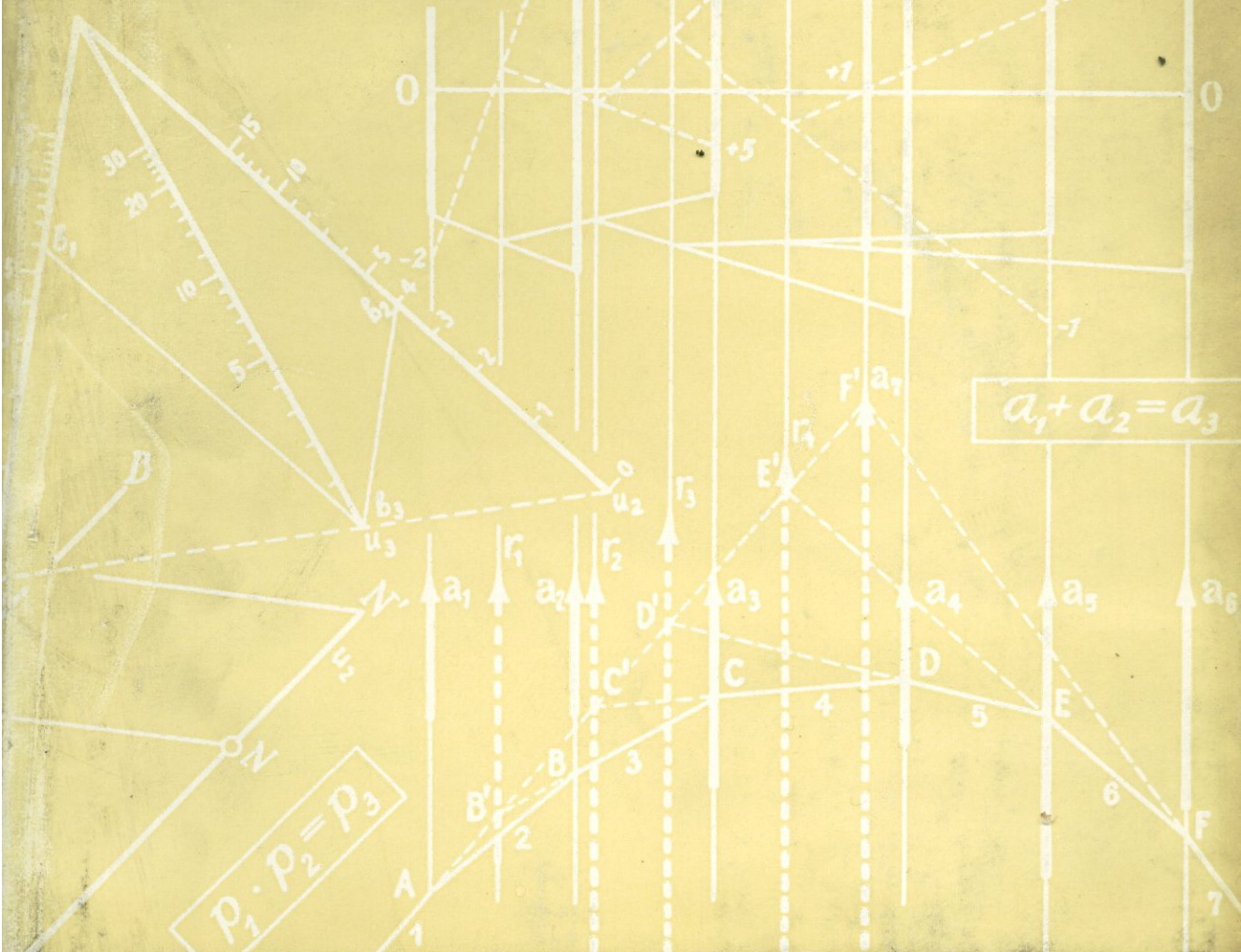


$$(f_1 f_2 + f_3) f_4 = f_5$$

$$(a_1 p_2 + a_3) p_4 = a_5$$

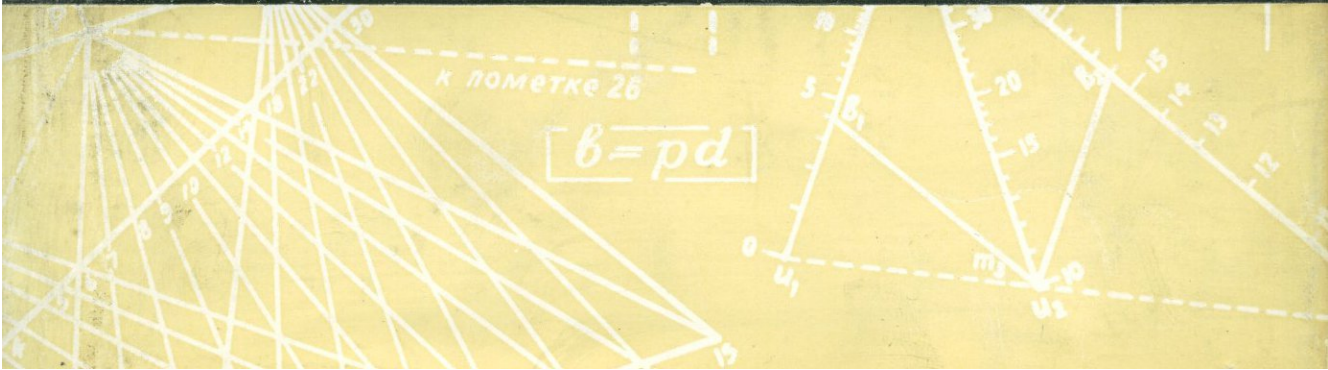
Г. И. ТЕР-СТЕПАНЯН



**ИНЖЕНЕРНЫЕ**

**ЦЕПНЫЕ**

**НОМОГРАММЫ**



ENGINEERING CHAIN  
NOMOGRAMS WITH  
RECTILINEAR SCALES

(Theory, Calculation, Construction)  
With English Summary

By George TER-STEPANIAN,  
Professor, Dr. Techn. Sc.

