Представим себе триклинный кристалл в простейшей форме — в форме косоугольного параллелепипеда. Возьмем одну из граней этого параллелепипеда, обозначив ее символом (001). Очень существенно заметить,



Рис. 3. Противоположные грани косого параллелепипеда, отличающиеся друг от друга только в отношении правизны и левизны

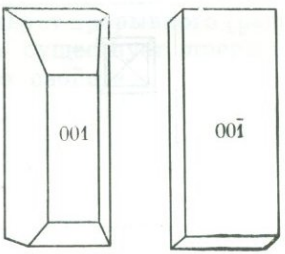


Рис. 4. Кристаллы $K_2Cr_2O_7$, как они выглядят со стороны грани (001) и грани (00$\bar{1}$)

что независимо от того, принадлежит ли рассматриваемый кристалл к классу $\bar{2}$ или к классу *1*, мы всегда можем отличить эту грань от параллельной ей грани (00$\bar{1}$) по признаку правизны и левизны (рис. 3). В самом деле, несмотря на геометрическое равенство обеих граней, в одной из них, которую назовем условно правой, чередование определенных элементов (вершин и сторон *1*, *2*, *3*, *4*) соответствует вращению по часовой стрелке, в другой — обратному вращению.

Зная это, можно было уверенно изучать морфологические особенности любой грани (hkl) кристаллов $K_2Cr_2O_7$, не смешивая ее с параллельной ей гранью ($\bar{h}\bar{k}\bar{l}$). Опыт показал, что многие грани кристаллов этого вещества существенно отличаются по величине и морфологическим особенностям от параллельных им граней. Особенно резко выявляется эта разница на гранях (001) и (00$\bar{1}$) у кристаллов, растущих быстро из достаточно сильно пересыщенных растворов. Оказалось, во-первых, что грани (001) являются более совершенными плоскостями и имеют меньший размер, чем грани (00$\bar{1}$), которые обычно бывают покрыты грубыми чешуйчатыми вициналями. Во-вторых, оказалось, что гладкой гранью всегда является грань, условно называемая правой, а чешуйчатой — левая (рис. 4). Первое наблюдение однозначно свидетельствует о том, что кристаллы $K_2Cr_2O_7$ принадлежат к классу *1*, а второе наблюдение говорит о том, что кристаллы этого вещества принадлежат всегда только к одной из двух возможных энантиоморфных модификаций, которую условно будем называть правой.

К открытию морфологически диссимметричных [1] и в то же время оптически неактивных и электрически нейтральных кристаллов разные авторы отнеслись различно. В целом это отношение можно охарактеризовать как недоверие к самой возможности сочетания в одном и том же кристалле, казалось бы, столь противоречивых свойств.

Поводом к отрицанию диссимметрии кристаллов KCl, KBr, RbCl и др. послужило то, что по рентгеновским данным в структуре этих кристаллов диссимметрия отсутствует. Она отсутствует также и по морфологическим данным в кристаллах NaCl, имеющих одинаковую структуру с указанными кристаллами.

Ионсен [8], Эвальд [9] и другие, однако, указали, что принадлежность кристаллов KCl, KBr и др. к классу *3/4* и кристаллов NaCl к классу $\bar{6}/4$ не находится в противоречии со структурными данными, поскольку методами рентгеноструктурного анализа, в соответствии с законом Фриделя, классы $\bar{6}/4$ и *3/4*, разнящиеся между собой наличием и отсутствием центра симметрии, отличить нельзя.

Несоответствие между классами NaCl и KCl пытался устранить Розицкий [10], которому, как ему казалось, удалось получить на кристаллах NaCl косо расположенные фигуры травления. Результаты опытов Розицкого большинством ученых не были признаны удовлетворительными ввиду того, что единственная фигура травления, приведенная автором на приложенной к его работе микрофотографии, была недостаточно четко выраженной.

Морфологическая диссимметрия кристаллов KCl, NH_4Cl, KBr и т. д. встретила со стороны Хеттиха и Херцфельда [11, 12] и ряда других авторов весьма содержательную, но в конце концов не убедительную критику.

Эти авторы впервые высказали мысль, что диссимметрия кристаллов, обнаруживаемая по фигурам травления, может быть вызвана не только диссимметрией самих кристаллов, но и диссимметрией того раствора, который применяется в качестве травителя,— той молекулярной диссимметрией, которая определяет оптическую активность жидкостей.

Основные результаты, полученные указанными авторами, сводятся к следующему.

1. Если грани куба природных кристаллов сильвина (KCl) подвергнуть травлению недосыщенным водным раствором этой соли обычным способом, без принятия специальных мер, то, наряду с прямо расположенными фигурами травления, получаются также и косо расположенные.

2. Если подвергнуть травлению чистые синтетические кри-

---

[1] Диссимметричными, в пастеровском смысле, называются такие фигуры, которые не могут быть совмещены простым наложением со своим зеркальным изображением. Диссимметричные — правые и левые — фигуры лишены элементов симметрии второго рода.

сталлы KCl специально очищенной водой и чистыми растворами KCl, то получаются только прямо расположенные фигуры травления. Малейшее загрязнение поверхности кристалла или травителя пылью, прикосновением пальцами и т. д. может повести к образованию диссимметричных фигур травления.

3. Сознательное добавление к травителю оптически активной примеси также вызывает появление косых фигур.

Авторы этих работ сочли возможным заключить из этих данных, несмотря на появившуюся критику Валетона [13], что кристаллы KCl, NH_4Cl, KBr, $Ba(NO_3)_2$ и т. д. до $K_2Cr_2O_7$ включительно не являются диссимметричными в пастеровском смысле.

В результате работ Хеттиха и Херцфельда примерно с 1930 г. повсеместно было принято все кристаллы, которые на основе только одних морфологических признаков были определены как диссимметричные, считать недиссимметричными [14]. Этому немало способствовали простота, новизна и оригинальность предложенного решения вопроса,— вопроса, который оставался открытым в течение полустолетия (работу Чермака 1882 г. отделяет от работы Хеттиха — Херцфельда 1926 г. промежуток времени в 44 года). Укреплению этой точки зрения благоприятствовали также и работы Руайе [15], хотя на самом деле, как мы увидим ниже, они могут быть истолкованы не в пользу заключений Хеттиха и Херцфельда.

В настоящей статье мы намерены дать геометрическое и физическое обоснование возможности существования таких морфологически диссимметричных кристаллов, которые одновременно не являются оптически и электрически диссимметричными.

Несомненной заслугой Хеттиха и Херцфельда и, особенно, Руайе является то, что им удалось экспериментально обосновать, казалось бы, совершенно очевидную, но ранее никем не высказывавшуюся мысль, что симметрия фигур травления и морфологическая симметрия кристалла вообще должна определяться как симметрией самого кристалла, так и симметрией той среды, в которой он образуется. Мы назвали эту мысль совершенно очевидной потому, что задолго до Хеттиха и Херцфельда было общепринято рассматривать внешнюю форму кристалла как продукт взаимодействия кристалла и среды (теория Гиббса, Кюри, Вульфа). Мы позволим себе эту старую идею высказать здесь в еще более резкой форме, обратив внимание на то, что так называемая внешняя форма кристалла, будучи, по существу и всегда, границей раздела двух сред, является обязательно и формой той «дырки», которую кристалл занимает в среде. Чтобы понять, какую симметрию при указанных обстоятельствах должна иметь фигура травления, следует напомнить общеизвестное правило, которое утверждает, что в результате наложения двух симметричных фигур друг на друга получается фигура, обладающая только теми элементами симметрии, которые являются общими для обеих фигур при заданном их взаимном расположении.

Руайе действительно показал со всей определенностью, что на некоторых заведомо голоэдрических кристаллах, таких, как кальцит, можно получить диссимметричные фигуры травления, используя в качестве травителя *крепкие* растворы оптически активных веществ. Но он показал также, что при замене оптически активного травителя его антиподом, вместо правых фигур травления, *на том же кристалле* можно получить левые (и обратно).

Как уже говорилось, Хеттиху и Херцфельду удавалось на кристаллах KCl получать косо расположенные фигуры травления, пользуясь оптически активными травителями, но им не удалось заменой данного травителя его оптическим антиподом получить на одном и том же кристалле вместо правых фигур левые. Это ставит под сомнение основной вывод из этих опытов, будто кристаллы KCl и все другие перечисленные нами выше кристаллы не являются диссимметричными.

Некоторые авторы из школы Терпстра [16, 17] зашли в своем скептическом отношении к морфологической диссимметрии вообще и к диссимметрии кристаллов $K_2Cr_2O_7$ в частности слишком далеко, полагая, что ни о какой диссимметрии кристаллов не может быть речи, если она не сопровождается оптической, а в определенных случаях также и электрической диссимметрией. Такое отрицание в отношении $K_2Cr_2O_7$ является просто отрицанием хорошо изученного нами факта. Есть все основания полагать, что то́ же можно сказать и о большинстве, если не обо всех перечисленных выше кристаллах типа KCl и $Ba(NO_3)_2$.

Чем же можно объяснить отсутствие оптической активности в кристаллах $K_2Cr_2O_7$ и других морфологически диссимметричных кристаллах?

Напомним, что по Пастеру [18] все кристаллы, вращающие плоскость поляризации, можно разделить на две категории. Одни после плавления или растворения в оптически неактивном растворителе образуют оптически активную жидкость; другие в тех же условиях образуют неактивную жидкость. В кристаллах первой категории оптическая активность обусловлена диссимметрией молекул; в кристаллах второй категории она вызывается диссимметричным расположением недиссимметричных молекул.

Очень существенно отметить, что в данном случае идет речь именно о молекулах или комплексных ионах, т. е. о частицах значительно большего размера, чем атомы и простые ионы. Если для решения многих задач по дисперсии света можно пренебречь размерами частиц в сравнении с длиной волны света, то для задач, относящихся к вращению плоскости поляризации, отношение длины d частицы к длине волны света λ должно играть существенную и тем бо́льшую роль, чем это отношение d/λ больше [19]. Вращение плоскости поляризации особенно хорошо наблюдается в сложных органических и сложных комплексных неорганических соединениях, т. е. в соединениях с большим d/λ. В простых ионных кристаллах это отношение во много раз меньше. Поэтому если

даже допустить, что атомы и простые ионы могут быть диссимметричными и могут вызывать оптическую активность, ожидаемый от них эффект должен быть невелик. Все интересующие нас кристаллы принадлежат к весьма простым ионным кристаллам, поэтому вращения плоскости поляризации в них не наблюдается.

Переходим к пиро- и пьезоэлектрическим явлениям. Как объяснить, что в морфологически диссимметричных кристаллах эти явления, вообще говоря, могут отсутствовать?

Заметим сразу же, что если речь идет о полярноэлектрических явлениях в интересующем нас ряде кристаллов, то этот вопрос в полной мере может относиться лишь к кристаллам $K_2Cr_2O_7$, так как пироэлектрические явления в кристаллах, принадлежащих к классам *3/4* и *3/2*, и пьезоэлектрические явления в кристаллах класса *3/4* заранее исключены уже по соображениям симметрии [20]. Итак, чем объяснить отсутствие полярно-электрических явлений в кристаллах $K_2Cr_2O_7$, принадлежащих по морфологическим данным к асимметрическому классу, в котором такие явления представляются наиболее вероятными?

Чтобы ответить на этот вопрос, следует напомнить, что один и тот же кристалл, вообще говоря, может иметь разную симметрию в отношении разных физических свойств. Например, кварц по морфологическим свойствам имеет симметрию $3 : 2$, по упругим свойствам — симметрию $\bar{6} \cdot m$, по свойствам вращения плоскости поляризации (гирационная поверхность) — симметрию $\infty : 2$, по свойствам двупреломления (оптическая индикатриса) — симметрию $m \cdot \infty : m$. Само собой разумеется, что группы симметрии, описывающие различные свойства одного и того же кристалла, не являются вполне независимыми друг от друга, а находятся в определенном соподчинении. Так, для указанных групп симметрии имеет место схема

$$\begin{array}{ccc} & m \cdot \infty : m & \\ \swarrow & & \searrow \\ \infty : 2 & & \bar{6} \cdot m \\ \searrow & & \swarrow \\ & 3 : 2 & \end{array}$$

показывающая, что группа $3 : 2$ является подгруппой как группы $6 \cdot m$, так и группы $\infty : 2$, а обе последние группы являются подгруппами *старшей* группы $m \cdot \infty : m$.

Принимая это во внимание, можно допустить, что в отношении распределения в пространстве электрических зарядов кристаллы $K_2Cr_2O_7$ принадлежат к пинакоидальному классу $\bar{2}$, а в отношении распределения механической массы — к моноэдрическому классу *1*. По принципу Неймана наиболее низкая симметрия кристаллов сказывается в явлениях образования кристаллов. Естественно принять, что диссимметрическое распределение массы в кристаллической решетке находит отражение прежде всего в морфологических особенностях кристалла.

Интересно, что Грот в последней из изданных им книг [3] четко разделяет кристаллы, принадлежащие к диссимметричным классам, на две категории — кристаллы, вращающие и не вращающие плоскость поляризации. Такое деление, основанное на чисто эмпирических, но в целом безусловно правильных данных, находит подтверждение не только в приведенных выше соображениях относительно распределения зарядов и массы, но и в развиваемой одним из авторов настоящей работы более широкой трактовке симметрии [21]. В частности, для кристаллов триклинной системы предусматриваются не два, а четыре класса симметрии и антисимметрии: *1*, *$\underline{1}$*, *$\bar{2}$*, *$\underline{\bar{2}}$*. Первому классу отвечают кристаллы, полярные морфологически, но не полярные электрически. Ко второму классу принадлежат кристаллы, полярные морфологически и электрически одновременно. В третий класс входят кристаллы, не полярные в морфологическом и электрическом отношении. К четвертому классу относятся кристаллы, не полярные морфологически, но полярные электрически. Кристаллы $K_2Cr_2O_7$, очевидно, принадлежат к первому классу *1*.

Наиболее трудным является третий и последний вопрос: почему интересующие нас кристаллы встречаются только в одной из двух возможных энантиоморфных модификаций? Исчерпывающего ответа на этот вопрос мы при современном уровне наших знаний дать не можем. Укажем только, что этот вопрос является частью более широкого вопроса, впервые поставленного Пастером,— вопроса о том, почему вообще некоторые из объектов природы — организмы и молекулы образующихся в них веществ — встречаются только в одной или преимущественно в одной из двух возможных энантиоморфных модификаций.

Возможно, что в будущем будут найдены условия получения второй, ныне отсутствующей модификации интересующих нас кристаллов и тогда поставленный нами вопрос отпадет сам собою. В противном случае наблюдаемую диссимметрию наших кристаллов придется объяснять только диссимметрией слагающих их ионов. Для кристаллов $K_2Cr_2O_7$, принадлежащих к классу *1*, это последнее утверждение обосновывается следующим образом.

Кристаллам класса *1* отвечает единственная пространственная группа *P1*. Чтобы получить геометрический образец структуры этой группы в самом общем виде, достаточно выбрать за элемент структуры произвольную конечную фигуру любой симметрии, но без центра симметрии и расположить фигуры, в точности равные выбранной фигуре, соответственными их точками по узлам триклинной решетки в параллельном положении. При этом возможны два случая: первый — когда распределенные по узлам решетки фигуры сами по себе не являются диссимметричными, т. е. когда они, не имея центра симметрии, все же имеют тот или иной другой элемент симметрии второго рода (плоскость симметрии или зеркальную ось); второй — когда фигуры вовсе не имеют элементов симметрии второго рода, т. е. когда фигуры уже сами по се-

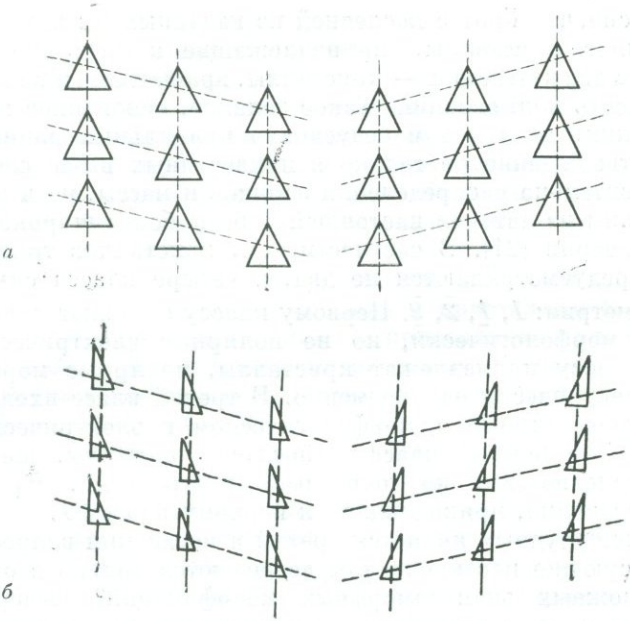


Рис. 5. Энантиоморфные модификации, состоящие из одинаковых недиссимметричных (*а*) и диссимметричных (*б*) частиц

бе являются диссимметричными. В первом случае обе энантиоморфные модификации могут и должны быть образованы одними и теми же частицами (рис. 5, *а*). Во втором случае одна из энантиоморфных модификаций должна состоять из правых, другая — из левых частиц (рис. 5, *б*). Естественно предположить, что возможность существования обеих модификаций в первом случае является более вероятной, чем во втором, так как в первом случае нет необходимости, чтобы в природе существовало два сорта частиц, а во втором случае это является совершенно обязательным.

Заключение. Вопрос о симметрии кристаллов KCl имеет значительно более широкий интерес, чем это может показаться с первого взгляда, так как он теснейшим образом переплетается с вопросом о действительной симметрии кристаллов многих других веществ, морфологически диссимметричных, но оптически и электрически не диссимметричных. К ним принадлежат такие общеизвестные вещества, как $K_2Cr_2O_7$, NH_4Cl, $Pb(NO_3)_2$ и т. д.

Многие исследователи склонны рассматривать отсутствие физической диссимметрии в этих кристаллах как надежный критерий наличия в них центра симметрии. Это видно хотя бы из того, что в новых справочниках эти кристаллы относятся к центросимметричным классам.

Критическое рассмотрение этого вопроса позволяет сделать следующие выводы.

1. Наиболее тонким критерием диссимметрии кристаллов всегда были и остаются морфологические особенности кристаллов.

2. Морфологическая полярность направлений в кристалле не обязательно одновременно должна быть и электрической полярностью.

3. Многие из морфологически диссимметричных, а физически не диссимметричных кристаллов встречаются только в одной энантиоморфной модификации. К таким кристаллам, в частности, относятся кристаллы $K_2Cr_2O_7$. Если невозможность существования обеих модификаций в таких кристаллах подтвердится и последующими наблюдениями, то морфологическую диссимметрию этих кристаллов можно будет объяснить только собственной диссимметрией слагающих их ионов.

4. Оправдываемое опытом и наблюдениями разделение диссимметричных кристаллов на два подкласса (диссимметричных одновременно и морфологически и электрически и диссимметричных только морфологически) требует определенного расширения понятия симметрии кристаллов. Возможно, что это требование может быть удовлетворено учением об антисимметрии, разрабатываемым одним из авторов этой статьи.

5. Кристаллы $K_2Cr_2O_7$, KCl, NH_4Cl, $Pb(NO_3)_2$ и другие подобные кристаллы, упоминаемые в настоящей работе, должны быть возвращены в кристаллографических справочниках на свои прежние места.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Brauns.* Neues Jahrb. Mineral., 1886, **1**, N 1, 224; 1889, **1**, N 2, 113.
2. *G. Tschermak.* Die Heimiedrie der Salmiakkrystalle.— Mineral. Petrogr. Mitt., Neue Folge, 1882, **4**, 531.
3. *M. Sprockhoff.* Neues Jahrb. Mineral. Beil.— B., 1904, **18**, 117.
4. *P. Groth.* Chemische Krystallographie. Leipzig, W. Engelmann, 1906.
5. *P. Groth.* Elemente der physikalischen und chemischen Krystallographie. München — Berlin, Oldenbourg, 1921. 363 S.
6. *A. Schubnikov.* Z. Kristallogr., 1911, **50**, H. 1, 19; 1931, **76**, H. 4—5, 469.
7. *В. С. Подиско.* Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, вып. 9, 327.
8. *A. Johnsen.* Fortschr. Mineral., Kristallogr., Petrogr, 1916, 5, 17.
9. *P. Ewald.* Krystalle und Röntgenstrahlen. Berlin, Springer, 1923, 327 S.
10. *V. Rosicky.* Sbornik Klubu pzirodov., 1914, **6**, 20.
11. *A. Hettich.* Z. Kristallogr., 1926, **64**, 265.
12. *K. F. Herzfeld, A. Hettich.* Z. Phys., 1926, 38, N 1, **1**; 1927, 40, N 3—4, 327.
13. *J. J. P. Valeton.* Z. Phys, 1926, **39**, N 1, 69.
14. *Б. Ф. Ормонт.* Структура неорганических веществ. М.— Л., 1950, с. 152.
15. *L. Royer.* Bull. Soc. franç. minéral., 1930, 53, 350.
16. *P. Stedehauder, P. Terpstra.* Physica., 1930, 10, 113.
17. *S. Elings, P. Terpstra.* Z. Kristallogr., 1928, 67, 279.
18. *L. Pasteur.* Leçons de chimie, 1860.
19. *Г. С. Ландсберг.* Оптика. М., 1954, с. 509.
20. *А. В. Шубников, Е. Е. Флинт, Г. Б. Бокий.* Основы кристаллографии. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940. 486 с.
21. *А. В. Шубников.* Симметрия и антисимметрия конечных фигур. Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.

ОБ ОТСУТСТВИИ ОПРЕДЕЛЕННОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ГОМОЛОГИЕЙ ВНЕШНЕЙ ФОРМЫ КРИСТАЛЛОВ И ГОМОЛОГИЕЙ ИНДИКАТРИС ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРИСТАЛЛОВ[1]

Известно, что между морфологической симметрией кристалла и симметрией его физических свойств существует вполне определенная связь, а именно: группа морфологической симметрии кристалла либо совпадает с группой симметрии свойства, либо является ее подгруппой. Возьмем, например, моноклинный кристалл (рисунок), принадлежащий к группе L_2. Его оптическая индикатриса для какой-либо одной монохроматической волны принадлежит к группе $3L_2 3PC$, а совокупность оптических индикатрис для всех длин волн — индикатрис, расположенных веерообразно вокруг L_2, принадлежит к группе L_2PC. Как видим, морфологическая группа L_2 входит целиком в состав как группы $3L_2 3PC$, так и группы L_2PC. Это означает, что если мы подвергнем кристалл любой операции симметрии, входящей в его морфологическую группу, то не только сам кристалл совместится этой операцией с собою, но и любая индикатриса любого его свойства тоже преобразуется в себя.

Ничего подобного нет в гомологии. Как было показано в наших предыдущих работах [1, 2], интересующий нас кристалл принадлежит или может принадлежать морфологически к группе гомологии $\lambda_2 4\pi$. Докажем, что н и о д н а из операций гомологии этой группы, за исключением, конечно, тех операций, которые одновременно являются операциями симметрии, не входит в совокупность операций гомологии оптической индикатрисы нашего кристалла.

С первого взгляда эта теорема может показаться явно неверной, ибо сразу видно, что плоскость AC является одновременно и плоскостью гомологии оптической индикатрисы. В действительности в данном случае мы имеем дело все-таки не с одним элементом гомологии, а с двумя различными, поскольку в плоскости гомологии кристалла отражение происходит по направлению BD, а в соответствующей плоскости гомологии индикатрисы отражение происходит по направлению касательных (не указанному на чертеже) к изображенному эллипсу в точках пересечения его с прямой AC.

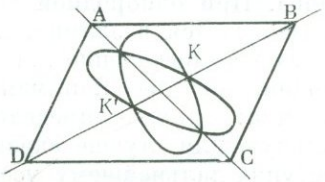
Рассмотрим операцию косого отражения в плоскости AC по направлению BD более подробно. Нетрудно видеть, что этой операцией кристалл совмещается сам с собою, а его оптическая индикатриса переводится из положения K в положение K'. Это означает, что плоскость AC с присущим ей направлением отражения

---

[1] Зап. Всесоюзн. минералог. об-ва, 1955, ч. 84, № 1, с. 121—122.

BD, будучи элементом гомологии кристаллического многогранника $ABCD$, не является элементом гомологии оптической индикатрисы кристалла. Аналогично доказывается, что и все другие элементы гомологии того же многогранника не являются элементами гомологии оптической индикатрисы и любых других индикатрис любых других свойств кристаллов.

Во избежание кривотолков вроде тех, которые возникли [3] после опубликования нашей первой работы по гомологии [1], следует обратить внимание на некоторые детали рассматриваемых операций.



Возьмем круговое сечение оптической индикатрисы. Легко видеть, что при отражении его в плоскости AC по направлению BD оно преобразуется в некоторые эллиптические сечения, но *не самой индикатрисы*, а эллипсоида K'. Оптическая ось (нормаль к круговому сечению индикатрисы) при этом преобразуется в некоторый радиус-вектор эллипсоида K', направленный косо к указанному эллиптическому сечению. Ясно, что эта преобразованная оптическая ось не имеет никакого физического смысла, как не имеют физического смысла и *нормали к круговым сечениям эллипсоида* K'. Не имеет физического смысла, естественно, и сам этот новый эллипсоид, равно как и три других, не показанных на чертеже эллипсоида K'', K''', K'''', выводимых из оптической индикатрисы с помощью других операций гомологии, входящих в группу $\lambda_4 4\pi$. Не имеют физического смысла и все вообще геометрические фигуры, выводимые с помощью элементов морфологической гомологии кристалла из индикатрис его физических свойств. Следовательно, не имеет никакого физического смысла и сама группа гомологии $\lambda_4 4\pi$. Только так и никак иначе следует понимать наш вывод, что *никакой гомологии кристаллов, такой, которая связывала бы геометрические свойства кристалла с физическими, не существует.*

Значит ли это, что отдельно взятые кристаллографические фигуры, в частности фигура оптической индикатрисы, не обладают свойством гомологии? Нет. Из изложенного ясно видно, что отдельно взятые кристаллографические фигуры, конечно, могут обладать собственной гомологией. Против этой тривиальной истины с нашей стороны нет и не может быть никаких возражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Шубников.* ДАН СССР, 1953, 88, № 3, 453.
2. *А. В. Шубников.* Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, вып. 9, 35.
3. *В. И. Михеев.* Зап. Всесоюз. минерал. об-ва, 1954, ч. 83, № 1, с. 67.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕПЛОВОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРИСТАЛЛОВ[1]

Хорошо известно, что при тепловом расширении кристаллы претерпевают *однородную деформацию*. Одной из ее особенностей является то, что шар, мысленно выделенный где-либо внутри кристалла, преобразуется ею в эллипсоид, а куб — в параллелепипед. При однородной деформации плоских фигур окружность преобразуется в эллипс, а квадрат — в параллелограмм.

Такое определение тепловой деформации кристаллов допускает неодинаковое ее понимание. Рассмотрим две трактовки этого явления: одну — определенно неправильную и другую — правильную или, лучше сказать, более правильную, так как и она доступна дальнейшему усовершенствованию. Начнем с первой.

Неправильное представление о тепловой деформации кристаллов. Допустим, что тепловое расширение кристаллов происходит таким образом, что всякий радиус шара, мысленно выделенного внутри кристалла, преобразуется в одинаково направленный радиус-вектор эллипсоида простым растяжением или сжатием. Это означает, что в плоской схеме радиус окружности OA преобразуется в радиус-вектор эллипса OB, OC в OD, OE в OF и т. д. (рис. 1.)

Примем за главные коэффициенты расширения величины

$$\alpha_1 = \frac{AB}{OA \cdot t} = \frac{a_1 - r}{rt}, \qquad \alpha_2 = \frac{DC}{OC} = \frac{a_2 - r}{rt},$$

где a_1 есть длина главной горизонтальной полуоси эллипса, a_2 — длина главной вертикальной полуоси эллипса, r — длина радиуса окружности, t — повышение температуры.

Если бы тепловая деформация кристаллов действительно происходила путем простого удлинения всех радиусов окружности, то за коэффициент расширения кристалла по любому косому направлению нам пришлось бы принять величину

$$\alpha' = \frac{EF}{OE \cdot t} = \frac{R - r}{rt},$$

где через R обозначена длина переменного радиуса-вектора эллипса. Нетрудно понять, однако, что описанный механизм тепловой деформации кристаллов при всей его простоте и кажущейся ясности является, если не с практической, то с теоретической стороны, во всяком случае, грубо ошибочным. Это становится совершенно очевидным, если применить этот механизм к деформации не окружности, а квадрата $KLMN$. В этом случае окажется, что квадрат преобразуется не в параллелограмм, а в некоторую кри-

[1] Кристаллография, 1956, т. 1, вып. 1, с. 95—104.

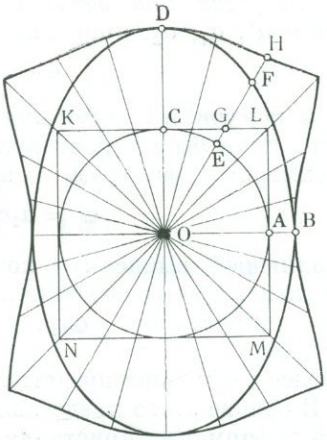


Рис. 1. Если деформация окружности в эллипс происходит так, что какая-либо точка E на окружности переходит в точку F, то точка G на стороне квадрата должна перейти в точку H. Соответственно этому квадрат должен преобразоваться в показанную на рисунке криволинейную фигуру

волинейную фигуру, показанную на чертеже. Чтобы построить любую точку H этой фигуры, нужно определить длину отрезка GH. Если принять, что коэффициент α' имеет указанное выше значение, то длина отрезка GH легко может быть найдена из соотношения $GH/OG = (R - r)/r$, поскольку длина радиуса-вектора OG квадрата для каждой его точки G известна. Если бы кристалл при тепловом расширении деформировался указанным способом, то его решетка искривлялась бы. Это означает, что строго решетчатое строение тогда он мог бы иметь лишь при одной определенной температуре, с чем, конечно, согласиться невозможно.

Мы рассмотрели эту неправильную трактовку однородной деформации столь подробно потому, что к ней по следам старых авторов [1] прибегают, к сожалению, и некоторые из современных кристаллофизиков [2], к числу которых в прошлом мог бы быть отнесен и сам автор настоящей статьи [3].

Приводим для примера одно из ходовых рассуждений, основанных на рассматриваемом нами неправильном механизме однородной деформации. Речь будет идти, по существу, о выводе одной из самых важных формул кристаллофизики, хотя конкретно будет иметься в виду все то же тепловое расширение кристаллов.

Если принять, что радиус деформируемой окружности равен единице, то уравнение получаемого из нее эллипса можно написать в декартовых координатах, отнесенных к главным осям эллипса, так:

$$x_1^2/(1 + \alpha_1)^2 + x_2^2/(1 + \alpha_2)^2 = 1.$$

Пользуясь подстановками

$$x_1 = R \cos(RX_1) = (1 + \alpha')\, c_1, \quad x_2 = R \cos(RX_2) = (1 + \alpha')\, c_2$$

и пренебрегая при этом квадратами и произведениями малых величин α', α_1, α_2, приводим уравнение эллипса к виду

$$\alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2.$$

Мы получили эту формулу, имея в виду деформацию плоских фигур. Если бы мы повторили наше рассуждение применительно к трехмерным фигурам, то пришли бы к формуле

$$\alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 + \alpha_3 c_3^2, \tag{1}$$

позволяющей вычислить коэффициент расширения α' по трем известным главным коэффициентам α'_1, α'_2, α'_3 для любого направления в кристалле, определяемого *направляющими косинусами* c_1, c_2, c_3.

Более правильное представление о тепловой деформации кристаллов. В основе этого представления лежит предположение, что тепловая деформация кристалла может быть описана системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_1 x_1, \\ x_2' &= a_2 x_2, \\ x_3' &= a_3 x_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты любой точки кристалла до деформации, x_1', x_2', x_3' — координаты той же точки после деформации, а a_1, a_2, a_3 — некоторые константы (положительные или отрицательные действительные числа). Предполагается, что координаты отнесены к системе *главных осей* кристалла, которые принципиально всегда могут быть найдены (для моноклинных и триклинных кристаллов расположение главных осей является фиксированным только для данной температуры). Если речь идет о деформации шара, мысленно выделенного внутри кристалла или реально из него вышлифованного, то за начало координат принимается центр шара.

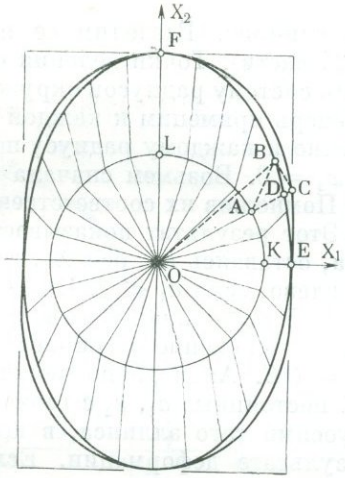
Допустим, что все интересующие нас точки расположены до деформации на поверхности этого шара и что радиус последнего равен единице. Это означает, что координаты x_1, x_2, x_3 связаны между собой уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{3}$$

Определив из уравнений (2) координаты x_1, x_2, x_3 и подставив найденные значения их в уравнение шара (3), получим выражение

$$x_1'^2/a_1^2 + x_2'^2/a_2^2 + x_3'^2/a_3^2 = 1, \tag{4}$$

которое представляет собой уравнение эллипсоида. Мы доказали, что шар преобразуется уравнениями (2) в эллипсоид. Аналогично можно доказать, что куб преобразуется ими в некоторый параллелепипед. Для этого за исходное уравнение нужно взять не уравнение шара, а уравнения двух параллельных граней куба и показать, что уравнениями (2) они преобразуются в уравнения двух равно-



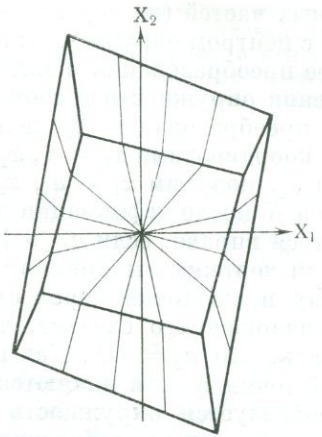


Рис. 2. Преобразование окружности в эллипс, описываемое уравнениями (2) и точно отвечающее наблюдаемой тепловой деформации кристаллов. В этом случае вектор OA преобразуется в вектор OB при помощи вектора смещения AB, который переводит точку A в B. За коэффициент расширения по направлению OA в этом случае принимается величина, пропорциональная длине отрезка AC

Рис. 3. Чертеж, показывающий, что квадрат уравнениями (2) преобразуется в косой параллелограмм

отстоящих от начала координат и параллельных друг другу плоскостей.

Уравнение плоскости, как известно, может быть представлено в форме

$$x_1/A_1 + x_2/A_2 + x_3/A_3 = 1,$$

где A_1, A_2, A_3 — длины отрезков, отсекаемых плоскостью от координатных осей. Если это уравнение принять за уравнение одной грани куба, то параллельная ей грань куба будет иметь уравнение

$$\frac{x'_1}{a_1 A_1} + \frac{x'_2}{a_2 A_2} + \frac{x'_3}{a_3 A_3} = 1$$

Подставляя в оба эти уравнения значения x_1, x_2, x_3 найденные из уравнений (2), получим:

$$\frac{x_1}{-A_1} + \frac{x_2}{-A_2} + \frac{x_3}{-A_3} = 1; \qquad \frac{x'}{-a_1 A_1} + \frac{x'_2}{-a_2 A_2} + \frac{x'_3}{-a_3 A_3}$$

Это уравнения двух параллельных друг другу плоскостей, равноотстоящих от начала координат, что и требовалось доказать.

Рассмотрим процесс тепловой деформации, описываемый уравнениями (2), более подробно на плоской схеме (рис. 2). Возьмем

окружность с радиусом, равным единице. Разделим ее на $4n$ равных частей (на чертеже — на 24 части). Точки деления соединим с центром окружности; получим систему радиусов окружности до ее преобразования в эллипс. Теперь применим к каждой точке деления окружности и соответственно к каждому радиусу последней преобразование (2), полагая $x_3 = 0$. Возьмем сначала точку K с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Помножив их соответственно на a_1 и a_2, получим $x_1' = a_1$, $x_2' = 0$. Этот результат показывает, что точка K после деформации должна, оставаясь на оси X_1, переместиться вправо, если $a_1 > 1$, или влево, если $a_1 < 1$. При составлении чертежа мы приняли $a_1 = 1{,}25$, $a_2 = 2{,}00$. Соответственно этому наша точка переместилась в положение E справа от K. Из изложенного следует, что $a_1 = OE$. Аналогично можно показать, что $a_2 = OF$. Как видим, постоянные a_1, a_2 с геометрической точки зрения являются полуосями того эллипса, в который преобразуется окружность в результате деформации. Если мы применим наше преобразование к точке A, то обнаружим, что после деформации она переместится в точку B вдоль *вектора смещения* AB.

В соответствии с этим и радиус окружности OA преобразуется в радиус-вектор эллипса OB. Если мы повторим это построение для всех точек деления окружности, не изображая простоты ради радиусов-векторов эллипса, то получим полную картину деформации, изображенную на рис. 2. Как видим, эта картина существенно отличается от ранее рассмотренной (рис. 1).

Пользуясь формулами (2), легко рассчитать и построить диаграмму преобразования квадрата в параллелограмм (рис. 3).

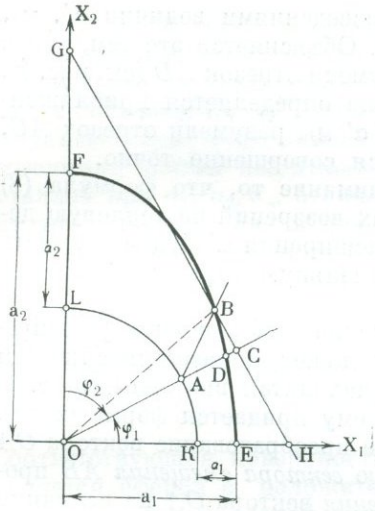
Вернемся к рис. 2. Мы видим на нем точку D, совпадающую с точкой пересечения эллипса и продолженной прямой OA, и точку C, которая лежит в пересечении той же прямой с нормалью BC, опущенной из точки B на эту прямую. Перенесем эти и другие точки рассматриваемой диаграммы на особый чертеж (рис. 4). Обозначим углы, образованные прямой OC с осями координат, через φ_1, φ_2, а их косинусы, которые являются направляющими косинусами этой прямой, через c_1, c_2. Очевидно, координаты точки A при $OA = 1$ равны c_1, c_2, а координаты точки B в соответствии с формулами (2) равны a_1c_1, a_2c_2. Обозначим еще длину отрезка прямой OC через a'.

Из чертежа видно, что нормальное уравнение прямой GH при этих обозначениях может быть написано в форме

$$a' = x_1c_1 + x_2c_2.$$

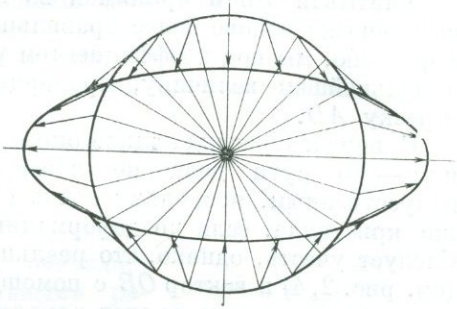
Так как эта прямая проходит через точку B, то приведенное равенство не нарушится, если в него будут подставлены вместо x_1, x_2 координаты этой точки a_1c_1, a_2c_2. После этой подстановки приведенное уравнение преобразуется в равенство

$$a' = a_1c_1^2 + a_2c_2^2. \qquad (5)$$



◂ **Рис. 4.** Для вывода уравнения (8)

Рис. 5. Чертеж, показывающий, что закон эллипсоида для тепловой деформации сохраняется также и в том случае, если один из главных коэффициентов имеет отрицательный знак



Здесь мы должны сделать небольшое отступление от основной темы нашей статьи и указать, что если в полученном нами равенстве (5) рассматривать величины a_1, a_2 как постоянные, а величины a', c_1, c_2 как переменные, учитывая, конечно, что сумма квадратов направляющих косинусов всегда равна единице

$$1 = c_1^2 + c_2^2, \tag{6}$$

то это равенство (5) определит собой в декартовой системе координат некоторую кривую, которая после надлежащего ее исследования оказывается овалоподобной кривой, имеющей четыре общие точки с рассмотренным нами эллипсом (рис. 2) и расположенной всеми другими своими точками вне последнего.

Возвращаемся к нашей теме. Вычтем равенство (6) из (5)

$$a' - 1 = (a_1 - 1)\ c_1^2 + (a_2 - 1)c_2^2.$$

Величины $a_1 - 1$ и $a_2 - 1$, как мы уже знаем, представляют собой главные коэффициенты расширения α_1 и α_2. Если обозначим в соответствии с этим величину $a' - 1$ через α', то последнее равенство примет форму

$$\alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2. \tag{7}$$

Формула (7) описывает тепловое расширение плоских фигур. Если бы мы повторили наши рассуждения, имея в виду трехмерные фигуры, то получили бы уравнение

$$\alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 + \alpha_3 c_3^2. \tag{8}$$

Обращаем внимание на то, что формулы (1) и (8) по своему начертанию ничем не отличаются друг от друга, несмотря на то, что первая из них является приближенной (поскольку при ее выводе

мы пренебрегали квадратами и произведениями величин α', α_1, α_2, α_3), а вторая совершенно точной. Объясняется это тем, что в формуле (1) под величиной α' мы разумели отрезок AD (см. рис. 4), который этой формулой действительно определяется приближенно, в формуле же (8) под величиной α' мы разумели отрезок AC, который этой формулой определяется совершенно точно.

Учитывая это и принимая во внимание то, что формула (8) выведена на основе более правильных воззрений на тепловую деформацию, мы под коэффициентом расширения α' будем разуметь в дальнейшем величину, пропорциональную отрезку AC, а не отрезку AD.

С первого взгляда такое определение коэффициента расширения — по сути дела не новое — может показаться слишком искусственным, поскольку точка C находится вне эллипса (т. е. вне кристалла, если до деформации ему придается форма шара). Следует учесть, однако, что реальное преобразование вектора OA (см. рис. 2, 4) в вектор OB с помощью *вектора смещения* AB производится не только за счет *растяжения* вектора OA на величину отрезка AC, но и за счет *сдвига* CB, в результате которого точка C попадает в точку B на эллипсе, где ей и надлежит быть.

Очень существенно отметить, что выведенная нами формула (8), будучи уравнением второй степени относительно переменных c_1, c_2, c_3, является уравнением четвертой степени по отношению к переменным x_1, x_2, x_3. В этом легко убедиться, заменив переменные c_1, c_2, c_3, α' через равные им величины

$$x_1/\alpha', \quad x_2/\alpha', \quad x_3/\alpha', \quad \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,.$$

Отсюда следует, что уравнение (8), вопреки часто встречающимся высказываниям, не может выражать в *декартовой системе координат* никакой поверхности второго порядка, в частности и поверхности эллипсоида.

То, что в отдельных случаях уравнение (8) не может выражать эллипсоида *даже приближенно*, видно из следующего. Известно, что у кальцита коэффициент расширения по главной оси имеет положительный, а по перпендикулярным к ней направлениям — отрицательный знак. Это означает, что по некоторым косым направлениям коэффициент расширения должен быть в точности равен нулю, значит, должны быть равны нулю и некоторые радиусы-векторы эллипсоида. Таких эллипсоидов не существует.

Здесь нам хотелось бы отметить, что, вопреки ранее неоднократно повторявшемуся мнению [4, 5], в тепловом расширении кальцита мы не только не имеем никакого противоречия закону эллипсоида, а наоборот, видим наиболее изящное подтверждение этого закона, так как и в этом случае уравнениями (2) шар преобразуется в эллипсоид, а окружность — в эллипс (рис. 5).

Форма, симметрия и антисимметрия поверхностей коэффициентов расширения кристаллов. Уравнение (8) позволяет по трем

известным главным коэффициентам расширения кристалла α_1, α_2, α_3 найти коэффициент расширения α' для любого направления в кристалле, определяемого косинусами c_1, c_2, c_3, что дает возможность, откладывая из одной точки по разным направлениям радиусы-векторы, пропорциональные α', теоретически построить все мыслимые формы *поверхностей коэффициентов расширения* кристаллов при α_1, α_2, α_3, отличающихся друг от друга по величине и знаку.

Для кристаллов кубической системы все три главных коэффициента расширения равны друг другу и все три положительны ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 > 0$). В этом случае уравнение (8) принимает вид

$$\alpha' = \alpha_1 (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = \alpha_1. \qquad (9)$$

Соответствующая поверхность, очевидно, является сферой с положительными радиусами — белой сферой, имеющей симметрию $\infty/\infty \cdot m$.

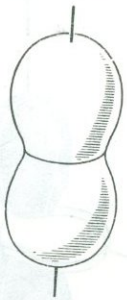


Рис. 6. Поверхность коэффициентов расширения кристаллов, удовлетворяющая уравнению $\alpha' = \alpha_1(c_1^2 + c_2^2) + \alpha_3 c_3^2$ при $\alpha_3 > \alpha_1$

При $\alpha_3 \neq \alpha_2 = \alpha_1$; α_1, $\alpha_3 > 0$ поверхность коэффициентов расширения, выражаемая уравнением

$$\alpha' = \alpha_1 (c_1^2 + c_2^2) + \alpha_3 c_3^2, \qquad (10)$$

становится овалоподобной положительной (белой) поверхностью вращения, вытянутой (при $\alpha_3 > \alpha_1$) или сплюснутой (при $\alpha_3 < \alpha_1$) вдоль оси X_3 (рис. 6 и 7, *а*) и в обоих случаях имеющей симметрию $m \cdot \infty : m$. Такими поверхностями описывается простейший и наиболее часто встречающийся случай теплового расширения оптически одноосных кристаллов.

Выше было отмечено, что в кальците α_3 имеет положительный, а α_1 отрицательный знак. Соответственно этому уравнение (8) для него и аналогичных ему одноосных кристаллов будет иметь вид

$$\alpha' = -\alpha_1 (c_1^2 + c_2^2) + \alpha_3 c_3^2. \qquad (11)$$

Отвечающая ему поверхность вращения, имеющая симметрию $m \cdot \infty : m$, показана на рис. 7, *б*. Как видим, она состоит из двух яйцевидных положительных (белых) областей и одной торообразной отрицательной (черной) области.

Если все главные коэффициенты расширения положительны и все различны между собой ($\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$; α_1, α_2, $\alpha_3 > 0$), то уравнение (8) принимает вид

$$\alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 + \alpha_3 c_3^2. \qquad (12)$$

Соответствующая поверхность, имеющая симметрию $m \cdot 2 : m$,

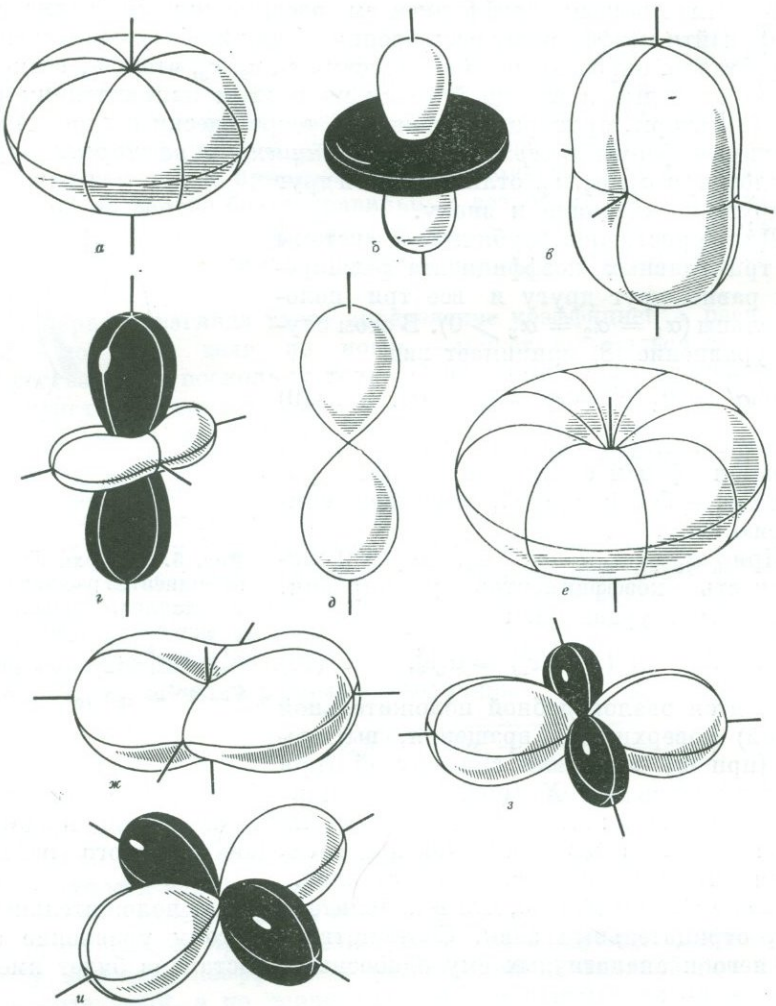


Рис. 7. Поверхности, удовлетворяющие уравнению

$а - \alpha' = \alpha_1 (c_1^2 + c_2^2) + \alpha_3 c_3^2$ при $\alpha_3 < \alpha_1$; $б - \alpha' = -\alpha_1 (c_1^2 + c_2^2) + \alpha_3 c_3^2$; $в - \alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 + \alpha_3 c_3^2$; $г - \alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 - \alpha_3 c_3^2$; $д - \alpha' = \alpha_3 c_3^2$; $е - \alpha' = \alpha_1 (c_1^2 + c_2^2)$; $ж - \alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2$; $з - \alpha' = -\alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2$; $и - \alpha' = \alpha_1 (c_2^2 - c_1^2)$

показана на рис. 7, *в*. Ею описываются наиболее часто встречающиеся случаи теплового расширения большинства оптически двуосных кристаллов.

Если один из главных коэффициентов, скажем α_3, имеет отрицательный знак, то уравнение (8) принимает вид

$$\alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 - \alpha_3 c_3^2. \qquad (13)$$

Соответствующая поверхность (рис. 7, *г*) состоит из двух отрицательных (черных) яйцевидных областей и одной вытянутой положительной (белой) области, имеющей форму продолговатого бублика. Теоретически можно предвидеть, что такими поверхностями, имеющими симметрию $m \cdot 2 : m$, может описываться тепловое расширение некоторых двуосных кристаллов.

Описанные поверхности существенно изменяют свой вид, когда один или два из главных коэффициентов расширения становятся равными нулю.

При $\alpha_1 = 0$ уравнение (10) принимает вид

$$\alpha' = \alpha_3 c_3^2. \tag{14}$$

Соответствующая поверхность вращения, показанная на рис. 7, *д*, имеет симметрию $m \cdot \infty : m$ и представляет собой пару яйцеобразных (белых) областей, соприкасающихся друг с другом в одной точке.

То же уравнение (10) при $\alpha_3 = 0$ принимает форму

$$\alpha' = \alpha_1 (c_1^2 + c_2^2). \tag{15}$$

Соответствующая поверхность вращения, показанная на рис. 7, *е*, имеет форму круглого бублика (белого) с двумя пронизывающими его воронками, соприкасающимися своими вершинами. Поверхность имеет симметрию $m \cdot \infty : m$.

Если приравнять нулю один из главных коэффициентов в уравнении (12), то оно (при $\alpha_3 = 0$) примет вид

$$\alpha' = \alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2. \tag{16}$$

Соответствующая поверхность, показанная на рис. 7, *ж*, имеет форму продолговатого бублика с двумя пронизывающими его воронками, соприкасающимися друг с другом своими вершинами. Поверхность имеет симметрию $m \cdot 2 : m$.

Нам осталось рассмотреть еще такие поверхности, в которых при равенстве нулю одного коэффициента два других имеют разные знаки. Если в уравнении (13) положить $\alpha_3 = 0$ и изменить знак у c_1, то оно примет форму

$$\alpha' = -\alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2. \tag{17}$$

Соответствующая поверхность, показанная на рис. 7, *е*, представляет собой пару одинаковых между собой отрицательных (черных) и пару одинаковых, но другого размера, положительных (белых) яйцеобразных областей, соединенных своими вершинами вместе в одной точке. Поверхность имеет симметрию $m \cdot 2 : m$.

Если в последнем уравнении главные коэффициенты расширения будут антиравны друг другу, то оно примет форму

$$\alpha' = \alpha_1 (c_2^2 - c_1^2). \tag{18}$$

Соответствующая поверхность, изображенная на рис. 7, *и*, представляет собой пару одинаковых белых и пару антиравных им черных яйцеобразных областей, соединенных своими вершинами вместе в одной точке. Поверхность имеет симметрию $m \cdot 2 : m$ и обладает также свойством антисимметрии $(m \cdot 4 : m)$.

Пять последних поверхностей (рис. 7, *д* — *и*), построенных теоретически в предположении, что один или два главных коэффициента равны нулю, мы считаем для кристаллов нереальными, но полагаем, что искусственным путем можно создать такие однородные анизотропные материалы, тепловая деформация которых будет отвечать этим поверхностям.

В заключение укажем, что нарисованная нами картина тепловой деформации кристаллов не является законченной, поскольку мы ограничили себя лишь исследованием поверхностей коэффициентов теплового расширения и совсем оставили без внимания поверхности коэффициентов теплового сдвига кристаллов. Этой второй задаче мы предлагаем посвятить в будущем отдельную статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T. Liebisch.* Grundriss der physikalischen Krystallographie. Leipzig, 1896, S. 184.
2. *W. Wooster.* A text — book on crystal physics. Cambridge, 1949, p. 21.
3. *А. В. Шубников, Е. Е. Флинт, Г. Б. Бокий.* Основы кристаллографии. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940, с. 282.
4. *Е. С. Федоров.* Курс кристаллографии. СПб., 1901, с. 317.
5. *Е. С. Федоров.* Сокращенный курс кристаллографии. СПб., 1910, с. 158.

СИММЕТРИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПИРАМИД РОСТА[1]

Закон Бекке. Всякий реальный кристалл правильной многогранной формы, т. е. кристалл, выросший в условиях постоянного и равномерного притока к нему питающего материала, целесообразно рассматривать как совокупность пирамид роста, основаниями которых служат грани кристалла, а общей вершиной — начальная точка роста. Эта целесообразность диктуется тем, что очень часто, если не всегда, физические свойства пирамид с основаниями, принадлежащими к разным простым формам, оказываются различными.

В пользу такого воззрения на реальный кристалл, которое мы склонны именовать законом Бекке, в честь автора, введшего

[1] Кристаллография, 1961, т. 6, вып. 3, с. 319—322.

в науку о кристаллах понятие о пирамидах (конусах) роста [1, 2], убедительно свидетельствуют: общеизвестный факт существования у многих минералов и синтетических кристаллов так называемых *структур песочных часов* (рис. 1), часто наблюдаемые случаи закономерной оптической аномалии в различных кристаллах, в частности в кристаллах квасцов [3, 4] (рис. 2), неодинаковое поглощение разными гранями растущего кристалла красителей [5, 6], неодинаковое поглощение различных ионов и т. д.

Механизм захвата примесей и дефектов кристаллической структуры растущими гранями. Неодинаковость свойств пирамид роста одного и того же кристалла вызывается тем, что грани разных простых форм имеют неодинаковую структуру и в силу этого могут по-разному относиться к образованию на них различных тонких и грубых дефектов строения (вакантных мест, дислокаций, различных включений и т. д.) и к адсорбции на себе химических примесей. Независимо от характера дефектов строения грани и от особенностей отложившихся на ней частиц примеси окончательный захват тех и других внутрь пирамиды происходит, по-видимому, всегда одним способом — путем быстрого покрытия их ступенчатыми слоями кристаллизующегося вещества, движущимися вдоль грани (рис. 3).

Расстройство периодичности структуры по направлениям нормалей к граням. Так как толщина слоев, о которых идет речь,

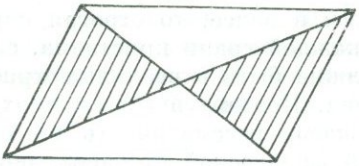


Рис. 1. Схема структуры песочных часов

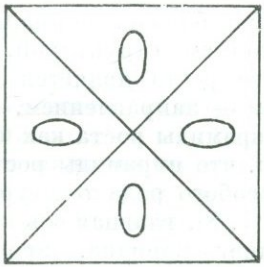


Рис. 2. Оптическая аномалия в пластинке кристалла квасцов, вырезанной параллельно грани куба

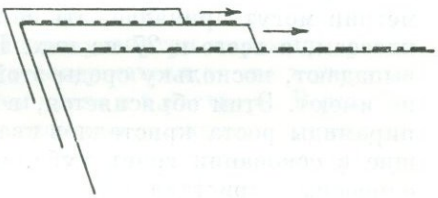


Рис. 3. Схема захвата растущим кристаллом примеси, адсорбированной гранью

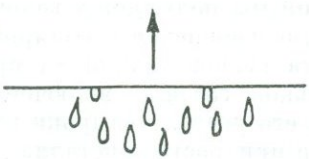


Рис. 4. Схема расположения пузырьков воздуха, захваченных гранью растущего кристалла.

может быть самой разнообразной — от нескольких ангстремов до 1 *мм* и более, то строгая периодичность структуры по нормали к каждой грани кристалла, свойственная идеальным кристаллам, должна быть в реальных кристаллах в той или иной мере нарушена. Поэтому в тех случаях, когда реальный кристалл мы вынуждены рассматривать как совокупность пирамид роста различной физической природы, направление вдоль нормали к любой грани кристалла следует рассматривать как такое направление, по которому кристалл не имеет ясно выраженной периодичности строения. Назовем нормаль к основанию пирамиды ее *главной осью*. Имея вдоль главной оси расстроенное периодическое строение, пирамида роста по всем перпендикулярным этой оси направлениям обладает нормальной периодической, свойственной всем кристаллам, структурой. Следует добавить, что главная ось пирамиды роста является ее *особенным* — единственным, неповторимым — направлением.

Пирамиды роста как своеобразные текстуры. Из изложенного видно, что пирамиды роста по их строению можно рассматривать как особого рода текстуры. От ранее подробно изучавшихся текстур [7, 8], главная ось которых совпадала с осью симметрии бесконечного порядка, пирамиды роста отличаются тем, что их главная ось никогда не может быть одновременно осью бесконечного порядка, но обязательно является кристаллографической осью того или иного порядка.

Диссимметризация кристалла вызываемая расстройством периодичности по нормалям к его граням. Наличие одного особенного направления в пирамидах роста означает, что они по своей симметрии могут принадлежать не ко всем 32 кристаллографическим классам, а всего к 27 из них. Пять классов кубической системы выпадают, поскольку среды этой системы особенных направлений не имеют. Этим объясняется, в частности, что упомянутые выше пирамиды роста кристаллов квасцов (кубической системы), имеющие в основании грань куба, обладают оптическими свойствами одноосных кристаллов.

Диссимметризация пирамид роста, вызываемая полярным характером главной оси. При росте кристаллов их грани передвигаются, сохраняя свою ориентировку в пространстве, всегда в *одном* направлении. В этом сказывается типично полярный характер явлений роста. Естественно, что для описания этих явлений мы пользуемся величиной нормальной скорости роста граней, относящейся к полярным векторам. Полярность направлений роста граней кристалла проявляется, в частности, в форме пузырьков газовых включений, часто захватываемых кристаллом при его росте. Пузырьки всегда бывают заострены с той стороны, куда при росте кристалла движется та его грань, которой эти пузырьки захватываются (рис. 4). Если внутрь пирамиды попадает множество весьма мелких пузырьков, главная ось пирамиды становится геометрически полярной. Если выделим мысленно из це-

лого кристалла какую-либо одну из его пирамид роста, то геометрическая полярность главной оси пирамиды ясно выступит в различии между концами этой оси: один из них упирается в вершину пирамиды, другой — в ее основание. Само собой разумеется, однако, что геометрическую полярность оси нельзя отождествлять с ее электрической или какой-либо иной физической полярностью. Мы хотим этим сказать, что наличие геометрической полярности предусматривает возможность, но не обязательность существования всякой другой полярности.

Симметрия пирамид роста, обладающих полярной осью, исчерпывается десятью группами:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6,$$
$$m, \quad 2\cdot m, \quad 3\cdot m, \quad 4\cdot m, \quad 6\cdot m,$$

Это все те кристаллографические группы, которыми описывается симметрия конечных плоских фигур, в частности симметрия рассматриваемых отдельно граней кристалла.

Предельная степень диссимметризации пирамид роста. Представим себе кристалл, растущий в растворе, который содержит в виде примеси какое-либо оптически активное вещество. Конкретно это означает, что в примеси преобладают либо правые, либо левые молекулы этого вещества. Допустим далее, что эта примесь захватывается какой-либо гранью (пирамидой роста) кристалла, принадлежащей к одной из групп

$$m, \quad 2\cdot m, \quad 3\cdot m, \quad 4\cdot m, \quad 6\cdot m,$$

имеющих плоскости симметрии. Ясно, что такая право-левая грань не может при захвате примеси отдать предпочтение только правым или только левым ее молекулам. Поэтому внутри пирамиды роста в преобладающем количестве будут содержаться те же молекулы примеси, которые имелись в большем числе и в растворе. В результате пирамида роста приобретает свойства оптически активного кристалла. Симметрия пирамиды при этом понизится: выпадут все плоскости симметрии. Этим путем может быть, в принципе, достигнута крайняя степень диссимметризации пирамид роста. Предельно низкая симметрия пирамид роста должна поэтому исчерпываться группами

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6.$$

Научное и практическое значение искусственной диссимметризации пирамид роста. Хорошо известно, что наибольшим ассортиментом свойств обладают наименее симметричные кристаллы и соответственно наиболее диссимметризованные пирамиды роста, а именно пирамиды и кристаллы только что перечисленных пяти групп. В этих кристаллах и пирамидах роста можно, в принципе, наблюдать наиболее разнообразные и специфичные физические явления: двойное лучепреломление и двойное лучепоглощение, вращение плоскости поляризации, пироэлектрические, пиромаг-

нитные (?), пьезоэлектрические, пьезомагнитные явления, униполярную проводимость (?) и т. д. Очень хорошо эта мысль была выражена в известном лаконическом афоризме Пьера Кюри: «Это она, диссимметрия, творит явление» (C'est la dissymétrie qui crée le phénomène).

Некоторые из этих свойств уже давно используются в технике, некоторые настойчиво ищут себе применения в новой технике, некоторые требуют к себе пристального внимания со стороны исследователей. Беда в том, что в царстве кристаллов те из низкосимметричных кристаллов, которые относятся к указанным пяти группам симметрии, встречаются особенно редко. Из изложенного видно, однако, что такие низкосимметричные кристаллы, в принципе, могут быть заменены пирамидами роста высокосимметричных кристаллов, если при их выращивании приняты меры к «питанию» их соответствующими примесями.

Этим методом, нам кажется, могут быть разрешены, в частности, две проблемы большого научного значения: проблема разделения правых и левых молекул из рацемических смесей и проблема возможности существования атомов и ионов, отличающихся друг от друга только по признаку правизны и левизны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Becke.* Der Aufbau der Kristalle aus Anwachskegeln.— Lotos. Neue Folge, 1894, **14**.
2. *А. В. Шубников.* Как растут кристаллы. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1935, с. 125.
3. *J. Beckenkamp.* Z. Kristallogr., 1913, **51**, 492.
4. *A. E. Milligan.* J. Phys. Chem., 1929, **33**, 1363.
5. *Г. Бакли* (H. E. Buckley). Рост кристаллов (пер. с англ.). М., 1954, с. 296.
6. *Н. Ю. Икорникова.* Зап. Всесоюз. минерал. об-ва, 1948, **77**, № 4, 258.
7. *А. В. Шубников.* Пьезоэлектрические текстуры. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1946. 100 с.
8. *А. В. Шубников, И. С. Желудев, В. П. Константинова, И. М. Сильвестрова.* Исследование пьезоэлектрических текстур. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1955, 189 с.

ПЛАВАЮЩИЕ МАГНИТЫ И ПЛАВАЮЩИЕ КРИСТАЛЛЫ[1]

Когда несколько или много одинаковых либо близких по ряду существенных признаков природных индивидов — электронов, нуклонов, атомов, молекул, бактерий, семян растений, икринок рыб или лягушек, яиц бабочек и т. д.,— взаимодействуя между собой либо с посторонними индивидами, образуют более или менее

[1] «Природа», 1962, № 3, с. 17—22.

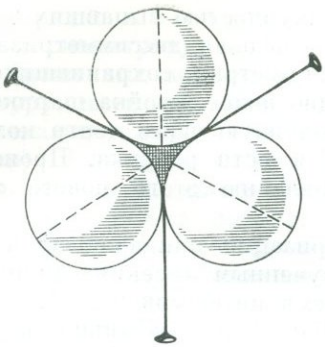


Рис. 1. Пример самопроизвольной симметризации

Пунктиром показаны сохранившиеся плоскости симметрии, прямыми с черными двуугольниками — сохранившиеся двойные оси, черным криволинейным треугольником — новая тройная ось



Рис. 2. Магнитный поплавок: стальная игла, продетая сквозь диск из пенопласта

устойчивый коллектив, одни из элементов симметрии составляющих индивидов могут сохраниться в коллективе, другие могут выпасть. Одновременно в коллективе могут возникнуть совершенно новые элементы симметрии. Выпадение элементов симметрии есть диссимметризация, их появление и вообще всякое повышение симметрии — симметризация [1].

Возьмем вогнутое (часовое) стекло и бросим на него один за другим три одинаковых стальных шарика. Шарики расположатся на стекле правильным треугольником (рис. 1). Легко видеть, что образовавшийся коллектив, тройка шариков, имеет совершенно иную симметрию, чем отдельно взятый шарик. Изолированный шарик обладает максимальной симметрией: имеет множество осей симметрии любого порядка [2] и множество плоскостей симметрии, пересекающихся в центре шарика. Сам этот центр является центром симметрии шарика. Из всех перечисленных элементов симметрии в каждом шарике, как составной части коллектива, сохранились одна ось второго порядка и две пересекающиеся по ней плоскости симметрии — одна перпендикулярная, другая парал-

[1] В более узком смысле под диссимметризацией разумеют такое выпадение элементов симметрии, которое приводит к образованию фигуры, диссимметричной в пастеровском смысле: такая фигура не может быть совмещена со своим зеркальным изображением простым наложением.

[2] Если тело при вращении вокруг некоторой оси за один полный оборот совмещается со своим первоначальным положением n раз, то такая ось называется осью симметрии n-го порядка.

лельная плоскости рисунка. Совокупностью выпавших элементов симметрии характеризуется происшедшая диссимметризация.

Кроме указанных элементов симметрии, сохранившихся в шариках после соединения их в одно целое, тройка шариков имеет еще ось третьего порядка, проходящую через центр коллектива шариков перпендикулярно к плоскости рисунка. Происшедшая симметризация сводится к появлению этого нового элемента симметрии.

Симметризация и диссимметризация принадлежат к широко распространенным, но плохо изученным явлениям природы. Законами этих явлений в свое время интересовался П. Кюри, но, увлеченный исследованиями в области радиоактивности, не довел это дело до конца, о чем, по свидетельству своей жены М. Кюри, всегда сожалел. Мы поставили себе целью в этой статье привлечь внимание читателей к явлениям симметризации и диссимметризации описанием опытов, в которых эти явления выступают наглядно.

Опыты с плавающими магнитами. Опыты с малым числом магнитов были проделаны впервые полвека назад автором корпускулярной теории материи Дж. Дж. Томсоном. Мы повторили эти опыты с большим числом магнитных поплавков, в лучшей обстановке и с иной задачей.

Поплавками у нас служили швейные иголки, продетые сквозь небольшие диски, изготовленные из пенопласта (рис. 2). Иголки намагничивались сильным постоянным магнитом так, чтобы все их острия стали полюсами одного знака. Приготовленные таким образом магнитики пускались плавать остриями вверх по воде, налитой в стеклянный сосуд с плоским дном. Сосуд помещался на столик, под который ставился вертикально стержневой магнит. Верхний его полюс имел противоположный знак по отношению к нижним полюсам плавающих магнитиков. Под дно сосуда подкладывался лист белой бумаги, освещаемый с боков. Над сосудом закреплялся в штативе фотоаппарат для съемки поплавков сверху. В этих условиях на матовом стекле фотоаппарата поплавки выглядели темными кружками на светлом фоне. Такими они вышли и на фотоснимках, показанных на рис. 3. Расстояние между верхним полюсом магнита и дном сосуда подбиралось эмпирически таким, чтобы поплавки не слишком далеко разбегались друг от друга в результате взаимного отталкивания и не слишком сильно сближались в результате притяжения к расположенному внизу магниту и чтобы, во всяком случае, все плавающие магнитики попадали в поле зрения фотоаппарата. На рис. 3 воспроизведено двадцать уменьшенных почти в 5 раз фотографий, снятых с групп плавающих магнитов.

Если бросить на поверхность воды всего один поплавок, то по понятным причинам он втянется нижним магнитом в середину поля зрения. Собственная симметрия единственного поплавка, без учета симметрии его магнитного поля, есть $\infty \cdot m$ (ось беско-

нечного порядка и множество продольных по отношению к ней плоскостей симметрии).

Пара брошенных наудачу поплавков образует на поверхности воды фигуру, имеющую симметрию $2 \cdot m$ (ось второго порядка и две пересекающиеся по ней взаимно перпендикулярные плоскости симметрии). В этом виде симметрии два элемента являются новыми: ось второго порядка и плоскость симметрии, делящая пополам расстояние между поплавками. Появление этих элементов есть симметризация. При образовании пары каждый из поплавков потерял ось бесконечного порядка и все плоскости симметрии за исключением одной — той, которая проходит по осям обеих иголок. Это диссимметризация.

Три поплавка располагаются сами собою по вершинам правильного треугольника, образуя фигуру с симметрией $3 \cdot m$ (ось третьего порядка и три пересекающиеся по ней плоскости симметрии), более высокой, чем у пары поплавков. В тройке поплавков повторяется то, что мы видели в тройке стальных шариков.

Четыре поплавка всегда образуют фигуру с еще более высокой симметрией $4 \cdot m$ (ось четвертого порядка с четырьмя продольными плоскостями симметрии): поплавки располагаются по вершинам квадрата.

Если к четырем поплавкам добавим пятый, то получим одну из двух возможных фигур: либо фигуру опять с симметрией $4 \cdot m$, либо фигуру с симметрией $5 \cdot m$ (ось пятого порядка с пятью продольными плоскостями симметрии). В первом случае четыре поплавка располагаются по вершинам квадрата, а пятый в его центре. Эта фигура получается только тогда, когда присоединяемый к уже плавающим четырем магнитам пятый попадает куда-нибудь внутрь квадрата. В противном случае поплавки располагаются по вершинам правильного пятиугольника. Интересно отметить, что фигура центрированного квадрата для пяти поплавков Томсоном теоретически предусмотрена не была и не была обнаружена экспериментально. Объясняется это не тем, что Томсон ошибся в расчетах, а тем, что обе конфигурации почти одинаково устойчивы. Можно доказать все же, что расположение по центрированному квадрату менее устойчиво, чем расположение по пятиугольнику. Если мы вибрациями сосуда приведем центрированный квадрат в беспорядочное «тепловое» движение, то центральный поплавок может вырваться из середины квадрата и занять равноправное положение на периферии многоугольника в том месте, где расстояние между соседними поплавками квадрата случайно окажется достаточно большим. В результате расположение по центрированному квадрату перейдет в расположение по правильному пятиугольнику. Обратный переход осуществить не удалось.

Шесть поплавков в полном согласии с наблюдениями и расчетами Томсона образуют фигуру правильного центрированного пятиугольника. Такое расположение поплавков (симметрия $5 \cdot m$)

является единственно возможным: вывести центральный поплавок тепловым движением на периферию многоугольника не удается.

Семь поплавков сами собой размещаются по вершинам правильного шестиугольника и в его центре — симметрия $6 \cdot m$. Это расположение отвечает так называемой *плотнейшей упаковке*, хорошо известной кристаллографам.

Интересно отметить, что эту упаковку с равным правом можно было бы назвать и наименее плотной, *рыхлейшей*, поскольку поплавки не только не соприкасаются друг с другом, а, наоборот, стремятся расположиться возможно свободнее. В действительности, наша упаковка не является ни плотнейшей, ни рыхлейшей, а *равновесной*, как и всякая другая, так называемая плотнейшая. В нашей равновесной упаковке силы взаимного отталкивания поплавков уравновешиваются силами притяжения их нижним магнитом, влекущими поплавки к центру поверхности воды.

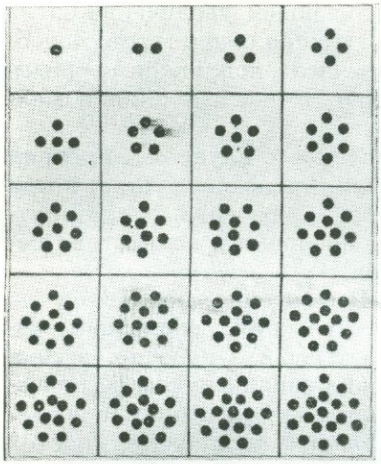
В наших опытах описанный шестиугольник часто обнаруживал тенденцию диссимметризоваться — немного вытягиваться по одной из своих диагоналей (симметрия $2 \cdot m$) при изменении расстояния нижнего магнита от дна сосуда. На рис. 3 дана фотография именно этого расположения. Чем вызывается эта диссимметризация — небольшими различиями поплавков, диссимметрией нижнего магнита или другими причинами,— нами не рассматривалось.

По Томсону, восемь поплавков должны располагаться единственным способом — по вершинам правильного семиугольника и в его центре — симметрия $7 \cdot m$. В наших опытах мы систематически наблюдали два приблизительно равновероятных расположения: томсоновское по правильному центрированному семиугольнику и новое расположение по шестиугольнику с двумя поплавками внутри него. Семиугольник систематически получался у нас вытянутым вдоль одного из его наибольших радиусов — симметрия $2 \cdot m$. Шестиугольник всегда был вытянут вдоль одной из его диагоналей, а два поплавка внутри него всегда располагались зигзагом по отношению к этой диагонали. Вследствие этого вся фигура в целом принимала весьма низкую симметрию 2 — единственная двойная ось при полном отсутствии плоскостей симметрии.

Для девяти поплавков Томсон предусматривает единственное расположение — центрированный правильный восьмиугольник (симметрия $8 \cdot m$). В наших опытах из девяти поплавков семь распределялись по вершинам неправильного семиугольника, а два поплавка находили себе определенное место внутри семиугольника. В целом получалась фигура, имеющая симметрию m.

Десять поплавков, по Томсону, должны располагаться в двух оболочках: во внешней — восемь, во внутренней — два. У нас во внешней оболочке всегда размещалось семь поплавков, во внутренней — три (симметрия m).

Одиннадцать поплавков дают, по Томсону, конфигурацию $3+8$, совпадающую с действительно наблюдаемой—симметрия m.



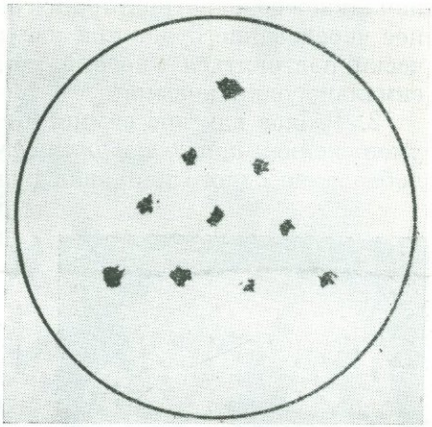


Рис. 3. Двадцать фотографий плавающих магнитов (ум. ~ в 5 раз)

Рис. 4. Самопроизвольная симметризация плавающих кристаллов салола

Двенадцать поплавков, по Томсону, должны дать конфигурацию $3 + 9$. Наблюдение дает две приблизительно равновероятные конфигурации: $3 + 9$ и $4 + 8$. Первая имеет симметрию $3 \cdot m$, вторая $4 \cdot m$. Для тринадцати и четырнадцати поплавков получаются конфигурации $4 + 9$ и $5 + 9$. Обе имеют симметрию m. Пятнадцать поплавков образуют конфигурацию $5 + 10$, имеющую симметрию $5 \cdot m$. Начиная с шестнадцати поплавков (наблюдавшаяся конфигурация $1 + 6 + 9$ на рис. 3 не изображена), получаются конфигурации из трех оболочек. Семнадцать и восемнадцать поплавков дают конфигурацию $1 + 6 + 10$ и $1 + 7 + 10$. Каждая из них имеет симметрию m.

При дальнейшем увеличении числа поплавков расположение их становится все более и более неопределенным, так как в этих условиях начинают сильно сказываться индивидуальные особенности поплавков, и по этой причине многие конфигурации становятся практически равновероятными. Внешнее очертание коллектива поплавков все более и более приближается к окружности. О взаимном расположении поплавков можно сказать, что при большом их числе оно *в среднем* не будет отличаться от плотнейшей упаковки. Это означает, что каждый поплавок внутри коллектива будет окружен в среднем шестью соседними поплавками.

Подводя итог описанным опытам с плавающими магнитами, приходим к следующим выводам.

1. По мере увеличения числа поплавков коллектива его симметрия сначала монотонно возрастает по схеме $2 \cdot m \to 3 \cdot m \to 4 \cdot m \to 5 \cdot m$, затем резко падает до $2 \cdot m$, m, 2.

В наших опытах этот цикл при дальнейшем увеличении числа поплавков надежно повторился еще раз. Можно ожидать, что подобное чередование будет при увеличении числа поплавков периодически повторяться многократно, если изготовить поплавки максимально одинаковыми.

2. Резкое падение симметрии, именуемое в науке о симметрии уменьшением *порядка группы симметрии*, происходит тогда, когда добавление одного поплавка приводит к зарождению новой внутренней оболочки в коллективе поплавков.

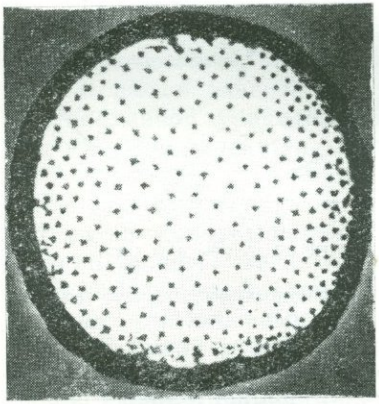


Рис. 5. Плавающие кристаллы пентаэритрита в стадии, когда они движутся к центру капли

3. Размещение поплавков по концентрическим оболочкам напоминает собою, конечно, весьма отдаленно, аналогичное размещение электронов в атомах, а добавление одного поплавка — переход данного атома к атому с номером, на единицу бóльшим в периодической системе.

4. Из рис. 3 видно, что каждая оболочка коллектива поплавков может вместить в себе не более определенного их числа. Можно утверждать, например, что первая внутренняя оболочка не может содержать более пяти поплавков, а следующая за ней — не более десяти поплавков. Хорошо известно, что с некоторыми отступлениями аналогичным свойством обладают также и электронные оболочки атомов.

5. На примерах коллективов из пяти и двенадцати поплавков видно, что при одном и том же числе поплавков могут получаться две различные конфигурации. Вероятности образования их почти одинаковы. Одна из них все-таки является менее устойчивой, находящейся в «возбужденном» состоянии и потому при благоприятных условиях могущей перейти в другую, более устойчивую конфигурацию.

Мы не думаем, что отмеченные нами черты сходства между тем, что происходит в микромире, и тем, что мы наблюдаем в опытах с плавающими магнитами, могут оказаться в настоящее время полезными при исследованиях в области атомной физики, но для познания многих явлений, происходящих у нас на глазах, подобные опыты в ряде случаев могут понадобиться. К таким явлениям, в частности, относятся те, которые мы наблюдаем в плавающих кристаллах.

Опыты с плавающими кристаллами. В только что описанных опытах с плавающими магнитами равновесное состояние

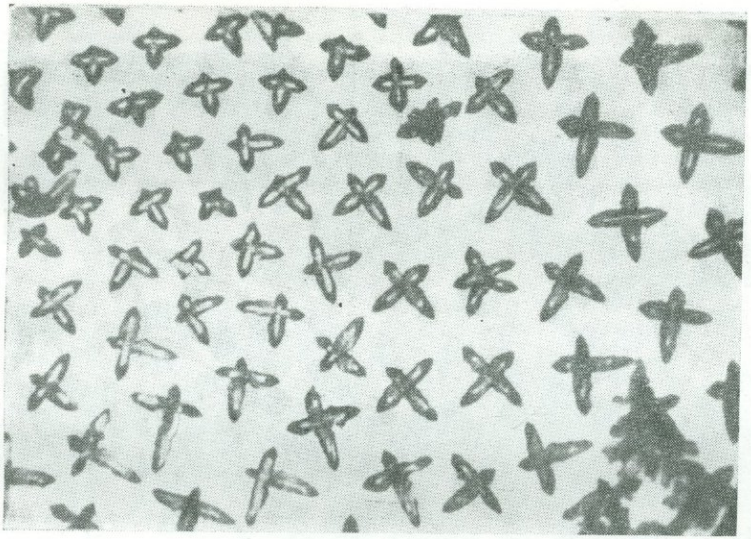


Рис. 6. Плавающие кристаллы пентаэритрита (крестики) при большой скорости роста в стадии, когда движение к центру капли сильно замедлилось

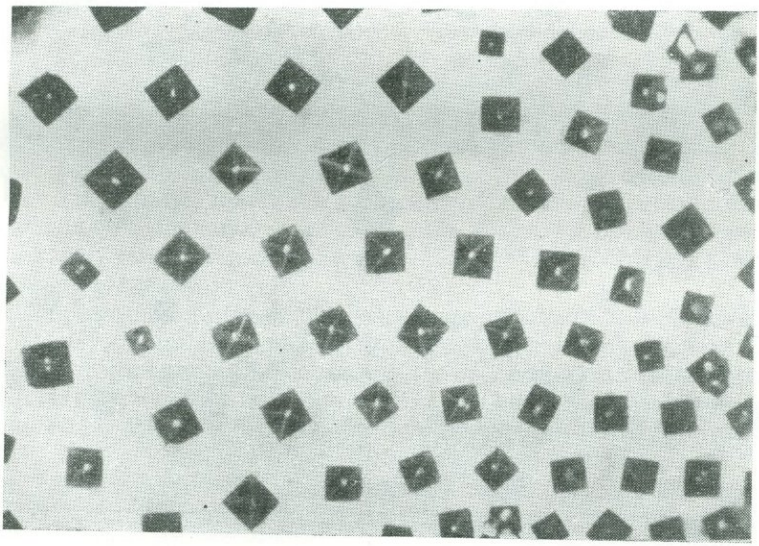
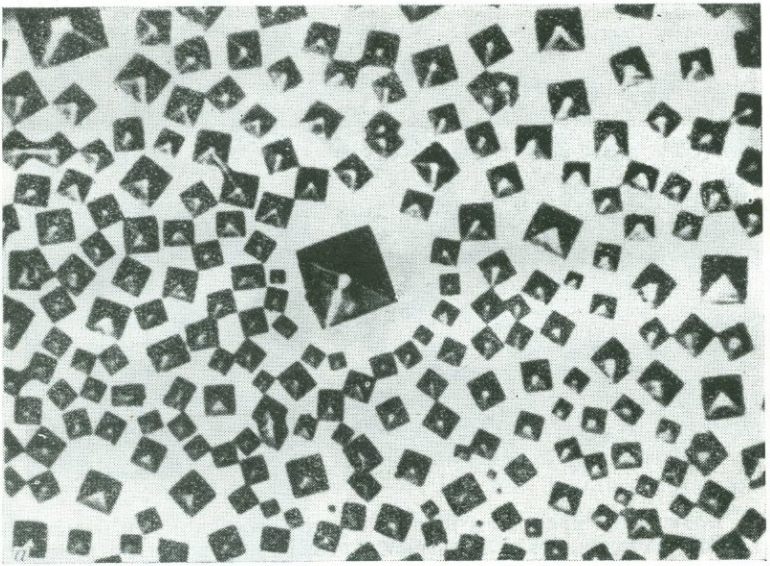
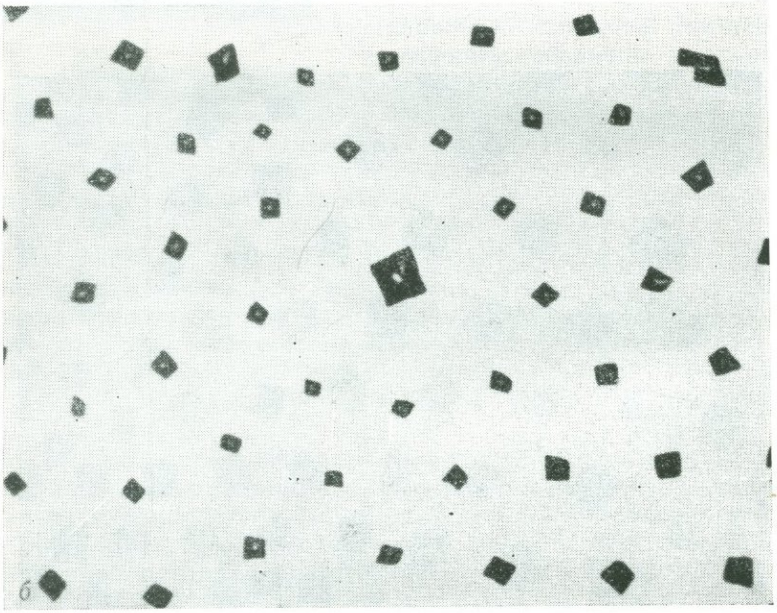


Рис. 7. Плавающие кристаллы пентаэритрита (квадратики) в стадии сильно замедленного движения к центру капли. Каждый кристалл, в среднем, окружен шестью равными





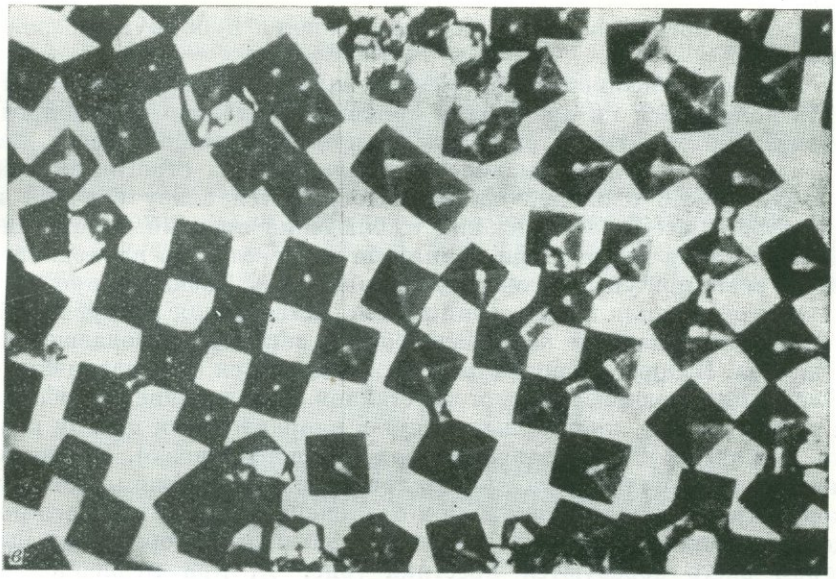


Рис. 8. Большие кристаллы требуют большего простора. Маленькие кристаллы разной величины, окружающие большой кристалл, располагаются кольцом перегулярно (*а*). Одинаковые кристаллы небольшого размера окружают одиночный больший кристалл, располагаясь вокруг него закономерно, по вершинам правильного многоугольника (*б*). Примеры образования шахматных структур в последний период образования плавающих кристаллов пентаэритрита (*в*)

поплавков достигалось в результате компенсации сил взаимного отталкивания поплавков друг от друга и сил притяжения их к ниже расположенному магниту, точнее — тангенциальных слагающих этих сил, направленных к центру поверхности воды в сосуде. Аналогичные явления наблюдаются в опытах с плавающими кристаллами.

Впервые подобные явления демонстрировались в Москве проф. Ю. В. Вульфом на экране с помощью проекционного микроскопа при чтении лекций и показе опытов по кристаллизации салола ($HOC_6H_4COOC_6H_5$) примерно в 1913 г. Позднее некоторые из этих явлений были опубликованы в работе автора и Г. Леммлейна (1928 г.), где, в частности, было обращено внимание на то, что при благоприятных обстоятельствах плавающие кристаллы салола комбинируются в симметричные сочетания — симметризуются (рис. 4).

Особенно эффектно ведут себя плавающие и одновременно растущие кристаллы пентаэритрита $C(CH_2OH)_4$, впервые описанные Б. Краузе и М. Реннингером (1953 г.). Мы повторили их опыты в далее описываемых вариантах, при этом были обнаружены

некоторые новые явления. Здесь эти явления публикуются впервые.

Капля насыщенного при 30—40° С водного раствора пентаэритрита помещается на предметное стекло. Желательно стекло предварительно смазать ничтожным количеством машинного масла для того, чтобы капля не смачивала стекла и имела строго круглую форму. Стекло с каплей слегка подогревается снизу спичкой и кладется на столик микроскопа. Наблюдения явлений кристаллизации в капле ведутся при комнатной температуре в проходящем белом свете при увеличении примерно в 20 раз. Сначала в процессе охлаждения капли и испарения из нее растворителя вокруг капли образуется сплошной кольцевой ободок закристаллизовавшегося вещества. Вскоре от ободка начинают отделяться едва различимые глазом плавающие зародыши кристаллов. Отталкиваясь от ободка и друг от друга, кристаллы плывут в направлении к центру капли, все время увеличиваясь в своих размерах (рис. 5). В зависимости от скорости роста кристаллов, т. е., в конечном счете, от концентрации взятого раствора и от степени предварительного подогрева капли, кристаллы принимают различную форму: при быстром росте образуются крестики (рис. 6), при медленном — квадратики (рис. 7). Обращает на себя внимание, что плавающие кристаллы при наличии свободного места не приходят в соприкосновение друг с другом (соприкасаться могут только случайно образующиеся на дне неплавающие кристаллы). При этом кристаллы равной величины, подобно плавающим магнитам при большом их числе, стремятся расположиться относительно друг друга по закону равновесной гексагональной (плотнейшей) упаковки. В конкретных условиях это означает, что кристаллы приблизительно равной величины попадают в окружение пяти — семи таких же кристаллов, т. е. шести соседей *в среднем* (рис. 5—7). Крупные индивиды среди мелких требуют себе большего простора (рис. 8, *а*). Если крупный кристалл окружается мелкими одинаковой величины, то они располагаются вокруг крупного симметрично по вершинам правильного многоугольника (рис. 8, *б*). Как показали Б. Краузе и М. Реннингер, взаимное отталкивание плавающих кристаллов пентаэритрита (и многих других веществ) и одновременное отталкивание их от закристаллизовавшегося ободка капли вызывается тем, что при возникновении и росте кристаллы пентаэритрита своими верхушками заряжаются отрицательно. Для доказательства этого достаточно поднести к ним какое-нибудь заряженное тело, например потертую о волосы гребенку. От нее кристаллы отталкиваются, поскольку при трении о волосы гребенка заряжается тоже отрицательно.

При небольшой величине кристаллов и относительно больших расстояниях между ними форма кристаллов не оказывает существенного влияния на их взаимное расположение: плавающие кристаллы, будь то крестики или квадратики, располагаются по азимуту беспорядочно. По мере роста кристаллов среднее расстоя-

ние между ними уменьшается. Продолжая отталкиваться друг от друга, иначе говоря, стремясь расположиться возможно свободнее, кристаллы приходят в соприкосновение своими остриями. Равные между собою квадратики образуют при этом симметричные шахматные структуры — структуры с наибольшими пустотами (рис. 8, *в*).

Описанные правильности расположения плавающих кристаллов — гексагональная упаковка и шахматная структура — возникают в результате естественной тенденции равных между собой индивидов к упорядочению, симметризации образуемого ими коллектива.

СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ КАК ОДНОРОДНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЫ[1]

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Однородность, непрерывность и анизотропия. Для описания многих явлений в кристаллах теория решетчатой структуры с успехом может быть заменена представлением об однородном непрерывном строении кристаллов. Непрерывной мы называем такую среду, в которой нет разделенных друг от друга частиц конечной величины; частицы непрерывной среды — это точки, постепенно переходящие одна в другую. Непрерывная среда однородна, если свойства ее во всех точках одинаковы; она может быть изотропна, если свойства ее одинаковы по различным направлениям, и анизотропна, если они не одинаковы по различным направлениям.

Примерами однородных непрерывных сред могут служить: электрическое поле плоского конденсатора, магнитное поле между плоскими полюсами магнита, поле тяготения вблизи поверхности земли и т. д. В отношении ряда свойств (оптических, тепловых и т. д.) кристаллы, как увидим далее, также могут служить примером однородных непрерывных сред.

Основной постулат о возможной симметрии кристалла как однородной непрерывной среды. Исследование физических свойств кристаллов приводит к заключению, что в группы симметрии (точечные, линейные, пространственные) кристалла как непрерывной среды могут входить, кроме уже известных нам элементов симметрии, также и новые характерные элементы симметрии,

[1] *А. В. Шубников, Е. Е. Флинт, Г. Б. Бокий.* Основы кристаллографии. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1940, ч. IV, с. 261—331.

а именно: ось бесконечного порядка ∞, винтовая ось бесконечного порядка $\dot{\infty}$, ось непрерывных переносов a'.

Примером фигуры, обладающей осью симметрии бесконечного порядка, может служить любое тело вращения (токарные формы), например конус. Фигура, имеющая ось симметрии бесконечного порядка, приходит в совмещение сама с собой при повороте вокруг оси на любой угол.

Примером фигур, обладающих винтовой осью бесконечного порядка, служит бесконечный правый или левый винт. Фигуры, имеющие винтовую ось бесконечного порядка, совмещаются сами с собой в результате одновременного поворота вокруг оси на любой угол и поступательного перемещения вдоль оси, пропорционального величине угла поворота.

Примером фигур с осью непрерывных переносов служит бесконечная натянутая лента. Перемещение ленты вдоль оси на любое расстояние приводит к совмещению ленты с ней самой.

Тридцать девять точечных групп кристаллографической симметрии. На основании принципа, высказанного нами, можно подсчитать, что число точечных групп симметрии кристаллов равно 39. В него входят 32 группы симметрии форм роста и 7 групп, содержащих оси симметрии бесконечного порядка. Эти последние группы будем называть *предельными*. Полный перечень 39 групп кристаллографической симметрии дан в табл. 1.

Таблица 1

Тридцать девять групп кристаллографической симметрии

1	$(\bar{1}=m)$	$(1:m=m)$	m	$(1:2=2)$	$(\bar{1}\cdot m=m)$	$(m\cdot 1:m=2\cdot m)$
2	$\bar{2}$	$2:m$	$2\cdot m$	$2:2$	$(\bar{2}\cdot m=2:m)$	$m\cdot 2:m$
3	$(\bar{3}:3:m)$	$3:m$	$3\cdot m$	$3:2$	$(\bar{3}\cdot m=m\cdot 3:m)$	$m\cdot 3:m$
4	$\bar{4}$	$4:m$	$4\cdot m$	$4:2$	$\bar{4}\cdot m$	$m\cdot 4:m$
6	$\bar{6}$	$6:m$	$6\cdot m$	$6:2$	$\bar{6}\cdot m$	$m\cdot 6:m$
∞	$\overline{\infty}=\infty:m$	$\infty:m$	$\infty\cdot m$	$\infty:2$	$(\overline{\infty}\cdot m=$ $=m\cdot\infty:m)$	$m\cdot\infty:m$
$3/2$	$3/4$	$\bar{6}/2$	$3/\bar{4}$	$\bar{6}/4$	∞/∞	$\infty/\infty\cdot m$

В этой таблице некоторые группы, получающие с равным правом различные обозначения, повторены в скобках.

Примеры конечных фигур, обладающих предельной симметрией. Точечные группы предельной симметрии легко запоминаются по простейшим фигурам, обладающим соответствующей симметрией (рис. 1). При этом под фигурами, как обычно в кристаллографии, подразумеваются тела определенной формы и определенных физических свойств.

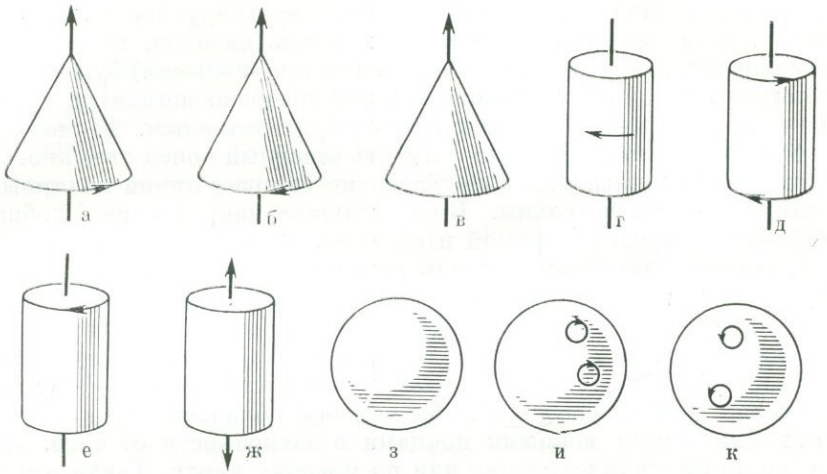


Рис. 1. Примеры конечных фигур, обладающих предельной симметрией: ∞ (*а*); ∞ (*б*); $\infty \cdot m$ (*в*); $\infty : m$ (*г*); $\infty : 2$ (*д*); $\infty : 2$ (*е*); $m \cdot \infty : m$ (*ж*); $\infty/\infty \cdot m$ (*з*); ∞/∞ (*и*); ∞/∞ (*к*)

Например, вращающийся конус (точнее часть конуса) имеет симметрию ∞; другими словами, в таком конусе есть только одна ось симметрии бесконечного порядка. Существуют две модификации вращающегося конуса: с правым и левым вращением; обе модификации имеют, однако, одинаковую симметрию, подобно тому, как правый и левый кварц принадлежит к одной группе $3 : 2$. Ось вращающегося конуса *полярна*; ее концы кристаллографически различны и не могут быть совмещены друг с другом с помощью элементов симметрии данной фигуры. Та же ось *вращательна*, так как в ней можно отличить северный и южный концы, о чем подробнее будет сказано ниже.

Невращающийся конус имеет симметрию $\infty \cdot m$; в нем есть одна ось симметрии бесконечного порядка, совпадающая с геометрической осью фигуры, и бесконечное множество продольных плоскостей симметрии, пересекающихся между собой по оси цилиндра. Ось симметрии, как и в случае вращающегося конуса, полярна. Полярные направления удобно изображать обыкновенной одноконечной прямой стрелкой.

Вращающийся цилиндр имеет симметрию $\infty : m$; в нем есть одна ось симметрии бесконечного порядка, совпадающая с геометрической осью цилиндра, одна поперечная плоскость симметрии и центр симметрии. В данном случае ось симметрии неполярна, так как оба ее конца могут быть совмещены друг с другом отражением в поперечной плоскости симметрии. Хотя в рассматриваемой фигуре концы оси кристаллографически одинаковы (зеркально равны) и не являются настоящими полюсами, все же

мы можем отличить оба конца оси по характеру вращения цилиндра, если смотреть на него вдоль оси то на одно, то на другое основание. В этом случае *южным* концом (полюсом) будет тот, со стороны которого вращение кажется совершающимся по часовой стрелке; противоположный конец будет *северным*. Такие направления, в которых можно отличить северный конец от южного, назовем *вращательными*. Электрические силовые линии полярны, магнитные — вращательны. Вращательные направления удобно изображать отрезком прямой и обтекающей ее стрелкой.

Цилиндр, закрученный вдоль геометрической оси, имеет симметрию $\infty : 2$; в нем есть одна ось симметрии бесконечного порядка и бесконечное множество поперечных осей второго порядка. Ось бесконечного порядка неполярна, так как оба ее конца совмещаются друг с другом поворотами вокруг осей второго порядка; она также и невращательна, так как она обладает двумя северными или двумя южными концами в зависимости от того, закручен ли цилиндр по левому или по правому винту. Такие оси и направления мы будем называть *крутильными*. Фигуры с крутильным направлением имеют две энантиоморфные модификации. Крутильные направления удобно изображать отрезком прямой и двумя обтекающими стрелками.