The construction of nomograms with rectilinear scales for equations with many variables involves a number of difficulties due to the lack of a general theory of such nomograms. Since many variants of the nomogram for the same equation may be constructed the best one can be found only by trial and error. The author suggested the general theory of nomograms with rectilinear scales for equations with many variables and composed their algorithms. Several methods of calculation and construction of chain nomograms with rectilinear scales, based on this theory have been worked out. These methods permit the performance of simple calculations of all elements of the future nomogram and the selection of the optimum variant before the construction of the nomogram itself.

NOMOGRAMMES DE CHAINE  
D'INGENIEURS AVEC DES  
ECHELLES RECTILIGNES

(théorie, calcul, construction)  
Avec résumé en anglais

Par Georges TER-STEPANIAN,  
Professeur, Dr. Sc. techn.

La construction des nomogrammes avec des échelles rectilignes pour les équations avec plusieurs variables contient un nombre de difficultés dues au manque de la théorie générale de telles nomogrammes. Etant donné que pour la même équation plusieurs variantes de nomogrammes peuvent être construites, la meilleure nomogramme doit être trouvée par une procédure d'essai. L'auteur a proposé la théorie générale des nomogrammes avec des échelles rectilignes pour les équations avec plusieurs variables, et a composé leurs algorithmes. Plusieurs méthodes de calcul et construction de nomogrammes de chaîne avec des échelles rectilignes, fondées sur cette théorie, ont été élaborées. Ces méthodes ont permis d'effectuer la calcul simple de tous les éléments de nomogrammes futures et la sélection des variantes optimales avant la construction de la nomogramme elle-même.



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR  
ԵՐԿՐԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԳԵՈՐԳ ՏԵՐ-ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

ԻՆՓԵՆԵՐԱԿԱՆ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՍԱՆԴՂԱԿՆԵՐՈՎ  
ՇՂԹԱՅԱՎՈՐ ՆՈՄՈԳՐԱՄՆԵՐ

(ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ, ՀԱՇՎԱՐԿ, ԿԱՌՈՒՅՈՒՄ)

Հայերեն ամփոփումով

GEORGE TER-STEPANIAN

ENGINEERING CHAIN NOMOGRAMS  
WITH RECTILINEAR SCALES  
(THEORY, CALCULATION, CONSTRUCTION)  
with English Summary

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ  
PUBLISHING HOUSE OF THE ARMENIAN ACADEMY OF SCIENCES  
ԵՐԵՎԱՆ 1965 EREVAN

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ НАУК

Г. И. ТЕР-СТЕПАНЯН

ИНЖЕНЕРНЫЕ  
ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ  
С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ШКАЛАМИ  
(ТЕОРИЯ, РАСЧЕТ, ПОСТРОЕНИЕ)  
с армянским и английским резюме

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
ЕРЕВАН

1965



15128  
78198

В книге излагается теория цепных номограмм с прямолинейными шкалами для функции многих переменных и практика их расчета и построения. Автором выведены основные функциональные зависимости между параметрами шкал различных типов цепных номограмм с прямолинейными шкалами, имеющими наибольшее применение в инженерной практике, и даны алгоритмы их построения. Описаны аналитический, графический и графо-аналитический методы расчета, построения и контроля цепных номограмм, механическая номограмма и модели. Эти методы позволяют значительно экономить время при расчете и построении номограмм с прямолинейными шкалами, одновременно достигая их большей рациональности и точности.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров и студентов высших учебных заведений, занимающихся вычислением по формулам, содержащим много переменных.

## ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на замечательные успехи прикладной математики, обогатившей науку различными методами приближенных вычислений, позволяющих с достаточной для практики точностью производить технические расчеты, наблюдается несомненный разрыв между возможностями, которые открываются предложенными способами вычислений, и тем реальным применением, которое эти методы находят в повседневной практике.

Если не считать современных быстродействующих электронных и моделирующих устройств, то одним из наиболее удобных методов, которые предлагаются прикладной математикой практике инженерных расчетов, является номографический метод. Благодаря работам нескольких поколений математиков, среди которых можно назвать ряд блестящих имен, имеется возможность номографировать разнообразные и сложные типы соотношений между переменными.

Применение номограмм для инженерных целей ведет к большой экономии времени. Сравнение аналитического метода вычислений с применением номограмм является иногда разительным. Так, для определения упругости пара  $p$  нормальных парафиновых углеводородов при температуре  $t$  служит формула

$$\lg \frac{p}{760} = \frac{1,8t_0 + 414}{0,3091 - 0,0001165(1,8t_0 + 414)} \cdot \left[ \frac{1}{1,8t_0 + 414} - \frac{1}{1,8t + 414} \right],$$

где  $t_0$  — точка кипения при атмосферном давлении.

Для вычисления по этой формуле необходимо произвести 12 арифметических действий, частью при помощи логарифмической линейки, частью в уме или на бумаге, и, произведя затем действия с логарифмами, получить упругость пара. Для номографического же вычисления этой величины достаточно приложить обыкновенную линейку к номограмме, состоящей из трех шкал, и прочесть ответ.

Определение электродвижущей силы  $E$  платинородиевого элемента в  $mV$  в зависимости от разности температур  $t$  холодного и горячего концов производится по формуле

$$E = \frac{t \cdot 10^{-2} e^{-0,3(0,01t - 0,5)} e^{-0,001rt}}{\operatorname{cth}[2 \cdot 10^{-3}(r^2 + rt - t^2 \cdot 10^{-2} + 2t^3 \cdot 10^{-4})]} \operatorname{cth} \frac{5,05 \cdot 10^4}{r^2 t},$$

где  $r$  — константа термопары.

Аналитический расчет по этой формуле требует затраты труда квалифицированного специалиста не менее 30 минут. По номограмме же расчет может быть произведен за полминуты [8,13].

Еще более наглядными являются преимущества номографии по сравнению с другим методом представления результатов расчета по формулам, содержащим много переменных, а именно с их табулированием; этот вопрос достаточно освещен в литературе [3].

Из сказанного видны цели и возможности номографии. Иногда ошибочно считают, что задачей номографии является графическое решение уравнений. Задачи этого рода решаются графическим исчислением, в частности графическими методами, применяемыми в алгебре, где дается система графических построений, повторяющих или заменяющих с известной точностью аналитические вычисления; поэтому каждый раз должна производиться вся последовательность графических построений. Задачей же номографии является создание таких чертежей, в которых дается геометрическое изображение функциональных зависимостей, определяемых рассматриваемым уравнением, т. е. создание чертежей, эквивалентных данным формулам. Пользование этими чертежами не требует новых геометрических построений и сводится к простому прикладыванию линейки к чертежу или производству аналогичных простых операций для получения ответа.

---

Иногда полагают, что в наше время номография должна уступить место более совершенным методам машинного счета; это совершенно неверно. Как в век космических кораблей будет расширяться применение автомобилей, поскольку у них различные области применения, так и в век быстродействующих электронных счетных машин не может отпасть необходимость в номограммах. Геодезист в поле, ведущий тахеометрическую съемку, токарь у станка, которому нужно подобрать передачи, или лаборант, определяющий гранулометрический состав грунта, не могут отправлять свои данные в вычислительный центр для обработки и получения результата, не говоря уже о неоправданности производства вычислений по простым формулам на сложных устройствах. Понятно, что это не относится к полностью автоматизированным установкам, которые должны производить как все операции, так и связанные с ними вычисления.

С другой стороны, пользование номограммами избавляет от утомительного труда при производстве одних и тех же вычислений для решения сходных задач; оно освобождает также от необходимости иметь объемистые справочные таблицы в тех случаях, когда результаты таких вычислений были предварительно табулированы, так как емкость номограмм существенно и принципиально выше емкости любых таблиц.

Одним из препятствий к обучению электронных счетных машин номографии служило отсутствие алгоритмов. Поэтому не следует исключать возможности введения в будущем элементов номографического метода в машинную вычислительную технику.

Подавляющее большинство формул и уравнения, с которыми приходится иметь дело в инженерной практике, представляют собой простые соотношения между многими переменными. Номографирование таких соотношений несложно. Наиболее удобно оно производится построением номограмм из выравненных точек. Однако при этом возможно осуществление весьма большого количества вариантов, обладающих неодинаковой ценностью. Ввиду отсутствия теоретических исследований, предметом которых являлось бы установление внутренних закономерностей номограмм из выравненных точек для функции многих переменных, сравнение таких вариантов и выбор наилучшего возможны только после производства трудоемкой работы по построению всех этих вариантов номограмм.

В настоящей работе изложены некоторые теоретические предпосылки, позволяющие устранить элемент случайности при осуществлении цепных номограмм с прямолинейными шкалами, и описаны методы практического применения, дающие возможность самостоятельного построения рациональных номограмм для функции многих переменных. Некоторые из полученных выводов были опубликованы ранее [15, 16, 19, 20].

Все номограммы, приведенные в работе, составлены автором.

В процессе работы автора над рукописью, в различных этапах готовности, ее читали и делали свои замечания кандидаты физико-математических наук доценты И. Н. Денисюк, Г. С. Джемс-Леви, Г. А. Карагебакян, Б. Н. Невский и В. А. Тонян. Их ценные указания оказались весьма полезными автору, и он пользуется настоящей возможностью выразить всем им свою глубокую благодарность. Особую признательность автор выражает акад. АН АрмССР проф. А. Г. Назарову за его неизменное внимание, поддержку и товарищескую помощь в работе.

## СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A$  — основной интервал заданной функции;
- $a$  — коэффициент функциональной шкалы; расчетный коэффициент шкалы заданной функции; первичный коэффициент наклонной шкалы функции;
- $a'$  — графический коэффициент шкалы заданной функции;
- $B$  — опорный интервал заданной функции;
- $b$  — приведенная длина проективной шкалы заданной функции;
- $C$  — центр проективной шкалы; центр номограммы с наклонными шкалами;
- $c$  — приведенная длина проективной шкалы вспомогательной переменной;
- $D$  — плечо шкалы вспомогательной переменной относительно начала номограммы;
- $d$  — длина проективной шкалы; расстояние между первой слагаемой и суммарной шкалами звеньев;
- $d_0$  — расстояние от произвольной точки до начала номограммы;
- $e$  — расстояние точки пересечения наклонной шкалы с осевой линией от начала звена;
- $f(u)_1$  и  $f(u)_2$  — наименьшее и наибольшее значения заданных функций;
- $g$  — длина опоры заданной функции; отношение между направленными отрезками проективных шкал;
- $h$  — длина шкалы заданной функции;
- $L$  — плечо шкалы заданной функции относительно начала номограммы;
- $l$  — расстояние между слагаемыми шкалами звена в номограммах с параллельными шкалами; расстояние между вертикальными шкалами в номограмме с наклонными шкалами;
- $M$  — момент коэффициента, модуля или приведенной длины шкалы заданной функции относительно произвольной точки;
- $m$  — модуль шкалы заданной функции;
- $N$  — момент коэффициента, модуля или приведенной длины шкалы вспомогательной переменной относительно произвольной точки;
- $n$  — модуль шкалы вспомогательной переменной;
- $OO'$  — осевая линия;
- $P$  — полюс проективной шкалы; центр перспективы;
- $p$  — (расчетный) параметр преобразования проективной шкалы; пара-