Покоящийся цилиндр, а также цилиндр, растянутый или сжатый вдоль геометрической оси, имеет симметрию $m \cdot \infty : m$; в нем есть одна ось симметрии бесконечного порядка, одна поперечная и бесконечное множество продольных плоскостей симметрии, бесконечное множество осей второго порядка и центр симметрии. Концы оси симметрии бесконечного порядка в данном случае совмещаются друг с другом как отражением в поперечной плоскости симметрии, так и вращением вокруг поперечных осей второго порядка. Мы будем называть такие оси бесконечного порядка и такие направления максимально симметричными и обозначать их двухконечными стрелками.

Обыкновенный шар имеет бесконечное множество плоскостей симметрии, проходящих через центр шара, и бесконечное множество осей симметрии бесконечного порядка, пересекающихся в центре шара, совпадающем с центром симметрии.

Шар, изготовленный из изотропного вещества, вращающего плоскость поляризации (стр. 265), в отношении оптических свойств обладает симметрией ∞/∞; такой шар не имеет плоскостей симметрии, но имеет бесконечное множество осей симметрии бесконечного порядка. Наглядное представление о шаре без плоскостей симметрии можно составить себе, если вообразить, что все радиусы шара вращаются в одну сторону (если смотреть с поверхности шара); очевидно, что шар с симметрией ∞/∞ может иметь две модификации: правую и левую. Диаметры энантиоморфных шаров представляют собой крутильные направления.

Типы кристаллографической симметрии. Для изучения физических свойств кристаллов важно установить, какой предельной

Таблица 2

Типы кристаллографической симметрии

Подчиненная группа	Тип симметрии						
	∞	$\infty : m$	$\infty \cdot m$	$\infty : 2$	$m \cdot \infty : m$	∞/∞	$\infty/\infty \cdot m$
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+
$\bar{2}$		+			+		+
$\bar{4}$		+			+		+
$\bar{6}$		+			+		+
$6 : m$		+			+		+
$4 : m$		+			+		+
$3 : m$		+			+		+
$2 : m$		+			+		+
m		+	+		+		+
$2 \cdot m$			+		+		+
$3 \cdot m$			+		+		+
$4 \cdot m$			+		+		+
$6 \cdot m$			+		+		+
$2 : 2$				+	+	+	+
$3 : 2$				+	+	+	+
$4 : 2$				+	+	+	+
$6 : 2$				+	+	+	+
$\bar{4} \cdot m$					+		+
$\bar{6} \cdot m$					+		+
$m \cdot 2 : m$					+		+
$m \cdot 3 : m$					+		+
$m \cdot 4 : m$					+		+
$m \cdot 6 : m$					+		+
$3/2$						+	+
$3/4$						+	+
$\bar{6}/2$							+
$3/\bar{4}$							+
$\bar{6}/4$							+
Число групп в типе	5	13	10	9	27	11	32

группе *подчинена* данная группа, т. е. в какую предельную группу входят целиком все элементы симметрии данной группы. Возьмем для примера предельную группу $\infty : 2$, состоящую из одной простой оси бесконечного порядка и бесчисленного множества перпендикулярных к ней осей второго порядка. Ось бесконечного порядка содержит повороты на любой угол, следовательно, группе $\infty : 2$ подчинены группы *1*, *2*, *3*, *4*, *6*. Кроме того, той же предельной группе $\infty : 2$ подчинены группы $2 : 2$, $3 : 2$, $4 : 2$, $6 : 2$, так как двойные оси этих групп содержатся среди двойных осей группы $\infty : 2$. Совокупность групп, подчиненных данной предельной группе, составляет один *тип симметрии*. Приводим распределение групп по типам (табл. 2):

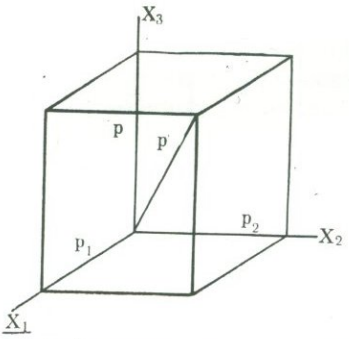


Рис. 2. Вектор p и его компоненты

Скаляры и векторы. Величины, которые не могут изменяться с направлением в анизотропной среде, называются *скалярными*. Рассмотренные нами в первой части объемные свойства кристаллического вещества, масса, плотность, удельный объем, температура, энергия и т. д. представляют собой скаляры. Величины, зависящие от направления, называются *векторами*. Примерами векторов могут служить: путь, пройденный точкой, скорость, ускорение, напряженность электрического поля и т. д. Векторы изображаются отрезками прямых: величина отрезка соответствует величине вектора, направление отрезка — направлению вектора.

Пусть вектор p выходит из начала прямоугольной системы координат X_1, X_2, X_3 (рис. 2). Построим прямоугольный параллелепипед так, чтобы вектор p был диагональю этого параллелепипеда, а его грани были бы параллельны плоскостям X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1.

Назовем координаты второго конца вектора, т. е. ребра p_1, p_2, p_3 параллелепипеда, *компонентами вектора*. Из построения видно, что величина и направление вектора однозначно определяются его компонентами. Для вычисления величины вектора по его компонентам служит формула

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \qquad (1)$$

Направление вектора определяется углами α_1, α_2, α_3, образованными векторами с осями координат. Косинусы этих углов вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha_1 = p_1/p, \qquad \cos\alpha_2 = p_2/p, \qquad \cos\alpha_3 = p_3/p. \qquad (2)$$

Компоненты вектора сами являются векторами, но так как направление их известно, то с ними можно обращаться как со скалярами. Мы можем поэтому сказать, что вектор p есть величина, определяемая тремя скалярами p_1, p_2, p_3 с помощью формул (1) и (2).

З а д а ч и: 1) Построить вектор по компонентам $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$; $p_1 = -2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$; $p_1 = -2$, $p_2 = -3$, $p_3 = -5$.

2) Из последнего математического определения понятия «вектор» следует, что все действия над векторами могут быть сведены к действиям над его компонентами. Положим, например, что нам нужно найти равнодействующую R двух векторов p и q, если известны их компоненты $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $q_1 = 4$, $q_2 = -5$, $q_3 = 2$. Компоненты равнодействующей равны сумме соответствующих компонент слагающих векторов: $R_1 = 2 + 4 = 6$, $R_2 = 3 - 5 = -2$, $R_3 = 3 + 2 = 5$,

$$R = \sqrt{6^2 + 2^2 + 5^2} = 65, \cos\alpha_1 = 6/\sqrt{65}, \cos\alpha_2 = -2/\sqrt{65}, \cos\alpha_3 = 5/\sqrt{65}. \quad (3)$$

3) Найти равнодействующую векторов p и q при условии $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $q_1 = -1$, $q_2 = -2$, $q_3 = -3$; $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $q_1 = -1$, $q_2 = -2$, $q_3 = 3$.

Преобразование компонент вектора. Один и тот же вектор, отнесенный к различным системам координат, имеет различные компоненты. Возникает вопрос, как же преобразуются компоненты вектора p после замены координат X_1, X_2, X_3 новой системой X_1', X_2', X_3'. Взаимное расположение обеих систем вполне определяется углами между старыми и новыми осями. Обозначим косинусы этих углов общим символом $c_{ik} = \cos(X_i X_k')$, где числами i и k отмечаются индексы старых и новых осей, например, $c_{13} = \cos(X_1 X_3')$; $c_{22} = \cos(X_2 X_2')$.

Для лучшего обозрения всей системы величин c_{ik} полезно руководствоваться следующей схемой:

	X_1'	X_2'	X_3'
X_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
X_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
X_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

(4)

Методами аналитической геометрии можно показать, что в случае, если обе системы координат имеют общее начало, новые компоненты p_1', p_2', p_3' вычисляются по старым компонентам с помощью формул:

$$\begin{aligned} p_1' &= c_{11}p_1 + c_{21}p_2 + c_{31}p_3, \\ p_2' &= c_{12}p_1 + c_{22}p_2 + c_{32}p_3, \\ p_3' &= c_{13}p_1 + c_{23}p_2 + c_{33}p_3, \end{aligned} \quad (5)$$

которые можно записать в следующей форме:

	p_1	p_2	p_3
p_1'	c_{11}	c_{21}	c_{31}
p_2'	c_{12}	c_{22}	c_{32}
p_3'	c_{13}	c_{23}	c_{33}

или в форме символического равенства

$$p_i' = c_{ki} p_k. \tag{6}$$

Для вычисления старых компонент по новым служат аналогичные равенства:

$$p_i = c_{ik}\, p_k', \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{7}$$

З а д а ч а. Найти, как преобразуются компоненты $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ вектора p при повороте системы координат около оси X_3 на угол 30° по часовой стрелке, если смотреть со стороны положительного конца оси X_3; система координат правая.

Составляем схему косинусов c_{ik}

	X_1'	X_2'	X_3'
X_1	$\sqrt{3}/2$	$+1/2$	0
X_2	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	0
X_3	0	0	1

Отсюда

$$p_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 3 = \frac{1}{2} + \sqrt{3},$$

$$p_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3.$$

Если бы поворот был сделан на тот же угол против часовой стрелки, то мы имели бы следующую схему косинусов:

	X_1'	X_2'	X_3'
X_1	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0
X_2	$+1/2$	$\sqrt{3}/2$	0
X_3	0	0	1

Тензоры. Скалярные величины, как известно, бывают постоянными и переменными. Простейшая зависимость между двумя переменными скалярными величинами есть пропорциональность; например, масса m какого-либо однородного вещества пропорцио-

нальна его объему V:

$$m = \rho \cdot V.$$

Коэффициент пропорциональности ρ есть постоянная величина, равная плотности вещества. Если точная зависимость между двумя переменными скалярными величинами и неизвестна, но известно, что она существует, то в первом приближении можно предполагать, что исследуемые величины пропорциональны друг другу. Очень часто такое предположение оправдывается на опыте, особенно если исследование величин производится в малом интервале их изменений.

Если ищут зависимость между двумя переменными векторами p и q, то в первом приближении можно предполагать, что компоненты обоих векторов связаны между собой линейными зависимостями:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3, \\ p_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3, \\ p_3 &= a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3, \end{aligned} \tag{8}$$

которые в наглядной форме можно записать так:

	q_1	q_2	q_3
p_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
p_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
p_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(8′)

В дальнейшем мы будем широко пользоваться этой формой записи уравнений типа (8). Следует помнить, что определяемые величины p_1, p_2, p_3 записываются в первом столбце, а известные величины q_1, q_2, q_3 — в первой строке таблицы. Уравнения (8) могут быть записаны еще совсем коротко в форме условного равенства.

$$p_i = a_{ik}q_k. \tag{9}$$

В этих уравнениях величины a_{ik} представляют собой постоянные коэффициенты.

Совокупность девяти постоянных a_{ik} носит название *тензора второго порядка* в отличие от вектора, который представляет собой совокупность трех компонент и называется *тензором первого порядка*. Величины a_{ik} называются *компонентами тензора*.

Тензор второго порядка записывается обычно в форме

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}. \end{matrix} \tag{10}$$

З а д а ч а. Вычислить частное значение вектора p, если дана следующая зависимость:

	q_1	q_2	q_3
p_1	$+2$	-5	0
p_2	$+5$	$+2$	0
p_3	0	0	1

и если $q_1 = -2$, $q_2 = 4$, $q_3 = 3$.

Пользуясь данным тензором, находим:

$$p_1 = -2 \cdot 2 - 5 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = -24,$$
$$p_2 = -5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = -2,$$
$$p_3 = -0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 3;$$
$$p = \sqrt{24^2 + 2^2 + 3^2} = 24 \cdot 27.$$

Преобразование компонент тензора второго порядка. Пусть два переменных вектора p и q, отнесенных к системе координат X_1, X_2, X_3, связаны тензорным соотношением

$$p_i = a_{ik} q_k. \tag{11}$$

Спрашивается, как изменится форма этого соотношения, если заданную систему координат заменить новой системой X_1', X_2', X_3', имеющей то же начало. В тензорном исчислении доказывается, что новая форма соотношения между компонентами обоих векторов будет иметь вид

	q_1'	q_2'	q_3'
p_1'	a_{11}'	a_{12}'	a_{13}'
p_2'	a_{21}'	a_{22}'	a_{23}'
p_3'	a_{31}'	a_{32}'	a_{33}'

(12)

или

$$p_i' = a_{ik}' q_k', \tag{13}$$

где

$$a_{ik}' = c_{li} c_{mk} a_{lm},$$
$$a_{ik} = c_{il} c_{km} a_{lm}', \quad (i,\ k,\ l,\ m = 1,\ 2,\ 3). \tag{14}$$

Приводим для примера выражение a_{13}' в развернутом виде

$$a_{13}' = c_{11}c_{13}a_{11} + c_{11}c_{23}a_{12} + c_{11}c_{33}a_{13} + c_{21}c_{13}a_{21} + c_{21}c_{23}a_{22} + c_{21}c_{33}a_{23} + c_{31}c_{13}a_{31} + c_{31}c_{23}a_{32} + c_{31}c_{33}a_{33}. \tag{15}$$

З а д а ч а. Найти компоненты тензора

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

после поворота системы координат около оси на угол 30° по часовой стрелке, если смотреть со стороны положительной оси X_3.

Составляем схему косинусов. Пользуясь далее формулами (14), получаем

$$a'_{11} = 5/4 \qquad a'_{12} = 3/4 \qquad a'_{13} = 0$$
$$a'_{21} = -3/4 \qquad a'_{22} = 7/4 \qquad a'_{23} = 0$$
$$a'_{31} = 0 \qquad a'_{32} = 0 \qquad a'_{33} = 3.$$

Тензоры высшего порядка. Если между тензором t, т. е. между его девятью компонентами, и вектором p, т. е. между его тремя компонентами, существует простейшее соотношение

$$t_{ik} = a_{ikl}p_l \text{ или } p_i = a_{ikl}t_{kl}, \tag{16}$$

то совокупность из 27 постоянных a_{ikl} образует тензор третьего порядка. При перемене координат с сохранением общего начала координат тензор третьего порядка преобразуется по формулам:

$$a'_{ikl} = c_{mi}c_{nk}c_{ol}a_{mno},$$
$$a_{ikl} = c_{im}c_{kn}c_{lo}a'_{mno}\ (i,\ k,\ l,\ m,\ n,\ o = 1,\ 2,\ 3). \tag{17}$$

Зависимость между двумя тензорами второго порядка приводит к тензору четвертого порядка и т. д. Число компонент тензора n-го порядка равно 3^n. Тензор четвертого порядка преобразуется по формулам:

$$a'_{iklm} = c_{pi}c_{gk}c_{rl}c_{sm}a_{pqrs}, \tag{17'}$$
$$a_{iklm} = c_{ip}c_{kg}c_{lr}c_{ms}a'_{pqrs}.$$

Симметрия явлений, выражаемых тензором второго порядка. Если между векторами p и q данной кристаллической или, вообще, однородной анизотропной среды имеет место соотношение

$$p_1 = a_{ik}q_k,$$

то среда обладает центром симметрии в отношении свойств, изображаемых этими векторами. Это доказывается тем, что при перемене знаков у компонент p и q, вызывающей изменение направления обоих векторов на обратное с сохранением их величины, тензорное соотношение сохраняет свою силу. Из этого следует, что группы симметрии интересующих нас явлений следует искать среди 11 групп минимальной симметрии с центром симметрии и трех предельных групп с центром симметрии ($\infty : m$, $m \cdot \infty : m$, $\infty/\infty \cdot m$).

Посмотрим, какое влияние на форму тензора оказывает присутствие в среде оси второго порядка, совпадающей с X_3. Составляем схему косинусов, отвечающих повороту системы

координат на 180° около X_3:

	X_1'	X_2'	X_3'
X_1	-1	0	0
X_2	0	-1	0
X_3	0	0	0

Составляем выражение для a_{31}, пользуясь формулой (14):

$$a'_{31} = c_{13}c_{11}a_{11} + c_{13}c_{21}a_{12} + c_{13}c_{31}a_{13} + c_{23}c_{11}a_{21} + c_{23}c_{21}a_{22} + c_{23}c_{31}a_{23} + c_{33}c_{11}a_{31} + c_{33}c_{21}a_{32} + c_{33}c_{31}a_{33}.$$

Так как все косинусы, кроме c_{11}, c_{22}, c_{33}, равны нулю, то

$$a'_{31} = c_{33}c_{11}a_{31} = 1 \cdot -1 \cdot a_{31} = -a_{31}.$$

Так как после поворота на 180° около оси второго порядка ничто не должно измениться, то

$$a'_{31} = a_{31},$$

отсюда

$$a_{31} = -a_{31} = 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$a_{32} = a_{23} = a_{13} = a_{31} = 0, \quad a'_{12} = a_{12}.$$

Из всего сказанного следует, что при существовании оси второго порядка, совпадающей с X_3, тензор должен иметь форму

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}. \end{matrix}$$

Применяя этот метод рассуждения, можно показать, что тензор второго порядка принимает при установке по *главным координатным осям* шесть различных форм (табл. 3). Каждой форме отвечает своя определенная группа симметрии, которую мы будем называть условно *симметрией тензора второго порядка*. Важно отметить, что все кристаллы кубической системы имеют шаровую симметрию ($\infty/\infty \cdot m$) тензора и в этом отношении ничем не отличаются от однородных аморфных сред. Кристаллы тетрагональной и гексагональной систем по симметрии тензора $m \cdot \infty : m$ и $\infty : m$ разделяются на две категории: к одной принадлежат кристаллы, которые по симметрии тензора не отличаются, например, от растянутой резины, имеющей симметрию $m \cdot \infty : m$; к другой — такие кристаллы, которые по симметрии тензора подобны однородному магнитному полю, имеющему симметрию $\infty : m$.

Далее мы будем рассматривать только такие явления, для которых компоненты a_{ik} тензора, расположенные симметрично

Таблица 3

Симметрия и форма тензора второго порядка для однородных анизотропных сред в главной системе координат

Симметрия тензора	Подчиненная группа	Форма тензора	Расположение осей
$\bar{2}$	*1*	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$ $a_{21}\ a_{22}\ a_{23}$ $a_{31}\ a_{32}\ a_{33}$	Расположение осей X_1, X_2, X_3 произвольное
$2:m$	m *2*	$a_{11}\ a_{12}\ 0$ $a_{21}\ a_{22}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{33}$	Двойная ось параллельна X_3; оси X_1, X_2 параллельны m
$m\cdot 2:m$	$2\cdot m$ $2:2$	$a_{11}\ 0\ \ 0$ $0\ \ a_{22}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{33}$	Ось X_3 параллельна одной из двойных осей. Две другие оси X_2 и X_3 параллельны двум другим двойным осям или перпендикулярны плоскостям симметрии
$\infty:m$	$6:m\ \ \bar{4}$ $4:m\ \ 6$ $3:m\ \ 4$ $\bar{6}\ \ \ 3$	$a_{11}\ a_{12}\ 0$ $-a_{12}\ a_{11}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{33}$	Оси *3*, *4*, *6*, $\bar{4}$, $\bar{6}$ параллельны X_3; оси X_1, X_2 параллельны m
$m\cdot\infty:m$	$m\cdot 6:m\ \ 6\cdot m$ $m\cdot 4:m\ \ 4\cdot m$ $m\cdot 3:m\ \ 3\cdot m$ $6\cdot m\ \ \ 6:2$ $\bar{4}\cdot m\ \ \ 4:2$ $3:2$	$a_{11}\ 0\ \ 0$ $0\ \ a_{11}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{33}$	Оси *3*, *4*, *6* параллельны X_3; двойные оси параллельны X_1, X_2
$\infty/\infty\cdot m$	$\bar{6}/4\ \ \ 3/4$ $3/\bar{4}\ \ \ 3/2$ $\bar{6}/2$	$a_{11}\ 0\ \ 0$ $0\ \ a_{11}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{11}$	Три двойных или четверных оси параллельны X_1, X_2, X_3

по отношению к диагонали $a_{11}a_{22}a_{33}$, равны друг другу: $a_{ik} = a_{ki}$.

Для таких явлений число форм тензора сокращается на единицу, так как кристаллы гексагональной и тетрагональной систем попадают в одну категорию (стр. 284).

Заметим, что главные координатные оси нельзя смешивать с кристаллографическими осями, принятыми для описания внешней формы и структуры кристаллов и выбираемыми всегда параллельно возможным ребрам кристалла. Главные координатные оси, применяемые для описания физических свойств кристаллов, всегда, даже у триклинных кристаллов, взаимно перпендику-

лярны и лишь по возможности параллельны осям и плоскостям симметрии.

Тензорная поверхность. При изучении физических свойств кристаллов часто приходится определять, как изменяется та или иная физическая величина с направлением. Это может быть сделано путем перемены системы координат с таким расчетом, чтобы ось X_3' совпадала с изученным направлением. В этом случае определяемая величина часто характеризуется значением a_{33}'. В самом общем случае имеем

$$a_{33}' = c_{13}^2 a_{11} + c_{23}^2 a_{22} + c_{33}^2 a_{33} + c_{13}c_{23}(a_{12} + a_{21}) + \\ + c_{13}c_{33} \cdot (a_{13} + a_{31}) + c_{23}c_{33}(a_{23} + a_{32}). \quad (18)$$

Во многих случаях при этом оказывается, что $a_{ik} = a_{ki}$, тогда

$$a_{33}' = c_{13}^2 a_{11} + c_{23}^2 a_{22} + c_{33}^2 a_{33} + 2c_{13}c_{23}a_{12} + 2c_{13}c_{33}a_{13} + \\ + 2c_{23}c_{33}a_{23}. \quad (19)$$

Если величины c_{ik} считать за переменные, a_{ik} и a_{33} — за постоянные, то последнее уравнение выражает поверхность второго порядка, обыкновенно эллипсоид. Радиусы-векторы этой поверхности равны

$$r = 1/\sqrt{a_{33}'}. \quad (20)$$

Если отнести уравнение тензорной поверхности к главным осям кристалла, выбираемым согласно указаниям табл. 3, то оно принимает более простой вид, как указано в табл. 4.

Таблица 4

Уравнение тензорной поверхности, отнесенной к главным осям кристаллов различных систем

Система	Уравнение тензорной поверхности
Триклинная	$a_{33}' = c_{13}^2 a_{11} + c_{23}^2 a_{22} + c_{33}^2 a_{33} + 2c_{13}c_{23}a_{12} + 2c_{13}c_{33}a_{13} + 2c_{23}c_{33}a_{23}$
Моноклинная	$a_{33}' = c_{13}^2 a_{11} + c_{23}^2 a_{22} + c_{33}^2 a_{33} + 2c_{13}c_{23}a_{12}$
Ромбическая	$a_{33}' = c_{13}^2 a_{11} + c_{23}^2 a_{22} + c_{33}^2 a_{33}$
Тетрагональная, гексагональная	$a_{33}' = c_{13}^2 a_{11} + c_{23}^2 a_{11} + c_{33}^2 a_{33}$
Кубическая	$a_{33}' = (c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2)\, a_{11} = a_{11}$

Обнаружение пироэлектрических зарядов. Если кристаллы турмалина (рис. 3) долгое время выдерживать в термостате при определенной температуре и затем, быстро сняв пламенем спиртовки с поверхности кристалла могущие оказаться на нем случайные электрические заряды, поместить его в другой термостат с более низкой температурой, то по прошествии некоторого времени, достаточного для того, чтобы кристалл принял во всех своих точках новую температуру, на противоположных концах тройной оси симметрии кристалла можно обнаружить новые электрические заряды разного знака. Если повторить опыт в обратном порядке, то концы кристалла перезарядятся электричеством противоположного знака, т. е. конец, который после охлаждения зарядился положительно, после нагревания получит отрицательный заряд, и наоборот. Электричество, возникающее на поверхности кристаллов-диэлектриков (не проводящих электрического тока) вследствие изменения температуры, называется *пироэлектричеством*. Тот полюс кристалла, который при нагревании заряжается положительно, называют *аналогичным* (+), противоположный полюс — *антилогичным* (—). Пироэлектрические заряды могут быть очень просто обнаружены *методом опыления*, предложенным Кундтом в 1883 г. Для этого смешивают равные объемы порошков серы и свинцового сурика Pb_3O_4. Пропуская смесь через шелковое сито, опыляют ею нагретый или охлажденный кристалл. Частички серы в этих условиях заряжаются от трения отрицательно, а частицы сурика — положительно и садятся соответственно на положительно и отрицательно заряженные участки поверхности кристалла, окрашивая их в желтый и красный цвета. В турмалине в разные цвета окрашиваются концы кристалла, отвечающие концам тройной оси.

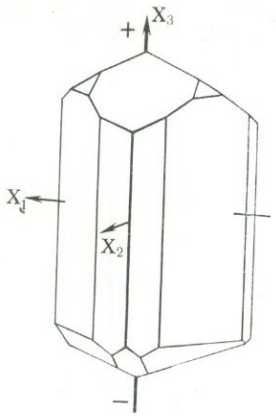


Рис. 3. Кристалл турмалина, имеющий симметрию $3 \cdot m$. Ось X_3 совпадает с осью 3. Аналогичный полюс обозначается плюсом, антилогичный — минусом

Если заряженный пироэлектричеством кристалл положить на стекло, покрыть колпаком, под которым предварительно был сожжен небольшой кусочек ленты магния, то частицы дыма окиси магния, оседая на кристалл и стекло, образуют тончайшие нити вдоль силовых линий электрического поля. Получаемые этим способом картины напоминают хорошо известные изображения магнитного поля, образуемые железными опилками вокруг магнита.

Пироэлектрический эффект может быть замечен также на кристаллах, если их предварительно сильно охладить жидким воздухом и затем предоставить им возможность нагреваться в воздухе при комнатной температуре. В этом случае на заряженных пироэлектричеством частях кристалла конденсируются пары влаги воздуха в форме иголочек льда, направленных своей длиной вдоль силовых линий поля.

Основные закономерности пироэлектрического эффекта. Появление пироэлектрических зарядов на поверхности кристалла связано с изменением постоянной *поляризации*, существующей внутри него, т. е. с дополнительным смещением зарядов в одном определенном направлении, называемом *направлением поляризации* или электрической осью. С количественной стороны поляризация характеризуется *интенсивностью поляризации*. Если кристалл (рис. 4) имеет форму прямоугольного бруска с объемом v и с высотой l и если направление поляризации совпадает с направлением l, а величина заряда на одном из оснований равна e, то интенсивность поляризации I определяется из равенства $I = el/v$.

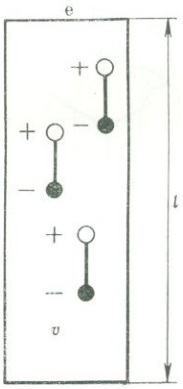


Рис. 4. Поляризация диэлектрика

Произведение el называется *электрическим моментом*; интенсивность поляризации, следовательно, равна моменту единицы объема. Интенсивность поляризации есть вектор, его направление совпадает с направлением поляризации и считается положительным внутри кристалла в сторону от минуса к плюсу.

В первом приближении можно принять, что изменение интенсивности пироэлектрической поляризации пропорционально изменению температуры кристалла:

$$dI = kdT. \qquad (21)$$

Количественная проверка этого положения затрудняется тем, что всякий кристалл обладает некоторой проводимостью; поэтому, пока кристалл принимает окончательную температуру, поверхностные заряды противоположного знака частично компенсируются. Вопрос осложняется еще появлением дополнительных пьезоэлектрических зарядов (см. ниже), возникающих вследствие неравномерного нагревания, вызывающего внутри кристалла механические напряжения и деформации.

Теоретически можно предвидеть возможность *обратного пироэлектрического эффекта* для кристаллов, в которых наблюдается обыкновенный, или *прямой пироэлектрический эффект*. Обратный эффект характеризуется появлением разности температур по

концам электрической оси, если соответствующие места кристалла будут искусственно заряжены разноименным электричеством. До настоящего времени существование обратного пироэффекта с уверенностью не доказано.

Существование постоянной поляризации внутри кристаллов турмалина доказывается тем, что при разламывании игл турмалина на гранях излома можно обнаружить заряды. По измерениям Фохта плотность зарядов при 24° оказалась равной около 33 абсолютных электростатических единиц. Знаки этих зарядов оказались противоположными тем, которые обнаруживаются при нагревании. Отсюда следует, что пироэлектрическая константа k в уравнении (21) отрицательна при 24°, т. е. небольшое нагревание выше этой температуры уменьшает существующую интенсивность поляризации. Есть основание предполагать, на основании немногочисленных экспериментальных данных, что константа k изменяет свой знак выше температуры 50°, т. е. становится положительной.

В явлениях пироэлектричества мы имеем пример взаимодействия скаляра (температуры) и вектора (интенсивность поляризации).

Симметрия пироэлектрических кристаллов. Из того факта, что при возникновении пироэлектричества поляризация должна иметь одно вполне определенное направление и что вектор интенсивности поляризации есть полярный вектор, имеющий симметрию $\infty \cdot m$, следует, что *истинное пироэлектричество* возможно только в тех кристаллах, которые обладают особенными полярными осями. Напомним, что особенными называются такие оси в кристалле, которым нет зеркально или конгруэнтно равных, а полярными называются такие оси, концы которых физически различны и не могут быть совмещены друг с другом симметрическими операциями, отвечающими элементам симметрии кристалла.

В турмалине такой осью служит тройная ось симметрии, поэтому в нем возможны пироэлектрические явления. Всякое иное направление в турмалине благодаря существованию тройной оси симметрии и трех пересекающихся по ней плоскостей симметрии ($3 \cdot m$) повторяется в кристалле три или шесть раз и потому не есть особенное.

В кварце, имеющем симметрию $3 : 2$, тройная ось особенна, но не полярна, а двойные оси полярны, но не особенны, поэтому в кварце не может наблюдаться явлений истинного пироэлектричества.

Отбирая из 32 групп кристаллографической симметрии те, которые имеют особенные полярные направления, приходим к заключению, что истинное пироэлектричество возможно только в следующих 10 классах, подчиненных группе $\infty \cdot m$ (табл. 2): 1; 2; 3; 4, 6; m; $2 \cdot m$; $3 \cdot m$; $4 \cdot m$; $6 \cdot m$.

Из этого перечня видно, что истинное пироэлектричество возможно только в тех классах, которые характеризуются сущест-

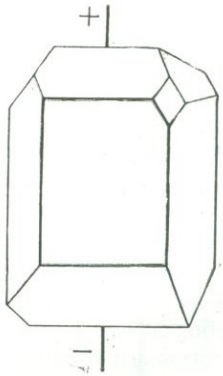


Рис. 5. Кристалл сахара

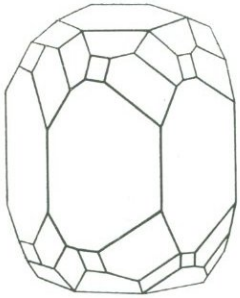


Рис. 6. Кристалл апатита

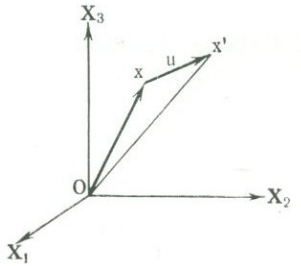


Рис. 7. Вектор Ox после деформации преобразуется в вектор Ox'. Вектор Ox' есть геометрическая сумма вектора Ox и вектора смещения u

вованием либо только одной простой оси симметрии, либо одной простой оси с продольными плоскостями симметрии. Обращает на себя внимание, что среди пироэлектрических кристаллов отсутствуют кристаллы кубической сингонии. Кроме турмалина, хорошим примером пироэлектрических кристаллов служат кристаллы обыкновенного сахара (рис. 5) и винной кислоты, кристаллизующиеся в моноклинной системе в классе *2*.

Пиромагнетизм. Явление пироэлектричества в кристаллах было открыто случайно; соответственное явление в области магнетизма, пиромагнетизм, или намагничивание и размагничивание кристаллов при изменении температуры, предсказано теоретически и обнаружено, хотя и не с абсолютной уверенностью, в кристаллах апатита, кристаллизующегося в классе $6 : m$ (рис. 6). Вектор интенсивности намагничивания в отличие от вектора интенсивности поляризации является вектором аксиальным, имеющим симметрию $\infty : m$; в соответствии с этим пиромагнетизм следует искать только в таких кристаллах, которые имеют особенные вращательные направления, все равно полярные или неполярные. Этому требованию удовлетворяют 13 классов, подчиненных группе $\infty : m$, а именно: *1*; *2*; *3*; *4*; *6*; $\bar{2}$; $\bar{4}$; $\bar{6}$; $\frac{m}{m}$; $2 : m$; $3 : m$; $4 : m$; $6 : m$.

ОДНОРОДНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И ОДНОРОДНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

Определение понятия однородной деформации. Деформацией называется всякое изменение формы тела. Деформация однородна, если куб, мысленно выделенный в теле, после деформации превращается в параллелепипед. Из этого

определения следует, что изготовленный из кристалла шар, который можно представлять себе вписанным в воображаемый куб, в результате однородной деформации превращается в общем случае, в трехосный эллипсоид, вписанный в деформированный куб, т. е. в параллелепипед. Кроме того, из определения следует, что параллельные ребра и грани кристалла остаются параллельными и после однородной деформации. Кристалл претерпевает однородную деформацию, например, при равномерном нагревании, при всестороннем сжатии, в определенных условиях при пластическом течении и т. д.

К математической характеристике однородной деформации можно придти следующим образом. Пусть в кристалле произошло изменение, в результате которого одна точка O, принимаемая нами за начало координат, сохранила свое положение в пространстве, а все прочие точки кристалла, и в частности точка x с координатами x_1, x_2, x_3, переместились в положение x', характеризуемое координатами x_1', x_2', x_3' (рис. 7). Координаты точек x и x' можно рассматривать как компоненты векторов Ox и Ox'. Предположим, что компоненты обоих векторов связаны между собой линейными зависимостями

$$\begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ X_2' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ X_3' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad (22)$$

или коротко

$$x_i' = a_{ik} x_k, \qquad (23)$$

где a_{ik} — постоянные, зависящие от выбора системы координат.

Назовем *смещением точки* x отрезок xx'. Из рисунка видно, что Ox' есть геометрическая сумма векторов Ox и вектора смещения u.

Следовательно, компоненты вектора Ox' равны сумме соответствующих компонент векторов Ox и u:

$$x_1' = x_1 + u_1, \qquad x_2' = x_2 + u_2, \qquad x_3' = x_3 + u_3, \qquad (24)$$

отсюда

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline u_1 & a_{11}^{-1} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{21} & a_{22}^{-1} & a_{23} \\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33}^{-1} \end{array} \qquad (25)$$

Из этих уравнений мы видим, что при существовании линейных зависимостей между компонентами векторов Ox и Ox' должны существовать также линейные зависимости между компонентами

векторов u и Ox. Обозначая коэффициенты последних уравнений символами r_{ik}, перепишем эти уравнения в форме

	x_1	x_2	x_3
u_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
u_2	r_{21}	r_{23}	r_{23}
u_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}

(26)

Эти уравнения выражают в математической форме однородную деформацию тела в чистом виде, т. е. без сопутствующих поворотов, при условии, если

$$r_{ik} = r_{ki}, \tag{27}$$

или

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Это можно было бы доказать следующим образом. Допустим, что конец x переменного вектора Ox лежит на поверхности шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

После деформации вектор Ox превращается в вектор Ox'. Определив компоненты x_1, x_2, x_3 из уравнений (22), подставляем полученные значения x_1, x_2, x_3 в уравнение шара. Приняв во внимание, что $a_{ik} = a_{ki}$, увидим, что новое уравнение будет представлять собой уравнение эллипсоида. Значит, уравнения (22) и (26) действительно выражают собой однородную деформацию.

Однородная деформация, отнесенная к главным осям деформации. Разберем частный случай уравнений однородной деформации, когда $r_{12} = r_{21} = r_{13} = r_{31} = r_{23} = r_{32} = 0$.

В этом случае уравнения (26) и (22) принимают вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_{11}x_1; & x_1' &= x_1(1 + r_{11}); \\ u_2 &= r_{22}x_2; & x_2' &= x_2(1 + r_{22}); \\ u_3 &= r_{33}x_3; & x_3' &= x_3(1 + r_{33}). \end{aligned} \tag{28}$$

Если до деформации концы вектора Ox лежали на поверхности шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, то после деформации эта поверхность будет иметь уравнение

$$x_1'^2/(1 + r_{11})^2 + x_1'^2/(1 + r_{22})^2 + x_3'^2/(1 + r_{33})^2 = 1, \tag{29}$$

получаемое из уравнения шара с помощью уравнений (28).

Так как выражение (29) представляет собой уравнение эллипсоида, отнесенное к его главным осям, то и уравнения (28) характеризуют собой однородную деформацию, отнесенную к *главным осям деформации*. Заметим теперь же, что последние не во всех случаях совпадают с главными координатными осями, выбор которых указан в табл. 3.

Компоненты однородной деформации и их физический смысл. Благодаря существованию равенства

$$r_{ki} = r_{ik},$$

девять постоянных r_{ki} приводятся к следующим шести величинам, называемым *компонентами деформации*:

$$r_{11},\quad r_{22},\quad r_{33},$$
$$2r_{23},\quad 2r_{31},\quad 2r_{12}. \tag{30}$$

Для выяснения физической природы компонент деформации применим уравнения (26) к точкам, которые до деформации находились на осях координат. Возьмем сначала точку P на оси X_1 (рис. 8), координаты этой точки, очевидно, равны x_1, 0, 0. Применение формул (26) дает:

$$u_1 = r_{11}x_1,$$
$$u_2 = r_{21}x_1,$$
$$u_3 = r_{31}x_1,$$

откуда

$$r_{11} = u_1/x_1, \quad r_{21} = u_2/x_1, \quad r_{31} = u_3/x_1. \tag{31}$$

Из рисунка видно, что для малых деформаций $r_{11} = u_1/x_1$ есть удлинение единицы длины по оси X_1; $r_{21} = u_2/x_1$ есть тангенс угла сдвига точки, ранее расположенной на оси X_1 в направлении оси X_2; аналогично $r_{31} = u_3/x_1$ есть тангенс угла сдвига точки, ранее расположенной на оси X_1 в направлении оси X_3. При малых деформациях тангенсы углов равны самим углам,

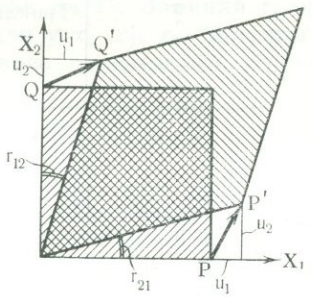


Рис. 8. Деформированный четырехугольник всегда может быть расположен так, чтобы $r_{12} = r_{21}$

выраженным в радианах, поэтому можно считать, что компоненты r_{21} и r_{31} при малых деформациях равны соответствующим углам сдвигов. Рассудив аналогично относительно точки Q, расположенной на оси X_2, и точки R (на рисунке не показанной), расположенной на оси X_3, приходим к заключению, что компоненты r_{22} и r_{33} являются удлинениями единиц длины по осям X_2 и X_3, а компоненты r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32} — тангенсами углов сдвига или самими углами сдвига.

Разделение кристаллов на пять классов по симметрии тензора однородной деформации. Если однородная деформация кристаллов вызывается изменением скалярной величины, например изменением температуры, симметрия кристаллов сохраняется. В этом случае для однородной деформации благодаря условию $r_{ik} = r_{ki}$ число различных форм тензора второго порядка (табл. 3) сокращается на единицу. Это обстоятельство позволяет разделить все кристаллы по типу тензора однородной деформации на пять классов (табл. 5).

К первому классу принадлежат все триклинные кристаллы. Шар, изготовленный из триклинного кристалла, в результате однородной деформации, например после нагревания на некоторое число градусов, превращается в трехосный эллипсоид; но ни одна из главных осей этого эллипсоида не сохраняет своей ориентировки в процессе деформации; изменение направлений осей эллипсоида не подчиняется законам симметрии. Так как каждой деформации, т. е. каждой степени нагрева кристалла, если деформация вызывается нагреванием кристалла, отвечает свой особый эллипсоид со своей особой ориентировкой осей, то совокупность нескольких таких эллипсоидов образует фигуру, в которой нет иных элементов симметрии, кроме обязательного центра симметрии, совпадающего с общим центром всех эллипсоидов. Мы можем

Таблица 5

Симметрия тензора деформации	Система	Форма тензора
$\bar{2}$	Триклинная	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$ $a_{12}\ a_{22}\ a_{23}$ $a_{13}\ a_{23}\ a_{33}$
$2:m$	Моноклинная	$a_{11}\ a_{12}\ 0$ $a_{12}\ a_{22}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{33}$
$m\cdot 2:m$	Ромбическая	$a_{11}\ 0\ \ 0$ $0\ \ a_{22}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{33}$
$m\cdot\infty:m$	Тетрагональная и гексагональная	$a_{11}\ 0\ \ 0$ $0\ \ a_{11}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{33}$
$\infty/\infty\cdot m$	Кубическая	$a_{11}\ 0\ \ 0$ $0\ \ a_{11}\ 0$ $0\ \ 0\ \ a_{11}$

поэтому сказать, что симметрия однородной деформации триклинных кристаллов выражается символом $\overline{2}$.

В моноклинных кристаллах направление одной оси эллипсоида деформации фиксировано; оно совпадает с направлением двойной оси симметрии или перпендикуляра к единственной плоскости симметрии. Две другие оси эллипсоида смещаются в процессе деформации, но плоскость, определяемая этими осями, остается и после деформации перпендикулярной к двойной оси. Совокупность нескольких эллипсоидов, отвечающих нескольким стадиям однородного деформирования кристалла, образует поэтому фигуру, обладающую симметрией $2 : m$

В кристаллах ромбической системы направления осей трехосного эллипсоида деформации фиксированы и совпадают с направлениями главных координатных осей. Система эллипсоидов деформации имеет симметрию $m \cdot 2 : m$.

В кристаллах тетрагональной и гексагональной систем эллипсоиды деформации являются сплюснутыми или вытянутыми эллипсоидами вращения. Ось этих эллипсоидов совпадает по направлению с осью X_3. Система эллипсоидов имеет симметрию $m \cdot \infty : m$.

В кристаллах кубической системы эллипсоид деформации вырождается в шар, имеющий симметрию $\infty/\infty \cdot m$.

Эллипсоид теплового расширения кристаллов. Тепловое расширение кристаллов является типичной формой однородной деформации, вызываемой изменением скалярной величины — температуры. Тепловое расширение обыкновенно описывается с помощью *главных линейных коэффициентов расширения*: α_{11}, α_{22}, α_{33}. Эти величины численно равны изменению единицы длины кристалла в направлении главных осей эллипсоида теплового расширения при нагревании кристалла на 1°. Заменяя r_{ii} через α_{ii} в выражении (29) и опуская штрихи у x_1', x_2', x_3', получим следующее уравнение эллипсоида теплового расширения, отнесенное к главным осям:

$$x_1^2/(1 + \alpha_{11})^2 + x_2^2/(1 + \alpha_{22})^2 + x_3^2/(1 + \alpha_{33})^2 = 1. \qquad (32)$$

Коэффициенты расширения представляют собой чрезвычайно малые величины, порядка $10^{-5} град^{-1}$ поэтому при всех расчетах можно пренебрегать квадратами этих величин; следовательно,

$$\frac{1}{(1 + \alpha_{11})^2} = \frac{1}{1 + 2\alpha_{11} + \alpha_{11}^2} \cdot \frac{1}{1 + 2\alpha_{11}} = \frac{1 - 2\alpha_{11}}{(1 - 2\alpha_{11})(1 + 2\alpha_{11})} =$$

$$= \frac{1 - 2\alpha_{11}}{1 - 4\alpha_{11}^2} \approx 1 - 2\alpha_{11},$$

поэтому уравнение (32) можно переписать в форме

$$x_1^2(1 - 2\alpha_{11}) + x_2^2(1 - 2\alpha_{22}) + x_3^2(1 - 2\alpha_{33}) = 1. \qquad (33)$$

Тепловой эллипсоид возникает вследствие деформации шара с радиусом, равным единице. Поэтому каждый радиус-вектор эллипсоида представляет собой величину $1 + g$, где g есть коэффициент линейного расширения в направлении рассматриваемого радиуса-вектора; квадрат его равен сумме квадратов координат; следовательно

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1 + g)^2 \approx 1 + 2g. \tag{34}$$

Из сопоставления уравнений (33) и (34) получаем

$$g = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2. \tag{35}$$

Так как все радиусы-векторы эллипсоида вследствие малости величин α_{11}, α_{22}, α_{33} весьма близки к единице, то координаты x_1, x_2, x_3 можно считать равными косинусам углов, образованных исследуемым радиусом-вектором с координатными осями. Отмечая радиус-вектор индексом 3, т. е. принимая направление радиуса-вектора за новое направление оси X_3, можно написать: $x_1 = c_{13}$, $x_2 = c_{23}$, $x_3 = c_{33}$. Выражение коэффициента расширения (35) для направления, определяемого направляющими косинусами, теперь принимает следующий окончательный вид (см. табл. 4):

$$g = \alpha_{11}c_{13}^2 + \alpha_{22}c_{23}^2 + \alpha_{33}c_{33}^2. \tag{36}$$

Коэффициенты расширения некоторых кристаллов и зависимость коэффициентов расширения от температуры. Приводим для примера численные значения коэффициентов расширения некоторых кристаллов (табл. 6). Особенно мал коэффициент расширения у алмаза: в 64 раза меньше, чем у каменной соли. Кварц расширяется по оптической оси X_3 в два раза меньше, чем в на-

Таблица 6

Коэффициенты расширения некоторых кристаллов при комнатной температуре

Кристалл	Система	$\alpha_{11}\cdot 10^6$	$\alpha_{22}\cdot 10^6$	$\alpha_{33}\cdot 10^6$
Алмаз	Кубическая	0,6	—	—
Каменная соль	»	38,6	—	—
Кварц	Гексагональная	13,7	—	7,5
Кальцит	»	—5,56	—	24,91
Арагонит	Ромбическая	9,9	15,7	33,3
Ортоклаз	Моноклинная	18,6	2,1	2,5

правлении, перпендикулярном к ней: эллипсоид расширения сплюснут по оптической оси. У кальцита коэффициент расширения отрицателен в направлении, перпендикулярном оптической оси, и положителен по оси; следовательно, при нагревании кальцит расширяется по оптической оси и сжимается в направлении, перпендикулярном к оси: эллипсоид сильно вытянут по оптической оси. В арагоните и ортоклазе имеем три главных коэффициента расширения.

При понижении температуры коэффициенты расширения обычно уменьшаются так же, как и теплоемкость. Отношение обеих величин остается приблизительно постоянным (закон Грюнайзена). В некоторых случаях тепловое расширение имеет максимум при определенной температуре, например у NH_4Cl при 31°. При этой температуре коэффициент α_{11} в 30 раз больше, чем при 30° или 32°. Резкое изменение теплового расширения объясняют вращением групп NH_4.

Связь между линейными и объемными коэффициентами расширения. Если из кристалла вырезать куб с ребрами, равными 1 *см*, ориентированными по направлениям главных коэффициентов расширения, и нагреть его на 1°, то ребра куба после нагревания будут равны $1 + \alpha_{11}$, $1 + \alpha_{22}$, $1 + \alpha_{33}$, а новый объем препарата будет равен

$$V = (1 + \alpha_{11})\,(1 + \alpha_{22})\,(1 + \alpha_{33}).$$

Вычитая из этого объема первоначальный объем куба и пренебрегая произведениями малых величин α_{11}, α_{22}, α_{33}, получим для объемного коэффициента расширения α следующее выражение:

$$\alpha = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}. \qquad (37)$$

Итак, объемный коэффициент расширения равен сумме линейных коэффициентов расширения. Для кристаллов кубической системы $\alpha = 3\alpha_{11}$, для кристаллов гексагональной и тетрагональной систем $\alpha = 2\alpha_{11} + \alpha_{33}$.

Кристаллические пластинки с нулевым коэффициентом расширения. В практике часто встречается надобность в таких кристаллических пластинках, толщина которых не меняется при нагревании. Конденсаторы, изготовленные из них, очевидно, не должны изменять своей емкости при нагревании, что имеет большое значение, например в радиотехнике. Изготовление таких пластинок возможно тогда, когда главные коэффициенты расширения кристалла имеют разный знак. С этим случаем мы встречаемся в кальците, у которого $\alpha_{11} = -5{,}56 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_{33} = 24 \cdot 91 \cdot 10^{-6}$. Вставляя эти величины в уравнение (36), полагая $g = 0$ и принимая во внимание, что всегда имеет место равенство $c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1$, находим значение величины $c_{33} = \cos\theta$, а отсюда определяем и угол θ. Вычисления дают $\theta = 64°43'$.

Пластинка кальцита, нормаль к которой образует этот угол с оптической осью X_3, будет обладать по толщине нулевым температурным коэффициентом расширения.

Однородное нормальное напряжение. Пусть мы имеем тело, мысленно разделенное плоскостью S на две части: правую и левую (рис. 9); в точке A, которую можно считать раздвоенной, приложены две перпендикулярные к плоскости, равные и противоположно направленные силы F. Если сила, направленная

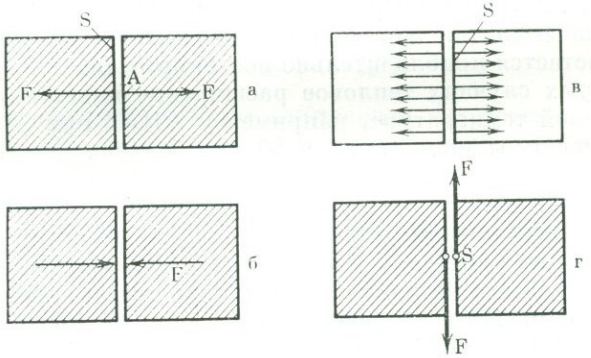


Рис. 9. Виды напряжений

а — нормальное растягивающее усилие положительно; *б* — нормальное сжимающее усилие отрицательно; *в* — нормальное напряжение распределено по поверхности; *г* — касательное напряжение

вправо, приложена к правой части, т. е. если обе силы стремятся разорвать тело по воображаемой плоскости, то обе силы, взятые вместе, носят название *положительного* (*растягивающего*) *нормального усилия*. В обратном случае, когда же на правую часть тела действует сила, направленная влево, а на левую — сила, направленная вправо, т. е. если обе силы стремятся прижать две части тела друг к другу, то совокупность обеих сил называется *отрицательным нормальным* (*сжимающим*) *усилием*.

Нормальным напряжением ρ называется величина отношения силы F, действующей на элемент поверхности dS, к этому элементу поверхности: $\rho = \delta F/\delta S$. Нормальное усилие необходимо представлять себе распределенным по плоскостям S. Нормальное напряжение будет однородным, если все элементарные составляющие полной силы F равны и параллельны друг другу; в этом случае $\rho = F/S$.

Касательное напряжение. Если две равные силы F действуют вдоль воображаемой плоскости S, по которой тело мысленно разделяется на две части (рис. 9, *г*), и приложены к разным частям тела, то совокупность этих сил называется *касательным усилием*. Величина $\tau = \delta F/\delta S$ называется *касательным напряжением*. Если усилие F равномерно распределено по поверхности S, то оно однородно. В этом случае $\tau = F/S$.

Компоненты напряжения. Кристалл находится в однородном напряженном состоянии, если на любых двух параллельных плоскостях, выбранных внутри кристалла, действуют равные между собой нормальные напряжения и равные между собой касательные напряжения.

Если процесс перераспределения напряжений в кристалле, вызванный теми или иными причинами, закончен, все части кристалла находятся в равновесии. Рассмотрим равновесие тетраэдра

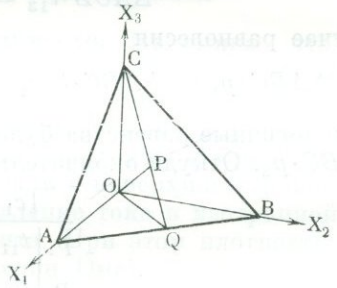


Рис. 10. К вопросу о равновесии тетраэдра

$OABC$ (рис. 10), мысленно выделенного в кристалле так, чтобы грань ABC была частью внешней поверхности кристалла, а другие грани находились внутри кристалла и пересекались между собой по координатным осям прямоугольной системы.

Пусть на грань ABC действует давление p (нормальная сила, отнесенная к 1 $см^2$ поверхности ABC). Обозначим напряжения на трех других гранях тетраэдра, уравновешивающие давление на грани ABC, символами t_{ik}, указывающими, что напряжение действует в направлении оси i на грань, перпендикулярную к оси k. Например, напряжение t_{22} действует в направлении оси X_2 на грань, перпендикулярную к оси X_2; это нормальное напряжение на грани AOC. Напряжение t_{12} действует в направлении оси X_1 на грань, перпендикулярную оси X_2; это касательное напряжение на грани BOC.

Из аналитической геометрии известно, что площадь проекции треугольника равна произведению площади треугольника на косинус угла между плоскостью треугольника и плоскостью проекции. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta ABC \cdot \cos(PQO)$, но $\angle PQO = \angle POC$, если OP есть нормаль к ABC; отсюда $\Delta AOB = \Delta ABC \cdot \cos(POC)$.

Аналогичные выражения можно написать и для треугольников AOC и BOC.

Обозначив символами c_1, c_2, c_3 косинусы углов нормали OP с осями координат, будем иметь:

$$\Delta BOC = \Delta ABC \cdot c_1,$$
$$\Delta AOC = \Delta ABC \cdot c_2,$$
$$\Delta AOB = \Delta ABC \cdot c_3.$$

Давление p есть вектор, его компоненты по осям — p_1, p_2, p_3. Полная сила давления, действующая на грань ABC, равна $\Delta ABC \cdot p$, а компоненты ее по осям равны $\Delta ABC \cdot p_1$, $\Delta ABC \cdot p_2$, $\Delta ABC \cdot p_3$. Против силы $\Delta ABC \cdot p_1$ действуют силы, отвечающие напряжениям t_{11}, t_{12}, t_{13}, т. е. силы

$$\Delta BOC \cdot t_{11} = \Delta ABC \cdot t_{11} c_1,$$
$$\Delta AOC \cdot t_{12} = \Delta ABC \cdot t_{12} c_2,$$
$$\Delta AOB \cdot t_{13} = \Delta ABC \cdot t_{13} c_3.$$

В случае равновесия

$$\Delta ABC \cdot p_1 = \Delta ABC \cdot t_{11} c_1 + \Delta ABC \cdot t_{12} c_2 + \Delta ABC \cdot t_{13} c_3.$$

Аналогичные равенства будем иметь также и для сил $\Delta ABC \cdot p_2$ и $\Delta ABC \cdot p_3$. Откуда окончательно будем иметь

	c_1	c_2	c_3
p_1	t_{11}	t_{12}	t_{13}
p_2	t_{21}	t_{22}	t_{23}
p_3	t_{31}	t_{32}	t_{33}

(38)

Рассмотрим теперь равновесие единичного (с ребрами, равными 1 *см*) кубика, мысленно выделенного внутри тела, испытывающего однородное напряжение. На рис. 11 показано распределение касательных напряжений, действующих перпендикулярно к двум противоположным ребрам куба. Две равные между собой

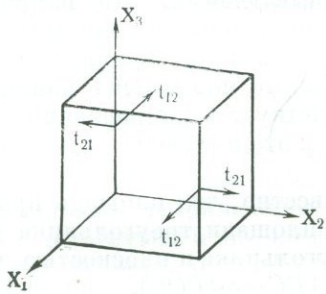


Рис. 11. Для равновесия куба необходимо, чтобы $t_{12} = t_{21}$

силы t_{12} образуют пару, которая стремится повернуть кубик около оси X_3. Аналогичную пару составляют силы t_{21}; только эта пара стремится повернуть кубик около той же оси, но в противоположную сторону. В случае равновесия должно иметь место равенство

$$t_{12} = t_{21}.$$

В дальнейшем за компоненты напряжений мы будем принимать шесть величин: t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12}.

Обращаем внимание на то, что касательные напряжения t_{23}, t_{31}, t_{12} в силу установившейся традиции берутся без коэффициента 2, тогда как отвечающие им сдвиги $2r_{23}$, $2r_{31}$, $2r_{12}$ употребляются с этим коэффициентом.

ПРОВОДИМОСТЬ ТЕПЛА И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА КРИСТАЛЛАМИ

Основные закономерности проводимости. Напомним, что плотностью тока называется количество тепла или электричества, протекающее через 1 *см*^{2} поперечного сечения тела в 1 *сек*. В изотропных телах плотность тока пропорциональна градиенту температуры или потенциала, т. е. падению температуры или потенциала на 1 *см* в направлении нормали к поверхности равных температур или потенциалов. Направление тока в изотропной среде совпадает с направлением градиента. При этом плотность тока i пропорциональна градиенту φ (закон Ома):

$$i = k \cdot \varphi.$$

Коэффициент k носит название проводимости (коэффициент теплопроводности, электропроводности). Ток i и градиент φ — векторы.

В анизотропных однородных телах, в частности в кристаллах, направление тока не совпадает, в общем случае, с направлением градиента. Пропорциональности между обоими векторами в кристаллах отвечают линейные зависимости между компонентами векторов

	φ_1	φ_2	φ_3
i_1	k_{11}	k_{12}	k_{13}
i_2	k_{21}	k_{22}	k_{23}
i_3	k_{31}	k_{32}	k_{33}

(39)

Коэффициенты k_{lm} образуют *тензор проводимости*. Можно выразить компоненты градиента в функции от компонент тока; тогда будем иметь

	i_1	i_2	i_3
φ_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
φ_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}
φ_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}

(40)

Коэффициенты r_{lm} образуют *тензор сопротивления*.

Мы примем без доказательства, что для явлений передачи тепла и электричества в кристаллах $k_{lm} = k_{ml}$.

Математическое исследование тензора проводимости показывает, что при несоблюдении этого равенства теплота распространялась бы из одной точки по спиралям, а не по прямым линиям, как это есть на самом деле.

К тензору проводимости относится все, что было сказано о тензоре второго порядка вообще. При перемене системы координат значения коэффициентов тензора изменяются. Если координатные оси направлены по *главным осям проводимости*, то все

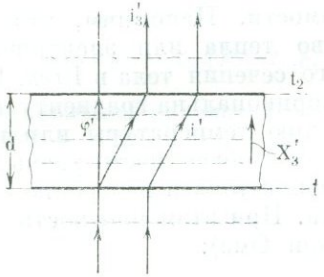


Рис. 12. Направление тока i' внутри кристаллической пластинки не совпадает с направлением градиента потенциала φ'

коэффициенты с неравными l и m превращаются в нуль. Остаются только *главные коэффициенты удельной проводимости* k_{11}, k_{22}, k_{33}, которые в этом случае обозначаются k_1, k_2, k_3.

Прохождение тока сквозь пластинку кристалла. Возьмем плоскопараллельную кристаллическую пластинку достаточно большой площади, чтобы можно было пренебрегать явлениями, происходящими по краям пластинки. На обеих гранях пластинки поддерживаются тем или иным способом различные температуры t_1 и t_2 (потенциалы); толщина пластинки d. В этих условиях поверхности одинаковых температур (эквипотенциальные поверхности) внутри пластинки будут плоскостями, параллельными ее граням (рис. 12). Градиент температуры $\varphi' = (t_1 - t_2)/d$ будет направлен перпендикулярно к эквипотенциальным поверхностям, т. е. нормально к пластинке.

Применим для разбираемого случая формулы (39), расположив ось X_3 в направлении нормали к пластинке. Так как $\varphi'_1 = \varphi'_2 = 0$, то

$$i'_1 = k'_{13}\varphi'_3,$$

$$i'_2 = k'_{23}\varphi'_3,$$

$$i'_3 = k'_{33}\varphi'_3.$$

Из этих равенств мы видим, что ни одна из компонент тока не равна нулю, следовательно, ток в общем случае направлен косо по отношению к градиенту температуры. Если кристаллическая пластинка находится между изотропными телами, то по выходе из пластинки ток пойдет в направлении градиента, т. е. нормально к пластинке. Очевидно, что в перенесении тепла сквозь

пластинку участвует только i'_3, две другие компоненты i'_1 и i'_2 переносят тепло вдоль пластинки. Итак, ток, прошедший сквозь пластинку, будет иметь величину $i'_3 = k'_{33}\varphi'_3$.

Величины i'_3 и φ'_3 доступны измерению; по ним может быть определена и величина k'_{33} удельной проводимости для различно ориентированных пластинок. Последнее равенство показывает, что коэффициент k'_{33} является мерой тока, пропускаемого пластинкой при постоянном φ'_3. Зная главные коэффициенты проводимости, можно для различно ориентированных пластинок наперед вычислить пропускаемый ими ток по формуле

$$k'_{33} = c^2_{13}k_1 + c^2_{23}k_2 + c^2_{33}k_3, \qquad (41)$$

где c_{ik} — косинусы углов нормали пластинки с направлениями, отвечающими главным коэффициентам проводимости (ср. формулу (36)).

Прохождение тока по тонкому кристаллическому проводнику. Если в кристаллической пластинке с большой площадью ток может идти сквозь пластинку и вдоль нее, то по тонким проводникам он может течь только вдоль проводника (рис. 13). Если примем направление проводника за ось X'_3, то это означает, что $i'_1 = i'_2 = 0$; $i' = i'_3$. Применяя формулы (40), будем иметь для этого случая

$$\varphi'_1 = r_{13}i_3,$$
$$\varphi'_2 = r_{23}i_3,$$
$$\varphi'_3 = r_{33}i_3.$$

Если обозначим разность потенциалов (температур) в точках A и B проводника, отстоящих друг от друга на расстояние d, через $v_1 - v_2$, то $\varphi'_3 = (v_1 - v_2)/d = r_{33}i$.

Величины $v_1 - v_2$, d и i могут быть легко определены из опыта; отсюда может быть определено и r'_{33}, т. е. удельное сопротивление для различно ориентированных по отношению к осям главных сопротивлений проводников тока. Если ориентировка известна, то можно вычислить r'_{33} по косинусам c_{13}, c_{23}, c_{33}: $r'_{33} = c^2_{13}r_1 + c^2_{23}r_2 + c^2_{33}r_3$.

Изотермическая (эквипотенциальная) поверхность проводимости. Предположим, что в малом сферическом объеме достаточно большого кристалла возникает с постоянной скоростью тепло (или электричество), расходящееся по радиусам к краям кристалла, где поддерживается постоянная температура. Возникает вопрос, какую форму при этих условиях будут иметь поверхности равных температур (потенциалов) вокруг источника тепла (электричества), когда процесс передачи тепла примет стационарный характер. Систематическое рассмотрение этого вопроса приводит к следующему результату. Температура в какой-либо точке радиуса-вектора, проведенного из источника, обратно пропорциональна расстоянию точки до источника. Изотермические по-

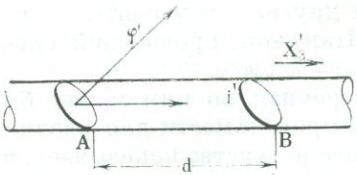


Рис. 13. Направление тока i' совпадает с осью стержня, но не совпадает с направлением градиента потенциала φ'

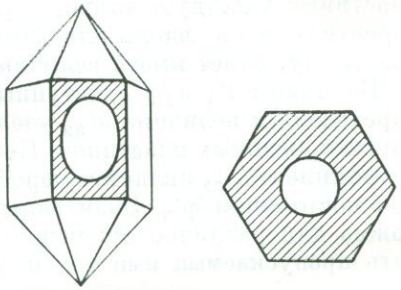


Рис. 14. Изотермические кривые теплопроводности кварца, получаемые с помощью нагретой проволоки на гранях базиса и призмы кварца, покрытых тонким слоем парафина

верхности представляют собой концентрические эллипсоиды с центром в источнике. Полуоси этих эллипсоидов пропорциональны квадратным корням из главных коэффициентов проводимости. В частном случае для главного эллипсоида полуоси равны квадратным корням из главных коэффициентов проводимости; уравнение этого эллипсоида имеет вид

$$x_1^2/k_1 + x_3^2/k_2 + x_3^2/k_3 = 1.$$

Зависимость теплопроводности кристаллов от направления впервые была изучена Сенармоном в 1847 г. Он брал полированные пластинки кристаллов, покрывал их тонким слоем воска и прикасался к ним в одной точке нагретой проволокой; расплавленный участок воска имел форму эллипса, который сохранялся и после охлаждения препарата благодаря стеканию воска к краям эллипса (рис. 14). Очень хорошо удается опыт с просверленной пластинкой кристалла гипса, через отверстие которой пропускают тонкую проволоку, нагреваемую электрическим током. Участки кристалла, прилегающие к проволоке, мутнеют вследствие удаления кристаллизационной воды. Область помутнения имеет форму эллипса.

Изотермические кривые проводимости анизотропных однородных сред можно очень эффектно наблюдать в опытах распространения тепла по металлическим сеткам (рис. 15). Для этого отверстия сетки заполняют расплавленным парафином; когда он застынет, прокалывают сетку острием нагретой проволоки. Парафин плавится около проволоки. В сетках с квадратными петлями фигуры расплавленного парафина имеют форму круга; в ромбических сетках, получаемых растяжением квадратных сеток по диагонали, фигуры имеют форму эллипсов. Этот опыт показывает, что явно анизотропные среды (квадратная сетка) в отношении определенных свойств могут не отличаться от изотропных.

Примеры теплопроводности кристаллов. Числовые данные о теплопроводности кристаллов до сего времени остаются весьма скудными. Это обстоятельство вносит трудность в нахожденис эмпирических зависимостей между теплопроводностью и другими свойствами кристаллов, в частности их структурой. Пока сделано наблюдение, что теплопроводность кристаллов слоистой структуры, например графита, слюды и т. д., больше в направлении слоев, чем по перпендикуляру к ним; в кристаллах цепной структуры, например в анатазе, отчасти и в кварце, проводимость вдоль цепей больше, чем по перпендикулярам к ним (табл. 7).

Таблица 7

Относительные теплопроводности кристаллов

Вещество	Система	k_1	k_2	k_3
Корунд	Гексагональная	0,94	—	1
Сурьма	»	2,53	—	1
Графит	»	4,0	—	1
Кварц	»	0,58	—	1
Гипс	Моноклинная	0,64	0,42	1
Мусковит	»	5,8	6,3	1

Теплопроводность кристаллов обычно больше, чем теплопроводность соответствующих аморфных тел; например, при 0° теплопроводность кристаллического кварца по главной оси больше теплопроводности плавленного кварца в 10 раз. С повышением температуры теплопроводность аморфных тел, наоборот, увеличивается; другими словами, при нагревании постепенно стирается разница между тепловыми свойствами кристаллического и аморфного веществ.

Примеры электропроводности кристаллов. Различают два рода электропроводности: ионную и электронную. Растворы электролитов обладают типичной ионной электропроводностью; металлы имеют типичную электронную проводимость. В кристаллах-диэлектриках, плохо проводящих электричество, например в кварце, каменной соли, квасцах, селитре, наблюдаются оба рода электропроводности. Ионная электропроводность при нагревании вещества всегда увеличивается, электронная проводимость — уменьшается; поэтому полное удельное сопротивление металлических кристаллов с нагреванием всегда увеличивается, а в кристаллах-диэлектриках оно либо возрастает, либо убывает в зависимости от того, какое из двух явлений преобладает.

Электропроводность кристаллов является примером ярко выраженных структурно-чувствительных свойств. Малейшие при-

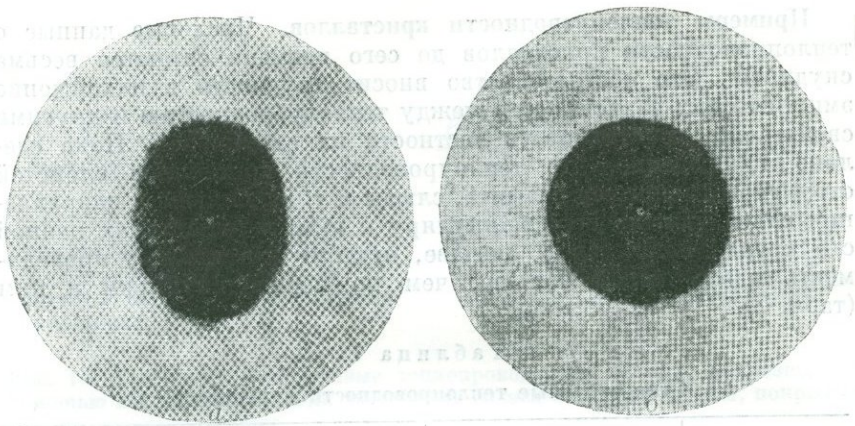


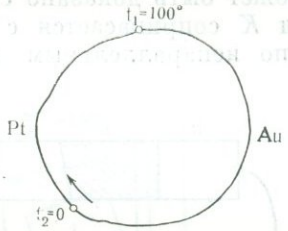
Рис. 15. Изотермические поверхности теплопроводности, полученные с помощью нагретой проволоки, продетой сквозь металлическую сетку, покрытую парафином

меси постороннего вещества сильнейшим образом изменяют электропроводность кристаллов. Удельное сопротивление кварца в направлении нормали к главной оси в сотни раз больше, чем в направлении, параллельном оси. Это обстоятельство следует принимать во внимание при применении кварца как изолятора. При нагревании кварца удельное сопротивление сильно возрастает; например, при 100° оно меньше, чем при комнатной температуре, в 100 раз, при 200° — в 1000 раз, а при 300° — в 1 000 000 раз меньше, чем при комнатной температуре. После продолжительного прокаливания электропроводность кварца значительно уменьшается.

Удельное сопротивление металлов изменяется с направлением незначительно; например, для цинка $r_з : r_1 = 1{,}082$, для висмута $r_з : r_1 = 1{,}27$. При нагревании удельное сопротивление металлов также изменяется, но не так сильно, как у кристаллов-диэлектриков; например $r_з$ и r_1 висмута увеличиваются при нагревании на 100° выше нормальной температуры всего в полтора раза.

Термоэлектричество кристаллов. Если соединить между собой два проводника из различных металлов, например из платины и золота, так, чтобы образовалась замкнутая цепь, и поддерживать на обоих спаях различную температуру, то в цепи возникает постоянный электрический ток, который будет течь до тех пор, пока существует разница в температурах обоих спаев (рис. 16). Для термопары Pt — Au, если один спай погружен в ледяную, а другой — в кипящую воду, ток будет идти в холодном спае от Au к Pt; электродвижущая сила в этом случае будет равна 0,75 *мв*.

Термоэлектродвижущая сила какой-либо пары металлов остается без всякого изменения при включении в цепь каких-угодно новых проводников и измерительных приборов, если вновь возникшие соединения будут иметь температуру одного из спаев (рис. 17). Материал, с помощью которого спаиваются исследуемые металлы, при этом также не оказывает влияния на электродвижущую силу,



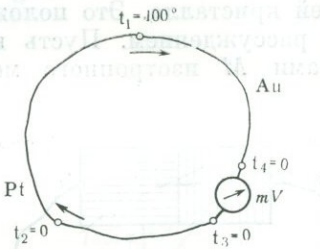


Рис. 16. Термоэлектрический ток в цепи золото—платина, возникающий благодаря существованию разницы температур спаев

Рис. 17. Промежуточные проводники не влияют на термоэлектродвижущую силу цепи золото — платина, если они имеют температуру одного из спаев термопары

которая целиком определяется двумя температурами (включенные проводники могут изменять только сопротивление цепи, а следовательно, и силу тока, но не электродвижущую силу).

Если одним из проводников термопары будет одиночный кристалл, а другим — изотропный металл, то термоэлектродвижущая сила в месте соединения металла с кристаллом будет различной в зависимости от ориентировки кристалла по отношению к оси проводника; следовательно, должна возникать термоэлектродвижущая сила и между двумя различно ориентированными кусками одного и того же кристалла. Эти свойства кристаллов впервые наблюдал на висмуте и сурьме Сванберг в 1850 г. и впоследствии изучали другие исследователи на кристаллах гематита, пирита и других веществ. Было констатировано, в частности, что при нагревании места соединения грани базиса (0001) и грани одной из призм двух одинаковых по величине и форме кусков гематита (рис. 18) возникает электродвижущая сила в направлении от грани призмы к грани базиса.

В явлении термоэлектричества взаимодействуют два вектора: градиент температуры и градиент потенциала. Их зависимость выражается тензором второго порядка. Поэтому термоэлектродвижущая сила какого-либо кристалла по отношению к какому-либо изотропному металлу или к тому же кристаллу с иной постоянной ориентировкой может быть вычислена по формуле (41), где k'_{33} — искомая термоэлектродвижущая сила, k_1, k_2, k_3 —

главные термоэлектродвижущие силы, а c_{13}, c_{23}, c_{33} — косинусы углов между осями координат кристалла с переменной ориентировкой к направлению тока.

Независимость термоэлектродвижущей силы от ориентировки конечных граней. Термоэлектродвижущая сила кристалла по отношению к изотропному металлу зависит от ориентировки кристалла, но не от ориентировки соприкасающихся с металлом граней кристалла. Это положение может быть доказано следующим рассуждением. Пусть кристалл K соприкасается с двумя кусками M изотропного металла по непараллельным граням

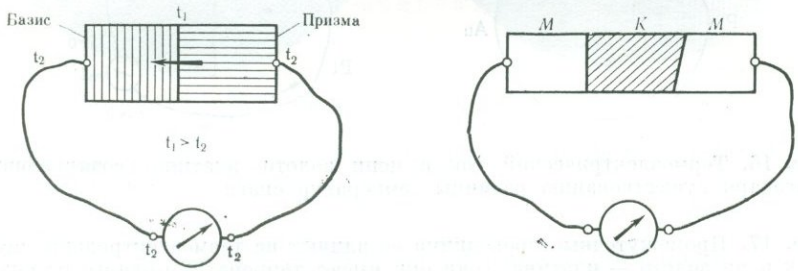


Рис. 18. Термоэлектрический ток, возникающий в спае двух различно ориентированных кусков кристалла гематита

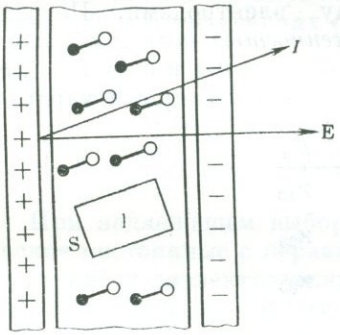
Рис. 19. Термоэлектродвижущая сила не возникает в спаях различных граней одного и того же кристалла с частями одного и того же изотропного металла

(рис. 19); противоположные концы кусков металла замкнуты проводником; температура всего контура предполагается постоянной. Если бы термоэлектродвижущая сила кристалла по отношению к металлу зависела от ориентировки граней, соприкасающихся с металлом, то в контуре возник бы электрический ток, обусловленный разностью электродвижущих сил на обеих гранях; этот ток мог бы быть использован для получения неограниченного количества работы, что противоречит закону сохранения энергии.

Обратный термоэлектрический эффект. Обратным термоэлектрическим эффектом называется нагревание или охлаждение спая двух разнородных проводников при прохождении через него электрического тока. Спай нагревается, если нагревание вызывает ток обратного направления; то же можно сказать и об охлаждении. Обратный электрический эффект в спае кристалла с изотропным металлом или между двумя кристаллами зависит от ориентировки кристалла и наблюдается вообще во всех местах кристалла, где направление тока изменяется по отношению к осям кристалла.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ И МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ КРИСТАЛЛОВ

Электрическая поляризация в кристаллах-диэлектриках. Если пластинку кристалла, не проводящую электричества, поместить между двумя плоскими разноименно заряженными металлическими электродами, то внутри пластинки возникает электрическая поляризация, т. е. смещение зарядов (рис. 20). Направление по-



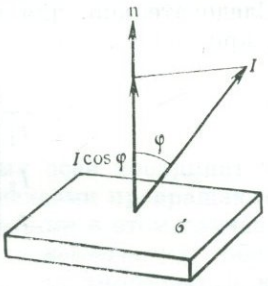


Рис. 20. Направление вектора I интенсивности поляризации кристалла-диэлектрика не совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля E

Рис. 21. Плотность σ зарядов на какой-либо грани численно равна проекции интенсивности поляризации I на нормаль к грани

ляризации, т. е. направление смещения положительных зарядов внутри диэлектрика для изотропных тел, например для стекла, совпадает с направлением поля электродов, т. е. с направлением внешней нормали к положительно заряженному электроду. Для кристаллов направление поля и направление поляризации вообще не совпадают между собой.

Выделим мысленно внутри кристаллической пластинки прямоугольный параллелепипед с площадью основания S и высотой l вдоль направления поляризации. В этом параллелепипеде поверхность основания, обращенного к положительно заряженному электроду, будет заряжена отрицательно; второе основание будет иметь равный заряд противоположного знака. Произведение el из величины заряда e одного из оснований параллелепипеда на его высоту l носит название *электрического момента поляризации*. *Интенсивность поляризации* I характеризуется величиной момента 1 $см^3$ диэлектрика

$$I = el/v, \tag{42}$$

где v — объем параллелепипеда. Величина I есть вектор; его направление совпадает с направлением поляризации.

Для тех плоскостей кристалла, которые ориентированы перпендикулярно к направлению поляризации, поверхностная плотность $\sigma = e/S$ зарядов численно равна I; если же нормаль исследуемой грани кристалла (рис. 21) образует угол φ с направлением поляризации, то

$$\sigma = I\cos\varphi. \tag{43}$$

В изотропных телах интенсивность поляризации пропорциональна градиенту потенциала между электродами. Последняя величина называется иначе *напряженностью поля* и обозначается E. Следовательно, для изотропных тел мы имеем $I = \varkappa E$.

Для кристаллов эта зависимость имеет тензорный характер

	E_1	E_2	E_3
I_1	$\varkappa_{11}$	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$
I_2	$\varkappa_{21}$	$\varkappa_{22}$	$\varkappa_{23}$
I_3	$\varkappa_{31}$	$\varkappa_{32}$	$\varkappa_{33}$

(44)

Величины $\varkappa_{ik}$ носят название коэффициентов электризации, как и во всех ранее рассмотренных случаях взаимодействия двух векторов; для электрической индукции оказывается справедливым равенство $\varkappa_{ik} = \varkappa_{ki}$.

При надлежащем выборе координатных осей исчезают все коэффициенты, кроме $\varkappa_{ii}$, которые в этом случае получают название *главных коэффициентов электризации* и обозначаются $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. Для кварца имеем $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0{,}278$; $\varkappa_3 = 0{,}283$.

Диэлектрические постоянные кристаллов. На практике чаще приходится иметь дело не с коэффициентами электризации, а с *диэлектрическими постоянными кристаллов*. Если заряд e взаимодействует с другим единичным зарядом в пустоте, то сила E взаимодействия между этими зарядами равна

$$E = e/r^2,$$

где r — расстояние между зарядами. Если заряды находятся не в пустоте, а в какой-либо изотропной среде, то сила взаимодействия зарядов уменьшается в ε раз

$$E = e/\varepsilon r^2,$$

где ε — диэлектрическая постоянная среды. Произведение $E\varepsilon = D$ носит название *индукции* или электрического смещения. Индукция связана с интенсивностью поляризации выражением $D = E + 4\pi I$.

Прямая пропорциональность между величинами E и D в изотропной среде заменяется при переходе к анизотропным средам

тензорной зависимостью

$$\begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline D_1 & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ D_2 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ D_3 & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{array} \qquad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \tag{45}$$

Эта зависимость выражает в иной форме ту же мысль, которая содержится в уравнениях (44), в чем можно убедиться, произведя подстановки

$$D_i = E_i + 4\pi I_i,$$
$$\varepsilon_{ii} = 1 + 4\pi\varkappa_{ii},$$
$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} = 4\pi\varkappa_{ik} \qquad (i \neq k.)$$

При надлежащем выборе главных осей координат диэлектрические постоянные с неравными индексами превращаются в нули; остающиеся диэлектрические постоянные в этом случае получают название *главных диэлектрических постоянных*, обозначаемых символами ε_1, ε_2, ε_3. Для большинства аморфных и кристаллических тел диэлектрические постоянные не превышают 10. Например, для парафина ε равна около 2, для стекла — около 7, для каменной соли — 5,77; для кварца $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4{,}49$; $\varepsilon_3 = 4{,}55$.

Диэлектрическая постоянная кристаллов зависит от плотности вещества, например в трех модификациях окиси титана (TiO_2), а именно: в рутиле, бруките и анатазе средним значениям диэлектрической постоянной 114, 78, 48 отвечают плотности 4,21; 4,11; 3,87. Наблюдается также зависимость диэлектрической постоянной от плотности расположения ионов по различным направлениям и по различным плоскостям. Например, в англезите ($PbSO_4$) $\varepsilon_1 = 27{,}5$, $\varepsilon_2 = 54{,}6$, $\varepsilon_3 = 27{,}3$ наибольшее значение диэлектрической постоянной отвечает оси b, по которой расположение ионов наиболее плотно.

Совершенно особенными диэлектрическими свойствами обладают кристаллы так называемых *сегнетоэлектриков*, получивших свое название от сегнетовой соли, т. е. двойной соли калия и натрия винной кислоты ($NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$). Эта соль кристаллизуется в ромбической системе и имеет форму, показанную на рис. 22. Вне интервала температур от $-20°$ до $+25°$ диэлектрические свойства сегнетовой соли нормальны, т. е. величины ε_1, ε_2, ε_3 не обнаруживают значительного изменения от изменения температуры, напряженности и частоты поля. Ниже $-20°$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \approx \approx 60$, $\varepsilon_1 \approx 150$; выше $+25°$ $\varepsilon_1 \approx 400$. В интервале температур от $-20°$ до $+25°$ диэлектрическая постоянная ε_1 в направлении оси a обнаруживает сильную зависимость от напряженности поля, достигая при комнатной температуре в поле в 100 *в* на 1 *см* громадных значений порядка 60 000. Кривая зависимости интен-

сивности поляризации I сегнетовой соли в направлении оси a от напряженности поля E показывает, что I стремится с увеличением E к постоянному максимальному значению. Это явление вполне аналогично явлению *насыщения*, наблюдаемому при намагничивании ферромагнитных веществ (см. ниже). Обращает на себя внимание также зависимость диэлектрической постоянной ε_1 от частоты применяемого для ее измерения электрического поля. Если для частоты поля в 30 *гц* (герц, т. е. циклов или колебаний

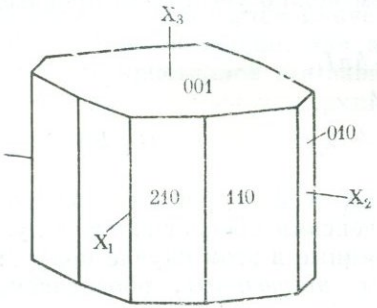


Рис. 22. Идеальная форма кристалла сегнетовой соли. В направлении оси X_1 (a) сегнетова соль обладает особенно большой диэлектрической постоянной

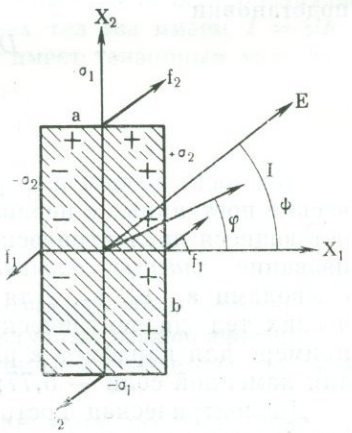


Рис. 23. Брусок из кристалла-диэлектрика (ось c бруска перпендикулярна к чертежу), помещенный в электрическом поле E, находится под действием двух вращающихся пар f_1 и f_2

в 1 *сек*) ε_1 может достигать значений порядка 60 000, то при 10^7 *гц* значение ε_1 падает до 220; наконец, при частоте $14 \cdot 10^7$ *гц* диэлектрическая постоянная становится отрицательной. В малых полях порядка 5—15 *в* на 1 *см* величина ε_1 обнаруживает два резких максимума при температурах —15° и +22,5°. Эти точки аналогичны *точкам Кюри* ферромагнитных веществ. В этих точках изменяется не только диэлектрическая постоянная, но и другие константы сегнетовой соли: коэффициенты расширения, электропроводность, пьезоэлектрическая константа и т. д.

Для объяснения явлений электрической индукции в диэлектриках принимают, что интенсивность поляризации слагается вообще из трех частей: электронной поляризации, определяемой расхождением электронов атомной оболочки; ионной поляризации, вызываемой смещением различно заряженных ионов; поляризации, вызываемой ориентацией вращающихся молекул, обладающих постоянным электрическим моментом. Последнее явление, по-видимому, и вызывает ненормально высокие значения диэлектрической постоянной в сегнетоэлектриках.

Поворот кристаллического бруска в электрическом поле. Из уравнений (44) следует, что интенсивность поляризации кристалла в электрическом поле не зависит от формы кристалла, а определяется целиком его ориентировкой. Надо помнить, что это положение остается верным только в первом приближении, т. е. для случая слабых полей и для кристаллов с нормальными диэлектрическими свойствами; для сегнетоэлектриков, у которых диэлектрические постоянные зависят от напряженности поля, уравнения (44) перестают быть верными. Рассмотрим действие электрического поля на прямоугольный брусок нормального кристалла, способный вращаться около оси, проходящей через центр бруска параллельно ребру c (рис. 23). Разложим интенсивность поляризации I на компоненты по направлениям двух других ребер a и b[1] бруска и представим эти компоненты в форме плотностей зарядов σ_1 и σ_2 на гранях bc и ac, пользуясь уравнением (43):

$$I_1 = \sigma_1 = I\cos\varphi; \qquad I_2 = \sigma_2 = I\sin\varphi.$$

Полные заряды на гранях bc и ac будут, очевидно, равны:

$$e_1 = \sigma_1 bc = I_1 bc; \qquad e_2 = \sigma_2 ac = I_2 ac.$$

Напряженность однородного поля E измеряется механической силой, с которой поле действует на тело, заряженное единицей положительного электричества. В нашем случае свободные заряды распределены на поверхности бруска; следовательно, силы действуют на центры граней bc и ac и притом в противоположные стороны на параллельных гранях; эти силы равны:

$$f_1 = E\sigma_1 bc; \qquad f_2 = E\sigma_2 ac$$

и образуют две пары, стремящиеся повернуть брусок в противоположные стороны. Вращающие моменты этих пар соответственно равны:

$$f_1 a\sin\psi = EI_1 abc\sin\psi = EI_1 v\sin\psi,$$
$$f_2 b\cos\psi = EI_2 abc\cos\psi = EI_2 v\cos\psi,$$

где $v = abc$ есть объем бруска. Если обозначим главные коэффициенты электризации по направлениям a и b через $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, то на основании уравнений (44) будем иметь:

$$I_1 = \varkappa_1 E_1 = \varkappa_1 E\cos\psi,$$
$$I_2 = \varkappa_2 E_2 = \varkappa_2 E\sin\psi.$$

Отсюда для результирующего момента бруска, равного разности обоих слагающих моментов, будем иметь выражение

$$M = E^2 v\sin\psi\cos\psi\,(\varkappa_1 - \varkappa_2). \qquad (46)$$

---

[1] Ребра a, b и c параллельны главным осям кристалла.

Из этого выражения видно, что брусок из изотропного диэлектрика, для которого $\varkappa_1 = \varkappa_2$, поворачиваться в однородном электрическом поле не будет; то же можно сказать о брусках из кристаллов кубической системы и о брусках из одноосных кристаллов с осью вращения, совпадающей с осью X_3. Наблюдаемое на практике вращение изотропных брусков объясняется неоднородностью поля и отклонениями свойств кристаллов от нормальных (сегнетоэлектрики).

Для исключения влияния формы кристалла в условиях неоднородного поля и для кристаллов с ненормальными диэлектрическими свойствами применяются шары, которые под действием поля стремятся повернуться направлением с наибольшим значением $\varkappa$ параллельно направлению поля.

Магнитная индукция в однородном поле. Если кристаллическую пластинку поместить между широкими плоскими и параллельно расположенными магнитными полюсами, т. е. в однородное магнитное поле, то пластинка намагничивается. Явление намагничивания вполне аналогично явлению электрической поляризации и формально может рассматриваться как ориентировка содержащихся в кристалле во множестве элементарных магнитиков, которые до возбуждения их магнитным полем находятся в полном беспорядке. Явление намагничивания описывается с помощью величин: *напряженности магнитного поля* H, *интенсивности намагничивания* I и магнитной восприимчивости χ, аналогичных соответственным величинам электрической индукции E, I.

Для изотропных тел имеет место соотношение $I = \chi H$. Величина χ относится либо к единице объема, либо к единице массы; если магнитная восприимчивость относится к единице массы, то произведение такой магнитной восприимчивости на молекулярный вес называется *молекулярной восприимчивостью*.

По величине магнитной восприимчивости различают вещества: парамагнитные, диамагнитные и ферромагнитные.

В парамагнитных веществах молекулярная восприимчивость положительна и лежит примерно в пределах от 0 до $17\,000 \cdot 10^{-6}$; она остается постоянной до полей порядка 10^5—10^6 *э*. Векторы H и I у парамагнитных тел направлены в одну сторону или (для анизотропных тел) образуют между собой острый угол. В этом отношении парамагнетики аналогичны обыкновенным диэлектрикам с положительным коэффициентом электризации.

В диамагнитных телах молекулярная восприимчивость отрицательна и лежит в пределах от 0 до $-300 \cdot 10^{-6}$. В изотропных диамагнитных телах векторы H и I направлены в противоположные стороны, а в анизотропных телах образуют тупой угол.

В ферромагнитных телах молекулярная восприимчивость положительна, как у парамагнитных тел, но она сильно зависит от величины напряженности поля H и достигает значений больших, чем у парамагнитных тел, в десятки и сотни тысяч раз, доходя

до 300. К ферромагнитным телам принадлежат Fe, Co, Ni. Ферромагнитные тела характеризуются тем, что для них всегда можно указать такую температуру (*точка Кюри*), при которой магнитная восприимчивость резко уменьшается до значений, наблюдаемых у парамагнитных тел. Для железа точка Кюри лежит при 768°. Выше этой точки железо становится парамагнитным.

Для парамагнитных и диамагнитных кристаллов должны быть справедливы уравнения (44) и (46), которые теперь принимают вид

$$\begin{array}{c|ccc} & H_1 & H_2 & H_3 \\ \hline I_1 & \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ I_2 & \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ I_3 & \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{array} \qquad (47)$$

$$M = H^2 v \sin \Psi \cos \Psi (\chi_1 - \chi_2).$$

Для ферромагнитных кристаллов эти уравнения неприменимы. Например, для железа, кристаллизующегося в кубической системе, радиус-вектор χ'_{33} должен был бы описывать сферическую поверхность при перемене направления поля в кристалле. На самом деле величина χ'_{33} зависит от направления и напряженности поля. Например, кристаллы железа имеют три *направления легкого намагничивания*, совпадающих с направлением ребер куба. По этим направлениям при постоянном поле H интенсивность намагничивания I больше, чем по всем другим направлениям. У никеля осями легкого намагничивания являются диагонали куба [111]. Шары, изготовленные из одиночных кристаллов железа и никеля, в магнитном поле ориентируются осями легкого намагничивания по направлению силовых линий поля.

Вместо величин магнитной восприимчивости χ_{ik} и интенсивности намагничивания I для описания магнитных явлений в кристаллах можно пользоваться величинами μ и B *магнитной проницаемости и магнитной индукции*. Последние величины являются аналогами величин ε и D для электрических явлений, поэтому

$$B_i = \mu_{ik} H_k.$$

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВО КРИСТАЛЛОВ

Введение. Пьезоэлектричество кристаллов было впервые количественно изучено П. Кюри на кристаллах кварца, турмалина, сахара и др. в 1880 г. Было показано, что на поверхности кристаллов-диэлектриков, имеющих полярные направления, под влиянием механических напряжений или упругих деформаций возникают электрические заряды. Наряду с этим *прямым пьезоэлектрическим эффектом* наблюдается также и *обратный эффект* возникновения механических напряжений и упругих деформаций

при помещении кристалла в электрическое поле. Полярные направления имеют все кристаллы, в которых нет центра симметрии, поэтому пьезоэлектрические явления следует искать в кристаллах, принадлежащих к одной из 21 групп без центра, а именно:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ \bar{4};\ m;\ 3:m;$$
$$2\cdot m;\ 3\cdot m;\ 4\cdot m;\ 6\cdot m;\ 2:2;\ 3:2; \qquad (48)$$
$$4:2;\ 6:2;\ \bar{4}\cdot m;\ m\cdot 3:m;\ 3/2;$$
$$3/4;\ 3/\bar{4}.$$

С точки зрения излагаемой ниже приближенной математической теории группа $3/4$ выпадает из списка групп пьезоэлектрических кристаллов, так как все отвечающие ей пьезоэлектрические константы равны нулю.

Зависимость интенсивности пьезоэлектрической поляризации от механического напряжения и деформации. Как было выяснено ранее, появление зарядов на поверхности диэлектрика можно рассматривать как результат внутренней поляризации. Интенсивность поляризации I есть вектор; однородное механическое напряжение t и однородная деформация r — тензоры второго порядка. Следовательно, в явлении пьезоэлектричества мы имеем пример взаимодействия одного вектора и одного тензора. В самом общем виде для любого пьезоэлектрического кристалла при произвольно выбранной прямоугольной системе координат зависимость I от t может быть выражена системой линейных уравнений

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{32}	t_{31}	t_{13}	t_{12}	t_{21}
I_1	d_{111}	d_{122}	d_{133}	d_{123}	d_{132}	d_{131}	d_{113}	d_{112}	d_{121}
I_2	d_{211}	d_{222}	d_{233}	d_{223}	d_{232}	d_{231}	d_{213}	d_{212}	d_{221}
I_3	d_{311}	d_{322}	d_{333}	d_{323}	d_{332}	d_{331}	d_{313}	d_{312}	d_{321}

(49)

Приведенная система уравнений может быть коротко записана в форме условного уравнения

$$I_i = d_{ikl}t_{kl}, \qquad (50)$$

где d_{ikl} — система из 27 констант, образующих тензор третьего порядка. Константы d_{ikl} носят название *пьезоэлектрических модулей*; они различны для кристаллов различных веществ и изменяются при перемене системы координат. Обратим внимание на порядок записи величин в уравнениях (49). В первой строке выписаны компоненты напряжений; сначала идут компоненты t_{11}, t_{22}, t_{33} нормальных напряжений вдоль осей X_1, X_2, X_3; далее следуют касательные напряжения $t_{23} = t_{32}$, действующие вокруг оси X_1; потом — касательные напряжения $t_{13} = t_{31}$, действующие вокруг оси X_2; наконец, следуют касательные напряжения $t_{12} = t_{21}$, действующие вокруг оси X_3. Тройные индексы у величин d_{ikl} со-

держат на первом месте номер компоненты вектора I_i, второе и третье места занимают индексы соответственной компоненты t_{kl}.

Зависимость интенсивности пьезоэлектрической поляризации I от деформации r выражается аналогичными уравнениями, которые в сокращенной форме имеют вид

$$I_i = e_{ikl} r_{kl}. \tag{51}$$

Величины e_{ikl} носят название *пьезоэлектрических констант*.

Другая форма уравнений зависимости интенсивности поляризации от механического напряжения и деформации. Форма (49) уравнений зависимости пьезоэлектрической поляризации от механического напряжения очень удобна для решения всех вопросов пьезоэлектричества, связанных с преобразованием координат, но она слишком громоздка в обращении с нею тогда, когда приходится пользоваться ею в простейших случаях вычисления компонент поляризации. Упрощение формул (49) может быть достигнуто на основе равенства $t_{ik} = t_{ki}$. Благодаря существованию этого равенства шесть последних столбцов формулы (49) могут быть сведены к трем столбцам; кроме того, трехзначные индексы пьезоэлектрических модулей можно заменить двузначными, причем первый знак должен обозначать номер строки тензора d_{ik}, а второй — номер столбца того же тензора. Новая форма уравнения (49) будет иметь вид

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
I_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}
I_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	d_{36}

(52)

Сопоставляя обе формы уравнений и принимая во внимание, что при $t_{ik} = t_{ki}$ должно быть равенство $d_{ikl} = d_{ilk}$, легко видеть, что

$$\begin{aligned} d_{14} &= 2d_{123}, \\ d_{25} &= 2d_{231}, \\ d_{33} &= d_{333}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{52'}$$

Аналогично можно поступить и с уравнением (51)

	r_{11}	r_{22}	r_{33}	$2r_{23}$	$2r_{31}$	$2r_{12}$
I_1	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
I_2	e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}
I_3	e_{21}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}

(53)

Так как сдвиги $2r_{ik}$ входят в эти уравнения с коэффициентом 2, то величины e_{ikl} точно равны соответственным величинам e_{ik}, например, $e_{222} = e_{22}$, $e_{123} = e_{132} = e_{14}$.

Влияние симметрии на тензоры пьезоэлектрических модулей и констант. Применим уравнения (49) — (53) к кристаллу, обла-

дающему центром симметрии. Если в таком кристалле произвести инверсию, то положительные концы координатных осей преобразуются в отрицательные, а отрицательные — в положительные; сам же кристалл в результате этого преобразования займет новое положение, ничем не отличающееся от старого. Если уравнения (49)—(53) были верны для кристалла до инверсии, то они должны быть верны для него и после инверсии. Но компоненты всякого вектора, а следовательно, и вектора I после инверсии изменяют свои знаки на обратные (вектор I изображается одноконечной стрелкой и центра симметрии сам не имеет), а компоненты тензора t после инверсии знаки сохраняют (например, нормальное положительное растягивающее напряжение, изображаемое двухконечной стрелкой, имеющей центр симметрии, после инверсии кристалла не превращается в отрицательное сжимающее напряжение). При этих условиях уравнения могут остаться справедливыми только в том случае, если постоянные d_{ik} и e_{ik} равны нулю. Это означает, что кристаллы, имеющие центр симметрии, пьезоэлектрическим эффектом не обладают.

Если наличие центра симметрии в кристалле приводит к тому, что все компоненты тензоров d и e обращаются в нули, то другие элементы симметрии при надлежащем выборе координатных осей превращают в нули только некоторые из компонент этих тензоров. Покажем это на частном примере. Пусть кристалл имеет симметрию 2 и пусть его ось симметрии второго порядка совпадает с координатной осью X_3. Повернем кристалл на 180° вокруг оси X_3. Этому повороту отвечает следующая схема косинусов углов между старыми и новыми осями координат:

	X_1'	X_2'	X_3'
X_1	−1	0	0
X_2	0	−1	0
X_3	0	0	1

После поворота кристалл приходит в совмещение сам с собой, следовательно, новые и старые компоненты тензоров d и e должны быть равны друг другу, т. е. $d'_{ikl} = d_{ikl}$, $e'_{ikl} = e_{ikl}$.

С другой стороны, формулы (17) преобразования тензоров дают $d'_{ikl} = c_{mi}c_{nk}c_{ol}d_{mno}$, $e'_{ikl} = c_{nk}c_{ol}e_{mno}$.

Сопоставление обеих систем уравнений позволяет установить, какие из компонент интересующих нас тензоров обращаются в нули. Исследуем для примера, не обращается ли в нуль компонента d'_{111}. Во-первых, имеем $d'_{111} = d_{111}$. Применяя формулы преобразования, получаем, во-вторых,

$$d_{111} = c_{11}c_{11}c_{11}d_{111} + c_{11}c_{21}c_{11}d_{121} + c_{11}c_{31}c_{11}d_{131} +$$
$$+ c_{11}c_{11}c_{21}d_{112} + c_{11}c_{21}c_{21}d_{122} + c_{11}c_{31}c_{21}d_{132} +$$
$$+ c_{11}c_{11}c_{31}d_{113} + c_{11}c_{21}c_{31}d_{123} + c_{11}c_{31}c_{31}d_{133} +$$

$$+ c_{21}c_{11}c_{11}d_{211} + c_{21}c_{21}c_{11}d_{221} + c_{21}c_{31}c_{11}d_{231} +$$
$$+ c_{21}c_{11}c_{21}d_{212} + c_{21}c_{21}c_{21}d_{222} + c_{21}c_{31}c_{21}d_{232} +$$
$$+ c_{21}c_{11}c_{31}d_{213} + c_{21}c_{21}c_{31}d_{223} + c_{21}c_{31}c_{31}d_{233} +$$
$$+ c_{31}c_{11}c_{11}d_{311} + c_{31}c_{21}c_{11}d_{321} + c_{31}c_{31}c_{11}d_{331} +$$
$$+ c_{31}c_{11}c_{21}d_{312} + c_{31}c_{21}c_{21}d_{322} + c_{31}c_{31}c_{21}d_{332} +$$
$$+ c_{31}c_{11}c_{31}d_{313} + c_{31}c_{21}c_{31}d_{323} + c_{31}c_{31}c_{31}d_{333}.$$

Из схемы косинусов видно, что

$$c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = 0,$$
$$c_{11} = c_{22} = -1, \quad c_{33} = 1.$$

Следовательно, $d'_{111} = -d_{111}$. Итак, d'_{111} одновременно равно $+d_{111}$ и $-d_{111}$, т. е. $d'_{111} = 0$.