- метр преобразования проективной шкалы заданной функции в радиантной номограмме;
- $p'$  — графический параметр преобразования шкалы заданной функции;
- $q$  — параметр преобразования проективной шкалы вспомогательной переменной в радиантной номограмме;
- $R$  — основной интервал вспомогательной переменной; главная инвариантная точка;
- $r$  — коэффициент шкалы вспомогательной переменной;
- $S$  — опорный интервал вспомогательной переменной;
- $s$  — длина опоры вспомогательной переменной;
- $s'$  и  $s''$  — расстояние начала и конца первичной шкалы от осевой линии;
- $t$  — длина шкалы вспомогательной переменной;
- $t'$  — расстояние полюса наклонной шкалы от осевой линии;
- $u$  — переменные;
- $(u)_1$  и  $(u)_2$  — проксимальный и дистальный пределы полной шкалы переменной  $u$ ;
- $(u)_3$  и  $(u)_4$  — проксимальный и дистальный пределы используемой шкалы переменной  $u$ ;
- $v$  — расстояние от начальной точки вертикальной шкалы до осевой линии в номограмме с наклонными шкалами; абсциссы концевых точек шкал в радиантных номограммах;
- $v'$  и  $v''$  — расстояние от начальной точки вертикальной шкалы до начала и конца рабочего участка шкалы, соответственно, в номограмме с наклонными шкалами;
- $w$  — ординаты концевых точек шкал в радиантных номограммах;
- $x$  — абсциссы точек шкалы; расстояния, отсчитанные вдоль первичных шкал от их начальных точек;
- $y$  и  $y'$  — расстояние пометки проективной шкалы от нулевой и критической точек, соответственно;
- $y'$ ,  $y''$  и  $y'''$  — ординаты первой и второй (слагаемых) и третьей (суммарной) шкал звена, соответственно, в номограмме с параллельными шкалами;
- $z$  — полюсное расстояние проективной шкалы;
- $\alpha$  — угол, образованный в радиантной номограмме шкалами слагаемых функций;
- $\beta$  и  $\gamma$  — углы, образованные в радиантной номограмме шкалами слагаемых функций со шкалой суммарной функции;
- $\rho$  — вспомогательная переменная;
- $(\rho)_1$  и  $(\rho)_2$  — наименьшее и наибольшее значение вспомогательной переменной.

*Примечания.*

1. Символы, относящиеся к функциям, имеют индекс самой функции.
2. Символы, относящиеся к звеньям номограммы, имеют индекс, указывающий номер звена.
3. Длины и расстояния в ряде случаев рассматриваются как алгебраические величины, т. е. с учетом знака.

## 1. ШКАЛЫ

### § 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ

#### Характеристика шкал

Шкала представляет собой линию, на которой нанесена градуировка; такая линия называется *носителем* шкалы.

Каждая шкала представляет одну из переменных номографируемого уравнения. Каждому значению переменной соответствует некоторая точка на шкале. Поэтому шкала переменной  $u$  может быть определена как линия, каждой точке которой соответствует определенное значение переменной  $u$ .

Понятно, что переменная может иметь бесконечное количество значений, соответственно и число точек на шкале будет также бесконечно большим. Нет, однако, надобности стремиться отмечать на шкале чрезвычайно большое количество точек. Достаточно показать только те точки, которые отвечают некоторым определенным значениям переменной. Такие точки помечаются короткими черточками перпендикулярно шкале (штрихами). Тогда любое промежуточное значение переменной может быть легко найдено на шкале путем интерполяции на глаз.

Пометки, которые соответствуют круглым значениям переменной, надписываются. Так, на шкале, показанной на фиг. 1, с, надписаны деления 10, 15, 20, 25... Остальные штрихи не надписываются; они называются немymi.

Участок шкалы, ограниченный двумя пометками, независимо от того, надписаны эти пометки или нет, называется *делением шкалы*. Разность пометок начала и конца деления называется *ценой деления* шкалы. В одних случаях цена деления шкалы является постоянной величиной; так, на шкале, показанной на фиг. 1, б, цена деления шкалы на любом участке шкалы постоянна и составляет 10. В других случаях цена деления шкалы может изменяться один или несколько раз; так, на шкале, представленной на фиг. 1, с, цена деления шкалы в интервале между 10 и 20 составляет 0,5, на следующем участке в интервале между 20 и 50 цена деления равняется 1, и наконец, на последнем участке, между 50 и 100 цена деления равна 2.

*Длиной деления* шкалы называется расстояние между началом и концом деления.

## Классификация шкал

Шкалы можно классифицировать по морфогенетическим признакам. По морфологическим признакам шкалы можно делить различным образом. В зависимости от вида носителя различаются *прямолинейные* и *криволинейные* шкалы. В зависимости от длины шкалы выделяются шкалы *бесконечные* и *конечные*; так шкала функции  $\operatorname{tg} u$  является бесконечной шкалой, а шкала функции  $\operatorname{sin} u$  — конечной шкалой, ограниченной возможными значениями, которые может принимать функция синуса. Среди криволинейных шкал можно выделить *замкнутые* шкалы, например шкалы на эллиптическом носителе.

По внешнему виду шкалы можно подразделить на *градуированные* и *немые*; последний вид шкал находит широкое применение в цепных номограммах для представления вспомогательных переменных, вводимых для целей построения. Градуированные шкалы делятся на *непрерывные* и *вырожденные*; так называются шкалы, в которых градуировка выродилась в отдельные пометки, соответствующие возможным значениям переменной (§ 14).

В зависимости от характера расположения делений непрерывные градуированные шкалы делятся на равномерные и неравномерные.

*Равномерными* шкалами называются такие шкалы, у которых деления постоянной цены имеют постоянную длину; при несоблюдении этого условия шкалы являются *неравномерными*.

Среди неравномерных шкал по характеру изменения пометок на данном участке шкалы различаются два вида:

*сходящиеся* шкалы, если при увеличении абсолютной величины переменной шкалы длина деления равной цены уменьшается, и

*расходящиеся* шкалы, если при тех же условиях длина деления равной цены увеличивается.

В зависимости от вида функции шкала может быть сходящейся или расходящейся по всей длине шкалы, от одного ее конца до другого, или же на шкале может иметься некоторая точка, в которой шкала сходится или расходится.

Среди неравномерных шкал выделяются *периодические* шкалы, состоящие из участков с повторяющимся характером градуировки; таковы, например, логарифмические шкалы.

В настоящей работе рассматриваются номограммы с прямолинейными шкалами; поэтому дальнейшее изложение ограничивается только этим типом шкал.

По генетическим признакам различаются два основных типа — функциональные и проективные шкалы\*. Это деление шкал имеет очень важное значение. Рассмотрим эти типы шкал подробнее.