Применяя этот метод рассуждения, приходим к выводу, что для кристаллов, имеющих симметрию *2*, при совпадении оси второго порядка с осью X_3 уравнения (52) принимают форму

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	0	0	0	d_{14}	d_{15}	0
I_2	0	0	0	d_{24}	d_{25}	0
I_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	0	0	d_{36}

Исследуя этим способом все точечные группы симметрии, не содержащие центра симметрии, и предполагая, что кристаллы отнесены к главной системе координат, приходим к результату, суммированному в табл. 8.

Рассмотрение табл. 8 пьезоэлектрических модулей показывает следующее. Кристаллы, принадлежащие к группе *3/4* кубической системы, не обладают пьезоэлектричеством, так как для них все модули d_{ik} равны нулю. За этим исключением кристаллы всех 20 ацентрических групп минимальной симметрии (симметрии идеальной внешней формы) принадлежат к кристаллам пьезоэлектрическим. Некоторые из этих групп, например *4* и *6*, имеют одинаковые тензоры d_{ik}. Это означает, что возможны случаи, когда кристаллы, имея различную симметрию идеальной внешней формы, в то же время могут иметь одинаковую симметрию в отношении пьезоэлектрических явлений. Мало того, из табл. 8 видно, что в ряде случаев пьезоэлектрическая симметрия кристаллов оказывается предельной (группы ∞; $\infty \cdot m$; $\infty : 2$); значит, пьезоэлектрические указательные поверхности (стр. 319) могут быть поверхностями вращения. С другой стороны, это означает, что и некристаллические однородные анизотропные среды, например стекло, помещенное в электрическое поле (группа $\infty \cdot m$), или закрученное стекло (группа $\infty : 2$), теоретически могут обладать пьезоэлектрическими свойствами.

Табл. 8 показывает, что полное число точечных пьезоэлектрических групп симметрии кристаллов или вообще анизотропных од-

Таблица 8

Симметрия и форма тензора пьезоэлектрических модулей анизотропных сред в главной системе координат

Симметрия тензора	Подчиненная группа	I_i	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
1 (18 констант)	—	I_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
		I_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}
		I_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	d_{36}
m (10 констант)	—	I_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	0	0	d_{16}
		I_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	0	0	d_{26}
		I_3	0	0	0	d_{34}	d_{35}	0
2 (8 констант)	—	I_1	0	0	0	d_{14}	d_{15}	0
		I_2	0	0	0	d_{24}	d_{25}	0
		I_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	0	0	d_{36}
3 (6 констант)	—	I_1	d_{11}	$-d_{11}$	0	d_{14}	d_{15}	$-2d_{22}$
		I_2	$-d_{22}$	d_{22}	0	d_{15}	$-d_{14}$	$-2d_{11}$
		I_3	d_{31}	d_{31}	d_{33}	0	0	0
$2\cdot m$ (5 констант)	—	I_1	0	0	0	0	d_{15}	0
		I_2	0	0	0	d_{24}	0	0
		I_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	0	0	0
∞ (4 константы)	6 4	I_1	0	0	0	d_{14}	d_{15}	0
		I_2	0	0	0	d_{15}	$-d_{14}$	0
		I_3	d_{31}	d_{31}	d_{33}	0	0	0
$\bar{4}$ (4 константы)	—	I_1	0	0	0	d_{14}	d_{15}	0
		I_2	0	0	0	$-d_{15}$	d_{14}	0
		I_3	d_{31}	$-d_{31}$	0	0	0	d_{36}
$3\cdot m$ (4 константы)	—	I_1	0	0	0	0	d_{15}	$-2d_{22}$
		I_2	$-d_{22}$	d_{22}	0	d_{15}	0	0
		I_3	d_{31}	d_{31}	d_{33}	0	0	0

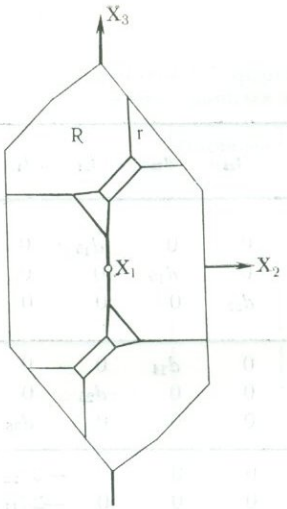
нородных сред равно 16. Как правило, один и тот же модуль d_{ik} повторяется в тензоре по нескольку раз; например, d_{14} в группе *3/2* стоит в первой строке тензора на своем месте, во второй строке — на месте d_{15}, т. е. $d_{15} = d_{14}$, и в третьей строке — на месте d_{16}, т. е. $d_{16} = d_{14}$; в группе *4* имеем $d_{24} = d_{15}$, $d_{25} = -d_{14}$ и т. д.

Опуская подробное рассмотрение влияния симметрии на форму тензоров e_{ik}, заметим, что окончательный результат этого рассмотрения весьма близок к тому, что получается для тензоров d_{ik};

Симметрия тензора	Подчиненная группа	I_i	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
$\infty \cdot m$ (3 константы)	$6 \cdot m$	I_1	0	0	0	0	d_{15}	0
	$4 \cdot m$	I_2	0	0	0	d_{15}	0	0
		I_3	d_{31}	d_{31}	d_{33}	0	0	0
$2:2$ (3 константы)	—	I_1	0	0	0	d_{14}	0	0
		I_2	0	0	0	0	d_{25}	0
		I_3	0	0	0	0	0	d_{36}
$3:m$ (2 константы)	—	I_1	d_{11}	$-d_{11}$	0	0	0	$-2d_{22}$
		I_2	$-d_{22}$	d_{22}	0	0	0	$-2d_{11}$
		I_3	0	0	0	0	0	0
$3:2$ (2 константы)	—	I_1	d_{11}	$-d_{11}$	0	d_{14}	0	0
		I_2	0	0	0	0	$-d_{14}$	$-2d_{11}$
		I_3	0	0	0	0	0	0
$\bar{4} \cdot m$ (2 константы)	—	I_1	0	0	0	d_{14}	0	0
		I_2	0	0	0	0	d_{14}	0
		I_3	0	0	0	0	0	d_{36}
$\infty:2$ (1 константа)	$6:2$	I_1	0	0	0	d_{14}	0	0
	$4:2$	I_2	0	0	0	0	$-d_{14}$	0
		I_3	0	0	0	0	0	0
$m \cdot 3:m$ (1 константа)	—	I_1	d_{11}	$-d_{11}$	0	0	0	0
		I_2	0	0	0	0	0	$-2d_{11}$
		I_3	0	0	0	0	0	0
$3/\bar{4}$ (1 константа)	$3/2$	I_1	0	0	0	d_{14}	0	0
		I_2	0	0	0	0	d_{14}	0
		I_3	0	0	0	0	0	d_{14}

вся разница сводится к тому, что в пяти группах, где в последних столбцах тензора d_{ik} встречаются двойки, в тензорах e_{ik} этих двоек нет.

Частные случаи пьезоэлектрического эффекта кварца. Кварц кристаллизуется в группе *3 : 2*, не имеющей элементов симметрии второго рода (центра, плоскостей, зеркальных осей), поэтому различают две энантиоморфных модификации кварца: правую и левую. Для правого кварца принимают *правую систему координат*,



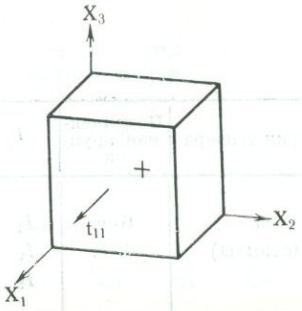
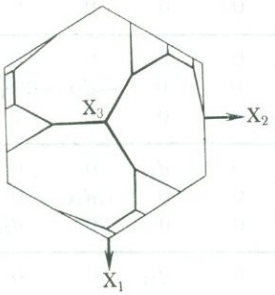


Рис. 25. На грани единичного кубика кварца, обращенной в положительную сторону электрической оси X_1, возникают положительные заряды при растяжении



◂

Рис. 24. Правая система координат в правом кварце

На положительном конце оси X_1 возникают положительные заряды при растяжении

для левого — левую (рис. 24). За главные оси берут ось третьего порядка X_3 (оптическая ось), одну из осей второго порядка X_1 (электрическая ось) и нормаль X_2 к обеим указанным осям (механическая ось).

Из табл. 8 видно, что при установке кварца по главным осям зависимость пьезоэффекта от механического напряжения имеет вид

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	d_{11}	$-d_{11}$	0	d_{14}	0	0
I_2	0	0	0	0	$-d_{14}$	$-2d_{10}$
I_3	0	0	0	0	0	0

(54)

или в обычной форме

$$I_1 = d_{11}t_{11} - d_{11}t_{22} + d_{14}t_{23}, \quad I_2 = -d_{14}t_{31} - 2d_{11}t_{12}, \quad I_3 = 0. \tag{54'}$$

Из уравнений (54) и (54′) видно, что при любом однородном механическом напряжении компонента интенсивности поляризации

по оси X_3 всегда равна нулю; это означает, что направление поляризации кварца всегда лежит в плоскости X_1X_2.

Экспериментальные значения d_{11} и d_{14} в абсолютной электростатической системе, полученные различными авторами, лежат в следующих пределах:

$$d_{11} = 6{,}27 \cdot 10^{-8} \div 6{,}94 \cdot 10^{-8},$$
$$d_{14} = -1{,}45 \cdot 10^{-8} \div -1{,}925 \cdot 10^{-8}.$$

Если кварц находится под действием одного положительного растягивающего нормального напряжения t_{11}, действующего вдоль оси X_1, то уравнения (54′) принимают форму

$$I_1 = d_{11}t_{11}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0. \tag{55}$$

Весь пьезоэлектрический эффект I в данном случае определяется одной компонентой I_1

$$I = I_1 = d_{11}t_{11}.$$

Последнее равенство показывает, что единичный кубик кварца в указанных условиях получит заряды только на гранях, перпендикулярных к оси X_1 (рис. 25). Так как при положительных d_{11} и t_{11} интенсивность поляризации I_1 тоже положительная, то положительно заряженная сторона кубика должна быть обращена в положительную сторону оси X_1.

От единичного кубика перейдем к рассмотрению прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c, параллельными осям X_1, X_2, X_3. Пусть параллелепипед, как и в предыдущем случае, подвержен действию растягивающего усилия F_1 вдоль электрической оси X_1. В этом случае $t_{11} = F_1/bc$; $I = (F_1/bc)d_{11}$.

Так как I направлено перпендикулярно к граням bc, то I численно равно плотности зарядов σ (43). Полный заряд e на одной из двух параллельных граней bc будет в bc раз больше, т. е. $e = F_1d_{11}$.

Последнее равенство выражает известный закон Кюри, утверждающий, что в указанных условиях величина заряда e зависит только от общего усилия F_1, но не от размеров a, b, c.

Рассмотрим случай растяжения — сжатия кварца вдоль механической оси X_2. Из всех компонент напряжения теперь только t_{22} не равна нулю. Уравнения (54′) дают

$$I_1 = -d_{11}t_{22}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0. \tag{56}$$

Так как $I_2 = I_3 = 0$, то $I = I_1$; поляризация, как и в предыдущем случае, направлена по электрической оси; заряды возникают на тех же гранях единичного кубика, но знаки зарядов будут обратны; например, при положительном t_{22} на стороне кубика, обращенной в положительную сторону оси X_1, образуются отрицательные заряды, тогда как в ранее разобранном случае при положительном t_{11} на той же грани возникали положительные заряды.

Переходя к параллелепипеду abc, на который действует растягивающее или сжимающее усилие F_2 вдоль оси X_2, будем иметь:

$$t_{22} = F_2/ac, \qquad I_1 = I = -d_{11}F_2/ac.$$

Если плотность зарядов на грани bc есть $\sigma = I$, то общий заряд e будет равен

$$e = I \cdot bc = -d_{11}F_2 bc/ac = -d_{11}F_2 b/a. \tag{57}$$

Уравнение (57) выражает второй закон Кюри, утверждающий, что на этот раз заряд e определяется не только усилием F_2, но и размерами параллелепипеда.

Если кварцевый кубик подвергается всестороннему равномерному давлению, то $t_{11} = t_{22} = t_{33}$; остальные компоненты напряжения равны нулю. Уравнения (54′) дают

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0,$$

т. е. изменение внешнего давления не вызывает пьезоэлектрического эффекта. Этот вывод не распространяется на кристаллы, имеющие особенные полярные направления, т. е., например, на турмалин.

Вычисление пьезоэлектрического эффекта произвольно ориентированной кристаллической пластинки. Пусть произвольно ориентированная кристаллическая пластинка, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, подвергается действию сжимающего или растягивающего усилия вдоль одного из ее ребер; определим плотность зарядов, образующихся при этом на грани, перпендикулярной к направлению приложенного усилия. Примем направление ребра пластинки, вдоль которого действует усилие, за ось X_3'; направления двух других ребер пластинки — за оси X_1', X_2'. Сделанные предположения означают, что из всех компонент напряжения t_{ik}', отнесенных к системе координат X_1', X_2', X_3', только t_{33}' не равна нулю. Применяя формулы преобразования (14) и учитывая только что сказанное, будем иметь:

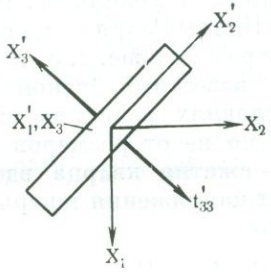


Рис. 26. Расположение главных (старых) и новых осей в пластинке, вырезанной под углом в 45° к осям X_1 и X_2 и параллельно оси X_3 (растягивающее напряжение t_{33} действует в направлении X_3)

$$t_{11} = c_{13}^2 t_{33}'; \quad t_{22} = c_{23}^2 t_{33}'; \quad t_{33} = c_{33}^2 t_{33}';$$
$$t_{23} = c_{23}c_{33}t_{33}'; \quad t_{31} = c_{33}c_{13}t_{33}'; \quad t_{12} = c_{13}c_{23}t_{33}'. \tag{58}$$

Уравнения (52) теперь принимают следующий вид:

	$c_{13}^2 t_{33}$	$c_{23}^2 t_{33}$	$c_{33}^2 t_{33}$	$c_{23}c_{33}t_{33}$	$c_{33}c_{13}t_{33}$	$c_{13}c_{23}t_{33}$
I_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
I_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}
I_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	d_{36}

(59)

Вычислим интенсивность поляризации I_3' в направлении оси X_3'. Эта величина, очевидно, равна сумме проекций величин I_1, I_2, I_3 на ось X_3':

$$I_3' = I_1 c_{13} + I_2 c_{23} + I_3 c_{33}. \tag{60}$$

Так как вектор I_3' направлен перпендикулярно к одной из граней пластинки, то плотность зарядов σ на этой грани должна быть численно равна I_3'.

$$\sigma = I_3'. \tag{61}$$

Этим и решается поставленная нами выше задача.

Применим это решение к кварцевой пластинке, вырезанной параллельно оптической оси X_3 и под углом 45° к электрической и механической осям X_1 и X_2 (рис. 26). Составляем схему косинусов

	X_1'	X_2'	X_3'
X_1	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
X_2	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
X_3	1	0	0

Уравнения (54) и (59) принимают вид

	$\frac{1}{2}t_{33}'$	$\frac{1}{2}t_{33}'$	0	0	0	$\frac{1}{2}t_{33}'$
I_1	d_{11}	$-d_{11}$	0	d_{14}	0	0
I_2	0	0	0	0	$-d_{14}$	$-2d_{11}$
I_3	0	0	0	0	0	0

или в обычной форме:

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = -d_{11}t_{33}, \qquad I_3 = 0.$$

Плотность зарядов на грани, перпендикулярной к направлению напряжения t'_{33}, согласно формулам (60) и (61) будет равна

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} d_{11} t_{33}.$$

Вычислим еще для сегнетовой соли интенсивность поляризации I_1 вдоль оси X_1 (иначе ось a), если пластинка вырезана перпенди-

кулярно к оси X_1 одной гранью и под углом 45° к осям X_2 и X_3 (иначе оси b и c) двумя другими гранями и если растягивающее или сжимающее усилие направлено перпендикулярно к одной из этих двух последних граней (рис. 27).

Сегнетова соль кристаллизуется в группе $2:2$, поэтому уравнения зависимости интенсивности поляризации от напряжения

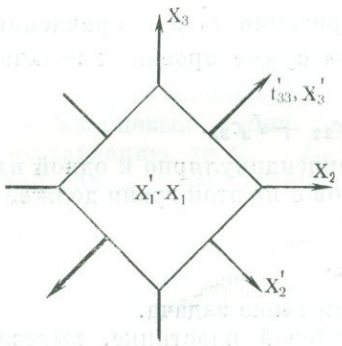


Рис. 27. Растяжение препарата сегнетовой соли в направлении биссектрисы угла X_2 X_3

имеют при установке кристалла по главным осям следующий вид:

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
I_1	0	0	0	d_{14}	0	0
I_2	0	0	0	0	d_{25}	0
I_3	0	0	0	0	0	d_{36}

(62)

Составляем схему косинусов

	X_1'	X_2'	X_3'
X_1	1	0	0
X_2	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
X_3	0	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

Подставляя значения этих косинусов в уравнения (59) и далее в уравнения (62), будем иметь

	0	$\frac{1}{2}t'_{33}$	$\frac{1}{2}t'_{33}$	$\frac{1}{2}t'_{33}$	0	0
I_1	0	0	0	d_{14}	0	0
I_2	0	0	0	0	d_{25}	0
I_3	0	0	0	0	0	d_{36}

или в обычной форме:

$$I_1 = \frac{1}{2} d_{14} t'_{33}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0. \tag{62'}$$

Этот результат интересен во многих отношениях. Прежде всего отметим, что величина d_{14}, определяющая при указанных обстоятельствах весь пьезоэлектрический эффект, весьма сильно отличается от двух других модулей d_{25} и d_{36}: $d_{14} = 26{,}4 \cdot 10^{-5}$; $d_{25} = -165 \cdot 10^{-8}$, $d_{36} = 35{,}4 \cdot 10^{-8}$ (в абсолютных электростатических единицах при комнатной температуре).

Далее, из уравнений (62) следует, что компонента I_1 возникает только тогда, когда в кристалле есть касательное напряжение t_{23}; последнее достигает своего максимального значения, когда растягивающее усилие t'_{33} образует с плоскостью X_2X_3, по которой распределено напряжение t_{23}, угол в 45°. Эти условия как раз и соблюдаются в разобранном нами случае. С кристаллографической точки зрения важно отметить, что неполярная при обычных условиях ось X_1 (одна из осей симметрии второго порядка) при сжатии или растяжении кристалла сегнетовой соли по биссектрисе между осями X_2 и X_3 становится полярной, так как вектор $I = I_1$ полярен и направлен по оси X_1.

В дополнение к сказанному отметим, что ненормально большое значение величины d_{14} в кристаллах сегнетовой соли находится в тесной связи с ненормально большой диэлектрической постоянной этого вещества в том же направлении оси X_1. Пьезоэлектрический модуль d_{14}, так же как и диэлектрическая постоянная ε_1, зависит от температуры, достигая больших значений в интервале между точками Кюри: —20° и + 25°. Влиянию поля E на величину ε_1 отвечает влияние сжимающего напряжения, направленного по биссектрисе угла между X_2 и X_3, на модуль d_{14}. Замечено, что с увеличением этого напряжения d_{14} уменьшается, достигая предельного «нормального» значения насыщения при нагрузках в 50 *кг* на 1 *см*^{2}.

Электрическая деформация кристаллов. Если в электрическое поле поместить кристалл, обладающий пьезоэлектрическими свойствами, то в нем возникнут механические напряжения, которые в свою очередь вызовут его деформацию. Это явление называется обратным пьезоэлектрическим эффектом или электрической деформацией. Основные уравнения, связывающие компоненты деформации r_{ik} с компонентами напряженности электрического поля E_1, имеют для произвольной системы координат вид

	E_1	E_2	E_3
r_{11}	d_{11}	d_{21}	d_{31}
r_{22}	d_{12}	d_{22}	d_{32}
r_{33}	d_{13}	d_{23}	d_{33}
$2r_{23}$	d_{14}	d_{24}	d_{34}
$2r_{31}$	d_{15}	d_{25}	d_{35}
$2r_{12}$	d_{16}	d_{26}	d_{36}

(63)

Коэффициенты d_{ik} этих уравнений равны соответственным коэффициентам уравнений (52) и имеют одинаковую размерность $см^{1/2}сек/г^{1/2}$.

При переходе к главной системе координат эти уравнения претерпевают изменения в полном соответствии с ранее приведенными схемами (см. табл. 8). В частности, для кварца уравнения электрической деформации принимают форму

	E_1	E_2	E_3
r_{11}	d_{11}	0	0
r_{22}	$-d_{11}$	0	0
r_{33}	0	0	0
$2r_{23}$	d_{14}	0	0
$2r_{31}$	0	$-d_{14}$	0
$2r_{12}$	0	$-2d_{11}$	0

(63′)

Пусть пластинка кварца, вырезанная перпендикулярно к электрической оси X_1 (срез Кюри), помещена между обкладками заряженного конденсатора; направление поля $E = E_1$ конденсатора пусть совпадает с положительным направлением оси X_1. Для этого частного случая последние формулы принимают вид:

$$r_{11} = d_{11}E > 0, \quad r_{22} = -d_{11}E < 0, \quad 2r_{23} = d_{14}E < 0.$$

Итак, в срезе Кюри под влиянием положительного поля E происходит расширение по оси X_1, сжатие по оси X_2 и увеличение угла между осями X_1 и X_2. При перемене направления поля происходит изменение знаков этих деформаций.

Если пластинка вырезана перпендикулярно к оси X_2 (срез Y), то действующей будет только компонента поля $E = E_2$. Уравнения (63′) принимают форму:

$$2r_{31} = -d_{14}E, \qquad 2r_{12} = -2d_{11}E.$$

Как видно из этих уравнений, в срезе Y при указанном направлении поля возможны только деформации сдвига.

Обратный пьезоэлектрический эффект может быть выражен в форме уравнений, связывающих между собой величины t_{ik}, E_l, e_{lik}; в этом случае система уравнений (63) заменяется уравнениями вида

$$t_{ik} = e_{lik}E_l. \tag{64}$$

Количественная характеристика обратного пьезоэлектрического эффекта. Пусть единичный кубик кварца с ребрами, параллельными осям X_1, X_2, X_3, ориентирован осью X_1 вдоль поля конденсатора. Пластинки конденсатора, плотно прилегающие к граням кубика, заряжены до разности потенциалов в 1000 *в*.

Применяя уравнения (63′), будем иметь:

$$E_1 = E = \frac{1000}{300}\,CGSE\ \left(1в = \frac{1}{300}\,\text{ед}\,CGSE\right),$$

$$r_{11} = d_{11}E = 6{,}4\cdot 10^{-8}\cdot\frac{1000}{300} = 21{,}3\text{Å},$$

$$r_{22} = -d_{11}E = -21{,}3\text{Å},$$

$$r_{23} = d_{14}E = -1{,}7\cdot 10^{-8}\,\frac{1000}{300} = 0{,}012''.$$

Итак, под действием разности потенциалов в 1000 *в* единичный кубик кварца изменяется в размере на несколько десятков ангстремов и претерпевает изменение в углах в несколько сотых секунды. Если расстояние между электродами уменьшить в 10 раз, т. е. если $d = 0{,}1$ *см*, а остальные условия оставить теми же, то $E_1 = E = v/d$ увеличивается в 10 раз; во столько же раз увеличивается относительное удлинение r_{11}; полное же удлинение, равное $r_{11}d = r_{11}/10$, очевидно, не изменится. Отсюда следует, что действительное удлинение по оси X_1 в указанных условиях не зависит от толщины пластинки кварца и всецело определяется сообщаемой разностью потенциалов.

Пьезоэлектрические поверхности и кривые. Пьезоэлектрические свойства кристаллов могут быть наглядно представлены указательными поверхностями и кривыми, в которых радиусами-векторами служат те или иные пьезоэлектрические величины. Особый интерес представляют *поверхности продольных пьезоэффектов*. Радиусы-векторы этих поверхностей пропорциональны зарядам, образующимся на единице поверхности, перпендикулярной к растягивающему или сжимающему усилию t'_{33}, действующему вдоль радиуса-вектора; иными словами, радиусы-векторы этих поверхностей пропорциональны d'_{33}. Применяя формулы преобразования (17), можно показать, что для кварца $d'_{33} = d_{11}\sin^3\rho\cos 3\varphi$, где ρ — полярное расстояние, φ — долгота подвижного конца радиуса-вектора. Сечения этой поверхности показаны на рис. 28.

Применение пьезоэлектрических кристаллов в пьезометрии, электрометрии и электроакустике. П ь е з о м е т р и я. Благодаря существованию строгой пропорциональности между величиной механической нагрузки на пьезоэлектрический кристалл и возникающим на его поверхности зарядом явлениями пьезоэлектричества широко пользуются для измерения механических сил, ускорений, давлений и т. д. Существуют, например, установки для измерения усилий, воспринимаемых резцами металлообрабатывающих станков, для записи давлений при взрывах в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания или в орудийных стволах, для измерения боковых усилий, производимых вагонами и локомотивами на рельсы, для записи вибраций моторов, машин и т. д.

Электрометрия. Две тонкие посеребренные с обеих сторон кварцевые пластинки, вырезанные перпендикулярно к электрической оси X_1, склеивают между собой так, чтобы электрические оси в обеих пластинках были направлены в одну сторону (рис. 29). Приготовленный таким способом кварцевый элемент может быть использован в качестве пьезоэлектрического вольтметра. Для этого один полюс измеряемого напряжения подводится к внешним обкладкам элемента, другой — к внутренним об-

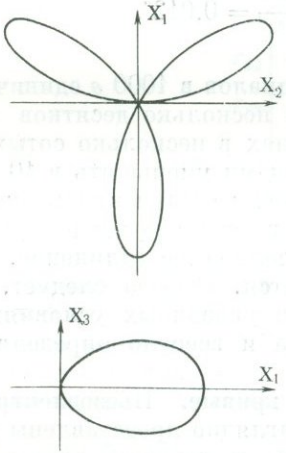
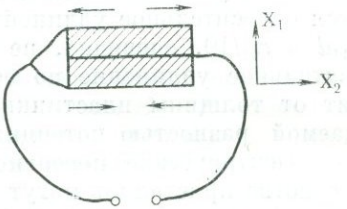


Рис. 28. Сечения пьезоэлектрической поверхности (d'_{33}) продольных пьезоэлектрических эффектов

Рис. 29. Двойная кварцевая пластинка, работающая на изгиб



кладкам. Под действием электрического напряжения одна из пластинок элемента расширяется по длине, т. е. по оси X_2, другая — сжимается, вследствие чего весь препарат изгибается. Изгиб передается с помощью рычагов стрелке, по отклонению которой можно определить электрическое напряжение. Описанный кварцевый элемент может быть использован также и для устройства осциллографа.

Микрофоны и адаптеры. Пьезоэлектрический микрофон состоит из мембраны, воспринимающей звуковые колебания, и кристаллического элемента из пластинок сегнетовой соли, преобразующего механические колебания мембраны в электрические; последние усиливаются, передаются на большие расстояния и снова преобразуются в звуковые колебания. Пьезоэлектрические адаптеры служат для воспроизведения звука, записанного на граммофонную пластинку. Механические колебания иглы преобразуются адаптером с пьезоэлектрическим элементом из сегнетовой соли в электрические колебания, которые поступают в радиоприемник, где они после надлежащего усиления снова преобразуются в звук.

Применение пьезокварцевых пластинок для стабилизации радиочастот. Мы видели, что пьезокварцевая пластинка деформи-

руется под влиянием постоянного электрического поля. В переменном поле пластинка будет деформироваться периодически, т. е. совершать колебания. Если переменное электрическое поле колеблется в такт с собственными колебаниями пластинки, то наступает резонанс. При малых деформациях кварц может считаться абсолютно упругим телом, поэтому пьезокварцевые пластинки могут совершать при резонансе с колебаниями электрического поля незатухающие колебания. Как ни малы резонансные амплитуды колебаний кварца, они все же в тысячи раз больше смещений в постоянном электрическом поле. Колеблющаяся кварцевая пластинка в свою очередь является генератором электрических колебаний. Обладая, подобно камертону, высокой стабильностью частоты, пьезокварцевая пластинка в известных условиях оказывает стабилизирующее действие на первичный источник электрических колебаний. В так называемых *стандартах частоты*, снабженных пьезокварцевой пластинкой особого (косого) среза, частота сохраняется постоянной с точностью до единицы на 10 миллионов, что отвечает 1 *сек* на 120 дней. В настоящее время почти все радиостанции снабжены для поддержания постоянной частоты (длины волны) пьезокварцевыми стабилизаторами. Пьезокварцевые пластинки находят применение также для устройства *кварцевых часов* большой точности; ошибка таких часов имеет порядок $\pm$ 0,0005 *сек* в день. Применение кварцевых пластинок для стабилизации было впервые осуществлено Кэди в 1922 г.

Применение пьезокварца для подводной сигнализации. Собственная частота f пьезокварцевой пластинки, вырезанной перпендикулярно к электрической оси X_1, вычисляется по формуле

$$f = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \qquad (65)$$

где a — толщина пластинки в направлении оси X_1; $c_{11} = 85 \cdot 10^{10}$ *дин/см*^{2} — упругая константа кварца в том же направлении; ρ — плотность кварца. Собственная частота пьезокварцевой пластинки толщиной в 1 *мм*, вычисленная по этой формуле, равна примерно 1 000 000 *гц*. Механические колебания столь высокой частоты не воспринимаются ухом, так как наибольшая слышимая частота не превосходит 20 000 *гц*, и являются предметом изучения ультраакустики.

Коэффициент поглощения ультразвука, излучаемого колеблющейся пьезокварцевой пластинкой и проходящего через данную среду, вычисляется по формуле

$$a = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi^2 \eta}{\lambda^2 v \rho}, \qquad (66)$$

где η — коэффициент вязкости среды, λ — длина ультраакустической волны, v — скорость ультразвука; ρ — плотность среды. Воздух, обладающий малой плотностью, практически является непроводником ультразвука, тогда как, например, вода и транс-

форматорное масло могут передавать ультразвуки на значительные расстояния.

Из теории дифракции волн следует, что круглый поршневой излучатель направляет акустические волны коническим пучком, половинный угол θ которого вычисляется по приближенной формуле

$$\sin\theta = 0{,}61\,\lambda/R,$$

где λ — длина акустической волны, R — радиус излучателя.

Применяя эту формулу, можно легко видеть, что направленное излучение легко осуществляется с помощью малых излучателей при малых длинах волн, т. е. в случае применения ультразвуков, и встречает большие трудности тогда, когда приходится иметь дело с длинными волнами слышимого звука и соответственными излучателями огромных размеров.

Важно отметить, что интенсивность ультразвуков, получаемых с помощью пьезокварцевых пластин, может достигать значений 10 *вт* на 1 *см*^{2}, превосходя интенсивность звука орудия примерно в 10 000 раз.

Все указанные обстоятельства сделали возможным применение ультразвука для подводной сигнализации, измерения глубин моря (Ланжевен в 1918 г.) и обнаружения подводных препятствий мореплаванию. Применяемые для этих целей пьезокварцевые излучатели должны иметь возможно больший диаметр, например 25 *см*. Так как в природе не встречается однородный и однокристальный кварц таких размеров, чтобы из него можно было изготовить пластинку столь большой площади, то для целей подводной сигнализации приходится изготовлять мозаичные излучатели, составленные из маленьких пластинок, ориентированных своими осями параллельно друг другу. Такие мозаики толщиной около 2 *мм* заклеиваются между стальными дисками толщиной около 30 *мм*. Так как скорости звука в кварце и стали приблизительно равны друг другу, то вся система может колебаться как одна пьезокварцевая мозаика толщиной 6,2 *см* и излучать ультразвук с частотой порядка 38 000 *гц*.

Ультраакустический приемник состоит из такой же пьезокварцевой мозаики, последняя преобразует воспринимаемые ею ультраакустические колебания в электрические, которые поступают в радиоприемное устройство. Для измерения глубин и обнаружения подводных скал приемник снабжается устройством для записи времени, потребного для прохождения ультразвука от излучателя до дна моря или до подводной скалы и обратно до приемника.

Применение пьезокварца для обнаружения пороков металла. Однородный металл является очень хорошим проводником ультразвуков. Если же в металле имеются пустоты, трещины и другие пороки, то ультраакустические волны претерпевают в соответствующих местах отражение и поглощение; это делает возмож-

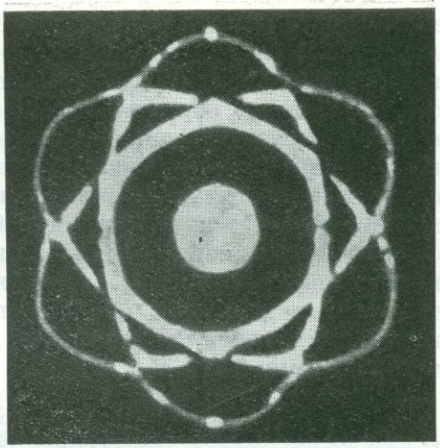


Рис. 30. Дифракция света в колеблющемся кварце

ным применение ультразвуков для обнаружения пороков металла (С. Я. Соколов, 1929 г.). Пьезокварцевые дефектоскопы состоят из кварцевого излучателя, прижимаемого с помощью промежуточного слоя трансформаторного масла к исследуемому металлу. В месте выхода ультраакустических лучей помещается сосудик с маслом; прошедшие через металл ультразвуковые лучи вызывают движения на поверхности масла, легко наблюдаемые в отраженном свете. Отсутствие движений свидетельствует о том, что на пути ультраакустических лучей встречаются дефекты металла.

Дифракция света в колеблющемся кристалле. Если на колеблющуюся пьезокварцевую пластинку поместить кубик, изготовленный из какого-либо прозрачного кристалла, то через этот кубик будут проходить ультраакустические волны, вызывая в нем периодические изменения показателя преломления. Чередующиеся слои кристалла с бо́льшим и меньшим показателями преломления образуют дифракционную решетку. Пропуская вдоль слоев этой решетки параллельный пучок света, получаемый от точечного источника света с помощью линзы (Шеффер и Бергман, 1934 г.), увидим после фокусировки света на экран дифракционную картину (рис. 30), напоминающую диаграмму Лауэ. Измеряя радиусы-векторы дифракционных картин, можно путем несложных вычислений получить с достаточной точностью адиабатические упругие постоянные исследуемого кристалла (стр. 324).

Влияние колебаний кристалла на его двупреломление. В прозрачных кристаллах и аморфных телах возникает добавочное двойное преломление лучей света под влиянием упругих деформаций; аналогичные явления должны наблюдаться и при периодической деформации кристаллов, т. е. при колебаниях. Если поместить кварцевую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, в диагональном положении между скрещенными николями, то такая система будет пропускать свет вследствие существования

естественного двойного преломления в кварце. Свет погаснет, если между николями поместить вторую кварцевую пластинку, тождественную первой, в таком положении, чтобы оптические оси обеих пластинок образовали прямой угол, находясь одновременно в плоскостях, перпендикулярных к направлению лучей света. Если теперь возбудить колебания в одной из пластинок, то свет опять пройдет через второй николь. Исследуя прошедший свет с помощью вращающегося зеркала, можно убедиться в том, что лучи пульсируют с удвоенной частотой подаваемого на кварцевую пластинку переменного электрического напряжения. Пульсация света, получаемая этим способом, может быть использована для самых разнообразных целей, в частности для измерения скорости света, в телевидении и т. д.

УПРУГОСТЬ КРИСТАЛЛОВ

Историческое введение. Начало формальной теории упругости кристаллов, основанной на представлении непрерывности и анизотропии кристаллов, было положено трудами Коши (1822—1829 гг.), который показал, что эта теория может быть построена путем простого обобщения установленного Гуком в 1660 г. опытным путем закона пропорциональности между механическим напряжением и вызываемой им деформацией. Грин (1839 г.), исходя из представления о консервативности деформирующих сил, показал, что 36 независимых констант уравнений Коши могут быть редуцированы до 21. Томсон, пользуясь законами термодинамики, установил окончательно (1855 г.), что сведение 36 констант к 21 законно только для изотермической или адиабатической деформаций. Именно с этими случаями чаще всего приходится встречаться на практике. Полное изложение теории дано в «Учебнике кристаллофизики» Фогта (1910 г.).

Обобщенный закон Гука. Теория упругости кристаллов строится на предположении, что компоненты t_{ik} тензора напряжений связаны линейными зависимостями с компонентами r_{lm} тензора деформаций. В самом общем виде совокупность линейных уравнений, выражающих зависимость t от r, имеет вид

$$t_{ik} = c_{iklm}\, r_{lm}\,(i, k, l, m = 1, 2, 3) \qquad (67)$$

или

	r_{11}	r_{22}	r_{33}	r_{23}	r_{32}	r_{31}	r_{13}	r_{12}	r_{21}
t_{11}	c_{1111}	c_{1122}	c_{1133}	c_{1123}	c_{1132}	c_{1131}	c_{1113}	c_{1112}	c_{1121}
t_{22}	c_{2211}	c_{2222}	c_{2233}	c_{2223}	c_{2232}	c_{2231}	c_{2213}	c_{2212}	c_{2221}
t_{33}	c_{3311}	c_{3322}	c_{3333}	c_{3323}	c_{3332}	c_{3331}	c_{3313}	c_{3312}	c_{3321}
t_{23}	c_{2311}	c_{2322}	c_{2333}	c_{2323}	c_{2332}	c_{2331}	c_{2313}	c_{2312}	c_{2321}
t_{32}	c_{3211}	c_{3222}	c_{3233}	c_{3223}	c_{3232}	c_{3231}	c_{3213}	c_{3212}	c_{3221}
t_{31}	c_{3111}	c_{3122}	c_{3133}	c_{3123}	c_{3132}	c_{3131}	c_{3113}	c_{3112}	c_{3121}
t_{13}	c_{1311}	c_{1322}	c_{1333}	c_{1323}	c_{1332}	c_{1331}	c_{1313}	c_{1312}	c_{1321}
t_{12}	c_{1211}	c_{1222}	c_{1233}	c_{1223}	c_{1232}	c_{1231}	c_{1213}	c_{1212}	c_{1221}
t_{21}	c_{2111}	c_{2122}	c_{2133}	c_{2123}	c_{2132}	c_{2131}	c_{2113}	c_{2112}	c_{2121}

(68)

Принимая во внимание равенства $t_{ik}=t_{ki}$, $r_{lm}=r_{ml}$ и применяя более употребительные, но менее удобные в вопросах преобразования тензоров двузначные индексы, уравнения (68) можно переписать в сокращенной форме

	r_{11}	r_{22}	r_{33}	$2r_{23}$	$2r_{31}$	$2r_{12}$
t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
t_{22}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
t_{33}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}
t_{23}	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	c_{46}
t_{31}	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	c_{56}
t_{12}	c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}	c_{66}

(69)

Сопоставляя обе формы уравнений между собой, легко найти соотношения между *константами упругости* с двузначными и четырехзначными индексами, например,

$$c_{11}=c_{1111},\quad c_{12}=c_{1122},\quad c_{14}=c_{1123}=c_{1132},$$
$$c_{42}=c_{2322},\quad c_{44}=c_{2323}\quad \text{и}\quad \text{т. д.} \tag{70}$$

Благодаря существованию равенства

$$c_{no}=c_{on}\ (n,\ o=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6), \tag{71}$$

которое мы докажем ниже, число констант упругости уменьшается с 36 до 21.

Уравнения (68) дают пример связи двух тензоров второго порядка t и r с помощью тензора четвертого порядка и служат для определения компонент t_{ik}, когда известны компоненты r_{lm}. В тех случаях, когда известными считаются t_{ik}, а подлежащими определению r_{lm}, употребляются обратные уравнения, которые в самом общем виде могут быть записаны в форме

$$r_{lm}=s_{lmik}t_{ik}\ (i,\ k,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3) \tag{72}$$

или в развернутом виде

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
r_{22}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}
r_{33}	s_{31}	s_{32}	s_{33}	s_{34}	s_{35}	s_{36}
$2r_{23}$	s_{41}	s_{42}	s_{43}	s_{44}	s_{45}	s_{46}
$2r_{31}$	s_{51}	s_{52}	s_{53}	s_{54}	s_{55}	s_{56}
$2r_{12}$	s_{61}	s_{62}	s_{63}	s_{64}	s_{65}	s_{66}

(72′)

Постоянные s_{no} носят название *модулей упругости*, которые не следует смешивать с юнговыми модулями, о которых будет речь впереди. Для последних уравнений справедливы соотношения

$$s_{no}=s_{on}. \tag{73}$$

Переход от модулей с четырьмя индексами к модулям с двумя индексами осуществляется сравнением уравнений (72) и (72′); это сравнение приводит, например, к следующим результатам:

$$s_{12} = s_{1122},\quad s_{14} = s_{1123} + s_{1132} = 2s_{1123},\quad s_{42} = s_{2322} + s_{3222} = 2s_{2322},\quad s_{55} = s_{3131} + s_{3113} + s_{1331} + s_{1313} = 4s_{3131} = 4s_{3113}\ldots$$

Энергия деформации. Если в изотропном теле произведена деформация r, то по закону Гука сила t, вызвавшая эту деформацию, равна

$$t = kr,$$

где k — коэффициент пропорциональности, который в дальнейшем будем считать равным единице. Увеличение деформации на dr будет сопряжено с затратой работы $-\delta A$, равной произведению силы t на деформацию dr, т. е.

$$-\delta A = rdr.$$

Полная работа A от нулевого значения деформации равна

$$A = -\int_0^r rdr = \frac{1}{2}r^2.$$

Для анизотропного тела в согласии с обобщенным законом Гука будем иметь

$$-\delta A = t_{11}dr_{11} + t_{22}dr_{22} + t_{33}dr_{33} + 2t_{23}dr_{23} + 2t_{31}dr_{31} + 2t_{12}dr_{12}. \qquad (74)$$

Так как работа в идеально упругом теле зависит только от шести компонент r_{ik}, которые являются независимыми переменными, то полный дифференциал dA работы должен быть равен

$$dA = \frac{\partial A}{\partial r_{11}}dr_{11} + \frac{\partial A}{\partial r_{22}}dr_{22} + \frac{\partial A}{\partial r_{33}}dr_{33} + \frac{\partial A}{\partial r_{23}}dr_{23} + \frac{\partial A}{\partial r_{31}}dr_{31} + \frac{\partial A}{\partial r_{12}}dr_{12}. \qquad (75)$$

Сравнивая между собой выражения (74) и (75), будем иметь:

$$t_{11} = -\partial A/\partial r_{11},\quad t_{22} = -\partial A/\partial r_{22},\quad t_{33} = -\partial A/\partial r_{33},$$
$$2t_{23} = -\partial A/\partial r_{23},\quad 2t_{31} = -\partial A/\partial r_{31},\quad 2t_{12} = -\partial A/\partial r_{12}.$$

Второе дифференцирование этих выражений дает

$$\partial t_{11}/\partial r_{22} = -\partial^2 A/\partial r_{11}\partial r_{22},\ \partial t_{22}/\partial r_{11} = \partial^2 A/\partial r_{22}\partial r_{11} \text{ и т. д.} \qquad (76)$$

С другой стороны, дифференцирование уравнений (69) дает

$$\partial t_{11}/\partial r_{22} = c_{12},\ \partial t_{22}/\partial r_{11} = c_{21} \text{ и т. д.} \qquad (77)$$

Сравнивая выражения (76) и (77) между собой, получаем $c_{12} = c_{21}$ или в общей форме

$$c_{no} = c_{on}\ (n, o = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Аналогично можно доказать, что

$$s_{no} = s_{on}.$$

Влияние симметрии на форму тензора констант и модулей упругости. Применяя тот же метод рассуждения, которым мы пользовались, исследуя влияние симметрии на форму тензоров второго и третьего порядка (стр. 273 и 308), и опираясь на формулы преобразования (17′), можно показать, что число точечных групп симметрии упругости однородных сред равно 10. Среди этих групп имеются две предельные: $m \cdot \infty : m$ и $\infty/\infty \cdot m$. К первой относится большинство гексагональных кристаллов, симметрия упругих свойств которых выражается поверхностями вращения, а также однородные анизотропные тела соответствующей симметрии, например растянутая резина; ко второй группе относятся только однородные изотропные тела, например стекло. В табл. 9 и 10 приведены все 10 форм тензоров констант и модулей упругости однородных сред.

Деформация кристаллов при одностороннем давлении. Применим уравнения (72′) для частного случая, когда одностороннее давление t_{33} действует в направлении оси X_3 на единичный кубик кварца с ребрами, параллельными главным осям X_1, X_2, X_3. Кварц принадлежит к группе минимальной симметрии $3 : 2$. Уравнения упругости (72′) в этом случае принимают вид

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	0	0
r_{22}	s_{12}	s_{11}	s_{13}	$-s_{14}$	0	0
r_{33}	s_{13}	s_{13}	s_{33}	0	0	0
$2r_{23}$	s_{14}	$-s_{14}$	0	s_{44}	0	0
$2r_{31}$	0	0	0	0	s_{44}	$2s_{14}$
$2r_{12}$	0	0	0	0	$2s_{14}$	$2(s_{11} - s_{12})$

(78)

Опытами Фогта установлены следующие значения изотермических модулей упругости кварца, *см²/дин*:

$$s_{11} = 129{,}7 \cdot 10^{-14}, \qquad s_{12} = -16{,}6 \cdot 10^{-14},$$
$$s_{33} = 99{,}0 \cdot 10^{-14}, \qquad s_{13} = -15{,}2 \cdot 10^{-14},$$
$$s_{44} = 200{,}4 \cdot 10^{-14}, \qquad s_{14} = -43{,}1 \cdot 10^{-14},$$
$$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) = 292{,}6 \cdot 10^{-14}.$$

По условию все компоненты t_{ik}, кроме t_{33}, равны нулю; следовательно, уравнения (78) принимают форму:

$$r_{11} = s_{13}t_{33}, \qquad r_{22} = s_{13}t_{33}, \qquad r_{33} = s_{33}t_{33},$$
$$2r_{23} = 0, \qquad 2r_{31} = 0, \qquad 2r_{12} = 0.$$

Из этих уравнений видно, что одностороннее давление вдоль оси X_3 вызывает только изменение длин ребер кубика кварца и не вызывает сдвигов, т. е. изменения углов между ребрами. При-

Таблица 9

Симметрия и форма тензоров констант упругости однородных анизотропных сред в главной системе координат

Симметрия тензора	Подчиненная группа	t_{ik}	r_{11}	r_{22}	r_{33}	$2r_{23}$	$2r_{31}$	$2r_{12}$
$\bar{2}$ (21 константа)	1	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
		t_{22}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
		t_{33}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}
		t_{23}	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	c_{46}
		t_{31}	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	c_{56}
		t_{12}	c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}	c_{66}
$2:m$ (13 констант)	2	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	c_{16}
	m	t_{22}	c_{12}	c_{22}	c_{23}	0	0	c_{26}
		t_{33}	c_{13}	c_{23}	c_{33}	0	0	c_{36}
		t_{23}	0	0	0	c_{44}	c_{45}	0
		t_{31}	0	0	0	c_{45}	c_{55}	0
		t_{12}	c_{16}	c_{26}	c_{36}	0	0	c_{66}
$m\,2:m$ (9 констант)	$2:2$	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
	$2\cdot m$	t_{22}	c_{12}	c_{22}	c_{23}	0	0	0
		t_{33}	c_{13}	c_{23}	c_{33}	0	0	0
		t_{23}	0	0	0	c_{44}	0	0
		t_{31}	0	0	0	0	c_{55}	0
		t_{12}	0	0	0	0	0	c_{66}
$\bar{6}$ (7 констант)	3	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	$-c_{25}$	0
		t_{22}	c_{12}	c_{11}	c_{13}	$-c_{14}$	c_{25}	0
		t_{33}	c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
		t_{23}	c_{14}	$-c_{14}$	0	c_{41}	0	c_{25}
		t_{31}	$-c_{25}$	c_{25}	0	0	c_{44}	c_{14}
		t_{12}	0	0	0	c_{25}	c_{14}	$\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$
$4:m$ (7 констант)	4	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	c_{16}
	$\bar{4}$	t_{22}	c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	c_{16}
		t_{33}	c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
		t_{23}	0	0	0	c_{44}	0	0
		t_{31}	0	0	0	0	c_{41}	0
		t_{12}	c_{16}	$-c_{16}$	0	0	0	c_{66}
$\bar{6}\cdot m$ (6 констант)	$3:2$	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	0	0
	$3\cdot m$	t_{22}	c_{12}	c_{11}	c_{13}	$-c_{14}$	0	0
		t_{33}	c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
		t_{23}	c_{14}	$-c_{14}$	0	c_{44}	0	0
		t_{31}	0	0	0	0	c_{41}	c_{14}
		t_{12}	0	0	0	0	c_{14}	$\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$

Таблица 9 (окончание)

Симметрия тензора	Подчиненная группа	t_{ik}	r_{11}	r_{22}	r_{33}	$2r_{23}$	$2r_{31}$	$2r_{12}$
$m\cdot 4 : m$ (6 констант)	$4 : 2$	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
	$4\cdot m$	t_{22}	c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	0
	$\bar{4}\cdot m$	t_{33}	c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
		t_{23}	0	0	0	c_{44}	0	0
		t_{31}	0	0	0	0	c_{44}	0
		t_{12}	0	0	0	0	0	c_{66}
$m\cdot\infty : m$ (5 констант)	$\infty : m$	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
	$\infty\cdot m$							
	$\infty : 2$	t_{22}	c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	0
	∞							
	$m\cdot 6 : m$	t_{33}	c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
	$6 : m$							
	$6\cdot m$	t_{23}	0	0	0	c_{44}	0	0
	$6 : 2$							
	6	t_{31}	0	0	0	0	c_{44}	0
	$m\cdot 3 : m$							$\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$
	$3 : m$	t_{12}	0	0	0	0	0	
$\bar{6}/4$ (3 константы)	$\bar{6}/2$	t_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{12}	0	0	0
	$3/\bar{4}$	t_{22}	c_{12}	c_{11}	c_{12}	0	0	0
	$3/4$	t_{33}	c_{12}	c_{12}	c_{11}	0	0	0
	$3/2$	t_{23}	0	0	0	c_{41}	0	0
		t_{31}	0	0	0	0	c_{44}	0
		t_{12}	0	0	0	0	0	c_{44}
$\infty/\infty\cdot m$ (2 константы)	∞/∞	t_{11}	c	c_1	c_1	0	0	0
		t_{22}	c_1	c	c_1	0	0	0
		t_{33}	c_1	c_1	c	0	0	0
		t_{23}	0	0	0	$\frac{c-c_1}{2}$	0	0
		t_{31}	0	0	0	0	$\frac{c-c_1}{2}$	0
		t_{12}	0	0	0	0	0	$\frac{c-c_1}{2}$

Таблица 10

Симметрия и форма тензоров модулей упругости анизотропных сред в главной системе координат

Симметрия тензора	Подчиненная группа	r_{ik}	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
$\bar{2}$ (21 константа)	1	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
		r_{22}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}
		r_{33}	s_{31}	s_{32}	s_{33}	s_{34}	s_{35}	s_{36}
		$2r_{23}$	s_{41}	s_{42}	s_{43}	s_{44}	s_{45}	s_{46}
		$2r_{31}$	s_{51}	s_{52}	s_{53}	s_{54}	s_{55}	s_{56}
		$2r_{12}$	s_{61}	s_{62}	s_{63}	s_{64}	s_{65}	s_{66}
$2:m$ (13 констант)	2							
	m	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	s_{16}
		r_{22}	s_{12}	s_{22}	s_{23}	0	0	s_{26}
		r_{33}	s_{13}	s_{23}	s_{33}	0	0	s_{36}
		$2r_{23}$	0	0	0	s_{44}	s_{45}	0
		$2r_{31}$	0	0	0	s_{45}	s_{55}	0
		$2r_{12}$	s_{16}	s_{26}	s_{36}	0	0	s_{66}
$m\cdot 2:m$ (9 констант)	$2:2$	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0
	$2\cdot m$	r_{22}	s_{12}	s_{22}	s_{23}	0	0	0
		r_{33}	s_{13}	s_{23}	s_{33}	0	0	0
		$2r_{23}$	0	0	0	s_{44}	0	0
		$2r_{31}$	0	0	0	0	s_{55}	0
		$2r_{12}$	0	0	0	0	0	s_{66}
$\bar{6}$ (7 констант)	3	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	$-s_{25}$	0
		r_{22}	s_{12}	s_{11}	s_{13}	$-s_{14}$	s_{25}	0
		r_{33}	s_{13}	s_{13}	s_{33}	0	0	0
		$2r_{23}$	s_{14}	$-s_{14}$	0	s_{44}	0	$2s_{25}$
		$2r_{31}$	$-s_{25}$	s_{25}	0	0	s_{41}	$2s_{14}$
		$2r_{12}$	0	0	0	$2s_{25}$	$2s_{14}$	$2(s_{11}-s_{12})$
$4:m$ (7 констант)	4	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	s_{16}
	$\bar{4}$	r_{22}	s_{12}	s_{11}	s_{13}	0	0	$-s_{16}$
		r_{33}	s_{13}	s_{13}	s_{33}	0	0	0
		$2r_{23}$	0	0	0	s_{44}	0	0
		$2r_{31}$	0	0	0	0	s_{44}	0
		$2r_{12}$	s_{16}	$-s_{16}$	0	0	0	s_{66}

Таблица 10 (окончание)

Симметрия тензора	Подчиненная группа	r_{ik}	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}
$\bar{6}\cdot m$	$3:2$	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	0	0
(6 констант)	$3\cdot m$	r_{22}	s_{12}	s_{11}	s_{13}	$-s_{14}$	0	0
		r_{33}	s_{13}	s_{13}	s_{33}	0	0	0
		$2r_{23}$	s_{14}	$-s_{14}$	0	s_{44}	0	0
		$2r_{31}$	0	0	0	0	s_{44}	$2s_{14}$
		$2r_{12}$	0	0	0	0	$2s_{14}$	$2(s_{11}-s_{12})$
$m\cdot 4:m$	$4:2$	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0
(6 констант)	$4\cdot m$	r_{22}	s_{12}	s_{11}	s_{13}	0	0	0
	$\bar{4}\cdot m$	r_{33}	s_{13}	s_{13}	s_{33}	0	0	0
		$2r_{23}$	0	0	0	s_{44}	0	0
		$2r_{31}$	0	0	0	0	s_{44}	0
		$2r_{12}$	0	0	0	0	0	s_{66}
$m\cdot\infty:m$	$\infty:m$	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0
(5 констант)	$\infty\cdot m$							
	∞	r_{22}	s_{12}	s_{11}	s_{13}	0	0	0
	$\infty:2$							
	$m\cdot 6:m$	r_{33}	s_{13}	s_{13}	s_{33}	0	0	0
	$6:m$	$2r_{23}$	0	0	0	s_{44}	0	0
	$6\cdot m$							
	$6:2$	$2r_{31}$	0	0	0	0	s_{44}	0
	6							
	$m\cdot 3:m$	$2r_{12}$	0	0	0	0	0	$2(s_{11}-s_{12})$
	$3:m$							
$\bar{6}/4$	$\bar{6}/2$	r_{11}	s_{11}	s_{12}	s_{12}	0	0	0
(3 константы)	$3/\bar{4}$	r_{22}	s_{12}	s_{11}	s_{12}	0	0	0
	$3/4$	r_{33}	s_{12}	s_{12}	s_{11}	0	0	0
	$3/2$	$2r_{23}$	0	0	0	s_{44}	0	0
		$2r_{31}$	0	0	0	0	s_{44}	0
		$2r_{12}$	0	0	0	0	0	s_{44}
$\infty/\infty\cdot m$	∞/∞	r_{11}	s	s_1	s_1	0	0	0
(2 константы)		r_{22}	s_1	s	s_1	0	0	0
		r_{33}	s_1	s_1	s	0	0	0
		$2r_{23}$	0	0	0	$2(s-s_1)$	0	0
		$2r_{31}$	0	0	0	0	$2(s-s_1)$	0
		$2r_{12}$	0	0	0	0	0	$2(s-s_1)$

нимая во внимание знаки величин, входящих в эти уравнения (давление, равное сжимающему усилию, отрицательно), получаем $r_{11} > 0$, $r_{22} > 0$, $r_{33} < 0$, т. е. кубик кварца должен в указанных условиях укоротиться по оси X_3 и одинаково расшириться по осям X_1 и X_2. Другими словами, кварц при сжимании вдоль оси X_3 будет вести себя, как изотропное тело.

Иначе будет обстоять дело, если кубик кварца будет подвергнут сжатию вдоль оси X_1 или вдоль оси X_2. В этих случаях будем иметь:

$$\begin{aligned} r_{11} &= s_{11}t_{11} < 0, & r_{11} &= s_{12}t_{22} > 0, \\ r_{22} &= s_{12}t_{11} > 0, & r_{22} &= s_{11}t_{22} < 0, \\ r_{33} &= s_{13}t_{11} > 0, & r_{33} &= s_{13}t_{22} > 0, \\ 2r_{23} &= s_{14}t_{11} > 0, & 2r_{23} &= -s_{14}t_{22} < 0, \\ 2r_{31} &= 0, & 2r_{31} &= 0, \\ 2r_{12} &= 0, & 2r_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Как видно из этих уравнений, кварц при сжимании по оси X_1 должен укоротиться вдоль оси X_1 и расшириться по осям X_2 и X_3, но это расширение не будет одинаково; кроме того, должно произойти уменьшение угла между ребрами, параллельными осям X_2 и X_3 ($2r_{23}$ положительно). При сжимании кварцевого кубика по оси X_2 происходит его укорочение по этой оси, удлинение по осям X_1 и X_3 и увеличение угла между ребрами, параллельными осям X_2 и X_3.

Подводя итог трем рассмотренным случаям деформации кварца под влиянием одностороннего давления, можно сказать, что при сжимании кварца по оси X_3 шар, мысленно вписанный в кубик кварца, превращается в сплюснутый по оси X_3 эллипсоид вращения; при сжимании по осям X_1 и X_2 шар превращается в трехосный эллипсоид.

Деформация кристаллов под действием всестороннего давления. Мы рассмотрим этот случай деформации также на примере единичного кубика кварца с ребрами, параллельными осям X_1, X_2, X_3. Всестороннее гидростатическое давление действует на все грани кубика одинаково, следовательно, $t_{11} = t_{22} = t_{33} = \pi < 0$; оно направлено нормально к граням, поэтому касательные напряжения равны нулю: $t_{23} = t_{31} = t_{12} = 0$.

Уравнения (78) принимают вид:

$$\begin{aligned} r_{11} &= (s_{11} + s_{12} + s_{13})\,\pi < 0, \\ r_{22} &= (s_{12} + s_{11} + s_{13})\,\pi < 0, \\ r_{33} &= (s_{13} + s_{13} + s_{33})\,\pi < 0, \\ 2r_{23} &= 0, \\ 2r_{31} &= 0, \\ 2r_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что при всестороннем давлении кристалл кварца сжимается по всем трем осям; по осям X_1 и X_2

он сжимается одинаково, но больше, чем по оси X_3. При этих условиях симметрия внешней формы и структуры кварца сохраняется; в частности, X_3 остается осью симметрии третьего порядка. Этот вывод справедлив для всех кристаллов. В этом отношении расширение или сжатие кристаллов при изменении внешнего давления вполне аналогично термическому расширению. С математической точки зрения это означает, что тензор всестороннего давления

$$\begin{matrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi, \end{matrix}$$

имеющий одну компоненту, есть скаляр, как и температура.

Модуль Юнга и коэффициент растяжения. Если произвольно ориентированный по отношению к главным осям единичный кубик кристалла подвергается действию растягивающего напряжения t'_{33} вдоль одного из ребер, которое мы примем за ось X'_3, то одно из уравнений упругости (72′), а именно то, которое отвечает третьей строке тензора s_{no}, будет иметь вид $r'_{33} = s'_{33}t'_{33}$.

Величина s'_{33} называется коэффициентом растяжения в направлении X_3. Если растягивающему усилию F подвергается не единичный кубик, а стержень длиной l, имеющий поперечное сечение q и получающий удлинение Δl, то

$$r'_{33} = \Delta l/l, \quad t'_{33} = F/q, \quad s'_{33} = \Delta l q/lF. \tag{79}$$

Величина s'_{33} является не только мерой растяжения вдоль оси X'_3, но также и мерой изгиба стержней, длина которых принимается за ось X'_3. Это становится понятным, если принять во внимание, что выпуклая сторона изогнутого стержня претерпевает растяжение, а вогнутая — сжатие. Опыт и теория показывают, что стрела прогиба стержня при прочих равных условиях пропорциональна s'_{33}.

Пользуясь формулами преобразования тензора четвертого порядка (17′) и принимая во внимание, что они рассчитаны на компоненты с четырехзначными индексами, можно в каждом конкретном случае найти зависимость коэффициента $s'_{33} = s'_{3333}$ от направления оси X'_3, т. е. от косинусов углов, образуемых осями X'_1, X'_2, X'_3 с главными осями X_1, X_2, X_3. В самом общем виде эта зависимость имеет вид

$$s'_{3333} = c_{i3}c_{k3}c_{l3}c_{m3}s_{iklm},$$

где величины c с двумя индексами — косинусы углов (не смешивать с модулями упругости).

Для кварца и вообще для кристаллов минимальной симметрии *3 : 2* имеем

$$s'_{33} = s_{11}(1 - c_{33}^2)^2 + s_{33}c_{33}^4 + (2s_{13} + s_{41})c_{33}^2(1 - c_{33}^2) + \\ + 2s_{14}c_{23}c_{33}(3c_{13} + c_{23}^2).$$

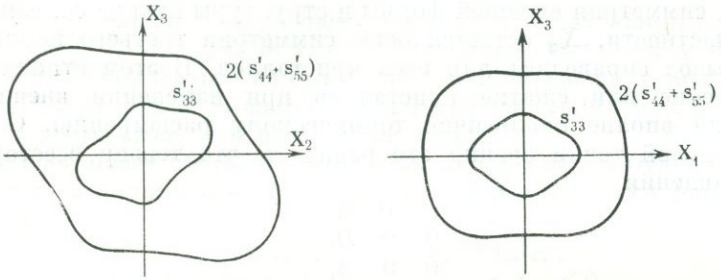


Рис. 31. Сечения поверхностей коэффициентов растяжения (изгиба) s_{33} и модуля кручения $2(s_{44}' + s_{55}')$ правого кварца

Ось X_1 в нижнем рисунке направлена к наблюдателю

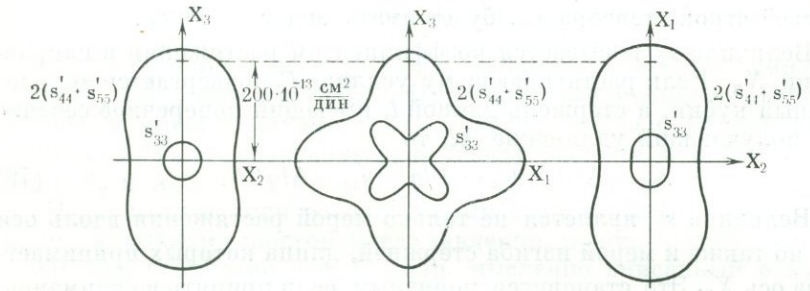
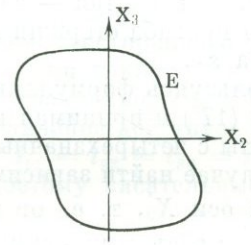


Рис. 32. Сечения поверхностей s_{33}' и $2(s_{44}' + s_{55}')$ сегнетовой соли



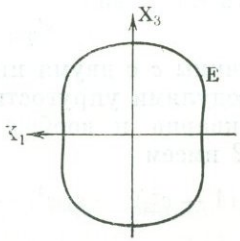


Рис. 33. Сечения поверхности модуля Юнга правого кварца

Ось X_1 в верхнем рисунке направлена к наблюдателю

Это уравнение дает возможность построить *поверхность коэффициентов растяжения*, в которой каждый радиус-вектор пропорционален соответствующему значению s'_{33}; сечения этой поверхности координатными плоскостями показаны на рис. 31.

Для кристаллов сегнетовой соли имеем

$$s'_{33} = s_{11}c_{13}^4 + s_{22}c_{23}^4 + s_{33}c_{33}^4 + (2s_{23} + s_{44})c_{23}^2c_{33}^2 + \\ + (2s_{13} + s_{55}) \times c_{23}^2c_{13}^2 + (2s_{12} + s_{66})\, c_{13}^2c_{23}^2.$$

Соответствующие кривые приведены на рис. 32.

Обратная величина коэффициента растяжения носит название *модуля Юнга*: $E = 1/s'_{33}$. Эта величина играет большую роль в вопросах колебания пьезокварцевых стержней. Сечения поверхности модуля Юнга для кварца показаны на рис. 33.

Поверхности модулей кручения. Пользуясь формулами преобразования тензоров c_{ik} и s_{ik}, можно построить множество указательных поверхностей, кроме описанных выше поверхностей коэффициентов растяжения s'_{33} и модулей Юнга $1/s'_{33}$. К таким поверхностям относятся и поверхности модулей кручения.

В теории упругости доказывается, что при закручивании кристаллического цилиндра, ось которого принимается за ось X'_3, происходят сдвиги $2r'_{23}$ и $2r'_{31}$, зависящие от величин s'_{44} и s'_{55}. Угол кручения пропорционален среднему значению этих величин, т. е. $(s'_{44} + s'_{55})/2$. Последнее выражение (или обратная ему величина) и называется модулем кручения.

Сечения поверхностей модулей кручения координатными плоскостями для кварца и сегнетовой соли показаны на рис. 32 и 33.

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

Труды Алексея Васильевича Шубникова охватывают как теоретическую, так и прикладную кристаллографию. Для Алексея Васильевича характерно то, что он всегда работал на стыке наук физики, химии, математики, минералогии. Развивая учение о симметрии кристаллов, он широко пользовался математическим аппаратом, а при изучении роста кристаллов проявлял глубокое знание химии. Своими трудами по теоретической и прикладной кристаллографии он внес существенный вклад в кристаллооптику, в изучение электрических и механических свойств кристаллов. Он уделял внимание как изучению механических свойств твердых тел (их прочности, пластичности, хрупкости, твердости), так и разработке приемов обработки кристаллов (распиловке, шлифованию, полировке) и способам массового изготовления изделий из монокристаллов и стекла (фронтальных линз, точных сфер и т. д.). Поставленные перед собой задачи он всегда решал как ученый-исследователь и как остроумный изобретатель-конструктор, обычно при этом выполняя варианты приборов собственными руками, в совершенстве владея слесарными, столярными инструментами и приемами стеклодувного мастерства. Поскольку исследование всех свойств кристаллов и их практическое применение всегда требуют знания кристаллографической ориентировки изучаемых и применяемых объектов, Алексей Васильевич много внимания уделил разработке методов и приборов для определения основных осей кристаллов. В библиографии по этой теме содержится 28 работ, из них два авторских свидетельства (одно свидетельство с Б. В. Витовским на станок для шлифования шаров, второе — совместное с Б. В. Витовским и А. А. Сыромятниковым — на способ резки камней).

В сборник помещено 7 наиболее важных работ Алексея Васильевича по этому разделу. Не вошли небольшие статьи, в которых предлагаются новые приборы или приспособления для различного вида обработок (шлифования, распиловки, полировки) кварца, горных пород, стекла, излагаются способы определения оптических и электрических осей в гальках кварца, а также заметки о полировке стекла и камня и описание нового квадранта для ог-

ранки драгоценных камней. В сборник не включено «Руководство к изготовлению пьезокварцевых препаратов» (Л., Изд-во АН СССР, 1931) как коллективный труд работников кварцевой лаборатории Минералогического института АН СССР под общим руководством А. В. Шубникова. Этот труд отражает роль Алексея Васильевича в создании отечественной пьезокварцевой промышленности. В предисловии к этому труду А. В. Шубников пишет: «Появлению настоящего «Руководства» предшествовала пятилетняя сначала исследовательская, а затем производственная работа с кварцем, вызванная многочисленными требованиями на пьезопрепараты со стороны исследовательских институтов и заказами промышленности. В нашей работе мы были предоставлены сами себе, начали ее без всяких средств, ибо дело было новым в СССР и сведениями о методах работы, применяемых за границей, мы почти не располагали и не могли располагать, так как соответствующей литературы существует очень мало».

В сборнике полностью представлены классические работы А. В. Шубникова и Е. В. Цинзерлинг, посвященные открытию и изучению явления механического двойникования кристаллов кварца. Это особый вид механического двойникования, отличающийся, например, от широко известного двойникования кальцита тем, что под действием нагрузки переориентация структуры происходит без изменения формы кристалла. Включена одна из статей, в которой содержатся интереснейшие соображения о сущности процессов шлифовки и полировки твердых тел, основанные на собственном многолетнем опыте автора и его наблюдениях над работой уральских мастеров на Свердловской гранильной фабрике.

Три представленные в сборнике статьи относятся к методическим работам Алексея Васильевича, посвященным разработке новых методов определения ориентировки кристаллов на примере кварца и решению практических задач, методике и аппаратуре по обработке оптических деталей из стекла и монокристаллов. Все три статьи характеризуют интерес Алексея Васильевича к решению наряду с принципиальными научными проблемами и конкретных прикладных задач.

Статья о фигурах проворачивания и их возможном применении к вопросам строения материи ярко иллюстрирует особую наблюдательность А. В. Шубникова и своеобразный философский подход к наблюдаемым явлениям природы.

Уместно отметить, что по инициативе А. В. Шубникова и под его редакцией в 1938 г. вышла в переводе М. П. Шаскольской первая иностранная монография Боаса и Шмида, посвященная механическим свойствам монокристаллов.

ШЛИФОВКА СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБКОЙ[1]

Продолжение нашей работы об *интерференции* бесконечных плоских фигур [1] привело нас к необходимости сконструировать особый фотографический аппарат с большим числом тождественных объектов, расположенных в шахматном порядке. Отсутствие уверенности в том, что первый проект аппарата окажется удовлетворительным, материальные соображения и перспектива длительного ожидания результатов заставили нас отказаться от мысли заказать объективы на оптическом заводе и вынудили искать выхода в изобретении простого лабораторного метода одновременной шлифовки большого числа линз. Проблема распалась на две части: шлифовка шаров и шлифовка линз.

Шлифовка шаров. Обычный способ шлифовки и полировки сферических поверхностей [2] состоит в применении чугунных, латунных и смоляных вращающихся *чашек*, в которых шлифуемые куски стекла срабатываются различными по крупности сортами карборунда, наждака (для шлифовки) и крокуса (для полировки). Существенными недостатками этого метода являются: 1) изменение радиуса шлифуемой сферы вследствие неравномерной снашиваемости середины и краев чашки, обусловливаемой различием их линейных скоростей, и 2) необходимость иметь огромный набор чашек для шлифовки сферических поверхностей различного радиуса. Указанных недостатков не имеет способ шлифовки шаров вращающейся около своей геометрической оси металлической или иной трубкой. Техника самой работы в существенном остается та же, что и в случае применения чашек: отрезок железной трубки монтируется на горизонтальном или вертикальном шпинделе станка, центрируется, протачивается по ребру и приводится во вращение со скоростью 500—1000 оборотов в минуту в зависимости от диаметра трубки. Грубо оболваненный на шлифовальном круге по форме шара кусок стекла или камня обмазывается мокрым карборундом или наждаком и шлифуется ребром вращающейся трубки при постоянном беспорядочном поворачивании шара рукой. Переходя от грубых сортов карборунда к более мелким, заканчивают работу полировкой шара в оловянной, свинцовой или той же железной обернутой холстом трубке, крокусом с водой.

A priori авторитетные в деле оптотехники лица делали мне следующие возражения против предлагаемого метода: 1) карборунд не будет держаться во время работы на ребре шлифующей трубки; 2) при беспорядочном поворачивании шара в трубке нельзя гарантировать, что шар со всех сторон будет сошлифован равномер-

[1] Труды Минерал. музея АН СССР, 1927, т. 2, с. 125—130.

Таблица 4

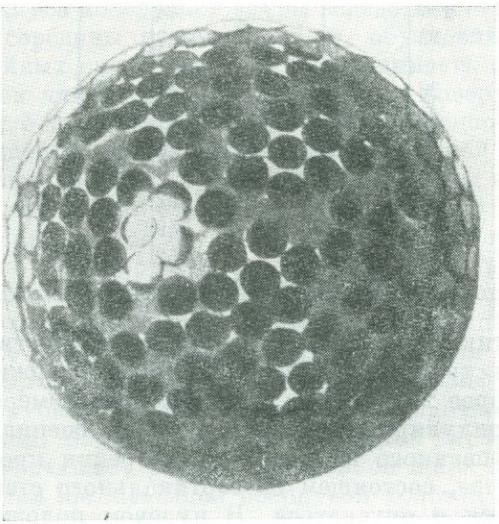
Измерения трех взаимно перпендикулярных диаметров кварцевого шара

a Отсчет при опущенном стержне, мм	*A* Среднее	*b* Отсчет при касании стержня шара, мм	*B* Среднее	*B* − *A* Диаметр шара, мм	*a* Отсчет при опущенном стержне, мм	*A* Среднее	*b* Отсчет при касании стержня шара, мм	*B* Среднее	*B* − *A* Диаметр шара, мм
2,8742		66,3063			2,8766		66,3075		
42		67			67		82		
42		72			64		75		
36		69	66,3063	63,4321	70		109	66,3085	63,4332
38	2,8742	63			59	2,8753	115		
44		69			62		94		
40		57			66		70		
40		54			57		75		
43		56			58		68		
2,8746		66,3081			0,28754				
38		111			44				
49		83			47				
43		93			41				
34	2,8753	89	66,3087	63,4334	41				
36		82			49				
36		72			52				
51		89			49				
51		83			52				

но. На практике оказалось, что карборунд действительно плохо удерживается трубкой, но зато прекрасно держится на самом шаре. На второе возражение приводим ряд измерений трех взаимно перпендикулярных диаметров шара, специально для этой цели вышлифованного из кварца. Измерения производились на толщемере Abbe, состоящем из вертикального стержня, могущего подниматься и опускаться. В нулевом положении стержень опирается своим нижним концом с силою своего веса на агатовую пластинку, при измерении же толщины — на поверхность исследуемого объекта. Разница отсчетов в микроскоп в двух положениях стержня дает измеряемую толщину. При измерении каждого из диаметров было принято производить последовательно девять отсчетов при трех касаниях стержня к агатовой пластинке в нулевом положении стержня, девять отсчетов при трех касаниях стержня к шару и девять отсчетов опять при нулевом положении стержня. Затем мы вычисляли среднее из девяти отсчетов при поднятом

стержне и среднее из восемнадцати отсчетов при опущенном стержне. Разность между первым и вторым средним мы считали равной диаметру шара. На приводимой таблице даны результаты измерений. Из таблицы видим, что шар вышлифован с точностью не меньшей, чем до одного микрона. Принимая во внимание сильное изменение положения нуля прибора, можно думать, что шар вышлифован даже с большей точностью.

Шлифовка линз. Метод шлифовки выпуклых линз (а мы имеем в виду только выпуклые линзы) сводится к методу шлифовки шаров. Сначала вышлифовывается шар из какого-либо не твердого и не набухающего от воды материала, например из горшечного талькового камня. На поверхность шара наклеиваются сургучом круглые плоскопараллельные пластинки стекла или другого материала, из которого желательно приготовить выпуклую линзу. Для того чтобы точка касания шара пришлась приблизительно в центре пластинок, под каждую из них подкладывается при наклейке проволочное кольцо надлежащего диаметра и высоты. Промежутки между кружками замазываются сургучом и закладываются обрезками стекла; иначе отдельные кружки, особенно



в начале работы, могут вывалиться. Приготовленный таким образом шар шлифуется и полируется, как было объяснено выше. В случае необходимости изготовить плоско-выпуклые линзы из зеркального стекла ограничиваются одной шлифовкой и полировкой; если же нужно приготовить двояковыпуклые линзы, то после первой шлифовки и полировки линзы необходимо переклеить обратной стороной на тот же или другой шар и шлифовать вновь. В нашем случае (рисунок) был взят шар из талькового камня диа-

метром 11,5 *см* и оклеен 450 кружками из зеркального стекла толщиной 0,5 *см*. Таким образом, за один прием было вышлифовано 450 плоско-выпуклых линз диаметром около 9 *мм* и равными до одного микрона фокусными расстояниями. Эти линзы мы и употребили для нашего фотографического аппарата.

Из всего изложенного можно сделать следующие выводы.

1. Метод шлифовки сферических поверхностей с помощью вращающейся трубки исключает необходимость иметь дорогостоящий набор чашек.

2. С помощью одной трубки можно вышлифовать шары в известных пределах самого разнообразного диаметра, что особенно важно при выполнении задания: из ряда кусков кристаллов изготовить точные шары неопределенного диаметра.

3. Точность изготовления шара равна одному микрону.

4. Метод применим также в случае одновременного изготовления большого числа выпуклых линз одного и того же фокусного расстояния, если последнее не превышает 15 *см*. В противном случае шар был бы слишком велик.

Минералогический музей АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Шубников.* Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, **20**, № 12, 1171.
2. *B. Halle.* Handbuch der praktischen Optik. Berlin.

О ФИГУРАХ УДАРА И ДАВЛЕНИЯ И О МЕХАНИЧЕСКИХ ДВОЙНИКАХ КВАРЦА[1]

Введение

В 1930 г. одним из нас [1] были открыты и описаны фигуры, получаемые в результате удара стальным острием по искусственно приготовленной грани (0001) кварца, дальнейшей шлифовки этой грани на глубину около 1 *мм* и травления плавиковой кислотой. Фигуры представляли собою правильные треугольники со сторонами, параллельными электрическим осям кварца.

Последнее обстоятельство послужило нам отправным пунктом для разработки специального метода отыскания электрических осей в гальке кварца при приготовлении из нее пьезопластин. В настоящей работе мы поставили себе целью более детальное изучение этого явления, отчасти имея в виду усовершенствование методики определения осей.

[1] Совместно с Е. В. Цинзерлинг. Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1933, вып. 3, с. 5—23.

Экспериментальная часть

Получение фигур удара и давления. Прежде всего перед нами возник вопрос о создании такого способа получения фигур удара, который легко мог бы приводить к повторяемым результатам. Вполне удовлетворительно эта задача нами была разрешена после того, как мы остановились на определенном способе подготовки поверхности, предназначенной для фигур удара, на определенном выборе точек для удара и особенно после того, как нами был сконструирован специальный прибор для производства ударов.



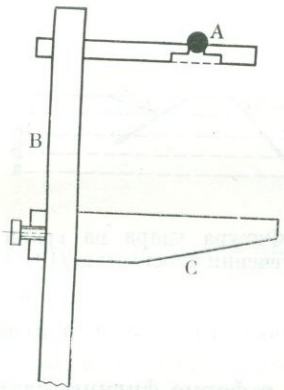
Рис. 1. Шлифованная поверхность кварца после травления плавиковой кислотой

Подготовка поверхности состояла в шлифовке ее определенными сортами карборунда, а иногда и дальнейшей полировке и травлении 30% HF. Как известно, после травления плавиковой кислотой двойниковатость кристалла легко обнаруживается вследствие неодинаковости коэффициентов отражения света в данном определенном направлении от отдельных участков шлифованной поверхности кварца. Участки кристалла, отвечающие одной решетке, кажутся более ярко освещенными, чем участки, отвечающие другой решетке, находящейся по отношению к первой в двойниковом положении (рис. 1) [2]. Заметим кстати, что сказанное имеет место как в случае дофинейских, так и в случае бразильских двойников.

Точки для ударов выбирались нами обычно так, чтобы расстояния их друг от друга, от двойниковых швов и от краев препарата не были бы слишком близки. Само собой разумеется, что это правило не соблюдалось в тех случаях, когда мы ставили себе специальную цель изучить влияние расстояния точки удара от края препарата или от двойникового шва на форму или величину фигуры удара.

Прибор для производства ударов состоял из следующих трех частей: ирисовой диафрагмы A (рис. 2), деревянной штанги B высотой около 3 *м* и подвижного столика C. Удар производился падающим стальным шариком, который для этой цели сначала помещался в полуоткрытую диафрагму, а потом спускался открыванием диафрагмы с помощью шнурка. Кварцевый препарат устанавливался в песке, насыпанном в коробку, поставленную на столик C, причем исследуемая плоскость выверялась горизонтально по уровню, а точка удара располагалась точно под шариком с помощью отвеса, спускаемого из центра диафрагмы.

Фигуры давления мы получали или прессом Бринелля, или на специально для этой цели сконструированном простом приборе. Последний состоял из рычага A (рис. 3) длиною около 2 *м* с передвижным грузом B, скобы C и оправки D со стальным шариком. В опытах с фигурами давления препарату придавалась форма пластины толщиной 1,5—2 *см*. Верхняя поверхность пластины, на которую производилось надавливание стальным шариком, ориентировалась горизонтально, а под нижнюю грань подкладывалась



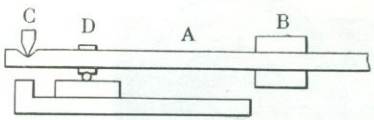


Рис. 3. Прибор для получения фигур давления

Рис. 2. Прибор для производства ударов

деревянная дощечка во избежание раскалывания пластины во время опыта. Мы пробовали применять стальные шарики различных диаметров, но в конце концов остановились на диаметре в 5 *мм*, при котором фигуры получались в каждой серии опытов наиболее однообразными и наиболее правильно образованными. В случае пресса Бринелля нагрузка увеличивалась нами во всех случаях в течение одной минуты, затем препарат оставался под нагрузкой еще одну минуту. Величина окончательной нагрузки варьировала у нас в пределах от 50 до 1500 *кг*. В случае применения рычажного пресса экспозиция препарата под давлением доводилась до трех и более суток.

Форма фигур удара и давления. Всего было исследовано нами до 300 фигур удара и фигур давления. Из этого материала прежде всего удалось установить полное тождество по формам тех и других фигур. Повторяемость результатов в случае применения пресса Бринелля оказалась несколько выше, чем в случае применения обоих выше описанных приборов, поэтому для детального исследования формы фигур более пригодными оказались фигуры, полученные прессом Бринелля.

Мы поставили себе целью наиболее подробно изучить форму фигуры на искусственной грани базиса (0001), так как именно эти фигуры представляют наибольший интерес для техники изготовления пьезопластин.

Рассматривая матовую поверхность кварца непосредственно после удара, можно наблюдать (рис. 4), что фигура удара состоит из двух частей: центральной неразрушенной круглой области и внешнего шестиугольного ободка, разделенных областью разрушения с зональными и радиальными трещинами. Та же фигура удара в сечении по линии AB дает картину, изображенную на рис. 5, откуда легко усмотреть, что разрушенная часть кристалла имеет форму кольца и что внутрь кристалла, кроме того, идут

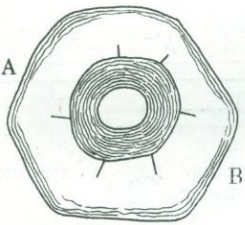


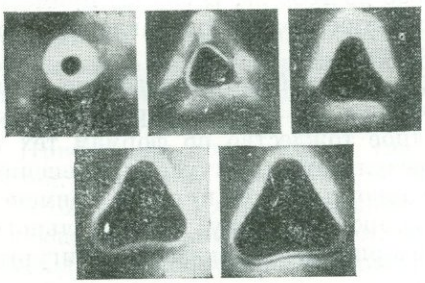
Рис. 4. Фигура удара на грани (0001) до шлифовки



Рис. 5. Фигура удара на грани (0001) в сечении плоскостью $(10\bar{1}0)$

глубокие трещины, которые мы ранее считали плоскими и параллельными гранями ромбоэдра $(10\bar{1}1)$.

Для того чтобы можно было судить о форме фигуры удара по ее сечениям плоскостями *aa*, *bb*, *cc*, . . . (рис. 5), мы поступали следующим образом. Препарат разрезался алмазной пилой по плоскости *aa* несколько ниже конца глубоких трещин; полученная поверхность шлифовалась до появления на ней трещин, после чего вся фигурка выдавливалась пинцетом, а препарат с образовавшимся после выдавливания фигуры отверстием шлифовался



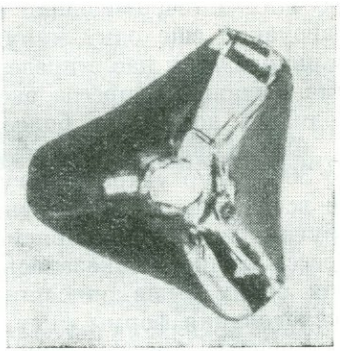


Рис. 6. Пять сечений фигур удара на грани (0001) плоскостями, ей параллельными и отстоящими друг от друга на расстояниях 1 *мм*

Рис. 7. Выдавленная из своей «матрицы» фигура удара по грани (0001)

далее, но уже с другой, верхней стороны. Отдельные стадии результата этой шлифовки фотографировались. На рис. 6 дано пять сечений одной из пластин с выдавленной фигурой. Расстояния между плоскостями *aa*, *bb*, *cc*, . . . (рис. 5) равны 1 *мм*. Эти фотографии ясно показывают, что фигура удара имеет форму трехгранной пирамиды с вогнутыми гранями и выпуклыми ребрами. То же можно наблюдать и непосредственно на выдавленной фигуре удара (рис. 7). Угол между основанием пирамиды и ее

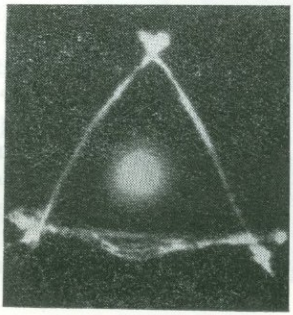


Рис. 8. Рефрактограмма, снятая с фигуры удара методом шаровой колбы

стороной, вернее касательной к ней плоскостью, оказался равным 50°, что вполне отвечает углу (0001) : (10$\bar{1}$1) или (0001) : (1$\bar{1}$01).

Дополнительные наблюдения показали в противоположность ранее опубликованным результатам, что в данном случае мы имеем дело с гранями ромбоэдра (1$\bar{1}$01), по которым кварц имеет худшую спайность, чем по (10$\bar{1}$1). Кривизна граней и ребер фигуры удара весьма показательно выявляется на рефрактограмме, снятой с фигуры удара методом одного из авторов [3] в обыкновенном белом свете с помощью шаровой колбы, наполненной бензином (рис. 8). Фотограмма, снятая с «матрицы» фигуры удара, оказалась тождественной с фотографией, снятой с самой фигуры.

Описанные нами фигуры удара и давления получились, как сказано выше, в монокристальных областях хотя бы и двойниково-

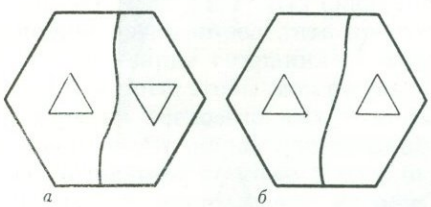


Рис. 9. Расположение фигур удара в дофинейском (*а*) и бразильском (*б*) двойниках

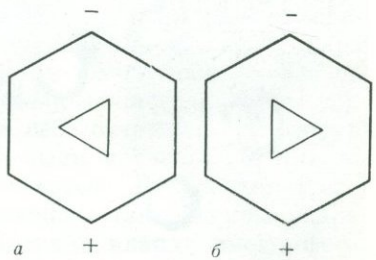


Рис. 10. Расположение фигур удара в правом (*а*) и левом (*б*) кварцах

Плюсом обозначены концы осей, заряжающиеся положительно при сдавливании кварца по оси [0001]

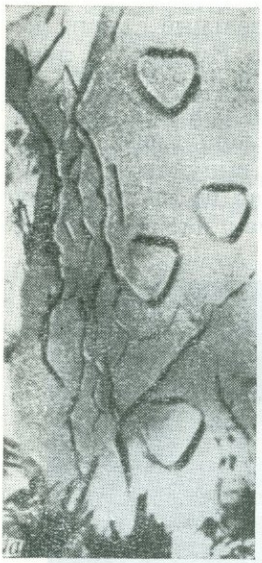
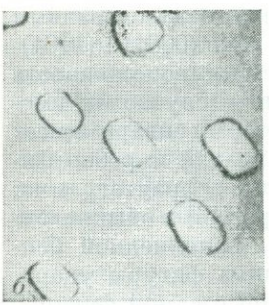
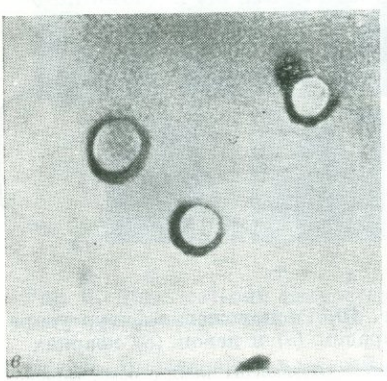


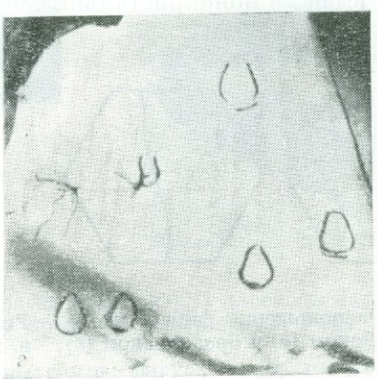
Рис. 11. Фигуры удара на гранях формы
а — {1010}; *б* — {1120}; *в* — {1101}; *г* — {1011}

го кварца в значительном удалении как от краев препарата, так и от двойниковых швов, при этом в дофинейском двойнике, как и следовало ожидать, фигуры, относящиеся к разным кристаллическим решеткам, оказывались повернутыми друг относительно друга на 60° (рис. 9, *а*), а в бразильском располагались параллельно (рис. 9, *б*). Расположение фигур удара в правом и левом кварце по отношению к электрическим осям дано на рис. 10, *а* и *б*. Полюсами обозначены те концы электрических осей, которые при сжатии вдоль этих осей заряжаются положительным электричеством.

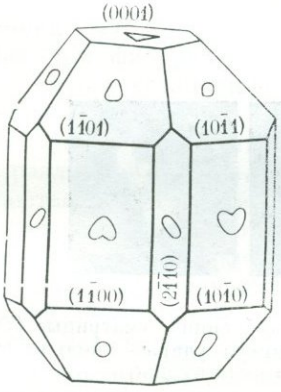
Для нас представлялось интересным посмотреть, какие фигуры будут получаться, когда точка удара лежит на двойниковом шве только дофинейского двойника, ибо для бразильского двойника фигуры удара на двойниковом шве не должны отличаться от фигур удара в монокристальных областях. Опыт показал, что фигуры на шве дофинейского двойника имеют чрезвычайно разнообразную форму, от довольно правильных четырехугольников до совершенно неправильных зубчатых фигур.







Кроме фигур на грани (0001), нами были исследованы фигуры на других естественных и искусственных гранях кварца, а именно на $(10\bar{1}0)$, $(\bar{1}\bar{1}20)$, $(10\bar{1}1)$ и $(1\bar{1}01)$. Исследование формы этих фигур производилось нами не так детально, как это мы делали для фигур на базисе. После того как удар или надавливание шариком произведены, исследуемая грань шлифовалась на глубину (1—2 *мм*), достаточную для того, чтобы поверхностная фигура приобрела размер, близкий к максимальному, после чего поверхность



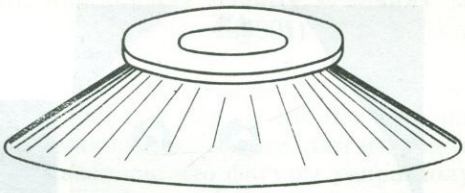


Рис. 13. Фигура удара на стекле

Рис. 12. Расположение фигур удара на гранях кварца

травилась плавиковой кислотой, чтобы трещинки (стороны фигур) были яснее видны. Фотографии (рис. 11) и схематический чертеж (рис. 12) дают полное представление о результатах, которые при этом были нами получены. Фигуры удара на призме $(10\bar{1}0)$ можно было бы назвать равнобедренными (почти равносторонними) треугольниками с двумя выпуклыми и одной вогнутой сторонами (рис. 11, *а*), фигуры на искусственных гранях призмы $(\bar{1}\bar{1}20)$ являются параллелограммами, у которых две меньших стороны выгнуты наружу (рис. 11, *б*); фигуры на ромбоэдре $(1\bar{1}01)$ круглы (рис. 11, *в*) и мало отличаются от фигур удара на стекле, о чем речь будет далее; наконец, фигуры удара на другом ромбоэдре $(10\bar{1}1)$ представляют собою равнобедренные треугольники с выпуклым основанием (рис. 11, *г*). Из сказанного следует, что по фигурам удара можно легко определить простую форму в тех случаях, когда на гальке кварца сохранилась хотя бы только одна грань (рис. 12).

Для того чтобы можно было отдать себе отчет в форме фигур удара на всевозможных гранях, нами были изучены фигуры на поверхности шара, изготовленного из кварца. Результаты этого исследования коротко могут быть выражены так: фигуры удара на любой искусственно изготовленной грани кварца имеют форму, промежуточную между формами изученных выше фигур. Далее оказалось, что в отношении к фигурам удара естественные и искусственные грани одной и той же простой формы ведут себя совершенно одинаково, как этого и следовало ожидать.

Мы видели, что анизотропия кварца заметно не сказывается в фигурах удара на гранях отрицательного ромбоэдра ($1\bar{1}01$). Для того чтобы уяснить себе это явление, мы поставили себе целью попутно изучить форму фигур удара на каком-либо аморфном теле, а именно на стекле. Подобные фигуры изучались и ранее [4], но иным способом, и результаты этих исследований в деталях противоречили друг другу. Наши исследования показали, что фигура удара на стекле представляет собою усеченный конус, на

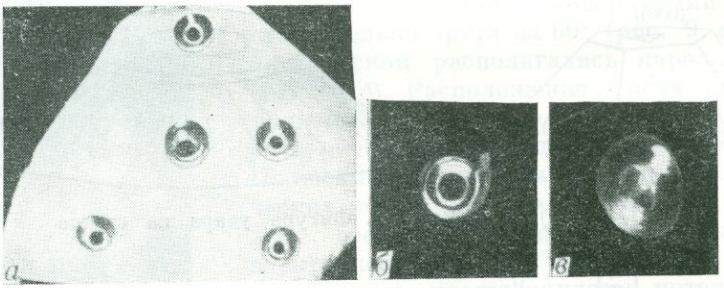


Рис. 14. Фигуры удара на стекле: конические углубления —«матрицы» (*а*), выдавленная фигура удара (*б*), поверхностная фигура удара — кольцо (*в*)

который надето кольцо (рис. 13). Угол между большим основанием конуса и образующей оказался равным приблизительно 30° независимо от диаметра стального шарика (от 11 до 20 *мм*), которым производились фигуры, что противоречит данным L. Pfeiffer [5]. Вообще, можно сказать, что с поправкой на изотропию стекла фигуры удара на нем вполне отвечают фигурам удара на базисе (0001) кварца: кольцу, которое часто также бывает разрушенным, соответствует шестиугольный разрушенный ободок кварца (см. рис. 4 и 5), усеченному конусу на стекле соответствует усеченная трехгранная пирамида с кривыми гранями на кварце (см. рис. 7). На рис. 14 изображены конические отверстия (*а*) в пластинке стекла после выдавливания из нее фигур удара и сама выдавленная фигура удара, состоящая из усеченного конуса (*б*) и кольца (*в*).

Величина фигур удара и давления. Кроме формы фигур, нас интересовала и величина их, а также зависимость формы от величины. В этом отношении были установлены следующие простые правила, которые можно было ожидать и до опыта. Прежде всего оказалось, что форма фигур не зависит от их величины, т. е. фигуры оказались одной и той же формы в пределах от самых маленьких фигур со стороной основания 0,5 *мм*, получаемых стальным острием, до самых больших фигур со стороной основания в 12 *мм* (см. рис. 7). Количественно это проверено на фигурах удара на стекле. Для этого стальные шарики в 5,5; 11,8; 21,7 и 32,6 *г* бросались на стекло с высоты 116 *см*; в полученных фигурах удара

(усеченных конусах) измерялся угол между основанием и образующей. Во всех случаях угол оказался один и тот же. Строго говоря, фигура удара на стекле не является конусом, а скорее параболлоидом, как это было выяснено еще F. Rinne, поэтому угол между основанием и образующей фигуры вообще увеличивается с глубиной фигуры, возрастая, как это можно видеть у Rinne, от 30 до 75°.

Принимая за меру величины фигуры удара высоту максимальной пирамиды или конуса, которые могут быть выдавлены из пластины, мы установили, что при прочих равных условиях величина фигуры удара или давления на грани (0001) кварца больше, чем фигура на стекле.

Желая установить, чем следует измерять ту причину, от которой должна зависеть величина фигуры удара, мы сделали ряд опытов с ударами шариками различного веса, заставляя их падать с различной высоты. При этом оказалось, что фигуры удара получаются одной и той же величины и формы при одних и тех же произведениях высоты падения на вес шарика. Правило это проверено нами в пределах от 10 *г* × 270 *см* до 27 *г* × 100 *см*.

Для фигур давления величина их оказалась в прямой зависимости не только от величины нагрузки, но и от продолжительности действия нагрузки. Ближе эта зависимость нами не изучалась. Для нас представляло интерес установить, при каких условиях фигуры давления получаются равными фигурам удара. Оказалось, что окончательная нагрузка в 650 *кг*, создаваемая в течение одной минуты и действующая далее в течение еще одной минуты, эквивалентна произведению 27 × 100 *см*.

В заключение интересно отметить, что величина фигур удара зависит от расстояния фигуры до края препарата и даже до других фигур. Как правило, можно утверждать, что фигуры давления и удара получаются больше в тех случаях, когда они ближе расположены к краю препарата и к другим фигурам. Таким образом, создается впечатление, как будто трещины в кварце образуются более легко тогда, когда отделяемая часть материала имеет малую толщину.

Механические двойники. До сих пор мы не видели никакой разницы между фигурами удара и давления, кроме разве той, что фигуры давления обычно бывают более правильно образованы, чем фигуры удара. Однако разница между теми и другими существует и притом чрезвычайно глубокая и интересная, и сводится она к тому, что при давлении образуются двойники, а при ударе нет.

Если сошлифовать слой поверхности кварца, на которой произведены фигуры давления, на глубину около 1—2 *мм* и потравить ее далее плавиковой кислотой, то можно легко обнаружить, что окружающая точку приложения силы до опыта монокристальная область кварца превращается в двойник сложной формы. На рис. 15 изображены фигуры давления на грани (0001), приготовленные вышеуказанным способом. Мы видим, что двойнико-

вание произошло только в трех определенных гексантах грани (0001); в трех других никаких изменений в кристаллической решетке не произошло. Для того чтобы устранить всякое сомнение в том, что мы имеем в данном случае дело с двойником, мы сняли две фотограммы Лауэ (рис. 16), пропуская пучок рентгеновских лучей в одном случае через заведомо монокристальную область кварца и в другом таким образом, чтобы он прошел через двойниковую границу. Рентгенограммы ясно говорят, что фигура

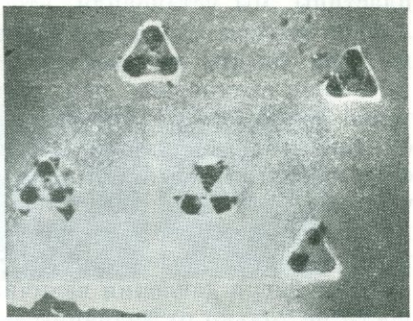


Рис. 15. Двойники давления на грани (0001)

давления на самом деле является двойником. Замечательно, что три области двойника, отвечающие новой, деформированной решетке, могут заходить за пределы трещин фигуры давления, как это отчасти и видно на рис. 15.