\* Весьма продуктивное противопоставление двух типов применяемых в номографии шкал — функциональных и проективных — было впервые дано, по-видимому, А. А. Глаголевым [1]. Большинство авторов рассматривает проективные шкалы как один из видов функциональных шкал; так, Г. Швердт [21] подразделяет функциональные шкалы на равномерные, степенные, проективные, логарифмические, криволинейные и др.

## Характеристика функциональных шкал

Функциональные шкалы представляют собой такой вид изображения функциональной зависимости, при котором значения аргумента  $u$  даются в виде пометок, а значения функции  $f(u)$  в виде отрезков, отложенных в некотором масштабе от начальной точки.

В номографии принято при построении шкал пользоваться понятием *модуля* шкалы. Модулем шкалы называется длина отрезка, с помощью которого на шкале откладывается значение функции, равное единице\*. Если обозначить величину модуля шкалы через  $m$ , то длина отрезка  $y$ , изображающего величину функций, составит

$$y = mf(u). \quad (1.1)$$

Это выражение называется *уравнением* шкалы.

В настоящей работе преимущественно применяется величина, обратная модулю шкалы, которая была нами названа *коэффициентом* шкалы; она соответствует тому значению функции, которое приходится на единицу длины шкалы (например, на 1 см); коэффициент шкалы обозначается  $a$ . Из предыдущего видно, что уравнение шкалы может быть написано и в таком виде

$$y = \frac{1}{a} f(u). \quad (1.2)$$

На шкале, выражаемой таким уравнением, начальная точка ( $y=0$ ) должна отвечать такому значению переменной  $u$ , при котором функция равняется нулю.

В более общем случае, в начальной точке шкалы значение функции может отличаться от нуля; пусть оно составляет  $f(u)_1$ . Тогда уравнение шкалы, отсчитанное от начала шкалы, будет иметь вид

$$y = \frac{1}{a} [f(u) - f(u)_1]. \quad (1.3)$$

### Коэффициент шкалы

Наибольшее  $(u)_2$  и наименьшее  $(u)_1$  значения переменной, изображаемые на шкале, называются *пределами переменной*. Очевидно, что в случае монотонных функций\*\* наибольшее и наименьшее значения переменной отвечают концам шкалы.

Разность между наибольшим  $f(u)_2$  и наименьшим  $f(u)_1$  значениями функции называется *интервалом*  $A$  функции

$$A = f(u)_2 - f(u)_1. \quad (1.4)$$

\* Термин «модуль шкалы» введен д'Оканем [26]; также часто употребляется термин «масштаб шкалы».

\*\* Монотонными функциями называются функции действительной переменной, которые при возрастании аргумента либо никогда не убывают, либо никогда не возрастают. Функция  $y=f(u)$  называется неубывающей монотонной функцией (соответственно невозрастающей), если из условия  $(u)_2 \geq (u)_1$  вытекает  $f(u)_2 \geq f(u)_1$  (соответственно  $f(u)_2 \leq f(u)_1$ ).

Отсюда следует, что коэффициент шкалы равняется отношению интервала функции к длине  $h$  шкалы

$$a = \frac{A}{h}. \quad (1.5)$$

Здесь необходимо остановиться на вопросе о размерности коэффициента шкалы. Большинство формул, выражающих соотношение между физическими величинами, обладает размерностью. Рассматривая значения переменных, представляющих собой физические величины, как произведения отвлеченных чисел на единицу, обладающую размерностью\*, можно результат математических действий над переменными представить себе как действия над отвлеченными величинами, помноженными на единицы с размерностью. Тогда, сократив обе стороны уравнений на величину размерности, можно рассматривать значение функции как отвлеченное число, т. е. безразмерную величину.

Так, например, в формуле пути  $l$ , пройденного падающим телом за время  $t$ ,

$$l = \frac{gt^2}{2},$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести, величины  $l$ ,  $g$  и  $t$  имеют разные размерности; обозначив через  $l_1$ ,  $g_1$  и  $t_1$  соответствующие отвлеченные числа, можно записать

$$l = l_1 \cdot 1L; \quad g = g_1 \cdot 1LT^{-2}; \quad t = t_1 \cdot 1T.$$

Подставив эти значения в формулу, получим

$$l_1 \cdot 1L = \frac{g_1 t_1^2}{2} \cdot 1L,$$

или, сократив на величину размерности  $L$ ,

$$l_1 = \frac{g_1 t_1^2}{2}.$$

Таким образом, значение функции может рассматриваться как безразмерная величина; это позволяет производить над ней такие действия, как, например, логарифмирование, которое, очевидно, невозможно в отношении исходной формулы, обладающей размерностью. Действительно, нельзя найти, например, логарифма 12 секунд, так как нет такого числа, чтобы, возведя 10 в эту степень, можно было бы получить 12 секунд.

Таким образом, во всех случаях интервалы функции могут рассматриваться как безразмерные величины. Отсюда следует, что коэффициенты шкал, равные отношению интервала функции к длине шкалы, должны иметь размерность  $L^{-1}$ , например  $см^{-1}$ .

Коэффициент шкалы является вектором, направленным вдоль носителя шкалы в сторону возрастания значения функции. Если все шка-

\* Ср. определение числа, данное Ньютоном в его «Arithmetica Universalis»: «Число есть не столько собрание нескольких единиц, сколько отвлеченное отношение какой-либо величины к другой, однородной с ней, принятой за единицу».

лы номограммы параллельны друг другу и если принять положительными коэффициенты шкал, векторы которых направлены в одну сторону, то коэффициенты шкал, векторы которых направлены в противоположную сторону, должны рассматриваться как отрицательные величины.

Следует отметить, что после того, как построены шкалы, их пометкам приписывается соответствующая размерность, зависящая от физического значения переменной, например *см/сек*. Это эквивалентно умножению обеих частей уравнения на единицу с размерностью. Коэффициент шкалы, понимаемый как отношение интервала функции к длине шкалы, при этом естественно не меняется, но пометки шкал делаются именованными величинами. Таким образом, можно иметь две одинаковые шкалы, т. е. шкалы, имеющие одинаковое значение коэффициента шкалы, но эти шкалы могут быть не тождественными, так как одна из них может показывать, например, скорость движения в *см/сек*, а другая—напряжение в *кг/см<sup>2</sup>*.