Оптическое исследование показало, что при образовании двойников оптическая ось сохраняет свое направление; также сохраняется и характер вращения плоскости поляризации. Все это говорит за то, что при давлении образуется двойник по дофинейскому закону. Расположение электрических осей в двойнике правого и левого кварца дано на рис. 17.

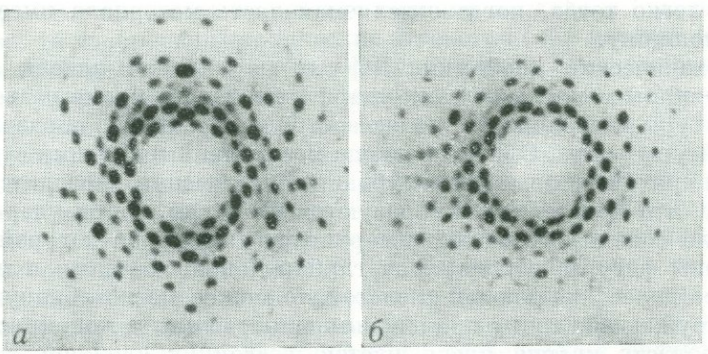
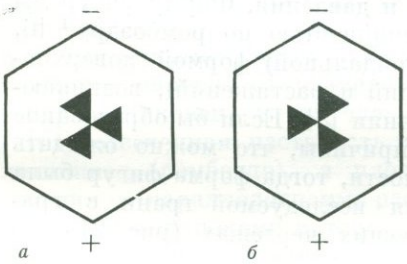


Рис. 16. Фотограммы Лауэ в монокристальной (*а*) и двойниковой части (*б*) препарата кварца с фигурой давления на грани (0001)

Для того чтобы составить себе некоторое представление о пространственной фигуре двойника на грани (0001), мы пробовали изучать ее в сечениях на различных глубинах по плоскостям, параллельным этой грани, а также в разрезах, параллельных грани призмы $(10\bar{1}0)$ (рис. 18); при этом оказалось, что, несмотря на индивидуальные особенности каждой фигуры двойника, можно говорить о некоторой идеальной форме, к которой стремятся все изученные нами двойники. Такая идеальная форма двойника



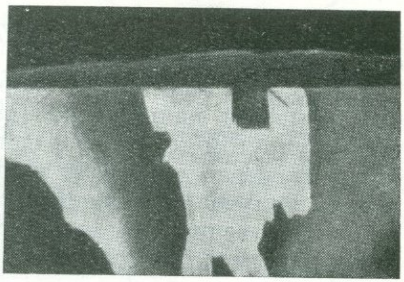


Рис. 17. Расположение электрических осей в двойнике правого (*а*) и левого (*б*) кварца

Плюсом обозначены концы осей, заряжающиеся положительно при сдавливании кварца по электрической оси

Рис. 18. Сечение двойника давления плоскостью $(10\bar{1}0)$

рисуется нам в виде двенадцати тригональных призм, сложенных вместе в гексагональную призму (рис. 19). Давление следует мыслить себе распространяющимся из центра призмы во все стороны по радиусам. Двойники получаются не только при надавлива-

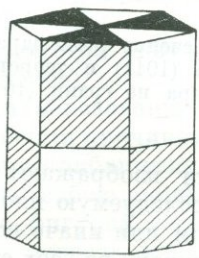


Рис. 19. Идеальная форма двойника, если давление распространяется из центра кристалла во все стороны по радиусам.

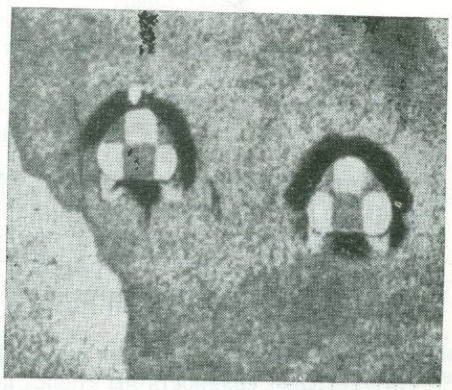


Рис. 20. Двойник давления на грани $(10\bar{1}0)$

нии стальным шариком на плоскость (0001), но, по-видимому, также и при давлении на любую грань кристалла. В этом отношении мы исследовали только грань призмы $(10\bar{1}0)$. Полученные на этой грани двойники после шлифовки и травления поверхности плавиковой кислотой изображены на рис. 20, что вполне отвечает идеальной форме двойника, изображенного на рис. 19.

Теоретическая часть

Объяснение формы фигур удара и давления. Форму фигур мы объясняем двумя причинами: 1) спайностью по ромбоэдру[1] [6, 7] $\{1\bar{1}01\}$ и 2) конической (параболоидальной) формой поверхности разностей напряжений (давлений и растяжений), возникающих в упругом теле при надавливании [8]. Если бы образование фигур зависело только от первой причины, что можно ожидать только в случае совершенной спайности, тогда форма фигур была бы тождественна с формой сечения исследуемой грани с гранями ромбоэдра $\{1\bar{1}01\}$. На следующих чертежах (рис. 21—25)

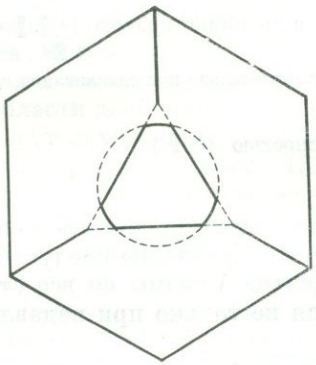


Рис. 21. Сечение ромбоэдра $\{1\bar{1}01\}$ плоскостью (0001) и теоретическая фигура удара по грани (0001)

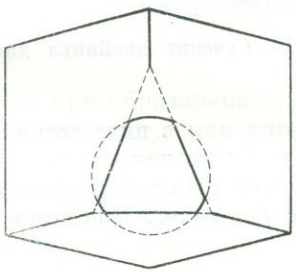


Рис. 22. Сечение ромбоэдра $\{1\bar{1}01\}$ плоскостью $(10\bar{1}1)$ и теоретическая фигура удара на грани $(10\bar{1}1)$

эти сечения изображены штрихом. Чертежи изображают ромбоэдр $\{1\bar{1}01\}$ в параллельной проекции на исследуемую плоскость, причем высота отсеченной от ромбоэдра части или иначе глубина, на которой исследуются формы фигуры, выдержана во всех случаях одинаковой. Если ромбоэдр сечется гранями (0001), $(10\bar{1}1)$ или $(10\bar{1}0)$,

[1] В цитированной выше работе мы ошибочно приняли грани $(1\bar{1}01)$ за грань $(10\bar{1}1)$. Слово спайность мы ставим в кавычки, ибо не уверены в том, что в данном случае оно полностью соответствует понятию спайность. По этому вопросу см. № 7.

то отсеченная часть представляет собой замкнутый четырехгранник (рис. 21—23), а плоскость сечения — треугольник. В случае грани $(\bar{1}\bar{1}20)$ отсеченная часть есть трехгранная призма (рис. 24), длина которой определяется размерами ромбоэдра, а плоскость сечения есть параллелограмм, ограниченный двумя прямыми, находящимися на определенном расстоянии друг от друга (при заданной высоте отсеченной части), и двумя прямыми, расстояние между которыми зависит от размеров ромбоэдра. Наконец, в случае грани $(1\bar{1}01)$ отсеченная часть есть параллелепипед (ромбоэдр), а плоскость сечения — параллелограмм, расстояния между сторонами которого определяются размерами взятого ромбоэдра (рис. 25). Для объяснения формы фигур удара мы берем ромбоэдр бесконечно больших размеров, для которого плоскость сечения гранью $(1\bar{1}20)$ есть бесконечно длинная полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми, а плоскость сечения гранью $(1\bar{1}01)$ вообще не имеет определенной формы. Если бы фигуры удара и давления зависели только от второй причины, то форма их была бы для всех граней — окружность, радиус которой определялся бы углом образующей конуса с его основанием и высотой конуса (параметрами параболоида).

Если образование фигур обусловлено обеими причинами, то их форма в первом приближении должна представлять собою комбинацию окружности с фигурой сечения ромбоэдра. В свою очередь форма такой комбинации будет зависеть от положения центра окружности и от ее радиуса. Величину радиуса мы определяем из фигуры на базисе (0001) (см. рис. 7), для которой положение центра окружности совпадает с центром фигуры и

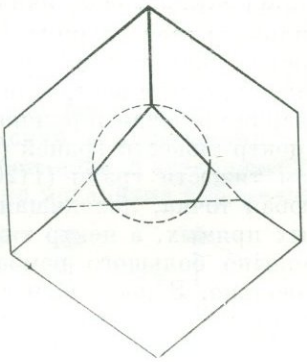


Рис. 23. Сечение ромбоэдра $\{1\bar{1}01\}$ плоскостью $(10\bar{1}0)$ и теоретическая фигура удара на грани $(10\bar{1}0)$

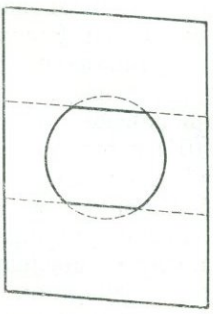


Рис. 24. Сечение ромбоэдра $\{1\bar{1}01\}$ плоскостью $(\bar{1}\bar{1}20)$ и теоретическая фигура удара на грани $(\bar{1}\bar{1}20)$

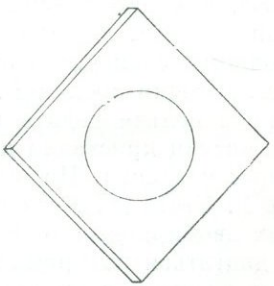


Рис. 25. Сечение ромбоэдра $\{1\bar{1}01\}$ плоскостью $(1\bar{1}01)$ и теоретическая фигура удара на грани $(1\bar{1}01)$

форма которой явно напоминает комбинацию окружности и правильного треугольника. На рис. 21 толстыми линиями изображена построенная таким образом теоретическая форма фигуры удара и давления. Для построения теоретических фигур на других гранях кварца мы берем окружность такого же радиуса и помещаем ее центр в центр тяжести граней (рис. 22, 23), при этом очевидно, что центром тяжести грани ($\bar{1}\bar{1}20$) (рис. 4), имеющей форму ленты, есть любая точка, находящаяся на равных расстояниях от параллельных прямых, а центр тяжести грани ($1\bar{1}01$), имеющий форму бесконечно большого ромба, может быть выбран совершенно произвольно. В последнем случае комбинация ромба с окружностью есть сама окружность (рис. 25). Сравнивая теоретические фигуры, изображенные на чертежах толстыми линиями, с действительными фигурами (см. рис. 6, 11), мы видим, что они весьма похожи друг на друга. Разница сводится к тому, что в действительных фигурах прямые линии несколько изогнуты и углы сглажены. Для объяснения формы фигур мы привлекли спайность по ромбоэдру $\{1\bar{1}01\}$. Спайности по другим граням [9] в образовании фигур, по-видимому, не играют заметной роли, если не считать поверхностной шестиугольной фигуры, которая может быть объяснена одновременно проявляющейся спайностью по двум ромбоэдрам $\{10\bar{1}1\}$ и $\{1\bar{1}01\}$ (см. рис. 4,5). Интересно отметить, что в фигурах давления и удара совсем отсутствуют радиальные трещины даже по ромбоэдру $\{1\bar{1}01\}$ в тех случаях, когда угол плоскости спайности с исследуемой плоскостью близок к 90° (рис. 11, *в*).

Объяснение механизма пластических деформаций кварца. Для объяснения пластических деформаций кристалла, в результате которых последний превращается или в параллельный сросток или в двойник, привлекались до сих пор только скольжения и сдвиги или только сдвиги [10], причем в последнем случае скольжение рассматривается как частный случай сдвига (Schiebungen zur Identität). С чисто геометрической точки зрения это обозначает, что если какая-либо часть кристалла, сама по себе однородная, заняла после каких угодно деформаций или двойниковое, или параллельное положение по отношению к деформированной части, то результат всех деформаций может быть сведен к одному сдвигу, одному скольжению или к их совокупности, т. е., с точки зрения P. Niggli, только к одному сдвигу. Отсюда отнюдь нельзя делать вывод, что все действительные перемещения частиц кристалла при пластических деформациях суть скольжения и сдвиги. На это в свое время было обращено внимание еще P. Groth [11], утверждавшим, что при образовании механических двойников кальцита молекулы последнего должны не только двигаться по прямым направлениям вдоль плоскости сдвига, но и вращаться при этом.

После этих замечаний общего характера перейдем к рассмотрению механизма образования двойников давления кварца, опираясь на факты, изложенные в описательной части этой работы.

Сделаем попытку объяснить пластические деформации кварца классическими сдвигами и скольжениями. Так как после деформации кварц становится двойником, то скольжения, состоящие, как известно, в параллельном перемещении частей кристалла, для объяснения деформаций отпадают. Так как далее при образовании дофинейского двойника оптическая ось деформированной части кристалла сохраняет свое направление, а электрические меняют его на обратное, то для объяснения механизма деформации

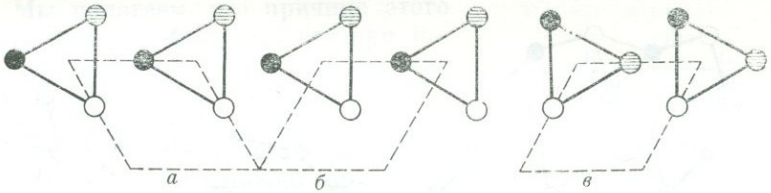


Рис. 26. Молекулярный слой атомов в кварце до сдвига (*а*), после сдвига (*б*) и после сдвига и поворота на угол в 60° (*в*)

сдвигом придется считать, что плоскость сдвига параллельна оптической оси, а направление сдвига к ней перпендикулярно. Другими словами, плоскостями сдвига могут быть только грани призмы $\{10\bar{1}0\}$, а направлениями сдвига — электрические оси. Но если плоскости $\{10\bar{1}0\}$ суть плоскости сдвигов, то при пластических деформациях должны иметь место:

1) или отклонение одной части кристалла в двойниковое положение,

2) или отклонение нескольких параллельных слоев кристалла в двойниковое положение с оставлением промежуточных слоев в не отклоненном положении,

3) или, наконец, отклонение каждого параллельного молекулярного слоя.

Опыт показывает, что видимого отклонения отдельных частей кристалла кварца, как это имеет место при образовании двойников кальцита при пластических деформациях, не наблюдается. Точно так же в наших двойниках не было обнаружено полисинтетического сложения. Для объяснения фактов приходится остановиться на молекулярных сдвигах, не искажающих формы подвергнутого сдвигу объекта, или, по существу, не на сдвигах. В самом деле, если мы произведем настоящий сдвиг двух молекулярных слоев друг относительно друга в надлежащем направлении (рис. 26, *а* и *б*), то в результате еще не придем к дофинейскому двойнику, а лишь после поворотов всех групп молекул около их винтовых осей симметрии на угол в 60° требуемая опытом структура будет достигнута (рис. 26, *в*). Но в таком случае сам сдвиг оказывается излишним, ибо одних вращений групп молекул вполне достаточно, чтобы перевести известную часть кристалла в двойниковое положение. Итак, наша попытка объяснить пла-

стические деформации кварца сдвигами и скольжениями привела к их отрицанию. Но и с вращением дело обстоит не многим лучше. Прежде всего вызывает сомнение то обстоятельство, что при столь значительных углах поворота групп молекул кристалл не разрушается; далее необъясненным остается, почему в двойнике давления в одних областях молекулы поворачиваются, а в других нет и почему двойниковые границы все же совпадают с плоскостями $\{10\bar{1}0\}$.

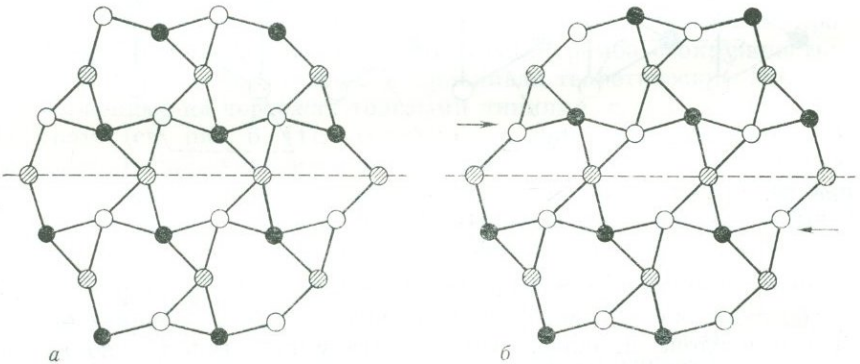


Рис. 27. Строение кварца по Брэггу и Гиббсу (*а*) и строение дофинейского двойника по гипотезе авторов (*б*)

Чтобы удовлетворительно ответить на все эти вопросы, мы предлагаем следующее объяснение пластической деформации, в которой, в известной мере, находят отражения сдвиг, скольжение и вращение.

Мы предлагаем: 1) что кварц имеет строение, установленное W. Bragg и R. E. Gibbs [12] (рис. 27, *а*); 2) что силы, производящие деформацию в кварце, должны быть направлены так, как они были бы направлены, если бы в кварце были возможны сдвиги или скольжения по плоскостям призмы; 3) что после действия сил серые атомы возвращаются на свои прежние места, а черные и белые атомы перемещаются в новые положения равновесия (рис. 27, *б*).

Так как новые положения равновесия при малых перемещениях черных и белых атомов без разрыва связей между атомами и без превращения кварца в иную (правую или левую) модификацию возможны в этих условиях только для верхней половины кристалла, то в ней и происходит пластическая деформация, в то время как в нижней половине под влиянием этих сил будут происходить только упругие деформации. Другими словами, пластические деформации возможны только тогда, когда силы действуют с выпуклых сторон ломаных линий, соединяющих серые атомы

между собой. После всего сказанного становится понятным, почему двойниковые границы плоски и параллельны граням призмы, почему образуются дофинейские, а не бразильские двойники кварца, почему при образовании двойников не происходит видимых смещений кристалла и не образуется полисинтетическая структура. Остается понять, почему при надавливании шариков на грань (0001) пластическая деформация происходит только в трех гексантах, а не во всех шести.

Мы полагаем, что причина этого явления лежит в том, что при надавливании на кварц стальным шариком происходит закручивание его около оптической (винтовой) оси. Совокупность сил, приложенных к частицам кварца, можно при этом разбить на три группы: (1, 4), (2, 5) и (3, 6) (рис. 28). Каждая группа может произвести пластическую деформацию только в половине кристалла, например: группа (1, 4) — в половине *ABCD*, группа (2, 5) — в половине *EFAB* и группа (3, 6) — в половине *CDEF*. Если мы обозначим штриховкой, параллельной силам, те области, которые претерпели деформацию, то окажется, что гексанты OBC, ODE, OFA, в которых деформация была произведена один раз, должны изображать те области грани (0001), в которых двойниковое превращение действительно имеет место, а три других, в которых превращение произошло дважды или, иначе, совсем не произошло, должны отвечать тем областям, в которых в действительности двойникового превращения не было. Совершенно аналогично можно истолковать явления на грани ($10\bar{1}0$) (рис. 20). Если бы давления распространялись радиально из одной точки, находящейся внутри кристалла, то мы, очевидно, получили бы идеальный двойник (см. рис. 19).

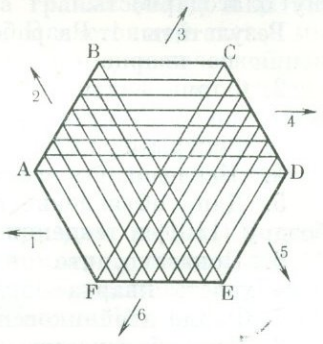


Рис. 28. Образование двойника вследствие кручения около оптической оси

Интересно сопоставить нашу гипотезу о механизме пластических деформаций кварца с воззрениями G. Friedel [13], G. Aminoff и B. Broomé [14].

По теории G. Friedel обе половины двойника должны иметь одну общую решетку, а по теории G. Aminoff и B. Broomé при образовании двойников одни атомы сдвигаются со своих мест, другие — не смещаются. Мы видим, что наша гипотеза вполне отвечает обоим воззрениям.

В заключение считаем своим прямым долгом отметить, что кроме авторов в настоящей работе принимали участие Б. К. Бруновский, изготовивший рентгенограммы Лауэ, В. З. Бульванкер, впервые обративший внимание на то, что стороны фигур удара

на грани (0001) не являются прямыми линиями, и изготовлявший чертежи Б. В. Витовский, изготовивший рычажный пресс, Л. С. Генералова, давшая прекрасные фотографии фигур удара и двойников, К. А. Драгунов, изготовивший ирисовую диафрагму к прибору для получения фигур удара, Г. Г. Леммлейн, дававший ценные указания при изготовлении фотографий, и С. А. Тизенгаузен, помогавший в экспериментальной части работы. Всем перечисленным друзьям и сотрудникам мы выражаем здесь нашу благодарность.

Результаты. 1. Разработан метод получения фигур удара и давления на кварце.

2. Форма фигур на различных гранях кварца сопоставлена с геометрической кристаллографией кварца.

3. Фигуры на кварце приведены в связь с фигурами на стекле.

4. Исследованы факторы, влияющие на величину фигур.

5. Дано объяснение образования фигур спайностью по ромбоэдру $\{11\bar{2}1\}$ и тенденцией кварца колоться по конусу.

6. Показано, что при надавливании стальным шариком на поверхность кварца образуется двойник.

7. Форма двойников поставлена в связь с симметрией кварца.

8. Для объяснения механизма образования двойников предложены гипотезы, синтезирующие понятие сдвига Reusch общей решетки Friedel и подвижных и неподвижных атомов Aminoff.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Schubnikow.* Z. Kristallogr., 1930, **74**, N 1, 103.
2. *O. Mügge.* N. J. Festband., 1907, 181.
3. *A. Schubnikow.* Z. Kristallogr., 1931, 78, N 1—2, 111.
4. *F. Rinne.* Cbl. Mineralog., A, 1926, 209; B, 1928, 533; Glastechn. Ber., 1928, **VI**, 65; Andrews J. P., Inst. F. P. Proc. Phys. Soc., 1931, 43, N 236, 18.
5. *L. Pfeiffer.* Die Steinzeitliche Technik. Jena, 1912.
6. *A. Schubnikow.* Z. Kristallogr., 1930, **74**, N 1, 103.
7. *H. Tertsch.* Z. Kristallogr., 1932, **81**, 264.
8. *F. Rinne.* Cbl. Mineralog., A, 1926, 209.
9. *E. Mallard.* Bull. Soc. franç. minéral., 1890, **13**, 61; *Ichikawa S.* Amer. J. Science., 1915, **39**, 455; *Sosman R. B.* The Properties of Silica. N. Y., 1927, p. 488.
10. *P. Niggli.* Z. Kristallogr., 1929, **71**, 413.
11. *P. Groth.* Physikalische Kristallographie und Einleitung in die krystallographische Kenntniss der wichtigsten Substanzen. Leipzig, 1895, S. 228.
12. *W. Bragg, R. E. Gibbs.* Proc. Roy. Soc., 1925, A, **109**, N 751, 405.
13. *G. Friedel.* Lecons de cristallographie prosessées à la faculté des sciences de Strasbourg. Paris, Berger — Levrault, 1926, 602 p.
14. *G. Aminoff, B. Broomè.* Z. Kristallogr., 1931, **80**, 355.

О «ПЛАСТИЧНОСТИ» КВАРЦА[1]

В ранее опубликованной работе [1] мы показали, что при медленном надавливании на кварц стальным шариком кристалл претерпевает при обыкновенной температуре вблизи места приложения силы изменение с образованием дофинейского двойника. Мы изучили форму таких двойников на гранях (0001) и $(11\bar{2}0)$ и дали наше толкование этому явлению. В настоящей статье мы подробнее остановимся на истории вопроса о пластической деформации кварца, опишем форму двойников на других гранях кристалла кварца и покажем, как происходит явление «пластической деформации» кварца при температуре, близкой к температуре превращения низкотемпературного кварца β в высокотемпературную модификацию α.

История вопроса о пластической деформации кварца. Вопрос о возможности пластических деформаций кварца возник лет 50 назад в связи с открытием так называемого волнистого затухания кварца и Бемовской штриховки [2]. В 1888 г. I. W. Judd [3] считает возможным говорить о двойниковой штриховке кварца, возникающей вследствие механического двойникования по плоскостям обоих ромбоэдров R (100) и (122). В 1892 г. F. Becke [4] объясняет волнистое погасание и штриховку раздроблением кварца на части и дальнейшим срастанием их не в строго параллельном положении.

Позднее он видит в этих явлениях следы трансляций. В 1895 г. I. I. Sederholm [5] повторяет мысль в более категорической форме, утверждая, что волнистое затухание есть результат чрезвычайной хрупкости, и называет пластичность кварца кажущейся. O. Mügge (1896) привлекает для объяснения оптической аномалии кварца, волнистого затухания и штриховки одновременное проявление трансляций и изгибов, считая, что оптическая аномалия предшествует трансляции [6]. Изгиб без разрушения допускает и W. Salomon [7] (1897). L. Milch [8] в 1900 г. пытается связать наблюдаемое в кварце явление с рекристаллизацией, а позднее (1904) [9] отдает предпочтение теории однородной деформации перед теорией абсолютной хрупкости кварца. В 1902 г. F. Rinne [10] переходит от наблюдений к прямым опытам с раздавливанием кварца, определяет численно значение предела прочности (15 364 *кг/см*^{2}), но пластичности кварца не обнаруживает. В 1906 г. А. Иоффе [11] предпринимает изучение упругого последствия кварца, полагая, что всякая деформация кварца упруга. В 1922 г. B. Schmidt [12] объясняет кажущуюся пластическую деформацию кварца рекристаллизацией. В 1923 г. H. Rose и O. Mügge [13] приходят к заключению, что кварц остается хрупким при высо-

[1] Совместно с Е. В. Цинзерлинг. Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1933, вып. 3, с. 67—74.

ких давлениях и температурах. В 1926 г. S. Holmquist [14] приписывает кажущуюся большую пластичность кварца существованию многочисленных плоскостей скольжения в кварце. C. Friedländer (1930) [15] дает следующий перечень явлений, возникающих в кварце под влиянием давления: 1) волнистое затухание, 2) зубчатые границы срастания, 3) распределение включений по плоскостям, 4) трещинки спайности, 5) оптическая аномалия, 6) бемовская штриховка, 7) кажущаяся двойниковая пластинчатость.

Как видим, среди перечисленных явлений отсутствует двойникование кварца по дофинейскому закону, которое, как мы показали в нашей первой статье, может быть чрезвычайно просто воспроизведено в лаборатории и которое без всякого сомнения должно быть широко распространено и в природе. То, что открытое нами явление не наблюдалось до сих пор другими авторами, объясняется просто тем, что в петрографическом шлифе дофинейские двойники в оптическом отношении ведут себя как одиночные кристаллы, а большинство авторов для своих исследований пользовались только поляризационным микроскопом, между тем положительного результата следовало ожидать только от соединения методов F. Rinne и O. Mügge (давление, травление плавиковой кислотой), что нами и было сделано.

Форма механических двойников на различных гранях кварца. Для получения двойников на той или иной грани кристалла мы во всех случаях поступали следующим образом. Исследуемая плоскость травилась плавиковой кислотой, после чего выявлялись границы естественного двойника. На поверхности кристалла выбирался монокристальный участок без трещин и включений на глубине, значительно превышающей глубину распространения пластической деформации. Далее на этом участке определялась точка для нажима стальным шариком и производился нажим одним из методов, описанных ранее; опыт делался или при комнатной температуре, или в электрической печи при различных температурах не выше температуры превращения β кварца в α кварц.

Полученный таким образом препарат травился плавиковой кислотой, шлифовался на известную глубину и снова травился плавиковой кислотой и фотографировался. Для того чтобы можно было отдать себе отчет в пространственной форме двойника, шлифовка и травление производились иногда по несколько раз на срезах различных граней одного и того же препарата каждый раз с учетом глубины шлифовки. Таким образом были исследованы двойники на гранях следующих простых форм: (0001), $(10\bar{1}0)$, $(10\bar{1}1)$, $(11\bar{2}0)$ и $(1\bar{1}01)$ (рис. 1).

Прежде всего было установлено, что процесс двойникования сосредоточен в области, имеющей в самом грубом приближении форму конуса с углом в 90° и с вершиной в точке касания стального шарика. Глубина распространения процесса различна для различных граней и температур и может достигать 3—5 *мм*. Из

рассмотрения фотографий можно было установить симметрию каждой фигуры и свести результаты в виде такой таблицы:

Простая форма, на гранях которой получен механический двойник	Симметрия двойника (L — ось симметрии, P — плоскость симметрии)
(0001)	$L_3 3P$
$\{10\bar{1}0\}$	P
$\{\bar{1}\bar{1}20\}$	L_2
$\{11\bar{2}0\}$	L_2
$\{10\bar{1}1\}$	P
$\{1\bar{1}01\}$	P

Сопоставляя между собой симметрии плоских фигур двойника, нетрудно установить, что симметрия пространственной фигуры двойника (рис. 2) удовлетворяет формуле $L_3 3L_2 3PC$ (класс скаленоэдра). Известно, что этот случай может быть получен из симметрии кварца $L_3 3L_2$ (класс трапецоэдра) добавлением к ней центра симметрии C. Отсюда следует, что все явление образования двойника должно быть причислено к явлениям тензориального типа и потому не может быть использовано, подобно фигурам вытравления, для окончательного решения вопроса о симметрии кристаллов.

Расположение фигур двойников на гранях различных простых форм друг относительно друга показано на схематическом чертеже (рис. 3).

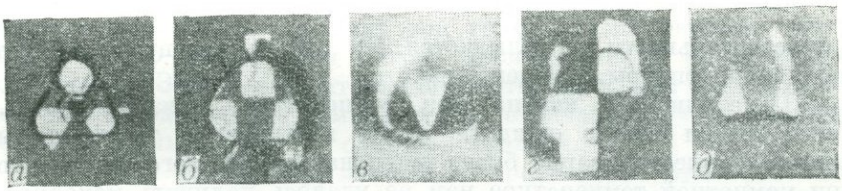


Рис. 1. Двойники на гранях
а — (0001); *б* — $(10\bar{1}0)$; *в* — $(10\bar{1}1)$; *г* — $(11\bar{2}0)$; *д* — $(1\bar{1}01)$

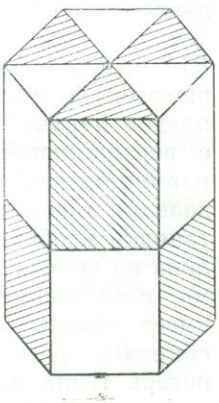
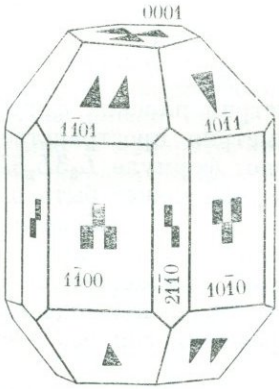


Рис. 2. Идеальная пространственная форма двойника

Плоские формы двойников на различных гранях могут быть теоретически построены из идеальной пространственной формы двойника (рис. 2). Для этого рассекаем идеальную форму плоскостью, параллельной данной грани, и из центра идеальной формы описываем коническую поверхность так, чтобы ось ее была бы перпендикулярна к плоскости сечения; тогда коническая поверхность вырежет тот участок фигуры двойника, который



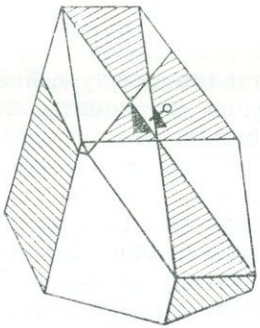


Рис. 3. Расположение фигур двойников на различных гранях простых форм

Рис. 4. Построение плоской формы двойника из идеальной пространственной формы двойника

в действительности и наблюдается. На рис. 4 для примера дано построение фигуры в общем виде.

«Пластичность» кварца при температуре, близкой к 573°. Теоретически можно ожидать, что с повышением температуры предел текучести кварца будет уменьшаться. Из того факта, что при комнатной температуре нам не удалось получить механических двойников без одновременного образования трещин (фигуры давления), следует, что предел текучести кварца близок к пределу прочности его при раздавливании, т. е. к 1500 *кг/см*^{2} по Rinne и к 25 000 *кг/см*^{2} по Berndt, и вероятно несколько меньше этой величины. Для грубой оценки влияния нагревания на предел текучести нами были произведены специальные опыты с вертикальной электрической печкой, по конструкции очень напоминающей печку, с которой работал F. Rinne [17] для определения предела текучести каменной соли. Устройство всей установки изображено на рис. 5. Внутренняя часть печки изготовлена из целого куска стеатита, имеющего форму квадратной призмы с цилиндрической полостью по оси призмы. Снаружи призма имеет обмотку из нихромовой проволоки, помещенной внутрь спиралью расположенных прорезов в камне. Для уменьшения потерь тепла на лучеиспускание печкао бмотана толстым слоем

асбеста. Исследуемый препарат помещается внутри печи на стеатитовой подставке. Стальной шарик, которым производится надавливание, до опыта вклеивается в углубление, сделанное на одном конце стеатитового стержня, упирающегося другим концом в деревянный рычаг, подвижно сочлененный со стойкой *Д*. Нагрузка производится гирями, подвешиваемыми к правому концу рычага с помощью крючка. Температура печи измерялась термопарой, не показанной на чертеже. Тогда как в конечном счете

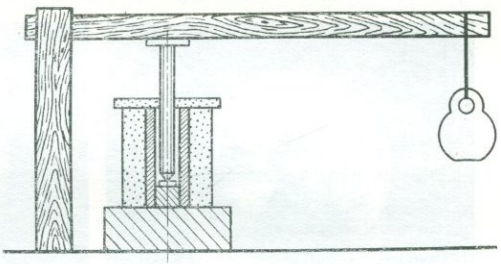


Рис. 5. Установка для получения двойников при нагревании

нас интересовало поведение кварца только при температуре, немного меньшей температуры превращения низкотемпературной модификации кварца в высокотемпературную, то мы специальными предварительными опытами определили то положение стрелки милливольтметра, соединенного с термопарой, при котором превращение кварца имело место. Мы использовали для этого способность двойникового кварца неизбежно растрескиваться и изменять положение двойниковой границы при переходе через критическую точку, если нагрев производится с определенной скоростью. Эти предварительные опыты дали нам возможность вести наблюдение при температурах, отличающихся от критической не больше чем на один-два градуса.

При этой температуре нами была произведена серия опытов в целях установления верхней границы для предела текучести кварца. Опыты велись преимущественно с препаратами, вырезанными по грани (0001). Величина нагрузки от опыта к опыту уменьшалась, соответственно убывало и напряжение, которое вычислялось по формуле

$$p = AG/a\pi r^2,$$

где p — напряжение; G — вес груза; A — большое плечо рычага, a — малое плечо рычага; r — радиус отпечатка кварца на деформированном стальном шарике. Наименьшее значение, при котором пластическая деформация имела место, оказалось равным 1000 *кг/см*^{2}, откуда следует, что предел текучести кварца при температуре, близкой температуре превращения, во всяком случае меньше этой величины 1000 *кг/см*^{2}.

Сравнивая эту величину с пределом текучести кварца при обыкновенной температуре, можно видеть, что нагревание кварца увеличивает пластичность его больше чем в 15 раз.

Сравнительное изучение формы двойников, образовавшихся при обыкновенной температуре и при нагревании, показало, что нагревание не оказывает влияния на форму двойников. Глубина распространения двойника и его площадь поперечного сечения при равных нагрузках оказываются значительно большими в случае нагревания. В то время как фигуры двойников, полученных при обыкновенной температуре, по своим размерам лишь немногим больше соответствующих им фигур давления, фигуры двойников,

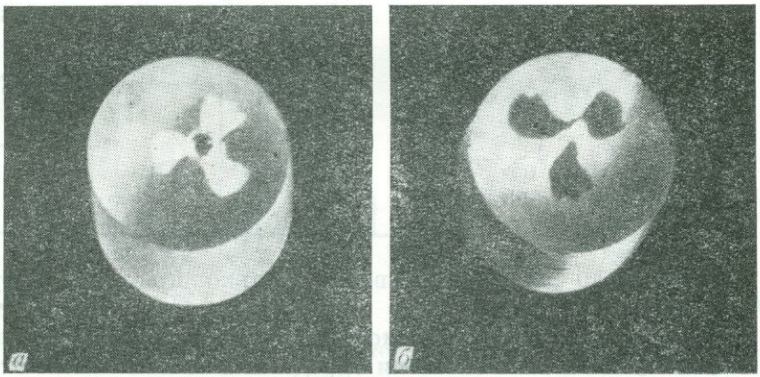


Рис. 6. Механический двойник, полученный при нагревании кварца

а — фигура двойника и фигура давления; *б* — фигура двойника без фигуры давления (после шлифовки)

полученных при высокой температуре, далеко заходят за пределы трещин фигур удара и на небольшой глубине трещина вообще выклинивается, двойник же остается (рис. 6). При малых нагрузках и высокой температуре можно вообще получить механические двойники без растрескивания кварца. Выше было сказано, что процесс двойникования сосредоточен в конической области под точкой надавливания на кварц. Это, безусловно, верно для процесса, протекающего при обыкновенной температуре; при высокой же температуре двойникование происходит уже на самой поверхности препарата, но форма двойника на поверхности оказывается неправильной и лишь на известной глубине становится эквивалентной форме двойников, образованных при обыкновенной температуре.

В заключение нам хотелось бы внести предложение называть пластичность вследствие трансляции (NaCl) пластичностью I рода, пластичность вследствие сдвигов (кальцит) — пластичностью II рода и пластичность без видимого перемещения частей кристалла (кварц) — пластичностью III рода.

Выводы. 1. Дано краткое историческое освещение вопроса о пластической деформации кварца.

2. Изучена форма и симметрия механических двойников на различных гранях кварца.

3. Дан способ построения формы двойников на разных гранях и из теоретической пространственной модели двойника.

4. Опытами образования механических двойников кварца при температуре, близкой к 573°, доказано, что предел текучести кварца при этой температуре раз в 15 меньше предела текучести кварца при комнатной температуре.

5. Введено понятие «пластичности» кристаллов I, II и III рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Шубников, Е. Цинзерлинг.* Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1933, вып. 3, 5.
2. *A. Böhm.* Über die Gesteine des Wechsels.— Tschermaks mineral. und petrogr. Mitt., 1883, 5, 204.
3. *I. W. Judd.* The development of a lamellar structure in quarz cryst.— Mineral. Mag., 1888, 33, 1.
4. *F. Becke.* Petrogr. Studien an Tonalit der Riesenferner.— Tschermaks mineral. und petrogr. Mitt., 1892, 13, 447.
5. *I. Sederholm.* Über einen Metamorphosierten praecambrischen Quarz porphyr.— Bl. Comm. Geol. Finlande, 1895, 2, 7.
6. *O. Mügge.* Der Quarzporphyr der Bruchhäuser Steine in Westfalen.— Neues Jahrb. Mineral. Beil.— B, 1896, 10, 757.
7. *W. Salomon.* Gequetschte Gesteine der Mortirole-Thales.— Neues Jahrb. Mineral. Beil.— B, 1897, 11, 355.
8. *L. Milch.* Über dynamometamorphe Erscheinungen an einem nordischen Granitgneiss.— Neues Jahrb. Mineral., 1900, 2, 39.
9. *L. Milch.* Homogene deformation von Quarz und Piesokristallisation.— Cbl. Mineralog., 1904, 181.
10. *F. Rinne.* Bemerkungen über die Druckfestigkeit einiger Quarz — und Feldspatwürfel sowie über die Druckfestigkeit von Glimmerstreifen.— Col. Mineralog., 1902, 262.
11. *A. Joffe.* Elastische Nachwirkung im kristallinischen Quarz.— Ann. Physik, 1906, 20, 919.
12. *B. N. Schmidt.* Jahrb. geolog. Staatsanst., 1921, 71, 101.
13. *H. Rose, O. Mügge.* Neues Jahrb. Mineral., 1923, 48, 150.
14. *S. P. Holmquist.* Fören. Förhandl., 1926, 48, 410.
15. *C. Friedländer.* Erzvorkommnisse des Bünder Oberlandes und ihre Begleitsteine. Zürich, 1930, S. 48.
16. *H. Rosenbusch.* Mikroskopische Physiographie der petrographischen wichtigen Mineralien. X Aufl. 1921—24, S. 177.
17. *F. Rinne, W. Hoffmann.* Z. Kristallogr., 1932, 83, 56.

О ФИГУРАХ ПРОВОРАЧИВАНИЯ И ИХ ВОЗМОЖНОМ ПРИМЕНЕНИИ В ВОПРОСАХ СТРОЕНИЯ МАТЕРИИ[1]

Настоящая работа представляет собою эскизный набросок некоторой системы идей, относящихся к строению материи, возникших у нас в результате размышления над явлением, в свое время поразившим наше воображение своей кажущейся парадоксальностью. В нашем этюде мы не претендуем ни на особую строгость изложения накопившегося у нас материала, ни на безусловную верность делаемых нами выводов, полагая, что и в этом виде наши теоретические соображения могут стимулировать мысль для дальнейших изысканий в определенном направлении. Не в этом ли смысл всех теорий, которые, как известно, рано или поздно оказываются неверными или недостаточно строгими?

Фигуры сверления в слюде и правило $(n + 1)$. Несколько лет назад мы опубликовали статью о фигурах сверления в слюде [1]. Так как факты, описанные в этой работе, послужили нам отправным пунктом для всего того, о чем будет идти речь дальше, то мы коротко изложим здесь ее содержание с теми дополнениями и изменениями, которые были сделаны после ее опубликования.

Возьмите листок слюды толщиной около 0,25 *мм*, проколите его острием трехгранного напильника без рукоятки, и, держа последний двумя пальцами за противоположный конец, вращением напильника в обе стороны попробуйте рассверливать далее полученную дырочку. Легко убедиться, что в этих условиях вместо ожидаемого круглого отверстия вы получите четырехугольное (рис. 1, *б*).

Если теперь вместо трехгранного сверла вы возьмете четырехгранное, то отверстие получится пятиугольным (рис. 1, *в*). Повторяя этот опыт со сверлами разных сечений, нетрудно придти

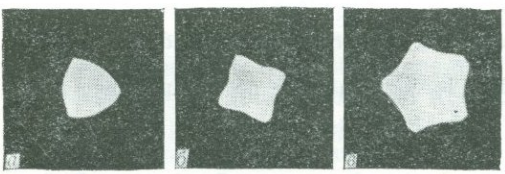


Рис. 1. Фигуры сверления в слюде

к заключению, что число сторон отверстия будет всегда на единицу больше числа граней сверла; так, например, если сверло будет двугранным (копье), то отверстие окажется треугольным (рис. 1, *а*). Из чисто геометрических соображений легко понять, что опыт не может удаться,

[1] Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1936, вып. 8, с. 23—44.

если сверло будет жестко закреплено в патроне, а слюда — на столике сверлильного станка. В этом случае, конечно, отверстие получится круглым.

Качение фигур. Для того чтобы понять, почему при сверлении слюды многогранным сверлом получаются многоугольные отверстия, мы должны ввести в изложение некоторые понятия из кинематики и сделать экскурсию в область геометрии некоторых интересных фигур. Пусть мы имеем на плоскости фигуру A про-

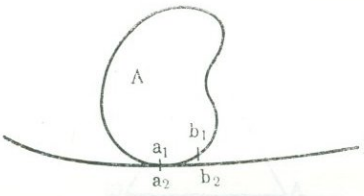


Рис. 2.

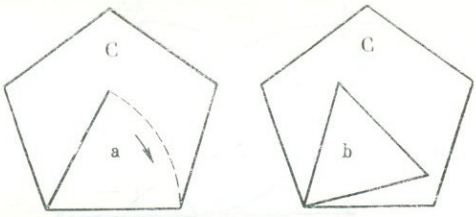


Рис. 3. Качение отрезка и треугольника в пятиугольнике

извольной формы и некоторую кривую B (рис. 2). Мы говорим, что фигура A катится по кривой B, если имеют место следующие условия.

1. Во время движения обе фигуры не выходят из общей им плоскости и остаются в соприкосновении друг с другом (не пересекаясь).

2. Движение происходит таким образом, что вслед за наложением друг на друга точек a_1 и a_2 фигур A и B приходят в совпадение следующие точки b_1 и b_2 тех же фигур, расположенные по одну сторону от двойной точки a_1a_2.

3. Длина ломаной линии, получаемой посредством соединения прямыми отрезками всех точек контура A, последовательно приходящих в соприкосновение с кривой B, равна длине ломаной, построенной тем же способом на кривой B. В частном случае эти отрезки прямых могут быть бесконечно малы, отчего ломаная может превратиться в дугу.

Для нас будет представлять особый интерес качение отрезка прямой a и многоугольника b внутри многоугольника C (рис. 3).

Фигуры равной ширины. Пусть мы имеем пару параллельных прямых a и b (рис. 4) и выпуклую замкнутую фигуру A, которая катится по прямой a. Если при таком качении та или другая точка контура фигуры постоянно оказывается на прямой b и вместе с тем ни одна из внутренних точек фигуры не выходит за пределы полосы, определяемой парой прямых, то такая фигура называется фигурой равной ширины. С первого взгляда кажется, что может существовать только одна фигура равной ширины — окружность. В действительности таких фигур существует бесчисленное множество. Мы не будем перечислять здесь всех свойств фигур равной

ширины, хорошо изученных различными авторами [2], остановимся только на некоторых:

1. Фигуры равной ширины могут быть симметричными и асимметричными.

2. Прямая, соединяющая точки, которыми фигура прикасается к паре параллельных, перпендикулярна к последним.

3. Из всех фигур равной ширины окружность имеет наибольшую, а треугольник Reuleaux (рис. 4), составленный из трех дуг,

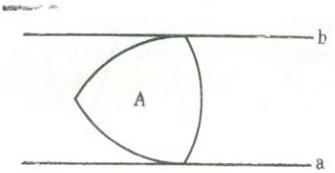


Рис. 4. Качение треугольника Reuleaux между параллельными прямыми

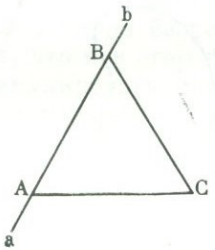


Рис. 5

описанных из вершин правильного треугольника радиусами, равными его сторонам, наименьшую площадь.

4. Периметр всех фигур ширины d равен πd.

Мы будем заниматься только такими фигурами равной ширины, которые обладают симметрией правильного треугольника. Для построения их берем отрезок прямой ab (рис. 5), отмечаем на нем две точки A и B, равноотстоящие от концов отрезка ab.

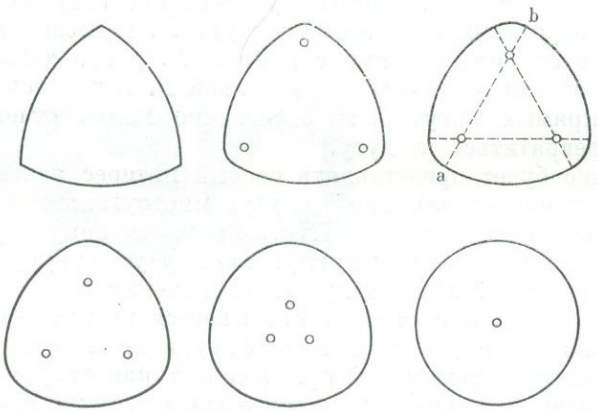


Рис. 6. Ряд фигур равной ширины, построенных на принципе качения отрезка прямой в правильном треугольнике

На отрезке AB строим правильный треугольник ABC. Если мы теперь будем катить отрезок AB вместе с отрезком ab внутри треугольника ABC, то точки a и b будут описывать фигуру равной ширины. Легко видеть, что образуемые этим способом фигуры будут состоять из шести дуг по 60° каждая, составляя в сумме 360°. Непосредственно из построения легко усмотреть, что сумма радиусов кривизны ($bB + Ba$) в двух любых противолежащих

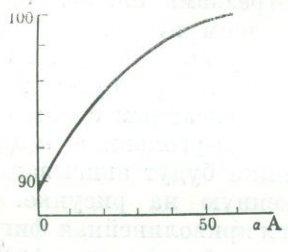


Рис. 7. Зависимость площади Δ фигур равной ширины от величины отрезка aA

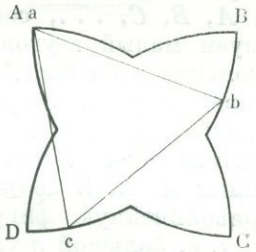


Рис. 8

точках фигуры остается постоянной и равной ширине d. На рис. 6 дана серия фигур, построенных при различных положениях точек A и B на отрезке ab. Если точки A и B совпадают с a и b, то получается один из крайних представителей ряда — треугольник Reuleaux, если же точки A и B совпадают с центром отрезка ab, то получается другой крайний случай фигур — окружность. Выше мы сказали, что треугольник Reuleaux имеет наименьшую, а окружность наибольшую площадь. Что это так и есть, можно видеть из кривой (рис. 7), показывающей зависимость площади фигуры Δ от величины меньшего радиуса aA обеих дуг, образующих фигуру. Из этой диаграммы можно усмотреть, что площадь треугольника Reuleaux меньше площади круга на десять с лишним процентов.

Проворачивающиеся фигуры. Пусть мы имеем две каких-либо подвижных относительно друг друга плоских фигуры abc и ABC (рис. 8).

1. Мы будем говорить, что обе фигуры составляют пару, если некоторые определенные точки, a, b, c, . . . первой фигуры при ее вращении (которое может сопровождаться и перемещением) на 360° не сходят с контура фигуры ABC.

2. Первая фигура будет *проворачиваться* во второй, если при полном ее обороте ни одна из ее точек не выйдет за пределы второй фигуры.

3. Проворачивание будет *жестким*, если каждому углу поворота первой фигуры будет отвечать одно-единственное ее положение внутри второй фигуры.

Описанные выше фигуры равной ширины вместе с отрезком прямой ab (рис. 6) представляют собою частные случаи пар. Отрезок ab жестко проворачивается внутри фигур равной ширины. Нас будут интересовать в первую очередь симметричные фигуры, которые составляют пары с правильными многоугольниками. Для построения этих фигур поступаем следующим образом. Внутри правильного n-угольника ABC (рис. 9) на биссектрисах внутренних углов отмечаем точки a, b, c, . . ., равноотстоящие от вершин A, B, C, . . ., соединяем их отрезками ab, bc, cd, . . . и образуем малый n-угольник abc... Строим правильный $(n + 1)$-угольник $a_1b_1c_1d_1e_1$ так, чтобы его стороны a_1b_1, b_1c_1, c_1d_1, ... были равны порознь стороне ab. Если мы теперь будем катить малый n-угольник abc... вместе с жестко связанным с ним большим n-угольником ABC... внутри $(n + 1)$-угольника $a_1b_1c_1$..., то вершины A, B, C большого n-угольника будут описывать новую криволинейную фигуру, изображенную на рисунке. Обе фигуры, т. е. большой n-угольник и новая криволинейная фигура, образуют пару. Для одной и той же катящейся фигуры A, B, C можно построить бесконечное множество криволинейных парных фигур в зависимости от выбора точки a. На рис. 10 изображены два ряда фигур, образованных из правильных треугольника и четырехугольника. Из непосредственного рассмотрения этих фигур следует, что правильный n-угольник порождает фигуру с симметрией правильного $(n + 1)$-угольника. Далее из построения фигур видно, что контуры их состоят из дуг окружностей. Каждая дуга измеряется внутренним углом правильного $(n + 1)$-угольника без внутреннего угла n-угольника. Таким образом, фигуры с симметрией квадрата, изображенные в верхнем ряду рис. 10, состоят из дуг, измеряемых углом $90° - 60° = 30°$, а фигуры нижнего ряда с симметрией правильного пятиугольника состоят из дуг, измеряемых углами $108° - 90° = 18°$. В общем случае можно написать

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \beta_{n+1}. \tag{1}$$

Интересно отметить, что сумма всех дуг в каждой парной фигуре в угловой мере равна полной окружности

$$m \cdot \beta_{n+1} = 360°, \tag{2}$$

где m — общее число дуг или то число, которое показывает, сколько раз исходный многоугольник должен перекладываться со стороны на сторону при качении внутри вспомогательного многоугольника, для того чтобы замкнулся полный цикл его движения.

Для фигур с симметрией квадрата $m = 360/30 = 12$, а для фигур с симметрией правильного пятиугольника $m = 360/18 = 20$.

В общем случае $m = n\,(n + 1)$.

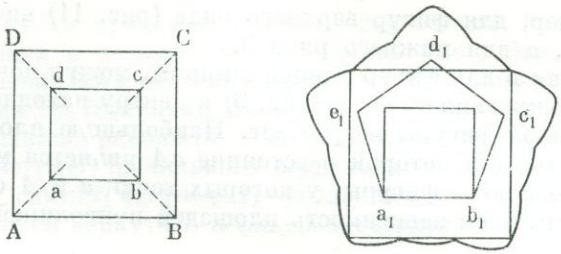


Рис. 9. Построение фигур проворачивания

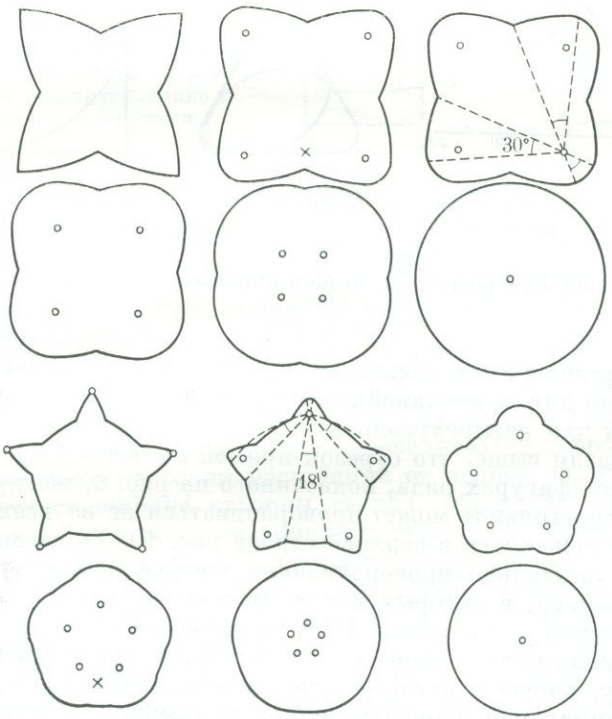


Рис. 10. Фигуры проворачивания правильного треугольника и квадрата

Далее нетрудно убедиться, что число P_{n+1} сортов дуг для фигур с симметрией правильного $(n+1)$-угольника равно

$$P_{n+1} = (n+1)/2 \qquad (3)$$

или

$$P_{n+1} = (n+2)/2 \qquad (4)$$

в зависимости от того, является ли n нечетным или четным числом.

Так, например, для фигур верхнего ряда (рис. 11) число сортов дуг равно 2, а для нижнего ряда 3.

Так же как и для фигур равной ширины, можно показать, что по мере приближения точки a (рис. 9) к центру исходной фигуры площадь парной фигуры возрастает. Наибольшую площадь имеет окружность, для которой расстояние aA является максимальным, наименьшую — фигуры, у которых точки a и A совпадают. На рис. 11 мы даем зависимость площадей криволинейных четы-

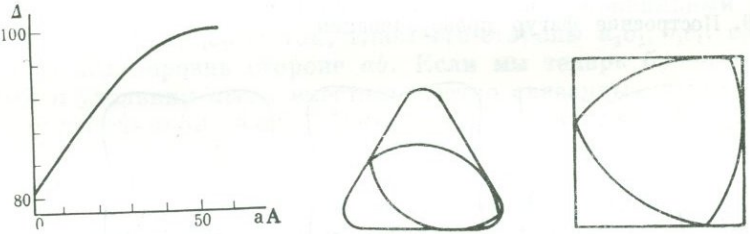


Рис. 11. Зависимость площади Δ фигур проворачивания треугольника и квадрата от расстояния aA

Рис. 12. Примеры фигур проворачивания в правильном треугольнике и квадрате

рехугольников и пятиугольников от расстояния aA. Соответствующая кривая для криволинейных пятиугольников мало отличается от кривой для четырехугольников.

Мы видели выше, что отрезок прямой ab жестко проворачивается во всех фигурах ряда, показанного на рис. 6, между тем правильный треугольник может проворачиваться не во всех фигурах ряда, изображенного в верхней строке рис. 10. То же можно сказать и относительно проворачивания квадрата. В виду того что площадь фигур, в которых может проворачиваться данная фигура, изменяется плавно (рис. 11) в зависимости от величины отрезка aA, можно вычислением или графическим путем найти в рядах ту фигуру, площадь которой будет минимальной. На рис. 10 фигуры минимальной площади, в которых могут проворачиваться правильный трегольник и квадрат, отмечены крестиком.

Выше мы сказали, что нас в этом параграфе будут интересовать только правильные многоугольники в роли проворачивающихся фигур. Для полноты отметим, что в литературе [3] известны и другие проворачивающиеся фигуры, например, криволинейные фигуры, проворачивающиеся в прямолинейных многоугольниках. На рис. 12 мы даем два примера таких фигур. Первая из них представляет двуугольник, сторонами которого служат две дуги окружности; угол пересечения дуг равен 120°. Этот двуугольник проворачивается в правильном треугольнике с закругленными

углами. Другим примером служит треугольник Reuleaux, проворачивающийся в квадрате. В технике употребляется инструмент для сверления в металле квадратных дыр, основанный на проворачивании треугольника Reuleaux. Как видим, и для этих фигур соблюдается правило $(n + 1)$, т. е. если порождающая фигура имеет симметрию правильного n-угольника, то порожденная фигура имеет симметрию $(n + 1)$ -угольника. После всего изложенного мы можем вернуться к фигурам сверления слюды.

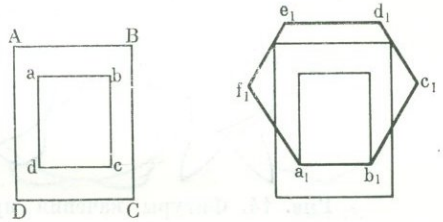


Рис. 13. Построение фигур качения прямоугольника в равноугольном шестиугольнике с чередующимися сторонами

Почему при сверлении слюды получаются многоугольные отверстия. На основании предыдущего объяснение явлений, возникающих при сверлении слюды и других хрупких тел (пластинок агальматолита, пропитанного серой картона, пластинок высушенного хлеба и т. д.), напрашивается само собой. В начале сверления получается неправильная дыра с зазубринами; при вращении сверла ребра его будут попадать преимущественно в наиболее глубокую зазубрину. Опираясь на эту зазубрину, сверло изменит свое первоначально вращательное движение в гипоциклическое или катательное, т. е. будет переваливаться с боку на бок. Вследствие этого на таком расстоянии от первой зазубрины, которое отвечает ширине стороны сверла, образуется вторая зазубрина; на таком же расстоянии от этой последней образуется третья зазубрина и т. д. В результате образуется отверстие с числом сторон $(n + 1)$. Если превращения вращательного движения в катательное не произойдет, то, конечно, отверстие будет круглым. Возможны также и промежуточные формы, в которых качение и вращение сочетаются в различных пропорциях. Таким образом, все формы, принадлежащие к ряду парных фигур, оказываются возможными, однако вероятности образования этих форм будут различны на основании энергетических соображений. Мы знаем, что в природе при механических процессах скорее могут быть достигнуты такие состояния (в данном случае стационарное движение сверла в отверстии), которые требуют наименьшей затраты энергии. Поэтому из всех возможных форм наиболее вероятной будет та, площадь которой наименьшая, ибо количество работы, потребной для высверления отверстия, строго пропорционально его площади. Эти формы отмечены на рис. 6 и 10 крестиками. Сравнивая их с формами отверстий, наблюдаемых в действительности, мы видим между ними огромное сходство.

Впрочем есть и различия. Главнейшее из них состоит в том, что теоретические фигуры не непрерывны, а состоят из определенного числа дуг, пересекающихся в определенных точках (рис. 10); между тем действительные отверстия представляют собою сплошные кривые. Мы полагаем, что эта разница происходит оттого, что в условиях опыта при недостаточно острых ребрах сверла и недостаточной хрупкости слюды осуществить резкое пересечение дуг невозможно.

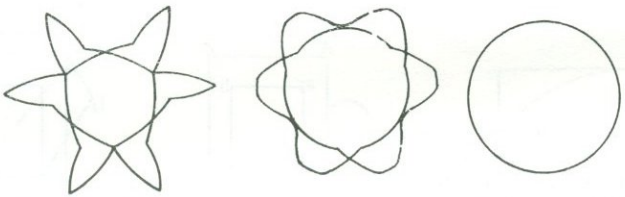


Рис. 14. Фигуры качения прямоугольника

Проворачивание других симметричных фигур. Мы рассмотрели построение фигур, парных равносторонним многоугольникам. Возникает вопрос, какие парные фигуры могут получаться из других симметричных фигур. Возьмем за исходную фигуру прямоугольник $ABCD$ (рис. 13) и будем поступать с ним аналогично тому, как мы это делали с правильными многоугольниками. Отложим от вершин прямоугольника по диагоналям равные отрезки Aa, Bb, Cc и Dd, соединим точки a, b, c, d прямыми, построим шестиугольник $a_1b_1c_1\ldots$ так, чтобы все его углы были бы равны друг другу, а стороны по очереди были бы равны сторонам ab и bc прямоугольника.

Если мы теперь будем катить четырехугольник $abcd$ вместе с жестко связанным с ним четырехугольником $ABCD$ внутри шестиугольника $a_1b_1c_1\ldots$, то точки A, B, C, D будут описывать фигуру, парную прямоугольнику $ABCD$. В зависимости от величины отрезка Aa можно получить целый ряд фигур. Крайним представителем их будет окружность. На рис. 14 мы даем серию таких фигур. Как видно из чертежа, каждая из новых фигур состоит, по существу, из двух пересекающихся фигур и похожа на ранее разобранные тем, что и у нее порядок оси симметрии на единицу больше, чем у исходной фигуры (прямоугольник имеет двойную ось симметрии, а выведенная из него фигура имеет тройную ось симметрии). В этом смысле правило $(n + 1)$ выполняется и здесь. Что касается числа сторон в вспомогательном многоугольнике $a_1b_1c_1\ldots$, то оно увеличено в сравнении с числом сторон исходного многоугольника $abcd$ на две единицы, т. е. здесь соблюдается правило $(n + 2)$. От разобранного частного случая легко перейти и к общему, т. е. к построению парных фигур к симметричным многоугольникам с чередующимися сторонами.

Выведенные нами правильности при этом также будут иметь место.

Если мы потребуем теперь, чтобы исходная фигура при движении по парной фигуре не выходила за ее пределы, т. е. чтобы имело место проворачивание, то, как легко видеть уже из рис. 14, единственной фигурой ряда, в которой такое проворачивание возможно, будет окружность. Кроме того, нежесткое проворачивание будет возможно в таких фигурах, которые получаются



Рис. 15.

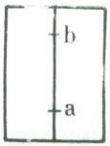


Рис. 16.





Рис. 17.

Рис. 15. Фигура проворачивания прямоугольника

Рис. 16. Фигура качения прямоугольника в правильном треугольнике

Рис. 17. Фигура проворачивания ромба

из фигур, изображенных на рис. 14, удалением внутренних дуг (рис. 15). Симметричные фигуры, парные прямоугольнику (рис. 16), можно получить еще качением отрезка средней линии *ab* внутри правильного треугольника. В этом случае также получаются внутренние пересечения контуров. Мы рассмотрели вопрос о проворачивании прямоугольника, как представителя симметричных фигур с чередующимися сторонами. Для полноты следует разобрать еще вопрос о проворачивании ромба с углом в 60°, как представителя фигур с чередующимися углами. Вспомогательным многоугольником в данном случае будет равносторонний треугольник, по которому следует катить длинную диагональ ромба, чтобы получить парную ему фигуру (рис. 17).

Проворачивание отрезка прямой в пространстве. До сих пор наши теоретические соображения шли за фактами, преследуя единственную цель — их объяснение, при этом было получено и нечто новое, непосредственно из наблюдения не вытекающее; например, было показано, что фигуры сверления состоят из дуг окружностей. В настоящем разделе мы сделаем попытку предсказать некоторые явления, экспериментальная проверка которых представляет известные трудности и является делом будущего. Нас интересует вопрос, какую фигуру будет высверливать в хрупкой среде проворачиваемый в ней многогранник. Другими словами, мы переносим нашу задачу из плоскости в пространство Первая задача — построение симметричных пространственны фигур проворачивания отрезка прямой — совершенно аналогичн

нахождению плоских фигур равной ширины. Строим правильный тетраэдр, из его вершин описываем по две сферы радиусами r и R, причем $r + R > a$, где a — ребро тетраэдра. Пересекаясь между собой, сферы образуют некоторую замкнутую пространственную фигуру с кривыми гранями, напоминающую тетраэдр и обладающую его симметрией. При $r = 0$ получаем кривогранный тетраэдр — фигуру, аналогичную треугольнику Reuleaux. При $r = R$ получаем сферу — фигуру, аналогичную окружности.

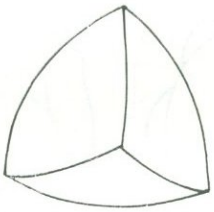


Рис. 18. Фигура проворачивания отрезка в тетраэдре

Все фигуры в зависимости от величины r и R при условии $r + R = \text{const}$ образуют ряд фигур, парных отрезку прямой $r + R$. Из всех фигур ряда сфера имеет наибольший, а кривогранный тетраэдр (рис. 18) наименьший объем. Надо думать поэтому, по аналогии с явлением на плоскости, что заостренный с двух концов стерженек, приведенный в беспорядочное вращательное движение около нежестко закрепленного центра, будет вышлифовывать в воображемой хрупкой среде при возможности удаления сработанного материала полость в виде кривогранного тетраэдра. Все фигуры ряда совершенно аналогичны фигурам равной ширины на плоскости и называются фигурами равной толщины (Gleichdicke). В последнее время в точной механике уделяют большое внимание изучению таких фигур. Так, в цитированной выше работе Schmerwitz показал, что при производстве стальных шариков методом шлифовки их между параллельными плоскостями получаются не сферы, а фигуры равной толщины. Стальной шарик не проходит через круглое отверстие с диаметром, равным толщине шарика, измеренной микрометром. То же приходилось наблюдать и нам при шлифовке шариков из камня и стекла. Мы говорили выше, что фигуры равной толщины могут быть и несимметричными; такими фигурами, однако, в дальнейшем мы интересоваться не будем.

Проворачивание пирамид. При разенковывании отверстий для головок винтов, если для этой цели употребляется зенковка, имеющая форму правильной пирамиды, вместо ожидаемого конического отверстия получаются пирамиды с кривыми гранями. Число сторон в пирамидальном отверстии оказывается на единицу больше, чем число сторон в зенковке. Хотя в данном случае м имеем дело с проворачиванием пирамиды в пирамиде, т. е. с я^ы лением пространственным, но, по существу, оно сводится к яв-

лению на плоскости, т. е. к сверлению слюды, и может быть истолковано качением n-гранной пирамиды в пирамиде с числом сторон $n + 1$. В частном случае при проворачивании двугранной пирамиды (плоского угла, копья) получается пирамида трехгранная.

Проворачивание тетраэдра. Мы остановились на проворачивании пирамид только для того, чтобы понять, как будет проворачиваться простейший правильный многогранник — тетраэдр. Построение фигур, с которыми тетраэдр составляет пару, не представляет затруднений; для этого нужно решить сначала вопрос о том, в каком многограннике может катиться тетраэдр. Под качением в данном случае мы по аналогии с качением многоугольника в многоугольнике понимаем поворачивание тетраэдра с одной его грани на другую около ребра или вершины; при этом после каждого поворота грань тетраэдра должна совпадать с одной из граней искомого многогранника. Ясно, что в каждой вершине этого многогранника должно пересекаться по меньшей мере четыре грани, т. е. на единицу больше, чем в тетраэдре. Единственный многогранник, у которого в каждой вершине пересекается по четыре треугольных грани, есть октаэдр. Итак, для построения фигур, парных тетраэдру, приходится пользоваться октаэдром. Само построение производится так. На осях симметрии третьего порядка, соединяющих вершины тетраэдра с серединами противолежащих граней, в равных расстояниях от вершин откладываются четыре точки. Точки соединяются прямыми; получается малый тетраэдр внутри исходного большого. Далее строится октаэдр с ребрами, равными ребрам малого тетраэдра. При качении малого тетраэдра внутри октаэдра вершины тетраэдра опишут поверхность искомой фигуры. Грани этой фигуры представляют собою части поверхностей сфер, ребра — окружности. В зависимости от положения вершин малого тетраэдра можно построить целый ряд фигур, парных тетраэдру, начиная с кривогранного октаэдра и кончая сферой. Объемы фигур этого ряда будут расти по мере приближения фигур к сфере. Если мы пойдем по этому ряду фигур с его начала к сфере, то пройдем через одну фигуру, в которой будет возможно проворачивание; из всех последующих фигур, в которых проворачивание будет также возможно, эта первая будет иметь наименьший объем. По внешнему виду она представляет собою октаэдр со сферическими сторонами и углами, притупленными сферами же, но иного радиуса. Симметрия этой фигуры та же, что и у октаэдра. Итак при проворачивании тетраэдра получается фигура, близкая к октаэдру.

Проворачивание октаэдра. Задача нахождения наименьшей по объему фигуры, в которой мог бы проворачиваться правильный октаэдр, решается совершенно аналогично предыдущей. Искомая фигура должна быть родственна икосаэдру, ибо только в икосаэдре в каждой вершине пересекается по пяти граней, т. е. на единицу больше, чем у октаэдра, причем все грани у икосаэдра представляют собою правильные треугольники, как и у октаэдра.

Мы не будем повторять здесь всего рассуждения и ограничимся сказанным.

Проворачивание икосаэдра. Рассуждая по-прежнему, легко прийти к заключению, что фигура, в которой возможно проворачивание икосаэдра, должна обладать следующими свойствами. Она должна быть родственна некоторому правильному многограннику, т. е. может быть построена качением икосаэдра в том правильном многограннике, в каждой вершине которого сходится по шести (5 + 1) правильных треугольников. Единственная фигура, которая формально удовлетворяет этим требованиям, есть сфера; ее можно рассматривать как многогранник с бесконечно большим числом треугольных граней. Таким образом, в результате проворачивания икосаэдра должен получиться шар.

Проворачивание плоских правильных многоугольников в пространстве. Всякий плоский многоугольник можно рассматривать как двугранник, в котором обе грани совпадают. В каждой вершине многоугольника, говоря формально, сходится по две грани. Поэтому вспомогательный многогранник, в котором может катиться правильный многоугольник, будет обладать следующими свойствами. В каждой его вершине будет сходиться по три грани (2 + 1), каждая грань будет представлять собою правильный многоугольник с числом сторон, равным числу сторон проворачиваемого многоугольника. Окончательная фигура будет иметь симметрию вспомогательного многогранника и будет состоять из частей сфер различного радиуса. Внешний вид его будет весьма близко напоминать вспомогательный многогранник. Из сказанного следует, что при проворачивании правильного треугольника должна получиться фигура с симметрией тетраэдра; квадрат даст фигуру, близкую к кубу, а правильный пятиугольник — фигуру, близкую к додекаэдру. Что касается других правильных многоугольников, то все они при проворачивании дадут сферу, так как соответствующих им вспомогательных многогранников не существует.

Координационные числа. В следующей таблице сведены числа всех фигур, с которыми нам пришлось иметь дело выше. Эти числа мы называем координационными; они понадобятся нам ниже (см. табл.).

Статистическая макромеханика. Современная физика учит, что для мира молекул нельзя применять обыкновенную механику, между прочим, потому, что поведение отдельных частиц в каждый данный момент времени не может быть предвычислено. Для молекулярных явлений придумана поэтому особая «статистическая», а в последнее время «квантовая» механика или микромеханика. Какой же механике подчиняются разобранные нами явления. Несомненно, что в данном случае мы имеем дело не с квантовой, а с обыкновенной механикой, во-первых, потому, что объектом ее являются достаточно большие тела, а, во-вторых, потому, что в описание явлений никак не входит постоянная Планка h. С другой стороны, эта обыкновенная механика носит чисто статистиче-

Таблица координационных чисел

Проворачиваемая фигура	Координационное число проворачиваемой фигуры	Вспомогательная фигура	Координационное число фигуры, в которой происходит проворачивание
Отрезок прямой	2	Правильный треугольник	3
Отрезок прямой	2	Правильный тетраэдр	4
Правильный n-угольник	n	Правильный $(n+1)$-угольник	$n+1$
Многоугольник с чередующимися сторонами (прямоугольник и др.)	$2n$	Многоугольник с чередующимися сторонами	$2(n+1)$
Правильный треугольник	3	Тетраэдр	4
Квадрат	4	Куб	8
Правильный пятиугольник	5	Додекаэдр	20
Тетраэдр	4	Октаэдр	6
Октаэдр	6	Икосаэдр	12

ский и, как увидим далее, квантовый характер, ибо поведение проворачиваемой фигуры заранее не может быть вычислено, зато суммарный эффект отдельных движений в значительной мере предопределен фигурой проворачивания и имеет ясно выраженный целочисленный характер.

Частицы-многогранники. Физики для решения всевозможных теоретических вопросов нередко приписывают молекулам, атомам и электронам форму шара и, исходя из этого представления, часто приходят к выводам, не противоречащим опыту. Никто, однако, серьезно не думает, что частицы на самом деле имеют форму шара; наоборот, мы совершенно определенно знаем, что молекулы не имеют шаровой симметрии и скорее могут быть приняты за многогранники, чем за шары; например, молекулу метана в жидком или газообразном состоянии мы в соответствии с фактами, установленными химией, скорее должны уподобить тетраэдру, молекулы многих комплексных соединений — октаэдру и т. д.

Тепловое движение многогранных молекул в жидкости. Исходя из кинетической теории газов и жидкостей, мы рассматриваем теплоту как кинетическую энергию броуновского движения молекул; с нашей точки зрения,— многогранных молекул. Выше мы видели, что многогранник, беспорядочно движущийся в некоторой среде, стремится сам собою обеспечить для своего движения, которое вследствие этого становится менее беспорядочным, вполне определенную полость, имеющую симметрию некоторого нового многогранника. Так обстояло дело, когда многогранник был велик в сравнении с частицами среды. Наша новая гипотеза, для проверки которой, по-видимому, не безнадежно

трудно придумать эксперимент, состоит в том, что молекулы жидкости в своем беспорядочном движении стремятся вытолкать для себя в среде себе подобных молекул многогранную полость. Полость эта не меняет существенно своей формы, если средняя температура жидкости не переходит через определенный предел. Не вдаваясь в обсуждение интересных философских вопросов, связанных с нашей интерпретацией молекулярного движения, мы могли бы сказать, что молекула может достаточно свободно совершать свои движения в отведенном ей помещении, но она не может существенно изменить ни формы своей ячейки, ни ее положения в пространстве, если не считать небольших сотрясений полости вследствие внутреннего интенсивного в ней движения. В результате этих сотрясений и взаимного притяжения полостей они будут стремиться занять минимальный объем и взаимно ориентировать друг друга, вследствие чего возникнут группировки, по строению аналогичные кристаллам, а может быть и сами кристаллы.

Синтез идеального беспорядка и идеального порядка в понятии кристаллической структуры. Если действие беспорядочного движения, стремящегося расстроить правильность структуры, будет компенсировано полностью силами притяжения полостей друг к другу, то получится прочная кристаллическая постройка. Она состоит из совершенно неподвижных, расположенных по законам симметрии многогранных пустот (что-то вроде пустотелых кирпичей), внутри которых молекулы, атомы или ионы совершают свое беспорядочное движение (поворачивание с одной грани на любую другую). Таким образом, в одном образе кристаллической структуры синтезируется идеально беспорядочное непрестанное тепловое движение с идеальным порядком и покоем.

Фигуры Г. Г. Леммлейна. Мы изложили все то, что могло нам дать размышление о фигурах сверления слюды, описанных выше. На этом работа могла бы и закончиться, если бы недавно Г. Г. Леммлейн [4] не открыл нового замечательного явления, которое можно наблюдать в том же процессе сверления слюды многогранным сверлом. Оказывается, если продолжать далее вращать в обе стороны многогранное сверло в многоугольном отверстии слюды, то последнее продолжает разрабатываться «квантами», т. е. четырехугольное, например, отверстие, полученное трехгранным напильником, превращается в пятиугольное, потом в шестиугольное и т. д. Г. Г. Леммлейну удавалось получать двенадцатиугольные отверстия с помощью четырехугольного сверла. Опыт очень легко удается, если его производить с помощью специально для этой цели построенного смычкового станочка, напоминающего часовой токарный станок. В патрон станочка зажимается стальное четырехгранное сверло, имеющее вид очень острой квадратной пирамиды. В центре круглой пластинки слюды этим сверлом делается укол, который разрабатывается до пятиугольного отверстия медленным поворачиванием сверла смыч-

ком в обе стороны; слюда при этом придерживается рукой и постепенно передвигается все глубже и глубже к широкой стороне сверла. После того как получено пятиугольное отверстие, шпиндель станка приводится в быстрое вращение смычком в обе стороны без придерживания слюды рукой; а для того чтобы последняя не могла соскочить во время работы со сверла, на него надевается плотно кусок пробки. Фигуры Леммлейна по внешнему виду отличаются от ранее описанных фигур сверления (см. рис. 1) более

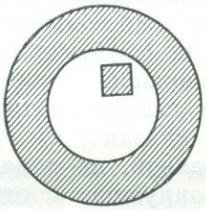


Рис. 19

резко выраженными углами; в первом приближении новые фигуры могут быть приняты за правильные многоугольники. По отношению к фигурам сечения сверла они уже не являются фигурами жесткого проворачивания: сверло может не только катиться в фигурах Леммлейна, но проделывать и многие другие движения. Стороны фигур Леммлейна равны или почти равны сторонам фигуры сечения сверла. Геометрического построения фигур Леммлейна мы пока дать не можем. Очень возможно, что теоретически они являются просто правильными многоугольниками, тем более, что при сверлении более хрупких тел, например агальматолита, действительно получаются фигуры с прямыми сторонами.

Объяснение возникновения фигур Леммлейна. Пусть мы имеем твердое квадратное сверло (рис. 19), свободно продетое в круглое отверстие кольца, сделанного из хрупкого материала. Сверло твердо закреплено на месте, а кольцо совершает в своей плоскости беспорядочное, броуновское, движение. При ударах о сверло внутри кольца будут возникать зазубрины разной глубины и формы. Благодаря большому разнообразию скоростей и направлений движения кольца вскоре после начала эксперимента среди зазубрин может оказаться одна, по своим размерам значительно отличающаяся от всех прочих. Вследствие этого углы сверла будут предпочтительно попадать именно в эту зазубрину, а косое поступательное или вращательное движение кольца будет неизбежно трансформироваться в катательное или гипоциклическое движение, подобно тому как камень, брошенный вдоль шероховатой поверхности, зацепившись одним из своих острых углов за неровность поверхности, начинает катиться на ней. Катательное движение кольца по сверлу можно легче себе представить, если считать кольцо неподвижным, а сверло движущимся, что по закону относительного движения вполне допустимо. При

внезапном изменении относительного движения сверла и кольца следующий сильнейший удар после удара в зазубрину попадет в точку окружности, отстоящую от зазубрины на расстояние, равное стороне многоугольного сечения сверла; третий удар, менее сильный, придется в точку, отстоящую от предыдущей на то же расстояние, и т. д. В результате множества таких ударов в обе стороны от начальной зазубрины наметятся два ряда новых зазубрин. Эти ряды или сойдутся в одной точке, диаметрально противоположной начальной зазубрине, в случае четного числа зазубрин, и тогда после дальнейшего углубления всех зазубрин образуется многоугольник, или совпадения не произойдет, и тогда расстояние между двумя зазубринами, расположенными около диаметрально противоположной точки, будет меньше стороны сверла. Однако при непрерывном увеличении диаметра отверстия кольца, сделанного, как сказано, из хрупкого материала и получающего множество ударов, не попадающих в интересующие нас зазубрины, длина окружности отверстия достигнет такой величины, при которой образование многоугольника будет возможно. Другими словами, рано или поздно условия, благоприятствующие образованию фигуры Леммлейна, должны возникнуть.

Как только круглое отверстие превращается в многоугольное, хаотическое движение сверла упорядочивается и становится подобным движению зубчатого колеса внутри зубчатого кольца. Данное нами объяснение образования фигур Леммлейна вполне аналогично объяснению возникновения правильно чередующихся борозд затвердевшего снега на улицах города с большим конным движением. Вначале совершенно беспорядочное распределение ударов копыт лошадей по мере возникновения более глубоких и удобных точек опоры становится все более и более правильным, пока, наконец, все шаги лошадей не будут точно отвечать образовавшимся бороздам. Как только беспорядочное движение сверла станет закономерным, скорость срабатывания хрупкого материала кольца, очевидно, должна уменьшиться, так как движение сверла не будет сопровождаться ударами, а трение скольжения почти целиком будет заменено трением качения сверла. Однако и при этих условиях расширение отверстия, хоть и медленно, но будет происходить и, совершенно очевидно, что рано или поздно должен наступить момент, когда зубчатое сцепление сверла и кольца начнет работать с перебоями. Правильное движение сверла по устойчивой орбите будет нарушаться отдельными соскоками зубцов, пока они окончательно не будут сорваны и не перестанут исполнять своих функций, а стационарное движение вновь не превратится в беспорядочное. После этого цикл, очевидно, должен начаться снова; отверстие снова станет быстро разрабатываться до того момента, когда сверло еще не совершило своего перескока на новую квантовую орбиту.

Квантовая макромеханика фигур Леммлейна. Выше мы подчеркнули аналогию между разбираемым нами явлением и тем,

что происходит в мире атомов. Проследим эту аналогию несколько дальше. Так как во всех фигурах Леммлейна, образованных одним и тем же сверлом, все стороны равны ширине грани сверла, то должно иметь место равенство

$$P = m\lambda, \tag{5}$$

где P — периметр фигуры, m — целое число, λ — ширина грани сверла. Это равенство показывает, что n-угольное сверло может двигаться стационарно только по таким орбитам, на которых укладывается целое число раз некоторая постоянная величина λ.

Площадь фигур Леммлейна пропорциональна квадрату периметра, поэтому, принимая коэффициент пропорциональности за единицу, можно написать

$$S = m^2\lambda^2. \tag{6}$$

Здесь S — площадь. Очевидно, что «квант энергии», который нужно затратить при переходе от числа m к числу $m + 1$, будет пропорционален приращению площади при переходе от n-угольной фигуры к $(n + 1)$-угольной, поэтому при коэффициенте пропорциональности, равном единице,

$$E_m = S_{m+1} - S_m = 2m\lambda^2 + \lambda^2. \tag{7}$$

Мы видим, таким образом, что квант энергии E не остается постоянным, а возрастает по линейному закону с увеличением числа m. Скачок же кванта при изменении числа m на единицу для одного и того же сверла остается постоянным и равным $2\lambda^2$

$$E_{m+1} - E_m = 2\lambda^2. \tag{8}$$

Обобщение описанных явлений для пространственных фигур. После всего изложенного, естественным образом, возникает вопрос о возможности получения в пространстве тех же явлений, которые наблюдаются в плоскости. Окончательный ответ на этот вопрос может дать только опыт; пока же нет никаких принципиальных возражений против такой возможности. Мы видели выше, что двуугольник (заостренный с обоих концов стерженек) может жестко проворачиваться в тетраэдре с закругленными гранями. Если процесс Леммлейна возможен в пространстве, то при дальнейшем разрабатывании тетраэдрической полости тем же стерженьком должна получиться та же полость, что и при проворачивании тетраэдра, т. е. кривогранный октаэдр. За октаэдром должен последовать икосаэдр и, наконец, сфера. Итак, для пространства ряд фигур Леммлейна состоит не из бесконечного их числа, а ограничивается всего пятью фигурами

двуугольник → тетраэдр → октаэдр → икосаэдр → сфера.

Соответственные координационные числа образуют ряд

$$1 \to 4 \to 6 \to 12 \to \infty$$

Если вместо двуугольника в качестве исходной фигуры взять правильный треугольник, то ряд будет иным

$$\text{треугольник} \rightarrow \text{куб} \rightarrow \text{сфера}$$

$$1 \rightarrow 8 \rightarrow \infty$$

Квадрат дает ряд

$$\text{квадрат} \rightarrow \text{додекаэдр} \rightarrow \text{сфера}$$

$$4 \rightarrow 20 \rightarrow \infty$$

Два последних ряда не дают ничего нового сверх того, что говорилось выше про проворачивание треугольника и квадрата. Иными словами, эти фигуры не могут порождать в пространстве ряда фигур, аналогичных фигурам Леммлейна. Другие правильные многогранники могут проворачиваться только в шаре. Итак, если для плоских фигур координационные числа по правилу $(n + 1)$ и по правилу образования фигур Леммлейна укладываются в бесконечный ряд чисел 3, 4, 5, . . . ∞, то для пространственных фигур этот ряд исчерпывается, по-видимому, только числами 4, 6, 8, 12, . . . ∞. Обращает на себя внимание совпадение этих чисел, за исключением числа 20, с координационными числами кристаллохимии.

Плавление, кристаллизация и переход из одной кристаллической модификации в д) гую. Возникновение фигур Леммлейна и их взаимные превращения наводят нас на мысль о возможной аналогии этих явлений с явлениями кристаллизации и перекристаллизации. Переход от полного беспорядка движения молекул в жидкости к кристаллической решетке при кристаллизации можно себе представить как образование некоторой фигуры Леммлейна (плоской или пространственной) каждой молекулой жидкости путем расталкивания окружающих ее и тождественных ей других молекул. Этот процесс, естественно, может произойти лишь при уменьшении средней скорости молекул и достижении ею вполне определенного значения, т. е. при определенной температуре. Какие именно при этом должны образоваться фигуры, зависит оттого, можно ли из них составить пространственную решетку. Во всяком случае сначала должны возникнуть более сложные, что в данном случае означает и более симметричные фигуры, что, как раз, отвечает опыту, ибо известно, что первые кристаллические модификации, выделяющиеся при более высокой температуре, обладают наивысшей симметрией (ср. модификации азотнокислого аммония). При дальнейшем уменьшении средней скорости молекул фигура Леммлейна скачком уменьшает число своих сторон, выделяя определенное количество энергии, что опять вполне аналогично выделению энергии при переходе в новую кристаллическую модификацию. Ясно, что число этих модификаций может быть весьма ограниченно.

Результаты. 1. Дан метод теоретического построения фигур, получающихся при сверлении пластинок слюды и других хрупких материалов многогранным сверлом.

2. Дано физическое объяснение возникновения фигур сверления.

3. Найдены закономерности в образовании фигур и главнейшие их свойства.

4. Сделан вывод фигур проворачивания для простейших многогранников.

5. Дано физическое объяснение возникновению фигур Леммлейна.

6. Найдены закономерности образования фигур Леммлейна.

7. Проведены аналогии между явлениями, наблюдаемыми в мире молекул, и явлениями при образовании фигур проворачивания.

Ноябрь 1935 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Schubnikow.* Z. Kristallogr., 1928, **66**, N 3—4, 434.
2. *F. Reuleaux.* Lehrbuch der Kinematik. Bd. I. Braunschweig, 1875, S. 21—29; *G. Schmerwitz.* Phys. Z., 1933, **34**, 145; *A. Mayer.* Z. Vereines deutsch. Ingr., 1932, **76**, 884; *H. Rademacher, O. Toeplitz.* Von Zahlen und Figuren. Berlin, 1930, S. 137.
3. *Д. П. Рузский.* Кинематика машин. Л., Госиздат, 1924. 199 с.
4. *Г. Г. Леммлейн.* Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1936, вып. 8, 19.

К ВОПРОСУ О СУЩНОСТИ ПРОЦЕССА ШЛИФОВКИ И ПОЛИРОВКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ[1]

Всем хорошо известно, какую огромную роль играет в технике отделка поверхностей твердых тел, придающая обрабатываемому предмету не только более приятный внешний вид, но и сообщающая ему ряд новых свойств, как-то: бóльшую механическую прочность, бóльшую устойчивость по отношению к разрушающему действию тех или иных химических агентов, прозрачность, блеск и т. д.

Неудивительно поэтому, что в последнее время как у нас, в Советском Союзе, так и за границей уделяется этому вопросу такое большое внимание не только со стороны промышленных учреждений и заводских лабораторий, но также и со стороны иссле-

[1] Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1936, вып. 8, с. 71—93.

довательских учреждений, занимающихся по преимуществу разработкой теоретических проблем. Работы академика И. В. Гребенщикова [1] о полировке стекла и металла в этом отношении особенно показательны. В этих работах автор с достаточной убедительностью показывает, какое большое значение имеют в процессе полировки химические явления, происходящие на поверхности обрабатываемого предмета. В настоящей работе мы уделяем внимание преимущественно другой стороне вопроса, без которой полное понимание процесса шлифовки и полировки, по нашему мнению, невозможно; мы имеем в виду чисто механические явления, которые неизбежно возникают на поверхности обрабатываемого предмета. Роль этих явлений в сравнении с ролью химии не всегда бывает такой малой, какой она может показаться после знакомства с работами И. В. Гребенщикова. Так, очевидно, при лощении металла, кожи, бумаги, при обработке камня зубилом или при снятии последней стружки с обтачиваемого металлического предмета химические процессы на поверхности не могут играть заметной роли. С другой стороны, в тех случаях, когда химические процессы, наверное, имеют место при полировке, удаление образующихся нерастворимых пленок все же происходит чисто механическим путем, что, впрочем, и не отрицается в упомянутых работах И. В. Гребенщикова. И только в тех случаях, когда полированная поверхность получается в результате простого растворения, например при действии воды на матовую поверхность шлифованной каменной соли или при действии растворов некоторых фтористых соединений определенной концентрации на матированное стекло, механика не играет никакой роли.

Механические свойства твердых тел. При отделке поверхностей твердых тел приходится считаться с четырьмя основными их свойствами: упругостью, пластичностью, хрупкостью и твердостью.

Упругими мы называем такие тела, которые способны деформироваться под действием внешних сил и восстанавливать свою прежнюю форму после удаления последних. За меру упругости можно было бы принять поэтому ту максимальную деформацию (растяжение, сжатие), которая совместима с условием полного возвращения тела к его первоначальной форме под влиянием его внутренних упругих напряжений. Примером тел с большой упругостью служит резина; малой упругостью обладают кварц, свинец и т. д. Другая важная величина, которой характеризуются упругие тела, есть модуль упругости, определяемый из уравнения

$$S = \frac{P}{Q} \cdot \frac{L}{\lambda},$$

где S — модуль упругости, P — растягивающая сила, Q — площадь поперечного сечения растягиваемого образца, имеющего, например, форму цилиндра, L — длина цилиндра и λ — его удлинение. Примером тела с большим модулем упругости может слу-



Празднование 80-летия академика А. В. Шубникова (1967 г.)

жить кварц; малым модулем упругости обладает резина, свинец и т. д. Из приведенных примеров мы видим, что большая упругость и большой модуль упругости не обязательно сопутствуют друг другу.

Пластичными мы называем такие тела, которые сохраняют деформацию после удаления деформирующих сил. По В. Д. Кузнецову [2], всякое твердое тело обладает присущей ему максимальной скоростью V, с которой оно может быть пластически деформировано. Эту скорость, очевидно, и можно принять за меру пластичности тел. Другие величины, характеризующие свойства пластичных тел (предельные напряжения), нас интересовать не будут. По механизму явления в настоящее время можно различать четыре вида пластической деформации: 1) пластичность скольжения; 2) пластичность двойникования сдвигом; 3) пластичность двойникования перегруппировкой атомов и 4) пластичность аморфной перегруппировкой. Первые три вида встречаются только в кристаллах, последний — в аморфных телах и, может быть, также и в кристаллах. В первом приближении явление пластичности скольжения сводится к параллельному перемещению слоев кристалла по кристаллографическим плоскостям, называемым плоскостями скольжения, и вдоль определенных кристаллографических ребер, называемых направлениями скольжения; более сложные явления, которые возникают при скольжении на границе скользящих слоев, мы не рассматриваем. Этот вид пластичности встречается, например, в каменной соли. Пластичность двойникования сдвигом хорошо известна для кальцита и состоит в том, что известные участки кристалла реально, макроскопически, сдвигаясь

по кристаллографическим плоскостям, называемым плоскостями сдвига, и вдоль кристаллографических ребер, называемых направлениями сдвига, претерпевают такое изменение в структуре, которое эквивалентно повороту их целиком на 180° около двойниковой оси, перпендикулярной плоскости сдвига. Третий вид пластической деформации, известной для кварца, состоит в том, что в некоторых участках решетки происходит такая перегруппировка атомов в отдельных ячейках решетки, которая переводит структуру всего участка в двойниковое положение по отношению к недеформированной части кристалла; при этом никаких видимых изменений в форме всего кристалла, ставшего теперь двойником, не происходит. Наконец, в четвертом виде пластической деформации некоторые участки аморфного тела перемещаются друг относительно друга беспорядочно, без каких-либо геометрических правильностей; структура переместившихся частей остается до и после процесса аморфной. Пластическая деформация смолы может служить иллюстрацией этого случая. Кроме перечисленных видов пластической деформации возможны, конечно, и другие, до сих пор не изученные; например, на поверхности твердого тела, обладающей иными свойствами, чем внутренние его части, механизм пластической деформации может быть совершенно иным. В частности, можно предполагать, и соответствующие указания можно встретить в литературе, что в результате беспорядочной пластической деформации нескольких молекулярных слоев на поверхности кристалла может образоваться аморфная пленка, обладающая совершенно иными свойствами, чем основная масса кристалла. Не исключена возможность, что один и тот же кристалл может обладать пластичностью разного вида.

Хрупкими мы называем такие тела, которые разрушаются при быстро производимой деформации (удар). Очевидно, что тело может считаться хрупким только тогда, когда скорость деформации будет больше упомянутой выше величины V, в противном случае возникнет пластическая деформация и разрушения не произойдет. Мы видим, таким образом, что всякое твердое тело в известной мере упруго, пластично и хрупко и что проявление того или иного из этих свойств зависит от способов воздействия на тело со стороны экспериментатора.

В вопросах шлифовки и полировки играет большую роль также твердость тел. Под твердостью мы разумеем способность тел оказывать сопротивление их разрушению. В зависимости от способа воздействия на разрушаемое тело различают несколько величин, которым, несмотря на их коренное различие, придают название твердости. Так для определения твердости хрупких тел применяется шкала твердости по Моосу или твердость царапания; для металлов твердость определяется вдавливанием стального шарика (твердость по Бринеллю) и т. д. Мы не можем останавливаться здесь подробно на этом запутанном вопросе и будем возвращаться к нему лишь при обсуждении конкретных

случаев обработки поверхности твердых тел; этим способом мы думаем избежать тех обычных ошибок, которые так часто встречаются при обсуждении вопросов, связанных с понятием твердости.

Элементарные явления в процессах шлифовки и полировки. Внимательный анализ механических явлений на поверхности обрабатываемого тела заставляет нас свести их к следующим четырем элементарным процессам: выкалыванию и отрыванию частиц, отделению стружки и наклепу. Остановимся подробнее на каждом из них.

Процесс выкалывания или раскалывания проще всего наблюдать на работе каменщика зубилом. Какие же требования мы должны предъявлять в этом случае к обрабатываемому материалу, к инструменту и к самой работе, для того чтобы последняя была наиболее производительной? Совершенно ясно, что выкалывание особенно применимо к материалам хрупким, например камню. Правда, и для обработки пластичных металлов применяют зубило, но выкалывания при этом не происходит, зубило работает как резец, снимая стружку. Сам колющий инструмент не должен быть хрупким и должен обладать большой прочностью (твердостью) на удар, что же касается твердости по Моосу, то она не обязательно должна быть выше твердости обрабатываемого материала. Конечно, желательно, чтобы инструмент был остр, но и тупым инструментом в известных случаях работать можно; так, положив на камень стальной шарик и ударяя по нему молотком или катая его под давлением по камню, можно произвести разрушение поверхности камня; на этом именно и основано дробовое бурение горных пород и резка камня стальной угловатой крупкой. Работа выкалывания должна производиться так, чтобы при этом не происходило потерь энергии на упругие и пластические деформации и связанное с последними вредное упрочнение материала, т. е. резкими и сильными ударами, обеспечивающими скорость деформации тела, бóльшую критического значения V. Удары зубилом должны происходить в направлении, перпендикулярном к поверхности тела, также во избежание образования стружек, что, однако, может случиться только тогда, когда при данном методе работы материал в равной мере оказывается хрупким и пластичным. Мы видим, таким образом, что матировку поверхностей камня, стекла и даже хрупких металлов, например чугуна, рационально производить именно выкалыванием частиц тела с его поверхности, чего нельзя делать с пластичными металлами, например железом или свинцом, а также и с упругой резиной.

Явление отрывания или выдирания частиц от твердого тела родственно выкалыванию. Разница здесь сводится к тому, что выкалывание происходит при сжатии (нажим, удар), а отрывание — при растяжении. Действующая сила в первом случае направлена перпендикулярно к поверхности, во втором — перпендикулярно от поверхности. При медленном отрывании, так же как и при недостаточно быстром выкалывании, возможны пластические дефор-

мации. В существующих способах обработки поверхностей твердых тел отрывание как метод работы не применяется, если не считать любительского способа матировки стекла «под мороз»,— способа, основанного на отскакивании от поверхности стекла столярного клея, который в жидком виде наносится на стекло и при высыхании не способен держаться на нем вследствие возникающих в клее напряжений. Разрыв происходит при этом не в клее, обладающем большей твердостью (прочностью) на разрыв при меньшей твердости по Моосу, а в стекле — материале, достаточно хрупком для того, чтобы в нем могли возникать разрывы, хотя бы и сопровождаемые пластической деформацией, при медленном сжатии клея. Мы останавливаемся здесь на явлении отрывания особенно потому, что оно постоянно возникает при неправильном ведении процесса полировки стекла, кварца, металлов и является одной из главнейших причин брака. В своем месте мы вернемся к этому вопросу.

Если выкалывание и отрывание можно рассматривать как проявление хрупкости тела, то два других явления — отделение стружки и наклеп — характеризуют тело со стороны его пластичности. Если выкалывание и отрывание можно осуществить в теле только тогда, когда скорость деформации больше предельной величины V, то стружку и наклеп можно получить только при достаточно малых скоростях движения инструмента. Если для выкалывания наиболее благоприятным оказывается нормальное направление деформирующей силы, то для образования стружки желательно почти тангенциальное направление движения резца. Особенно легко снимается стружка с таких пластичных тел, как свинец, железо, эбонит, однако принципиально можно отделить стружку от любого сколь угодно хрупкого тела при достаточно остром и твердом (по Моосу) резце и, главное, при достаточно медленном его движении. Забегая вперед, скажем, что при обработке поверхности любого твердого тела строганием получается блестящая, если угодно, полированная поверхность, тогда как при обработке выкалыванием — шероховатая или матовая поверхность.

При наклепе, например при лощении, вальцевании и т. д., нажим может производиться перпендикулярно к обрабатываемой поверхности, но действующая слагающая сила при этом, как и в случае строгания, направлена тангенциально или почти тангенциально к поверхности. При достаточно медленной работе (во избежание отрывания и раскалывания) наклеп, как и строгание, возможен не только для выделяющихся своей пластичностью материалов, но также и для хрупких. В последнем случае он не может, естественно, проникать слишком далеко в глубь материала. Однако даже в таком хрупком материале, каким является горный хрусталь, при очень больших давлениях, например порядка 30 000 *кг/см*^{2}, глубина проникновения, как показали работы Е. В. Цинзерлинга и автора, достигает 1—2 *мм*.

Мокрый способ шлифовки стекла и камня. Рассматривая в лупу или в микроскоп шлифованную мокрым способом поверхность стекла, камня, горного хрусталя и т. д., мы увидим, что она по виду необычайно напоминает поверхность плиты камня, например гранита, обработанной зубилом или молотком. Издалека поверхность обтесанного камня кажется нам равномерно матовой, как и хорошо шлифованное стекло. Причина ровной матовости лежит, очевидно, в изометричности формы раковин выкалывания и одинаковости их глубины. Если отдельные раковины будут слишком глубоки, то дальнейшая обработка поверхности более тонкими средствами будет крайне затруднена; если раковины неизометричны, т. е. их размеры в проекции на обрабатываемую поверхность в одном каком-либо направлении больше, чем в перпендикулярном, и если при этом все раковины расположены приблизительно параллельно друг другу своей длиной, то возникнет поверхностная анизотропия матировки; рассматривая такую поверхность при различных условиях освещения, можно получить разное представление о тонкости ее матировки; наконец, если вершины бугорков грубо матированной поверхности завальцованы или состроганы (исцарапаны) «резцом», то, как это ни кажется с первого взгляда парадоксальным, на матовой поверхности появляется ложный блеск, который может быть очень сильным и поэтому ошибочно может быть приписан очень тонкой матировке, в действительности очень мало изменившейся.

Как известно, мокрый способ шлифовки стекла состоит в том, что на поверхность чугунного или латунного шлифовальника наносится некоторое количество порошкообразного абразива определенной крупности, замешанного на воде, причем обрабатываемый стеклянный предмет трется с нажимом по поверхности шлифовальной чашки. Несмотря на угловатость зерен абразива, они приходят при этом во вращение, чему способствует неровность чашки и самого стекла. Макроскопически качение зерен абразива можно наблюдать на осколках камней, если их положить на стол, покрыть доской и привести последнюю, нажимая на нее рукой, в движение параллельно столу. Зная крупность зерен абразива и скорость движения шлифовальника относительно обрабатываемого предмета, нетрудно подсчитать число оборотов зерна в минуту. Так при шлифовке кварца на диске диаметром в 30—35 *см* при 100 оборотах в минуту, т. е. при линейной скорости в 100 000 *мм* в минуту, зерно диаметром в 0,1 *мм* будет делать один миллион оборотов в минуту. Достаточно представить себе поведение осколка камня, вращающегося под доской, которой вы с нажимом водите по столу, чтобы картина мокрой шлифовки стала совершенно ясной. В основе этого процесса, очевидно, лежит явление выкалывания или выкрашивания обрабатываемого материала ударяющимися по нему зернами абразива. Какую же роль, кроме химического действия, которого мы не рассматриваем, может играть в мокрой шлифовке вода? Прежде всего вода служит для

разделения зерен абразива друг от друга; она препятствует слипанию их и оторванных частиц шлифуемого материала между собой; она вымывает отделенные от материала и от самих абразивных зерен мельчайшие осколки, переводя их во взвешенное состояние и тем самым облегчая вращение зерен; уменьшая по закону Архимеда вес абразивных зерен, еще не вовлеченных во вращение, она делает их более подвижными и, вероятно, уменьшает вредное трение между абразивными частицами, при вращении задевающими своими выступами друг за друга. Словом, вода благоприятствует вращению частиц абразива, что и является самым важным в процессе мокрой шлифовки, если она производится правильно.

Наилучшими доказательствами правильности развиваемой нами точки зрения служат те следствия, которые из нее могут быть выведены и оправданы на практике. Так, мы можем утверждать, что при мокрой шлифовке наивыгоднейшей будет та максимальная концентрация зерен абразива, при которой они не лишены своей наибольшей подвижности; другими словами, воды следует брать ровно столько, чтобы она заполнила промежутки между зернами, лежащими между шлифовальником и обрабатываемым предметом в один слой, почти касаясь друг друга. Практически это означает, что при приготовлении смеси нужно в сосуд, содержащий сухой абразив, налить воды столько, чтобы ее уровень совпадал или стоял чуть выше свободной поверхности порошка. Сделанная нами проверка этого правила вполне подтвердила его верность. Так было обнаружено, что слишком большое количество воды в наждаке, уменьшая производительность процесса шлифовки, вызывает опасность появления на ровно матированной поверхности более крупных выбоин, так как в этом случае не все зерна абразива равномерно перетираются в пространстве между шлифовальником и обрабатываемым предметом, а известная часть их выносится с водой за пределы шлифуемого объекта, а затем к концу процесса случайно попадает в работу. Характерно отметить, что выбоины в этом случае чаще всего возникают именно на периферии обрабатываемой поверхности. При недостатке воды, т. е. при работе «впросух», как говорят уральские гранильщики драгоценного камня, зерна абразива перестают вращаться и, будучи закреплены на своих местах, начинают работать как резцы, что при больших скоростях вызывает в стекле или кварце появление рваных царапин, а при меньших — наклеп и снятие стружки с образованием гладких царапин. Так как неподвижные зерна при недостатке воды образуют вместе с массой сработанного стекла плотный слой, причем каждому данному зерну соседние зерна мешают глубоко внедряться в обрабатываемый предмет, то царапины — рваные или гладкие, а в равной мере и наклеп могут происходить только на вершинах бугров, вследствие чего получается то, что мы назвали ранее ложным блеском. Для демонстрации описанных явлений мы могли бы рекомендовать произвести следующий поучительный опыт. На поверхность толстого матового

стекла на расстоянии в 15 *см* друг от друга поместим две кучки пятнадцатиминутного наждака, каждую весом в 0,1 *г*. В каждую кучку дадим такое количество воды, которое отвечает, по нашему мнению, наивыгоднейшим условиям шлифовки. В качестве объектов шлифовки возьмем две грубо матированных кварцевых пластинки площадью в 5—6 *см*^{2}. Одну пластинку поместим осторожно на первую кучку абразива и будем производить шлифовку вручную с очень легким нажимом, все время добавляя крошечными порциями воду тогда, когда наждак начинает подсыхать и поверхность шлифовальника начинает терять свой блеск. Круговые движения кварцевой пластинкой мы будем стараться производить так, чтобы она немного заходила за пределы мокрого пятна, образованного наждаком, с тем расчетом, чтобы все до единого зерна абразива были вовлечены в работу. До самого конца процесса в течение, скажем, 10 минут нажим будем стараться не увеличивать. Другую кварцевую пластинку мы будем обрабатывать без добавлений воды к первоначально взятому ее количеству, нажим же на пластинку будем равномерно увеличивать по мере высыхания наждака. Под конец процесса, т. е. примерно через минуту, нажим увеличим до той степени, когда пластинку уже невозможно будет сдвинуть с места. Если мы теперь оторвем пластинку от шлифовальника, для чего нужно впустить каплю воды между кварцем и стеклом, и сравним шлифованные поверхности обоих кварцев между собой, то увидим простым глазом, что поверхность второго кварца матирована значительно более тонко, чем первая, и выглядит почти полированной; микроскопическое же исследование покажет обратное. При полировке обеих пластин окажется, что первая пластинка не так скоро начнет блестеть, но отполируется окончательно скорее второй. Все это указывает на то, что вторая пластинка, шлифованная с недостаточным количеством воды и при большом нажиме, приобрела ложный блеск вследствие разобранных выше причин.

Развиваемые нами теоретические взгляды на процесс мокрой шлифовки позволяют делать правильный выбор абразива и материала для шлифовальника для выполнения той или иной конкретной задачи мокрой шлифовки. Так, слишком острые угловатые зерна абразива при шлифовальнике из вязкого материала, например свинца, цинка, красной меди, да еще при недостатке воды, врезаясь в металл и не имея возможности свободно вращаться, гарантируют при сильном нажиме появление царапин и одновременно вызывают блеск. Тот же абразив на стеклянном шлифовальнике может дать равномерно матовую поверхность обрабатываемого стекла или камня, но зато изнашивается быстрее, чем в том случае, когда шлифовальник сделан из упругого материала (резина, эбонит). Однако в последнем случае, несмотря на существование идеальных условий для вращения абразивных зерен, процесс шлифовки должен происходить медленнее вследствие того, что удары зерен абразива оказываются значительно менее резкими, чем это

требуется для выкрашивания стекла. Изометрические зерна с закругленными углами (например, что-то вроде кубооктаэдров), обладающие большой прочностью на раздавливание (стальная крупка), могут при шлифовке хрупких тел давать при большом нажиме на чугунном или ином прочном шлифовальнике значительный абразивный эффект, так как в данном случае имеются все условия для хорошего вращения зерен, а недостаток их остроты компенсируется возможностью без раздавливания самих зерен абразива производить большой нажим. Очень хрупкий абразив с остроконечными зернами и большой твердостью царапания с удобством может быть применен с мягким шлифовальником (свинец, холст) в тех случаях, когда ставится целью наведение внешнего лоска без устранения микроскопических выбоин, например при подготовке к полировке декоративного камня, применение воды в этом случае, однако, не является обязательным из чисто механических соображений и может быть оправдано только химическими (И. В. Гребенщиков) или физико-химическими (понижение твердости от добавления капиллярно-активных веществ. П. А. Ребиндер) соображениями; в сущности мы уже не имеем в данном случае дела с мокрым способом шлифовки. При выборе наждаков для тонкой оптической шлифовки стекла приходится требовать, чтобы абразив обладал вполне определенной прочностью на раздавливание, ибо при недостаточной прочности он будет истерт раньше, чем поверхность приобретет матировку требуемой тонкости, добавление же новой порции наждака вернет обрабатываемой поверхности ее первоначальную более грубую матировку. Абразив слишком прочный гарантирует нужную тонкость матировки стекла, но требует для своего окончательного разрушения более продолжительное время работы. Отсюда понятно, почему, например, алмазный порошок не может быть применен для тонкой шлифовки кварца на стеклянном шлифовальнике; в самом деле, если алмазный порошок взять очень тонким, то он будет работать в первых стадиях шлифовки слишком медленно, более же крупный порошок будет истираться настолько медленно, что практически не представляется возможным сообщить поверхности стекла достаточно тонкую матовость.

Обработка стекла и камня алмазными фрезерами. Если в основе мокрой шлифовки стекла подвижной абразивной крупкой лежит явление выкалывания частиц стекла, то при работе фрезерами, когда алмазные крупинки прочно укреплены в металле (красной меди, мягком железе) фрезера, срабатывание стекла и камня при быстром движении фрезера по поверхности материала целиком основано на выдирании его частиц. Термин «обдирка» в применении к этому способу обработки стекла является особенно удачным. Рассматривая поверхность подвергнутого обдирке стекла, мы увидим, что она покрыта параллельно идущими бороздами, из коих каждая представляет собою систему ямок или точек, четко расположенных одна за другой. Уменьшая скорость обработки,

можно сделать борозды более гладкими и тем самым сообщить поверхности некоторый блеск. До сих пор алмазный порошок является единственно пригодным материалом для затравки фрезеров с металлическими корпусами. Всякий другой абразив, обладая значительно меньшей твердостью по Моосу, совершенно непригоден для этой цели, так как острые края его зерен очень быстро тупятся. Единственный путь замены алмаза во фрезерах состоит в подыскании такой связки для зерен абразива, которая позволяла бы затупившимся зернам выпадать из фрезера (наждачного круга) и тем самым освобождать место новым еще не работавшим. Роль жидкости (воды, акволя, мыльной воды, керосина, машинного масла), которой обильно смачивается обрабатываемый стеклянный или каменный объект, если опять-таки не касаться химии, сводится к охлаждению материала в тех точках, где в него внедряются алмазные зерна, и к облегчению хрупкого отрыва частиц, ибо известно, что всякое тело, в том числе и стекло, при нагревании становится более пластичным, нагревание же в отдельных точках может достигать значительной температуры, о чем свидетельствуют образующиеся при работе искры.

Шлифовка металлов наждачными кругами. Так как большинство металлов (сталь, железо, латунь, медь, цинк, олово, свинец) обладают несравнимо большей пластичностью, чем стекло и камень, то наиболее производительным методом их обработки, в смысле количества материала, срабатываемого в единицу времени, является снятие стружки, поэтому мокрый способ шлифовки абразивной крупкой для пластичных металлов совершенно неприменим. Что же касается так называемой шлифовки металлов на наждачных кругах, то в основе она мало отличается от обработки металлов резцом, так как абразивное зерно круга срабатывает металл только пока оно не затупилось и не выкрошилось из связки круга; само же выкрашивание зерен с круга нужно для хорошей шлифовки постольку, поскольку необходимо затупившиеся «резцы» заменять новыми. В том, что все сказанное отвечает действительности, можно убедиться, рассматривая поверхность шлифованного на наждачном круге металла, которая после такой обработки всегда выходит блестящей, а не матовой, как это было бы, если бы процесс отделения частиц происходил по преимуществу выкалыванием или отрыванием. Мы, конечно, не хотим этим сказать, что, например, отрывания частиц совсем не происходит при шлифовке металлов кругами; конечно, и оно имеет место при этом способе работы, но оно подчинено основному процессу резания. Известно, что во многих случаях шлифовки металла на кругах никакой жидкой смазки кругов не требуется и что наличие фонтана искр при работе круга отнюдь не означает неправильности его работы. Сопоставляя это обстоятельство с тем, что говорилось о роли жидкости при работе алмазными фрезерами, легко понять, что в данном случае разогревание металла, увеличивая его пластичность, только способствует образованию стружек при том ус-

ловии, в действительности имеющем место, что сами «резцы», т. е. карборундовые или корундовые зерна, при этом не теряют своей остроты и прочности. В тех случаях, когда смазка при обработке металлов все же применяется, это делается из соображений, не имеющих ничего общего с увеличением производительности; так при точке инструментов вода применяется для того, чтобы в результате нагрева лезвие инструмента не отпустилось, а при обработке слишком пластичных металлов, например цинка или свинца, для того, чтобы круг не покрывался стружками металла, или, как говорят, не засаливался. По поводу засаливания необходимо сказать еще несколько слов. Это явление состоит в том, что затупившиеся абразивные зерна по той или иной причине не могут отделиться от связки круга, перестают снимать стружку и начинают вальцевать металл; поверхность последнего от этого начинает полироваться. Одной из самых главных причин засаливания является слишком прочная связка, не рассчитанная на те напряжения (тангенциальные), которые возникают при обработке данного сорта металла.

Мокрый способ полировки стекла и камня. Прежде чем говорить о сущности мокрого способа полировки стекла, напомним, в чем состоит этот процесс. Полировка производится обычно на смоле, холсте, сукне, войлоке, дереве, олове. Полировальники, сделанные из этих материалов, затравляются полировальными порошками с водой. Процесс производится «впросух», т. е. при очень малом количестве воды, достаточном лишь для сообщения полировальнику некоторого блеска при малых скоростях полировальника и с большим нажимом на обрабатываемый предмет. В качестве полировальных материалов могут быть взяты порошки любого абразива: алмаза, карборунда, наждака, а также специальные порошки: окись хрома, окись железа, окись олова, окись алюминия, пемза, трепел и т. д. Крупность зерна полировальных порошков может быть также весьма разнообразна, начиная с наждака двухсотого номера, всевозможных минутников и до молекулярно-мелких порошков окиси хрома и железа, в зависимости от материала полировальника и требуемого качества полированной поверхности. Если обрабатываемый материал очень тверд, а полировальник мягок, то при небольших требованиях к качеству поверхности абразив может быть взят очень крупным. Искусство первобытного человека полировать нефритовые топоры, вызывающие удивление некоторых археологов, с этой точки зрения объясняется очень просто тем, что этот твердый материал обрабатывался наждаком с помощью куска дерева и высверливался с помощью вращающейся бамбуковой палочки тем же мокрым порошком наждака. Полировка граней стеклянной посуды, а также и грубая полировка кусков оптического стекла для предварительного определения его оптической однородности производятся также весьма крупнозернистой пемзой с водой на деревянных кругах. Отмученный алмазный порошок с маслом употребляется для полировки весьма

твердых корундовых часовых камней и дает при этом очень совершенную поверхность. Полировка граней камня производится окисью хрома «впросух» на шероховатом оловянном диске с насечками, сделанными ножом или специальной стальной пластинкой. Наконец, классическая оптическая шлифовка производится на смоле или просмоленном сукне окисью железа.

Анализируя все перечисленные выше способы мокрой шлифовки стекла и камня, нетрудно найти следующие общие им всем черты. Материал полировальника должен быть настолько липок или шероховат, чтобы полирующий порошок мог им удерживаться. Действительно, все перечисленные материалы полировальников как нельзя лучше удовлетворяют этому требованию, за исключением, пожалуй, олова, которое и на самом деле не может быть применено для полировки, если не будет иметь насечек, способствующих удержанию на нем крокуса. Известно, что наиболее быстро стекло полируется просмоленным сукном, обладающим одновременно и липкостью и шероховатостью. Зерна абразива должны быть закреплены на месте в материале полировальника возможно более крепко, поэтому жидкость, добавляемая к полирующему порошку, должна способствовать его прилипанию к полировальнику, а никак не вымыванию его оттуда. Отсюда ясно, почему жидкости приходится брать мало. При выборе самой жидкости нужно стремиться к тому, чтобы она больше прилипала к полировальнику, чем к обрабатываемому предмету; при невозможности учесть это обстоятельство или при равенстве прилипания жидкости к полировальнику и обрабатываемой поверхности пористость полировальника должна компенсировать его плохую смачиваемость, способствуя чисто механическому удержанию жидкости на его большой поверхности. Значительные мягкость и пластичность материала полировальника приводят к тому, что зерна абразива глубоко внедряются внутрь поверхности полировальника и потому, во-первых, не могут поворачиваться и, во-вторых, могут работать только самыми кончиками своих острых выступов. В идеальном случае, когда ни одна частица не может во время работы повернуться в материале полировальника, качество полировки не должно страдать от присутствия в абразиве отдельных слишком крупных зерен, если, конечно, после каждой новой подмазки и до начала полировки абразив втирается в полировальник каким-нибудь куском стекла или камня (растиралка) соответствующей полировальнику формы, отчего крупные зерна глубже входят в полировальник, а их работающие острия выравниваются с остриями соседних менее крупных зерен. На практике нужно, естественно, стремиться к употреблению возможно более однородного по крупности зерна абразива, но предварительную его перетирку все же желательно производить во всех случаях, когда это возможно. Сильный нажим при полировке рекомендуется потому, что при нем в работу входит большее число частиц, которые, страхуя друг друга, не позволяют отдельным зер-

нам делать более глубокие борозды. Выше мы сказали, что полировке благоприятствует малая скорость движения полировальника. При несоблюдении этого условия с обрабатываемой поверхности происходит выдирание частиц. Большие скорости полировальника этому только способствуют. С явлением выдирания неизбежно сталкивается всякий, кто, желая поскорее закончить благополучно начатую полировку, увеличивает скорость вращения полировальника и в результате начинает замечать, как на почти готовой поверхности начинают появляться новые и увеличиваться в размерах старые точки. Описанное явление характеризуется у гранильщиков драгоценного камня специальным термином заполировать камень.

Все сказанное о полировке стекла и камня можно понять, исходя из единого представления о том, что в этом процессе, если он совершается правильно, мы имеем дело с использованием *пластических* свойств этих материалов. Вот тот, с первого взгляда, парадоксальный вывод, который является главным содержанием настоящей работы. Это значит, что элементарным процессом полировки стекла и камня являются снятие стружки и наклеп. Нет никакой необходимости обязательно представлять себе эту стружку в виде длинной спирали; истинная форма стружек стекла нам неизвестна. Может быть они напоминают по виду тертый сыр, ибо работа терки, в которой роль закрепленных на месте абразивных зерен играют заусенцы жести, в точности отвечает нашему представлению о полировке, вернее, о механической стороне этого процесса. Характерной особенностью полированной поверхности с нашей точки зрения является наличие борозд, образованных в результате снятия стружек абразивными зернами. Эти борозды или царапины в отличие от царапин, возникающих при хрупком отрывании частиц, гладки. Вследствие чрезвычайной хрупкости стекла с его поверхности практически не удается снимать толстых стружек, как с поверхности металла, поэтому мы привыкли от полированной стеклянной поверхности требовать отсутствия царапин. В действительности царапины всегда есть и на техническом стекле, даже достаточно глубокие, чтобы их можно было видеть в лупу; направленные в одну сторону они сообщают поверхности особую оптическую анизотропию вроде той, которая так характерна для полированной в токарном станке поверхности металла. После всего изложенного мы вправе спросить себя, чем же отличается алмазное фрезерование стекла от его полировки. С первого взгляда кажется, что разница между обоими процессами имеет чисто количественный характер. В обоих случаях мы имеем дело с закрепленными абразивными зернами, в первом случае более крупными, чем во втором, и с разными скоростями их движения по обрабатываемой поверхности: бо́льшими для фрезерования. Однако эта количественная разница приводит к поверхностям, качественно совершенно различным. Фрезерованная поверхность покрыта рваными бороздами, полированная — глад-

кими. Фрезеровка основана на хрупком отрыве частиц, полировка — на пластическом снятии стружки и сопровождающем его наклепе.

Появление остаточных деформаций (наклепа) на поверхности борозды, образующейся в результате снятия стружки, мы представляем себе следующим образом. Резец или острый кончик зерна абразива, внедрившись внутрь поверхности обрабатываемого предмета, снимая стружку и деформируя ее, растягивает попутно и тот участок поверхности материала, в котором происходит отделение стружки. Но так как движение полировальника происходит по всем направлениям, параллельным обрабатываемой поверхности, то последняя оказывается равномерно растянутой вдоль нее самой. Так как на границе отделения стружки возникают напряжения, превышающие те напряжения, которые отвечают пределу прочности и лежащие выше предела текучести, что при достаточно медленной работе резца, по нашему мнению, всегда может иметь место, то в самом поверхностном слое полированной поверхности наклеп может быть весьма значительным, а в идеале, при бесконечно медленной работе, даже предельно большим. В результате наклепа полированная поверхность упрочняется и в случае предельного наклепа, как это должно быть ясно из самого понятия предельного наклепа, совершенно теряет свои пластические свойства, т. е. становится идеально хрупкой. Выше мы отрицали возможность существования идеально хрупких тел; идеально хрупкие пленки наклепа не составляют исключения из этого правила, ибо они существуют только в момент своего образования, а дальше начинается процесс отдыха или расслабления. Растянутая пластической деформацией пленка стремится сжаться и вернуться к прежней структуре. Следующий опыт наглядно демонстрирует это явление. Если мы возьмем шлифованную с обеих сторон мокрым способом достаточно тонкую, например толщиной в несколько сотых или даже десятых долей миллиметра, стеклянную или кварцевую пластинку, приклеим ее одной стороной к толстой пластинке и отполируем свободную поверхность, то после отклейки пластинки заметим, что она изогнется полированной поверхностью внутрь, при этом стрелка прогиба может во много раз превосходить толщину пластинки. Этот опыт может быть поставлен и иначе. Отполированную с обеих сторон плоскопараллельную пластинку шлифуем с одной стороны; прогиб получается в ту же сторону, т. е. матированная поверхность оказывается выпуклой, а полированная вогнутой. Во избежание недоразумений при толковании этих опытов заметим, что напряжения в поверхностном слое могут возникать не только в результате наклепа, но и от других причин, например от закалки стекла при быстром его охлаждении во время выдувания. Так, если мы возьмем обыкновенное тонкое покровное стекло, употребляемое для работ с микроскопом, и пошлифуем одну из его сторон, обладающих естественной полировкой, то стекло опять получит прогиб и притом в

ту же сторону. Коробление стекла наблюдается не только в тонких пластинках, но и в весьма толстых, например при изготовлении так называемых пробных стекол, употребляемых в оптике. Мастер, приготовляющий такие стекла, всегда учитывает это явление и производит окончательную приемку изделия лишь после суточного отдыха стекла. Представители школы И. В. Гребенщикова склонны объяснять коробление стекла химическими процессами, происходящими в поверхностных трещинах. Какое объяснение является более правильным, сейчас сказать трудно, так как еще не придуман решающий опыт в пользу той или иной гипотезы. Впрочем, то или иное решение этого частного вопроса должно мало отразиться на судьбах химической или механической теории полировки, так как коробление стекла легко может быть *объяснено*, но не *предсказано* обеими теориями.

До сих пор мы говорили о наклепе, сопровождающем снятие стружки. Возникает вопрос, можно ли производить полировку стекла чистым наклепом, без снятия стружек, а следовательно, и без потери веса обрабатываемого предмета. Можно, но при условии, если глубина ямок или лучше высота бугорков подготовленной предварительной шлифовкой поверхности будет меньше наибольшей возможной толщины слоя наклепа. В противном случае полировка закончится раньше, чем будут выведены все дефекты шлифованной поверхности. При существующих методах подготовки довести полировку стекла до конца одним наклепом не удается, поэтому на полировку всегда оставляется запас толщины примерно в два микрона. Трудно сейчас сказать, чему равна наибольшая толщина наклепа и что, собственно, нужно было бы считать за толщину наклепа, если в действительности нет резкой границы между недеформированными слоями вещества и верхней деформированной пленкой. Во всяком случае толщина наклепа должна быть меньше этих двух микрон запаса. Из высказанного только что воззрения вытекает, по нашему мнению, чрезвычайно важная в практическом отношении задача разработать такой способ подготовки к полировке (методом, исключающим появление наклепа), который дал бы возможность вести полировку чистым наклепом. Тогда окончательная доводка полируемой поверхности стекла могла бы быть выполнена без всякого абразива сухим путем на гладкой поверхности, например того же стекла. Таким образом, *секрет полировки есть секрет подготовки к полировке*. Ниже мы увидим, что в этом направлении пока удалось сделать.

За существование наклепа в полированной поверхности говорит еще одно хорошо известное в литературе явление. Если хорошо отполированную поверхность стекла или кварца потравить плавиковой кислотой, то выступят все те царапины, которые, казалось, были совершенно выведены полировкой. Истолковать это явление пластической деформацией поверхностного слоя очень просто, если предположить, что царапины заполняются вещест-

вом обрабатываемого материала вследствие его пластичности и при наличии значительных тангенциальных сил.

В качестве аргумента против пластической теории полировки иногда выдвигают соображение о том, что те действительные тангенциальные силы, с которыми приходится иметь дело при полировке стекла и кварца, значительно меньше тех сил, которые нужны для реализации пластических явлений в этих веществах. Это возражение могло бы окончательно уничтожить теорию, если бы можно было доказать числом, что в процессе полировки мы на самом деле не имеем напряжений, способных производить пластические деформации. Трудности численно подойти к решению этого вопроса заключаются в определении той действительной поверхности, по которой соприкасаются полировальник и обрабатываемый предмет. Мы полагаем, что эта поверхность, особенно при полировке наклепом со снятием стружек, во многие тысячи раз меньше кажущейся поверхности соприкосновения предмета и полировальника, ибо действительное касание происходит на концах зерен абразива и на вершинах бугорков шлифованной поверхности. Раз дело обстоит так, то при общей тангенциальной силе, которая все же измеряется килограммами, и действительной поверхности соприкосновения, которая должна измеряться, может быть, долями квадратного миллиметра, возможны очень большие напряжения. Ниже при описании процесса полировки камня на ободе оловянного диска мы еще вернемся к этому вопросу.

Большое значение для теории полировки имеет вопрос о роли твердости абразива. Так как для снятия стружки совершенно необходимо, чтобы резец имел бóльшую твердость (по Моосу), чем обрабатываемый материал, то и от полировальных порошков мы должны требовать того же. Однако для полировки чистым наклепом это требование не является обязательным и должно быть заменено требованием достаточной прочности частиц полировальника, производящих наклеп. Само собой разумеется, что в тех случаях, когда в процессе полировки участвуют химические процессы, разрушающие поверхность обрабатываемого предмета, вопрос о твердости полировальника решается совершенно иначе.

Полировка металлов. Так как большинство металлов обладает большей пластичностью, чем стекло или кварц, то развитое выше представление может быть целиком перенесено и на металлы. Таким образом, в основе полировки металлов лежат наклеп и снятие стружки. Разница между шлифовкой металла на наждачном круге и полировкой на шлифовальном круге сводится к следующему. Для шлифовки употребляются круги с такой связкой, которая обеспечивает постоянную смену затупившихся зерен новыми. Грубые повреждения поверхности металла, производимые отделяющимися зернами абразива, при этом нисколько не вредят, а скорее способствуют шлифовке. Весь процесс рассчитан на то, чтобы в единицу времени было сработано возможно большее количество металла. Если при больших скоростях круга наряду с резанием

происходит и выдирание частиц металла, то и это отнюдь не мешает делу. При полировке металла мы ставим себе цели почти диаметрально противоположные. Так как при полировке количество металла, снимаемого с поверхности, должно быть минимально, повреждения же поверхности оторвавшимися зернами не должно быть совсем, а в равной мере не должно быть и выдирания частиц, то в полировальных кругах зерна абразива должны быть очень прочно закреплены. Засаливание круга, являющееся помехой при шлифовке, становится целью при полировке. Хорошей иллюстрацией правильности этих воззрений служит работа всухую на войлочных кругах, поверхность которых предварительно была покрыта смесью жидкого столярного клея с наждаком и высушена. Как известно, столярный клей, обладая малой твердостью царапания, имеет очень большую прочность на разрыв и большую клейкость, позволяющую ему необычайно прочно держать в себе зерна наждака. Поверхность железа, обработанная таким кругом, очень быстро приобретает блеск.

Выше мы говорили, что осуществить полировку стекла или кварца чистым наклепом практически не удается. Для металлов, особенно тех, которые обладают большой пластичностью, это оказывается вполне возможным и широко применяется в процессе лощения с помощью гладко полированных стальных пластин с закругленной поверхностью. Роль смазки в данном случае сводится к уменьшению трения между лощилом и обрабатываемым предметом и к устранению прилипания между ними, которое может, как уже нам известно, привести к выдиранию частиц металла и к порче его поверхности.

В заключение мы еще должны отметить, что при полировке металлов значительно больше, чем при полировке стекла или камня, приходится уделять внимания химическим процессам на поверхности, так как металлы в большинстве обладают большей реакционной способностью, чем соли и окислы.

Сухая полировка. Наилучшим подтверждением всякой теории является применение ее на практике. Ниже мы опишем ряд методов полировки кварца, стекла и металлов, которые были нами придуманы на основании вышеизложенных теоретических представлений и проверены на опыте.

Возможность сухой полировки без абразива на полировальнике менее твердом, чем обрабатываемый предмет, можно иллюстрировать полировкой кварца на матовом стекле. Для этого хорошо подготовленную мокрой шлифовкой кварцевую пластинку помещают на чистую, лучше свежематированную, поверхность толстого зеркального стекла и водят ею медленно, но с довольно сильным нажимом по поверхности стекла. Нажим, однако, не должен переходить известного предела, за которым начинается прилипание кварца к стеклу и, как следствие прилипания, появление рваных царапин выдирания. Уже после нескольких штрихов на поверхности кварца можно заметить появление блеска, кото-

рый при некотором навыке к работе может быть доведен до степени, отвечающей совершенной полировке. Неудобство метода заключается в упомянутом прилипании кварца к стеклу, чему благоприятствует, кроме чрезмерного нажима, еще и то небольшое количество сработанного стекла, которое забивает промежутки между бугорками полировальника. Этот метод полировки не может иметь широкого практического значения, особенно для точной полировки, по целому ряду причин, из коих главнейшая — довольно быстрое снашивание поверхности полировальника и необходимость возобновления ее полирующей способности новой грубой шлифовкой. Зато теоретический интерес этого метода несомненен, ибо в нем мы имеем дело с таким случаем полировки, когда о роли в ней химических процессов можно говорить лишь с большой натяжкой особенно, если принять во внимание еще и то обстоятельство, что полировка кварца на матовом стекле происходит нисколько не хуже и после предварительного его нагревания, т. е. после удаления с поверхности влаги.

Для окончательного решения вопроса о том, не играют ли все же известной химической роли самые ничтожные следы адсорбированной поверхностью стекла влаги, следовало бы поставить опыт полировки кварца на подогретом стекле в вакууме. Если наши взгляды на полировку верны, то никакого изменения в процессе полировки в этих условиях наблюдаться не должно. Обратный результат говорил бы в пользу химической теории.

В только что описанном способе полировки роль закрепленных в полировальнике зерен играли острые бугорки свежематированного стекла. При употреблении полировальных порошков необходимо прежде всего позаботиться о том, чтобы их зерна были возможно крепче связаны с полировальником. Два вещества особенно выделяются своей способностью удерживать на своей поверхности порошки, это канифоль и столярный клей. Вот почему канифоль издавна употребляется для изготовления полировальников, входя в полировальную смолу в качестве одной из главных составных частей. В чистом виде канифоль, однако, не может быть употреблена для изготовления полировальника благодаря своей хрупкости и малой механической прочности на разрыв. Что касается столярного клея, то он до сих пор не употреблялся при полировке стекла и камня потому, что существовало убеждение в том, что этот процесс должен производиться в присутствии воды, что, конечно, несовместимо с употреблением столярного клея, как средства для удержания зерен абразива в полировальнике. Нам пришло в голову применить столярный клей для сухой полировки стекла и камня. Мы осуществили эту идею следующим образом. Тончайшая папиросная бумага наклеивается жидким столярным клеем, содержащим в себе некоторое количество порошка окиси хрома, на поверхность матового зеркального стекла. Когда бумага высохнет, на ней можно производить полировку без добавления каких-либо смазок. Периодически

на поверхность бумаги наносится небольшое количество свежей окиси хрома, которая перед полировкой крепко втирается в проклеенную бумагу небольшим курантом во избежание образования царапин на полируемом объекте. Если последний не имеет острых углов и ребер, которыми при неосторожной работе можно повредить поверхность бумаги, то полировальник может служить очень долго. В этом процессе бумага играет двоякую роль: с одной стороны, она дает возможность нанести на матовое стекло тонкий равномерной толщины слой клея, с другой — она способствует своими волокнами лучшему удержанию зерен окиси хрома на месте. Способ полировки на клеевой бумаге настолько прост, что его смело можно рекомендовать применять на практике, по крайней мере, в тех случаях, когда от формы полируемой поверхности не требуется большая точность. Сторонники химической теории полировки полагают, что в данном случае мы не имеем дела с сухой полировкой, ибо в клее всегда содержится значительное количество влаги, которая может оказывать химическое действие на полируемый предмет. Мы не можем, конечно, отрицать возможность такого действия, пока еще не доказанного, но полагаем, что оно никак не может помешать абразивным зернам при сильном нажиме производить на объект механическое действие. Вопрос о применении только что описанного способа для точной оптической полировки требует дальнейшей исследовательской работы.

В заключение мы остановимся еще на третьем придуманном нами способе полировки, применимом в равной мере к стеклу, кварцу и металлам. Мы имеем в виду сухой способ полировки на фибре с окисью хрома. Рассматривая фибру в лупу, можно видеть, что она состоит из тончайших спутанных между собою волокон. По существу, фибра есть тот же войлок, только волокна ее тоньше и спрессованы они между собою более плотно. Такая структура фибры должна, очевидно, быть очень подходящей для удержания полировальных порошков. Опыт подтвердил эти ожидания. Не вдаваясь в подробности изготовления полировальной чашки из фибры, ее проточки на токарном станке, ее шлифовки и т. д., скажем только, что затравленная окисью хрома и водой фибра после просушки и предварительной протирки поверхности полировальника курантом может прекрасно полировать стекло, кварц и металлы. Полировка производится прямыми не быстрыми штрихами с большим нажимом на обрабатываемый предмет. Для не очень точных работ способ вполне применим уже и теперь; для точной полировки он требует дальнейших усовершенствований, касающихся устройства самой полировальной чашки.

Полировка камня на олове. Для подтверждения наших воззрений на процесс полировки нам остается еще рассмотреть способ полировки на олове, применяемый гранильщиками драгоценного камня и яшмоделами. Мы уже говорили в начале этой статьи, что олово при всей своей мягкости не может прочно удер-

живать абразивных зерен, если на поверхности олова не сделаны насечки. Поэтому одним из самых важных условий хорошей и быстрой полировки на олове является умение сделать эти насечки. Другое условие — это полировка «впросух», иначе абразивные зерна будут вымываться водой даже и из насечек. Третье условие — большой нажим. При полировке больших поверхностей нажим должен быть иногда настолько велик, что приходится отказываться от полировки всей поверхности сразу и вести ее не на плоской поверхности круга, а на его ободе. Для этого обод закругляется, насекается и затравляется полировальным порошком (трепелом, окисью хрома и т. д.) с водой. Полировка производится штрихами, причем в каждый данный момент полируемая поверхность прикасается к диску только в одной точке, вернее, по очень малой поверхности; давление, которое при этом получается, может достигать огромных значений — в несколько тысяч и даже десятков тысяч килограммов на квадратный сантиметр. Совершенно ясно, что при таких давлениях можно ожидать появления пластических деформаций в поверхностном слое полируемого предмета. Быстрота, с которой умелые мастера осуществляют полировку яшмы этим способом, и совершенство получаемого блеска делают этот способ незаменимым для полировки яшмы и других твердых камней.

Заключение и выводы. В заключение нам хотелось бы отметить, что наша работа находится в полном согласии с работами целого ряда авторов, занимающихся исследованием структуры полированной поверхности электронографическим методом [3]. На основании этих работ в настоящее время едва ли можно сомневаться в существовании на полированной поверхности того, что мы называли в нашей работе общим именем наклепа. Так, для золота и меди оказалось, что самый верхний слой их толщиной до 50 Å аморфен или практически аморфен и состоит из отдельных неориентированных молекул или из чрезвычайно маленьких перепутанных кристаллов. Следующий за ним в глубину слой толщиной около 100 Å состоит из ориентированных по (110) кристаллов. Даже на глубине 200 Å кристаллы не ориентированы, но следы наклепа можно констатировать до глубины в 10 000 Å. Другими словами, общая глубина наклепа доходит до одного микрона, т. е. имеет тот же порядок, что и оставляемый на полировку запас.

В нашей работе мы совершенно не касались вопросов химической полировки, так как ими занимается школа академика И. В. Гребенщикова, а в равной мере и вопросами терминологии и, в частности, вопросом о том, что следовало бы называть шлифовкой и что полировкой, хотя эти вопросы у нас возникали, например, тогда, когда нам приходилось сравнивать между собой процесс мокрой шлифовки стекла со шлифовкой металлов на абразивных кругах.

Все изложенное может быть сведено к следующим тезисам.

1. В процессах шлифовки и полировки твердых тел значительную роль играют механические явления на поверхности обрабатываемого предмета.

2. При шлифовке и полировке приходится учитывать четыре основных механических свойства твердых тел: пластичность, хрупкость, твердость и упругость.

3. Всякое твердое тело в зависимости от способа воздействия на него становится то хрупким, то пластичным.

4. Процесс шлифовки и полировки с чисто механической стороны может быть сведен к четырем элементарным процессам: выкалыванию, отрыванию, снятию стружки и наклепу.

5. Окончательный вид обработанной поверхности зависит от преобладания того или иного из этих процессов и от их интенсивности (размеров отделяемых зерен или глубины наклепа).

6. В мокрой шлифовке стекла и камня абразивной крупкой основную роль играет процесс выкалывания.

7. Главнейшее условие правильной шлифовки стекла и камня — свободное и быстрое вращение абразивных зерен.

8. В шлифовке металлов на абразивных кругах главнейшую роль играет процесс снятия стружки острыми концами абразивных зерен.

9. Главнейшее условие правильной шлифовки металлов на кругах состоит в остроте, твердости и прочности абразивных зерен и в автоматическом выпадении затупившихся зерен из круга.

10. В мокром способе полировки стекла, камня и металлов основную роль играют процесс снятия стружки и наклеп.

11. Главнейшие условия правильной полировки — закрепление в полировальнике зерна абразива, большой нажим и малая скорость движения полировальника относительно обрабатываемого предмета.

12. Правильность развиваемых нами положений подтверждается возможностью сухого полирования на чистом матовом стекле, на бумаге, проклеенной столярным клеем с окисью хрома, и на сухой фибре с окисью хрома.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. В. Гребенщиков.* Социалистическая реконструкция и наука. 1935, вып. 2, 22.
2. *В. Д. Кузнецов.* Физика твердого тела. Томск, «Кубуч», 1932, 305.
3. *П. Д. Данков.* Природа, 1935, № 8, 1—8.

ПРИБОР ДЛЯ ТОЧНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ В КВАРЦЕ (КОНОМЕТР)[1]

Требования, предъявляемые современной радиотехникой к пьезокварцевым пластинкам косого среза, заставляют искать новые методы нахождения координатных осей в кристалле кварца, более точные и удобные, чем те, которыми пользовались до сих пор. Оптическая ось определялась до сего времени либо с помощью поляризационного микроскопа в сходящемся поляризованном свете, либо старым прибором Нёрренберга (коноскоп), либо рентгеновскими лучами по способу лауэграмм. В последнее время встречаются указания также и на применение рентгеновской спектроскопии для ориентировки пьезокварцевых пластин [2].

Поляризационный микроскоп при наличии некоторых дополнительных устройств вполне пригоден для работы с тонкими (1—5 *мм*) пластинками, но он становится абсолютно неприемлемым для больших блоков толщиной в 25 *мм* и более, так как ни осветительное устройство микроскопа, ни его объективы, окуляры и столик не рассчитаны на подобные объекты. Не менее важны и другие соображения (малая точность, дороговизна, неудобства пользования в заводской обстановке), делающие микроскоп мало пригодным для интересующей нас работы.

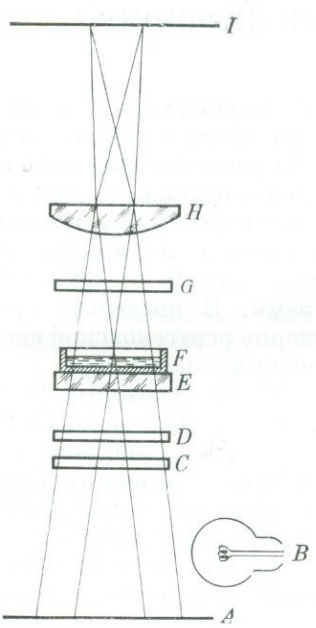
Прибор Нёрренберга, рассчитанный для качественного наблюдения осевых фигур кристаллов, для нахождения оптической оси с требуемой точностью совершенно непригоден.

Метод Лауэ в принципе может дать вполне удовлетворительные результаты. Однако в сочетании с методом стереографической сетки, т. е. в том виде, как им пользовались до сих пор, он также мало пригоден опять-таки вследствие малой точности. Кроме того, пользование рентгеновскими лучами требует специальной лаборатории, дорогой аппаратуры и сопряжено с рядом специальных требований и условий.

Указанные обстоятельства заставили нас заняться разработкой новой оптической аппаратуры, лишенной перечисленных недостатков и работающей с достаточной точностью.

Принцип устройства прибора. Вместо осветительной системы из нескольких линз, употребляемой в коноскопах, мы применяем лист белой бумаги *A* (рис. 1), освещаемый несколькими лампами *B*. Отраженные от бумаги лучи белого света проходят через красный стеклянный светофильтр *C*. Выше него помещается поляроид *D*. Затем следует испытуемый кварцевый блок *E*, который предполагается вырезанным приблизительно перпендикулярно к оптической оси кристалла. К верхней поверхности кварцевого блока приклеивается каплей кедрового масла сосудик *F* с плоским

[1] Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР, 1939, вып. 1, с. 51—56.
[2] *J. Koga.* Proc. IRE, 1936, **24**, 510.



◂ **Рис. 1.** Принципиальная схема конометра

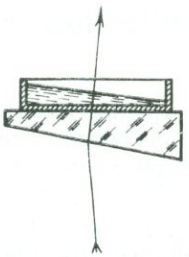


Рис. 2. Ход луча по оптической оси кварца при правильной установке

дном, содержащий кедровое масло. Выше располагаются второй поляроид G и собирательная линза H; наконец, в главной фокусной плоскости линзы помещается матовое стекло I с начерченным на нем трафаретом из нескольких (3—5) концентрических колец.

В этих условиях при скрещенных (поставленных на темноту) поляроидах на матовом стекле I получается коноскопическая картина кварца, состоящая, как известно, из ряда концентрических светлых, в нашем случае — красных, и темных колец и темного креста, размытого в середине вследствие вращения плоскости поляризации. Если трафарет установлен правильно и оптическая ось кварцевого блока ориентирована строго перпендикулярно к плоскости матового стекла, то кольца коноскопической картины должны быть концентричны кольцам трафарета.

При выборе единственной линзы H прибора нужно иметь в виду следующие обстоятельства. Чем больше фокусное расстояние линзы, тем больше коноскопическая картина и тем менее она ярка. Отверстие линзы должно быть достаточно велико, чтобы пропускать весь свет, прошедший через оба поляроида в кристалл.

Верхний поляроид G монтируется так, чтобы его можно было поворачивать около вертикальной оси на угол в 90°. В результате такого поворота изменяется диаметр первого (внутреннего) кольца коноскопической картины, что облегчает ее установку по трафарету.

Весьма существенную роль в приборе играет сосуд F с кедровым маслом. Если матовое стекло I установлено горизонтально по уровню, то поверхность кедрового масла всегда будет строго параллельна плоскости трафарета. Так как показатель преломления кедрового масла близок к показателю преломления кварца, то при строго вертикальной установке оптической оси кварца луч света (рис. 2), идущий в кварце по оптической оси, выйдет из кедрового масла без преломления и пересечет трафарет точно в центре независимо от направления верхней и нижней граней кварца. Сказанное в известной мере относится также к лучам, наклоненным к оптической оси под малыми углами, а это означает, что сосуд с кедровым маслом позволяет определять направление оптической оси кварца по первому кольцу трафарета без введения поправок, которые при отсутствии сосуда с жидкостью могут достигать довольно значительной величины. Например, если оптическая ось кварца образует с нормалью верхней плоскости кварца угол в 5°, то поправка будет около 2,5°.

Описываемый прибор оказалось возможным построить только благодаря большим отверстиям поляризатора D и анализатора G, роль которых у нас исполняли поляроиды диаметром около 6 и 4 *см*. До изобретения поляроида осуществить прибор не удалось бы вследствие дороговизны николей того же диаметра. Из нескольких испытанных нами светофильтров C наиболее удачным оказалось фотографическое красное стекло. В качестве осветителя A может служить любая белая бумага, освещаемая электрическими лампами.

Техническое выполнение прибора. Нижняя часть прибора представляет собой ящик A (рис. 3), внутри которого расположено восемь стоваттных ламп B для освещения листа белой бумаги. В боках ящика устроены отверстия для охлаждения. В верхней доске ящика сделано широкое отверстие C, в котором закреплены светофильтр и нижний поляроид. Сверху доски положено хорошо шлифованное зеркальное стекло D. Свободная поверхность его устанавливается строго горизонтально с помощью уровня и трех установочных винтов E, расположенных внизу ящика. Зеркальное стекло имеет три отверстия для закрепления трех металлических стоек F, поддерживающих сверху второе зеркальное стекло G, которое также должно быть установлено строго горизонтально. К стойкам с помощью передвижных клемм прикреплены верхний поляроид H и линза I.

На верхнее зеркальное стекло кладется трафарет K рисунком вниз. Трафарет представляет собою круглое тонкое матированное стекло; чертеж нанесен на матовой стороне обыкновенной тушью. Для устранения лишнего света верхнее стекло снизу защищено картонной диафрагмой L. Кроме того, прибор имеет два защитных конуса M, из которых верхний употребляется только во время работы при дневном свете; при пользовании прибором в темной комнате верхний конус снимается.

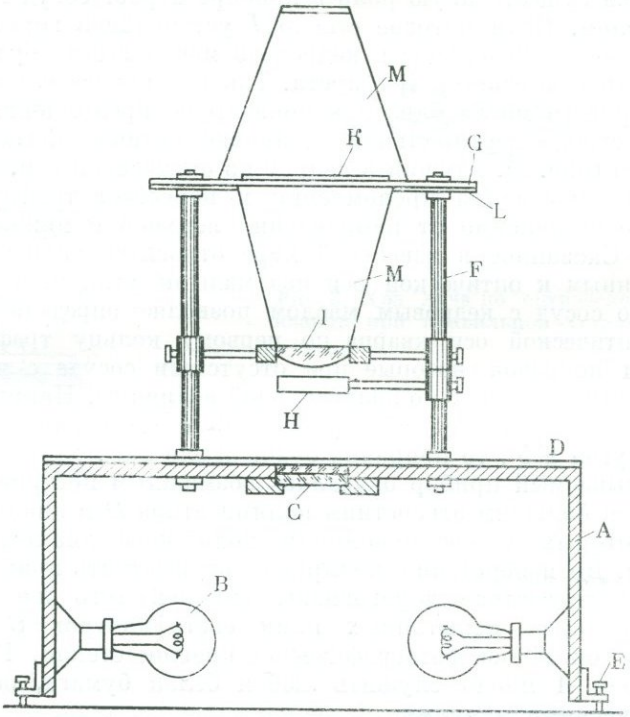


Рис. 3. Устройство конометра

Существенной деталью прибора является столик для ориентировки кварца, помещаемый между нижним зеркальным стеклом и верхним поляроидом (рис. 4). Столик состоит из основной круглой плиты A с широким отверстием B, трех установочных винтов C, закрепляемых контргайками, и трех переставных клемм D для зажимания блоков кварца E.

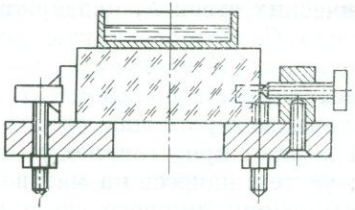


Рис. 4. Установочный столик

Сосудик F для кедрового масла изготовляется из стеклянного кольца высотой около 10 *мм*, вырезаемого из широкой стеклянной трубки ($d \approx 60$ *мм*), и плоскопараллельного стекла толщиной

1—2 *мм*. Кольцо приклеивается к стеклянной пластинке бакелитовым лаком.

Установка прибора. Установка прибора сводится к следующим операциям.

1. Выверяют нижнее зеркальное стекло по уровню, пользуясь установочными винтами ящика *A* (см. рис. 3).

2. Устанавливают по уровню верхнее зеркальное стекло подкладыванием под шайбы стоек *F* бумажных кружков.

3. Производят установку линзы *I* так, чтобы верхняя поверхность верхнего зеркального стекла *G* отстояла от линзы *I* на величину ее главного фокусного расстояния; для этого служат передвижные клеммы на стойках *F*.

4. Располагают верхний поляроид *H* непосредственно под линзой в скрещенном положении по отношению к нижнему поляроиду.

5. Тонко шлифованный или слегка прополированный блок кварца, вырезанный приблизительно перпендикулярно к оптической оси (ошибка 2—3°), прочно зажимается на столике для ориентировки (см. рис. 4).

6. На верхнюю поверхность кварца приклеивают кедровым маслом сосудик с той же жидкостью.

7. Столик с кварцем помещают на нижнее зеркальное стекло *D* (см. рис. 3) под верхним поляроидом, зажигают свет, кладут на верхнее зеркальное стекло трафарет *K* так, чтобы его кольца расположились концентрично с кольцами интерференционной фигуры.

8. Поворачивают установочный столик около вертикали примерно на 180°. В результате этого поворота интерференционная картина сместится и не будет уже концентрична с кольцами трафарета.

9. Величину смещения, определяемую на глаз, устраняют наполовину смещением трафарета и окончательно установочными винтами столика.

10. Повторяют две предыдущие операции до тех пор, пока при вращении столика интерференционная картина не будет оставаться в покое, после чего закрепляют установочные винты столика контргайками.

11. Шлифуют обе стороны блока перпендикулярно к оптической оси (см. ниже) и вновь повторяют, если окажется нужным, те же две операции, после чего трафарет может быть окончательно закреплен на зеркальном стекле несколькими каплями синдетикона (с краев).

Определение оптической оси в блоке кварца. Из предыдущего ясно, что одновременно с установкой прибора производилось и определение оси в блоке кварца. Когда же установка произведена, нахождение оптической оси в новом блоке кварца сводится к закреплению блока на столике, приклеиванию сосудика с кедровым маслом, поворачиванию установочных винтов столика

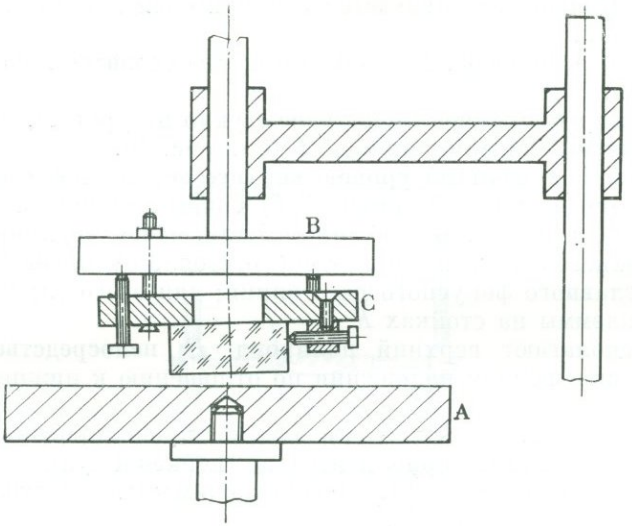


Рис. 5. Эскиз устройства станка для точной шлифовки кварцевых блоков, перпендикулярных к оптической оси

до получения концентричности интерференционной фигуры с кольцами трафарета, закреплению винтов контргайками и шлифовке грани кварца перпендикулярно к оптической оси (см. ниже).

Точная шлифовка блоков перпендикулярно к оптической оси. Оптическая ось может считаться найденной, если в блоке точно перпендикулярно к ней отшлифована одна плоскость. Это можно осуществить различными способами. При массовой работе следует иметь специальный станок, состоящий из вращающегося шлифовального диска A (рис. 5) и параллельного ему диска-суппорта B, к которому тем или иным способом прикрепляется установочный столик C с кварцем после того, как с помощью описанного выше прибора произведена ориентировка оптической оси. Такой станок в настоящее время проектируется и будет в скором времени построен.

За отсутствием специального станка точная шлифовка может быть произведена на обыкновенном шлифовальном станке для камней с помощью весьма простого контрольного устройства, состоящего из горизонтально установленной выверочной плиты и круглого уровня. Для этого после ориентировки ставят треногу с кварцем на выверочную плиту, накладывают на верхнюю грань блока (после удаления сосудика с кедровым маслом и чистки поверхности кварца) уровень и по смещению пузырька определяют, с какого края блока следует производить шлифовку, после чего производится сама шлифовка. Повторяя проверку верхней плоскости кварца уровнем, осторожной шли-

фовкой можно добиться, чтобы пузырек уровня при наложении последнего на блок становился в нулевое положение. Когда это достигнуто, верхняя грань кварца перпендикулярна к оптической оси. Для проверки полученного результата блок снимают со столика, шлифуют вторую его плоскость на параллельность к первой и полученный таким образом препарат после слабой полировки одной стороны (или просветления ее наложением плоскопараллельного стекла с каплей кедрового масла) кладут уже без треноги и сосудика с кедровым маслом в аппарат для ориентировки. Концентричность колец трафарета с интерференционной фигурой свидетельствует о правильности произведенной работы.

Первые опыты, проделанные нами с прибором, в котором еще не были устранены некоторые недочеты, показали, что добиться точности ориентировки оптической оси в 5′ не представляет никаких затруднений. Надо полагать, что по устранении всех недочетов прибор может давать точность порядка двух-трех минут.

Результаты. 1. Построен прибор для ориентировки оптической оси кварца с точностью до 5′, которая может быть еще увеличена после устранения всех недочетов.

2. Принцип устройства и технического осуществления прибора показан на рис. 1—4.

3. После того как произведена ориентировка блока, шлифовка верхней его грани перпендикулярно к оптической оси может быть осуществлена на специальном станке (см. рис. 5) или на обыкновенном шлифовальном станке при контроле верхней грани блока с помощью круглого уровня.

ПРИБОР ДЛЯ ТОЧНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЕЙ КВАРЦА МЕТОДОМ ТРАВЛЕНОЙ ЯМКИ[1]

Описанный в предыдущей статье прибор (конометр) позволяет определять только оптическую ось кварца. Что касается электрических осей, то определение их до сих пор производилось несколькими приборами. В хорошо образованных кристаллах электрические оси находят непосредственно по ребрам граней ромбоэдров и призмы; как известно, эти ребра параллельны электрическим осям. В срезах, перпендикулярных к оптической оси, электрические оси можно находить по фигурам удара [1—5]. В произвольных срезах электрические оси могут быть найдены исследованием лауэграмм [6] с помощью сетки Вульфа или электрометрическим исследованием поверхности полусферической ямки в кварце [7]. Наряду с указанными методами применялся также

[1] Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР, 1939, вып. 1, с. 57—63.

и старый способ опыления Кундта, усовершенствованный Э. К. Лапинским (не опубликовано). В последнее время была сделана попытка использовать для определения электрических осей астеризм фигур травления [8].

Все перечисленные способы определения электрических осей кварца не могут удовлетворить современную технику изготовления пьезокварцевых препаратов вследствие недостаточной точности получаемых результатов, что и побудило нас построить

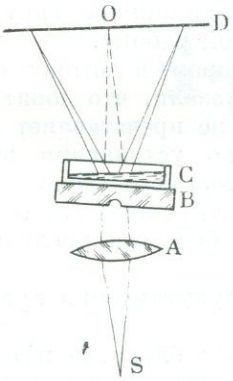


Рис. 1. Принципиальная схема устройства прибора

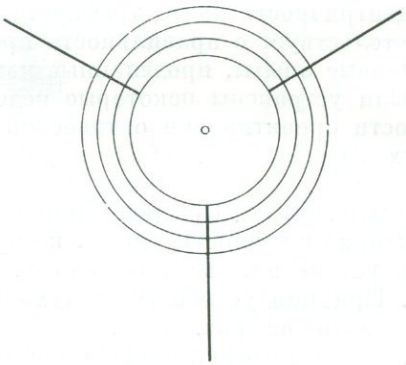


Рис. 2. Трафарет

описываемый ниже новый прибор, который может быть пригоден также и для нахождения оптической оси кварца [1].

Принцип устройства прибора. В основу устройства нашего прибора мы кладем то же явление астеризма фигур травления, которое было использовано Грамоном для аналогичной цели и детально описано нами в одной из статей в этом выпуске Трудов нашей лаборатории. Существенным отличием нашего метода от метода Грамона являются применение травленой ямки, обратное расположение фигур травления (в сторону к источнику света, а не наоборот) и использование сосудика с кедровым маслом.

Внизу прибора имеем точечный источник света S (рис. 1). Над ним расположена собирательная линза A. Выше нее помещен блок кварца B с травленой плавиковой кислотой ямкой, обращенной книзу. К кварцу прикреплен каплей кедрового масла сосудик C, содержащий ту же жидкость. Еще выше, в фокусной плоскости

[1] Нам известно, что за границей (США, Япония) для определения осей кварца употребляется метод рентгеновской спектроскопии. Опубликованных работ по этому предмету мы не знаем. У нас в СССР также делались попытки применить спектроскопию рентгеновских лучей; соответствующие работы, надо полагать, скоро появятся в печати.

линзы, расположено горизонтально зеркальное стекло O, с наложенным на него матовым трафаретом, представляющим собой ряд концентрических окружностей с тремя радиальными прямыми, пересекающимися под углом в 120° (рис. 2). Прямая SO, соединяющая сопряженные точки линзы, должна быть перпендикулярна к зеркальному стеклу. Если блок кварца вырезан приблизительно перпендикулярно к оптической оси (с этим именно случаем приходится чаще всего иметь дело в производстве), то на матовом трафарете изобразится ранее описанная нами фигура астеризма (рис. 3). Поворачивая блок около горизонтальных и вертикальных осей, можно привести картину астеризма в надлежащее положение по отношению к трафарету, что в конечном счете и нужно для точного определения как оптической, так и электрических осей.

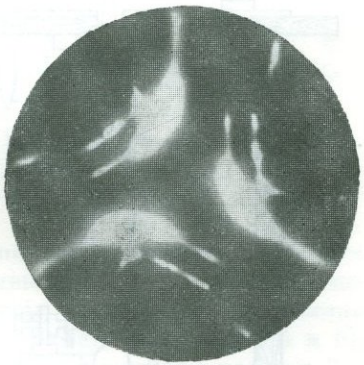


Рис. 3. Фотография фигуры астеризма в свете, проходящем через травленую ямку

Техническое выполнение прибора. Нижняя часть прибора представляет собой стол (рис. 4), покрытый зеркальным стеклом B с отверстием в середине и имеющий на ножках три установочных винта, не показанных на рисунке. Под крышкой стола расположен коллиматор C, внутри которого находятся две линзы D_1 и D_2, диафрагма E и автомобильная лампочка F. Обе линзы связаны с установочными приспособлениями (не показанными на чертеже), позволяющими передвигать линзы вдоль оси коллиматора на расстояние порядка одного сантиметра. Диафрагма имеет движение в горизонтальной плоскости и закрепляется в определенном положении зажимным винтом (не показанным на рисунке); лампа может передвигаться в вертикальном и горизонтальном направлениях и может быть повернута на любой угол около горизонтальной оси. Верхняя часть прибора представляет собой треногу с колонками G, зеркальным стеклом H, на котором лежит матовое стекло I, с начерченным на нем трафаретом, лицевой стороной вниз. Если прибор предназначается для определения оптической оси, то блок кварца зажимается на столике с тремя установочными винтами, описанном нами в предыдущей статье. Для определения только электрических осей в блоке, шлифованном точно перпендикулярно к оптической оси, служит особое приспособление, помещаемое на зеркальное стекло и отдельно изображенное на рис. 5. Это приспособление состоит из линейки A, прикрепленной к зеркальному стеклу стола, угольника B, одна сторона которого может скользить по линейке и может быть закреплена в любом

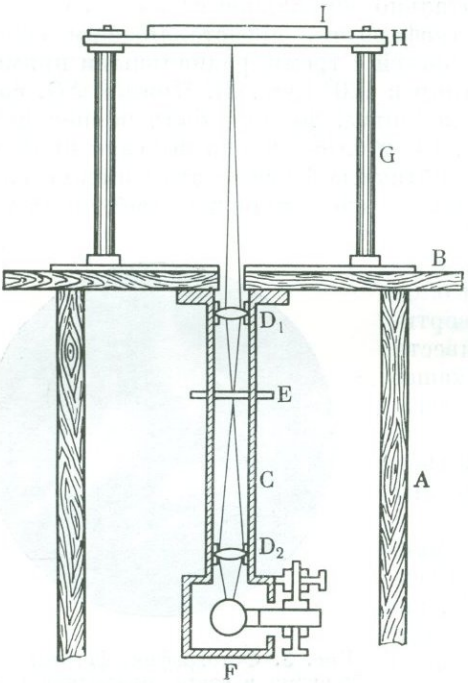


Рис. 4. Устройство прибора

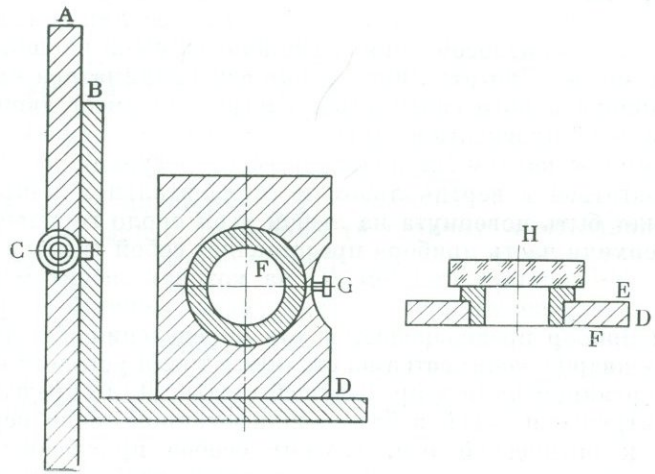


Рис. 5. Приспособление для ориентировки электрических осей

положении, занимаемом C, поворотного столика D. Последний состоит из квадратной металлической плитки E с отверстием ($d \approx$ $\approx$ 6—8 *см*), в которое вставлено поворотное кольцо F, зажимаемое в определенном положении винтом G. На верхней поверхности кольца наклеивается исследуемый блок кварца H, вышлифованный предварительно строго перпендикулярно к оптической оси и имеющий на нижней поверхности заготовленную травленую плавиковой кислотой полусферическую ямку.

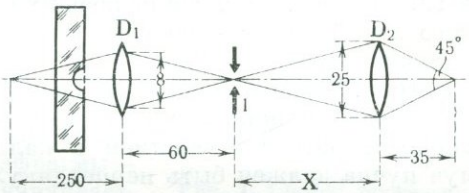


Рис. 6. Схема к расчету прибора

Расчет прибора. При расчете прибора приходится исходить из определенного опытным путем наивыгоднейшего, т. е. обеспечивающего должную величину фигуры астеризма, расстояния (250 *мм*) между верхней линзой D_1 и трафаретом I (рис. 4 и 6). Диаметр полусферической ямки в кварце принимаем равным 2—3 *мм*. При меньшем диаметре яркость фигуры астеризма будет слишком мала, при большой ямке точность прибора будет меньше. Для наилучшего использования света желательно, чтобы сходящийся пучок лучей, вступающих в ямку, был лишь немного шире ямки, поэтому полезное отверстие линзы D_1 должно быть порядка 8 *мм*. С той же целью расстояние от источника света F до нижней линзы D_2 следует взять возможно меньше (35 *мм*). Свет от нити лампы должен быть фокусирован в отверстие диафрагмы E, поэтому диаметр ее (около 1 *мм*) не может быть больше ширины изображения нити. Остается еще задать диаметр нижней линзы D_2 и расстояние от верхней линзы D_1 до диафрагмы E. При максимальном допускаемом конструкцией угле $\alpha = 45°$ диаметр линзы должен быть около 25 *мм*. Расстояние D_1E желательно взять предельно большое, так как при этих условиях изображение диафрагмы будет меньше и ярче, однако чрезмерное увеличение расстояния D_1E привело бы к слишком большой длине всего коллиматора; мы выбрали $D_1E = 60$ *мм*. После изложенного мы можем написать уравнения

$$X/25 = 60/8, \quad 1/F_1 = 1/250 + 1/60, \qquad 1/F_2 = 1/X + 1/35,$$

в которых X означает расстояние ED_2, а F_1 и F_2 — главные фокусные расстояния верхней и нижней линз. Решая эти уравнения, будем иметь: $X = 188$, $F_1 = 48$, $F_2 = 30$ *мм*. Для длины трубы L имеем $L = 60 + 188 + 35 = 283$ *мм*.

Установка прибора. Устанавливают зеркальные стекла B и H по уровню (рис. 4). На отверстие в зеркальном стекле B кладут листок кальки и добиваются последовательными перемещениями лампы F, линзы D_1 и диафрагмы E наиболее яркого и равномерного освещения кальки. Устраняя последнюю, получают изображение диафрагмы на экране I; точной фокусировки добиваются передвижением линзы D_1 вдоль трубы. Убирают трафарет и на его место кладут зеркальце посеребренной стороной вниз, а на отверстие стекла помещают листок кальки с круглым отверстием в 1,0—1,5 *мм*. Если оси падающих на зеркальце и отраженных от него лучей не совпадают, то при горизонтальном передвижении кальки можно получить два светлых пятна, концентричных с отверстием. В противном случае смещают немного в сторону диафрагму и, если нужно, лампу и добиваются, чтобы оба пятна были концентричны с отверстием в кальке, после чего центральный луч пучка должен быть перпендикулярен к плоскости трафарета.

Проще и точнее осуществляется установка оптической оси прибора на перпендикулярность к трафарету с помощью блока кварца с травленой ямкой, заранее точно ориентированного строго перпендикулярно к оптической оси кристалла прибором, описанным в предыдущей статье. Для этого совмещают центр трафарета I с изображением диафрагмы, кладут блок кварца на стекло B ямкой вниз на пути лучей. Если после этого картина астеризма окажется концентричной с кругами трафарета, то оптическая ось прибора установлена правильно; в противном случае нужно разложить ошибку на две части: одну ее половину исправляем смещением трафарета, другую — смещением диафрагмы E. Устраняя кварц, смотрим, совпадает ли изображение диафрагмы с центром трафарета; если совпадения нет, то повторяем снова всю процедуру еще один или два раза, после чего центр трафарета при отсутствии блока будет совпадать с изображением диафрагмы и картина астеризма при наличии кварца будет концентрична с кольцами трафарета, что и служит признаком правильности ориентировки оси прибора. Надо полагать, что для установки вместо ориентированного блока кварца будут пригодны также выбитые по спайности плоскопараллельные пластинки других кристаллов с фигурами травления в полусферической ямке.

После установки оси прибора необходимо поставить одну из трех радиальных прямых трафарета (см. рис. 2) параллельно той стороне угольника B (см. рис. 5), к которой прикладывается столик D. Это можно осуществить, если с нижней стороны стекла H (см. рис. 4), приблизительно под центром трафарета, будет проведена царапина параллельно упомянутой стороне угольника. Мы осуществили это с помощью приспособления, отдельно изображенного на рис. 7. Оно состоит из второго угольника K с зажимом для алмазного карандаша L. Царапина на нижней поверхности верхнего стекла прибора проводится движением второго угольника вдоль требуемой стороны первого, как показано на рис. 7.

Чтобы установить окончательно трафарет, зажигают лампочку коллиматора и подставляют другую переносную лампу под стекло прибора. Тогда на трафарете будем видеть одновременно точечное изображение диафрагмы и тень царапины. Так как царапина отстоит от трафарета на расстоянии, равном толщине стекла, то перемещением переносной лампы можно добиться, чтобы тень царапины проходила точно через центр изображения диафрагмы. Когда это достигнуто, совмещаем центр трафарета с центром изображения диафрагмы, а один из радиусов диафрагмы — с тенью царапины. Этим и заканчивается установка прибора.

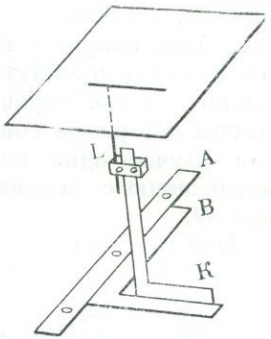


Рис. 7. Способ проведения на верхнем зеркальном стекле линии, параллельной одной стороне угольника

Определение оптической оси кварца. Как сказано выше, описываемый прибор предназначается главным образом для определения электрических осей в блоке кварца, вырезанном перпендикулярно к оптической оси, однако этот прибор пригоден и для точного определения оптической оси в блоке, вырезанном приблизительно перпендикулярно к оптической оси. Для этого блок с травленой ямкой закрепляют на столике с тремя установочными винтами, описанном в предыдущей статье. На блок приклеивается каплей кедрового масла сосудик с той же жидкостью. Пропуская свет из коллиматора через ямку, вращением установочных винтов столика добиваются концентричности фигуры астеризма с кольцами трафарета, не обращая внимания на совпадение радиальных линий трафарета с прямыми линиями фигуры астеризма. К этому и сводится определение оптической оси. Точность определения несколько ниже, чем в случае работы с прибором, описанным в предыдущей статье; мы оцениваем ее в 10′.

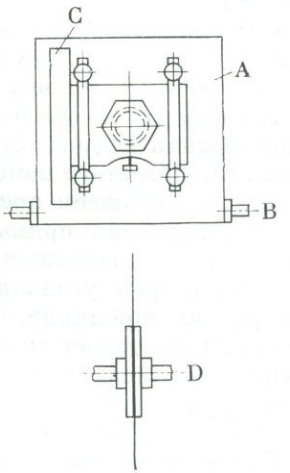


Рис. 8. Эскиз машины для распиловки ориентированных блоков на бруски

Определение электрических осей. Блок кварца *H*, вышлифованный точно перпендикулярно к оптической оси, приклеивается к верхней поверхности

поворотного столика D (см. рис. 5). Столик прикладывается к одной стороне угольника. Перемещая другую его сторону по линейке A, а столик — по первой стороне угольника, можно привести блок кварца в такое положение, при котором лучи света из коллиматора пройдут через травленую ямку кварца. Вращая кольцо F в его оправе, можно добиться, чтобы прямые линии фигуры астеризма совпали с радиальными линиями трафарета; в этом случае одна из электрических осей должна совпасть по направлению с линейкой A или с параллельной ей стороной столика D.

Чтобы распилить блок параллельно или перпендикулярно к электрической оси и одновременно параллельно оптической оси, зажимают кольцо столика винтом G и переносят все приспособление на суппорт алмазной пилы (рис. 8). Последний состоит из доски A, которая может наклоняться около оси B и перемещается вдоль нее. К доске прикреплена линейка C строго перпендикулярно к оси B; эта последняя должна быть точно параллельна оси вращения диска алмазной пилы. Приспособление с кварцем прижимается надлежащим боком к линейке и закрепляется двумя планками, как показано на рисунке. Наклоняя доску A до соприкосновения кварца с диском пилы и приводя последний во вращение, можно совершенно автоматически разрезать блок по требуемому направлению. Подробности устройства машины и способы ее выверки будут рассмотрены нами в другом месте.

Точную распиловку блока параллельно или перпендикулярно к электрической оси можно осуществить и без специального приспособления D (рис. 5), а также и без специального суппорта A (рис. 8). Для этого помещаем блок ямкой вниз на пути лучей коллиматора, вращаем препарат в горизонтальной плоскости взаимного совпадения прямых линий трафарета и фигуры, проводим на кварце карандашом линию приблизительно параллельно одной из сторон угольника B (рис. 5) и делаем пробный разрез кварца по этой линии. Прикладывая сторону разреза к угольнику, смотрим, совпадает ли фигура астеризма с трафаретом; если совпадения нет, исправляем ошибку шлифовкой плоскости распила при постоянном контроле прибором.

Мы описали здесь способ нахождения электрических осей в блоке, вышлифованном строго перпендикулярно к оптической оси, — это тот случай, с которым чаще всего приходится встречаться на практике. Применяя сосудик с кедровым маслом и столик с установочными винтами, можно определять электрические оси и независимо от оптической. Нетрудно также дать способы разрезки кварца под любыми углами к электрической и оптической осям при непосредственном контроле работы с помощью описанного нами прибора. Мы не будем, однако, специально останавливаться на этом предмете, полагая, что изложенных принципов вполне достаточно для того, чтобы читатель в случае надобности мог сам разработать эти способы.

Результаты. 1. Построен прибор для нахождения электрических и оптической осей в кварцевом блоке, вырезанном приблизительно перпендикулярно к оптической оси.

2. Точность работы прибора около 10′.

3. Принцип устройства, установки и практического использования прибора показаны на прилагаемых рис. 1—8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Шубников.* Природа, 1930, № 2, 205.
2. *A. Schubnikow.* Z. Kristallogr., 1930, **74**, N 1, 103.
3. *А. В. Шубников* (с сотр.). Руководство к изготовлению пьезокварцевых препаратов. Л., Изд-во АН СССР, Спр. техн. лит., 1931, 55 с.
4. *А. В. Шубников* (совм. с В. З. Бульванкером, Г. Г. Леммлейном, С. А. Тизенгаузеном, Е. В. Цинзерлинг). Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр, сер., 1935, вып. 6, 67.
5. *А. В. Шубников, Е. В. Цинзерлинг.* Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1933, вып. 3, 5.
6. *А. Н. Лямина.* Минеральное сырье, 1928, № 11/12, 800.
7. *А. В. Шубников, Г. Г. Леммлейн.* Патент № 14849. Вестн. Ком. по делам изобрет., 1930, № 3.
8. *A. de Gramont.* Recherches sur le quartz piésoélectrique. Paris, 1935.

ОБРАЗОВАНИЕ И РОСТ КРИСТАЛЛОВ

Рост кристаллов, сопровождающие его явления, наблюдения за растущим кристаллом, разработка способов выращивания кристаллов, формы роста кристаллов были в центре интересов Алексея Васильевича Шубникова всю его жизнь. Он был убежден сам и учил этому своих учеников, что, прежде чем изучать кристалл, его строение и свойства, надо самому вырастить этот кристалл, надо видеть и знать кристалл в целом, надо почувствовать, что влияло на кристалл в процессе его роста. Сам Алексей Васильевич был непревзойденным мастером выращивания кристаллов и в его кабинете всегда стояли сконструированные им самим установки с растущими кристаллами.

Многие из его работ по росту кристаллов — как опубликованные, так и неопубликованные — легли в основу его книги «Как растут кристаллы»,— первой в мире всеобъемлющей научно-популярной книги по росту кристаллов, изданной в 1935 г. Уместно вспомнить, что все рисунки в этой книге выполнены собственноручно самим автором. Поскольку эта книга сейчас готовится к переизданию, в настоящий сборник не включены многие основополагающие работы А. В. Шубникова по росту кристаллов, которые частично вошли в нее или в опубликованные позже книги «Образование кристаллов» (1947 г.), «Кристаллы в науке и технике» (1956, 1958 г.).

Раздел роста кристаллов в этом томе открывается первыми работами А. В. Шубникова по росту кристаллов, выполненными им еще в лаборатории Ю. В. Вульфа: «Влияние степени пересыщения раствора на внешний вид выпадающих из него кристаллов квасцов», «Влияние колебаний температуры на кристаллы», «Зависимость скоростей роста кристаллических граней от величины кристаллов». Как видно из заглавий, во всех этих работах изучается влияние различных внешних факторов на растущий кристалл. Этими работами открывается серия исследований, которыми А. В. Шубников продолжал заниматься неизменно во все последующие годы. Уже в этих работах он, ссылаясь на принцип Кюри, ставит вопрос о том, какой должна быть идеальная форма роста кристалла.

Этот же вопрос он трактует подробно в статье «Геометрическая теория роста кристаллов» (Изв. Горн. ин-та Уральск. гос. ун-та, № 5, 1—15, 1920; Изв. Уральск. гос. ун-та. т. 1, 33—47, 1920), не помещаемой в настоящем сборнике не только из-за ее объема, но и из-за того, что основные ее положения были сформулированы А. В. Шубниковым в последующие годы в значительно более изящной и сжатой форме.

Идеи, высказанные еще в первых работах, в частности в «Геометрической теории роста кристаллов», были четко и точно изложены в публикуемых здесь статьях: «О принципе отбора Гросса — Меллера» и «О законе геометрического отбора при образовании кристаллического агрегата».

В сборнике помещены две статьи, выполненные А. В. Шубниковым вместе с Г. Г. Леммлейном: «Об ортотропизме роста кристаллов» и «О кристаллизации на поверхности расплава»— первые из серии блестящих исследований по росту кристаллов, продолженных наиболее талантливым из учеников А. В. Шубникова Георгием Глебовичем Леммлейном и его учениками. Уместно вспомнить, что работа о кристаллизации на поверхности расплава была выполнена по заданию сахароваренной промышленности и, таким образом, явилась одним из первых технических применений учения о росте кристаллов.

Публикуемая статья «О гранях с нулевой скоростью роста на кристалле $K_2Cr_2O_7$» завершает цикл исследований по симметрии кристалла двухромокислого калия, начатых А. В. Шубниковым еще в 1911 г.

Объем сборника не позволил включить в него две статьи, выполненные А. В. Шубниковым в соавторстве с О. М. Шубниковой: «Статистический метод в применении к изучению внешней формы кристаллов» и «Статистическое исследование вициналей октаэдра квасцов». В первой из этих статей проведено статистическое изучение форм роста природных тетрагональных кристаллов вилуита и сделан вывод о существовании двух генетически различных габитусов кристаллов. Вторая статья относится к циклу статей о вицинальных гранях, публиковавшихся в период ожесточенной дискуссии о природе вициналей, происходившей в конце двадцатых — начале тридцатых годов в основном между А. В. Шубниковым и О. М. Аншелесом. Редакция сборника не сочла возможным возвращаться к этой дискуссии, печатая статьи лишь одного из ее участников. Основные идеи А. В. Шубникова высказаны им в публикуемой статье «Исследование вицинальных граней октаэдра квасцов в процессе роста кристаллов» и в совместной с Б. К. Бруновским статье «О природе вицинальных граней октаэдра алюмокалиевых квасцов», которая, к сожалению, была опубликована только на немецком языке и поэтому приводится здесь в виде реферата.

В статье «Об искусственном получении закономерных сростков кристаллов алюмокалиевых квасцов», выполненной совмест-

но с М. П. Шаскольской, изучено явление закономерного срастания двух кристаллов в растворе, т. е. оригинальное явление эпитаксии. К этой статье А. В. Шубников вернулся в 1954 г. в статье «Ответ на статью Л. А. Варданяца «Ревизия кубо-октаэдрического двойникового закона алюмокалиевых квасцов», не включенной в настоящий сборник, поскольку в ней трактуется лишь частный вопрос.

В последней из статей, включенных в этот раздел, «Укрупнение зерен порошка сегнетовой соли, находящегося в собственном растворе, под действием колебаний температуры» (совместно с Н. В. Гордеевой) автор снова возвращается к вопросу о равновесной форме кристаллов, поставленному им еще в самых первых работах и неоднократно исследовавшемуся на протяжении всей жизни.

В бытность А. В. Шубникова ассистентом Ю. В. Вульфа ему постоянно приходилось демонстрировать с помощью проекционного фонаря рост кристаллов [1]. Замечательное мастерство и красоту лекционных демонстраций, сопровождавших лекции А. В. Шубникова, помнят все, кому выпало счастье их слушать. Из этих наблюдений родился цикл работ по росту кристаллов, которые не включены в этот том, потому что большинство из них вошли в книгу (совместно с В. Ф. Парвовым) «Зарождение и рост кристаллов» (1969 г.) и в кинофильмы по росту кристаллов А. В. Шубникова и В. Ф. Парвова, имеющие всемирную известность. К ним относятся статьи: «Кристаллы салола с кривыми гранями» (1921 г.), «Лекционный опыт для демонстрации ритмического роста кристаллов салола» (1956 г.), «Об образовании сферолитов» (1957 г.), «О зародышевых формах сферолитов» (1957 г.), «Ритмический рост сферолитов трифенилметана» (1958 г.), «О взаимно параллельном расположении дендритов хлористого аммония в капле раствора» (1961 г.) и др. Все они войдут в новое издание книги «Как растут кристаллы».

---

[1] Часть из этих лекционных демонстраций описана другим ассистентом Ю. В. Вульфа профессором А. Б. Млодзеевским в книге «Лекционные демонстрации по физике», ч. 1, Молекулярная физика. ГТТИ, 1948. Переиздано в кн.: «Лекционные демонстрации по физике». Под ред. В. И. Ивероновой. М., «Наука», 1965, изд. 1-е; 1972, изд. 2-е.

ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ ПЕРЕСЫЩЕНИЯ РАСТВОРА НА ВНЕШНИЙ ВИД ВЫПАДАЮЩИХ ИЗ НЕГО КРИСТАЛЛОВ КВАСЦОВ[1]

(Представлено на заседании Физико-математического отделения Академии наук 4 сентября 1913 г.)

Главная цель настоящей работы состоит в том, чтобы экспериментально доказать высказанную еще Johnsen [1] мысль, что каждой степени пересыщения раствора соответствует своя, вполне определенная форма кристаллов. Мы будем оперировать исключительно с формами простых индексов, не вводя в рассмотрение вициналъных форм, как то делает Johnsen.

Для достижения поставленной цели были сделаны три серии опытов: в первой серии кристаллы квасцов росли из чистого раствора при + 23° С, во второй — из раствора, содержащего 9,3% HCl при +20° С. Способ выращивания кристаллов состоял в том, что предварительно получались мелкие кристаллики; из них выбирались наиболее симметричные и непременно выросшие на определенной грани, например на грани октаэдра. Отобранные кристаллики помещались далее в пересыщенный раствор, где они росли до размеров, не сильно изменяющих первоначальную концентрацию раствора, однако позволяющих с достаточной точностью измерить линейные протяжения кристалла. На два литра раствора полагалось три кристаллика, которым позволялось расти до двух граммов. Концентрация водного раствора определялась титрованием едким баритом в присутствии сегнетовой соли и фенолфталеина. Вычитанием из концентрации насыщенного раствора получалось пересыщение. Пересыщение выражалось в граммах водной соли на 100 *г* насыщенного раствора. В солянокислом растворе пересыщение измерялось чувствительным ареометром.

При изучении внешнего вида кристаллов необходимо различать два рода симметрии: симметрию внешнюю, выражающуюся в равенстве граней одной и той же простой формы, и симметрию внутреннюю (однородность), внешним образом проявляющуюся в постоянстве гранных углов. В действительности, выросшие из пересыщенных растворов кристаллы не осуществляют ни той, ни другой симметрии [2], и нам интересно проследить, в какой мере симметрия кристаллов зависит от степени пересыщения раствора. Количественное решение этого вопроса могло бы быть темой специальной работы; мы удовольствовались, однако, лишь немногими фактами. Именно, опыт показал, что при уменьшении пересыщения внутренняя симметрия кристаллов возрастает, а внешняя уменьшается. Другими словами, из сильно пересы-

[1] Изв. Имп. АН. Сер. 6, 1913, т. 7, № 14, с. 817—828.

щенных растворов получаются неоднородные, с включениями маточного раствора кристаллы, но зато удивительно правильные на вид; из слабо пересыщенных растворов вырастают однородные (прозрачные), но несимметричные на вид кристаллы. Сказанное относится к кристаллам, растущим во вращающемся кристаллизаторе [3]. Влияние пересыщения на осуществление свойственной кристаллу данного вещества симметрии объясняется действием концентрационных потоков, подымающихся с кристалла во время его роста. Неоднородность быстро выросшего кристалла нам будет понятна, если принять во внимание очень вероятную неоднородность концентрации охватывающего кристалл потока. Внешняя асимметрия кристаллов, растущих при малом пересыщении, объясняется тем, что всякая, хотя бы и очень маленькая, внешняя несимметричность зародыша отклоняет слабый концентрационный поток, а это отклонение, в свою очередь, увеличит уже существующую асимметрию. Наоборот, при больших пересыщениях, когда потоки очень сильны, маленькие отклонения от внешней симметрии не скажутся на потоках, и кристалл, будучи неоднородным, вырастает внешне-симметричным.

Выше мы сказали, что внешняя симметрия выражается в равенстве граней, принадлежащих одной простой форме. Это определение требует поправки, если дело идет о кристаллах, свободно растущих на дне кристаллизатора. В этом случае нам нужно складывать симметрию кристалла с симметрией поля силы тяжести, в результате чего грани каждой простой формы распадутся на группы и внешняя симметрия скажется в равенстве граней, принадлежащих одной и той же группе одной простой формы. Пусть у нас имеется кристалл, представляющий собой комбинацию куба, октаэдра и ромбического додекаэдра, выросший на грани октаэдра. Мы должны различать в нем следующие группы граней: 1) верхнюю грань октаэдра $(111)_1$, 2) нижнюю грань октаэдра $(111)_2$, 3) три грани октаэдра, составляющие тупой угол с дном кристаллизатора $(111)_3$, 4) три грани октаэдра под острым углом ко дну кристаллизатора $(111)_4$, 5) три грани куба под тупым углом ко дну $(100)_1$, 6) три грани куба под острым углом ко дну $(100)_2$, 7) шесть граней ромбического додекаэдра, перпендикулярных ко дну $(110)_1$, 8) три грани ромбического додекаэдра под тупым углом ко дну $(110)_2$, 9) три грани ромбического додекаэдра под острым углом ко дну $(110)_3$. Выращивая кристаллы квасцов на грани октаэдра, мы, следовательно, с точки зрения внешнего вида (внешней симметрии), должны различать не три простых формы, а девять. Далее мы будем называть таким образом специализированные простые формы группами граней. Из вышеизложенного становится ясным, почему при изучении влияния пересыщения на внешний вид необходимо растить кристаллы в каждой серии опытов на определенных гранях.

Когда мы говорим о внешнем виде кристалла, то разумеем число и характер его граней, их линейные размеры и величину

их площадей. Разберем по очереди эти свойства сначала на кристаллах, выросших из водного раствора, а затем на кристаллах из солянокислого раствора.

Кристаллы из водного раствора, выросшие на грани октаэдра. *Число граней.* Для выяснения зависимости числа граней кристалла от степени пересыщения раствора мы поступали следующим образом. На выращенных при различных пересыщениях кристаллах подсчитывалось число групп и затем складывались вместе теоретические числа граней каждой группы. Полученная сумма иногда не сходилась с истинным числом граней. Такой подсчет мы считаем, однако, более правильным на том основании, что при нем входят в общее число также и «случайно» не появившиеся грани. Результат подсчета сведен в табл. 1.

Таблица 1

Число граней в зависимости от пересыщения

Группа	№ кристалла				
	1	2	3	4	5
	пересыщение				
	5,1	4,1	2,7	2,0	1,2
$(111)_1$	1	1	1	1	1
$(111)_2$	1	1	1	1	1
$(111)_3$	3	3	3	3	3
$(111)_4$	3	3	3	3	3
$(100)_1$	3	3	3	3	3
$(100)_2$	—	—	3	3	3
$(110)_1$	—	—	—	6	6
$(110)_2$	—	3	3	3	3
$(110)_3$	—	—	—	—	3
Сумма граней	11	14	17	23	26

Из табл. 1 видно, что *с уменьшением пересыщения число граней возрастает.* Кристалл из неполной комбинации куба с октаэдром переходит в полную комбинацию куба, октаэдра и ромбического додекаэдра. Интересно сопоставить этот результат с работой Андреева [4]. Если бы скорости роста отдельных граней подчинялись закону Нернста $V = KC$ (V — скорость роста, C — пересыщение, K — константа) и если бы K для всех граней было одно и то же, как утверждает Андреев, а растворимость и, следовательно, пересыщение C различно, то при больших пересыщениях отношение скоростей двух любых граней

$$V_1/V_2 = KC_1/KC_2$$

стремилось бы к единице, т. е. различные грани получили бы равное право появиться. Словом, при больших пересыщениях мы получили бы кристаллы с большим числом граней, а при малых — с меньшим. Итак, из положений Андреева мы пришли к результатам, противоречащим опыту.

Линейные размеры граней. Пусть у нас имеется сечение кристалла квасцов (рис. 1), выросшего на грани октаэдра, проходящее через начальную точку роста O и перпендикулярное к граням

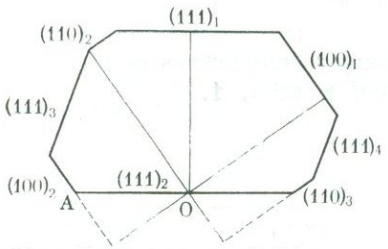


Рис. 1

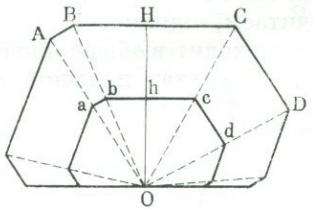


Рис. 2

$(111)_1$, $(111)_2$, $(111)_3$, $(100)_1$, $(100)_2$, $(110)_2$ $(110)_3$. Измерив ширину каждой грани по этому сечению, а также и расстояние OA (на кристаллах всегда видна начальная точка роста), мы имеем все данные, чтобы построить по ним весь многогранник и измерить скорости роста каждой грани, т. е. удаления их от начальной точки роста за определенный промежуток времени. Но в кристаллах мы имеем не одно, а три таких сечения, и все они несколько отличаются друг от друга; поэтому при измерении приходится брать среднее значение для ширины каждой грани. Как уже сказано, в каждом опыте у нас росло по три кристалла; все они отличались, конечно, друг от друга по весу, и результаты измерения их поэтому не могли быть сравнимы между собой. Необходимо было перечислить все величины в предположении, что все кристаллы, оставаясь себе подобными, уменьшились или увеличились до одного и того же объема или до одного веса. Как это сделать, будет понятно из следующего рассуждения. Пусть $ABC\ldots$ (рис. 2) есть сечение кристалла, перпендикулярное к граням AB, BC, . . ., и пусть вес кристалла будет g граммов; положим еще, что для кристалла в один грамм такое же сечение будет $abc\ldots$ Из элементарной геометрии известно, что объемы (веса) двух подобных многогранников относятся, как кубы расстояний граней до центра подобия, поэтому

$$g/1 = (OH)^3/(oh)^3 = (AB)^3/(ab)^3 = (BC)^3/(bc)^3 = \ldots,$$

откуда

$$ab = AB/\sqrt[3]{g}, \qquad bc = BC/\sqrt[3]{g}\ldots$$

Таблица 2

Ширина граней (*мм*) в зависимости от пересыщения

Группа	№ кристалла				
	1	2	3	4	5
	пересыщение				
	5,1	4,1	2,7	2,0	1,2
$(111)_1$	8,8	7,3	6,3	7,9	6,9
$(111)_2$	13,6	12,8	11,6	11,5	10,6
$(111)_3$	6,5	3,5	4,5	4,9	4,9
$(111)_4$	1,3	3,0	2,5	2,8	1,9
$(100)_1$	4,8	3,3	4,6	3,8	4,9
$(100)_2$	—	—	0,5	0,3	1,1
$(110)_2$	—	4,3	2,7	1,2	1,0
$(110)_3$	—	—	—	—	0,5

Таблица 3

Расстояние граней от начальной точки роста (*мм*) в зависимости от пересыщения

Группа	№ кристалла				
	1	2	3	4	5
	пересыщение				
	5,1	4,1	2,7	2,0	1,2
$(111)_1$	5,2	5,4	6,2	5,7	6,0
$(111)_3$	7,4	6,8	6,0	6,0	6,2
$(111)_4$	5,4	5,3	5,3	5,2	5,1
$(100)_1$	5,6	7,1	6,6	6,8	6,2
$(110)_2$	—	—	4,8	4,8	4,4
$(110)_2$	—	6,0	6,6	6,7	7,2
$(110)_3$	—	—	—	—	2,9

Итак, для того чтобы получить ширину грани (или какие-либо линейные размеры) для кристалла в один грамм, нужно разделить данную ширину на кубический корень из веса кристалла. Пользуясь этим способом, были вычислены средние значения ширины и расстояний от начальной точки роста соответственных граней для каждых трех кристаллов опыта. Таким образом, каждое число явилось результатом девяти измерений. Грани $(110)_1$, появляющиеся при слабых пересыщениях, не подвергались измерению. Табл. 2 и 3 заключают в себе полученные вышеописанным

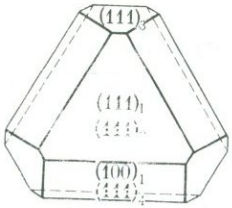


Рис. 3. № 1. Пересыщение = 5,1

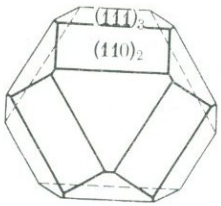


Рис. 4. № 2. Пересыщение = 4,1

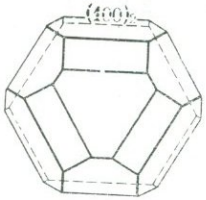


Рис. 5. № 3. Пересыщение = 2,7

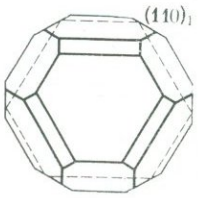


Рис. 6. № 4. Пересыщение = 2,0

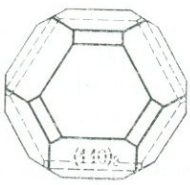


Рис. 7. № 5. Пересыщение = 1,2

способом значения ширины различных граней и расстояний их от центра роста.

Табл. 2 дает возможность очень просто начертить параллельные проекции кристаллов. Такие проекции, представленные на рис. 3—7, наилучшим образом доказывают положение, выставленное нами в начале этой статьи. Мы, действительно, видим, что каждому пересыщению свойственна своя форма, отличающаяся от других числом граней, их величиной и формой. Вглядываясь в проекции, мы замечаем, что по мере уменьшения пересыщения кристалл все более и более принимает округлую форму. Табл. 3 центральных расстояний может в то же время служить таблицей относительных скоростей роста граней, так как удаление грани $(111)_4$ от центра остается почти постоянной величиной. Из этой таблицы мы видим, что не существует простого закона изменения скоростей роста с изменением пересыщения.

Поверхность кристаллов. Мы сказали, что кристаллы с уменьшением пересыщения округляются; это значит, что кристалл весом в один грамм, выросший при наименьшем пересыщении, имеет и наименьшую поверхность. Нам пришло в голову подтвердить эту мысль числами; для этого мы измерили поверхность каждой грани каждого кристалла, перечислили полученные числа делением каждого числа на вес кристал-

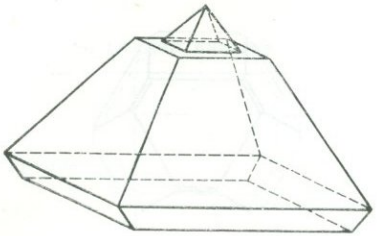


Рис. 8

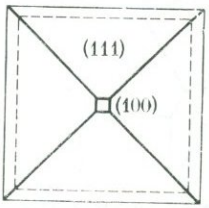


Рис. 9

ла в степени 2/3, относя их таким образом к кристаллу в один грамм. Из полученных чисел выводились средние значения по тому же способу, как выше делалось для определения средней ширины граней. Далее, сложением площадей отдельных граней мы находим общую поверхность кристалла в один грамм. Измерение площадей граней происходило так. На листе прозрачной желатины делались отпечатки граней, что достигалось простым прижиманием грани, намазанной чернилами, к листу желатины. Полученные отпечатки проектировались на лист бумаги проекционным фонарем; проекции по контуру обводились карандашом, вырезались ножницами и взвешивались на весах. Зная вес спроектированного квадратного сантиметра, мы вычисляли истинную площадь граней. В табл. 4 сведены результаты измерения полной поверхности кристаллов весом в один грамм, выросших при различных пересыщениях.

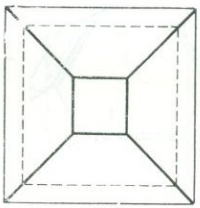


Рис. 10

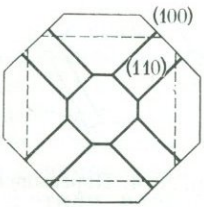


Рис. 11

Таблица 4

№ кристалла	Пересыщение	Полная поверхность, $см^2$
1	5,1	—
2	4,1	7,5
3	2,7	7,2
4	2,0	7,0
5	1,2	7,1

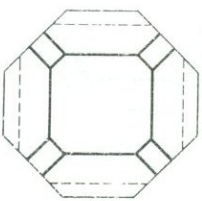


Рис. 12

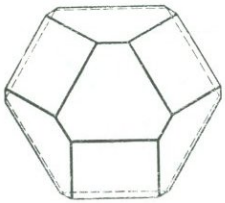


Рис. 13. № 1. Пересыщение = 5,2

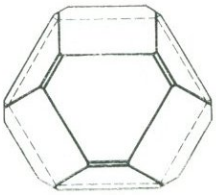


Рис. 14. № 2. Пересыщение = 4,0

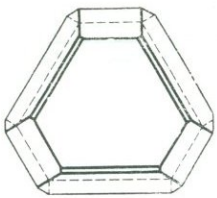


Рис. 15. № 3. Пересыщение =2,7

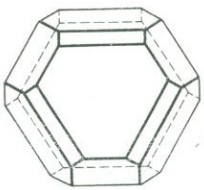


Рис. 16. № 4. Пересыщение = 1,9

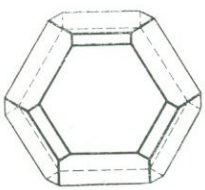


Рис. 17. № 5. Пересыщение = 1,3

Кристалл № 1 не мог быть измерен, так как его шероховатые грани не давали резких отпечатков на желатине. Из табл. 4 мы видим, что тенденция к уменьшению поверхности при уменьшении пересыщения действительно есть.

Кристаллы из водного раствора, выросшие на грани куба. Все вышеизложенные опыты мы хотели повторить, заставляя кристаллы расти на грани куба. Однако вскоре оказалось, что эта задача несколько сложнее предыдущей и вот по каким двум причинам. Во-первых, трех кристаллов было недостаточно для каждого опыта, так как кристаллы, выросшие на грани куба, способны сильнее варьировать в форме, вырастая в одних и тех же условиях пересыщения. Во-вторых, при пересыщении, равном приблизительно четырем, получаются кристаллы вроде изображенного на рис. 8. Такие кристаллы нельзя измерять прежним способом, так как неизвестно, что считать в этом случае за верхнюю грань куба. Несмотря на приведенные затруднения, все же приблизительно можно уловить ход изменения формы кристаллов с изменением пересыщения. На рис. 9—12 пересыщение падает от № 9 к № 12; мы видим, что здесь также с уменьшением пересыщения число граней увеличивается, вместе с тем кристалл, увеличивая верхнюю грань куба, округляется.