### Виды функциональных шкал

Функциональные шкалы подразделяются по виду изображаемых на них функциональных зависимостей. Простейшая из шкал—*равномерная*  $y = \frac{u}{a}$ . Большую группу представляют собой шкалы различных степенных функций: *квадратичная*  $y = \frac{u^2}{a}$ , *кубическая*  $y = \frac{u^3}{a}$ , *полукубическая*  $y = \frac{u^{3/2}}{a}$  и другие шкалы степенных функций общего вида  $y = \frac{u^n}{a}$ , где  $n$ —любое действительное число. При  $n = 1$  шкала степенной функции переходит в равномерную, а при  $n = -1$ —в шкалу функции *обратной пропорциональности*  $y = \frac{1}{ua}$ . Далее выделяются шкалы *экспоненциальной* (показательной) функции  $y = \frac{e^u}{a}$ , различные шкалы *тригонометрических* функций  $y = \frac{\sin u}{a}$ ,  $y = \frac{\operatorname{tg} u}{a}$  и др., большая группа шкал *логарифмических* функций общего вида  $y = \frac{\lg f(u)}{a}$  и т. д.

В номографии особенно большое применение имеют два вида функциональных шкал—равномерные и логарифмические. Эти два вида шкал обладают особыми свойствами, наилучшим образом отвечающими разным требованиям, которые могут предъявляться к номограммам в отношении точности результата.

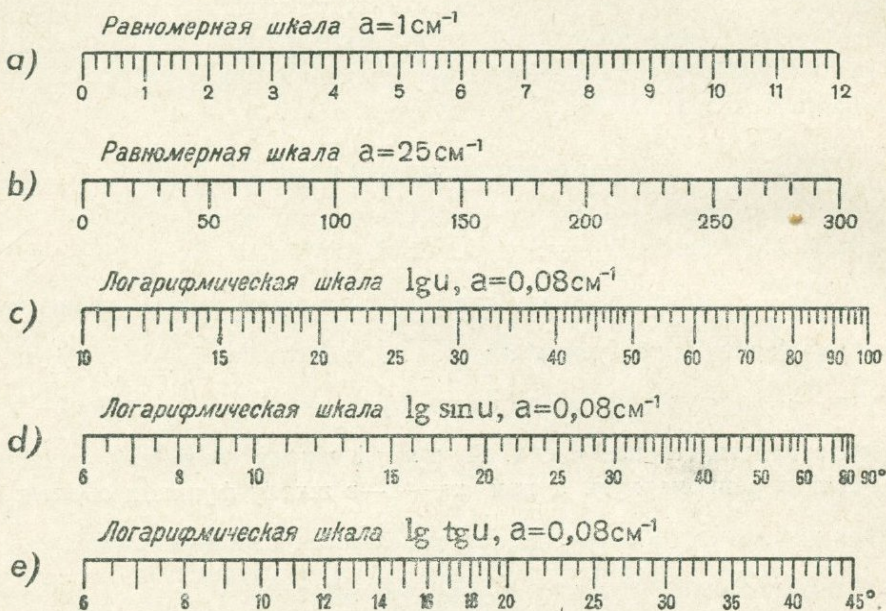
*Равномерными* шкалами называются простейшие функциональные шкалы уравнений вида

$$y = \frac{u}{a} \quad \text{или} \quad y = \frac{u - (u)_1}{a}, \quad (1.6)$$

где  $a$ —коэффициент шкалы и

$(u)_1$ —наименьшее значение функции, которое должно быть показано на шкале.

Примерами равномерных шкал являются обыкновенные масштабные линейки с нанесенными на них делениями; шкалы такого рода показаны на фиг. 1, а и б. Шкала, показанная на фиг. 1, а, имеет обычную сантиметровую градуировку\*; понятно, что коэффициент такой шкалы равен единице,  $a = 1 \text{ см}^{-1}$ . Могут быть построены равномерные шкалы и с другим значением коэффициента шкалы; на фиг. 1, б показана равномерная шкала с коэффициентом шкалы  $a = 25 \text{ см}^{-1}$ . Линейка, градуированная в английской системе мер (в дюймах), имеет коэффициент шкалы, равный  $a = \frac{1}{2,54} \approx 0,39 \text{ см}^{-1}$ .



Фиг. 1

Все равномерные шкалы выражаются одним и тем же уравнением шкалы (1.6) и отличаются друг от друга только значениями коэффициента шкалы.

Логарифмическими шкалами называется большая группа шкал, отличающихся друг от друга не только значениями коэффициентов шкал, но и видом логарифмической функции. Среди этих шкал назовем простую логарифмическую шкалу (фиг. 1, в), выражаемую уравнением

$$y = \frac{1}{a} [\lg u - \lg(u)_1]. \quad (1.7)$$

Примерами таких шкал являются градуировки А, В и С, нанесенные на лицевой стороне логарифмических линеек (фиг. 12). Важнейшим

\* При изготовлении клише длины шкал на фиг. 1 уменьшились, соответственно увеличились значения коэффициентов шкал; так, коэффициент шкалы, показанной на фиг. 1, а, составляет  $a = 1,19 \text{ см}^{-1}$ .

свойством простых логарифмических шкал является то, что они как бы повторяются между каждыми последовательными степенями того числа, которое служит основанием логарифмов, обычно числа 10. Вследствие этой периодической градуировки деления, соответствующие отметкам, например, 0,2, 2, 20, 200 ..., отстоят на таких шкалах на равном расстоянии друг от друга.

Часто применяются более сложные логарифмические шкалы, например:

$$y = \frac{1}{a} [\lg \sin u - \lg \sin(u)_1],$$

$$y = \frac{1}{a} [\lg \operatorname{tg} u - \lg \operatorname{tg}(u)_1],$$

изображающие функцию логарифмов синусов и тангенсов; такие шкалы имеются на обратной стороне движка обыкновенных логарифмических линеек (фиг. 1, d и e). На электротехнических линейках имеются логарифмические шкалы функции

$$y = \frac{1}{a} [\lg \lg u - \lg \lg(u)_1],$$

представляющие собой логарифмы логарифмов и т. д.