Кристаллы из солянокислого раствора, выросшие на грани октаэдра.

Таблица 5

Число граней каждой группы в зависимости от пересыщения

Группа	№ кристалла				
	1	2	3	4	5
	пересыщение				
	5,4	4,0	2,7	1,9	1,3
$(111)_1$	1	1	1	1	1
$(111)_2$	1	1	1	1	1
$(111)_3$	3	3	3	3	3
$(111)_4$	3	3	3	3	3
$(100)_1$	3	3	3	3	3
$(100)_2$	3	3	3	3	3
$(110)_2$	—	3	3	3	3
Сумма граней	14	17	17	17	17

В качестве растворителя для квасцов была взята соляная кислота с наибольшим содержанием хлористого водорода (9,3%), при котором еще не появляются грани пентагонального додекаэдра [5]. Здесь, как и в двух предыдущих случаях, каждому пересыщению соответствует своя форма кристаллов, однако эта форма отличается от таковой в предыдущих опытах. Табл. 5 и 6 лучше всего пояснят, в чем состоит это отличие.

Из табл. 5 мы видим, что увеличение числа граней происходит лишь при переходе от № 1 к № 2, при дальнейшем уменьшении пересыщения число граней сохраняется. Но это постоянство числа граней не мешает форме кристалла заметно изменяться при изменении пересыщения. Табл. 6 показывает, как в большинстве случаев плавно изменяется ширина граней с изменением пересыщения. Пользуясь этой таблицей, мы начертили параллельные проекции кристаллов (рис. 13—17). Рассмотрение рисунков наводит нас на два вопроса, разрешение которых может быть полезным для химической кристаллографии: 1) Если форма кристаллов зависит от положения кристаллов во время роста, от степени пересыщения раствора и от примесей, то как изучить влияние последних? 2) Какую форму кристалла нужно иметь в виду при морфотропических исследованиях?

Форма кристалла, находящегося в равновесии с раствором. Мы не сделаем открытия, если скажем, что наиболее характерной формой кристалла данного вещества нужно считать ту, которая находится в равновесии с раствором. Но получить кристалл такой формы нельзя, потому что для этого нужно, чтобы он рос бесконечно медленно; предсказать же ее, в принципе, возможно и, между прочим, на основании опытов, аналогичных нашим.

Таблица 6

Ширина граней (*мм*) в зависимости от пересыщения

Группа	№ кристалла				
	1	2	3	4	5
	пересыщение				
	5,2	4,0	2,7	1,9	1,3
$(111)_1$	7,0	7,9	9,1	8,5	8,1
$(111)_2$	13,0	11,9	11,2	10,4	10,3
$(111)_3$	7,1	4,7	4,3	4,4	4,3
$(111)_4$	1,1	2,4	3,0	3,8	3,2
$(100)_1$	6,7	5,8	3,5	3,1	3,7
$(100)_2$	0,2	0,7	1,9	1,7	2,0
$(110)_2$	—	0,2	0,4	1,2	1,1

В самом деле, табл. 2 и 6 позволяют построить для каждой грани кривые их изменения с изменением пересыщения; продолжая эти кривые до пересечения с осью ординат (на ординатах откладываются значения ширины граней, на абсциссах — пересыщение), мы по ее отрезкам можем построить искомую модель кристалла, находящегося в равновесии с насыщенным раствором.

Если мы проделаем это для кристаллов квасцов, то придем к заключению, что предельная форма их, в том случае, если они растут из водного раствора, состоит из форм {111}, {100} и {110}; предельная форма кристаллов из солянокислого раствора состоит из тех же форм, но иного относительного размера. Здесь следует упомянуть, что предельная форма по теории Кюри должна иметь минимальную поверхностную энергию. С грубым подтверждением этой теории мы встречались выше (у нас дело идет не о поверхностной энергии, а о поверхности).

Влияние примесей к раствору на внешнюю форму кристаллов. Из предыдущего совершенно ясно видно, что для изучения влияния примесей к раствору на форму выпадающих кристаллов необходимо ставить опыты в равных условиях пересыщения и положения кристаллов на дне кристаллизатора. Пользуясь тем, что в табл. 2 и 6 соответственные по номеру опыты велись приблизительно в равных условиях пересыщения, мы можем проследить влияние примеси соляной кислоты на форму квасцов. Сравнивая, например, между собой пятые номера опытов, мы видим, что присутствие соляной кислоты сказывается в отсутствие граней $(110)_1$ и $(110)_3$. В опытах с водным раствором грань $(110)_3$ уменьшается от второго номера к пятому; в опытах же с соляной кислотой дело идет наоборот. Мы не будем перечислять всех де-

талей влияния соляной кислоты, так как все это хорошо видно из рисунков.

Настоящая работа была выполнена в кристаллографической лаборатории проф. Ю. В. Вульфа, в университете им. Шанявского. Считаю долгом принести Юрию Викторовичу глубокую благодарность за тот интерес, с которым он всегда относился к этой работе, и за те беседы, которые вдохновляли меня во все время работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Johnsen.* Wachstum und Auflösung der Kristalle. Leipzig, 1910.
2. *Ю. В. Вульф.* О пределах точности законов геометрической кристаллографии. Варшава, Изв. Варшавск. унив., 1903, 64 с.
3. *G. Wulff.* Neue Form des rotierenden Krystallisationsapparates. — Z. Kristallogr., 1911, **50**, 17.
4. *Ив. Андреев.* Скорость роста и растворения кристаллов.— Ж. Рус. физ.-хим. об-ва, Хим. отд-ние, 1908, **40**, 1, 397.
5. *С. А. Вейберг.* Дневник XII съезда естествоиспытателей и врачей в Москве. 1910, № 5, с. 172.

ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ НА КРИСТАЛЛЫ[1]

Прибор. Среди многих факторов, оказывающих влияние на форму находящихся в растворе кристаллов, особого внимания заслуживает периодическая смена температур. Для изучения влияния последней мною построен прибор, состоящий из следующих частей (рис. 1 и 2): аккумулятора A, прерывателя B, наполненного толуолом и ртутью, электромагнитов C и D, намагниченного стального маятника E с прикрепленной к нему нитью F, на которой висит изогнутая проволочка G, двух чашечек со ртутью H, нагревателя J, состоящего из лампочки, заключенной в цилиндр из листового железа. Все части прибора соединены между собой проводами. Нагреватель J питается городским переменным током и работает только тогда, когда проволочка G опущена в ртуть и маятник E отклонен вправо; нагреватель перестает работать, когда маятник отклонен влево. То или иное положение маятника зависит от того, к какому из электромагнитов он притянут или, другими словами, через какой из электромагнитов только что прошел ток от аккумулятора (маятник, будучи сам магнитом, может оставаться в отклоненном положении даже и тогда, когда в соответствующем электромагните тока нет). То или иное направление тока от аккумулятора обусловливается положением ртути в прерывателе

[1] Ж. Рус. физ.-хим. об-ва. Физ. отд-ние, 1918, т. 50, вып. 1—3, с. 39—44.

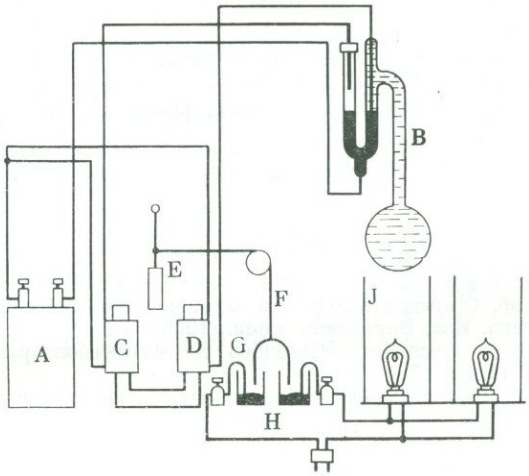


Рис. 1

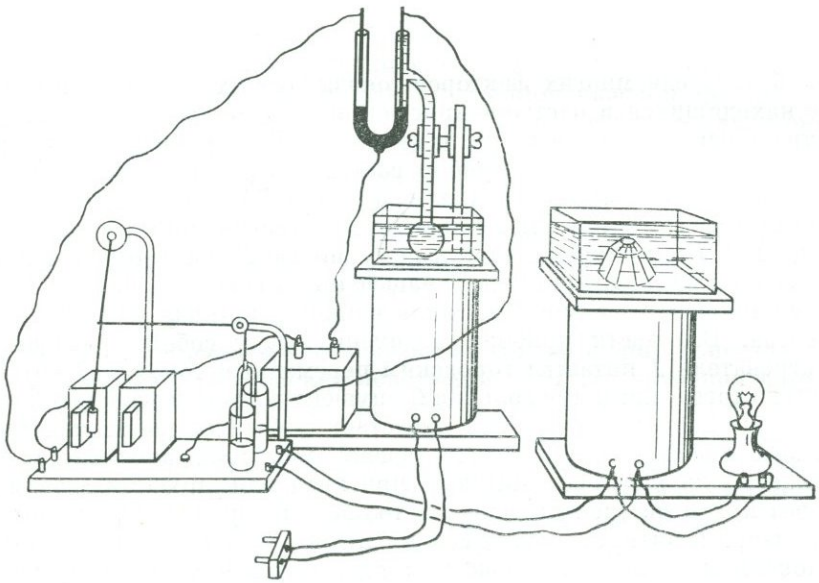


Рис. 2

B или, в конечном счете, его температурой. Если температура повысилась до определенного предела — действует электромагнит C; если температура упала до определенного предела — действует электромагнит D. Температурный интервал может быть урегулирован изменением длины одного из электродов регулятора. В одно и то же время могут работать несколько нагревателей. На рис. 1 мы видим два, а на рис. 2 — три нагревателя. Для того чтобы можно было изменять по произволу время, в течение которого происходит смена температур, мы помещаем регулятор в сосуд с водой, количество которой можно изменять.

Превращения кристаллов под влиянием колебаний температуры. Если мы поместим кристалл в насыщенный при температуре $(t_1 + t_2)/2$ раствор (t_1 и t_2 — крайние пределы переменной температуры), то a priori можно ожидать следующего. При повышении температуры кристалл будет растворяться и более концентрированный раствор будет скопляться внизу. При понижении температуры кристалл будет расти за счет того пересыщения, которое образовалось при предшествующем его растворении, и более легкий насыщенный раствор будет подыматься вверх. Итак, как при росте, так и при растворении жидкость расслоится: наверху скопится менее концентрированный, а внизу более концентрированный раствор. Кристалл будет растворяться более наверху, чем внизу, и расти более внизу, чем наверху. В результате он превратится в пластинку, которая займет все дно кристаллизатора, если последнее горизонтально. Опыт, произведенный над кристаллами квасцов, подтверждает сказанное. Большие кристаллы квасцов помещались в различных положениях в раствор, налитый в кристаллизатор; кристаллизатор ставился на нагреватель (см. рис. 2); по истечении нескольких дней кристаллы превращались в пластины. Отдельные стадии превращения зависят, однако, не только от перемен температуры, но и от самого кристалла, так что кристалл, который лежит во время опыта на грани куба, изменяется иначе, чем кристалл, лежащий на грани октаэдра. Не нужно думать, что явление, которое мы изучаем, есть явление редкое. Мы встречаемся с ним всегда, когда имеем дело с кристаллами, находящимися в растворе, потому что строго постоянная температура не осуществима практически и даже немыслима теоретически, а при переменной температуре явление неминуемо скажется хотя бы и в слабой степени.

На основании изложенных опытов и рассуждений мы можем осветить целый ряд вопросов, касающихся роста и растворения кристаллов. Так, существует мнение, что различные грани кристалла могут иметь различную растворимость и что поэтому можно подобрать для раствора такую концентрацию, при которой одна грань будет расти, а другая растворяться. Я не буду опровергать этого мнения, самого по себе вероятного, но не могу не указать, что целый ряд опытов, якобы подтверждающих его, могут быть объяснены исключительно колебаниями температуры и различной

скоростью роста и растворения граней. На грани куба кристалла квасцов было сделано углубление, в которое был налит насыщенный раствор квасцов; препарат был заклеен покровным стеклышком и поставлен на нагреватель прибора. Через два дня было констатировано с помощью гониометра на поверхности углубления появление граней {100}, {110}, {111} и {112}. Подобные же опыты были проделаны с кристаллами, просверленными насквозь перпендикулярно к граням (100), (110) и (111), причем во всех случаях на поверхности канала появлялись через некоторое время хорошо измеримые грани. Подобные опыты можно проделать и не ставя препараты на нагреватель [1], но для этого нужно более продолжительное время. Итак, мы видим, что появление новых граней может быть обусловлено колебаниями температуры.

Существует еще одно мнение [2], что будто бы кристаллы единовременно растут снизу и растворяются сверху под влиянием расслаивания раствора, происходящего от действия силы тяжести, как таковой. Действительно, нельзя не согласиться, что под влиянием силы тяжести концентрация раствора в верхних слоях жидкости должна быть несколько меньше, чем в нижних. Но так как эту разницу в концентрациях невозможно по малости ее наблюдать в двух слоях жидкости, разнящихся по высоте на несколько миллиметров (высота кристалла), то приписывать расслаиванию жидкости, происшедшему от действия силы тяжести, как таковой, какое либо заметное влияние на форму кристалла совершенно немыслимо [1]. Самый факт единовременного роста и растворения однако не возбуждает относительно себя никаких сомнений. Так, кристалл квасцов, подвешенный на проволоке и оставленный при комнатной температуре в насыщенном растворе на месяц, заметно растворился сверху и вырос снизу, при этом кроме граней {100}, {110}, {111}, бывших на кристалле до опыта, наверху наблюдались грани {112} и {221}. Известно также, что кристаллы, забытые в насыщенном растворе, сверху часто бывают закруглены; на природных кристаллах мы тоже часто наблюдаем, что они внизу толще, чем наверху. Если мы припишем расслаивание раствора исключительно силе тяжести, то мы должны признать, что градиент этого расслаивания, т. е. разница в концентрациях на каждый сантиметр глубины, не должен зависеть от этой последней. Но в таком случае степень деформации кристалла, будет ли она происходить от неравномерного растворения (в верхних слоях раствора), от единовременного роста и растворения (в средних слоях раствора) или от неравномерного роста (в нижних слоях раствора), не должна зависеть от толщины слоя раствора, взятого для опыта, и от глубины, на которой находится сам кристалл. Между тем опыт показывает, что деформация будет

[1] В опытах П. А. Земятченского колебания температуры не были исключены, поэтому все утверждения его относительно расслаивания пересыщенных растворов только от действия силы тяжести сомнительны.

наибольшей, когда взят слой раствора небольшой толщины и небольших поперечных размеров, что вполне вяжется с высказанным мною предположением о расслаивании раствора под влиянием колебаний температур и силы тяжести, действующих совместно.

Не мешает также взглянуть с высказанной мною точки зрения вообще, на кривые грани, а также и на тот общеизвестный факт, что мелкозернистые осадки со временем переходят в крупнозернистые [3].

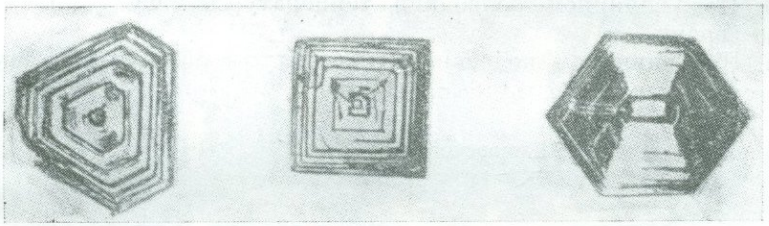


Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

Рост кристаллов в условиях колебания температуры. Если поместить кристалл в раствор, пересыщенный по отношению к наивысшей температуре, которую дает наш прибор, то кристалл будет расти с переменной скоростью. При повышении температуры скорость роста будет убывать, при понижении — увеличиваться. Так как при быстром росте кристалл получается менее однородным, чем при медленном, то в результате кристалл будет образован из ряда концентрических слоев, в различной мере однородных. На рис. 3, 4 и 5 мы имеем фотографии таких зонарных кристаллов квасцов, выросших на гранях октаэдра, куба и ромбического додекаэдра. Препараты, с которых сняты фотографии, приготовлялись так. Кристаллы наклеивались лаком на стекло и в таком виде просушивались дня два для удаления воды из мутных слоев. После этого кристаллы отшлифовывались на наждачной бумаге до толщины в 2—3 *мм*. Для того чтобы при фотографировании в проходящем свете лучше были заметны слои менее и более однородные, кристаллы кисточкой выкрашивались чернилами, при этом, конечно, чернила главным образом пропитывали рыхлые неоднородные слои. Зная число слоев кристалла и период колебания температуры, можно узнать продолжительность роста кристалла. У нас период колебания температуры был 3 *час* 20 *мин.* следовательно, кристалл, изображенный на рис. 3, имеющий 6 слоев, рос 20 *час.*

По отношению к включениям маточного раствора грани различного символа относятся различно. На рис. 5 мы видим, например, что, в то время как грань октаэдра при своем росте почти совсем не включает маточного раствора, грань куба имеет много

включений. В заключение упомянем, что кристаллы квасцов зонарной структуры обладают способностью разламываться параллельно своим слоям. Нет ли здесь аналогии с «плоскостями распада» Грипаковского? [4].

Результаты. 1. Под влиянием колебаний температуры и силы тяжести кристаллы, находящиеся в насыщенном растворе, превращаются в «таблицы».

2. Колебаниями температуры можно во многих случаях объяснить одновременный рост и растворение кристаллов.

3. Под влиянием колебаний температуры могут появиться новые грани.

4. Под влиянием колебаний температуры образуются зонарные структуры кристаллов [1].

Москва.
Университет им. А. Л. Шанявского

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. С. Федоров.* Зап. Горн. ин-та, 1907, **1**, 81; 1908, **1**, 160; 1908, **1**, 397.
2. *П. А. Земятченский.* Зап. Имп. АН. Сер. 76, 1914, № 8, 541.
3. *C. Doelter.* Neues Jahrb. Mineral., 1894, 11, 275.
4. *К. Грипаковский.* Дневник 2-го Менделеевского съезда. 1911, № 4, с. 16.

ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТЕЙ РОСТА КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ГРАНЕЙ ОТ ВЕЛИЧИНЫ КРИСТАЛЛОВ [2]

(Представлено от имени академика Е. С. Федорова на заседании Отделения физико-математических наук 14 мая 1919 г.)

Начать исследование зависимости скоростей роста граней кристаллов от величины самих кристаллов побудили меня два обстоятельства. С одной стороны, мною неоднократно наблюдалось, что самопроизвольно выросшие кристаллы всегда бывают значительно меньше кристаллов, выросших из нарочно вносимых в раствор зародышей, несмотря на одинаковый возраст тех и других кристаллов. С другой стороны, в литературе имеются указания на то, что многие двойники растут значительно быстрее, чем отдельные кри-

[1] Эта статья должна была появиться в Zeitschr. für Kryst. und Min. летом 1914 г., но из-за начавшейся войны корректура ее не могла быть отослана.
[2] Изв. Рос. АН, сер. 6, 1919, т. 13, № 16—18, с. 1135—1142.



Лаборатория поисковых исследований (1967 г.)

Сидят (слева направо): В. Ф. Парвов, Н. В. Гордеева, А. В. Шубников, Ю. С. Лихачева, Н. М. Щагина; стоят: К. А. Плужников, Н. Р. Иванов, Г. Г. Кессених, В. С. Рябкин, В. М. Фридкин, Л. А. Шувалов, Л. Ф. Кирпичникова

сталлы [1]; причем само явление объясняется не только двойниковой природой кристаллов, сколько наличностью входящих углов, которые могут существовать также и в случае простого срастания двух отдельных кристаллов.

В настоящей статье я задаюсь целью установить не функциональную зависимость скоростей роста граней от величины кристаллов, а только лишь тот факт, что скорость роста грани большого кристалла при прочих равных условиях больше скорости роста грани меньшего кристалла. Так как скорость роста зависит вообще от многих других причин, частью неизвестных, устранить которые представляется невозможным, то единственно надежным методом работы в данном случае оказывается метод статистический.

Для доказательства высказанного мною было произведено семь опытов; каждый из них состоял в следующем. В кристаллизатор наливалось пять литров теплого раствора квасцов такой крепости, чтобы при охлаждении до комнатной температуры раствор оказался пересыщенным. Для каждого опыта степень пересыщения бралась различная. В теплый раствор помещалось по шесть зародышей кристаллов, которые предварительно взвешивались.

Зародыши располагались по вершинам правильного шестиугольника, начерченного на дне кристаллизатора для исключения влияния соседства [2] кристаллов на скорость роста. Зародыши выбирались по возможности одного вида для исключения влияния формы кристаллов на скорость роста отдельных граней, так как мною в свое время доказано [3], что каждому пересыщению свойственна своя форма, почему заранее можно было ожидать, что зародыши, форма которых ближе подходит к той, которая соответствует данной степени пересыщения, будут расти вообще с иной скоростью, чем те кристаллы, форма которых не соответствует данной степени пересыщения. Для исключения влияния положения, кристаллы клались на дно гранями одной и той же простой формы [4]. Для того чтобы зародыши не успели заметно раствориться в теплом растворе, кристаллизатор с раствором и зародышами помещался в большой ящик с водой комнатной температуры, чем достигалось быстрое охлаждение раствора. Во избежание самопроизвольного зарождения кристаллов кристаллизатор закрывался стеклом, причем края сосуда смазывались вазелином. По истечении восьми дней кристаллы вынимались и взвешивались еще раз. Так как в каждый данный момент все шесть кристаллов опыта находились в одних и тех же условиях пересыщения, температуры, положения на дне сосуда, брались одной и той же формы и лежали на гранях одного рода, то относительные скорости роста граней одного рода для разных кристаллов должны зависеть главным образом от величины кристаллов и могут быть рассматриваемы как величины, пропорциональные разностям кубичных корней из весов кристаллов после и до опыта.

Сравнивая скорость роста граней $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$ (a — вес кристалла до опыта, b — вес кристалла после опыта) каждого из шести кристаллов со скоростями роста каждого из остальных, мы один опыт можем рассматривать как пятнадцать (число комбинаций из шести по два) самостоятельных опытов и выразить вероятность W того, что грани больших кристаллов растут быстрее граней меньших кристаллов дробью, числитель которой равен числу удачных, а знаменатель — общему числу (15) этих частных опытов. В следующих десяти таблицах сведены результаты всех опытов. Из первых семи таблиц мы видим, что вероятность W во всех случаях оказывается не меньше 10/15, а из табл. 8 можно заключить, что между вероятностью W, с одной стороны, и степенью пересыщения, которую в каждом случае можно характеризовать разностью $\Sigma b - \Sigma a$, с другой стороны, не наблюдается никакой зависимости. Это дает нам право взять среднее $W_{ср}$ из семи значений W, которое оказывается равным 0,78, и считать высказанное выше положение доказанным. Для бо́льшей убедительности покажем, что $W_{ср}$ растет с увеличением разности весов двух исследуемых кристаллов. Для этого исключим из рассмотре-

ния те комбинации из шести кристаллов по два, которые характеризуются номерами, разнящимися на единицу; тогда для каждого из семи опытов останутся только 10 пар кристаллов; вероятность, которую мы в этом случае обозначим W_2, примет значения, показанные в третьем столбце табл. 9, причем в среднем она оказывается уже больше, а именно 0,86. Исключив затем комбинации кристаллов с номерами, разнящимися друг от друга на два, затем на три и на четыре, получим совершенно аналогично значения вероятностей W_3, W_4, W_5 (табл. 9), причем средние из этих величин оказываются равным соответственно 0,88; 0,90; 1,00. Последние цифры показывают, что, действительно, с увеличением разницы весов зародышей увеличивается и вероятность осуществления нашего правила и что при достаточно большой разности весов зародышей мы с достоверностью можем ожидать, что правило наше будет иметь место. В этом последнем случае все посторонние влияния на скорость роста граней отходят на второй план и доминирующая роль остается за величиной кристалла.

В заключение остается дать объяснение открытому нами явлению. Здесь a priori намечаются четыре пути. Во-первых, можно объяснить явление разной растворимостью больших и маленьких кристаллов. Этому объяснению я не придаю большого значения, потому что не думаю, чтобы разница была достаточно велика для таких сравнительно больших кристаллов, с которыми нам вообще пришлось иметь дело, а также, потому что с уменьшением пересыщения наше явление тогда должно было бы сказаться резче (так как теоретически мы могли бы себе представить такую концентрацию раствора, при которой маленькие кристаллы совсем бы не росли и даже растворялись, в то время как большие кристаллы продолжали бы расти), чего, однако, на основании табл. 8 никак утверждать нельзя. Этим рассуждением я не хочу опровергнуть факта разной растворимости кристаллов разной величины, но хочу только показать, что в нашем случае мы имеем дело с явлением другого порядка. Во-вторых, можно объяснить большую скорость роста граней у больших кристаллов тем, что у последних грани бывают обыкновенно менее совершенны, чем у маленьких кристаллов; *истинная* поверхность граней больших кристаллов при этом оказывается больше *кажущейся*, а скорость роста обусловливается, конечно, истинной поверхностью граней. В-третьих, можно указать на то, что в больших кристаллах всегда содержится больше включений раствора, чем можно было ожидать и что при взвешивании больших кристаллов мы поэтому получаем бóльшие числа, чем следует. Оба последние объяснения следует принять в расчет, но едва ли их будет достаточно.

Главная причина явления, по-моему, состоит в следующем. Как известно, во время роста от кристалла подымается вверх концентрационный поток. Скорость роста кристалла будет вообще пропорциональна скорости движения этого потока и площади его поперечного сечения. Скорость движения потока зависит,

Таблица 1

№ кристалла	a	b	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$
1	0,1482	0,9480	0,4533
2	0,0602	0,5216	0,4131
3	0,0288	0,2648	0,3356
4	0,0172	0,1756	0,3020
5	0,0052	0,2820	0,4824
6	0,0020	0,0674	0,2810
	$\Sigma a = 0,2616$	$\Sigma b = 2,2594$	$W_1 = 10/15$

Таблица 2

№ кристалла	a	b	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$
1	0,3730	6,941	1,187
2	0,2198	5,185	1,127
3	0,1126	4,541	1,173
4	0,0482	2,533	0,999
5	0,0242	2,478	1,064
6	0,0096	0,962	0,774
	$\Sigma a = 0,7874$	$\Sigma b = 22,640$	$W_1 = 13/15$

Таблица 3

№ кристалла	a	b	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$
1	0,7430	11,56	1,355
2	0,2492	6,072	1,195
3	0,0976	4,266	1,161
4	0,0136	2,622	1,140
5	0,0034	1,218	0,918
6	0,0010	0,787	0,823
	$\Sigma a = 1,1078$	$\Sigma b = 26,519$	$W_1 = 15/15$

Таблица 4

№ кристалла	a	b	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$
1	0,2702	11,48	2,609
2	0,0790	8,243	1,591
3	0,0462	5,849	1,443
4	0,0188	4,715	1,411
5	0,0092	4,512	1,442
6	0,0046	5,427	1,592
	$\Sigma a = 0,4280$	$\Sigma b = 40,226$	$W_1 = 10/15$

Таблица 5

№ кристалла	a	b	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$
1	0,2222	13,55	1,778
2	0,1530	13,30	1,834
3	0,0796	9,435	1,683
4	0,0426	9,862	1,795
5	0,0172	7,496	1,699
6	0,0038	4,995	1,553
	$\Sigma a = 0,5184$	$\Sigma b = 58,638$	$W_1 = 11/15$

Таблица 6

№ кристалла	a	b	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$
1	0,3530	33,82	2,527
2	0,1948	26,69	2,408
3	0,1126	25,22	2,450
4	0,0342	21,46	2,454
5	0,0130	17,43	2,358
6	0,0024	14,43	2,301
	$\Sigma a = 0,7100$	$\Sigma b = 139,05$	$W_1 = 11/15$

Таблица 7

№ кристалла	a	b	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}$
1	0,4330	54,56	3,036
2	0,1828	47,77	3,060
3	0,0810	42,56	3,058
4	0,0462	34,11	2,884
5	0,0164	32,31	2,931
6	0,0092	28,84	2,857
	$\Sigma a = 0,7686$	$\Sigma b = 240,15$	$W_1 = 12/15$

Таблица 8

№ опыта	$\Sigma b - \Sigma a$	W_1
1	2,00	10/15
2	21,85	13/15
3	25,41	15/15
4	39,80	10/15
5	58,12	11/15
6	138,34	11/15
7	239,38	12/15
		$W_{ср} = 82/105 = 0,78$

Таблица 9

№ опыта	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
1	10/15	7/10	4/6	2/3	1/1
2	13/15	10/10	6/6	3/3	1/1
3	15/15	10/10	6/6	3/3	1/1
4	10/15	7/10	4/6	2/3	1/1
5	11/15	8/10	5/6	3/3	1/1
6	11/15	9/10	6/6	3/3	1/1
7	12/15	9/10	6/6	3/3	1/1
$W_{ср}$	0,78	0,86	0,88	0,90	1,00

между прочим, от трения его об окружающую жидкость. Ясно, что трение каждой единицы объема подымающейся жидкости будет тем больше, чем тоньше поток, а так как маленькие кристаллы образуют и тонкие потоки, то они должны расти медленнее больших. Несмотря на то что последнее объяснение мне кажется более правильным, все же я думаю, что без специальных опытов этого вопроса окончательно решить нельзя. Заметим еще, что если последнее объяснение верно, то два кристалла, случайно сросшиеся вместе, должны расти быстрее, чем в том случае, когда они растут независимо; точно так же двойник должен иметь при прочих равных условиях больший вес, чем два кристалла, выросших самостоятельно. Само собой разумеется, что по отношению к двойникам это объяснение не исключает каких-нибудь других.

Москва
Университет им. А. Л. Шанявского
Кристаллографическая лаборатория

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Becke.* Über die Ausbildung der Zwillingskristalle.— Fortschr. Mineral., Kristallogr., Petrogr., 1911, 1, 68.
2. *Z. Weyberg.* Z. Kristallogr., 1902, 36, N 1, 40.
3. *А. В. Шубников.* Изв. Имп. АН. Сер. 6, 1913, № 14, 817; *A. E. H. Tutton.* Z. Kristallogr., 1914, 52, N 5, 433.
4. *Ю. Вульф.* К вопросу о скоростях роста и растворения кристаллических граней. Варшава, 1895, с. 25; Z. Kristallogr., 1901, 34, № 5 449.

ОБ ОРТОТРОПИЗМЕ РОСТА КРИСТАЛЛОВ [1]

(Представлено академиком А. Е. Ферсманом на заседании Отделения физико-математических наук 5 января 1927 г.)

За последнее время в связи с опытами получения монокристальных кусков металлов [1], искусственных крупных кристаллов селитры [2] и т. п. вопрос о направленной кристаллизации стал одним из актуальнейших современных вопросов кристаллогенезиса. До сих пор эта сторона воспроизводства кристаллических индивидов туго поддается воле экспериментатора. Ясно, что раскрытие факторов, предопределяющих направление роста кристаллов, и выяснение их относительного значения должно предшествовать экспериментальному, а затем и техническому разрешению

[1] Совместно с Г. Г. Леммлейном. ДАН СССР, 1927, А, № 4, с. 61—64.

вопроса. Некоторые шаги в этом направлении сделал Fr. Rinne, предложивший для некоторых явлений направленной кристаллизации удачный термин — ортотропизм [3].

В настоящей работе мы касаемся относительного значения ортотропизма и термотаксиса (ориентировки кристаллизации направлением отдачи тепла) [4]. Для экспериментов выбирались вещества, легко переохлаждающиеся до комнатной температуры и обладающие по возможности незначительной линейной скоростью кристаллизации. Этим условиям наиболее отвечает ряд органических веществ: салол, бензофенон, α-нафтиламин, кумарин и др. При некотором навыке нижеописанные явления удается наблюдать и при кристаллизации из пересыщенного раствора, например, гипосульфита.

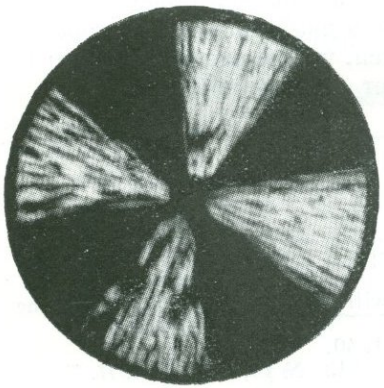


Рис. 1. Сферолит салола в процессе роста, (×6), николи скрещены.

Кристаллизация велась на предметном стекле под покровным стеклышком. Для каждого вещества делались опыты с кристаллизацией от одного центра кристаллизации к периферии препарата и обратно, от периферии к центру.

Так как все исследованные вещества показали одинаковые результаты, то можно остановиться на описании наиболее наглядного из них — салола $C_6H_5CO_2C_6H_4OH$. Точка плавления чистого салола 41,7° С [5], он легко переохлаждается до комнатной температуры, скорость кристаллизации его не превышает 3,47 *мм* в минуту [6]. Эти качества делают его незаменимым препаратом для демонстрации и наблюдения под микроскопом всех описываемых явлений.

Кристаллизация из одного центра осуществлялась следующим образом. На каплю расплавленного на предметном стекле салола клалось весьма тонкое покровное стеклышко с просверленным отверстием около 0,05 *мм* диаметром. Часть жидкости через дырочку выдавливается наружу в виде маленькой капельки. После охлаждения препарата до комнатной температуры на острие в каплю вносилась затравка. По тонкому каналу в покровном стеклышке кристаллизация переохлажденного расплава переходила под стекло. В результате из центра кристаллизации вырастал искусственный сферолит. Чем тщательнее изготовлено отверстие, тем идеальнее он получается. Под микроскопом при скрещенных николях в параллельном свете ясно виден четкий черный крест (рис. 1). Правильные круглые очертания сферолит сохраняет до тех пор, пока не встретит на своем пути препятствий, останавливаю-

щих его дальнейший рост. Кристаллизация от периферии производилась под покровными стеклами двух типов: квадратными и круглыми.

Квадратное стеклышко со стороной около 8 *мм* клалось на каплю расплавленного салола. Остывший до комнатной температуры препарат слегка зажимался в клемму и затем предварительно зараженной зародышами иглой быстро обводились все четыре стороны квадрата. Вызванная иглой непрерывная цепь центров

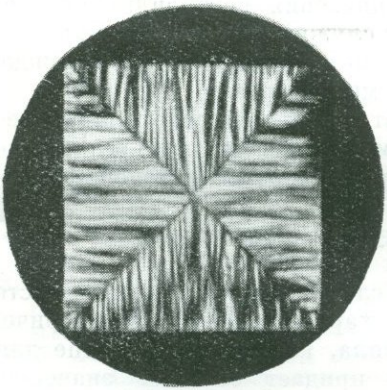


Рис. 2. Салол (×6), николи скрещены.

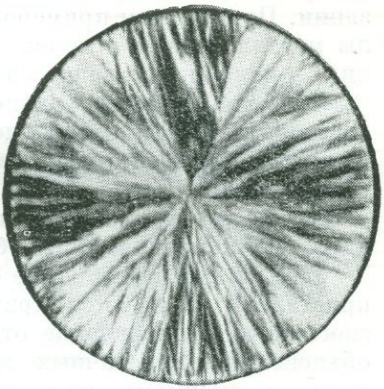


Рис. 3. α-нафтиламин, (×6), николи скрещены.

кристаллизации дает в результате нормальный к стороне квадрата ряд однородных кристаллов. При своем поступательном росте, который у салола протекает чрезвычайно равномерно, кристаллы, идущие от смежных сторон квадрата, сталкиваются по линии диагонали и взаимно прекращают свой рост. В конечном результате получается фигура конверта, где в идеальном случае секторы сходятся в центральной точке фигуры (рис. 2).

При опыте с круглым стеклом $d = 8$ *мм* заражение велось проволочным кольцом, быстро погружавшимся в выступающий за края стекла кант из расплавленного салола. Получающуюся картину легко предвидеть: кристаллы сходятся в центре круга. Под микроскопом при скрещенных николях получается картина псевдосферолита с черным крестом (рис. 3). Такое образование отвечает выполненной жеоде или секреции среди природных образований.

Объяснить описанное выше явление ортотаксиса можно так. Представим себе, что на участке линии одновременно возникает ряд равноценных центров кристаллизации. Некоторое время из каждого центра свободно во все стороны развивается кристалл или радиальный пучок кристаллов. Но наступает момент, когда со-

седние кристаллы или пучки (будем называть их сферолитами) сталкиваются и дальнейший их рост остается возможным лишь в направлении, близком к перпендикулярному к линии, соединяющей центры. Если мы расстояние между центрами кристаллизации сделаем произвольно малым, то в результате получим от каждого центра по одному лучу, ширина которого будет равна расстоянию между центрами, а направление роста нормально к линии возникновения [7].

Это рассуждение свободно можно распространить на случай поверхности одновременного возникновения центров кристаллизации. Прекрасным примером могут служить игольчатые кристаллы металлических отливок, нормальные к поверхности охлаждения — явление, хорошо знакомое металлургам.

На деле, конечно, равноценность всех центров и равенство расстояний между ними не достижимы, вследствие чего и происходит угнетение некоторых из них другими более интенсивно разрастающимися.

Примером такого рода может служить кристаллизация сферолитов серы, прекрасно разобранная Б. Поповым [8].

Уже из описанных выше опытов следует, что ортотропия роста кристаллов вызывается причинами характера чисто геометрического и что направление отдачи тепла, которому Fr. Rinne для объяснения аналогичных явлений придает большое значение, здесь, по-видимому, не играет никакой роли. Действительно, во всех разобранных случаях отдача тепла идет преимущественно, а в случае сферолита даже исключительно в направлении, перпендикулярном к препарату; ориентировка же кристаллов происходит в плоскости препарата.

Для того чтобы окончательно убедиться в ничтожной роли отдачи тепла, мы произвели следующие опыты, в которых тепловой ток вызывался в плоскости самого препарата.

1. Массивная металлическая плитка, охлажденная до 0°, клалась на один край квадратного покровного стекла, под которым находился переохлажденный до комнатной температуры расплав салола. Затем иглой быстро проводилось вдоль двух ребер, перпендикулярных краю охлаждающей пластины. Полученная картина не отличалась ничем от контрольного препарата без охлаждения. Искривления или отклонения растущих кристаллов в ту или иную сторону от заданного направления не наблюдалось. Если получались группы кристаллов, не расположенных перпендикулярно к краю стекла, то обычно они шли от одного центра, веерообразно и безразлично в обе стороны. Кроме того, как было сказано, контрольный препарат давал в точности те же явления.

2. Второй опыт производился со сферолитом. Препарат с вызванным через дырочку в стекле центром кристаллизации погружался до половины в ванночку с водой, охлаждаемой тающим снегом до 0°. Причем [центр] растущего сферолита приходился на разделе воздух — вода.

Рост сферолита наблюдался через стенки ванночки. Никакого искажения сферолита, растущего в обычных условиях круглым, не наблюдалось. При рассматривании готового препарата под микроскопом кристаллические лучи идут строго прямолинейно из центра, никаких отклонений или искривлений, которые можно было бы приписать влиянию теплового тока, не замечалось.

Ленинград
Кристаллографическая лаборатория
Минералогического музея АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. C. H. Carpenter, C. F. Elam.* Proc. Roy. Soc., A, 1921, **100**, N 704, 329; *J. Czochralski.* Z. phys. Chem., 1917, **92**, N 2, 219; *I. Obreimow, A. Schubnikow.* Z. Phys., 1924, **25**, N 1, 31.
2. *F. Stöber.* Z. Kristallogr., 1925, **61**, N 1—2, 229.
3. *F. Rinne.* Sächsische Akad. Wiss. Math.-Phys. Klasse., 1926, 78.
4. *F. Rinne.* Z. Kristallogr., 1926, **64**, N 1—2, 71.
5. *R. Nacken.* Neues Jahrb. Mineral., Kristallogr., Petrogr., 1915, **11**, 141.
6. *G. Tammann.* Kristallisieren und Schmelzen. Leipzig, 1903, S. 147.
7. *H. Möller.* Die Gesetze des Keim — und Kristallwachstums mit besonderer Berücksichtigung der Keimauslese und des orientierten Kristallwachstums. Diss. Greifswald, 1924.
8. *Б. Попов.* Новый метод исследования сферолитовых образований.— Труды Сиб. об-ва естествоиспытателей. Отд-ние геологии и минералогии, 1903, **33**, вып. 5, с. 19.

О КРИСТАЛЛИЗАЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ РАСПЛАВА[1]

Известно, что на границе между жидкостью и газом можно наблюдать ряд физических явлений, которые с несомненностью свидетельствуют о существовании на поверхности жидкости особой упругой пленки, называемой капиллярной. Эта последняя не отличается химическим составом от жидкости, но обладает совершенно иными физическими свойствами, что стоит в тесной связи с особым правильным расположением молекул в пленке [1]. Эти отличия в строении жидкого вещества в общей массе и в поверхностной пленке заставляют искать различия и в ходе кристаллизации внутри жидкости и на ее поверхности.

[1] Совместно с Г. Г. Леммлейном. Наук. зап. цукровоі пром., 1930, т. 9, вып. 3—4, с. 349—354.
Редакция «Записок» с удовольствием отводит место оригинальным наблюдениям А. В. Шубникова и Г. Г. Леммлейна, впервые публикуемым на русском языке. Проведение каких бы то ни было аналогий с процессами сахарного производства пока, конечно, невозможно, но в связи с распространением метода затравки интересен сам факт массового отщепления новых центров кристаллизации.

Для настоящего эксперимента мы воспользовались салолом ($C_6H_5CO_2C_6H_4OH$), который, плавясь при 41,7° С [2], свободно переохлаждается до комнатной температуры и сохраняется в таком виде сутками, не кристаллизуясь.

Если мы поместим в одной точке чистой поверхности переохлажденного расплава салола группу кристаллических зародышей, то они не остаются компактной, слипшейся кучкой, а, напротив, каждый зародыш, начав нарастать, приходит в быстрое центро-

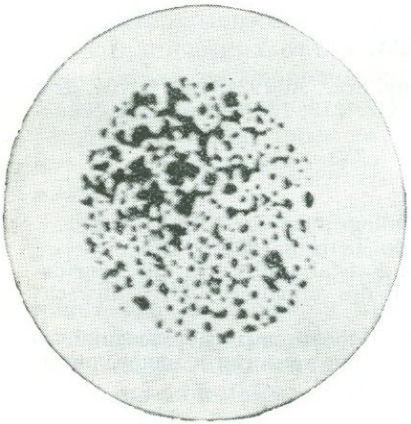


Рис. 1

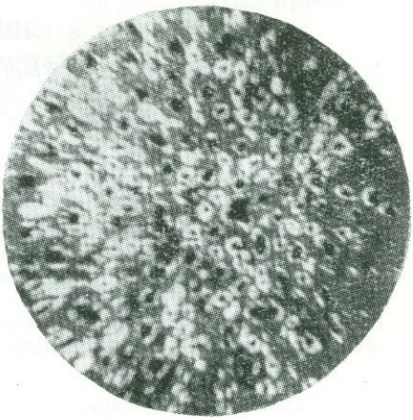


Рис. 2. Скрещ. николи

бежное движение, в результате чего они распределяются по всей поверхности жидкости. Моментальная фотография такого опыта, снятая через несколько секунд после начала, представлена на рис. 1*. На ней особенно ясно видно, что зародыши, внесенные на конце иглы, при разбегании всей кучи располагаются внутри круга. Этот первоначально наблюдавшийся эффект подвергся более детальному изучению в следующей обстановке. Салол плавился в маленькой чашке Петри и закрытый крышечкой охлаждался до комнатной температуры. Чтобы иметь возможность снять фотографию в любой момент явления, чашечка ставилась на столик микроскопа и заражение поверхности расплава зародышами осуществлялось иглой, прикрепленной к штативу микроскопа и центрированной в поле зрения последнего. Перед опытом на конец иглы в отдельном сосуде наращивался слой салола и затем он слегка разрушался с поверхности трением о наждачную бумагу или матовое стекло. Таким острием, покрытым множеством легко отделимых пылинок кристаллического вещества, или быстро прикасались к поверхности расплава, или коротким ударом по рукоятке

* На рисунках увеличение в 6 раз.

иглы пылинки стряхивались над самой поверхностью. В том и другом случае зародыши, плавая на поверхности расплава, начинают быстро вырастать в отдельные кристаллы или лучистые сростки их — сферолиты, одновременно удаляясь друг от друга и от места своего падения. На фотографии рис. 2, снятом в поляризованном свете не моментально, а с незначительной выдержкой, видно, как многочисленные кристаллы салола расходятся радиально из одной точки (места введения зародышей). На этой же фотогра-

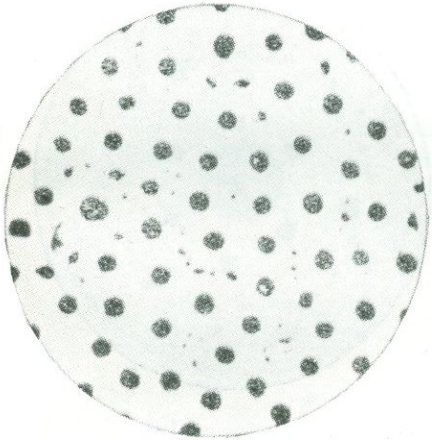


Рис. 3

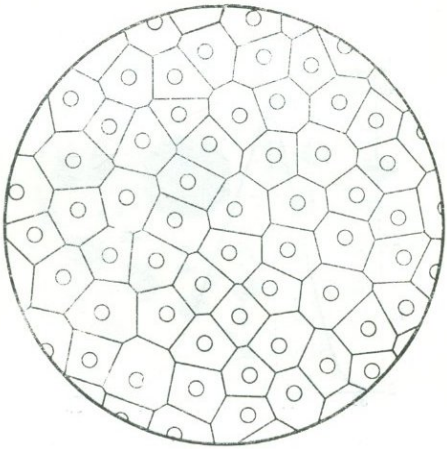


Рис. 4

фии можно видеть, что пути, пройденные кристаллами за время экспозиции, оказываются тем большими, чем дальше кристаллы отошли от центра. Это значит, что кристаллы движутся с ускорением и потому во время опыта находятся непрерывно под действием некоторых отталкивательных сил. Возникает вопрос, как должны распределиться по поверхности расплава сферолиты под влиянием этих отталкивательных сил, если зародыши равной величины будут введены на поверхность одновременно и будут расти с одинаковой скоростью. Ответом на этот вопрос служит фотография (рис. 3), снятая почти со всей разбежавшейся группы сферолитов. При рассматривании рисунка обращает на себя внимание р а в н о м е р н о с т ь распределения сферолитов по поверхности расплава. Чтобы сделать ее более очевидной, мы разбили все поле фотографии на полигоны (многоугольники), проводя перпендикулярные линии через середины прямых, соединяющих центры ближайших друг к другу сферолитов. Нетрудно видеть, что полученные таким образом полигоны (рис. 4) отвечают тем формам, которые приобретут сферолиты к концу кристаллизации, если они, остановившись на местах, занимаемых ими в момент

фотографирования, будут расти далее все с одинаковыми скоростями.

Надо отметить, что стороны полигонов являются в то же время действительными границами полей влияния отдельных сферолитов. В самом деле, на некоторых участках рис. 3, видно, как мелкие кристаллики салола, отбрасываемые от окружающих сферолитов, вытягиваются по тем же линиям, которые получены чисто графическим путем в соответствующих частях рис. 4.

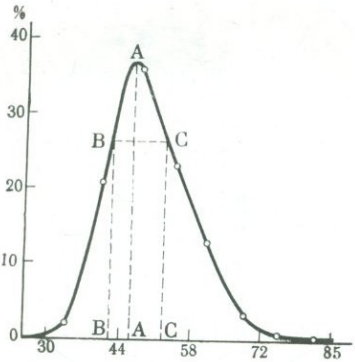


Рис. 5

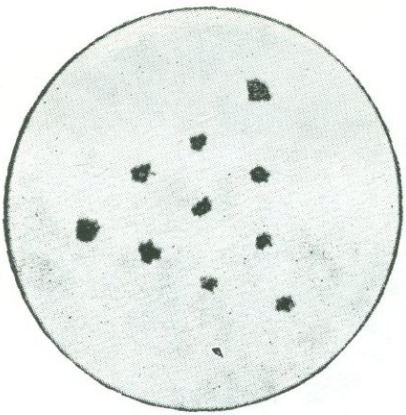


Рис. 6

Измерив планиметром площади полигонов с ряда фотографий разбегания сферолитов и приведя цифры каждой фотографии к средней площади в 50 кв. усл. ед., мы получили 310 площадей. Сгруппировав все цифры в восемь интервалов по 7 кв. ед. и отложив по оси абсцисс значение площадей полигонов, а по оси ординат число случаев в процентах от всего числа наблюдений, получаем статистическую кривую с максимумом около 46 кв. ед., на который падает почти 37% всех случаев (рис. 5).

Тот факт, что все точки нашей диаграммы довольно хорошо располагаются на плавной кривой, имеющей один вполне определенный максимум, с несомненностью свидетельствует, как о том учит математическая статистика, что в основе изучаемого явления лежит явная тенденция сферолитов занимать равные (46 кв. ед.) площади на поверхности расплава. При идеальном осуществлении этой тенденции все полигоны должны быть равны друг другу. Исходя из теории Е. С. Федорова о системах правильных фигур на плоскости можно ожидать, что число сторон полигонов при соблюдении этого условия будет равно 3, 4 или 6. Следующий статистический подсчет числа сторон полигонов показывает, что сферолиты стремятся расположиться в центрах шестиугольников.

Максимальное число наблюдавшихся случаев приходится, действительно, на шестиугольники:

Число сторон	3	4	5	6	7	8	9
Число случаев	0	10	100	136	53	11	0

Простое чутье говорит, что в идеале шестиугольники эти должны быть правильными или, что то же самое, центры сферолитов должны располагаться по вершинам правильных треугольников.

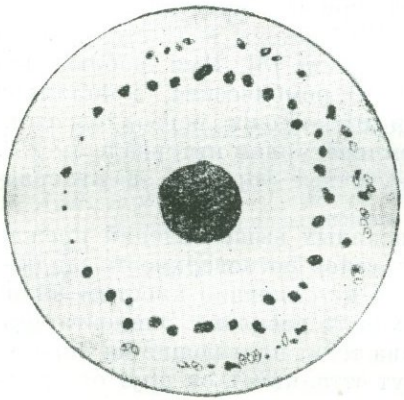


Рис. 7 (×5)

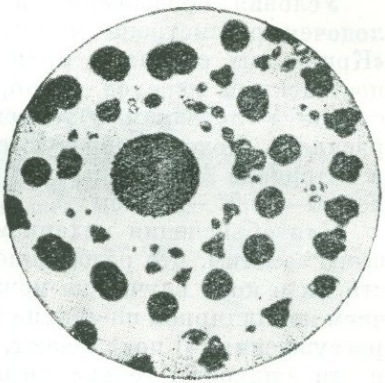


Рис. 8 (×5)

Как редкий случай такого идеального расположения приведен рис. 6, на котором изображена часть группы одновременно растущих сферолитов. Само собой разумеется, что такие случаи встречаются весьма редко, ибо ни одновременность возникновения, ни равенство размеров зародышей на опыте далеко не часто могут быть осуществлены.

Несколько видоизмененный опыт показывает поведение одинокого, изолированного сферолита. На поверхность расплава помещается не группа мелких зародышей, а один довольно крупный (до 2 *мм*) заранее выращенный сферолит, предварительно обкатанный на наждачной бумаге. От такого сферолита, как от центра, отбрасываются мелкие вторичные и вскоре выстраиваются правильным кольцом вокруг (рис. 7 и 8).

На рис. 7 и в особенности на рис. 8 заметно, что помимо одного большого и многих мелких круглых сферолитов имеется еще внешнее и внутреннее кольцо из лодочкообразных кристаллов, появившихся позднее. Эти кристаллы с кривыми гранями образуются под растущими сферолитами и выносятся с большой быстротой на поверхность, где и растут наравне со сферолитами. Достигнув известной величины, они перестают быть индивидуальными кристаллами, начинают скучиваться и дают начало новым сфероли-

там, от которых в свою очередь отрываются и разбегаются лодочки и т. д., пока все явление не придет к своему естественному финалу, т. е. пока не образуется сплошная кора. Возвращаясь к рис. 3, следует отметить, что при построении полигонов принимались во внимание только первичные сферолиты. При этом вторичные сферолиты оказывались расположенными на сторонах полигонов. Характерно, что отплывающая от сферолита лодочка почти, как правило, располагается своей длинной осью не вдоль, а поперек направления движения.

Условия образования и форма кривых кристаллов салола лодочек рассмотрены в статье А. Шубникова и С. Мокрушина «Кристаллы салола с кривыми гранями» [3]. Ими наблюдался постепенный переход от нормальных ромбических кристаллов салола к лодочкам в зависимости от степени переохлаждения расплава. Лодочки образуются в температурном интервале 0—23°, в интервале 23—30° растут промежуточные формы, а в интервале 30—41,5° — ромбы.

Для объяснения механизма описанных выше явлений прежде всего заметим, что разбегание кристаллов по поверхности жидкости ни в коем случае не может быть истолковано простым наличием капиллярной пленки на поверхности расплава. Элементарные рассуждения [4] показывают, что два тела, плавающие на поверхности жидкости, только тогда будут отталкиваться друг от друга капиллярными силами, если одно тело смачивается, а другое не смачивается жидкостью. В нашем случае этого быть не может, так как все плавающие кристаллы должны одинаково относиться к жидкости. Отсюда не следует, что капиллярные силы вовсе не участвуют в явлениях разбегания, наоборот, их участие оказывается неизбежным, и вот почему. Так как наши кристаллы растут из переохлажденной жидкости, то температура около кристаллов вследствие выделения теплоты кристаллизации должна быть несколько выше, чем температура жидкости вдали от кристаллов. Известно [5], что капиллярная постоянная жидкостей убывает с температурой, поэтому около кристаллов возникают силы, растягивающие поверхностную пленку по радиусам от кристалла. Действие теплого кристалла, появившегося на холодной поверхности жидкости, таким образом, может быть уподоблено действию капельки масла, помещенной на поверхности воды. Следующий простой опыт показывает, что разница в величинах капиллярной постоянной, возникающая вследствие реально существующей разницы температур на поверхности расплава салола, может служить причиной разбегания кристаллов. На поверхности нагретого до температуры 40—45° матового стекла размазывалась капля салола; стекло помещалось своей сухой стороной на холодную массивную медную плиту с отверстием диаметром в 1 *см*. Естественно ожидать, что в этих условиях вследствие неодинаковой отдачи тепла, через некоторое время возникает разница в температуре между средней частью капли, расположен-

ной над отверстием, и краями капли, находящимися над металлом. Опыт показывает, что капля при этом принимает форму чаши с дном, расположенным как раз над отверстием в медной плите. Возникновению отталкивательных сил между плавающими кристаллами должны способствовать также и конвекционные потоки. Без специальных опытов нельзя решить, какая из двух причин играет в описанных явлениях доминирующую роль.

Ленинград
Кристаллографическая лаборатория
Минералогический музей АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Bragg.* Nature, 1925, **115**, 266; *Langmuir I.* Proc. Nat. Acad. Sci., 1917, **3**, N 3, 141; 1917, **3**, N 4, 251.
2. *R. Nacken.* Neues Jahrb. Mineral., Petrogr., Kristallogr., 1915, **2**, 141.
3. *А. В. Шубников, С. Г. Мокрушин.* Изв. Уральск. гос. ун-та, 1921, **2**, 1.
4. *У. Г. Брагг.* О природе вещей. Пер. с англ. М.— Л., Госиздат., 1926. 163 с.
5. Landolt-Börnstein. Physik-Chem. Tabelle. Berlin, Springer, 1923. Bd. I—II. 1695 S.

О ПРИРОДЕ ВИЦИНАЛЬНЫХ ГРАНЕЙ ОКТАЭДРА АЛЮМОКАЛИЕВЫХ КВАСЦОВ[1]

Реферат

Вицинальными гранями называются грани, составляющие малые (от нескольких минут до нескольких градусов) углы с гранями, имеющими малые индексы. Надлежит различать вицинали и вициналоиды. Вицинали — хорошо образованные грани, малые углы которых можно измерять обычными отражательными гониометрами. Вициналоиды — различные неровности на гранях кристалла, в том числе и на вицинальных гранях. Гониометрический сигнал от вициналоидов получается размытым. В многолетней дискуссии многих авторов о природе вициналей многие недоразумения возникли из-за смешения понятий вициналей и вициналоидов.

В работе исследуются вицинальные грани октаэдра алюмокалиевых квасцов. Вицинальные грани на кристаллах квасцов образуются при росте из растворов, пересыщенных на 2—3%. При растворении они не образуются. Вицинальные грани представляют собой всегда только грани роста, а не грани растворения. На кристаллах алюмокалиевых квасцов вицинальные грани образуются

[1] Совместно с Б. К. Бруновским. Z. Kristallogr., 1931, **77**, № 3—4, 337—345.

всегда только на гранях октаэдра и никогда не возникают на гранях куба или ромбического додекаэдра.

Построена гипотетическая модель вицинального полиэдра, состоящего из граней пирамидального октаэдра.

Для исследования граней октаэдра с вицинальными гранями, образующими на них трехгранную пирамиду, применены методы отражения видимого света и рентгеновских лучей.

Сигнал от удаленного источника белого света отражается от грани кристалла и регистрируется на фотографической пластинке, установленной вблизи от кристалла, параллельно фотографируемой грани. Таким образом получается неискаженная фотография грани кристалла почти в натуральную величину. На фотографиях видно, что грань октаэдра состоит из трех плоских граней, образующих трехгранную пирамиду и составляющих между собой углы до 20′. Грани эти сами не идеальны, на них видны вициналоиды, слабо рассеивающие свет. Именно это слабое рассеяние дало повод некоторым предыдущим авторам сделать неправильное заключение о том, что грани вициналей искривлены.

Далее применяются два метода отражения параллельного пучка рентгеновских лучей (MoK$^{\alpha}$) от исследуемой грани октаэдра с вицинальными гранями. Пучок лучей, проходя через систему щелей, отражается от поверхности кристалла. Кристалл может вращаться вокруг оси, совпадающей с ребром между вицинальными гранями. Поворот осуществляется отдельно от фотографической пластинки или синхронно с ней. Измеряется продольное и поперечное расщепление сигналов и углы их отражения. По наблюдаемым расщеплениям сигналов делается вывод, что вицинальные грани не являются случайными отклонениями от грани октаэдра, но представляют собой самостоятельные грани.

Опыт не дает возможности решить, являются ли они гранями рациональными или иррациональными, но авторы не отвергают возможности существования иррациональных граней.

ОБ ИСКУССТВЕННОМ ПОЛУЧЕНИИ ЗАКОНОМЕРНЫХ СРОСТКОВ КРИСТАЛЛОВ АЛЮМОКАЛИЕВЫХ КВАСЦОВ[1]

Предисловие. Г. Г. Леммлейн в 1930 г. опубликовал свои предварительные наблюдения над сростками высокотемпературных кристаллов кварца из кварцпорфиров [1]. Он изучал отпечатки, остающиеся на грани одного из кристаллов после распада сростка. Эти отпечатки всегда имели форму треугольника, отвечаю-

[1] Совместно с М. П. Шаскольской. Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1933, вып. 3, с. 51—66.

щего граням ромбоэдров {10$\bar{1}$1}, маленького приросшего кристаллика; во многих случаях эти треугольники по отношению к грани, на которой они отпечатались, были закономерно ориентированы. Эти наблюдения позволили Леммлейну снова выдвинуть ту теорию образования двойников, к которой пришел еще Gaubert [2] в 1896 г., изучая срастание кристаллов азотнокислого свинца. Выводы свои Леммлейн формулировал так: «порфировые вкрапленники кварца, соприкоснувшись в магматическом расплаве, ориентируют друг друга и срастаются в более или менее прочный сросток». Вновь выдвигаемая несомненно правильная теория Gaubert имеет в настоящее время особый интерес, потому что в позднейших работах она не получила, как нам кажется, должной оценки. Так, C. Viola [3], принимая основную идею Gaubert, совершенно неправильно расширяет ее, утверждая, что «кристаллы срастаются своими наиболее развитыми гранями и ребрами вследствие тех же механических причин, как и некристаллы, имеющие форму кристаллов, если их поместить в жидкость и заставлять двигаться друг около друга... Наиболее вероятными будут при этом закономерные сростки». Нам кажется, что при таком расширенном понимании закономерного срастания остается сделать только один шаг, чтобы закономерное стало незакономерным. Отсюда ясно, почему C. Viola [4] вынужден называть закономерными срастками совершенно произвольные сростки маленьких октаэдрических кристалликов квасцов, выпадающих на искусственной грани (100) большого кристалла. Наряду с признанием возможности образования настоящих (см. ниже) закономерных сростков путем слипания двух независимо выросших кристаллов, которое мы все же встречаем в воззрениях C. Viola, другие авторы, по-видимому, вполне игнорируют эту возможность. Так, A. Johnsen [5], перечисляя все способы образования двойников, не упоминает совсем об этой возможности. «Двойники,—говорит он,—происходят, как таковые, непосредственно из жидкой или газообразной фазы или они возникают в результате дальнейшего роста одиночного кристалла вследствие изменившихся условий в то время, как незакономерные сростки получаются в результате случайного срастания отделенных друг от друга кристаллов». Из изложенного следует, что теория Gaubert в настоящее время отнюдь не может считаться общепринятой.

Мы поставили своей целью проверить выводы Леммлейна, сделанные им из наблюдений над естественными кристаллами, экспериментально и притом таким образом, чтобы процесс слипания двух кристаллов можно было проследить непосредственно, а не так, как это делал Gaubert, сращивавший кристаллы перемешиванием раствора, содержащего большое количество мелких кристаллов и наблюдавший готовый результат опыта. Материалом для работы мы выбрали алюмокалиевые квасцы.

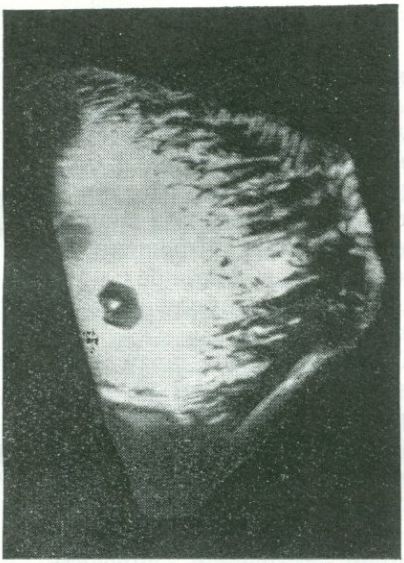
Относительно возможности образования для квасцов настоящих закономерных сростков (в том числе и двойников), т. е. таких

сростков, которые обусловлены строением кристаллов, а не только наличием в них тех или иных граней и ребер, мы встречаем в литературе весьма скудные данные. Сам Gaubert [2], работавший, как сказано с $Pb(NO_3)_2$, говоря о двойниках по шпинелевому закону, замечает буквально только следующее: «Это имеет место для азотнокислого свинца, квасцов. Быстро охлажденный раствор этих солей выделяет двойники». A. Jonhsen [5] же «этим способом вообще никогда не мог получить двойников, быть может потому, что мешало образованию зародышей». Во всяком случае, в справочнике P. Groth о двойниках квасцов не говорится ни слова, хотя в старых работах J. S. Presl [6] и W. Haidinger [7] имеются указания на двойники по шпинелевому закону для естественных квасцов. Таким образом, наряду с общей задачей доказать возможность образования закономерных сростков путем слипания кристаллов, мы поставили себе целью специально выявить законы срастания на квасцах.

Началом нашей работы послужило случайное наблюдение: на кристалл квасцов, находившийся в пересыщенном растворе, упало несколько мелких кристалликов: большинство сейчас же соскользнуло, но один, несмотря на сильное встряхивание сосуда с раствором, крепко прилип. При ближайшем рассмотрении оказалось, что он прирос в двойниковом положении, по шпинелевому закону. Кристалл этот был в дальнейшем отделен, но на грани большого кристалла остался ясный отпечаток (рис. 1). Резкое сходство этого отпечатка с отпечатками, которые изучал Леммлейн, навело нас на мысль, что здесь мы имеем то же явление — взаимную ориентировку и срастание кристаллов при соприкосновении. Для проверки этой гипотезы был предпринят ряд опытов, в результате которых наше основное предположение можно считать безусловно доказанным.

Техника эксперимента. Задачей опыта является: вырастить большой кристалл, привести в соприкосновение с ним мелкие кристаллики и наблюдать их срастание в растворе. Поскольку мы изучали сростки на грани октаэдра и на грани куба, нам нужно было получить кристалл с большими гранями либо куба, либо октаэдра.

Выращивание октаэдра, наиболее простая часть опыта, ведется кристаллизацией из пересыщенного раствора. Стеклянная банка (рис. 2), в которую наливается еще горячий раствор, закрывается резиновой пробкой. В пробку вставлена стеклянная палочка; на конец ее надет кусок толстостенной резиновой трубки, края которой выступают за концы палочки, образуя углубление. В это углубление вкладывается с трением маленький кристалл квасцов гранью октаэдра наружу. Сейчас же после наливания раствора банку опрокидывают вверх дном и оставляют в таком положении до остывания раствора. Это делается для того, чтобы более концентрированный, а следовательно, и более тяжелый раствор, образовавшийся около начавшего растворяться кристал-



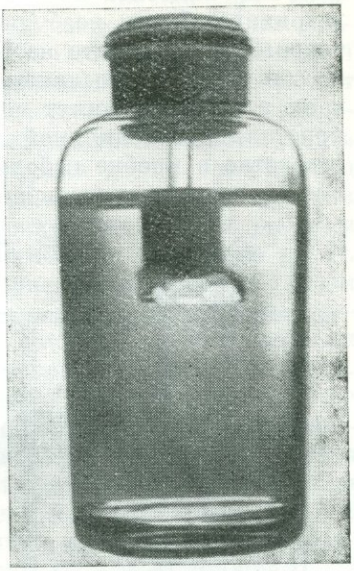


Рис. 1. Отпечаток, оставшийся на грани октаэдра после распада шпинелевого двойника (ув. в 2 раза)

Рис. 2. Кристалл квасцов, с большой горизонтально расположенной гранью октаэдра, выращенный в банке (уменьшено вдвое)

лика, находился над ним и, таким образом, кристаллик, окруженный со всех сторон либо толстостенной резиновой трубкой, либо этим раствором, не мог растворяться дальше. По остывании банка ставится в нормальное положение, и кристалл начинает расти. В этих условиях грань октаэдра развивается больше всех остальных, и поэтому габитус кристалла получается пластинчатый по {111}. В несколько дней кристалл достигает величины 2—3 *см*, что дает возможность переходить ко второй стадии опыта.

Значительно сложнее и медленнее происходит выращивание кристаллов с большими гранями куба. Как известно, квасцы кристаллизуются в кубах лишь при прибавлении в раствор различных посторонних веществ. Мы воспользовались работами по этому вопросу П. А. Земятченского [8], A. Polis [9] и V. Foullon [10] и согласно их указаниям кристаллизовали квасцы из растворов с примесью соды или буры. Если брать приблизительно такие пропорции, какие даны в цитированных статьях, можно путем выпаривания при комнатной температуре в течение 1—3 месяцев вырастить почти идеальные кубы с ребром до 2,5 *см*.

Во второй стадии опыта нам нужно в том же растворе, в котором растет основной кристалл, получить мелкие кристаллики. В случае если большой кристалл выращен в банке на конце стеклянной

палочки, наиболее простой способ состоит в том, чтобы, сильно встряхивая банку, возбудить новые центры кристаллизации в растворе. Так же просто на 1—2 *сек* приоткрыть банку и тем самым ввести в раствор пылинки — зародыши из воздуха. В обоих случаях в растворе минут через 10 образуется большое количество кристалликов величиной до 0,5 *мм*. Можно также ввести через отверстие в пробке небольшое количество уже готовых кристалликов, выкристаллизованных отдельно в другом растворе. Этот способ всего удобнее для сращивания маленьких кубов, выращенных, как описано выше, в растворе с примесью соды или буры, с большими октаэдрами.

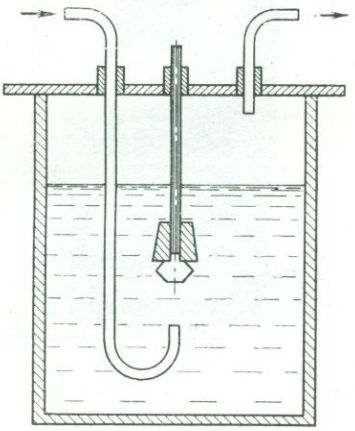


Рис. 3. Схема опыта, в котором двойник был получен при перемешивании раствора струей воздуха

Когда тем или иным способом в растворе получены мелкие кристаллики, наступает новая стадия опыта — сращивание кристаллов. Поворачивая банку, мы заставляем мелкие кристаллики упасть на большой и сейчас же энергичным встряхиванием стараемся сбросить их прочь. При этом, однако, оказывается, что не все кристаллы можно сбросить, некоторые сразу же крепко прилипают. После 5—6-кратного повторения такой процедуры мы получаем на большом кристалле в среднем 12—14 приросших кристалликов. Такой кристалл мы оставляем в растворе еще на несколько часов для того, чтобы увеличить размер приросших кристалликов и тем самым облегчить исследование их. Затем кристалл вынимается.

В одном случае удалось получить двойник при перемешивании раствора струей воздуха, причем большой кристалл был расположен гранью октаэдра вниз (рис. 3). Из этого опыта можно видеть, что зародыш, движущийся около большого кристалла, может быть притянут последним с силой, способной остановить зародыш и преодолеть его вес. Именно этот двойник и изображен на рис. 11. Что касается сращивания маленьких октаэдрических кристалликов с большими кубическими кристаллами, то для этого случая нами не выработано какой-либо техники, которая приводила бы всегда к определенным результатам.

Методы исследования и учета закономерных срастаний. Само понятие закономерного сростка предполагает наличие постоянных углов между какими-нибудь ребрами или гранями срастающихся кристаллов. Возникает вопрос, насколько точно могут сохраняться эти углы при закономерных срастаниях. Заранее можно сказать, что идеально точной ориентировки

при срастаниях квасцов быть не может, так как тут вступают в права вицинальные грани, которые всегда имеются на гранях октаэдра квасцов [11]. По данным P. Groth [12], W. Butzlaff [13] и других авторов, угол между вицинальными гранями может доходить в зависимости от пересыщения раствора до 30′; следовательно, при срастании двух кристаллов эти грани могут вызвать отклонение от идеально точной ориентировки до 1°; поэтому под закономерными мы будем понимать в дальнейшем такие сростки кристаллов квасцов, в которых углы между гранями или ребрами сросшихся индивидов остаются постоянными с точностью до 1°.

Отбор закономерных сростков мы производили простым глазом и лупой. Для оценки правильности этого метода нами было проделано специальное исследование той точности, с которой наш глаз определяет параллельность и перпендикулярность линий.

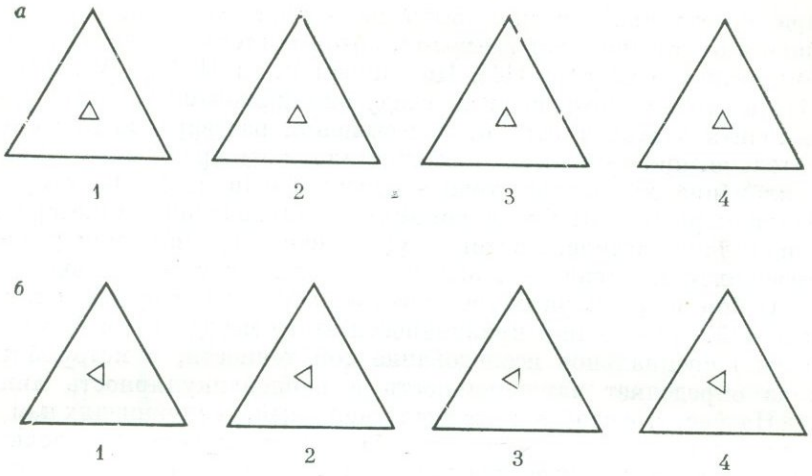
На рис. 4, *а* изображены шесть чертежей, послуживших нам для испытания чувствительности глаза к определению параллельности. В первом из этих чертежей все линии маленького треугольничка строго параллельны линиям большого треугольника, во втором они повернуты на 1°, в третьем — на 2° и т. д. до 5°. Для испытания эти чертежи были размножены фотографическим способом до 120 экземпляров (по 20 экземпляров каждого). Испытуемому предлагалось выбрать те треугольники, в которых, по его мнению, линии строго параллельны. Количество верных ему не было известно. При этих условиях лишь очень немногие делали ошибки выше 3°; для работника, проделавшего настоящие исследования, результат испытания получился следующий (табл. 1):

Таблица 1

Угол поворота треугольника, °	Количество выбранных треугольников			
	I	II	III	IV
0	20	20	20	20
1	1	—	—	1
2	—	—	—	—

Таблица 2

Угол поворота треугольника, °	Количество выбранных треугольников			
	I	II	III	IV
0	18	16	18	19
1	3	4	2	1
2	1	—	—	—



Это значит, что при 4-кратном испытании было сделано всего лишь две ошибки, каждый раз на 1°, и не было пропущено ни одного чертежа с правильной ориентировкой.

На рис. 4, *б* изображена аналогичная серия чертежей, послуживших для испытания чувствительности глаза к определению перпендикулярности. Результат испытания при таких же условиях получился несколько хуже (табл. 2).

Из изложенного следует, что точность глазомерного определения параллельности и перпендикулярности линий вполне отвечает ожидаемой точности образования закономерных сростков. Принимая, однако, во внимание, что параллельность или перпендикулярность ребер кристалла труднее определить, чем параллельность или перпендикулярность линий чертежа, и считаясь с неизбежной тенденцией наблюдателя невольно преувеличить правильность ориентировки, мы принимаем, что наша ошибка определяется пределами $\pm 3°$.

После всего сказанного легко вычислить вероятность встретить тот или иной определенный сросток в предположении, что взаимная ориентировка двух кристаллов определяется чистой случайностью. Параллельный сросток двух кристаллов по определенным граням октаэдра может быть осуществлен тремя способами (рис. 5, *б*). При ошибках в определении параллельности ребер в $\pm$ 3°, т. е. в пределах 6°, вероятность параллельного срастания будет поэтому $3 \cdot (6/360) = 1/20 = 5\%$. Для шпинелевых сростков (рис. 5, *б*) вероятность будет та же. Для новых закономерных сростков грани куба с гранью октаэдра при параллельности рядов [110] (см. ниже) вычисленная вероятность будет $12 \cdot (6/360) = 1/5 = 20\%$, так как такой сросток может осуществляться двенадцатью способами (рис. 6). Далее мы увидим, что наблюдавшийся процент только что перечисленных закономерных

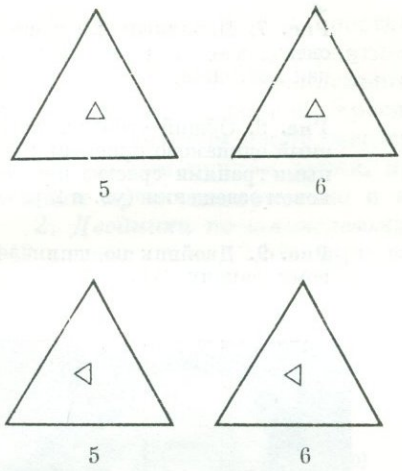


Рис. 4. Чертежи, посредством которых испытывалась точность глазомерного определения параллельности (*а*) и перпендикулярности (*б*) линий (натуральная величина)

сростков значительно превосходит вычисленный, откуда следует, что мы имеем в данном случае дело не со случайностью, а с законом.

Мы приняли, что ошибки наблюдений не выходят из пределов $\pm 3°$, а ошибки самой природы при образовании сростков лежат в пределах 1°. Возникает вопрос, как должен был бы измениться

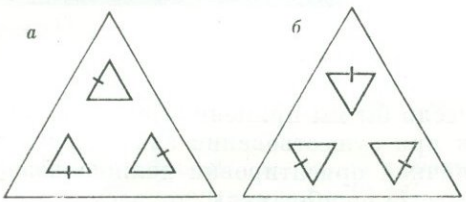


Рис. 5. 3 положения грани октаэдра на грани октаэдра, приводящие к параллельным сросткам (*а*) и к двойникам по шпинелевому закону (*б*)

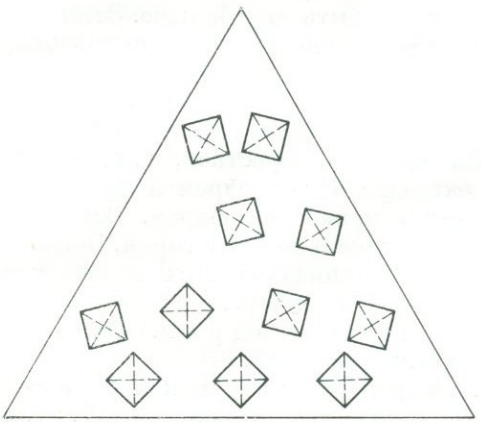


Рис. 6. 12 положений грани куба на грани октаэдра, приводящие к закономерным сросткам

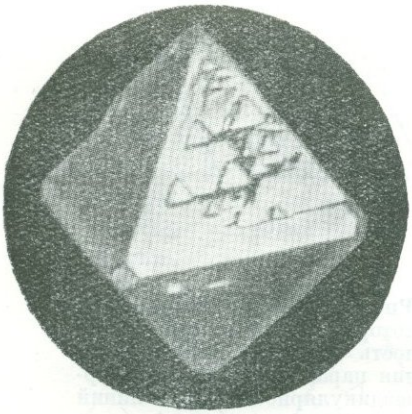


Рис. 7. Параллельные сростки октаэдра с октаэдром (натуральная величина)

Рис. 8. Общий отблеск, даваемый одинаково ориентированными гранями сростка при боковом освещении (ув. в 2 раза)

Рис. 9. Двойник по шпинелевому закону (ув. в 1,5 раза)

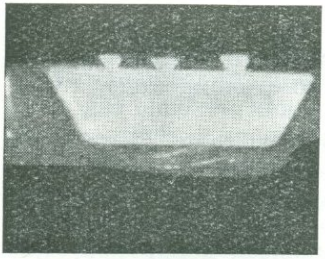


Рис. 8



Рис. 9

результат нашей статистики, если бы мы применили более точный метод исследования. Так как при существовании закона густота распределения сростков различной ориентировки должна возрастать с уменьшением принятого за ошибку угла, то расхождение между вычисленным и наблюдавшимся процентом в случае более точного метода наблюдения должно быть еще больше. Этим лишний раз подтверждается правильность избранного нами глазомерного метода отбора закономерных сростков.

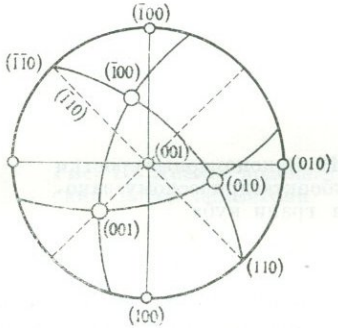
Описание и статистика закономерных сростков. Всего нами изучено 1417 сростков маленьких кристаллов на 120 больших кристаллах квасцов. Из них 1137 сростков, т. е. 80, 2%, падает на долю сростков октаэдра с октаэдром и 113 сростков, т. е. 7,9%, на долю сростков куба с октаэдром. Остальные 167 сростков разбиваются на несколько категорий, которые ввиду незначительного количества принадлежащих к ним кристаллов не поддаются статистическому учету.

Сростки октаэдра с октаэдром. Здесь наблюдаются два типа закономерных срастаний.

1. *Параллельные сростки*, на долю которых, как и следовало ожидать, падает наибольшее количество случаев,— 417, т. е.

36,6% из общего числа сростков октаэдра с октаэдром, что превосходит ожидаемую вероятность (5%) больше, чем в 7 раз. Типичный пример параллельных сростков изображен на рис. 7. Параллельность граней сросшихся кристаллов иллюстрирует рис. 8, на котором изображен сросток при боковом освещении его параллельным пучком лучей, причем все параллельные грани отражают лучи одновременно и в одном направлении.

2. *Двойники по шпинелевому закону* (рис. 9). Их наблюдалось 142 случая, т. е. 12,5% (при вероятности в 5%).



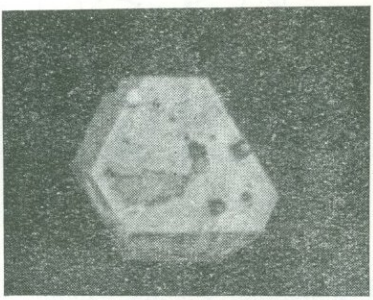


Рис. 10. Стереографическая проекция закономерного сростка по кубооктаэдрическому закону: совпадают зона [110] и грань (110)

Рис. 11. Закономерный сросток по кубооктаэдрическому закону. Приросший к грани октаэдра кристаллик представляет собой комбинацию куба с октаэдром, поэтому верхняя (блестящая) грань куба ограничена не ребрами типа [001], а ребрами типа [110] (натуральная величина)

Таким образом, всего из сростков октаэдра с октаэдром закономерно ориентированы 49,1%. Объяснение этих двух законов не составляет, конечно, никакой трудности: возможность полного совпадения сеток обеих срастающихся граней представляет явно наиболее благоприятные условия для срастания кристаллов.

3. *Срастание грани октаэдра с гранью куба.* Для этого случая нам удалось установить новый закон срастания кристаллов квасцов. У этих граней имеется одно общее направление [110], которое располагается у октаэдра параллельно его ребрам, а у куба параллельно диагоналям его граней. Срастаясь, грань куба и грань октаэдра ориентируются по общему обеим им направлению (рис. 10), что, конечно, является наиболее простым способом ориентировки. На фотографии (рис. 11) показана ориентировка грани куба на грани октаэдра. Во избежание недоразумений отметим, что на рис. 11 приросший гранью куба маленький кристаллик представляет собою комбинацию куба с октаэдром, причем стороны верхней грани куба суть ребра [110], в то время как на (рис. 6) квадратиками изображены грани чистого куба со сто-

ронами [100], чем и объясняется кажущаяся разница в ориентировке граней куба в обоих случаях. Всего нами изучено 113 сростков маленьких граней куба на больших гранях октаэдра; из них 46, т. е. 40,7%, оказались ориентированными таким способом; при вероятности в 20% это количество является вполне достаточным для установления закона.

Нам хотелось проверить этот закон для сростков маленьких октаэдрических кристаллов с большими кубическими. Но, по-

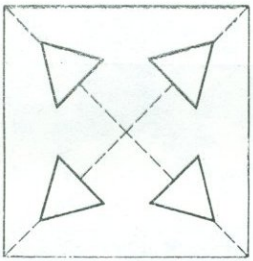


Рис. 12. Закономерные сростки по кубооктаэдрическому закону на грани куба

скольку техника такого эксперимента, как сказано выше, нами не была разработана до конца, эту мысль пришлось оставить. Впрочем, три сростка этого рода мы все же получили (рис. 12).

Теоретические соображения. Механизм образования закономерных сростков слипанием кристаллов можно представить себе следующим образом. Маленький кристаллик, падая на большой, ударяется о него сначала всегда одной из своих вершин, ибо вероятность того, что он упадет сразу каким-либо ребром или гранью, бесконечно мала в сравнении с вероятностью первого случая. Далее кристалл падает на ребро и лишь затем на грань. При таком единственно возможном способе падения первоначальная взаимная ориентировка срастающихся граней должна определяться чистой случайностью, ибо трудно себе представить, чтобы в течение весьма короткого времени первых двух стадий падения окончательная ориентировка была предопределена притяжениями незначительного числа молекул того и другого кристалла, находящихся в непосредственной близости друг от друга. Само собой разумеется, что соприкоснувшиеся грани должны быть параллельны друг другу в силу самого наличия соприкосновения [4]. Для объяснения закономерного слипания двух соприкоснувшихся кристаллов необходимо сделать одно из двух предположений:

1) кристаллы слипаются тем прочнее, чем правильнее они оказались ориентированными; поворота кристаллов друг относительно друга не происходит; закономерные сростки выживают вследствие естественного отбора;

2) упавший кристаллик поворачивается около оси, перпен-

дикулярной к плоскости соприкосновения обоих кристаллов, если требуемый угол поворота не превосходит какой-то определенной величины.

Мы склоняемся более ко второму предположению. Этот поворот маленького кристаллика мы ставим в связь с существованием в двух срастающихся гранях рядов решетки с равными параметрами. Поскольку две произвольные молекулярные плоскости кристалла пересекаются в одном общем им ряде пространственной

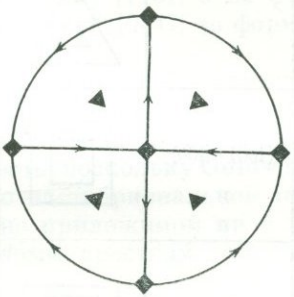
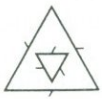
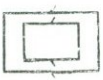
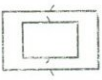


Рис. 13. Диакис-додекаэдрический класс симметрии

решетки, наличие по меньшей мере одного ряда с одинаковыми параметрами для двух срастающихся граней всегда обеспечено. Так как кристаллы в наших условиях могут срастаться только своими реально существующими и притом хорошо развитыми гранями, то для каждой произвольной пары граней можно наперед определить все мыслимые законы срастания, число которых в силу ограниченности числа граней не может быть слишком большим.

Для вывода всех таких законов нужно взять грани всех хорошо развитых простых форм, считая энантиоморфные грани одной и той же формы за различные, и расположить грани друг на друге так, чтобы ряды решетки с равными параметрами приняли прямо- или обратнопараллельное положение. Для квасцов, кристаллизующихся в диакис-додекаэдрическом классе (рис. 13), возможными оказываются закономерные сростки, изображенные на табл. 3. Цифрой 1 обозначен случай срастания двух энантиоморфных граней октаэдра, например (111) и ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$), соответствующий параллельному сростку кристаллов. Чертежи 2 и 3 изображают двойники, имеющие внешний вид параллельных сростков. В нашем исследовании эти три случая не различались и шли под именем параллельных сростков. Чертежи 4—6 соответствуют различным случаям шпинелевых двойников, нами также не различавшихся. Чертеж 7 изображает параллельный сросток, генетически отличный от сростка 1 и имеющий такой же внешний вид, как и двойник 8. То же можно сказать про параллельный сросток 9 и двойник 10. Сростки 7—10 нами не изучались. Далее следуют 4 кубооктаэдрических сростка 11—14, не отличимых друг от друга по внешнему виду. Этот тип сростков, как сказано выше, установлен для квас-

Таблица 3

(111)·(111)	1 	2 	3 	
	4 	5 	6 	
(100)·(100)	7 	8 		
(110)·(110)	9 	10 		
(111)·(100)	11 	12 	13 	14 
(111)·(110)	15 	16 	17 	18 
(100)·(110)	19 	20 		

цов впервые. Остальные закономерные сростки (15—20) нами не изучались.

Возникает вопрос, к какой категории закономерных сростков в классификации V. Goldschmidt [14, 15] должно отнести сростки по кубооктаэдрическому закону. Поскольку в данном случае совпадающими для обоих кристаллов являются одна грань (110) и одна зона [110] (рис. 10), следовало бы отнести наш сросток к двойникам в узком смысле слова [Zwillingsart III] [14], но для этого случая совпадающая грань должна лежать в совпадающей

зоне, чего в нашем сростке нет; поэтому следует попытаться отнести его к следующей группе сростков с пониженной закономерностью (Heterozwillinge). V. Goldschmidt предусматривает для таких сростков только два случая: 1) совпадение P_1 с Q_2 и Q_1 с P_2 и 2) совпадение R_1 с Q_2 и Q_1 с R_2, где P_1, Q_1, R_1 и P_2, Q_2, R_2 означают соответственно тождественные оси обоих кристаллов. Как видим, в обоих случаях третья ось предполагается не совпадающей ни по направлению, ни по величине. Так как в нашем случае за P_1 и P_2 можно взять общее ребро [$\bar{1}$10], а за Q_1, Q_2, R_1, R_2 соответственно ребра [001], [111], [$\bar{1}$11], [00$\bar{1}$], то формулой его будет совпадение P_1 с P_2, Q_1 с R_2, Q_2 с R_1.

Отсюда следует, что наш сросток следовало бы отнести по V. Goldschmidt к новой группе, лежащей между Homozwillinge и Heterozwillinge. Этой группы сам V. Goldschmidt не предусмотрел, да и едва ли в этом есть надобность, поскольку Goldschmidt в своей классификации исходил только из эмбриональной теории образования закономерных сростков, не приложимой ни к механическим двойникам, ни к закономерным сросткам, образовавшимся слипанием кристаллов.

Едва ли было бы полезным привлекать для объяснения закономерных срастаний готовых кристаллов и трехмерную теорию G. Friedel [16] — теорию общей решетки (réseau multiple simple). Впрочем и сам автор этой теории не применяет ее к закономерным сросткам типа изучаемых нами, ибо сам факт закономерности в подобных случаях он ставит под сомнение [17].

Так как весь процесс образования сростков протекает на поверхности двух граней и молекулярные силы притяжения быстро убывают с расстоянием, следует предпочесть трехмерной двухмерную теорию L. Royer [18]. Последняя, правда, относится к закономерным сросткам кристаллов разных веществ, например KJ и слюды, но если разные вещества могут срастаться закономерно и для этого часто бывает достаточным приблизительное равенство и параллельность некоторых параметров решетки, лежащих в срастающихся гранях, то тем более могут срастаться закономерно два одинаковых кристалла по разным граням при наличии полного тождества по меньшей мере одного параметра в обеих плоскостях.

В заключение мы можем следующим образом выразить наше отношение к вопросу о зарождении, существовании и классификации закономерных сростков. Закономерные сростки могут возникать четырьмя путями:

1) из эмбриональной частицы (V. Goldschmidt);
2) в результате пластических деформаций;
3) в результате слипания кристаллов;
4) при полиморфных срастаниях.

Пятый способ образования закономерных сростков во время роста («Zwillingsmässige Fortwachung von Einzelkistallen» A. Johnsen; «à certains stades de croissance», Friedel) не доказан.

Надлежащим образом дополненная и исправленная классификация Goldschmidt может быть полезна только для эмбриональных закономерных сростков. Двойники механические можно было бы классифицировать, исходя из принципа G. Friedel. Закономерно слипшиеся кристаллы проще всего классифицировать по граням слипания.

Выводы. 1. Экспериментально подтверждена возможность образования закономерных сростков путем слипания готовых кристаллов в процессе их роста.

2. Кроме известных ранее параллельных сростков и двойников по шпинелевому закону, констатирован для квасцов новый закон срастания по граням куба и октаэдра и по общему им ребру [110].

3. Разработан метод объективной оценки закономерности срастания сравнением вычисленной вероятности данного закономерного срастания с числом наблюденных случаев.

4. Теоретически выведены все возможные случаи закономерных срастаний для квасцов.

5. Дано представление о механизме слипания кристаллов. Теория L. Royer эпитаксии кристаллов различных веществ расширена на срастание кристаллов одного и того же вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Леммлейн.* ДАН СССР, А, 1930, № 26, 709.
2. *P. Gaubert.* Sur la production artificielle de la macle des spinelles dans les cristaux d'azotate de plomb.— Bull. Soc. franç. minéral., 1896, **19**, 29, 431.
3. *C. Viola.* Grundzüge der Kristallographie. Leipzig, W. Engelmann, 1904, 389 S.
4. *C. Viola.* Beitrag zur Zwillingsbildung.— Z. Kristallogr., 1902, **36**, N 3, 234.
5. *A. Johnsen.* Untersuchungen über Kristallzwillinge und deren Zusammenhang mit anderen Erscheinungen.—Neues Jahrb. Mineral., Beil.— B, 1907, **23**, 237.
6. *J. S. Presl.* Nerostopis čili mineralogia. Praze, 1837, 267.
7. *W. Haidinger.* On the regular Composition of crystallized Bodies.— Edinb. J. Sci., 1824, **1**, 57.
8. *П. А. Земятчинский.* Этюды по кристаллогенезису. Ч. 1.— Зап. Имп. АН. Сер. 8. 1909, **24**, № 8.
9. *A. Polis.* Über die kubischen Alaune und die Akkommodation der Chromalaune.— Ber. Deutsch. chem. Ges. 1880, **1**, 360.
10. *V. Foullon.* Kristallogenetische Beobachtungen.— Verhandl. geol. Reichsanst, 1881, 140.
11. *A. Schubnikow, B. Brunowsky.* Z. Kristallogr., 1931, **77**, N 3—4, 337.
12. *P. Groth.* Chemische Kristallographie. Leipzig, 1908, 21, 565.
13. *W. Butzlaff.* Z. Kristallogr., 1931, Ref. III, R. 327.
14. *V. Goldschmidt.* Über nicht-parallele Verknüpfung der Kristallpartikel.— Z. Kristallogr., 1898, **29**, N 4, 361.
15. *V. Goldschmidt.* Über Heterozwillinge und einaxige Verwachsungen.— Z. Kristallogr., 1907, **43**, N 6, 582.
16. *G. Friedel.* Lecons de cristallographie. Paris, 1926, p. 425.
17. *G. Friedel.* Bull. Soc. franç. minéral., 1923, **46**, N 6—8, 79.
18. *L. Royer.* Bull. Soc. franç. minéral., 1928, **51**, 7.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВИЦИНАЛЬНЫХ ГРАНЕЙ ОКТАЭДРА КВАСЦОВ В ПРОЦЕССЕ РОСТА КРИСТАЛЛОВ[1]

В своем классическом исследовании вицинальных граней октаэдра квасцов Miers [1] утверждает, что во время роста кристалла квасцов углы между вицинальными гранями не остаются постоянными, причем переход от одних значений к другим происходит внезапно, скачком. Так как измерения производились Miers при переменной температуре, без термостата, а следовательно, и при переменной степени пересыщения, то мы вправе сделать заключение, что угол между вицинальными гранями есть разрывная функция степени пересыщения. Далее нами [2] было показано, что угол между вициналями квасцов есть характерная константа кристаллов, выросших при определенной степени пересыщения раствора. W. Butzlaff [3] в своей неоконченной работе точно дает значение этих констант в зависимости от степени пересыщения. Мы приводим здесь полностью его данные, так как они нам будут нужны для дальнейшего:

Пересыщение c, %	0,73	1,67	2,46	2,48	3,30
Угол между вицинальными гранями, в мин.	4,0	11,6	15,8	18,7	30,2

Из кривой (рис. 1), которую мы построили на основании этих данных, можно сделать два вывода:

1) угол между вицинальными гранями октаэдра квасцов есть непрерывная функция степени пересыщения раствора, из которого выросли кристаллы;

2) угол между вицинальными гранями равен нулю при отсутствии пересыщения, т. е. кристалл, вырастающий бесконечно медленно (находящийся в равновесии с раствором), вицинальных граней не имеет. Здесь нужно подчеркнуть, что речь идет именно о вицинальных гранях, а не о вициналоидах. В свое время нами совместно с Б. К. Бруновским [4] было показано, что вицинальные грани в противоположность вициналоидам не имеют ничего общего с мозаической структурой кристаллов и не могут рассматриваться как отклоненные от своего положения грани октаэдра.

Из сказанного видно, что между результатами работ Miers и Butzlaff существует противоречие, и нам казалось поэтому целесообразным поставить заново опыты Miers в такой обстановке, которая могла бы дать определенный ответ на вопрос о существовании скачков при измерении углов между вицинальными гранями в процессе роста кристалла.

Для наших опытов мы пользовались прибором, схематически изображенным на рис. 2. Прибор состоит из трехлитровой кругло-

[1] Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., 1935, вып. 6, с. 5—11.

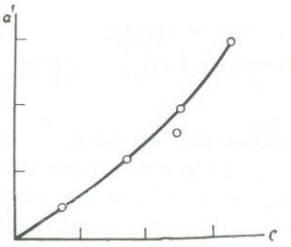


Рис. 1. Зависимость угла между вицинальными гранями и степенью пересыщения по Butzlaff

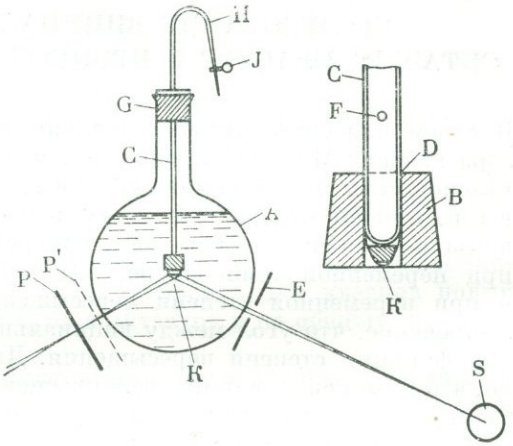


Рис. 2. Прибор для исследования вицинальных граней

донной колбы A диаметром 18 *см*, точечного источника света S, экрана с отверстием E и кассеты с фотографической пластинкой, помещаемой в одном из двух положений — P или P'. Колба наполняется теплым раствором алюмокалиевых квасцов такой концентрации, чтобы по охлаждении его до комнатной температуры создалось пересыщение около 2—3 $Г$ на 100 $см^3$ раствора. Зародыш кристалла K помещается в углублении резиновой пробки B и для того, чтобы он не мог оттуда выпасть до начала роста, прижимается к запаянной стеклянной трубочке C ниткой D, пропускаемой в отверстие пробки. Кристалл монтируется гранью октаэдра горизонтально. Стеклянная трубка проходит через резиновую

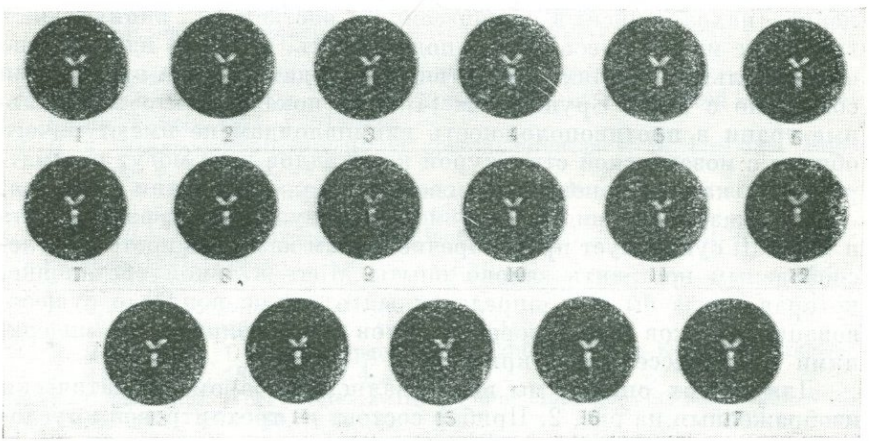


Рис. 3. Первая серия фотографий грани октаэдра, снятых в положении P

пробку G; сбоку трубка имеет отверстие F, служащее для выравнивания давлений внутри колбы по мере охлаждения раствора. Для того чтобы во время охлаждения прибора внутрь его не могли попасть кристаллические зародыши из воздуха, резиновая трубка H, надетая на верхний конец стеклянной трубки, опускается в стакан с водой, не показанный на рисунке. После того как прибор примет комнатную температуру, стакан убирается и резиновая трубка зажимается зажимом J. Расстояние от колбы до



Рис. 4. Фотография грани октаэдра, снятая при трех положениях фотографической пластинки

источника света мы взяли в 160 *см*, расхождение лучей было равно 4°; угол между центральным лучом и вертикалью составлял 31°. В первое время после охлаждения раствора кристалл растет очень медленно, почти исключительно за счет диффузии пересыщенного раствора через прилегающий к кристаллу слой насыщенного раствора, так как концентрационные потоки в этих условиях исключены. В нашем случае нижняя грань октаэдра выступила за предел пробки только через три дня после начала опыта. В этой стадии роста кристалла было сделано семнадцать снимков (рис. 3) в положении P, как правило, через каждые полчаса. На таблице (№ 1) подробно указаны условия, при которых производилось фотографирование.

Из этой таблицы мы видим, что все семнадцать снимков были сделаны в течение 9,5 *час*. За это время температура комнаты поднялась на 1,5° С; соответственно уменьшилась и степень пересыщения раствора. Площадь грани октаэдра определена на глаз в 1 $см^2$. Если бы грань кристалла, отражающая лучи (см. рис. 2), была плоской, то на фотографической пластинке в положении P должно получиться изображение источника света, т. е. в идеале точка.

В действительности на всех фотографиях (рис. 3) мы видим по три размытых точки, отвечающих двум вицинальным пирамидальным октаэдрам. Кажущаяся асимметрия в расположении точек объясняется условиями фотографирования. Все фотографии настолько похожи друг на друга, что ни о каких сколько-нибудь заметных скачках в величине углов между вицинальными гранями при росте кристалла не может быть и речи.

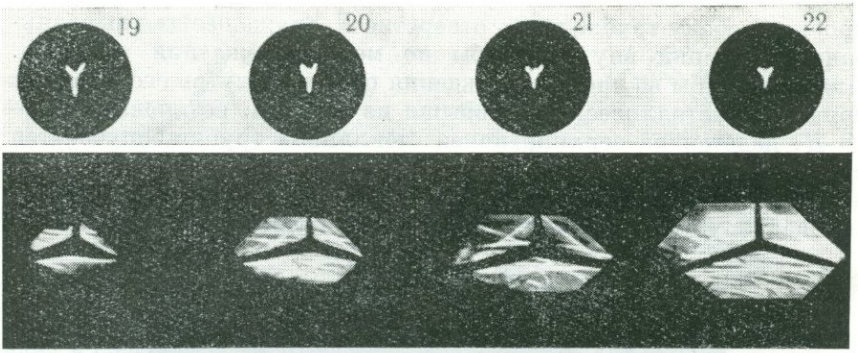
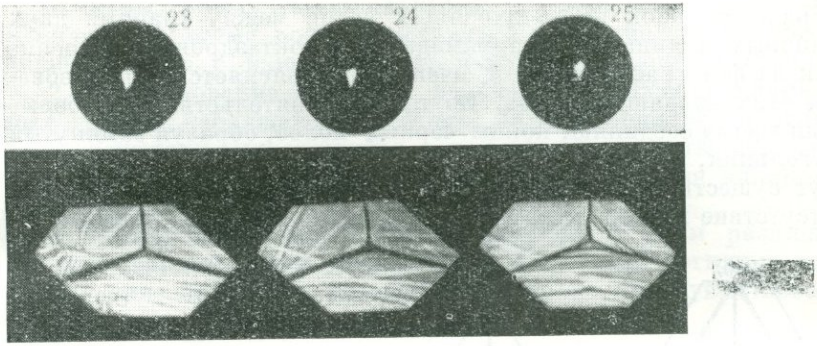


Рис. 5. Вторая серия фотографий грани октаэдра, снятых в двух положениях P и P'.

Спустя 29 *час* после первого снимка мы сделали один за другим три снимка (№ 18, таблица, рис. 4) в трех положениях пластинки: P, P' и между P и P'. Фотография 18*а* (рис. 4) ничем существенным не отличается от приведенных выше, что опять указывает на отсутствие скачков. На фотографии 18*б* мы видим вместо 6 точек три небольших светлых пятна; это указывает на то, что углы между вицинальными гранями, принадлежащими двум вицинальным формам, настолько малы, что в известных условиях наблю-

Таблица

№ фотографии	Время, *час*	Температура, °С	Приблизительный размер грани октаэдра, *см*²	№ фотографии	Время, *час*	Температура, °С	Приблизительный размер грани октаэдра, *см*²
1	0	14,5	1	15	8,5	—	—
2	0,5	—	—	16	9,0	—	—
3	1,0	—	—	17	9,5	—	—
4	1,5	—	—	18	29	16,5	2
5	2,0	15,5	—	19	81	15,5	4
6	2,5	—	—	20	169	16	8
7	3,0	—	—	21	243	15	13
8	3,5	16	—	22	413	14,5	18
9	4,0	—	—	23	633	16	21
10	4,5	—	—	24	822	16	21
11	5,0	—	—	25	937	14	21
12	5,5	—	—	26	1057	15,5	21
13	7,5	—	—	27	2281	15,5	21
14	8,0	—	—				



дения две формы воспринимаются как одна. Наконец, фотография 18*в*, снятая в положении P', позволяет судить одновременно как о форме и величине отражающей поверхности, так и о числе вицинальных граней и об углах между ними; по существу способ получения рефлексограммы 18*с* не отличается от того, каким пользовались ранее другие авторы и мы при изучении вицинальных граней [4]. В наших дальнейших наблюдениях за ростом того же кристалла мы фотографировали грань октаэдра всякий раз только в двух положениях пластинки P и P', так как промежуточное положение не могло дать ничего нового.

Этим способом было зафиксировано семь моментов роста (рис. 5). На таблице (№ 19—25) даны условия, при которых производилась съемка. Как видно из этой таблицы, первый снимок серии (№ 19) был сделан через трое с лишним суток после снимка № 1, а последний (№ 25) — через 39 дней. За это время температура комнаты менялась в пределах нескольких градусов, а величина поверхности, отражающей свет, выросла с 4 до 21 $см^2$.

В верхнем ряде рис. 5 (кружки) изображены фотографии, снятые в положении P; под ними даны рефлексограммы, снятые в положении P'. Из верхних фотограмм ясно видно, как с течением времени, т. е. с падением степени пересыщения раствора, изображение источника света все более и более приближается к точке; это означает, что углы между вицинальными гранями с падением пересыщения уменьшаются, стремясь к нулю при падении степени пересыщения до нуля. О том же говорят и нижние рефлексограммы: в них черные полосы, разделяющие грань октаэдра на три поля, являются изображением ребер выпуклых углов между вицинальными гранями; чем шире эти полосы, тем больший угол составляют между собой вицинальные грани. Ширина черных полос уменьшается по мере роста кристалла. Кроме трех черных полос на каждой рефлексограмме мы видим три тонких белых полоски, образующие треугольник (на фотографиях равнобедренный, а в действительности равносторонний); черные полосы являются медианами углов этого треугольника. Эти белые линии

изображают собой ребра входящих углов между гранями двух различных вицинальных пирамидальных октаэдров; раздвоение точек на фотографиях рис. 3, очевидно, объясняется существованием этих входящих углов. Из того обстоятельства, что белые линии всегда соединяют концы черных полос, образуя замкнутый треугольник, следует, что вогнутые углы между вициналями могут существовать только при наличии граней куба рис. 6, *а*. В отсутствие граней куба (рис. 6, *в*) белые линии должны отсут-

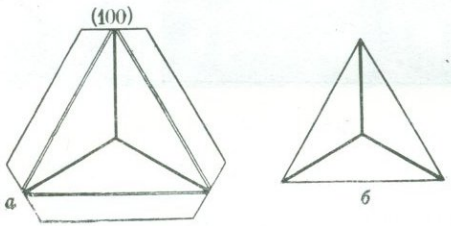


Рис. 6

ствовать, совпадая с ребрами октаэдра. В верхнем ряде фотографий рис. 5 мы не видим раздвоения точек; в данном случае они слишком размыты благодаря плохой фокусировке, объясняемой несовершенствами колбы как оптической системы при отражении света от слишком большой поверхности. Далее мы наблюдаем на фотограммах целую систему неправильных линий, отвечающих неровностям самих вицинальных граней; эти неровности мы называем вициналоидами. Во время роста вициналоиды меняют свой вид в зависимости от случайных обстоятельств, возникающих на поверхности кристалла.

Две последние рефлексограммы № 26 и 27 (рис. 7) сняты нами спустя 44 и 95 дней после первого снимка, т. е. тогда, когда рост и растворение кристалла чередовались благодаря колебаниям температуры помещения; об этом свидетельствуют неизменившиеся размеры изображений грани кристалла. На фотографии № 26 мы видим еще следы трех черных полос и даже одну белую (в репродукции не видна); на рефлексограмме же № 27 вицинальные грани полностью заменены вициналоидами. Из изложенного можно сделать следующие выводы.

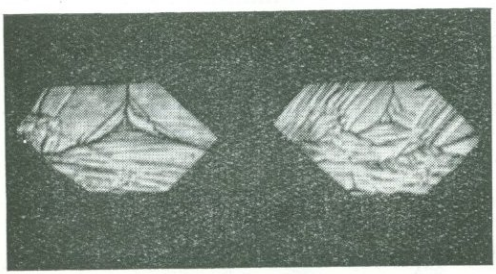


Рис. 7. Грань октаэдра, подвергавшаяся действию колебаний температуры

1. Углы между вициналными гранями октаэдра квасцов меняются во время роста кристалла непрерывно с точностью до ошибок опыта с изменением степени пересыщения раствора.

2. Существование скачков в изменении положения вициналных граней, наблюдавшихся Miers, не подтвердилось на опыте.

3. Кристалл, находящийся в равновесии с раствором, вициналных граней не имеет, это не исключает наличия вициналоидов.

4. Вициналные грани, принадлежащие к двум различным простым формам, могут образовать между собой вогнутые углы. Это явление возможно, по-видимому, только при существовании граней куба.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Miers.* Z. Kristallogr., 1904, **39**, N 3, 220; Phil. Trans. Roy. Soc., 1903, **202**, 459.
2. *А. Шубников, О. Шубникова.* Труды Минерал. музея АН СССР, 1926, **1**, 1.
3. *W. Butzlaff.* Z. Kristallogr., 1931, Ref. III, R. 327.
4. *A. Schubnikow, B. Brunovsky.* Z. Kristallogr., 1931, **77**, N 3—4, 337.

О ПРИНЦИПЕ ОТБОРА ГРОССА-МЁЛЛЕРА[1]

Принцип отбора или выживания кристаллов Гросса-Мёллера, как известно, состоит в следующем [1, 2]. Если на дне достаточно высокого цилиндрического сосуда (например, запаянной с одного конца стеклянной трубки), заполненного переохлажденной жидкостью, возникает множество произвольно ориентированных кристаллических зародышей, то в процессе их дальнейшего роста выживает, как правило, только один из них и именно тот, который ориентирован своим наибольшим диаметром вдоль оси сосуда. Принципом выживания могут быть объяснены ортотропизм [3], монокристальность выращиваемых методом Вернеля булек корунда и т. д. При совместном обсуждении с Г. Г. Леммлейном [4] этого принципа у меня возникла мысль дать новую, как мне кажется, более простую и исчерпывающую трактовку принципа Гросса-Мёллера, чему и посвящается настоящая заметка.

Предположим, что на плоском дне AB (рис. 1, *I*) какого-либо сосуда, содержащего переохлажденную жидкость, возникло одновременно некоторое количество центров кристаллизации — a,

[1] Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР, 1940, вып. 2, с. 119—121.

b. *c*. По истечении времени t из этих центров вырастут кристаллические индивиды различной формы и величины, будь то одиночные кристаллы одного или даже нескольких веществ (кристаллизация эвтектики), кристаллические агрегаты типа сферолитов, расщепленных кристаллов и т. д. При всех предположениях один из указанных кристаллических индивидов окажется хотя бы на ничтожно малую величину выше других.

Предположим далее, что условия роста кристаллов сохраняются такими, что скорости роста кристаллов (радиальные или нор-

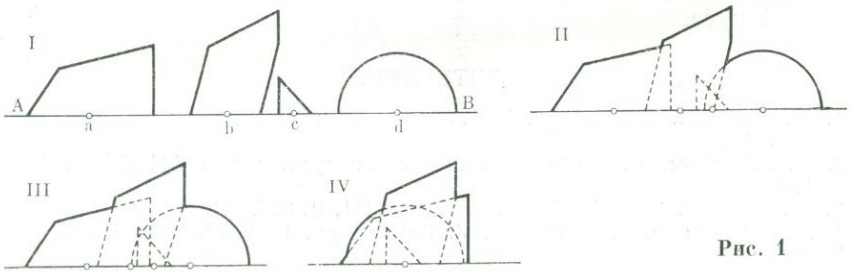


Рис. 1

мальные) остаются постоянными, отчего со временем изменяется только величина, но не форма кристаллов; относительные размеры кристаллов, очевидно, тоже будут при этих условиях сохранены. Другими словами, по истечении времени $2t$ все кристаллы увеличатся вдвое, станут вдвое выше. Если новое состояние кристаллов изобразить в уменьшенном в два раза масштабе (рис. 1, *II*), то каждый кристалл в точности будет иметь старую форму и величину, но расстояние между центрами кристаллизации уменьшится вдвое. Другими словами, кристаллы в этом изображении будут расположены друг к другу ближе. Продолжая регистрацию роста кристаллов тем же способом для моментов времени $3t$, $4t$, . . ., нетрудно прийти к заключению, что в пределе, через бесконечное время, все начальные точки роста на нашей диаграмме сольются в одну. В результате получится кристаллический агрегат с высотой самого высокого кристалла и шириной самого широкого кристалла; по всем другим направлениям агрегат будет иметь соответственно максимальный размер (рис. 1, *IV*).

К такой окончательной форме будет стремиться наш кристаллический агрегат, если дно (AB) сосуда безгранично велико. При наличии боковых стенок, т. е. во всех случаях, с которыми приходится иметь дело на практике, выживет один, наиболее высокий индивид; его поперечные размеры целиком определятся поперечными размерами сосуда. Ясно, что высказанный нами принцип может быть всячески модифицирован применительно к различным конкретным случаям.

Результаты

Если отдельные стадии роста кристаллических индивидов, возникших одновременно на плоскости AB (рис. 1), регистрировать чертежами в масштабе, уменьшающемся пропорционально времени роста, то процесс отбора ортотропизма и «пожирания» крупными индивидами мелких можно интерпретировать как взаимное сближение и вхождение друг в друга индивидов. В большинстве случаев, с которыми приходится встречаться на практике, в результате такого процесса выживает один индивид, который в начальной стадии роста был наиболее высоким.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Gross, H. Möller.* Z. Phys., 1923, **19**, N 5—6, 375.
2. *H. Möller.* Die Gesetze des Keim- und Kristallwachstums mit besonderer Berücksichtigung der Keimauslese und des orientierten Kristallwachstums. Diss. Greifswald, 1924.
3. *А. В. Шубников, Г. Г. Леммлейн.* ДАН СССР, А, 1927, № 4, 61; Z. Kristallogr., 1927, 65, N 3—4, 297.
4. *Г. Г. Леммлейн.* ДАН СССР, 1939, **22**, № 1, 42.

О ЗАКОНЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОТБОРА ПРИ ОБРАЗОВАНИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО АГРЕГАТА[1]

10 января 1945 г. в коллоквиуме Института кристаллографии АН СССР Г. Г. Леммлейном было сделано сообщение [1], в котором была поставлена в развитие ранее известных работ следующая задача.

Дан достаточно большой отрезок прямой AB (рис. 1), разделенный на равные достаточно малые интервалы точками 1, 2, 3, . . ., n. Во всех этих точках одновременно зарождаются двумерные кристаллы одинаковой формы, которые продолжают расти с постоянными скоростями по соответственным кристаллографическим направлениям. Начальная ориентировка кристаллов предполагается случайной. После того как кристаллы придут во взаимное соприкосновение и заполнят весь отрезок прямой, в полной мере вступает в действие принцип отбора Гросса — Мёллера [2, 3], в силу которого число кристаллов, пересекаемых отрезком $A'B'$, параллельным и равным отрезку AB и находящимся на расстоянии x от последнего, будет убывать с возрастанием x и в общем случае при достаточно большом x упадет до единицы.

[1] ДАН СССР, 1946, т. 51, № 9, с. 679—681.

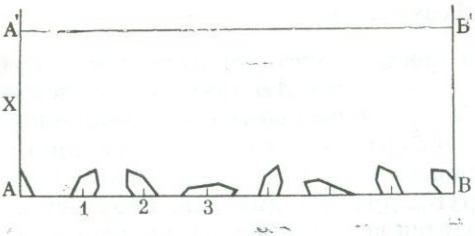


Рис. 1. Рост двумерных кристаллов в направлении x

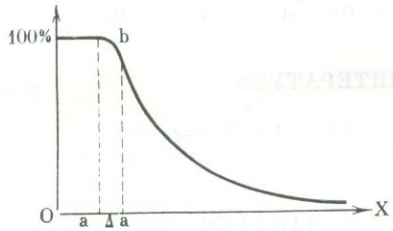


Рис. 2. График закона отбора по схеме Г. Г. Леммлейна

Г. Г. Леммлейн поставил себе задачу: найти закон убывания этого числа n, выражаемого в процентах от первоначального числа кристаллов в зависимости от расстояния x, т. е. найти вид функции

$$n = f(x). \tag{1}$$

Для решения этой задачи Г. Г. Леммлейн составил для различных форм двумерных кристаллов ряд чертежей по типу рис. 1 и определил по ним ряд точек искомой функции. В результате такого математического эксперимента были составлены графики искомой функции для различных форм двумерных кристаллов.

Полученные кривые имели характер, показанный на рис. 2. При $x = 0$ число n кристаллов равно 100%. Это число сохраняется постоянным при возрастании x до некоторого значения a, отвечающего моменту времени, когда начинает вступать в силу вследствие частичного соприкосновения кристаллов принцип отбора. Постоянству числа кристаллов отвечает горизонтальный участок кривой. Далее следует небольшое закругление кривой, отмеченное на чертеже буквой b и отвечающее малому приращению ординаты Δa. Только с этого момента убывание числа кристаллов действительно будет следовать искомому закону.

Мы подошли к решению задачи иначе. Отрезок прямой AB мы мыслим себе сплошь зараженным кристаллами; начальное число их, следовательно, принимается весьма большим, теоретически — бесконечно большим. При этом условии принцип отбора вступает в силу с самого момента возникновения кристаллов, и из искомой кривой выпадает ненужный участок (горизонтальная часть и закругление b), отвечающий времени срастания отдельных кристаллов по линии AB.

В основе нашего второго допущения лежит та очевидная истина, что поперечник равномерно растущего двумерного кристалла пропорционален его высоте. Отсюда естественно заключить, что средний поперечник сохранившихся в результате естественного отбора кристаллов должен быть тем больше, чем больше x, а это означает, в свою очередь, что число пересекаемых отрезком $A'B'$ или единицей его длины кристаллов должно быть пропорционально $1/x$

$$n = k/x. \qquad (2)$$

Это простое уравнение гиперболы и есть закон отбора двумерных кристаллов, образующихся на сплошь зараженной прямой.

Посмотрим, что дает исследование этого уравнения. Прежде всего обратим внимание на то, что при нашей постановке вопроса обе переменные величины n и x могут изменяться от 0 до ∞, тогда как в графике Г. Г. Леммлейна (рис. 2) число кристаллов не может быть больше исходного числа кристаллов, приравниваемого к 100%. Бесконечному числу кристаллов ($n = \infty$) у нас, как уже было сказано выше, отвечает значение абсциссы, равное нулю ($x = 0$), т. е. начало кристаллизации. Другой предельный случай ($n = 0$ и $x = \infty$) отвечает недосягаемому концу кристаллизации, когда на единице отрезка $A'B'$ укладывается ничтожная часть единственного сохранившегося кристалла (или, как невероятный случай,— двух-трех кристаллов).

В нашем законе (2) постоянная величина k есть, очевидно, фактор масштаба и формы кристаллов.

Переход от рассмотренной нами задачи к той, которая была поставлена Г. Г. Леммлейном, прост и сводится к замене величины x на $x - a$ или на $x - (a + \Delta a)$, что практически одно и то же

$$n = k\,(x - a). \qquad (3)$$

Конечно, это уравнение может относиться только к правой части кривой Г. Г. Леммлейна, т. е. к той части, которой, собственно, и выражается закон отбора.

До сих пор шла речь лишь о законе отбора или роста двумерных кристаллов. На практике этому случаю должен отвечать, например, рост кристаллов из расплава вещества между покровным и предметным стеклом от одного зараженного ребра покровного стекла. Такие опыты были в свое время осуществлены автором совместно с Г. Г. Леммлейном [4—6]. После всего изложенного вывод закона отбора при росте трехмерных кристаллов от сплошь зараженной плоскости не может представить затруднений. На этот раз поперечник кристалла также должен быть тем более, чем выше кристалл, но так как теперь этот поперечник должен измеряться не линейной, а квадратной мерой, то мы должны положить его пропорциональным величине x^2. Соответственно с этим число кристаллов, пересекаемое единицей плоскости, параллельной зараженной поверхности и отстоящей от нее на расстояние x,

будет пропорционально $1/x^2$, т. е. закон отбора будет выражаться гиперболой

$$n = k/x^2. \qquad (4)$$

Нет надобности повторять здесь замечания, сделанные ранее по поводу исследования уравнения (2); все они сохраняют силу и в данном случае. В частности, если бы мы хотели применить уравнение (4) для случая конечного числа зародышей кристаллов, равномерно распределенных по плоскости, то получили бы уравнение вида

$$n = k\,/\,(x^2 - a). \qquad (5)$$

В заключение следует подчеркнуть, как это было сделано и Г. Г. Леммлейном, что в реальных условиях число выживающих кристаллов определяется не только геометрическими условиями, лежащими в основе закона отбора, но и многими другими причинами, из которых особо важную роль играет явление расщепления кристаллов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Леммлейн.* ДАН СССР, 1945, **48**, № 3, 177.
2. *R. Gross, H. Möller.* Z. Phys., 1923, **19**, N 5—6, 375.
3. *H. Möller.* Die Gesetze des Keim- und Kristallwachstums mit besonderer Berücksichtigung der Keimauslese und des orientierten Kristallwachstums. Diss. Greifwald, 1924.
4. *А. В. Шубников, Г. Г. Леммлейн.* ДАН СССР, А., 1927, № 4, 61.
5. *Г. Г. Леммлейн.* ДАН СССР, 1939, **22**, № 1, 42.
6. *А. В. Шубников.* Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР, 1940, вып. 2, 119.

ЧТО ТЕПЛЕЕ — РАСТУЩИЙ КРИСТАЛЛ ИЛИ ПИТАЮЩАЯ ЕГО МАТОЧНАЯ СРЕДА?[1]

На этот, казалось бы крайне элементарный вопрос кристаллографы, занимающиеся выращиванием одиночных кристаллов из растворов, и металлурги, занимающиеся кристаллизацией металлов в изложницах, дают обычно неясный, неполный, а то и просто неверный ответ, что и побудило нас выступить с настоящей заметкой.

Обозначим температуру кристалла и питающей его среды (расплава, раствора, пара и т. д.) символами $T_к$ и $T_с$ и температуру равновесия кристалла со средой, т. е. температуру плавления, растворения, возгонки и т. д., символом T. Добавим, что под $T_к$

[1] Кристаллография, 1961, т. 6, вып. 2, с. 315—316.

Таблица неравенств

Неравенство	Возможность (+) и невозможность (−) неравенств	Характер идеального процесса, описываемого соответствующим неравенством
$T > T_к > T_с$	+	Рост кристалла, полностью окруженного питающей средой
$T > T_с > T_к$	+	Рост кристаллической оболочки, заключающей в себе питательную среду
$T_с > T_к > T$	−	
$T_к > T_с > T$	−	
$T_к > T > T_с$	−	
$T_с > T > T_к$	+	Декристаллизация (плавление, растворение и т. д.)

мы будем разуметь температуру в тонком слое кристалла, непосредственно соприкасающемся со средой, а под $T_с$ — температуру в соответствующем слое среды. Примем, что эти три температуры никогда не могут быть попарно и все три вместе абсолютно точно равны друг другу. Это означает, что, исходя из данного условия, можно составить шесть и только шесть неравенств, записанных в первом столбце таблицы. Обратим внимание на порядок записи неравенств сверху вниз. Сначала идут два неравенства, у которых T стоит на первом месте, затем два противоположных им неравенства, у которых T стоит на последнем месте, далее два противоположных друг другу неравенства, у которых T стоит в середине.

Заранее можно сказать, что три из этих неравенств противоречат действительности. Это те неравенства, в которых $T_к > T$, поскольку кристалл не допускает перегрева. Невозможные неравенства отмечены в таблице минусами, остальные — плюсами. Первое из отмеченных плюсом неравенств описывает явление роста кристалла. Кристалл должен расти потому, что он и окружающая его среда *переохлаждены*, т. е. имеют температуру ниже температуры равновесия T. Величина переохлаждения кристалла равна $-\Delta T_к = T - T_к$. Величина переохлаждения среды равна $-\Delta T_с = T - T_с$. Мы пишем эти величины со знаком минуса для того, чтобы отличить переохлаждение от перегрева, который условно считаем величиной положительной. Кристалл будет расти, несмотря на то, что он нагрет выше, чем среда.

На практике мы имеем дело с этим случаем неизбежно тогда, когда растущий кристалл полностью окружен питающей его средой. Например, кристалл всегда имеет более высокую температуру, чем среда, тогда, когда он выращивается на нитке в расплаве или растворе. В этих условиях кристалл подогревается той теплотой кристаллизации, которая, как говорят, при этом выделяется. В действительности, в момент кристаллизации эта теплота никуда

не выделяется, а остается внутри той порции вещества, которая из жидкого (газообразного) состояния переходит в твердое. Действительное выделение теплоты может происходить в описываемых условиях из кристалла в среду (а не наоборот) только после того, как теплота *возникла* в кристалле.

Переходим к исследованию второго неравенства, отмеченного в таблице плюсом. Этим, как и первым, неравенством описывается явление роста кристалла. Кристалл опять должен расти потому, что по условию и он и питающая его среда переохлаждены — имеют температуру ниже T. Однако теперь питающая среда нагрета до более высокой температуры, чем кристалл. В идеальной форме с этим случаем кристаллизации мы имеем дело тогда, когда не кристалл (или поликристаллический агрегат) полностью окружен питающей его средой, а наоборот, среда целиком окружена кристаллической оболочкой. В приближенном виде такая обстановка создается сама собой при кристаллизации металла в изложнице, когда кристаллическая корка образуется на стенках изложницы и на свободной поверхности жидкого металла, а перегретый (в объеме) жидкий металл оказывается в полном окружении затвердевшего вещества.

В этих условиях отдача теплоты, в избытке запасенной в жидком металле и создающейся при кристаллизации, может происходить только во внешнюю охлаждающую среду (воздух, стенки изложницы, вода и т. д.), а не в питательную среду, как в рассмотренном выше случае. Только таким путем в контактных слоях жидкого и закристаллизовавшегося металла могут при кристаллизации установиться температуры $T_с$ и $T_к$, более низкие, чем T. При этом $T_с$ обязательно должна быть выше $T_к$, так как иначе отдача теплоты кристаллизации должна была бы происходить внутрь расплава — от менее нагретого к более нагретому телу, что невозможно.

В практике выращивания монокристаллов из расплава мы не всегда знаем, какая из температур $T_с$ или $T_к$ является более высокой. Не знаем тогда, когда отдача теплоты кристаллизации и избыточной теплоты перегретого расплава во внешнюю среду происходит как с обращенной в эту среду поверхности кристалла, так и с соответствующей поверхности жидкости. Этим незнанием и неумением управлять температурами $T_с$ и $T_к$ можно, по-видимому, объяснить, почему, например, кристаллы одного и того же вещества, выращенные одним и тем же методом, скажем методом Киропулоса, в одних случаях получаются ограненными, а в других — булеобразными, без каких-либо следов естественной огранки.

В заключение остановимся на последнем неравенстве из отмеченных в таблице плюсами. Им описывается явление, отвечающее тому случаю, когда питающая среда *перегрета* относительно температуры равновесия на величину $+\Delta T_с = T_с - T$, а кристалл переохлажден относительно той же температуры на величину

$-\Delta T_к = T - T_к$. Так как перегретая (или недосыщенная, что, в конце концов, одно и тоже) среда ни в коем случае кристаллизоваться не может, то рассматриваемое неравенство может реализоваться только при *декристаллизации* (термин, предложенный Г. Г. Леммлейном для обозначения всех случаев перехода вещества из кристаллического состояния в некристаллическое).

Подводя итог, нельзя не обратить внимания на отсутствие паритета между двумя, казалось бы, совершенно равноправными (отличающимися друг от друга только знаком) процессами: кристаллизацией и декристаллизацией. Отсутствие паритета заключается в том, что явлению кристаллизации отвечают два неравенства, а явлению декристаллизации — только одно. Объясняется это тем, что в основу наших рассуждений было положено утверждение о невозможности перегрева кристалла, которое *применительно к тонким слоям*, быть может, не является правильным.

Этот интересный и важный вопрос не имеет, однако, прямого отношения к вопросу, поставленному в заглавии настоящей заметки. На вопрос о том, что теплее — растущий кристалл или питающая его среда, мы уже дали окончательный ответ: растущий кристалл может быть и теплее и холоднее питающей среды.

Институт кристаллографии АН СССР

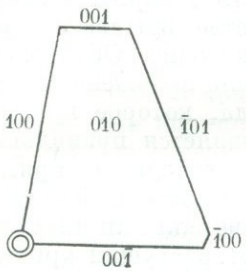
О ГРАНЯХ С НУЛЕВОЙ СКОРОСТЬЮ РОСТА НА КРИСТАЛЛЕ $K_2Cr_2O_7$[1]

Описываемый кристалл был выращен нами из 3 *л* водного раствора методом понижения температуры. Зародышевый кристаллик был монтирован в тонкой трубочке из органического стекла осью вдоль оси трубочки, ориентированной в кристаллизаторе вертикально. Раствор перемешивался мешалкой, направление вращения которой периодически изменялось на обратное. Кристалл рос 189 дней. За это время температура 30,4° С насыщенного раствора была снижена постепенно (в среднем по 0,1° С в две недели) до 29,2° С, т. е. всего на 1,2° С. Вынутый из раствора кристалл имел вес 13,35 *Г*. О габитусе кристалла можно составить представление по изображенной на прилагаемом рисунке грани (010), приняв во внимание, что параллельная ей грань ($0\bar{1}0$) имеет одинаковую площадь. Кроме этой пары больших граней кристалл имел четыре грани ($\bar{1}01$), (100), ($00\bar{1}$), (001) сравнимой величины и несколько граней второстепенного значения. Все грани за исключением ($\bar{1}01$) и трудно определимых граней вокруг ($\bar{1}00$) зеркаль-

[1] Совместно с В. Ф. Парвовым. Кристаллография, 1964, т. 9, вып. 3, с. 435.

но гладки. Кристалл в большой части своего объема визуально однороден. На рисунке колечком изображено в проекции место трубочки, где находился затравочный кристаллик.

Из рисунка видно следующее. Грань $(\bar{1}01)$ не имеет себе параллельной грани $(10\bar{1})$. Грани (100) отвечает параллельная грань $(\bar{1}00)$, но эта последняя по площади несравнимо меньше первой. На кристалле имеется пара параллельных граней $(00\bar{1})$ и (001), но грань (001) по площади в четыре раза меньше грани $(00\bar{1})$.



Сказанное лишний раз показывает, что по морфологическим признакам кристаллы $K_2Cr_2O_7$ триклинной системы не имеют центра симметрии [1, 2].

Наиболее интересной, с нашей точки зрения, особенностью описываемого кристалла является то, что две его грани $(00\bar{1})$ и (100), принадлежащие к категории наиболее развитых, при образовании кристалла имели нулевую скорость роста по нормали, т. е., разрастаясь по площади, практически не перемещались вовсе в направлении своих нормалей. На рисунке это видно из того, что указанные грани пересекаются между собой в начальной точке роста кристалла, там, где помещается зародыш. Возможность образования на кристалле граней с нулевой скоростью роста, как известно, предусматривается теоретически и наблюдалась рядом авторов экспериментально [3, 4]. Наш кристалл интересен тем, что на нем это явление выступает особенно наглядно и убедительно. На кристаллах бихромата калия оно обнаружено впервые. Новым является то, что в процессе роста зародыш кристалла оставался все время на его поверхности. Приняв скорость роста грани $(\bar{1}00)$ условлено за 10, мы получили для наиболее важных граней кристалла следующие значения скоростей роста (приближенно): (001) : $(\bar{1}00)$: $(\bar{1}01)$: $(0\overset{+}{\bar{1}}0)$: (100) : : $(00\bar{1})$ = 11 : 10 : 9 : 8 : 0 : 0.

Институт кристаллографии АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Schubnikow.* Z. Kristallogr., 1911, **50**, N 1, 19; 1931, **76**, N 4—5, 469.
2. *В. С. Подиско.* Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, вып. 9, 327.
3. *Б. Хонигман.* Рост и форма кристаллов. ИЛ, 1961. 212 с.
4. *В. Д. Кузнецов.* Кристаллы и кристаллизация. Гостехиздат, 1953. 411 с.

УКРУПНЕНИЕ ЗЕРЕН ПОРОШКА СЕГНЕТОВОЙ СОЛИ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В СОБСТВЕННОМ РАСТВОРЕ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ[1]

Известно, что мелкодисперсный осадок вещества, получаемый при химических реакциях в жидкостях, становится со временем более крупнозернистым [1, 2]. Объясняется это тем, что мелкие кристаллы имеют бóльшую растворимость, чем крупные. Нами установлено на примере сегнетовой соли, что процесс самоукрупнения кристаллов может быть значительно ускорен, если смесь порошка этой соли и ее раствора подвергать периодически нагреванию и охлаждению при постоянном перемешивании смеси.

Краткое описание прибора. Для проведения опытов по самоукрупнению кристаллов сегнетовой соли был использован прибор, сконструированный для этой и других целей Парвовым [3]. Прибор состоит из ряда герметически закрытых цилиндрических стеклянных кристаллизаторов, приводимых в медленное вращение вокруг горизонтальной оси. Периодическое нагревание и охлаждение кристаллизаторов, загруженных смесью порошка и раствора, осуществляется с помощью автоматического включения и выключения электрического нагревателя и соответственно выключения и включения охлаждающих вентиляторов. Все кристаллизаторы находятся в застекленной камере, позволяющей удобно наблюдать невооруженным глазом то, что в них происходит. Сама камера находится в небольшой термостатированной комнате, где с точностью $\pm 0{,}1°$ поддерживается температура 24,3° С. Устройство прибора позволяет в любое время вынуть нужный кристаллизатор из камеры, вскрыть его и взять из него пробу кристаллов. Затем можно вновь герметически закрыть кристаллизатор крышкой и заставить его вращаться по-прежнему, не останавливая вращения всех других кристаллизаторов.

Первые визуальные наблюдения явления самоукрупнения кристаллов были проведены на поваренной соли, бихромате калия, алюмокалиевых квасцах, азотнокислом калии, дигидрофосфате аммония и сегнетовой соли. Как и следовало ожидать, явление самоукрупнения кристаллов обнаруживается скорее всего на веществах, кривая растворимости которых имеет наибольший угол наклона к оси температур. Объясняется это тем, что для таких веществ при заданной амплитуде температурных колебаний растворение кристаллов при нагревании и рост при охлаждении происходят быстрее, чем для веществ с пологой кривой растворимости. В наших опытах амплитуда температурных колебаний была равна 0,6—0,7°, период колебаний 1,3 *час*. Кривая зависи-

[1] Совместно с Н. В. Гордеевой. Кристаллография, 1967, т. 12, вып. 2, с. 186—190.

мости температурных колебаний от времени приведена на рис. 1. Из перечисленных веществ наиболее крутую кривую растворимости имеет сегнетова соль. Все описанные ниже наблюдения и опыты были по этой причине проведены только на этой соли.

Для подготовки опыта растертый в пудру порошок сегнетовой соли измельчался в ступке вторично в присутствии небольшого количества насыщенного раствора этого вещества. Полученная масса весом 300—400 *г* смешивалась примерно с таким же количе-

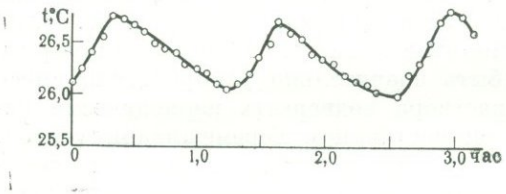


Рис. 1. Кривая зависимости амплитуды температурных колебаний от времени

ством насыщенного раствора и загружалась в кристаллизатор, который затем помещался на отведенное ему место в приборе. По истечении одного-двух дней можно было в окно камеры невооруженным глазом наблюдать по блеску крупинок порошка, что они превратились в мелкие покрытые плоскими гранями кристаллы.

Отбор и исследование проб выросших кристаллов. Попытка первого определения среднего веса полученных кристаллов была

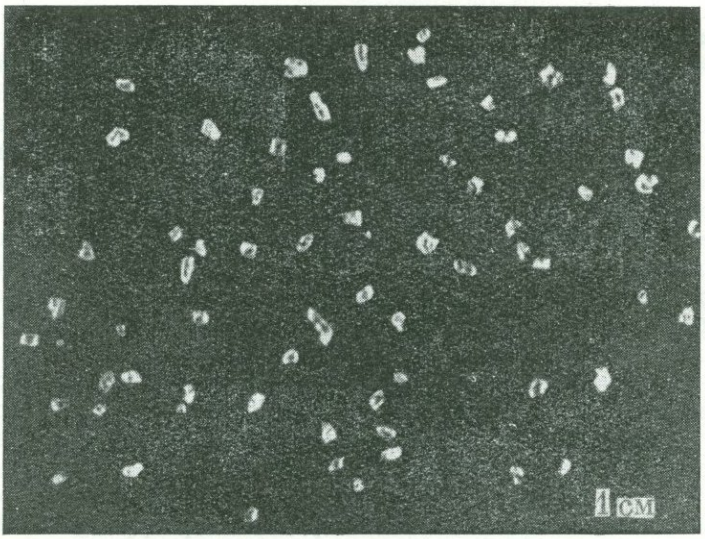


Рис. 2. Фотография зерен порошка сегнетовой соли после 6 дней опыта по самоукрупнению[1]

[1] Фотографии (Рис. 2,4,5 и 7) увеличены вдвое (*прим. ред*).

сделана уже на следующий день после начала опыта. Для этого небольшая проба кристаллов сначала была извлечена из кристаллизатора и высушена на фильтровальной бумаге. Далее из пробы было отделено наудачу около 500 индивидуальных, т. е. не сросшихся друг с другом кристалликов. Взвесив их вместе, можно было определить их средний вес, естественно, с малой точностью из-за невозможности во всех случаях надежно различать одиночные кристаллики от их случайных сростков. В следующих опы-

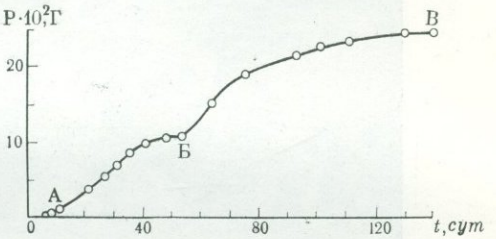


Рис. 3. Кривая зависимости крупности зерен порошка сегнетовой соли от времени

тах точность определения среднего веса кристаллов, разумеется, увеличивалась и в соответствии с этим для указанной цели достаточно было отделять все меньшее и меньшее число кристаллов. В конце опытов мы довольствовались 50 кристаллами. Рис. 2 позволяет судить, с какими именно кристаллами мы имели дело в начальном периоде их самоукрупнения. На фотографии показаны кристаллы, выросшие из порошка за шесть первых дней опыта.

Кривая зависимости крупности кристаллов от времени. По истечении примерно десяти дней опыта становится возможным определять крупность кристаллов достаточно точно. Об этом свидетельствует плавный ход кривой самоукрупнения кристаллов на ее участке *АБ* (рис. 3). Анализируя этот участок кривой, можно со всей определенностью прийти к заключению, что в начальной стадии самоукрупнения кристаллы растут с ускорением: кривая обращена своей выпуклостью вниз. Далее она поднимается по линейному закону — крупность кристаллов увеличивается равномерно. Затем кривая своей выпуклостью обращается вверх, стремясь асимптотически следовать вдоль горизонтальной оси. Это означает, что примерно после 50 дней опыта кристаллы практически перестают расти, сохраняя средний вес 0,11 *г*.

Опыт подкормки выросших кристаллов. Чтобы заставить кристаллы расти далее, мы поместили их в новую специально для этой цели приготовленную смесь диспергированного порошка сегнетовой соли с ее насыщенным раствором. Отрезок *БВ* приведенной кривой (рис. 3) показывает, что процесс самоукрупнения опять в начальной стадии значительно ускорился, а далее система пришла к новому практически равновесному состоянию. Средний вес кристаллов при этом достиг 0,25 *г*. Из описанного опыта можно заключить, что для ускорения процесса самоукрупнения кристаллов можно применять более частую подкормку, подобрав

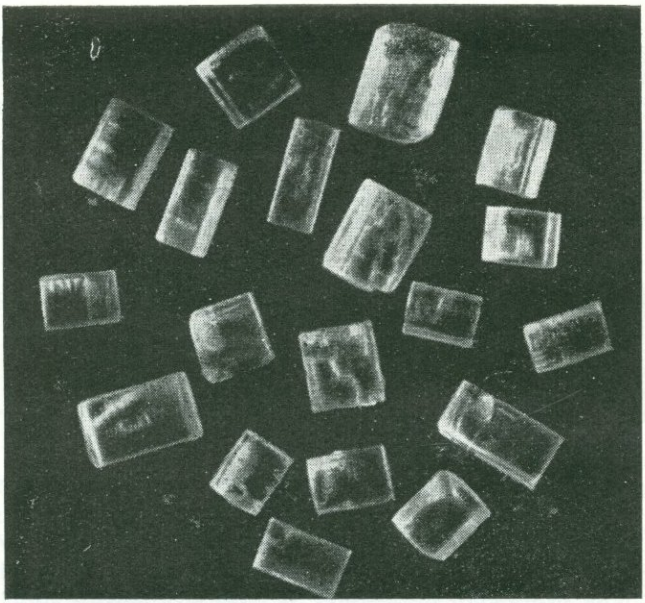


Рис. 4. Фотография кристаллов сегнетовой соли, полученных в конце опыта по самоукрупнению зерен порошка

наивыгоднейшую частоту температурных колебаний и наиболее подходящую для этого их амплитуду. На рис. 4 дана фотография кристаллов, выросших за 140 дней пребывания их в смеси порошка и раствора сегнетовой соли.

Рост осколков кристаллов и регенерация их формы. Для опыта были взяты специально приготовленные осколки кристаллов (рис. 5) весом каждый около 0,08 *г* (общий вес всех кристаллов составлял примерно 300 *г*). От предыдущего опыта этот отличался тем, что подкормка осколков кристаллов сегнетовой соли свежей смесью диспергированного порошка этой соли с собственным раствором проводилась регулярно через равные промежутки времени: один раз в десять суток.

На рис. 6 приведена построенная нами кривая самоукрупнения осколков кристаллов за 85 суток. Из этой кривой видно, что в начале опыта кристаллы увеличивались в весе немного медленнее, чем в конце. За все время опыта средний вес кристаллов увеличился более чем в два раза, дойдя до 0,18 *г*. Рис. 7 показывает, что изменилась и форма полученных кристаллов: осколки превратились в хорошо ограненные кристаллические индивиды.

Обсуждение результатов. Как уже было упомянуто в аннотации к этой работе, явление самоукрупнения кристаллических частиц порошка в собственном растворе может быть объяснено повы-

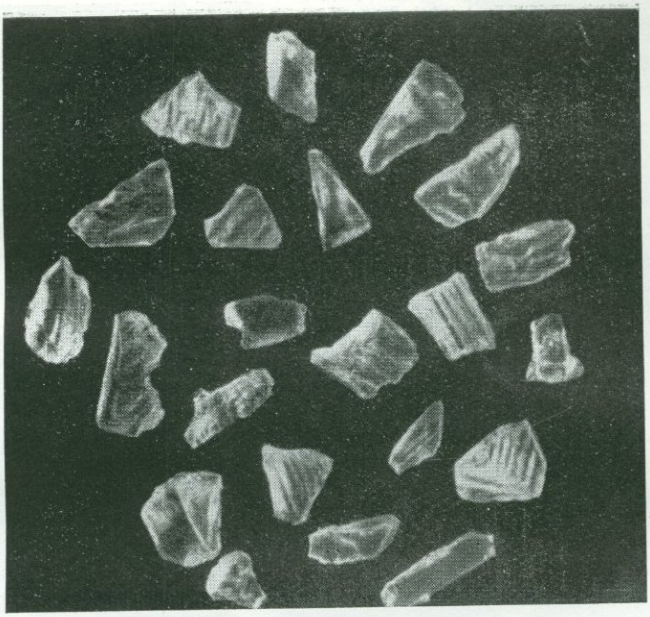


Рис. 5. Фотография осколков кристаллов сегнетовой соли, приготовленных для опыта по самоукрупнению осколков

шенной растворимостью мелких кристалликов по сравнению с растворимостью крупных. Сама эта неодинаковая растворимость мелких и крупных кристаллов объясняется тем, что смесь порошка с его насыщенным раствором стремится принять минимальную

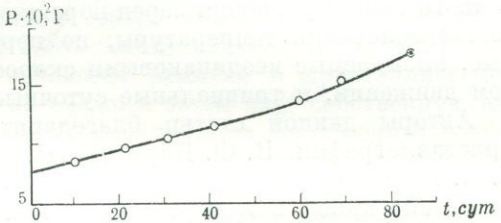


Рис. 6. Кривая зависимости среднего веса осколков кристаллов сегнетовой соли от времени

поверхностную энергию. Вот что говорит П. Кюри по поводу явления, аналогичного тому, которому посвящена наша работа, имея в виду совокупность разных кристаллов одного вещества, помещенных в один и тот же маточный раствор: «Совокупность кристаллов будет иметь минимальную энергию, когда их полная поверхность будет наименьшей, другими словами, когда все эти кристаллы соединятся в один..., однако нигде не сказано, что он может это сделать самопроизвольно», т. е. без затраты некоторой

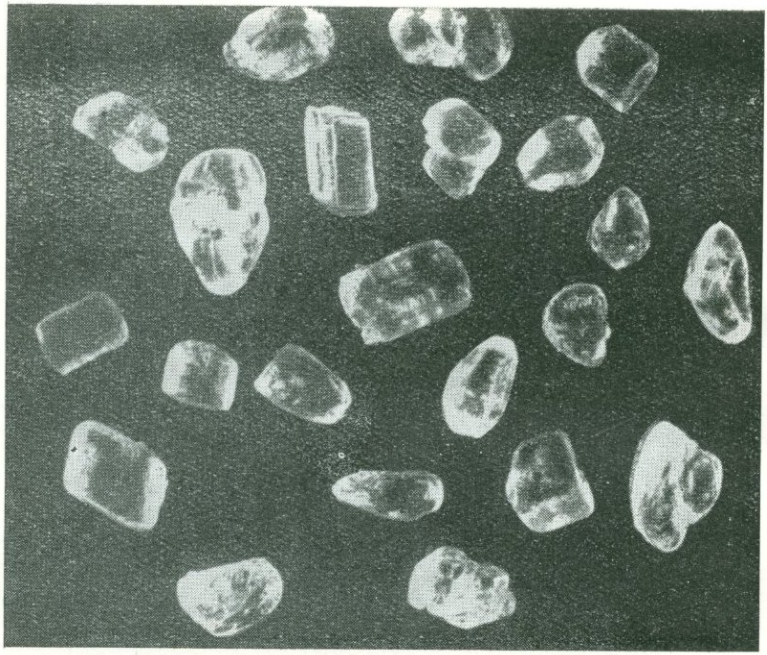


Рис. 7. Фотография кристаллов сегнетовой соли, полученных при укрупнении осколков

«небольшой предварительной работы» [4]. В нашем случае эту небольшую работу мы совершаем путем периодического нагревания и охлаждения смеси. Причиной медленно протекающего спонтанного самоукрупнения зерен порошков являются, по-видимому, те же колебания температуры, но нерегулярные: флюктуационные, вызываемые неодинаковыми скоростями молекул при тепловом движении, и тривиальные суточные колебания [5, 6].

Авторы данной статьи благодарят сотрудников Института кристаллографии В. Ф. Парвова, Н. М. Щагину, Т. К. Ситник, С. А. Копысову за существенную техническую помощь в проведении описанных в этой работе опытов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Бакли.* Рост кристаллов. М., 1954, с. 28, 40.
2. *Д. Н. Артемьев.* Труды Петрогр. об-ва естествоиспытателей. Отд.-ние геологии и минералогии. 1914, **37**, 57.
3. *В. Ф. Парвов.* Кристаллография, 1966, **11**, вып. 3, 483.
4. *П. Кюри.* Избранные труды. М.— Л., 1966, с. 114.
5. *А. В. Шубников.* Ж. Рус. физ.-хим. об-ва. Физ. отд-ние, 1918, **50**, вып. 1—3, 39.
6. *А. В. Шубников.* Как растут кристаллы. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1935, с. 101, 150.

РАЗНОЕ

«Разное»— последний раздел избранных трудов академика А. В. Шубникова — должен был бы содержать богатейший литературный материал, не вошедший в предыдущие рубрики настоящего издания. Именно к этому разделу относятся многочисленные и разнообразные публикации научно-популярного характера, обобщающие высказывания по истории науки и философии, дискуссионные выступления, критические заметки, Personalia и др. Сама широта и неограниченность тематики наглядно свидетельствует об огромном диапазоне интересов ученого.

К сожалению, объем настоящей книги не позволяет воспроизвести подавляющее большинство этих работ. Здесь пришлось ограничиться лишь отдельными статьями, дающими наиболее яркое представление о многогранности творчества их автора, его умении приходить к глубоким и оригинальным выводам, его таланте представить в простом и ясном виде сущность трактуемых, подчас достаточно сложных проблем.

Выборку статей данного раздела открывает ряд публикаций, посвященных истории науки. Относящиеся к этому разделу очерки по истории кристаллографии уместно начать с принципиально важной, как бы программной статьи «Кристалл индивидуум и кристаллическая среда» (1936). Автор сначала останавливается на истории постепенной эволюции понятий о кристаллическом индивиде и кристаллической среде, а затем дает собственную интерпретацию данных понятий, основанную на достижениях современной кристаллографии. Проблема взаимосвязи индивида и среды вообще глубоко занимала ученого как с исторических, так и с философских позиций. Алексей Васильевич впоследствии неоднократно возвращался к этому вопросу, а в последние годы жизни представил широко развернутую философскую трактовку проблемы в очерке «У истоков кристаллографии».

Закономерности развития науки о кристаллах всегда особо интересовали Алексея Васильевича, найдя отражение в ряде его блестящих работ. В частности, оригинальные обобщающие выводы в этом направлении сформулированы в статье «Кристалл как непрерывная среда» (1932). В ней дан сжатый, но интересный обзор главных исторических этапов геометрической кристаллографии, наглядно представленных в виде компактной таблицы.

Большой научный путь, пройденный А. В. Шубниковым, уже вошел в историю кристаллографии вообще и в историю советской науки в частности. Тем самым принадлежат истории и воспоминания ученого о его выдающихся современниках.

Перед этими очерками помещены проникновенные и глубоко прочувствованные воспоминания, посвященные памяти академика А. Е. Ферсмана, с которым Алексей Васильевич был дружен и тесно связан, начиная со студенческих лет и кончая совместной работой в Академии наук СССР («Образ А. Е. Ферсмана по личным впечатлениям», 1946). Впоследствии этот очерк был положен в основу развернутой статьи «Штрихи большой жизни» (1965).

Далее следует статья о великом русском кристаллографе Е. С. Федорове (1853—1919). Алексей Васильевич описывает личные встречи с маститым кристаллографом, попутно рассказывая о своих первых шагах в науке («Воспоминания о Евграфе Степановиче Федорове», 1970). Эта статья имеет особое значение как одна из последних прижизненных публикаций А. В. Шубникова.

Некролог о Г. В. Вульфе (1863—1925) — замечательном ученом и первом руководителе Алексея Васильевича в области кристаллографии — нами опущен, так как выдержки из него даны на стр. 23 сборника. Опущена также статья, написанная А. В. Шубниковым в соавторстве с другими и посвященная памяти выдающегося советского кристаллографа и минералога А. К. Болдырева (1883—1946), к которому Шубников относился с неизменной симпатией и глубоким уважением. Здесь же упомянем краткую, но исчерпывающе ясную характеристику знаменитого французского кристаллографа О. Бравэ (1811—1863), помещенную в Большой Советской Энциклопедии (1927), а также поистине классический очерк, посвященный работам П. Кюри в области симметрии (см. стр. 137).

В настоящее издание не вошли многочисленные статьи дискуссионного характера, в том числе и материалы по известным дискуссиям Алексея Васильевича с проф. О. М. Аншелесом (1885—1957) относительно природы вицинальных образований и определения понятия кристаллической однородности. В настоящее время содержание этих дискуссий представляет лишь чисто исторический интерес.

В конце сборника приводятся только две небольшие, но важные статьи, адресованные, в первую очередь, составителям учебников и руководств по кристаллографии и отмечающие характерные ошибки в учебной литературе («Об одной традиционной ошибке и многообразии форм ее проявления», 1954; «Могут ли существовать в природе такие кристаллы, которые по признакам симметрии относятся к одной сингонии, а по геометрическим константам — к другой?», 1956).

Сборник завершается блестящей научно-популярной статьей глубокого философского и познавательного характера «О равноправии положительных и отрицательных чисел» (1966).

КРИСТАЛЛ КАК НЕПРЕРЫВНАЯ СРЕДА[1]

(Представлено академиком В. И. Вернадским)

Организационное бюро настоящей конференции, посвященной вопросам строения молекул, просило меня сделать обзорный доклад на тему о строении кристаллов, резонно полагая, что вопросы строения кристаллов теснейшим образом связаны с вопросами строения молекул, поскольку кристалл можно рассматривать как совокупность бесконечного множества молекул или как одну бесконечно большую молекулу. В ответ на это предложение я, не чувствуя себя вполне готовым к выполнению такой ответственной роли, выдвинул свое более скромное предложение — осветить, если хотите, диаметрально противоположный вопрос о кристалле, как непрерывной среде, в которой роль молекул или атомов играют математические точки, лишенные размеров и, тем не менее, без промежутков заполняющие все пространство. Естественно спросить, в какой мере уместна эта тема на конференции, интересующейся строением молекулы и потому как бы наперед отрицающей возможность непрерывного строения вещества? Ответом на этот вопрос будет сам мой доклад, который я начну с небольшой исторической справки.

Вопросами строения вещества издавна занималась философия; занималась ими химия и физика, и в зависимости от того, как разрешались эти вопросы, возникали различные течения и в других науках, в частности математике, биологии и т. д. В философии атомы появились 2300 лет тому назад в атомистической теории Демокрита; его атомы состояли из сплошного вещества и плавали в пустоте, которая, надо полагать, была также непрерывна. Но если философы первые открыли атомы, то они же первые встали на путь их отрицания, и к 1800 г. Кант полностью разрушил атомистическую теорию. После Канта в философии начинается новый период приспособления атомистической теории к теории сплошного строения материи (Фехнер, 1864). В химии атомистическая теория завоевывает себе прочное положение как раз в то время, когда в философии она перестает существовать. Как известно, Дальтон опубликовал свою теорию в 1808 г., т. е. через два года после смерти Канта. Далее, в конце XIX столетия возникают сомнения (Оствальд) в правильности и полезности атомистической теории. В неявной форме эти сомнения продолжают существовать и теперь и выражаются в усиленном интересе химиков к коллоидной химии и к химии неопределенных и нестойких соединений. Но если научная химия, как и философия, начинает свое существование

[1] Доложено на VIII Всесоюзной конференции по физико-химическим вопросам 15 декабря 1931 г. Изв. АН СССР, сер. 7, Отд-ние мат. и естеств. наук, 1932, № 6, с. 799—815; Ж. физ. химии, 1933, т. 4, вып. 2, 232—245.

с момента установления атомистической теории (Дальтон и Лавуазье были современниками), то физика за сто лет до рождения научной химии могла пышно развиваться только на почве признания непрерывного строения материи. Корпускулы Ньютона и монады Лейбница не могли выдержать конкуренции с lex continui того же Лейбница и не могли задержать победоносного шествия дифференциального и интегрального исчисления, изобретенного ими же и наилучшим образом отражавшего общую тенденцию

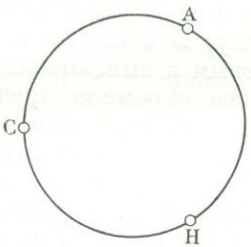


Рис. 1

физики. Атомистическая теория по настоящему овладевает физикой только во второй половине XIX в. с появлением кинетической теории, квантовой теории, с открытием радиоактивности и т. д. Синтез обеих точек зрения начинается в физике только в XX в. с возникновением волновой механики. Сказанное можно было бы иллюстрировать следующей схемой (рис. 1). Начертим окружность и отметим на ней три точки A, H и C, которые должны соответственно обозначить атомистическую теорию, теорию непрерывного строения материи и синтез обеих теорий, тогда вращение по часовой стрелке из точки A, или AHC, будет изображать исторический путь философии и химии в отношении строения материи, а обратное вращение из точки H — путь физики. Других путей нет и быть не может, ибо синтезу двух идей должны предшествовать сами идеи.

Итак, мы видели, как развивалось учение о строении материи в философии, физике и химии, но для нас в настоящий момент представляет особый интерес, как воспринимала это учение наука о кристаллах или кристаллография в широком значении этого слова. Рожденные в один и тот же 1669 г. две сестры — геометрическая кристаллография (закон Стенона) и кристаллооптика (двойное лучепреломление в кальците, открытое Бартолином) — по-разному отнеслись к строению материи. Кристаллооптика и вообще кристаллофизика целиком приняла непрерывность материи, присоединившись к физике и держалась этой позиции до конца XIX в., вернее сказать, атомистическая теория не оказала никакого влияния на развитие кристаллооптики, а геометрическая кристаллография заняла выжидательное положение, накапливала фактический материал и, по существу, едва ли была настоящей наукой в течение первых ста лет своего существования.

Лишь с открытием закона целых чисел Гаюи (1784), по времени почти точно совпавшим с открытием закона кратных отношений Дальтона, геометрическая кристаллография приобрела свое настоящее лицо и свое определенное отношение к строению материи, близкое к воззрениям химии.

Эту солидарность с химией геометрическая кристаллография сохранила до сих пор и только во второй половине XIX в. наметился некоторый ее сдвиг в сторону непрерывности. Главнейшие исторические этапы геометрической кристаллографии даны в табл. 1.

Таблица 1

Год	Автор	Открытие
1669	Стенон	Закон постоянства углов
1784	Гаюи	Закон целых чисел
1804—1809	Вейсс	Закон зон
1825	Миллер	Индексы граней
1830	Гессель	32 класса симметрии
1850	Бравэ	14 пространственных решеток
1868—1869	Жордан	Непрерывные пространственные группы первого рода
1879	Зонке	Прерывные пространственные группы первого рода
1891	Федоров и Шенфлис	Прерывные пространственные группы обоих родов

Из этого перечня мы видим, что понятие непрерывных пространственных групп введено впервые Жорданом во второй половине XIX в. Но последний был чистым математиком, и потому сам не мог оценить того значения, которое могла бы иметь его работа для кристаллографии и физики. В свою очередь кристаллографы не обратили должного внимания на работу Жордана и после работы Федорова и Шенфлиса продолжали заниматься отделкой деталей созданного ими грандиозного здания. Таковы работы Александера, Херманна, Хееша, Вебера, Ниггли, Вейссенберга, Хильтона, Шибольда, Полиа, Гюнцбурга и многих других, не исключая и самих Федорова и Шенфлиса. Блестящее открытие Лауэ дифракции рентгеновых лучей кристаллами, подтвердившее атомистическую теорию строения кристаллов Федорова и Шенфлиса, казалось, окончательно отвлекло внимание исследователей от пути, начатого Жорданом. Возникла новая наука — рентгенография кристаллов, объединившая в себе тысячи исследований по атомистическому строению кристаллов. По мере расширения этой науки в область ее исследований стали проникать сначала кристаллические порошки, далее жидкости, волокнистые структуры,

жидкие кристаллы и т. д., т. е. такие среды, которые, по крайней мере статистически, можно было рассматривать как среды непрерывные. От отрицания непрерывности рентгенология пришла к отрицанию этого отрицания.

Следующим неизбежным этапом развития геометрической кристаллографии должен быть вывод непрерывных групп обоих родов, т. е. групп движений и групп движения с зеркальными отражениями. Этой задачей довелось заняться нам. С разрешением этой задачи геометрическая кристаллография вступает на уготованный ей историей путь для того, чтобы далее стать геометрией анизотропных сред непрерывных или прерывных — все равно. Ставши на этот путь, геометрическая кристаллография теснейшим образом сливается с геометрией, с кристаллографией физической, а через нее с физикой и химией вообще.

В настоящем докладе я постараюсь в самых общих чертах охарактеризовать учение о непрерывных однородных средах, не вдаваясь в доказательство относящихся к нему теорем. Как и всякая другая геометрия, теория непрерывных сред может быть одномерной, двумерной, трехмерной и т. д. Нас сейчас будет интересовать только трехмерная геометрия; изложение мы начнем с определения элементов пространства — точки. Под точкой мы будем понимать то же, что понимают под этим термином в эвклидовой геометрии; только мы лишим эвклидову точку ее неизменного и всегда молчаливо приписываемого ей атрибута — шаровой симметрии. Нашим точкам мы будем приписывать все возможные мыслимые симметрии — симметрии точечных групп. Вместо самого разумного для эвклидовой геометрии способа изображать точки шариками (или для плоскости кружочками) мы будем применять способ изображения точек маленькими многогранниками, а для плоскости — многоугольниками, ни на одну минуту не забывая, что размеры наших многогранников бесконечно малы. Можно также понимать под нашей точкой просто некую совокупность элементов симметрии, пересекающихся в эвклидовой точке (точечная группа элементов симметрии), отчего последняя, конечно, уже перестает быть обыкновенной эвклидовой точкой. Чтобы окончить с определением точки, заметим, что элементы симметрии точки мы мыслим себе одновременно как элементы симметрии самой среды, ибо коль скоро окружающие данную точку другие точки распределены около данной точки по законам, не отвечающим симметрии данной точки, то и данная точка меняет приписываемую ей симметрию. Отсюда отнюдь нельзя утверждать обратного, а именно, что все элементы симметрии среды должны содержаться среди элементов симметрии точек, ибо существуют элементы симметрии, присущие исключительно бесконечным фигурам (оси трансляций T_n, винтовые оси L_n^t, плоскости скользящего отражения P_t), а непрерывная среда

мыслится нами в противоположность точкам как фигура беспредельно большая. Итак, с одной стороны, мы лишили точки их неизменности, с другой — отказались рассматривать их вне зависимости от других точек [1]. Далее, мы ограничили себя из соображений экономии мысли и целесообразности рассмотрением исключительно однородных непрерывных сред, понимая под ними такие среды, которые сплошь состоят из равноценных точек или, иначе, точек одинаковой симметрии. После этих предпосылок наша проблема формально математически может быть сформулирована следующим образом. Мы желаем найти, описать и классифицировать все такие непрерывные среды, которые удовлетворяют требованию однородности и непрерывности. Так как наши точки являются для непрерывных сред такими же структурными элементами, как узлы пространственных решеток являются структурными элементами решеток, то нашу задачу мы можем рассматривать как задачу изучения всевозможных структур непрерывных сред. Это формально, а по существу мы ставим себе целью дать теорию структуры таких встречающихся в природе непрерывных однородных или статистически однородных сред, которые не укладываются в понятие пространственных решеток или правильных систем точек.

Мы не будем излагать здесь полного вывода всех случаев симметрии однородных сред; этот вывод, хотя и схематически, но до конца сделан и опубликован в Zeitschrift für Kristallographie, 1929, **72**, 271; и 1930, **73**, 430. Мы ограничимся указанием того пути, которым мы при этом шли. Возьмем произвольную точку A, лишенную какой-либо симметрии. Формально такая точка, как и всякая асимметрическая фигура, обладает бесконечным множеством произвольно направленных осей симметрии первого порядка, ибо, поворачивая такую фигуру около произвольной прямой на угол в 360°, мы приводим фигуру в совмещение с ней самой. Симметрия нашей точки, следовательно, относится к 32-му классу симметрии кристаллов и обозначается C_1 (циклическая симметрия с осями 1-го порядка). Подвергнем теперь нашу точку всевозможным непрерывным трансляциям параллельно трем произвольно выбранным и не лежащим в одной плоскости осям трансляций (T'''). При этих условиях наша точка побывает во всех точках пока еще эвклидова пространства и сообщит им по нашему приказанию свою собственную симметрию. Теперь эвклидово пространство нами превращено в однородную среду, которую мы обозначим в соответствии с методом ее получения C_1T'''. Для того чтобы понять всю глубину различия выведенной нами непрерывной среды от эвклидова пространства и от соответствующего нашему случаю кристаллографической группы Шенфлиса

[1] В этой реформе понятия эвклидовой точки содержится наша основная идея вывода однородных непрерывных сред. В цитированных ниже немецких работах идея эта умышленно была скрыта нами в математических символах и в совершенно явной форме высказывается здесь впервые.

C_1^1, обратимся к рассмотрению двумерной статистической модели нашей среды (рис. 2). Исходная точка A изображена здесь запятой, чтобы показать отсутствие в ней элементов симметрии; припишем далее запятой «лицо» и «изнанку», чтобы не возникало никаких сомнений относительно отсутствия в ней плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью чертежа. Кроме этой точки A, изобразим на плоскости множество других равноценных ей точек, которые также обозначим запятыми, тождественными первой и распо-

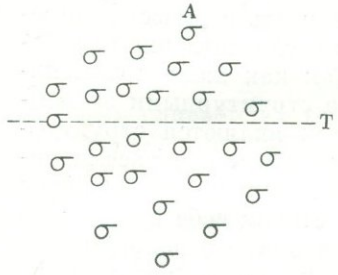


Рис. 2

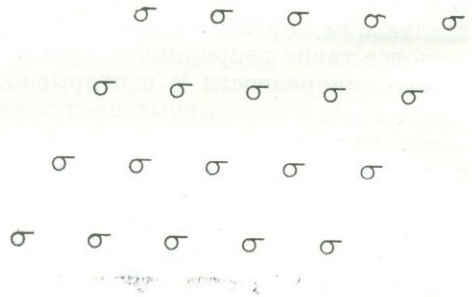


Рис. 3

ложенными ей параллельно. Плотность распределения точек или количество точек, приходящихся на единицу поверхности, пусть будет во всех местах постоянна, или, если уже быть совсем строгим, пусть эта плотность меняется от места к месту, следуя закону распределения Гаусса. Пусть далее наши структурные единицы и средние расстояния между ними будут так малы, что мы не в состоянии исследовать их индивидуально, но можем получать только суммарные впечатления от их бытия. Покажем, что при этих данных наша среда может служить прекрасной моделью двумерной анизотропной однородной и непрерывной среды. Представим себе, что некоторое существо движется в нашей среде вдоль оси T_1 по стрелке, встречая на своем пути множество запятых со стороны их выпуклости. Наше существо получит от этих встреч некоторое суммарное ощущение; если теперь то же существо пойдет обратно, то впечатление его от встреч с запятыми будет уже иным, ибо оно будет встречаться постоянно только с острыми концами запятых. Для нашего существа среда будет поэтому анизотропной. Так как очень малых расстояний наше существо по условию оценивать не может, то среда будет представляться ему вполне непрерывной; а так как количество встреч с запятыми в единицу времени при постоянной скорости движения нашего существа будет тоже постоянным, то среда будет для него вполне однородной. Мы видим теперь, в чем состоит разница между нашим пространством и пространством эвклида. Эвклидово пространство однородно и изотропно; наше — однородно и анизотропно. Эвклидово пространство только частный случай наших сред. Отличие

наших сред от кристаллографических сред Шенфлиса и Федорова более тонко и требует особого рассмотрения. Представим себе плоскую сетку (рис. 3), составленную из тех же запятых, но в предположении, что элементарные трансляции теперь не бесконечно малы. Если сохранить все предыдущие условия, то наше существо, очевидно, не найдет разницы между обоими пространствами: в обоих случаях пространство будет для него вполне непрерывным и анизотропным. Для того же, чтобы установить эту разницу, необходимо применить иной метод. В данном случае следовало бы применить, например, такой метод, который был бы аналогичен исследованию кристаллов рентгеновскими лучами; тогда разница вскрылась бы со всей очевидностью. Наша среда вела бы себя, как жидкий кристалл, а кристаллографическая — как обыкновенный кристалл. Из этого примера мы видим, что подобно тому как нельзя мыслить себе вещь, как вещь в себе, т. е. вне зависимости ее от других вещей и от нас самих, так в равной мере нельзя говорить о среде вообще, т. е. вне зависимости от того метода, которым среда изучается.

Мы получили первый случай непрерывных анизотропных сред, подвергая точку, обладающую симметрией C_1, непрерывным трансляциям около трех, не лежащих в одной плоскости, осей. Совершенно таким же образом можно получить из всякой другой точки с иной симметрией другие пространства. В табл. 2 даны все такие точечные группы, выведенные Гесселем в 1830 г. Если обозначим в общем виде симметрию исходной точки символом группы G, то символ выводимой из нее путем непрерывных трансляций пространственной группы будет GT'''. Число точечных групп G, выведенных Гесселем, бесконечно велико, следовательно, и однородных непрерывных пространственных групп существует также бесконечное множество.

Но подвергать точечную группу непрерывным трансляциям около трех осей — не единственный прием вывода непрерывных групп. Математическое исследование этого вопроса показывает, что так называемые циклические O_n и диэдрические D_n точечные группы дают также непрерывные пространственные группы, если мы подвергнем их сначала непрерывным трансляциям около двух координатных осей и затем винтовому движению параллельно третьей оси, перпендикулярной к плоскости трансляций.

Совокупность таких тройных операций мы обозначаем символом $T''L'$, а два бесконечных ряда новых пространственных групп — символами $C_nT''L'$ и $D_nT''L'$. Наконец, к этому многообразию пространственных групп мы должны прибавить еще одну, стоящую совершенно особняком группу, возникающую из простейшей точечной группы C_1, если подвергнуть ее винтовым движениям параллельно трем, не лежащим в одной плоскости осями. Эту группу мы называем C_1L''' или просто L'''. Этим и исчерпываются все непрерывные однородные группы. Полный их перечень мы даем в табл. 3.

Таблица 2

Точечные группы

Название точечных групп	Тип A	Тип B	Элементы симметрии
Циклическая	C_n	C_∞	L_n; L_∞
Диэдрическая	D_n	D_∞	$L_n n L_2$; $L_\infty \infty L_2$
Тетраэдрическая	T	—	$3L_2 4L_3$
Октаэдрическая	O	—	$3L_4 4L_3 6L_2$
Икосаэдрическая	J	—	$6L_5 10L_3 15L_2$
Шаровая	—	K	∞L_∞
Циклическая	S_{2n}	—	$\overline{L}_{2n}$
	C_n^h	C_∞^h	$L_n P$; $L_\infty P$
	C_n^v	C_∞^v	$L_n n P$; $L_\infty \infty P$
Диэдрическая	D_n^h	D_∞^h	$L_n n L_2\,(n+1)\,PC$; $L_\infty^\infty L_2 \infty PC$ *
	D_n^d	—	$\overline{L}_n n L_2 n P$
Тетраэдрическая	T^d	—	$3L_4 4L_3 6P$
	T^h	—	$3L_2 4L_3 3PC$
Октаэдрическая	O^h	—	$3L_4 4L_3 6L_2 9PC$
Икосаэдрическая	J^h	—	$6L_2 10L_3 15L_2 15PC$
Шаровая	—	K^h	$\infty L_\infty \infty PC$

Примечание. $n > 0$ — целое число; h — горизонтальная плоскость симметрии; v — вертикальные плоскости симметрии; d — диагональные плоскости симметрии. * При нечетном n в этой формуле отсутствует C.

Из этой таблицы мы видим, что существует всего 9 бесконечных рядов пространственных групп: 1) $C_n T'''$, 2) $D_n T'''$, 3) $S_{2n} T'''$, 4) $C_n^v T'''$, 5) $C_n^h T'''$, 6) $D_n T'''$; 7) $D_n^d T'''$, 8) $C_n T'' L'$ и 9) $D_n T'' L'$ и 10 особенных групп: 1) TT''', 2) OT''', 3) JT''', 4) KT'''; 5) $T^d T'''$, 6) $T^h T'''$, 7) $O^h T'''$, 8) $J^h T'''$; 9) $K^h T'''$ и 10) L'''. Сравнивая мир непрерывных групп с миром групп прерывных, которых существует, как известно, всего 230, мы видим, что первый мир в бесконечное число раз более разнообразен, чем второй.

Нам надлежит теперь показать, в какой мере выдуманный нами новый мир пространств отвечает действительному и какое, в частности, отношение наши некристаллографические пространства имеют к кристаллам. Начнем с простейшего случая. Дан кристалл кубической системы, например каменная соль. Нас интересует симметрия этого кристалла в отношении скорости распространения света внутри него. Чтобы определить эту симметрию, вообразим себе внутри кристаллической среды светящуюся точку. Так как скорость света по всем направлениям в каменной соли

Таблица 3

Непрерывные трехмерные группы

Комбинируемые точечные группы	Комбинируемые примитивные группы			Комбинируемые точечные группы	Комбинируемые примитивные группы		
	T'''	$T''L'$	L'''		T'''	$T''L'$	L'''
C_n	C_nT'''	$C_nT''L'$	C_1L'''	C_n^h	C_n^hT'''	—	—
	$C_\infty T'''$	—	—		$C_\infty^h T'''$	—	—
D_n	D_nT'''	$D_nT''L'$	—	D_n^h	D_n^hT'''	—	—
	$D_\infty T'''$	—	—		$D_\infty^h T'''$	—	—
T	TT'''	—	—	D_n^d	D_n^dT'''	—	—
O	OT'''	—	—		—	—	—
J	JT'''	—	—	T^d	T^dT'''	—	—
K	KT'''	—	—	T^h	T^hT'''	—	—
S_{2n}	$S_{2n}T'''$	—	—	O^h	O^hT'''	—	—
C_n^v	C_h^vT'''	—	—	J^h	J^hT'''	—	—
	$C_\infty^v T'''$	—	—	K^h	K^hT'''	—	—

одинакова и сами лучи имеют цилиндрическую симметрию, то выбранная нами точка должна иметь симметрию шара, а так как точка может быть выбрана совершенно произвольно, то среда непрерывна. Отсюда искомая симметрия среды есть K^hT''', или просто симметрия эвклидового пространства. Мы разобрали здесь всем хорошо известный факт, но осветили его совершенно иначе, чем это делалось до сих пор, показав, что явления кристаллооптики могут быть описываемы в терминах геометрической кристаллографии, что некристаллографическая (по Шенфлису) симметрия свойственна кристаллам.

Следующие примеры должны показать это еще лучше. Возьмем опять кристалл кубической системы, но обладающий способностью вращать плоскость поляризации, например $NaClO_3$. Если в данном случае вопрос будет идти опять о скорости света, то симметрия $NaClO_3$ будет та же — K^hT'''. Если же нас будет интересовать отношение кристаллического вещества к поляризованному монохроматическому свету, то симметрия среды будет иной. В самом деле, возьмем произвольную точку внутри кристалла и опишем около нее сферу определенного радиуса и будем исследовать симметрию этой сферы, пропуская через нее тонкий пучок поляризованных лучей по всевозможным направлениям, но обязательно так, чтобы этот пучок проходил через центр сферы. Во-первых, мы увидим, что при прохождении лучей через кристалл плоскость поляризации всегда будет поворачиваться, например, впра-

во независимо от направления луча на один и тот же угол. Отсюда следует, что наша точка не имеет плоскостей симметрии. Во-вторых, поворачивая шар около луча на любой угол, мы не заметим никакого влияния этих поворотов на поляризованный луч; это означает, что всякий луч есть ось симметрии бесконечного порядка. Отсюда следует, что наш шар имеет симметрию группы K. Шар, отвечающий группе K, не имеет плоскостей симметрии в отличие от шара K^h, который имеет бесконечное множество плоскостей симметрии. Значит ли это, что центр шара обладает той же симметрией? Нет, не всегда, ибо при таком способе рассмотрения, т. е. при анализе симметрии конечных фигур, нельзя отличить простые оси симметрии бесконечного порядка от винтовых осей симметрии бесконечного порядка. Если бы оси оказались простыми (не винтовыми), то симметрия точки была бы K, а соответствующая пространственная группа была бы KT'''. В противном случае среда должна быть причислена к группе L''', как к единственной, которая содержит бесконечное множество винтовых осей бесконечного порядка всевозможных направлений.

Итак, остается решить вопрос, являются ли оси винтовыми или простыми. Если данная среда обладает винтовыми осями бесконечного порядка, то в ней существуют вполне определенные конечные трансляции, равные ходу винтовых осей. Если речь идет о вращении плоскости поляризации, то этот ход имеется налицо в виде тех отрезков пути луча, при которых плоскость поляризации поворачивается на 360°. Эти отрезки, которые можно было бы назвать трансляциями вращения плоскости поляризации, суть обратные величины так называемой вращательной способности кристалла, измеряемой углом поворота плоскости поляризации при прохождении лучом пути в 1 *мм* внутри кристалла. Итак, вопрос о симметрии $NaClO_3$ по отношению к явлению прохождения через него поляризованных лучей решен — соответствующая группа есть L'''. Мы намеренно остановились так подробно на этом случае, потому что группы K и L''' являются особенно трудными для понимания. Этим, вероятно, объясняется, почему даже в настоящее время находятся лица из среды специально занимающихся кристаллографией, для которых сам факт существования этих групп представляется недоказанным, и это несмотря на то, что группа K была установлена Гесселем в 1830 г. и вторично открыта через пятьдесят лет П. Кюри, а группа L''' была введена Жорданом в 1868 г. Между тем представить себе шар без плоскостей симметрии (группа K), по существу, не труднее, чем представить себе куб без плоскостей симметрии (кубические кристаллы сильвина с косыми фигурами вытравления). В равной мере представить себе пространство, заполненное бесконечно тонкими и бесконечно длинными винтиками, расположенными своими осями по всевозможным направлениям, не сложнее, чем представить себе обыкновенное эвклидово пространство, состоящее из бесконечного множества цилиндрических прямых.

Переходим теперь к кристаллам одноосным, не вращающим плоскость поляризации. Нет особой надобности доказывать, что каждая точка такого кристалла в отношении оптических явлений имеет симметрию эллипсоида вращения или иначе симметрию группы D_{∞}^{h}. Соответствующая пространственная группа будет $D_{\infty}^{h}T'''$.

Одноосные кристаллы, вращающие плоскость поляризации, имеют совершенно иную симметрию. Прежде всего рассуждением, аналогичным тому, которое имело место по отношению к кристаллам кубической системы, вращающим плоскость поляризации, легко установить наличие винтовых осей, параллельных оптической оси. Далее, из того обстоятельства, что винтовые оси эти неполярны, следует, что в среде содержатся оси второго порядка, перпендикулярные винтовым осям. В результате имеем для нашей среды группу $D_1T''L'$.

Далее укажем, что симметрия двуосных кристаллов, не вращающих плоскость поляризации, соответствует группе D_2^hT'''; это означает, что каждая точка нашей среды обладает тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка, тремя плоскостями симметрии, проходящими через эти оси, и центром симметрии или иначе принадлежит к голоэдрии ромбической системы.

До сих пор мы приводили примеры того, как следует определять симметрию кристаллов в отношении тех или иных явлений, которые в нем происходят, причем никаких особых последствий из этого не вытекало. Мы не могли предсказать, как должно протекать явление, если кристалл будет иметь ту или иную симметрию. На следующем примере мы покажем, как такие предсказания могут делаться. Возьмем двуосный кристалл, вращающий плоскость поляризации. Его оптическая симметрия будет D_2T'''. Оптические оси кристалла не являются в данном случае винтовыми осями симметрии, ибо наличие двух таких пересекающих осей требует присутствия бесконечного множества винтовых осей всевозможных направлений, что противоречит условию. Но если оптические оси не являются в данном случае винтовыми осями, то угол вращения плоскости поляризации не пропорционален пройденному лучом пути. Этот вывод можно сочетать с однородностью кристалла только единственным образом: необходимо допустить, что приращение угла вращения, отвечающее одному и тому же приращению пути луча, меняется периодически по тому или иному закону в пределах между двумя определенными положительными величинами. Проверка этого предсказания, очевидно, будет и проверкой самой теории. К сожалению, в настоящее время мы не располагаем достаточно точными методами измерения угла вращения плоскости поляризации, поэтому такая проверка есть дело будущего.

До сих пор мы говорили только об оптических свойствах кристаллов, но кристалл ведет себя как непрерывная среда также и в отно-

шении многих других физических явлений; в частности, упругие свойства кристаллов можно рассматривать как свойства непрерывных сред. Так, для кристаллов кубической системы явления упругости имеют симметрию O^hT''', для кристаллов тетрагональной системы — симметрию D_4^hT''' и т. д.

Теперь мы переходим к рассмотрению симметрии таких сред, которые не могут быть причислены к кристаллам, но и не могут рассматриваться как аморфные тела. К такого рода телам принадлежат, как известно, так называемые жидкие кристаллы. Оптические свойства жидких кристаллов вполне отвечают оптическим свойствам одноосных кристаллов, поэтому соответствующая пространственная группа будет D_∞^hT'''. С точки зрения теории симметрии к этой же категории сред должны быть отнесены многие природные тела волокнистой структуры, как-то: шелк, нервы, мускулы, волосы, рог и т. д. По поводу некристаллических, но явно симметрических образований, встречающихся в растительном и животном мире, нам хотелось бы здесь высказать одно априорное соображение, напрашивающееся само собой.

Всем хорошо известно, что в определенных случаях полезно и даже совершенно необходимо рассматривать кристаллы как среды прерывистые или как системы правильных систем точек — атомов. Втиснутые в пространственные решетки атомы и молекулы таких кристаллов неизбежно в силу только одной геометрической необходимости должны обладать так называемой кристаллографической симметрией, запрещающей пятерные оси симметрии и оси симметрии порядка выше шести. Между тем это запрещение отнюдь не распространяется на атомы и молекулы, не связанные в кристаллические решетки. Наоборот, мы имеем все основания допускать, хотя бы из периодического закона, что пятерная и семерная симметрия молекул является вполне допустимой для молекул, находящихся в жидкостях и газах. Далее мы не имеем никаких оснований лишать наши молекулы присущего всем молекулам свойства при известных условиях, например при понижении температуры, стремиться к образованию жестких структур. Затем мы ни в коем случае не можем взять на себя смелость утверждать, что всякая молекула с некристаллографической симметрией может быть втиснута в ту или иную пространственную решетку и тем самым может быть лишена присущей ей симметрии. Гораздо естественнее предположить, что по меньшей мере иногда этого сделать нельзя. Но какие же жесткие структуры в таком случае смогут образовать эти молекулы? Очевидно, это будут или вполне аморфные среды или среды статистически анизотропные по терминологии Вейссенберга. В последнем случае пятерная или иная некристаллографическая симметрия молекул будет присуща и всей среде.

Морские звезды, цветы и многие другие представители живой природы наилучшим образом отвечают высказанным выше сооб-

ражениям. Подобно тому как внешняя форма кристаллов отображает решетчатую их структуру, так равно и внешняя форма организмов отображает их статистическую анизотропию. Здесь мы должны со всей определенностью отмежеваться от той многочисленной группы ученых, совершенно незнакомых с кристаллографией, но почему-то очень любящих, или ссылаться на нее, когда она им полезна, или критиковать ее тогда, когда, по их мнению, она им неприятна,— ученых, слишком далеко заходящих в аналогиях между живыми организмами и кристаллами. Необходимо помнить, что кристалл в первую очередь есть однородная среда и лишь в самую последнюю очередь — организованный индивидуум; организм есть в первую очередь индивидуум и лишь в самую последнюю очередь среда, в которой только самые незначительные части могут рассматриваться как однородные среды. Кристаллографическому изучению в духе изложенной теории поэтому в первую очередь подлежат лишь ткани организмов или зародышевые организмы; последние уже изучаются с этой точки зрения немецким минералогом Ринне.

К анизотропным однородным средам относятся также кристаллы и аморфные тела с наведенной анизотропией, например растянутые или сжатые желатина, резина и т. д. В оптическом отношении такие среды ничем не отличаются от одноосных кристаллов (группа $D_{\infty}^{h}T'''$). Кристаллооптику поэтому правильнее было бы называть оптикой анизотропных однородных сред. Опыт показывает, что цилиндр, изготовленный из желатины и подвергнутый кручению около своей оси, в оптическом отношении не отличается от одноосных кристаллов, вращающих плоскость поляризации, например от кварца. Соответствующая группа для таких сред будет поэтому D_1T'''.

Примером кристаллов с наведенной анизотропией может служить подвергнутая кручению каменная соль. Оптические свойства ее будут совпадать с оптическими свойствами закрученной желатины.

Наведенная анизотропия может быть сообщена аморфным и кристаллическим телам не только чисто механическим на них воздействием, но и иными путями. Так, помещая стекло в однородное электрическое поле, мы делаем его анизотропным с симметрией группы $C_{\infty}^{h}T'''$. В этой группе отсутствуют центры симметрии. Известно, что кристаллы, не имеющие центра симметрии, пьезоэлектричны, поэтому мы вправе ожидать, что и аморфные тела в этих условиях будут пьезоэлектричны. Мы говорим ожидать потому, что утверждать этого только из кристаллографических соображений ни в коем случае нельзя. Опыты Мейсснера и наши показали, что это явление на самом деле имеет место. Совершенно так же можно ожидать, что аморфное тело или оптически изотропный кристалл, находящиеся в однородном электрическом поле, будут обладать двойным лучепреломлением. Всем хорошо извест-

но, что это ожидание оправдывается в так называемом явлении Керра. С равным правом можно ожидать, что аморфное тело, например стекло, помещенное в поле световых, рентгеновских или гамма-лучей, будет пьезоэлектрично. Так ли происходит на самом деле, решит опыт, который, сколько нам известно, еще не был сделан.

До сих пор в наших примерах фигурировали исключительно материальные среды: кристаллы и аморфные тела; между тем в природе существует большое разнообразие не материальных, а энергетических анизотропных средин. Таковы, например, однородное электрическое поле, рассматриваемое как совокупность силовых трубок и обладающее симметрией $C_\infty^v T'''$, и поле световых лучей, имеющее ту же симметрию. Главные оси обоих полей полярны. Магнитное поле, рассматриваемое как совокупность амперовых токов, имеет симметрию $C_\infty^h T'''$. В отличие от электрического магнитное поле не обладает плоскостями симметрии, параллельными главной оси, но обладает плоскостями симметрии, перпендикулярными главной оси. Поле поляризованных лучей, рассматриваемое как совокупность бесконечно тонких лент с условием, что в них можно различать направление вперед и назад, обладает симметрией $C_2^v T'''$. Ось симметрии второго порядка в этом поле совпадает с направлением лучей и является полярной осью. Можно было бы привести большое количество примеров энергетических анизотропных полей, но и сказанного вполне достаточно для того, чтобы составить себе об этом предмете вполне ясное представление.

Чтобы вполне закончить рассмотрение анизотропных однородных сред, отметим еще одну в высшей степени интересную их категорию; я разумею средины из двух или нескольких энергетических полей. Пользуясь теорией сочетаний, можно придумать весьма большое количество таких полей. Так, например, комбинируя магнитное поле с полем поляризованных лучей, получим новое поле с симметрией $C_2 T'' L'$, до сих пор в наших примерах не встречавшееся и вполне отвечающее симметрии явления магнитного вращения плоскости поляризации. В отличие от однородных кристаллов, вращающих плоскость поляризации, наша комбинированная среда обладает осью, концы которой отличаются друг от друга как предмет и его зеркальное изображение. Если луч света идет по направлению поля, то плоскость поляризации поворачивается вправо; если луч направлен в противоположную сторону, то плоскость поляризации поворачивается влево.

На этом мы заканчиваем рассмотрение непрерывных групп. Однако этими группами и 230 группами прерывных сред не исчерпывается все многообразие однородных трехмерных пространств. Можно представить себе такие трехмерные среды, которые вполне непрерывны по одним направлениям и прерывны по другим. Мы поставили себе задачей вывести все такие гибридные группы, при-

чем оказалось, что все эти группы могут быть получены из так называемых сеточных и цепочечных групп. Под сеточными группами разумеют двумерные прерывистые группы, выведенные Ц. Херманном. Цепочечные группы выведены Александером и Херрманном. Сеточных групп оказалось 80, а цепочечных — бесконечное множество. Примером фигуры, обладающей симметрией сеточных групп, могут служить рисунки обоев, тканей и т. д. в том случае, однако, если повторяющиеся вдоль одной плоскости фигуры сами по себе не двумерны, а трехмерны. Примером фигуры, обладающей симметрией цепочечных групп, может служить цепочка из колец, нить одинаковых бус, бордюры обоев и т. д.

Математическое исследование поставленного нами вопроса показало, что из каждой сеточной и цепочечной группы можно получить всего одну пространственную гибридную группу. Для этого сеточные группы N нужно подвергнуть одной непрерывной трансляции T', а цепочечные группы R следует подвергнуть двум непрерывным трансляциям T''. Символы гибридных групп поэтому будут NT' и RT''. Можно при желании привести множество примеров гибридных средин; мы ограничимся, однако, только наиболее характерными. Стопа бумаги прерывиста в направлении, перпендикулярном к листам и непрерывна во всех направлениях в плоскости листа. Символ ее группы будет $D_{\infty}^{h}(T_a T'')$. Представим себе теперь среду, сложенную из пластин трех сортов: A, B, C. Если эти пластины расположены в порядке $ABC\ ABC\ ABC\ldots$, то система обладает симметрией групп $C_{\infty}^{h}(T_a T'')$. Ось симметрии бесконечного порядка в данном случае полярна, ибо направление $ABCAB\ldots$ отличается от противоположного направления $CBACB\ldots$ Надо ожидать, что материальные средины этого порядка так или иначе могут проявлять свою полярность.

Так, общеизвестен факт, что столбики, составленные из чередующихся слоев двух металлов и жидкости, заряжены по концам электричеством противоположных знаков. Надо думать также, что тонкослойные изоляторы, составленные из трех диэлектриков, будут пьезоэлектричны. К гибридным же пространствам должно быть отнесено поле стоячих звуковых, световых и других волн. Три взаимно перпендикулярных поля стоячих волн образуют пространственную решетку, не отличающуюся по симметрии от решетки кристалла кубической системы, и являются в совокупности как бы энергетической моделью материального кристалла. На этом мы заканчиваем обзор некристаллографических однородных сред и приводим ниже выводы из всего изложенного*.

1. Геометрическая кристаллография вступает во вторую фазу своего исторического развития, характеризуемую усиленным интересом к идее непрерывности, в противовес господствовавшему

* Спустя полгода после прочтения настоящего доклада Дебай опубликовал работу, в которой экспериментально доказал, что поле звуковых волн ультравысокой частоты в жидкости может служить дифракционной решеткой для видимого света. (прим. ред.)

ранее направлению рассматривать кристалл исключительно как среду прерывистую.

2. Чем скорее кристаллография пройдет эту фазу своего развития, тем скорее будет создана новая кристаллография на основе синтеза обеих точек зрения.

3. Понятие непрерывности кристаллических и некристаллических средин требует усовершенствования основных понятий геометрии. Точка лишается ее универсальной шаровой симметрии и ставится в зависимость от окружающих ее точек.

4. Симметрия непрерывных и гибридных сред бесконечно разнообразнее симметрии прерывистых сред.

5. Нельзя говорить о симметрии кристалла вообще, т. е. безотносительно к тому или иному явлению.

6. Симметрия кристаллов в такой же мере соответствует симметрии непрерывных как и прерывных групп.

7. Статистически непрерывные группы могут быть описываемы в терминах непрерывных групп.

8. Непрерывные гибридные среды могут быть материальными, энергетическими и смешанными.

9. Изучение симметрии сред помогает предсказанию новых физических явлений.

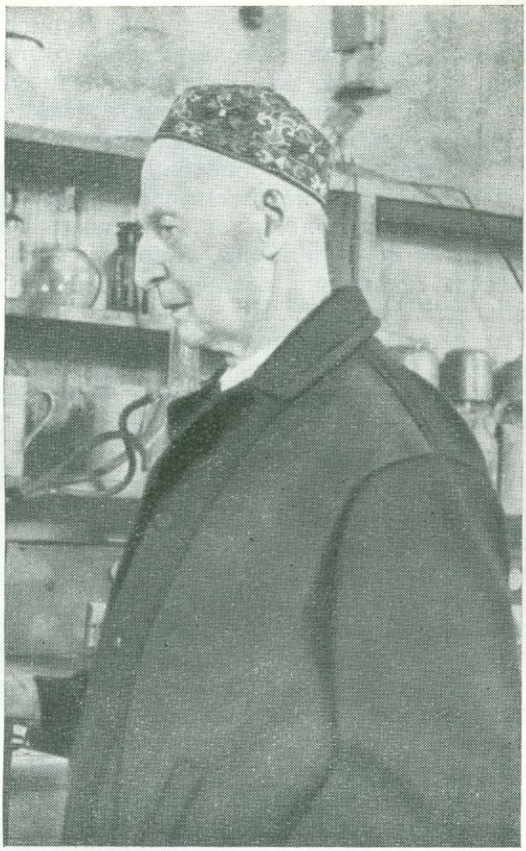
10. Симметрия организмов включается в число объектов изучения кристаллографии.

Ленинград
Минералогический музей АН СССР

КРИСТАЛЛ-ИНДИВИДУУМ И КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ СРЕДА[1]

Термин «кристаллический индивидуум» воспринимается большинством даже современных минералогов как нечто до конца понятное, не требующее никаких объяснений. Между тем, содержание этого понятия за все время существования науки о кристаллах настолько сильно менялось вместе с изменением основных предпосылок кристаллографии, что в настоящее время применять термин «кристаллический индивидуум» без предварительного его истолкования было бы совершенно невозможно, если только при этом мы желаем оставаться на высоте наших современных представлений о кристаллах. Трудно установить совершенно точно, кто именно впервые стал применять этот термин; во всяком случае,

[1] В кн.: Академику В. И. Вернадскому к 50-летию научной и педагогической деятельности. Т. 1. Изд-во АН СССР, 1936, с. 97—108.



В лаборатории
(1970 г.)

еще сто лет тому назад его употреблял Август Брейтгаупт [1], Карл-Фридрих Науманн в 1854 г. называет кристаллы индивидуумами неорганической природы [2], а В. Гайдингер — индивидуумами царства минералов [3]. Не подлежит сомнению, что основная причина появления интересующего нас термина лежит в аналогии, которую проводили ученые между кристаллами и живыми организмами. Науманн прямо говорит, что отдельные кристаллы играют в неорганической природе ту же роль, что и отдельные растения в мире растений и отдельные животные в мире животных. Нетрудно перечислить эти аналогии. В самом деле, кристаллы возникают из зародышей, питаются, растут, регенерируют свою форму, болеют, отдыхают (болезни и отдых металлов), пожирают друг друга и т. д. Некоторые, даже современные, ученые — медики, биологи, химики и др.— совершенно серьезно говорят о жи-

вых кристаллах, о мужских и женских особях кристаллов, иногда высказывают предположения о наследственности в мире кристаллов и, наконец, о духовной или психической деятельности кристаллических особей. Термин «кристаллический индивидуум» отождествляется нередко с понятием неделимое, чем еще раз подчеркивается его биологическое происхождение.

Для того чтобы понять, в каком смысле можно применять слово индивидуум в отношении кристаллов, обратимся к истории самой кристаллографии, а не к истории минералогии или биологии, которые не всегда правильно могли пользоваться результатами, добытыми кристаллографией. Еще Николай Стенон, которого многие считают основателем кристаллографии, автор закона постоянства углов, в 1669 г. совершенно ясно отдавал себе отчет в том, что его закон в такой же мере, если не больше, имеет отношение к *структуре* кристаллов, как и к его *форме*. Если, в самом деле, для сохранения постоянства гранных углов, грани во время роста кристалла должны передвигаться параллельно самим себе, то ведь закон постоянства углов должен быть справедлив не только по отношению к существующим в данный момент на поверхности кристалла и определяющим его временную форму граням, но также и по отношению к существовавшим когда-то на поверхности, а ныне продолжающим свое существование внутри кристалла, его *молекулярным плоскостям*. Уже с точки зрения закона постоянства гранных углов, первого закона *внешней формы* кристаллов, существенным оказывается не внешняя форма, а строение, не кристаллический индивидуум, а кристаллическая среда. Всякий организм во время роста непрерывно меняет свою форму, претерпевая вполне определенный цикл развития; всякий кристалл, идеально следующий закону постоянства углов, в известных пределах *сохраняет* свою форму независимо от своих размеров и принципиально, т. е. пока только с точки зрения того же закона Стенона, может вырасти неограниченных размеров. Так, от внешней формы кристаллического индивидуума, благодаря правильному, логическому развитию наших представлений о кристалле, мы приходим к понятию кристаллической среды или бесконечно большому кристаллу, совершенно не имеющему внешней формы.

Одновременно с открытием закона постоянства углов в том же 1669 г. Бартолином [4] было положено начало изучению оптических свойств кристаллов. В результате последовавших вслед за открытием Бартолином двойного лучепреломления исландского шпата работ Гюйгенса [5], Френеля [6], Араго [7] и других исследователей было установлено, что оптические свойства идеальных кристаллов не зависят от того, в каком месте кристалла эти свойства изучаются. Так постепенно ученые пришли к понятию кристаллической однородности, допускавшей бесконечное деление на совершенно одинаковые участки неделимых кристаллических индивидуумов.

Молекулярная гипотеза Дальтона [8], нашедшая себе специальное выражение в кристаллографии в форме закона целых

чисел, открытого аббатом Гаюи [9], в известной мере ограничила бесконечную делимость кристаллов размерами кристаллических молекул. Однако вместе с тем возникло наше представление о кристалле, как о бесконечной пространственной решетке,— представление, не имеющее ничего общего с понятием кристаллического индивидуума, ибо любой кусок такой пространственной решетки, ничем, кроме внешней формы, не отличается от «целого», «неделимого» кристалла.

Систематическое изучение симметрии внешней формы индивидуальных кристаллов, блестяще завершенное уже в 1830 г. Гесселем [10] и вновь с той же полнотой повторенное Гадолиным [11], дало видимое подкрепление натуралистической трактовке кристаллографии. В результате работ этих и других авторов были установлены тридцать два класса или «вида», как их назвал,— очевидно, также по аналогии с видами животных и растений, хотя и без какого-либо желания подчеркнуть биологическую точку зрения в кристаллографии,— А. К. Болдырев [12]. Открытие тридцати двух видов симметрии дало возможность отличать кристаллы друг от друга по внешней форме совершенно так же, как по внешней форме мы отличаем друг от друга виды животных и растений; понятие кристаллической среды здесь как будто уступает место понятию кристаллического индивидуума. Дальнейшее развитие учения о внешней форме кристаллов, вылившееся в самостоятельную дисциплину, названную Е. С. Федоровым [13] кристаллохимическим анализом, еще более способствовало укреплению биологического подхода к кристаллографии и позволило, например, Б. Орелкину и Г. Пигулевскому [14] усмотреть в кристаллохимическом анализе Федорова якобы открытый им новый эволюционный принцип кристаллографии.

Однако более глубокое изучение явлений симметрии кристаллов, приведшее к установлению Е. С. Федоровым [15] и А. Шенфлисом [16] 230 пространственных групп симметрии, являющихся по терминологии А. К. Болдырева разновидностями 32 видов симметрии, совершенно лишило натуралистическую позицию ее убедительности, ибо эти разновидности *симметрии* не являются разновидностями *внешней формы*, а целиком относятся к внутреннему строению кристаллов. Кристаллический индивидуум не может иметь симметрии ни одной из 230 разновидностей; такую симметрию может иметь только бесконечно большой кристалл, т. е. кристаллическая среда.