#### Погрешность, даваемая шкалой

Различаются два случая применения градуированных шкал: 1) дано значение переменной и требуется найти на шкале соответствующую ей точку и 2) на шкале найдена точка и требуется определить значение переменной. Если не считать тех случаев, когда переменная имеет такое значение, что на шкале имеется соответствующая пометка (надписанная или ненадписанная), то в обоих упомянутых случаях применения шкал приходится прибегать к графической интерполяции. Поэтому возникает вопрос о той точности, с которой производится эта интерполяция. В этом отношении равномерные и логарифмические шкалы обладают резко отличающимися свойствами. Вспомним некоторые элементарные понятия из теории приближенных вычислений.

Погрешность, с которой получен ответ, может рассматриваться с двух точек зрения. Может представлять интерес абсолютная величина этой погрешности, т. е. разность между истинным значением величины и ее приближенным значением; но обычно истинное значение величины остается неизвестным и тогда приходится удовлетвориться тем, что абсолютная величина этой разности не превосходит некоторой малой положительной величины, называемой предельной абсолютной погрешностью данного числа.

Во многих случаях предельная абсолютная погрешность не имеет практического значения. Так, если длина доски измерена с предельной абсолютной погрешностью 1 см, то такой результат в большинстве случаев может считаться вполне приемлемым; однако, если измерять ее



15/151

толщину с такой же абсолютной погрешностью 1 см, то ошибка будет недопустимо велика. Поэтому в практических целях значительно важнее оценивать относительную величину погрешности.

Относительной погрешностью числа называется отношение абсолютной погрешности этого числа к самому числу. Так как истинное значение абсолютной погрешности неизвестно, то и в этом случае приходится удовлетвориться тем, что величина относительной погрешности не превосходит некоторой малой величины, называемой предельной относительной погрешностью данного числа\*.

Таким образом, к той точности, которую дает шкала, могут предъявляться различного вида требования; оба эти вида требований вполне реальны. Так, например, если ведется тахеометрическая съемка и задачей является определение превышений одних точек по отношению к другим по измеренным расстояниям и вертикальным углам, то погрешность, которую могут иметь эти превышения, должна иметь одну и ту же абсолютную величину, так как по этим данным должны быть определены действительные высоты точек, а затем по ним должны быть проведены горизонтали с определенным сечением местности, например, через каждые 0,5 м. Величина этого сечения не зависит от величины превышений снимаемых характерных точек по отношению к той, на которой стоит теодолит. Поэтому по отношению к шкале, которая должна служить для определения превышений, интерес представляет абсолютная погрешность числа; так, например, в данном случае она не должна превышать 1 см, независимо от измеряемой величины.

В другом случае, если производится гранулометрический анализ грунта и шкала должна служить для вычисления диаметра частиц, то ошибка в определении этого диаметра для крупных песчаных частиц, размером около 0,8 мм, может достигать 0,01 мм, иначе говоря, действительный диаметр частицы может составлять 0,79 или 0,81 мм, так как это практически одно и то же. Если же речь идет о пылеватых частицах диаметром около 0,012 мм, то абсолютная погрешность в 0,01 мм недопустима, так как это означает, что действительный размер частицы может составлять от 0,022 (крупная пыль) до 0,002 мм (физическая глина). Поэтому в задачах такого рода интерес представляет относительная погрешность определения; так, например, в данном случае она не должна превышать 3% от измеряемой величины.

Известно, что любая *равномерная* шкала обладает постоянным значением предельной *абсолютной* погрешности ответа на любом участке шкалы; любая *логарифмическая* шкала имеет постоянное значение

---

\* В теории приближенных вычислений эти два термина определяются следующим образом: предельной абсолютной погрешностью называется возможно меньшее число  $\Delta$ , относительно которого можно быть уверенным, что его не превосходит абсолютная погрешность  $\alpha$  рассматриваемого приближенного числа, т. е.  $\alpha \leq \Delta$ . Предельной относительной погрешностью называется такая возможно меньшая величина  $\delta$ , за которую можно поручиться, что относительная погрешность  $\beta$  не может ее превосходить, т. е.  $\beta \leq \delta$ .

предельной *относительной* погрешности ответа на любом участке шкалы. Поэтому в первом случае, при обработке тахеометрических данных, должна применяться только равномерная шкала или достаточно приближающаяся к ней, а во втором случае, при обработке результатов градулометрического анализа грунтов,—логарифмическая шкала. Таким образом, каждый из основных видов функциональных шкал имеет свою область применения.

### Практическая оценка характера неравномерных шкал

Все шкалы, не являющиеся ни равномерными, ни логарифмическими, не обладают этим свойством постоянства значения предельных погрешностей определения (абсолютных или относительных) и поэтому возникает необходимость их оценки с этой точки зрения.

Для возможности такой оценки остальных видов шкал было введено представление о характеристике шкал; так называется относительная длина деления данной цены, рассматриваемая как функция переменной шкалы. Различаются равномерная и логарифмическая характеристики шкалы; в первом случае она определяется для делений постоянной абсолютной цены, а во втором—для делений постоянной относительной цены. Эти характеристики постоянны для равномерной и логарифмической шкал соответственно. Величина изменения этих характеристик для различных участков шкалы показывает, насколько данная шкала уклоняется от равномерной или логарифмической соответственно. Более подробное развитие этих идей содержится в литературе [11, 12].

Практически наиболее простой способ оценки характера рассматриваемой шкалы на каком-либо ее участке заключается в определении трех пометок на ней: двух пометок  $u_1$  и  $u_2$ , взятых по концам исследуемого участка шкалы, и одной пометки  $u_0$  точки, расположенной в середине этого участка.

Мерой приближения рассматриваемой шкалы к равномерной может служить выражение

$$i_p = \frac{u_1 + u_2}{2u_0}.$$

Для равномерной шкалы  $i_p = 1$ . Если  $i_p < 1$ , то шкала является расходящейся, если же  $i_p > 1$ , то она является сходящейся.