Уже из сказанного ясно видно, что история кристаллографии в общем не благоприятствовала укреплению взгляда на кристалл, как на индивидуум; и если этот взгляд продолжает существовать до сих пор, то причину этого явления следует искать вне кристаллографии. В 1890 г. физик Леманн [17] впервые начал изучать так называемые жидкие кристаллы. Некоторые из них обладали резко выраженной индивидуальной формой, отдаленно напоминающей многогранники, оптическими свойствами одноосных кристал-

лов и подвижностью вязких жидкостей. Биологически настроенные умы получили новую пищу для своих спекуляций Создаются новые теории жизни. Возникает знаменитый спор о словах, являются ли жидкие кристаллы действительно кристаллами, или их следует называть анизотропными жидкостями. В настоящее время этот спор потерял всякое значение, ибо для всех стало ясно, что молекулы в жидких кристаллах расположены не беспорядочно, как в идеальных жидкостях, но и не по законам симметрии пространственных групп, как в кристаллах. Фридель [18] предлагает покончить спор введением нового понятия *стаза* в дополнение к старому понятию *фаза*. Жидкие кристаллы и их индивидуумы в конечном счете перестали быть кристаллами вообще и кристаллическими индивидуумами в частности, а все материальные среды оказались разбитыми на четыре стазы: жидкую, нематическую, смектическую и кристаллическую.

Итак, мы видим, что развитие кристаллографии с самого ее возникновения было направлено в сторону укрепления понятия кристаллической среды и ни в коей мере не способствовало сохранению понятия кристаллического индивидуума; однако в последнее время в самой кристаллографии возникло такое течение, которое заставляет нас сохранить этот термин, вкладывая в него новое, отнюдь не биологическое содержание. Мы имеем в виду изучение таких свойств кристаллов, например пластичности, хрупкости, электропроводности и т. д., которые были названы Смекалем [19] структурно чувствительными. Эти последние тем отличаются от других, структурно нечувствительных, свойств кристаллов, что малейшее отклонение в структуре кристаллов от идеальной, теоретически мыслимой, вызывает громадные изменения параметров структурно чувствительных свойств. Вот это-то перемещение интереса ученых от идеальных кристаллов к *реальным* и есть то новое направление, которое заставляет нас вернуться к устаревшему было термину кристаллический индивидуум. Реальные кристаллы отличаются от идеальных несовершенствами своей структуры, *возникающими в процессе образования кристаллов*. Так как образование кристаллов в большинстве случаев происходит путем роста многогранника из одной точки, то распределение и характер несовершенств тонкой структуры кристалла должны подчиняться вполне определенным правилам,— тем правилам, которые для макроструктуры нам стали известны в результате дальнейшего развития основной идеи Бекке [20], полагавшего, что все кристаллы можно рассматривать как совокупность пирамид роста, сходящихся в начальной точке роста. Следуя этой идее и полагая, что, наряду с видимыми микро- и макропороками (например, включениями раствора) структуры кристаллов, в последних содержатся невидимые пороки, не трудно прийти к такой картине строения реального кристалла.

1. Всякий реальный кристалл представляет собою тело конечных размеров.

2 Если кристалл имеет естественную форму многогранника, то его можно рассматривать как совокупность пирамид, сходящихся своими вершинами в начальной точке роста; основаниями пирамид служат грани кристалла; ребрами пирамид служат линии (не обязательно прямые) движения вершин многогранника во время его роста. Так как все пороки тонкой структуры кристаллов некогда находились на их поверхности, а поверхность кристалла состоит из граней, отличающихся друг от друга по своей физической природе, то и сами эти пороки будут различны в разных пирамидах роста. Мы можем поэтому утверждать, что реальный кристалл неоднороден и состоит из различных более или менее «однородных» по характеру своих неоднородностей (пороков) участков, совпадающих с пирамидами Бекке. Исследуя структурно чувствительные свойства какого-либо кристалла в пределах одной пирамиды, мы должны получать повторимые результаты; те же свойства в разных пирамидах могут значительно отличаться друг от друга. Мы видим, таким образом, что несогласие в результатах исследования одним и тем же автором различных препаратов из одного и того же кристалла находит себе простое и понятное объяснение.

3. Известно, что микровключения часто располагаются по поверхности раздела пирамид роста; применительно к порокам тонкой структуры мы должны поэтому ожидать, что грани и линии раздела трех пирамид (больше трех пирамид по теории вероятностей в одном ребре сходиться не может) в *реальном* кристаллическом многограннике, например в реальном выросшем на дне сосуда октаэдре квасцов, имеющем две шестиугольные грани и шесть четырехугольных, будут обладать совершенно особыми свойствами. Все эти соображения необходимо учитывать при изготовлении препаратов, предназначенных для исследования структурно чувствительных свойств кристаллов.

4. Если условия питания кристалла во время роста меняются, например периодически, то и условия образования пороков на гранях также должны меняться периодически; отсюда всякий кристалл можно рассматривать как совокупность оболочек, расположенных концентрически относительно начальной точки роста. Такое строение кристаллов мы должны предполагать даже и в тех случаях, когда кристалл и не обладает хорошо известной минералогам так называемой зонарной структурой.

5. Если образование кристалла происходит не ростом многогранника из зародыша, а каким-либо другим путем, например рекристаллизацией, наслаиванием кривых оболочек, как в методе оттягивания Киропулоса или в методе Вернеля при выращивании булек корунда и т. п., то законы распределения пороков структуры соответственно меняются, но не перестают иметь место. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом предмете.

Теперь для нас становится понятным, в каком смысле можно в настоящее время употреблять термин кристаллический индиви-

дуум. Всякий *реальный* кристалл, в самом деле, представляет собой некий организм, состоящий обычно из одного ядра, т. е. начальной точки роста, и различных органов, т. е. пирамид роста, зональных оболочек, поверхностей и линий раздела пирамид и внешних граней. Отдельные части кристалла не тождественны друг другу по своим свойствам. Часть кристалла по своим свойствам может существенно отличаться от целого кристалла; если угодно, поэтому кристалл неделим. Как бы мы ни старались выращивать кристаллы, мы никогда не получим двух одинаковых по форме и структуре пороков. Вместе с тем для сохранения термина «кристаллический индивидуум» нет никакой надобности проводить какие бы то ни было аналогии между кристаллом и живыми организмами.

Ломоносовск. ин-т геохим. кристаллограф. и минерал. АН СССР
(прим. ред.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Breithaupt.* Vollständiges Handbuch der Mineralogie. Bd. 1. Dresden, Leipzig, 1836, Bd. 1, S. 91.
2. *C. F. Naumann.* Anfangsgründe der Krystallographie. Leipzig, 1854, S. 2.
3. *W. Haidinger.* Handbuch der bestimmenden Mineralogie etc. Wien, 1845, S. 20.
4. *E. Bartholinus.* Crystalli Islandici disdiaclastici quibus mira et insolita refractio detegitur. Kopenhagen, 1669.
5. *C. Huyghens.* Traité de la lumiére etc. Leyden, 1690.
6. *A. Fresnel.* De la lumiére. 1822.
7. *F. Arago.* Mem. Cld. sci. math. et phys. de l'Inst. de France. 1811, **12**, 93.
8. *J. Dalton.* New System of chemical Philosophie. 1808.
9. *R. J. Haüy.* Essai d'une théorie sur la structure de cristaux. Paris, 1784, 236 p.
10. *J. F. G. Hessel.* Krystall. Gehler's physikal. Wörterbuch, 1880.
11. *А. Гадолин.* Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала.— Зап. Имп. СПб. минерал. об-ва. Сер. 2. 1867, ч. IV, 112.
12. *А. К. Болдырев.* Кристаллография. Л.— М., Грозный — Новосибирск, 1934. 431 с.
13. *E. S. Fedorow.* Das Kristallreich. Tabellen zur krystallochemischen Analyse. Petrograd, 1920. 1050 S.
14. *Б. Орелкин, Г. Пигулевский.* Применение кристаллохимического метода Е. С. Федорова к научной и практической деятельности.— Новые идеи в химии. 1914. Сб. 5. Кристаллохимический анализ. С. 151.
15. *Е. С. Федоров.* Симметрия правильных систем фигур.— Зап. Имп. Спб. минерал. об-ва, 1891, ч. 28, 1.
16. *A. Schönflies.* Kristallsysteme und Krystallstructur. 1891.
17. *O. Lehmann.* «Tropfbarflüssige Kristalle» und kristallinische Flüssigkeiten.— Annalen d. Phys. und Chemie, 1890, **40**, 401; **41**, 525.
18. *G. Friedel, E. Friedel.* Z. Kristallogr., 1931, **79**, N 1, 1.
19. *A. Smekal.* Strukturempfindlische Eigenschaften der Kristalle.— Handbuch der Physik. Berlin, 1933. Bd. 24/2.
20. *F. Becke.* Der Aufbau der Kristalle aus Anwachskegeln.— Lotos, Neue Folge, 1894, 14.

ОБРАЗ А. Е. ФЕРСМАНА ПО ЛИЧНЫМ ВПЕЧАТЛЕНИЯМ[1]

Я увидел впервые А. Е. Ферсмана в Минералогическом институте Московского университета, вероятно, в 1909 г., т. е. в тот период, когда этим институтом руководил В. И. Вернадский. Сам я был тогда студентом, мечтавшим специализироваться по кристаллографии. Из всех научных сотрудников, окружавших тогда В. И. Вернадского, Александр Евгеньевич особенно выделялся своей массивностью и вместе с тем подвижностью, характерным звонким голосом и еще чем-то, что влекло к нему всех, его знавших. Первое формальное знакомство произошло при следующих обстоятельствах.

Мне нужно было получить одну справку по интересовавшему меня вопросу. Я решил обратиться с этим делом к А. Е. В те годы А. Е. был усиленно занят химическими анализами и микроскопическими исследованиями. Обойдя все помещения, где мог находиться А. Е., я заглянул в гониометрический закуток, отделенный от светлого помещения черной занавеской. Я слегка приоткрыл ее и увидел А. Е., сидевшего за гониометром. Он был явно недоволен тем, что я ему помешал работать. Тем не менее наше знакомство состоялось, и я получил от него очень быстро нужную мне справку.

Это было время, когда А. Е. впервые заинтересовался вопросом распространения элементов в земной коре — тема, которой он продолжал заниматься и дальше в течение всей своей жизни. А. Е. принимал активное участие во всех московских минералогических собраниях и часто выступал сам с докладами, всегда интересными и неизменно манящими слушателей к новым научным исканиям.

Через год я начал специализироваться по кристаллографии у Ю. В. Вульфа, получившего тогда в институте В. И. Вернадского небольшую лабораторию. Вульф имел уже 25-летний научно-педагогический стаж, был пенсионером и рассчитывал заняться научно-исследовательской деятельностью.

Вульф и Ферсман во многом отличались друг от друга. В то время как Ферсман обладал общительностью и живостью характера, широтой мысли, быстротой и смелостью в действиях, для Вульфа характерными были замкнутость, медлительность, ненаходчивость и осторожность в утверждениях. Слабые стороны обоих были иногда предметом иронических замечаний, которые делались ими по адресу друг друга. Однако эти замечания имели всегда легкий полушутливый тон. А. Е. преувеличивал значение минералогии и кристаллографии; Вульф, наоборот, преуменьшал,

---

[1] Зап. Всесоюз. минералог. об-ва, 1946, ч. 75, вып. 1, с. 73—77.

считая кристаллографию просто частью физики, а минералогию — частью химии, даже прикладной химии. На этом основании А. Е. говорил иногда по нашему адресу: «Ах, уж эти физики! Мы им еще покажем!».

А. Е. находился всегда в непрерывной деятельности. Мне не приходилось видеть его отдыхающим, молчащим или задумавшимся. Вспоминается одна подмосковная экскурсия, которую устроил А. Е. для своих слушателей. Как только тронулся дачный поезд, А. Е. открыл собрание и заставил одну из участниц экскурсии сделать реферат прочитанных ею работ, относящихся к теме экскурсии. Вагонная обстановка не только не мешала личной работе А. Е., но, видимо, даже способствовала ей тогда, когда ему нужно было сосредоточиться, освободиться от постоянно окружавших его людей. «Перемена места» была одной из важных сторон жизни А. Е. Он любил говорить по этому поводу, что, будучи создан природой «в форме шарообразного тела», он вынужден постоянно «катиться».

А. Е. должен был держать магистерский экзамен у В. И. Вернадского. По этому поводу рассказывают, что А. Е. будто бы сбежал с экзамена, не удовлетворившись собственным ответом на один из поставленных ему вопросов. Это не помешало тому, что через несколько лет он был избран сразу в академики. Такие люди, как А. Е., идут своими путями, не зная и не видя тех рогаток и ловушек, которые с таким искусством расставляются некоторыми людьми на дорогах за право прохода по ним.

Незадолго до переезда в Петербург и перехода в Академию наук А. Е. был избран профессором минералогии в Московский городской народный университет имени Шанявского. Сюда же после известного разгрома Московского университета министром Кассо перешел на работу и Вульф, а с ним и я. Вспоминаю, как быстро стал здесь «обрастать» А. Е. поклонниками и поклонницами в возрасте от 16 до 60 лет, которые видели в своем профессоре блестящего лектора, замечательного общественного деятеля, хорошего товарища и прекрасного человека. Некоторые из них живы и до сих пор, благополучно работают на геологическом поприще и всегда с благодарностью вспоминают Александра Евгеньевича.

Началась война 1914 г. Я был взят на фронт и не мог непосредственно наблюдать кипучую деятельность А. Е. по мобилизации естественных ресурсов нашей страны.

Снова увидел я А. Е. уже в совсем иной, в советской обстановке. А. Е. часто приезжал в Москву по делам Академии наук. Потом мы встречались с ним в Свердловске, куда я переехал на работу в 1920 г. В Свердловске он даже два раза останавливался у меня на квартире. Первый раз ему пришлось ночевать на столе в помещении студенческого общежития, временно приспособленном для моего проживания. А. Е. был поразительно непритязателен в общежитейском отношении. Занятый интересными мыслями и ра-

ботами, он не имел ни времени, ни охоты обращать внимание на житейские неудобства, как бы велики они ни были.

Второй раз А. Е. ночевал у меня уже на кровати. Я получил тогда из-за границы довольно много оттисков последних работ по минералогии и кристаллографии. Оставшись один, А. Е. перед уходом ко сну успел пересмотреть все эти работы и сделал из них себе выписки. У меня создалось впечатление, что записная книжка была для него одним из самых важных орудий научной работы.

Я мог убедиться в этом и в другой раз, после одной экскурсии там же на Урале, в которой мне довелось участвовать вместе с А. Е. Находившись вдоволь за целый день, мы остановились на ночлег в деревне в доме одного местного крестьянина, имевшего отношение к горным работам, с которыми мы знакомились. За ужином и чаепитием А. Е. непринужденно болтал с хозяином обо всем, что приходило обоим в голову. Когда же все легли спать, А. Е. тщательно записал при свете тусклой лампы в свою записную книжку все, что ему было нужно из этой беседы.

Мои впечатления переносятся дальше в Ленинград, в Минералогический музей Академии наук, куда я по приглашению А. Е. перевелся на работу из Свердловска в 1925 г.

Круглый зал геологической библиотеки. По стенам прекрасные книжные шкафы. Длинный основательный стол. За столом А. П. Карпинский, В. И. Крыжановский и наиболее пожилые ленинградские представители геологических наук. Кожаные стулья все заняты, так что часть публики стоит. Идет собрание минералогического кружка, на котором председательствует А. Е. Ферсман. Не нарушая торжественности собрания, позвякивают ложечки: разносится чай с печеньем. Доклады не всегда были интересны, однако все стремились присутствовать на них, так как всех интересовало, что скажет в начале и после доклада А. Е. Одного выступления Александра Евгеньевича было достаточно, чтобы собрание было многолюдным. Таково было обаяние его личности.

Москва. Ломоносовский институт Академии наук. А. Е. интенсивно работает дома, в институте бывает редко. Хотя жизнь в институте идет своим чередом, но все живо ощущают отсутствие Александра Евгеньевича, вдохновителя многих работ, многих полезных начинаний.

Началась Отечественная война. Вскоре я с семьей был отправлен в Казань, но по стечению обстоятельств не прямо, а кругом — через Свердловск. В Свердловске на станции узнаю, что А. Е. здесь. Решено нарушить предписание и не ехать дальше. В 12 часов ночи являюсь к А. Е. Он не спит. Входят и выходят люди, стрекочет пишущая машинка. Вокруг А. Е. опять вертится жизнь, рождается новое важное оборонное дело. На мой вопрос, что делать, где Академия, где то учреждение, в котором я числюсь и мог бы работать, А. Е. ответил: «Вы сами и есть то учреждение, которое ищете». Не прошло и недели, как я приступил к оборонной

работе по своей специальности,— «учреждение» начало функционировать.

Санаторий Узкое. А. Е. редко показывается, но «фабрика» работает полным ходом. Приходят и уходят люди; пишутся книги и статьи; в самом санатории организуются доклады отдыхающих. Под влиянием А. Е. академик И. Ю. Крачковский пишет свои прелестные воспоминания о работе над арабскими рукописями; О. Ю. Шмидт делится с аудиторией своими воспоминаниями о пережитом.

Последний свой доклад на общем собрании Академии наук А. Е. поручает прочесть Д. В. Наливкину, но сам на докладе еще присутствует. Появление его за столом президиума встречается аплодисментами. Вспоминается теплая и уютная обстановка Минералогического музея в Ленинграде.

Аэродром. Весна. Распускаются деревья. Самолет описывает круг и медленно приближается к нам. Выносят гроб...

Это последнее путешествие академика Александра Евгеньевича Ферсмана.

Его похоронили на Новодевичьем кладбище рядом с В. И. Вернадским.

ВОСПОМИНАНИЯ О ЕВГРАФЕ СТЕПАНОВИЧЕ ФЕДОРОВЕ[1]

По моим наблюдениям поголовно все авторы воспоминаний достаточно много говорят о себе. Повинуясь этому закону, я также неизбежно вынужден буду уделить много внимания своей собственной персоне.

Считая себя последователем нашего великого кристаллографа Е. С. Федорова и продолжателем некоторых его работ, я хотел бы остановиться на том, что мне сохранила память о нем как об ученом и человеке, и этим внести свой скромный вклад в более обширные и содержательные воспоминания его ближайших учеников.

Кристаллы бихромата калия. Еще до первой мировой войны, когда я начал работать в Московском университете в лаборатории профессора Юрия Викторовича Вульфа, мой учитель предложил мне наладить и пустить в ход вращающийся вокруг горизонтальной оси кристаллизатор для выращивания кристаллов бихромата калия. Ю. В. Вульф объяснил, что эти кристаллы будут ему нуж-

---

[1] Сб. «Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии». Л., «Наука», 1970, с. 8—10.

ны для того, чтобы проверить на них целесообразность федоровской установки, применяемой в кристаллохимическом анализе. По предварительным, мне не известным данным, Вульф предполагал, что кристаллы бихромата калия имеют две равноправные федоровские установки. Если бы это предположение подтвердилось, федоровская установка была бы в некотором смысле дискредитирована.

Я с большим интересом взялся за эту работу и выращивал кристаллы бихромата калия двумя способами: динамическим во вращающемся кристаллизаторе и статическим в большом неподвижном кристаллизаторе. Оказалось, что на всех кристаллах, выращенных во вращающемся кристаллизаторе, грани базиса (001) были всегда гладкими, а им параллельные грани (00$\bar{1}$) — шероховатыми. Кристаллы, выращиваемые в большом неподвижном кристаллизаторе статическим методом, как правило, получались ориентированными гранями базиса горизонтально: вверх либо гранью (001), либо гранью (00$\bar{1}$). При этом всегда грани (001) получались гладкими, а грани (00$\bar{1}$) — шероховатыми. Отсюда я сделал вывод, что это наблюдение свидетельствует о принадлежности кристаллов бихромата калия к кристаллам, не имеющим центра симметрии, что противоречило данным, опубликованным в справочнике Грота, где кристаллы бихромата калия отнесены к кристаллам триклинной системы с центром симметрии.

Все выращенные мною обоими методами кристаллы бихромата калия принадлежали только к одной энантиоморфной модификации. Из сказанного выше можно сделать заключение, что затея Ю. В. Вульфа доказать, что правильная федоровская установка кристаллов бихромата калия может быть осуществлена двумя способами, оказалась несостоятельной.

«Открытие Америки». Всем кристаллографам известно, что такое простая форма. Простыми формами мы называем такие многогранники, все грани которых одинаковы. Примерно в 1915 г. мне пришла в голову мысль: нельзя ли вывести такие многогранники, которые вместо одинаковых граней имели бы одинаковые ребра. Эту задачу мне удалось решить. Я вычертил такие многогранники и хотел опубликовать соответствующую работу в печати.

Следует заметить, что мой учитель Ю. В. Вульф очень не любил, когда молодые научные работники занимаются теоретическими, а не экспериментальными работами. Поэтому я сделал эту работу втайне от него. Когда работа была закончена, я не без страха решил показать ее своему учителю. Ю. В. Вульф внимательно просмотрел мои чертежи, затем молча подошел к шкафу и вынул оттуда «Начала учения о фигурах» Е. С. Федорова. Открыв последние страницы этой книги, Вульф показал мне в ней те самые чертежи, которые были сделаны мною. Выведенные мною многогранники у Е. С. Федорова были названы изогонами. Кроме них в книге были изображены все обобщенные простые формы

(как кристаллографические, так и некристаллографические), названные Федоровым изоэдрами.

С противоречивыми чувствами стоял я и смотрел на эти фигуры. С одной стороны, я, конечно, был обескуражен, что моя работа явилась «открытием уже открытой Америки», а с другой стороны, мне льстило, что я мог делать работы, такие же, как сам Е. С. Федоров. Ю. В. Вульф велел мне изучить «Начала учения о фигурах» и сделать соответствующий доклад в Народном университете имени Шанявского, где мы оба тогда работали.

Заполнение плоскости многоугольниками без промежутков. Занимаясь изучением книги Е. С. Федорова «Начала учения о фигурах», где, в частности, решается вопрос о заполнении трехмерного пространства многогранниками без промежутков, я обнаружил, что Е. С. Федоров не включил в эту книгу вопрос о заполнении плоскости многоугольниками без промежутков. Эту задачу я попробовал решить самостоятельно, и мне это удалось. В результате появилась моя статья с крайне неудачным заглавием «К вопросу о строении кристаллов». Эта статья была опубликована в журнале «Известия Академии наук» в 1916 г.

Я послал экземпляр этой статьи Е. С. Федорову, и вскоре в тех же «Известиях Академии наук» появилась статья Е. С. Федорова «Системы планигонов как типических изоэдров на плоскости» на ту же тему только в расширенном виде. В этой статье, в частности, говорится следующее: «В статье А. Шубникова (ИАН, 1916, стр. 755) „К вопросу о строении кристаллов“ — первой (насколько мне известно) р у с с к о й работе, в которой воспроизводятся результаты, изложенные в „Началах учения о фигурах“ и некоторых других сочинениях автора этой статьи по тому же учению — в сущности решается задача о предельном ряде подтипических изогонов, а именно когда число граней бесконечно велико.

Поэтому на решение, данное г. Шубниковым, можно смотреть как на одностороннее, половинное; и в этой заметке я имею в виду завершить решение этой задачи. Само же дополнительное решение в сущности сводится к нахождению изоэдров, коих грани, вершины и ребра находятся в полярных отношениях к вершинам, граням и ребрам многоугольников, выведенных г. Шубниковым, и в значительной степени соответствует задаче, решаемой Ф. Гаагом.

В заключение не могу не отметить, что мнение г. Шубникова, что система планатомов (т. е. в сущности изогонов на плоскости) выражает возможное расположение атомов в плоскости, справедливо только в том случае, когда в плоскости представлены атомы только одного рода; да и при этом условии не играет никакой роли, как мы из системы точек, а именно правильной системы точек (а такие выведены уже давно), соединением прямыми отрезками выведем многоугольники; общий случай возможных плоскостей кристалла тот, когда мы проводим плоскости через атомы разного рода».

Следует заметить, что я сам хорошо знал о «половинчатом» характере опубликованной мною статьи. Она и занумерована римской цифрой I, как часть первая. Запроектированная мною вторая часть статьи так и не была написана после появления статьи Е. С. Федорова.

Первая и последняя встреча с Е. С. Федоровым. В Петрограде в 1918 г. был съезд физиков, на котором я присутствовал вместе с моей первой женой О. М. Шубниковой. Мы позвонили по телефону Е. С. Федорову и просили его принять нас вместе с Ю. В. Вульфом. Е. С. Федоров назначил день и час приема. Вышло так, что Ю. В. Вульфу пришлось именно в этот день и час председательствовать на одном из заседаний съезда, и поэтому мы явились на квартиру к Е. С. Федорову с большим опозданием. Е. С. Федоров, очевидно, был возмущен нашим опозданием и во все время двухчасовой, крайне интересной, беседы с ним, так и не предложил нам сесть. На следующий день мы с женой попросили Е. С. Федорова принять нас еще раз, уже без Ю. В. Вульфа, полагая, что Е. С. был обижен не на нас, а на Вульфа. На этот раз свидание протекало совершенно в других тонах. Е. С. Федоров был с нами очень любезен, и мы долго проговорили с ним на ряд интересующих нас тем по росту кристаллов и по геометрической кристаллографии вообще.

Точки или фигуры. Е. С. Федоров, как хорошо известно его ученикам, часто сетовал и в письменной и в устной форме на неблагоприятные обстоятельства, мешавшие ему дорабатывать свои исследования до конца. Действительно, обилие мыслей и отсутствие времени часто мешали гениальному ученому отшлифовывать свои работы и делать их до конца понятными читателю. Может быть, эта самая «недоработка» служила на пользу читателям, будила их мысль, заставляла их самих в какой-то степени самостоятельно работать в направлениях, аналогичных федоровским.

Мне кажется, что последователи и ученики Е. С. Федорова должны продолжать доработку его трудов. Следующий пример должен разъяснить, какую именно доработку я имею в виду.

Знаменитый труд Е. С. Федорова, посвященный выводу 230 пространственных видов симметрии, назван им «Симметрия правильных систем фигур», а те же самые виды симметрии в его большой работе «Теория структуры кристаллов», вышедшей позднее, уже именуются им «правильными системами точек». Что же такое правильная система фигур и правильная система точек в действительности? Правильная система фигур — это совокупность асимметричных частей симметричных фигур, а правильная система точек является симметричной совокупностью маленьких шариков. До настоящего времени в этом вопросе нет полной ясности. Не все понимают, что в данном случае точки представлены в виде маленьких шариков, обладающих собственной, притом максимальной симметрией.

Совсем недавно в одной представленной мне на отзыв работе я обнаружил путаницу в этом вопросе и полное непонимание автором, что правильная система точек совсем не то, что правильная система фигур. Потребовалось много времени и труда, чтобы разъяснить ему его ошибку. Должен признаться, что и сам я разобрался в этом вопросе только примерно лет десять тому назад.

ОБ ОДНОЙ ТРАДИЦИОННОЙ ОШИБКЕ И МНОГООБРАЗИИ ФОРМ ЕЕ ПРОЯВЛЕНИЯ[1]

Во многих старых и современных руководствах по кристаллографии в разных формах встречается одна и та же ошибка, заключающаяся в ничем не обоснованной замене асимметричной фигуры или асимметричной точки самой симметричной фигурой, шаром или точкой, которой молчаливо приписывается симметрия шара.

Эта ошибка распространена при доказательстве теорем геометрической кристаллографии, таких как теоремы о сложении элементов симметрии, в результате чего из теорем можно получить ряд неправильных следствий, и сами доказательства оказываются неверными. Чтобы правильно доказать теоремы о сложении поворотов, переносов и отражений, надо за исходный элемент брать не сферически симметричную точку, а асимметричную фигуру.

Эта ошибка, странным образом не замечаемая многими специалистами, пишущими учебники, распространяется не только на теоремы о сложении (и разложении) операций симметрии, но и на целый ряд широко известных рассуждений, применяемых в кристаллографии.

В качестве примера приводится вывод всех простых форм в кристалле заданной симметрии: если выводить эти формы из сферически симметричных точек, то получается неверный вывод о разной симметрии форм, принадлежащих к одному классу симметрии. Правильное решение поставленной задачи можно получить, если за исходную точку взять точку асимметрии. Этим правильным решением одновременно решается вопрос и о симметрии отдельных граней простых форм, которая тем выше, чем большим числом асимметричных точек изображается простая форма на стереографической проекции. Так доказывается, что произведение из числа граней формы на величину симметрии грани для данного класса симметрии есть величина постоянная. Это важное и давно известное правило, к сожалению, в учебниках редко фигурирует,

[1] Реферат статьи: Зап. Всесоюз. минерал. об-ва, 1954, ч. 83, вып. 4, с. 408—413.

по-видимому, потому что истинная симметрия граней простых форм маскируется все той же незаконно приписываемой высокой симметрией точек, изображающих грани.

В качестве другого примера показывается, что при пользовании сферически симметричными точками оказываются неотличимыми друг от друга скользящее отражение и винтовой поворот на 180°.

Наконец, если по традиции для построения решеток Бравэ использовать точки сферически симметричные, то оказывается невозможным построить чисто трансляционную решетку, состоящую только из одних переносов, и провести классификацию решеток Бравэ по сингониям.

Если исправить указанную ошибку, т. е. заменить сферически симметричную точку асимметричной фигурой (или асимметричной точкой), то многие из именуемых «непререкаемыми» и «безапелляционными» неверных выводов «теоретической кристаллографии» после их исправления легко переводятся в разряд самых обыкновенных геометрических истин.

МОГУТ ЛИ СУЩЕСТВОВАТЬ В ПРИРОДЕ ТАКИЕ КРИСТАЛЛЫ, КОТОРЫЕ ПО ПРИЗНАКАМ СИММЕТРИИ ОТНОСЯТСЯ К ОДНОЙ СИНГОНИИ, А ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ КОНСТАНТАМ — К ДРУГОЙ?[1]

Мы не сделаем никакого открытия, если скажем, что разделение кристаллов на сингонии или системы по характеру констант a, b, c, α, β, γ, т. е. по наличию или отсутствию таких равенств, как $a = b$, $\gamma = 90°$, $\gamma = 120°$ и т. д., было бы лишено всякого содержания, если бы в основе такого разделения не лежали соображения симметрии. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что почти во всех современных руководствах кристаллографии разделение кристаллов на сингонии производится сначала по признакам симметрии, и лишь после этого указывается, что такой-то сингонии соответствуют такие-то геометрические константы. О том же говорит еще и то, что среди низших сингоний — моноклинной и триклинной — законно отсутствует, казалось бы, логически необходимая, диклинная с параметрами $a \neq b \neq c$, $\alpha = 90°$, $\beta \neq \gamma \neq 90°$. Объясняется это тем, что по характеру симметрии диклинная система ничем не отличается от триклинной. Наличие в ней прямого угла не вызывает повышения симметрии, отчего сам этот угол не становится особенным.

[1] Зап. Всесоюз. минерал. об-ва, 1956, ч. 85, вып. 1, с. 108—109.

Отсюда естественно возникает вопрос: являются ли оба разделения кристаллов на сингонии — по признакам симметрии и по характеру констант кристаллов — вполне тождественными, т. е. возможно ли, чтобы кристалл, отнесенный к той или иной сингонии по признакам симметрии, оказался бы имеющим геометрические константы, не свойственные этой сингонии, и наоборот?

На этот вопрос сам собой напрашивается следующий ответ. К интересующим нас кристаллам должны быть прежде всего отнесены все псевдосимметричные (псевдомоноклинные, псевдоромбические, псевдотетрагональные и т. д.) кристаллы в тех случаях, когда по признакам симметрии устанавливается более низкая симметрия, чем по *измеренным константам*. Кроме того, мы прекрасно знаем, что с повышением точности измерений и, особенно, с повышением точности образования самих кристаллов те из величин a, b, c, которые раньше считались равными между собой, могут оказаться различными, и те из углов α, β, γ, которые прежде принимались за прямые, могут оказаться косыми.

Следующие соображения по затронутому вопросу, как нам кажется, могут представить большой интерес. Хорошо известно, что у некоторых кристаллов коэффициенты линейного расширения по разным направлениям могут иметь разный знак. К таким кристаллам, между прочим, относятся кристаллы кальцита, у которых по главной оси коэффициент расширения в 5 раз больше, чем по боковой. Мы вправе поэтому предположить, что в природе могут найтись такие, например, псевдотетрагональные кристаллы ромбической сингонии, у которых коэффициент расширения вдоль меньшего отрезка a, мало отличающегося от b, будет иметь положительный знак, а коэффициент расширения вдоль b — отрицательный знак. Ясно, что при нагревании такого кристалла a будет увеличиваться, а b уменьшаться. При некоторой температуре обе величины будут точно равны друг другу. Ромбический кристалл *при этих условиях* будет иметь константы тетрагонального кристалла, сохраняя при этом все физические свойства, присущие ромбическим кристаллам.

Нетрудно привести и другие возможные примеры кристаллов, геометрические константы которых *при известных условиях* могут оказаться не соответствующими их сингонии. Мы знаем, например, такие моноклинные псевдоромбические кристаллы, у которых угол β отличается от угла 90° всего на несколько минут. Известно, что моноклинный угол при тепловом расширении кристаллов может и должен изменяться. Не исключена возможность, что в некоторых кристаллах этой категории при нагревании или охлаждении угол β примет при некоторой температуре точно значение 90°. Тогда мы будем иметь моноклинный кристалл с константами ромбического.

Если моноклинный угол β очень мало отличается от прямого, то в принципе его легко можно искусственно сделать прямым соответствующей однородной деформацией кристалла. Такой де-

формированный кристалл будет обладать всеми физическими свойствами моноклинного кристалла, но будет иметь геометрические константы ромбического.

В заключение остановимся еще на некоторых, весьма распространенных в природе и легко получаемых в лаборатории кристаллах, которые с точки зрения ортодоксальной «умозрительной» кристаллографии, основанной на «незыблемых» и «непререкаемых» истинах, немедленно должны быть вычеркнуты из списка кристаллов. Мы имеем в виду кристаллы твердых растворов замещения (неупорядоченного), например смешанные кристаллы алюмоаммиачных и хромокалиевых квасцов. Принадлежность их к кубической сингонии и к классу дидодекаэдра точно устанавливается обычными методами: по фигурам травления, по оптическим, тепловым, механическим и другим физическим свойствам. Гониометрически даже устанавливается отношение $a : b : c = 1 : 1 : 1$, и все-таки эти кристаллы вовсе не имеют никаких определенных периодов идентичности по a, b, c, поскольку ионы Al и Cr, а также ионы K и NH_4 распределены в кристаллах статистически равномерно по узлам решетки (непереносной), отчего сами эти узлы становятся неэквивалентными друг другу (несовместимыми друг с другом операциями симметрии). С ортодоксальной точки зрения, такие решетки не являются решетками и такие кристаллы не являются кристаллами, поскольку они не имеют решетчатого строения.

Из всего изложенного явствует, что используемые в науке априорные утверждения, сколь бы важными и очевидными они ни казались, имеют всегда ограниченное применение. В частности, это относится к утверждению, что кристаллы низшей сингонии не могут иметь геометрических констант высшей и что кристаллы вообще должны иметь эти константы.

О РАВНОПРАВИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ[1]

1. Не может быть никаких сомнений в том, что натуральные числа древних были числами беззначными, не имеющими ни положительного, ни отрицательного знака. Нам приходится настаивать на признании этой истины, потому что в статьях и книгах по истории элементарной математики можно почерпнуть множество сведений о том, как постепенно складывалось представление об отрицательных числах, но нельзя найти никаких указаний на то, как возник-

[1] «Вопросы философии», 1966, т. 20, вып. 6, с. 55—58.

ло представление о положительных числах и какую роль в истории математики играли беззначные числа.

По нашему мнению, беззначными были, в частности, натуральные числа, фигурирующие в первом известном руководстве по арифметике Никомаха (I век). Длительное время натуральные числа мыслились как числа именованные, т. е., по сути дела, они были физическими величинами, имеющими определенную р а з м е р н о с т ь. Даже тогда когда абстрактное представление о безразмерном числе достаточно выяснилось, говорили и говорят до сих пор не просто «пять», а «пять единиц», «пять раз», «пять штук». Александрийский математик Диофант (III в.), например, писал не просто «5», а «5М», что как раз и означает «пять единиц».

2. Когда при решении уравнений у Диофанта, а также у арабского математика Магомета ибн Муса́ (автора термина «алгебра») и у всех наиболее известных западных математиков XV, XVI и отчасти XVII вв. стали стихийно получаться отрицательные числа, числа эти неизбежно воспринимались как числа нелепые, ложные, воображаемые. Такими они казались Диофанту, Магомету ибн Муса́, Видеману (конец XV в.), Кардано (1501—1576), Штифелю (1487—1567), Франсуа Виета (1540—1603), Герриоту (1560—1621), Жирару (1595—1633) и, странным образом, даже Декарту (1596—1650) до открытия им системы координат, названной его именем. То обстоятельство, что все перечисленные выше математики относили отрицательные числа к числам ложным, никоим образом нельзя считать ошибкой, если учесть, что среди употреблявшихся в то время беззначных чисел отрицательные числа действительно выглядели нелепыми. Нелепыми хотя бы потому, что отрицательные числа нельзя было ни складывать с беззначными числами, ни вычитать из них, подобно тому, как нельзя складывать величины разной размерности: сантиметры с фунтами, килограммы с километрами и т. д.

3. Только после того как Декарт ввел наглядное представление о положительных и отрицательных числах, рассматривая их как координаты точки на плоскости (Декартова система координат была тогда двумерной), значные числа безоговорочно были приняты всеми математиками. Из изложенного ясно видно, что положительные и отрицательные числа были открыты одновременно. Это следует и из общепринятого философского положения, утверждающего, что положительное познается через отрицательное, а отрицательное через положительное. Первооткрывателем значных чисел следует, очевидно, считать Декарта. Нам кажется, что наиболее интересным и важным свойством положительных и отрицательных Декартовых координат и таких же чисел вообще является их равноправие — равноправие плюса и минуса в математике и физике.

4. После открытия положительных и отрицательных чисел беззначные числа сохранились лишь в школьной и дошкольной ариф-

метике, где знаки + и — являются знаками действий сложения и вычитания, а не знаками чисел и где такие действия, как 3—5, считаются неосуществимыми.

В алгебре, целиком поглотившей арифметику, беззначные числа, как числа особой категории, как числа, существенно отличающиеся от значных, оказались практически ненужными, лишними, поскольку во многих случаях можно было скрыть их существование под личиной положительных.

Переименовав без достаточных оснований беззначные числа в положительные, математики тем самым нарушили открытое Декартом равноправие между положительными и отрицательными числами, поскольку положительные числа стали употребляться чаще, чем отрицательные. Мало того, в тех случаях, когда физикам и математикам приходилось по необходимости сталкиваться с явно беззначными числами и величинами, эти последние как бы в насмешку стали именоваться существенно положительными, т. е. грамматически более положительными, чем сами положительные величины, или, если угодно, какими-то сверхположительными величинами. В роли существенно положительных величин стали выступать такие, например, беззначные величины, как температура по Кельвину, частота колебаний, длина волны, диэлектрическая проницаемость и множество других величин.

Ничем не оправданный, но упорно сохраняемый приоритет положительных чисел над отрицательными в настоящее время сказывается во множестве мелочей: в опускании знака перед положительными числами, в перенесении отрицательных членов равенства в другую его сторону, в намеренной перемене всех знаков членов многочлена только для того, чтобы положительных оказалось больше, чем отрицательных. Особенно выпукло приоритет положительных чисел над отрицательными выступает в том, что беззначные числа почему-то всегда трактуются как числа существенно положительные, а не как существенно отрицательные.

5. Из сказанного видно, что после открытия Декартом в первой половине XVII в. равноправных друг другу положительных и отрицательных чисел беззначные числа были переименованы в одних случаях просто в положительные, в других — в существенно положительные числа. Беззначные числа, как числа, не входящие в категорию значных, были из науки фактически полностью изгнаны, продолжая существовать как бы нелегально только в школьной арифметике и в быту. Вторично беззначные числа в математике были открыты Вейерштрассом под видом модулей чисел $|+a|$, $|-a|$ в первой половине XIX в. (точнее в 1841 г.). Уже из самой ныне общепринятой формы записи этих величин ясно видно, что они рассматриваются в настоящее время не как такие числа, которые искони не имели никакого знака, а как числа с ампутированным знаком.

6. Обратим внимание на то, что открытие Декартом значных чисел и соответственно изгнание из математики беззначных чисел датируются первой половиной XVII в., а вторичное открытие беззначных чисел Вейерштрассом датируется первой половиной XIX в. Это означает, что потребовалось 200 лет, чтобы вернуть беззначным числам завоеванное ими в течение многих столетий право на самостоятельное существование, вернее на разумное сосуществование в одной и той же науке — математике — со значными числами. С тех пор прошло еще более ста лет, но в вопросе упорядочения взаимоотношений между значными и беззначными числами и в вопросе о дальнейшем усложнении понятия обыкновенных (комплексных, гиперкомплексных и т. д.) чисел практически не сделано ничего.

7. Если принять за факт, что в настоящее время в математике и физике признается существование как беззначных чисел, так и чисел с одним знаком, то естественно задать вопрос: почему до сих пор не применяются числа с двумя и бóльшим числом знаков? Едва ли потому, что эта мысль до настоящего времени никому не приходила в голову.

8. Из истории элементарной математики известно, что к ложным числам относились в свое время не только отрицательные, но и мнимые числа. Это отражено в самóм названии этих чисел, сохранившемся до настоящего времени. Сказанное подтверждается тем, что даже гениальному немецкому математику Г. Лейбницу в начале XVIII в. мнимые числа представлялись чем-то сверхъестественным. Вот что он писал в 1702 г.: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием». Забытая чудесность мнимых чисел сохранилась ныне в общепринятой форме записи комплексных чисел $a + bi$, где плюс является знаком совместного употребления действительного числа a и мнимого числа bi, а не знáком их сложения, поскольку действительное число невозможно сложить с мнимым, как нельзя сложить сантиметры с граммами.

Иллюзия таинственности комплексных чисел была развеяна в 1750 г. данцигским учителем Кюном, предложившим выражение $a + b$, составленное из действительных чисел комплексного числа, понимать как геометрическую сумму координат, определяющих вектор.

9. Если согласиться считать беззначные и значные числа числами разной природы, то число $a + b1$, где a, b — беззначные числа, а 1 — значная единица, будет полным аналогом комплексного числа. Когда, где и как будут и будут ли использованы эти новые, тоже «комплексные» числа, покажет будущее.

10. Если существуют числа без знака и числа с одним знаком, то, по-видимому, должны существовать также числа с двумя и более знаками. Рассмотрим следующий пример, где, как нам кажется, потребность в числах с двумя знаками выступает достаточно ясно.

Возьмем пару совместных (параметрических) уравнений

$$x = a \sin t,\ y = b \cos t.$$

Известно, что ими описывается движение точки по эллипсу. Доказывается это тем, что в результате исключения времени t рассматриваемая пара уравнений преобразуется в каноническое уравнение эллипса. Эллипс — правый, т. е. точка движения по нему по часовой стрелке, тогда, когда a и b имеют одинаковые знаки. Эллипс — левый, когда a и b имеют разные знаки. Информация о правизне и левизне исчезает, когда мы от параметрической формы описания эллипса переходим к каноническому его уравнению. Это исчезновение вызывается тем, что при возведении в квадрат чисел a, b всегда получаются положительные числа a^2b^2. Потерянную информацию можно, очевидно, восстановить, приписав числам «память» о том, какой знак они имели до возведения их в квадрат. Приняв это во внимание, правый эллипс можно представить каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{+(+a)^2} + \frac{y^2}{+(+b)^2} = 1,$$

а левый эллипс уравнением

$$\frac{x^2}{+(+a)^2} + \frac{y^2}{+(-b)^2} = 1.$$

В этих уравнениях положительные числа $+(+a)^2$, $+(+b)^2$, $+(-b)^2$ имеют два знака: внешний и внутренний.

Детальное рассмотрение вопроса о возможном применении в будущем чисел с двумя знаками выходит за пределы настоящего доклада.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Цейтен.* История математики в древности и средние века (пер. с франц. изд. П. С. Юшкевича). Изд. второе. М.— Л., ГОНТИ, Ред. техн.-теорет. лит., 1938. 231 с.
2. *Г. Г. Цейтен.* История математики в XVI и XVII веках (пер. с нем. П. Новикова). Изд. второе. М.— Л., ГОНТИ, Ред. техн.-теорет. лит., 1938. 456 с.
3. *Г. Вилейтнер.* Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам (пер. с нем. П. С. Юшкевича, А. П. Юшкевича). Изд. второе.М.—Л., ГОНТИ, Гл. ред. общетехн. лит. и номографии, 1935. 319 с.
4. *М. Я. Выгодский.* Арифметика и алгебра в древнем мире. М.— Л., Огиз, 1941. 252 с.
5. ⌊*И. В. Арнольд.*⌉ Арифметика.— БСЭ, т. 3 [1950], с. 13.
6. ⌊*Д. К. Фаддеев.*⌉ Число.— БСЭ, т. 47 [1957], с. 394.
7. ⌊*О. Ю. Шмидт, А. Г. Курош.*⌉ Алгебра.— БСЭ, т. 2 [1950], с. 53.

БИБЛИОГРАФИЯ ТРУДОВ А. В. ШУБНИКОВА

1908

1. Самодельная паяльная лампа.—«Физик-любитель», № 55 (т. 4, № 15), стб. 453—454.
2. Как сделать гейслеровы трубки без помощи воздушного насоса.—«Физик-любитель», № 56 (т. 4, № 16), стб. 483—486.
3. Лейденская банка без внутренней обкладки.—«Физик-любитель», № 56 (т. 4, № 16), стб. 486.

1909

4. Приготовление небольших свинцовых шаров.—«Физик-любитель», № 84—85 (т. 6, № 4—5 за 1909—1910 акад. год), стб. 144.
5. Самодельные приборы по электростатике и опыты с ними (электроскоп; опыты с электроскопом; опыты со струей воды; электрофор; электрическая иллюминация).—«Физик-любитель», № 88—89 (т. 6, № 8—9 за 1909—1910 акад. год), стб. 265—272.
6. Озонатор.—«Физик-любитель», № 90—91 (т. 6, № 10—11 за 1909—1910 акад. год), стб. 328—329.
7. Гейслеровы трубки.—«Физик-любитель», № 90—91 (т. 6, № 10—11 за 1909—1910 акад. год), стб. 329—330.
8. Трубки Крукса и Рентгена.—«Физик-любитель», № 90—91 (т. 6, № 10—11 за 1909—1910 акад. год), стб. 330.
9. Самодельная электрофорная машина (Фосса) и опыты с нею.—«Физик-любитель», № 90—91 (т. 6, № 10—11 за 1909—1910 акад. год), стб. 329—336.

1911

10. Über die Symmetrie der Kristalle von Kaliumdichromat.— Z. Kristallogr., Bd. 50, № 1, 19—23.

1913

11. Влияние степени пересыщения раствора на внешний вид выпадающих из него кристаллов квасцов.— Изв. Имп. АН. Сер. 6, т. 7, № 14, 817—828.

1914

12. Einfluss der Übersättigung der Lösung auf die Tracht der Alaunkristalle.— Z. Kristallogr., Bd. 53, № 5, 433—444.
13. Über den Einfluss der Temperaturschwankungen auf die Bildung der Kristalle.— Z. Kristallogr., Bd. 54, № 3—4, 261—266.
14. Über die Beziehung zwischen Wachstumgeschwindigkeit und äusserer Symmetrie der Kristalle.— Z. Kristallogr., Bd. 54, № 3—4, 267—272.

1916

15. К вопросу о строении кристаллов. 1.— Изв. Имп. АН. Сер. 6, т. 10, № 9, 755—779.

1918

16. Влияние колебаний температуры на кристаллы.— Ж. Рус. физ.-хим. об-ва. Физ. отд-ние, т. 50, вып. 1—3, 39—44.

1919

17. Зависимость скоростей роста кристаллических граней от величины кристаллов.— Изв. Рос. АН. Сер. 6, т. 13, № 16—18, 1135—1142.

1920

18. Практические занятия по геометрической кристаллографии со стереографической сеткой. Екатеринбург, изд. Книжного бюро Уральск. горн. ин-та. 65 с. (стеклогр. изд.).
19. Основные законы геометрической кристаллографии. (Первый выпуск лекций по кристаллографии, читанных в Уральск. горн. ин-те в 1920 г.). Екатеринбург, изд. Уральск. горн. ин-та. 28 с. (стеклогр. изд.).
20. Геометрическая теория роста кристаллов.— Изв. Уральск. гос. ун-та, т. 1, 33—47; То же.— Изв. Горн. ин-та Уральск. гос. ун-та, № 5, 1—15.

1921

21. Кристаллы салола с кривыми гранями.— Изв. Уральск. гос. ун-та, т. 2, 1—10 (совм. с С. Г. Мокрушиным). [Каждая статья этого тома имеет раздельную пагинацию. На последней странице обложки — 1923 г.]

1922

22. Основной закон кристаллохимии.— Изв. Рос. АН. Сер. 6, т. 16, № 1—18, 515—524 [1924].

1923

23. Кристаллография. Лекции для студентов Горного фак-та Уральск. гос. ун-та. Екатеринбург, Студенч. изд. при Исполбюро профсекций Уральск. гос. ун-та. 350 с. (стеклогр. изд.). [На обложке — 1925 г., на титульном листе — 1923 г.]

1924

24. Практический курс геометрической кристаллографии со стереографической сеткой. М.— Птгр., Госиздат. 60 с. (совм. с Ю. В. Вульфом).
25. К вопросу о заполнении пространства многогранниками без промежутков.— Зап. Всерос. минерал. об-ва. Сер. 2, ч. 53, вып. 1, 193—198.
26. Новый прибор для приготовления плоско-параллельных кристаллических пластинок, призм, клиньев и пр.— Труды Ин-та прикл. минерал. и петрогр. (Новые приемы обработки камня. I). Вып. 10, 18—21.
27. Дисковая пила для разрезания небольших камней.— Труды Ин-та прикл. минерал. и петрогр. (Новые приемы обработки камня. II). Вып. 10, 22—24.
28. Употребление свинцовой пластины для доводки шлифов горных пород.— Труды Ин-та прикл. минерал. и петрогр. (Новые приемы обработки камня. III). Вып. 10, 25—26.

1926

29. Статистический метод в применении к изучению внешней формы кристаллов.— Изв. АН СССР. Сер. 6, т. 20, № 5—6, 363—384 (совм. с О. М. Шубниковой).
30. Определение направления оптической оси в гальке кварца.— ДАН СССР, А, январь, 12—14.

31. Статистическое исследование вициналей октаэдра квасцов.— Труды Минерал. музея АН СССР, т. 1, 1—34 (совм. с О. М. Шубниковой).
32. О явлениях, наблюдаемых при сверлении пластинок из хрупкого материала.—«Природа», № 5—6, стб. 95—96.
33. Юрий Викторович Вульф.—«Природа», № 1—2, стб. 5—8.
34. О сочетаниях правильных систем фигур на плоскости. I.— Изв. АН СССР. Сер. 6, т. 20, № 12, 1171—1180.

1927

35. О сочетаниях правильных систем фигур на плоскости. II.— Изв. АН СССР. Сер. 6, т. 21, № 3—4, 177—184.
36. Об ортотропизме роста кристаллов.— ДАН СССР, А, № 4, 61—64 (совм. с Г. Г. Леммлейном).
37. Новая рентгеновская трубка для исследования кристаллов.— ДАН СССР, А, № 24, 408.
38. Шлифовка сферических поверхностей вращающейся трубкой.— Труды Минерал. музея АН СССР, т. 2, 125—130.
39. Муар.—«Природа», № 2, стб. 83—88.
40. Гармония в природе и искусстве.—«Природа», № 7—8, стб. 609—622.
41. Бравэ.— БСЭ. Т. 7, стб. 279—280.
42. Beobachtungen über die Orthotropie des Kristallwachstums.— Z. Kristallogr., Bd. 65, № 3—4, 297—303 (совм. с Г. Г. Леммлейном).

1928

43. О пьезоэлектричестве аморфных и кристаллических тел в электрическом поле.— Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд-ние физ.-мат. наук, № 4—5, 367—374 (совм. с Б. К. Бруновским).
44. Über die Bohrfiguren im Glimmer.— Z. Kristallogr., Bd. 66, № 3—4, 434—440.
45. Die Kristallisation auf der Oberfläche der Schmelze.— Z. Kristallogr., Bd. 67, № 2, 329—338 (совм. с Г. Г. Леммлейном).

1929

46. О природе вициналь ных граней октаэдра квасцов. (Ответ О. М. Аншелесу).— Зап. Всерос. минерал. об-ва. Ч. 58, № 1, 143—149 (совм. с О. М. Шубниковой).
47. Минералы для оптических целей и точных приборов.— В кн.: Нерудные ископаемые. Т. 4. Л., Изд-во АН СССР, 73—78.
48. Über den Effekt beim Aufeinanderlegen zweier regelmässiger Figurensysteme.— Z. Kristallogr., Bd. 69, № 5—6, 503—510.
49. Ein neuer Kristallzüchtungsapparat.— Z. Kristallogr., Bd. 69, № 5—6, 516—518.
50. Über die Symmetrie des Kontinuums.— Z. Kristallogr., Bd. 72, № 3, 272—290.
51. Описание терморегулятора. Патент № 11719.— Вестн. Ком. по делам изобрет., 1929, № 8—9.

1930

52. О кристаллизации на поверхности расплава.— Наук. зап. цукрової пром., т. 9, вып. 3—4, 349—354 (совм. с Г. Г. Леммлейном).
53. Зависимость частоты колебаний пьезокварцевых пластинок от способа их шлифовки.— Ж. прикл. физ., т. 7, вып. 4, 21—24.
54. Простейший способ определения электрических осей в гальке кварца.—«Природа»., № 2, стб. 204—206.
55. Über die Symmetrie des Semikontinuums.— Z. Kristallogr., Bd. 73, № 3—4, 430—433.
56. Über Schlagfiguren des Quarzes.— Z. Kristallogr., Bd. 74, № 1, 103—104.

57. Описание способа нахождения оптической и электрической осей в гальке кварца. Патент № 14849.— Вестн. Ком. по делам изобрет., 1930, № 3 (совм. с Г. Г. Леммлейном).

1931

58. Руководство к изготовлению пьезокварцевых препаратов (коллективный труд под общим руководством А. В. Шубникова, при участии М. Н. Абазы, В. З. Бульванкера, Л. С. Генераловой, Г. Г. Леммлейна и др.). Л., Изд-во АН СССР, Спр. техн. лит. 55 с.
59. Простейший универсальный столик для оптического исследования кристаллов.—«Минеральное сырье», т. 6, № 10—11, 1018—1020.
60. О работе на дисковых алмазных пилах для стекла и камня.—«Оптико-механическая пром-сть», № 4—5, 14—17.
61. Über die Symmetrie der Kristalle von Kaliumdichromat.— Z. Kristallogr., Bd. 76, № 4—5, 469—472.
62. Über die Natur der Vizinalflächen des Oktaeders des Aluminiumalauns.— Z. Kristallogr., Bd. 77, № 3—4, 337—345 (совм. с Б. К. Бруновским).
63. Über eine neue photographische Methode der Kristalluntersuchung.— Z. Kristallogr., Bd. 78, № 1—2, 111—135.

1932

64. Кристалл как непрерывная среда.— Изв. АН СССР. Сер. 7, Отд-ние мат. и естеств. наук. № 6, 799—815.
65. Метод отмучивания наждаков трубкой и микрофотографическое сравнение минутников различных марок.—«Минеральное сырье», т. 7, № 2—4, 52—59.
66. Вторая модель универсального столика для оптического исследования кристаллов.—«Минеральное сырье», т. 7, № 2—4, 60—63.
67. Отмучивание наждаков трубкой.—«Оптико-механическая пром-сть», № 3 (8), 6—8.
68. Über die Schlag — und Druchfiguren und über die mechanischen Quarzzwillinge.— Z. Kristallogr., Bd. 83, № 3—4, 243—264 (совм. с Е. В. Цинзерлинг).
69. Авт. свид. № 25199. Описание способа использования двойниковых пьезокварцевых препаратов как вибраторов в переменном электрическом поле.— Вестн. Ком. по делам изобрет., 1932, № 2 (совм. с С. А. Тизенгаузеном).

1933

70. Учение о симметрии как основной метод естествознания.— В кн.: Труды ноябрьской юбилейной сессии АН СССР. Л., Изд-во АН СССР, 181—193.
71. Кристалл как непрерывная среда.— Ж. физ. хим., т. 4, вып. 2, 231—245.
72. О фигурах удара и давления и о механических двойниках кварца.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 3,5—23 (совм. с Е. В. Цинзерлинг).
73. Об искусственном получении закономерных сростков кристаллов алюмокалиевых квасцов.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 3, 51—66 (совм. с М. П. Шаскольской).
74. О «пластичности» кварца.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 3, 67—74 (совм. с Е. В. Цинзерлинг).
75. О хрупкости и пластичности кварца.—«Природа», № 2, 10—17.
76. Über die künstliche Herstellung gesetzmässiger Kristallverwachsungen des Kalialauns.— Z. Kristallogr., A, Bd. 85, № 1—2, 1—16 (совм. с М. П. Шаскольской).

77. Über die Plastizität des Quarzes.— Z. Kristallogr., A, Bd. 85, № 5—6, 454—461 (совм. с Е. В. Цинзерлинг).
78. Пер.: Дебай П. Звуковые волны как дифракционная решетка.—«Природа», № 3—4, 131—132.
79. Ред.: Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 3. 74 с.

1934

80. Selbstschreibendes Pendelsklerometer.— Z. Kristallogr., A, Bd. 84, № 6, 499—502.
81. Untersuchung der Vizinalflächen des Alaunoktaeders während der Kristallisation.— Z. Kristallogr., A, Bd. 88, № 4, 336—342.
82. Vorläufige Mitteilung über die Messung der sogenannten Kristallisationskraft.— Z. Kristallogr., A, Bd. 88, № 5—6, 466—469.
83. О достижениях Кристаллографического сектора в области техники.— В кн.: Тезисы докладов на декабрьской сессии АН СССР. Л., Изд-во АН СССР, 7.
84. Заметки о полировке стекла и камня: 1. Полировка камня на матовом стекле. 2. Полировка камня на матовом стекле с графитовой сеткой. 3. Полировка камня на матовом стекле с клеевой сеткой. 4. Полировка на бумаге.—«Новости техники», № 15 (414), с. 3-я обложки.
85. Семьдесят научных работ. (О работе Кристаллографического сектора Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал.) — Газ. «За социалистическую науку», 1934, 10 мая, № 13.

1935

86. Как растут кристаллы. М.—Л., Изд-во АН СССР. 75 с. (Науч.-попул. сер.).
87. Исследование вициналъных граней октаэдра квасцов в процессе роста кристаллов.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 6,5—11.
88. Предварительные опыты измерения так называемой кристаллизационной силы.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 6, 17—21.
89. О тождестве химической трехкомпонентной фазовой диаграммы и гномонической проекции кристаллов.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 6, 23—24.
90. Саморегистрирующий маятниковый склерометр.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 6, 61—65.
91. Определение осей в гальке кварца.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 6, 67—80 (при участии В. З. Бульванкера, Г. Г. Леммлейна, С. А. Тизенгаузена и Е. В. Цинзерлинг).
92. Исследование абразивных свойств шлифующих порошков. М.—Л., ОНТИ, Геол. развед и геодез. 16 с.; Труды Ин-та прикл. минералог., вып. 69, 3—16 (совм. с Г. Г. Леммлейном и Е. К. Вандер-Флит).
93. Авт. свид. № 41 373. Описание станка для шлифования шаров.— Вестн. Ком. по делам изобрет., 1935, № 1 (совм. с Б. В. Витовским).
94. Вырезывание симметричных фигур из бумаги.—«Наука и жизнь», № 7, 29 (541) — 35 (547).
95. Ред.: Хевеши Г. и Александер Э. Применение рентгеновых лучей в химическом анализе. Пер. Г. А. Котляра. Л., ОНТИ, Химтеорет. 76 с.
96. Ред.: Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 6. 84 с. (совм. с Г. Г. Леммлейном).

1936

97. Уравнение «двулистника» Б. Попова.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 8, 5—9.
98. О фигурах проворачивания и их возможном применении в вопросах

строения материи.—Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 8, 23—44.

99. О наиболее вероятном числе сторон в произвольных сечениях ромбического додекаэдра.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 8, 45—50 (совм. с Г. Г. Леммлейном).
100. К вопросу о сущности процесса шлифовки и полировки твердых тел.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 8, 71—93.
101. Новый «квадрант» для огранки драгоценных камней.— Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 8, 95—100.
102. Кристалл-индивидуум и кристаллическая среда.— В кн.: Академику В. И. Вернадскому к 50-летию научной и педагогической деятельности. Т. 1. Изд-во АН СССР, 97—108.
103. Закон симметрии и кристаллохимия.— В кн.: Гассель О. Кристаллохимия. (Доп. к пер. книги). Л., ОНТИ, 190—197.
104. Парадоксы физики. Можно ли нагреть более холодным телом горячее?— «Наука и жизнь», № 6, 54—55.
105. Парадоксы физики. Закон Ома.—«Наука и жизнь», № 10, 57—58.
106. Технология агатовых изделий.— В кн.: Неметаллические ископаемые СССР. Т. 1. М.— Л., Изд-во АН СССР, 52—56.
107. Ред.: О. Гассель. Кристаллохимия. Пер. и доп. Н. В. Белова. Л., ОНТИ, Химтеорет. 200 с.
108. Ред.: Труды Ломоносовск. ин-та геохим., кристаллогр. и минерал. Кристаллогр. сер., вып. 8. 100 с. (совм. с Г. Г. Леммлейном).
109. Предисл. к кн.: О. Гассель. Кристаллохимия. Л., ОНТИ, Химтеорет., 5—6 (совм. с Н. В. Беловым).

1937

110. Изоморфизм.— Физ. словарь. Т. 2, 451—454.
111. Кристаллография.— БСЭ. Т. 35, стб. 135—165.
112. Кристаллохимический анализ.— БСЭ. Т. 35, стб. 166—167 (совм. с Е. Е. Флинтом).
113. Ред.: Ф. Ринне и М. Берек. Оптические исследования при помощи поляризационного микроскопа. Пер. с нем. Р. А. Дулицкой. М., ОНТИ. 332 с. (совм. с Н. П. Песковым).

1938

114. Авт. свид. № 52531. Способ резки камней.—«Бюлл. изобрет.», № 1 (совм. с Б. В. Витовским и А. А. Сыромятниковым).
115. Парадоксы физики. Есть ли у магнита полюса?—«Наука и жизнь», № 3, 96—98.
116. Чем это объяснить?—«Техника молодежи», № 8—9, 75.
117. Пересыщение.— Физ. словарь. Т. 4, стб. 108—109.
118. Плеохроизм.— Физ. словарь. Т. 4, стб. 181—182.
119. Рекристаллизация.— Физ. словарь. Т. 4, стб. 646—648.
120. Конспект лекций [А. В. Шубникова] по пьезокварцу для инж.-техн. работников треста № 13. Сост. А. С. Покровским. М. 34 табл. (фотогр. изд.).
121. Ред.: Е. Шмидт и В. Боас. Пластичность кристаллов, в особенности металлических. (Пер. с нем. М. П. Шаскольской). М.— Л., ГОНТИ. 316 с.

1939

122. Пространственные калейдоскопы.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 3—8.
123. Прибор для графического решения задач на сфере.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 21—24.

124. Правило Ампера и симметрия мира.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 25—30.
125. Симметрия электромагнитного луча.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 31—34.
126. О фигурах травления кварца.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 43—50.
127. Прибор для точного определения оптической оси в кварце (конометр.).— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 51—56.
128. Прибор для точного определения осей кварца методом травленой ямки.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 57—63.
129. Пила-вибратор для камня.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 65—66 (совм. с Б. В. Витовским).
130. Механический способ массового изготовления фронтальных линз.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1, 73—78 (совм. с Б. В. Витовским).
131. Ред.: Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 1. 78 с. (совм. с Г. Т. Кравченко, Г. Г. Леммлейном).

1940

132. Симметрия. (Законы симметрии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве). М.— Л., Изд-во АН СССР (Науч.-попул. сер.). 176 с.
133. Кварц и его применение. М.— Л., Изд-во АН СССР. 194 с.
134. Основы кристаллографии. М.— Л., Изд-во АН СССР. 487 с. (совм. с Е. Е. Флинтом и Г. Б. Бокием).
135. Пироэлектрические явления.— БСЭ. Т. 45, стб. 409—410.
136. Пьезокварц.— БСЭ. Т. 47, стб. 707—708.
137. Пьезоэлектричество.— БСЭ. Т. 47, стб. 708—710.
138. Кристаллические системы.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 2, 3—5.
139. Тридцать девять видов точечной кристаллографической симметрии.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 2, 7—11.
140. Об энантиоморфизме граней простых форм.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 2, 39—42.
141. О принципе отбора Гросса Меллера.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 2, 119—121.
142. Расчетные данные к методу изготовления пьезокварцевых пластинок с нулевым температурным коэффициентом с помощью треноги, микрометра и уровня.— Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 2, 179—184.
143. Авт. свид. № 61964. Способ укрупнения однокристаллических областей дофинейских двойников кварца.—«Бюлл. изобрет.», 1940, № 9—10 (совм. с Е. В. Цинзерлинг).
144. Ред.: Труды Лаборатории кристаллогр. АН СССР. Вып. 2. 204 с. (совм. с Г. Г. Леммлейном).

1944

145. Пьезоэлектрические текстуры. (Реферат доклада на апрельской сессии отд-ния физ.-мат. наук, 1944 г.) — Изв. АН СССР, сер. физ., т. 8, вып. 3, 166—167.
146. Евграф Степанович Федоров.— «Наука и жизнь», № 6, 41—42.
147. Пьезоэлектрические текстуры.— ДАН СССР, т. 45, № 5, 193—197.

1945

148. Новое в учении о симметрии и его применении.— В кн.: Общее собрание Академии наук СССР, 14—17 октября 1944 г. М.— Л., Изд-во АН СССР, 212—227.

1946

149. Пьезоэлектрические текстуры. М.— Л., Изд-во АН СССР. 100 с.
150. Атлас кристаллографических групп симметрии. М.— Л., Изд-во АН СССР. 55 с.
151. Диссимметрия.— В кн.: Вопросы минералогии и петрографии. М.— Л., Изд-во АН СССР, 158—163.
152. О законе геометрического отбора при образовании кристаллического агрегата.— ДАН СССР, т. 51, № 9, 679—681.
153. Образ А. Е. Ферсмана по личным впечатлениям.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Сер. 2, ч. 75, вып. 1, 73—77.
154. Построение бертеновских поверхностей.— В кн.: Акад. Д. С. Белянкину к 70-летию со дня рождения и 45-летию научной деятельности. М.— Л., Изд-во АН СССР, 657—658.

1947

155. О многообразии элементов симметрии. — Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 3, 3—7.
156. О числе простых форм различного наименования.—Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 3, 9—10.
157. Образование кристаллов. М.— Л., Изд-во АН СССР. 75 с.

1948

158. Тетартоэдрия Л. Пастера.—Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 4, 3—11.
159. Рец.: Ed. Palmans. Piezo-electricite. Bruxelles. 1946. 161 p.— «Новые книги за рубежом», № 1, апрель.
160. О числе и составе абстрактных групп, отвечающих 32 кристаллографическим классам (совм. с Н. В. Беловым и Е. Н. Беловой).— ДАН СССР, т. 63, № 6, 669—672.
161. Рец.: Г. М. Попов и И. И. Шафрановский. «Кристаллография» (1948)— „Сов. книга“, № 5, 15—17.

1949

162. О симметрии векторов и тензоров.— Изв. АН СССР, сер. физ., т. 13, № 3, 347—375.
163. Авт. свид. № 72434. Камертон с пьезоэлектрическим возбуждением.— «Бюлл. изобрет.», № 1, 20 (совм. с А. С. Шеином).
164. Симметрия и геометрическая интерпретация двумерных полярных тензоров.— Изв. АН СССР, сер. физ., т. 13, № 3, 376—391.
165. Пьезоэлектрический эффект в двойниках кварца.— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 5 117—122.
166. Ред. пер. и предис.: У. Кэди. Пьезоэлектричество. ИЛ., 719 с.
167. Ред.: Е. С. Федоров. Симметрия и структура кристаллов. М.—Л., Изд-во АН СССР. 630 с.

1950

168. Оптическая кристаллография. М.— Л., Изд-во АН СССР. 275 с.

1951

169. Авт. свид. № 69603. Способ получения высоких давлений, в частности при получении кристаллов.— «Бюлл. изобрет.», 1951, № 5 (совм. с А. П. Сизовым).
170. Кристаллы в науке и технике.—«Наука и жизнь», № 3, 25—28.
171. Может ли кристалл одновременно быть изотропным и анизотропным?— Успехи физ. наук, т. 44, вып. 1, 3—6.
172. Перспективы развития учения о симметрии.— В кн.: Кристаллография (Труды Федоров. науч. сессии, 1949 г.). Металлургиздат, 33—47.
173. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. Изд-во АН СССР. 172 с.

174. Колебания текстурных пьезоэлектрических пластинок из сегнетовой соли.— Ж. техн. физ., т. 21, вып. 3, 962—969 (совм. с В. П. Константиновой).

1952

175. Автореферат книги «Оптическая кристаллография».— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 7, 203—210.
176. Об эффектах наложения сетчатых систем фигур друг на друга.— Ж. техн. физ., т. 22, вып. 12, 2038—2060.
177. Кристаллография на службе народного хозяйства.—«Природа», № 11, 77—79.
178. Рец.: Ю. В. Вульф. Избранные работы по кристаллофизике и кристаллографии.—«Сов. книга», № 12, 16—17.
179. Ред.: У. Мезон. Пьезоэлектрические кристаллы. ИЛ. 447 с.

1953

180. Закон Максвелла для оптически анизотропных сред.— В кн.: Вопросы петрографии и минералогии. Т. 2. Изд-во АН СССР, 421—426.
181. О так называемой гомологии кристаллов.— ДАН СССР, т. 88, № 3, 453—456.
182. Основы современной кристаллографии по О. М. Аншелесу.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 82, вып. 2, 147—150.
183. О законе эллипсоида по В. Б. Татарскому.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 82, вып. 3, 235.
184. Д. Б. Гогоберидзе о механических двойниках кварца.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 82, вып. 2, 154 (совм. с Е. В. Цинзерлинг).
185. Новое в растровой оптике.—«Природа», № 6, 20—25.
186. Развитие кристаллографии.—«Правда», 21 мая, № 141.

1954

187. Кристаллическая решетка.— БСЭ. Т. 23, стб. 408—410.
188. Кристаллография.— БСЭ. Т. 23, стб. 413—416.
189. Кристаллы.— БСЭ. Т. 23, стб. 422—427.
190. Антисимметрия конечных фигур.— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 10, 5—12.
191. Что такое гомология кристаллов.— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 9, 35—42.
192. Поправка к кн.: Симметрия и антисимметрия конечных фигур.— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 9, 383.
193. Ответ на статью Л. А. Варданянца: Ревизия кубооктаэдрического двойникового закона алюмокалиевых квасцов [Изв. АН Арм. ССР (Сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук). 1952, т. 5, № 6].— Изв. АН Арм.ССР (Сер. физ-мат., естеств. и техн. наук), т. 7, № 2, 83—84.
194. Примеры использования идеи антисимметрии в науке.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 83, вып. 2, 5—10.
195. Об одной традиционной ошибке и многообразии форм ее проявления.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 83, вып. 4, 408—413.
196. Кристаллы — преобразователи энергии.—«Знание — сила», № 3,7.
197. Ред.: Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 10. 408 с. (Докл. к 3-му Международному конгрессу кристаллографов; совм. с Н. В. Беловым).

1955

198. Исследование пьезоэлектрических текстур. М.— Л., Изд-во АН СССР. 189 с. (совм. с И. С. Желудевым, В. П. Константиновой и И. М. Сильвестровой).
199. Об основном законе кристаллографии Е. С. Федорова (материал к истории и психологии одной ошибки).— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 11, 18—32.

200. О связи между морфологической и физической диссимметрией некоторых кристаллов.— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 11, 212—220 (совм. с В. С. Подиско).
201. Об определении понятия кристаллической однородности (по поводу определения, данного Н. В. Беловым и Г. Б. Бокием).— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 84, вып. 1, 110—114.
202. О возможных и невозможных структурных модификациях алмаза.— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 11, 5—17.
203. Плавающие кристаллы.— В кн.: Юбилейная науч. сессия, посвященная 200-летию университета. Тезисы докл. физ. фак. М., с. 14.
204. Об отсутствии определенной связи между гомологией внешней формы кристаллов и гомологией индикатрис физических свойств кристаллов.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 84, вып. 1, 121—122.
205. Письмо в редакцию.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 84, вып. 4, 516.
206. Пироэлектричество.— БСЭ. Т. 33, стб. 84.
207. Плоская сетка.— БСЭ. Т. 33, стб. 279.
208. Поликристаллические тела.— БСЭ. Т. 33, стб. 538.
209. Пьезоэлектрический эффект.— БСЭ. Т. 35, стб. 387.

1956

210. О некоторых особенностях тепловой деформации кристаллов.— Кристаллография, т. 1, вып. 1, 95—104.
211. Кристаллы в науке и технике. Изд-во АН СССР (Науч.-попул. сер.), 48 с.
212. Кристаллы в науке и технике.— Вестн. АН СССР, № 3, 37—52.
213. Кристаллы в науке и технике.—«Природа», № 4, 9—23.
214. Могут ли существовать в природе такие кристаллы, которые по признакам симметрии относятся к одной сингонии, а по геометрическим константам — к другой?— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 85, вып. 1, 108—109.
215. Об отсутствии определенной связи между гомологией внешней формы кристаллов и гомологией их оптических индикатрис.— Кристаллография, т. 1, вып. 2, 246—247.
216. Памяти А. К. Болдырева (Кристаллограф и минералог). К 10-летию со дня смерти. — Кристаллография, т. 1, вып. 3, 267—270 (совм. с В. И. Михеевым и И. И. Шафрановским).
217. Об особенностях кристаллизации дифениламина.— Кристаллография, т. 1, вып. 3, 374—375.
218. Об одном интересном примечании редакции.— Труды Ин-та кристаллогр. АН СССР. Вып. 12, 205.
219. О работах Пьера Кюри в области симметрии.— Успехи физ. наук., т. 59, вып. 4, 591—602.
220. Вопросы по электростатике.—«Физика в школе», № 2, 79.
221. Лекционный опыт для демонстрации ритмического роста кристаллов салола.— Кристаллография, т. 1, вып. 5, 606—607.
222. Ответ на замечания О. М. Аншелеса на нашу статью «Об одной традиционной ошибке и многообразии форм ее проявления».— Кристаллография, т. 1, вып. 5, 614.
223. Симметрия (в кристаллографии).— БСЭ. Т. 39, 61—65.
224. Федоровские группы.— БСЭ. Т. 44, 577.

1957

225. Об образовании сферолитов.— Кристаллография, т. 2, вып. 3, 424—427.
226. О зародышевых формах сферолитов.— Кристаллография, т. 2, вып. 5, 584—589.
227. Вопросы, относящиеся к закону Ома.—«Физика в школе», № 2, 81.
228. Элементарные механические явления при шлифовании и полирова-

нии.— В кн.: Качество поверхности деталей машин. Сб. № 3. Изд-во АН СССР, 5—16.
229. Развитие кристаллографии за 40 лет.— Кристаллография, т. 2, вып. 5, 577—583.
230. Ред.: Рост кристаллов. (Докл. на 1-м совещании по росту кристаллов.) Т. 1. Изд-во АН СССР. 375 с. (совм. с Н. Н. Шефталем).

1958

231. Основы оптической кристаллографии. Изд-во АН СССР. 205 с.
232. Кристаллы в науке и технике. Изд. 2-е, доп. Изд-во АН СССР (Науч.-попул. сер.). 54 с.
233. Etude des textures piézoélectriques. Traduit du russe. Paris, «Dunod», 207 p. (совм. с И. С. Желудевым, В. П. Константиновой и И. М. Сильвестровой).
234. Антисимметрия текстур.— Кристаллография, т. 3, вып. 3, 263—268.
235. Ритмический рост сферолитов трифенилметана.— Кристаллография, т. 3, вып. 4, 499—501.
236. О собственной симметрии атомов и молекул в кристалле.— Кристаллография, т. 3, вып. 4, 521—524.
237. Образование кристаллов. 72 с. (на китайск. яз.).
238. Ред.: У. Вустер. Практическое руководство по кристаллофизике. Пер. с англ. В. А. Кощика. ИЛ. 163 с.
239. Ред.: Growth of crystals. Vol. 1. Transl. from the Russian. N. Y., Consul. Bureau. 294 p.

1959

240. Полная систематика точечных групп симметрии.— Кристаллография, т. 4, вып. 3, 286—288.
241. Симметрия и антисимметрия стержней и семиконтинуумов с главной осью бесконечного порядка и конечными переносами вдоль нее.— Кристаллография, т. 4, вып. 3, 279—285.
242. Ред.: Рост кристаллов. Т. 2. Изд-во АН СССР. 239 с. (совм. с Н.Н. Шефталем).
243. Ред.: Growth of crystals. Vol. 2. Transl. from the Russian. N. Y., Consul. Bureau. 178 p.

1960

244. Перспективы развития кристаллографии в свете решений XXI съезда КПСС.— Кристаллография, т. 5, вып. 1, 3—14.
245. Инверсия времени как операция антисимметрии.— Кристаллография, т. 5, вып. 2, 328—333.
246. Об определении знака энантиоморфизма пьезоэлектрических текстур.— Кристаллография, т. 5, вып. 4, 644—645.
247. Симметрия подобия.— Кристаллография, т. 5, вып. 4, 489—496.
248. Антисимметрия.— Физ. энц. словарь. Т. 1, 72—73.
249. Асимметрия.— Физ. энц. словарь. Т. 1, 87.
250. Браве решетка.— Физ. энц. словарь. Т. 1, 208—209.
251. Диморфизм.— Физ. энц. словарь. Т. 1, 560.
252. Principles of optical crystallography. Transl. from the Russian. N. Y., Consult. Bureau. 186 p.
253. Theses de la communication la formation de cristaux.— Acta Crystallogr., vol. 13, pt. 12, 1077.

1961

254. О взаимно параллельном расположении дендритов хлористого аммония в капле раствора.— Кристаллография, т. 6, вып. 2, 244—248.
255. Что теплее — растущий кристалл или питающая его маточная среда? — Кристаллография, т. 6, вып. 2, 315—316.
256. Симметрия и физические свойства пирамид роста.— Кристаллография, т. 6, вып. 3, 319—322.

257. О возникновении центров кристаллизации в капле раствора хлористого аммония под действием электрического поля.— Кристаллография, т. 6, вып. 3, 443—450 (совм. с В. Ф. Парвовым).
258. Полная систематика точечных черно-белых групп.— Кристаллография, т. 6, вып. 4, 490—495.
259. Выступление на 2-й конференции по росту кристаллов.— В кн.: Рост кристаллов. Т. 3. Изд-во АН СССР, 5—6.
260. Выступление на общем собрании АН СССР.— Вестн. АН СССР, № 12, 61—62.
261. Проблема диссимметрии материальных объектов. Изд-во АН СССР. 55 с.
262. Ред.: Рост кристаллов. (Докл. на 2-м совещании по росту кристаллов.) Т. 3. Изд-во АН СССР. 506 с. (совм. с Н. Н. Шефталем).

1962

263. Группы (классы) симметрии и антисимметрии конечных лент.— Кристаллография, т. 7, вып. 1, 3—6.
264. Черно-белые группы бесконечных лент.— Кристаллография, т. 7, вып. 2, 181—191.
265. Об отнесении всех кристаллографических групп симметрии к группам трехмерным.— Кристаллография, т. 7, вып. 3, 490—495.
266. Плавающие магниты и плавающие кристаллы.—«Природа», № 3, 17—22.
267. Изоморфизм.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 139—140.
268. Инверсия.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 170—171.
269. Классы кристаллов.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 386.
270. Кристаллизация.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 523—526 (совм. с А. А. Черновым).
271. Кристаллическая структура.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 530.
272. Кристаллография.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 533.
273. Кристаллы.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 538—541.
274. Кубическая система.— Физ. энц. словарь. Т. 2, 551.
275. Shools of X-ray structural analysis in the Soviet Union.— В кн.: Fifty years of X-ray Diffraction. Utrecht, 493—497.
276. Piezoelektrické texture a perspektivy dalsiho rozvoje piezoelektriny.— Ceskoslov. casop. fys., vol. 12, N. 2, 172—174.
277. Autobiographical Data and Personal Reminiscences.— В кн.: Fifty years of X-ray Diffraction. Utrecht, 647—653.
278. Ред.: Growth of crystals. Vol. 3. Transl. from the Russian. N. Y., Consult. Bureau. 357 p.
279. Рец.: Handbuch der Physik. Bd. 25/1. Kristalloptik. Berlin, 1961. 592 S. (на нем. яз.).—«Новые книги за рубежом», А, № 1, 55—56.
280. Рец.: W. Kleber. Einführung in die Kristallographie. Berlin, 1961. (Изд. четвертое, на нем. яз.)—«Новые книги за рубежом», А, № 8, 47—49.

1963

281. О неполноте Единой схемы кристаллографических групп.— Кристаллография, т. 8, вып. 1, 131—132.
282. Какая информация содержится в правильной системе точек?— Кристаллография, т. 8, вып. 6, 943—944.
283. Рец.: P. Terpstra, L. W. Codd. Crystallometry. London, 1961 (на англ. яз).—«Новые книги за рубежом», № 3, 45—48.
284. Миллеровские индексы.— Физ. энц. словарь. Т. 3, 249.
285. Модификации кристаллов.— Физ. энц. словарь. Т. 3, 273.
286. Моноклинная система.— Физ. энц. словарь. Т. 3, 317.
287. Ось симметрии.— Физ. энц. словарь. Т. 3, 546.
288. Ортотропизм.— Физ. энц. словарь. Т. 3, 535.
289. Параллелоэдры.— Физ. энц. словарь. Т. 3, 584.
290. Параметры грани.— Физ. энц. словарь. Т. 3, 592.

1964

291. Рец.: W. Kleber. Einführung in die Kristallographie. Berlin, 1963 (на нем. яз.).—«Новые книги за рубежом», А, № 5, 60—62.
292. О симметрии молекул бензола и родственных соединениях.— ДАН СССР, т. 157, № 3, 586—588.
293. О гранях с нулевой скоростью роста на кристалле.—Кристаллография, т. 9, вып. 3, 435 (совм. с В. Ф. Парвовым).
294. О так называемой полной симметрии (критика статьи И. С. Желудева).— Кристаллография, т. 9, вып. 4, 587.
295. Шариковая модель структуры кристаллов и аморфных тел.—«Природа», № 10, 66—80.
296. В мире кристаллов.—«Неделя», № 17, 8—9. (Пресс-конференция совм. с Б. К. Вайнштейном, Б. Н. Делоне, М. В. Классен-Неклюдовой.)
297. Colored symmetry. Transl. from the Russian. Pergamon Press. 263 p. (совм. с Н. В. Беловым и др.).
298. Ред.: Рост кристаллов. Т. 4. Изд-во АН СССР. 248 с. (совм. с Н. Н. Шефталем).

1965

299. Схема соподчинения кристаллографических точечных групп и сингоний.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Ч. 94, вып. 3, 253—257.
300. Тридцать две кристаллографические группы, содержащие только повороты и антиповороты.— Кристаллография, т. 10, вып. 6, 775—778.
301. Растровая модель обыкновенных и групповых волн.—«Природа», № 11, 61—67.
302. Рец.: Е. А. Вуд. Кристаллы и свет. 1964 (на англ. яз.).—«Новые книги за рубежом», А, № 3, 60—62.
303. Штрихи большой жизни.— В кн.: Александр Евгеньевич Ферсман (Жизнь и деятельность). Изд-во АН СССР, 115—123.
304. Пирамиды роста.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 5.
305. Плоскость симметрии.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 45.
306. Плоскость скольжения.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 46.
307. Полиморфизм.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 102.
308. Пространственная решетка.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 225.
309. Пространственные группы.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 226.
310. Простые формы.— Физ. энц. словарь, Т. 4, 227.
311. Растворение кристаллов.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 359—360.
312. Ромбическая система.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 451.
313. Ромбоэдрическая система.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 451.
314. Симметрия кристаллов.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 533.
315. Сингонии кристаллов.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 534.
316. Скелетные формы кристаллов.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 547.
317. Скользящее отражение.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 549.
318. Слоистые решетки.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 560.

1966

319. Смешанные кристаллы.— Физ. энц. словарь. Т. 4, 563.
320. Спирали Эри.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 50.
321. Сферолиты кристаллов.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 106.
322. Символы кристаллографические (международные).— Физ. энц. словарь. Т. 5, 532—533.
323. Трансляция.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 196.
324. Федоровский столик.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 293—294.
325. Федоровские группы.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 2.
326. Центр симметрии.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 391.
327. Элементарная ячейка.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 521.
328. Эпитаксия.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 534.

329. Ядра кристаллизации.— Физ. энц. словарь. Т. 5, 570.
330. Тридцать две кристаллографические группы, содержащие только повороты и зеркальные антиповороты.— Кристаллография, т. 11, вып. 3, 363—367.
331. Световые волны с поперечными и продольными колебаниями.—«Природа», № 6, 33—38.
332. О равноправии положительных и отрицательных чисел.—«Вопросы философии», № 6, 55—58.
333. Антисимметрия (Доклад на Седьмой генеральной ассамблее Международного союза кристаллографов). М., «Наука». 28 с.
334. Antisymmetry. Transl. from the Russian. [M., «Наука»] 29 с.
335. Ред.: Growth of crystals. Vol. 4. Transl. from the Russian. N. Y., Consult. Bureau. 206 p. (совм. с Н. Н. Шефталем).

1967

336. Симметрия конечных фигур в современной интерпретации.— В кн.: Проблемы кристаллохимии минералов и эндогенного минералообразования. Л., «Наука», 96—114.
337. Укрупнение зерен порошка сегнетовой соли, находящегося в собственном растворе, под действием колебаний температуры.— Кристаллография, т. 12, вып. 2, 186—190 (совм. с Н. В. Гордеевой).
338. Предисл. к кн.: Структура и свойства жидких кристаллов и высокомолекулярных веществ. Вып. 1. Иваново, 1967, с. 5 (совм. с Б. К. Вайнштейном).

1968

339. Ответ оппоненту на критику моей статьи «Световые волны с поперечными и продольными колебаниями» («Природа», № 6, 1966).—«Природа», № 2, 107—108.
340. Зарождение и рост кристаллов. «Наука». 70 с. (совм. с В. Ф. Парвовым).
341. Antisymmetry.— В кн.: Physics of the Solid State. Commemoration volume to prof. S. Bhagavantam. London — N. Y., Acad. Press, 1—12.
342. Евграф Степанович Федоров. (К 50-летию со дня смерти.) — Кристаллография, т. 14, вып. 3, 387—392.

1970

343. Воспоминания о Евграфе Степановиче Федорове.— В кн.: Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии. Л., «Наука», 8—10.

1972

344. У истоков кристаллографии. «Наука». 51 с.
345. Симметрия в науке и искусстве. Изд. 2-е, перераб. и доп. «Наука». 339 с. (совм. с В. А. Концпиком).
346. О методике фотографического исследования кристаллов.— В кн.: Кристаллография и минералогия. (Труды Федоровск. юбилейной сессии 1969 г.) Л., «Наука», 223—225 (совм. с В. Ф. Парвовым).
347. О взаимосвязи между кристаллическим индивидом и кристаллической средой.— В кн.: Кристаллография и минералогия. (Труды Федоровск. юбилейной сессии 1969 г.) Л., «Наука», 25—28.

1973

348. То, что сохранила память (Воспоминания о С. И. Вавилове).— Успехи физ. наук, т. 111, № 1, 179—181.
349. Ред.: Г. Г. Леммлейн. Морфология и генезис кристаллов. «Наука», 328 с.

О ЖИЗНИ И ТРУДАХ А. В. ШУБНИКОВА

(Библиография)

Алексей Васильевич Шубников. Сост. Г. Г. Леммлейн. М., Всесоюзн. кн. палата, 1941. 24 с., портр. (Материалы к библиографии трудов ученых СССР. Серия кристаллография, вып. 2).

Шубников А. В. Симметрия. М., АН СССР, 1940.—«Наука и жизнь», 1941, № 3, с. 54.

[Награждение орденом Трудового Красного Знамени за выдающиеся заслуги в развитии науки и техники, в связи с 220-летием Академии наук СССР].— Вед. Верх. Сов., 1945, 12/VIII, № 47.

Вавилов С. И. Выдающиеся физики.—«Правда», 1946, 25 ноября, № 280. (К выборам в Академию наук СССР.)

Чествование чл.-корр. А. В. Шубникова.— Вестн. АН СССР, 1947, № 6, 78—80.

Беляев Л. М. Чествование чл.-корр. АН СССР А. В. Шубникова в связи с его шестидесятилетием.— Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, т. 11, № 3, 328—381.

Александровский А. Текстуры профессора Шубникова.— «Техника — молодежи», 1947, № 9, с. 12, портр.

Работы академиков, членов-корреспондентов и научных сотрудников Академии наук СССР, удостоенные Государственных премий за 1946 г.— Вестн. АН СССР, 1947, № 7, с. 16. [Краткая аннотация: Шубников А. В. Пьезоэлектрические текстуры. М.— Л., АН СССР, 1946. 99 с.]

Шепель В. В. Физики — лауреаты Государственных премий.— Успехи физ. наук, 1949, т. 39, вып. 4, 506—507.

Сивухин Д. В. Шубников А. В. Оптическая кристаллография. М.— Л., АН СССР, 1950. 276 с.—«Сов. книга», 1952, № 7, 16—19.

Nicolle J. En lisant les livres de l'acadèmicien Choubnikov.— Газ. Paralléle 50, 1951, 14/VI, № 247, p. 4.

Петров В. П. Шубников А. В. Оптическая кристаллография. М.— Л., АН СССР, 1950. 276 с.—«Сов. книга», 1952, № 7, 19—21.

Аншелес О. М. О книге А. В. Шубникова «Симметрия и антисимметрия конечных фигур». М., АН СССР, 1951. 172 с.— Зап. Всесоюз. минерал. об-ва. Сер. 2, 1953, ч. 82, вып. 2, 150—154.

Воронцова Л. Передовой ученый.—«Веч. Москва», 1953, 20 февр., № 43, портр.

Шубников Алексей Васильевич.— Вестн. АН СССР, 1953, № 12, с. 65, портр. (Академики, избранные Общим собранием Академии наук СССР 23 октября 1953 г. Краткие биографии).

Алексей Васильевич Шубников. [К 70-летию со дня рождения].—Кристаллография, 1957, т. 2, вып. 1, 5—8.

Шубников Алексей Васильевич.— БСЭ, 2-е изд. Т. 48, [1957], 220.

Шубников Алексей Васильевич.— В кн.: Биографический словарь деятелей естествознания и техники. Т. 2. М., изд-во БСЭ, 1959, 393.

Шубников Алексей Васильевич.— МСЭ, 3-е изд. Т. 10, [1961], стб. 666.

[Награждение орденом Трудового Красного Знамени]. Указ от 10 апреля 1962 г.— Вестн. АН СССР, 1962, № 3, 102.

Лауреат премии имени Е. С. Федорова.—«Экономическая газета», 1962, 8 янв., № 2, с. 3.

Megaw H. D. Shubnikov A. V. Principles of optical crystallography. N. Y., Consult. Bureau, 1960. 186 p.— Phil. Mag., 1962, vol. 7, № 75, p. 533.

Shubnikov Alekxei Vasilyevich.— Who's who in Soviet science and technology. Compl. Telberg J. Ph. D. 2nd ed., revised and enlarged. N. Y., Telberg book corp., 1964, p. 191.

Шубников Олексі Васильвич.— Укр. рад. енц., т. 16, [1964], с. 393.

[Награждение званием Героя Социалистического Труда с вручением ему ордена Ленина и золотой медали «Серп и Молот»].—«Известия», 1967, 29 марта, № 75.

Алексей Васильевич Шубников.— Кристаллография, 1967, т. 12, вып.2, с. 179.

К 80-летию со дня рождения А. В. Шубникова. [Специалист в области кристаллографии. Беседа с акад. А. В. Шубниковым. Записал В. А. Копцик].— Кристаллография, 1967, т. 12, вып. 2, 180—185.

Академик А. В. Шубников — Герой Социалистического Труда.— Вестн. АН СССР, 1967, № 6, 128—129.

А. В. Шубников. [Кристаллограф. К 80-летию со дня рождения].— Акуст. ж., 1967, т. 13, вып. 3, 468—469.

Вайнштейн Б. К., Фридкин В. М., Шувалов Л. А. Алексей Васильевич Шубников. К 80-летию со дня рождения.— Успехи физ. наук, 1967, т. 92, вып. 3, 539—540.

Shubnikow Alexei Vasilyevich.— The International who's who. 32nd ed. 1968—69. London, Europa publ. Ltd, 1968, p. 1213.

Shubnikov Alexei Vasilyevich.— The International who's who. 33st ed. 1969—70. London, Europa publ. Ltd, [1969], p. 1368—1369.

Shubnikow Aleksei Vasilévich.— World who's who in science. From antiquity to the present. 1st ed. Ed. Debus A. G. Chicago Marques who's who inc., [1968], p. 1542.

Академик А. В. Шубников.—Вестн. АН СССР, 1970, № 7, 98, портр. Подписи: Д. Ф. Устинов, В. А. Кириллин, Л. В. Смирнов и др.

Алексей Васильевич Шубников.— Кристаллография, 1970, т. 15, вып. 4, 621—622, портр.

Белов Н. В., Вайнштейн Б. К., Пинскер З. Г., Фридкин В. М., Шувалов Л. А. Алексей Васильевич Шубников.— Успехи физ. наук, 1970, т. 102, вып. 3, 519—520.

Академик А. В. Шубников.—«Правда», 1970, 29 апр., № 119.

Академик А. В. Шубников.— «Известия», 1970, 29 апр., № 102.

Smolensky L. A., Zhdanov G. S., Shuvalov L. A. In memory of Academician A. V. Schubnikow.— Ferroelectrics, 1970, vol. 1, № 4, 191—193.

Suvalov L. A. Zemrel A. V. Subnikov.— Ceskosl. casop. fys, 1970, vol. 20, № 6, 695—696.

Belov N. V., Vainshtein B. K. Alexey Vasilyevich Shubnikov 1887—1970. (Obituary).— J. Appl. Crystallogr., 1970, vol. 3, № 6, 551—552.

Shubnikov Alexei Vasilyevich.— The International who's who. 34th ed. 1970—71. London, Europa publ. Ltd, [1970], p. 1471.

Шафрановский И. И., Франк-Каменецкий В. А. Роль А. В. Шубникова в развитии минералогической кристаллографии.— Зап. Всесоюзн. минерал. об-ва, 1971, ч. 100, вып. 1, 61—65.

Wyart J. A. V. Schubnikov (1887—1970).— Bull. Soc. franc. Minéral. Cristallogr., 1971, т. 94, № 2, p. 7.

Шефталь Н. Н. Алексей Васильевич Шубников.— В кн.: Рост кристаллов. Т. 9. М., 1972, 273—276. Список работ А. В. Шубникова по росту кристаллов (в хронологическом порядке): 40 назв.

Белов Н. В. Школа жизни великого кристаллографа.— Кристаллография, 1973, т. 18, № 2, 437—439.

А. В. Шубников. У истоков кристаллографии. М., «Наука», 1972. 52 с.— «Химия и жизнь», 1973, № 1, с. 90, рис.

Лев Ф. Рец. на кн.: Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М., 1972.—«Новый мир», 1973, № 4, 275—277.

Олева С. Жизнь, посвященная кристаллу.— Газ. «Моск. ун-т», 1973, 18 мая, № 19, 1.

Китайгородский А. И. Почти все о симметрии. Рец. на кн.: Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М., 1972. 340 с.—«Природа», 1973, № 5, 119—120.

Белов Н. В., Шафрановский И. И., Франк-Каменецкий В. А. О книге А. В. Шубникова и В. А. Копцика «Симметрия в науке и искусстве».—Зап. Всесоюзн. минерал. об-ва, 1974, ч. 103, № 4, 501—503.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 1

То, что сохранила память(автобиографические заметки) 7

СИММЕТРИЯ 36

К вопросу о строении кристаллов 39

К вопросу о заполнении пространства многогранниками без промежутков 60

Правило Ампера и симметрия мира 64

Новое в учении о симметрии и его применении 72

О числе и составе абстрактных групп, отвечающих 32 кристаллографическим классам 91

О симметрии векторов и тензоров 97

О работах Пьера Кюри в области симметрии 133

Симметрия подобия 144

Полная систематика точечных черно-белых групп 154

Антисимметрия 161

Симметрия конечных фигур в современной интерпретации 181

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ 205

О пьезоэлектричестве аморфных и кристаллических тел в электрическом поле 206

Симметрия электромагнитного луча 213

Пьезоэлектрический эффект в двойниках кварца 217

Может ли кристалл одновременно быть изотропным и анизотропным? 223

О связи между морфологической и физической диссимметрией некоторых кристаллов 226

Об отсутствии определенной связи между гомологией внешней формы кристаллов и гомологией индикатрис физических свойств кристаллов 236

О некоторых особенностях тепловой деформации кристаллов . . 238

Симметрия и физические свойства пирамид роста 248

Плавающие магниты и плавающие кристаллы 252

Свойства кристаллов как однородной непрерывной среды 263

Механические свойства кристаллов 336
Шлифовка сферических поверхностей вращающейся трубкой . . . 338
О фигурах удара и давления и о механических двойниках кварца . . 341
О «пластичности» кварца 359
О фигурах проворачивания и их возможном применении в вопросах строения материи 366
К вопросу о сущности процесса шлифовки и полировки твердых тел 385
Прибор для точного определения оптической оси в кварце (конометр) 407
Прибор для точного определения осей кварца методом травленой ямки 413
ОБРАЗОВАНИЕ И РОСТ КРИСТАЛЛОВ 422
Влияние степени пересыщения раствора на внешний вид выпадающих из него кристаллов квасцов 425
Влияние колебаний температуры на кристаллы 435
Зависимость скоростей роста кристаллических граней от величины кристаллов 440
Об ортотропизме роста кристаллов 447
О кристаллизации на поверхности расплава 451
О природе вицинальных граней октаэдра алюмокалиевых квасцов 457
Об искусственном получении закономерных сростков кристаллов алюмокалиевых квасцов 458
Исследование вицинальных граней октаэдра квасцов в процессе роста кристаллов 473
О принципе отбора Гросса-Мёллера 479
О законе геометрического отбора при образовании кристаллического агрегата 481
Что теплее — растущий кристалл или питающая его маточная среда? 484
О гранях с нулевой скоростью роста на кристалле $K_2Cr_2O_7$ 487
Укрупнение зерен порошка сегнетовой соли, находящегося в собственном растворе, под действием колебаний температуры 489
РАЗНОЕ 495
Кристалл как непрерывная среда 497
Кристалл-индивидуум и кристаллическая среда 512
Образ А. Е. Ферсмана по личным впечатлениям 519
Воспоминания о Евграфе Степановиче Федорове 522
Об одной традиционной ошибке и многообразии форм ее проявления 526
Могут ли существовать в природе такие кристаллы, которые по признакам симметрии относятся к одной сингонии, а по геометрическим константам — к другой? 527
О равноправии положительных и отрицательных чисел 529
Библиография трудов А. В. Шубникова 534
О жизни и трудах А. В. Шубникова (Библиография) 548

Алексей Васильевич Шубников

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО КРИСТАЛЛОГРАФИИ

Утверждено к печати
Ордена Трудового Красного Знамени
Институтом кристаллографии им. А. В. Шубникова

Редакторы **Н. Н. Соколова, Г. Б. Горшков**
Художник **И. Е. Сайко**
Технический редактор **Р. М. Денисова**

Сдано в набор 11/IX 1974 г.
Подписано к печати 12/XII 1974 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага № 1. Усл. печ. л. 34,75
Уч.-изд. л. 35,4. Тираж 2400 экз.
Т-13476. Тип. зак. 1120. Цена 2 р. 69 к.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62 Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
294	ф-ла	x_3^2/k_2	x_2^2/k_2
315	3 сн. и 6 сн.	t_{33}	t'_{33}
404	3 св. и 11 сн.	курантом	круантом

А. В. Шубников

1173

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»