Мерой приближения рассматриваемой шкалы к логарифмической служит выражение

$$i_n = \frac{\sqrt{u_1 u_2}}{u_0}.$$

Для логарифмической шкалы  $i_n = 1$ . Если  $i_n < 1$ , то шкала сходится медленнее, чем логарифмическая, если же  $i_n > 1$ , то она сходится быстрее.

## § 2. ПРОЕКТИВНЫЕ ШКАЛЫ

### Характеристика проективных шкал

Проективные шкалы представляют собой такой вид изображения функциональной зависимости, при котором значение аргумента  $u$  дается в виде пометок, а значения функции  $f(u)$  равняются отношению, в котором точки с этими пометками делят данный отрезок прямой  $AB$ .

Характеристическим элементом проективных шкал является *параметр преобразования*  $p$ , представляющий собой частное от деления значения функции  $f(u)$  на отношение  $g$  между направленными отрезками, в котором пометка  $u$  делит длину  $d$  шкалы

$$p = \frac{f(u)}{g}, \quad (2.1)$$

где  $g = \frac{y}{y'}$ ,

$y$  и  $y'$  — направленные отрезки, отсчитываемые от концов отрезка  $AB$  до пометки  $u$  [19]. Отсюда получаем

$$p = f(u) \frac{y'}{y}. \quad (2.2)$$

Проективные шкалы получили свое название вследствие того, что они могут быть построены при центральном проектировании функциональных шкал на произвольную прямую. В зависимости от того, какие функциональные шкалы были использованы в качестве исходных, получаются различные виды проективных шкал. Поэтому положение пометок на проективных шкалах определяется не только характером исходной шкалы, но и параметрами, определяющими условия ее проектирования.

Аналитическим выражением проективных шкал [4] являются дробно-линейные функции относительно  $f(u)$

$$F(u) = \frac{q f(u) + r}{s f(u) + t}, \quad (2.3)$$

где  $s \neq 0$  и определитель

$$\begin{vmatrix} q & r \\ s & t \end{vmatrix} \neq 0.$$

Функции этого вида имеют важное значение в физике и технике при представлении эмпирических зависимостей.

В зависимости от вида исходной функции  $f(u)$  различаются следующие типы проективных шкал:

1. Проективные шкалы дробно-линейной функции

$$F(u) = \frac{qu + r}{su + t}.$$

Эта функция при  $q = t = 0$  переходит в функцию обратной пропорциональности

$$F(u) = \frac{C}{u}.$$

## 2. Проективные шкалы дробно-степенных функций\*

$$F(u) = \frac{qu^{\alpha} + r}{su^{\alpha} + t},$$

где  $\alpha$  — натуральное число.

Эта функция представляет собой один из видов рациональных функций; при  $\alpha = 1$  она переходит в дробно-линейную функцию.

## 3. Проективные шкалы дробно-тригонометрических функций

$$F(u) = \frac{q \sin \frac{u+r}{s}}{\sin \frac{u+t}{s}}, \quad F(u) = \frac{q \operatorname{tg} \frac{u+r}{s}}{\operatorname{tg} \frac{u+t}{s}}$$

и т. д.

А. А. Глаголев [1] дал следующую форму уравнений проективных шкал

$$y = \frac{k f(u)}{1 + k f(u)} d \quad \text{и} \quad y' = \frac{1}{1 + k f(u)} d,$$

где  $k$  — коэффициент проективной шкалы. Он представляет собой величину, обратную параметру преобразования,  $k = \frac{1}{p}$ .

Характер распределения пометок на проективной шкале, помимо вида функции  $f(u)$ , определяется длиной проективной шкалы  $d$  и величиной параметра преобразования  $p$ . При изменении этих величин распределение пометок изменяется.

Важно отметить, что описываемые в настоящем параграфе шкалы могут рассматриваться двояко. Они могут пониматься, как *функциональные шкалы функции*  $F(u)$ , и в этом случае принципиально ничем не отличаются от любых других функциональных шкал, как, например, степенных или логарифмических. Их можно также рассматривать как *проективные шкалы функции*  $f(u)$ ; только при таком их изучении они обнаруживают ряд важных свойств, которые позволяют их выделить в отдельный тип шкал, противопоставляемый остальным функциональным шкалам. Этот последний подход к шкалам функции  $F(u)$  имеет особенно важное значение в номографии; он четко выявился при исследовании номограмм для функции многих переменных.

## Возможность построения проективных шкал графическим методом

Важным свойством дробно-линейной функции является равенство ангармонических отношений четырех соответственных точек\*\*, что поз-

\* В отношении терминологии проективных шкал нет единогласия [1, 4]. В настоящей работе применен термин «проективные шкалы» для всех тех шкал, которые получаются путем центрального проектирования функциональных (в том числе и равномерной) шкал.

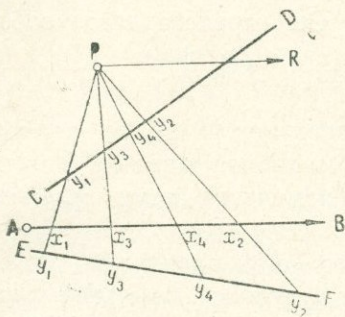
\*\* Ангармоническое или двойное отношение четырех точек  $A, B, C$  и  $D$ , расположенных на одной прямой, есть частное от деления отношения, в котором расстояние  $AB$  делится точкой  $C$  на отношение, в котором то же расстояние делится точкой  $D$ , т. е.  $CA/CB : DA/DB$ . Сокращенно оно обозначается символом  $(ABCD)$ . Ангармоническое отношение четырех точек не изменяется при проектировании из какого-либо центра на другую прямую. Поэтому четыре произвольных луча, выходя-

вселяет строить ее шкалу, пользуясь чисто геометрическими приемами [2, 5].

Если рассматривать положение точек на одной прямой  $AB$  (фиг. 2), как аргументы  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), а положение точек на второй прямой  $CD$  или  $EF$ , как их функции  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), то, в силу указанного свойства этой функции, получающиеся в результате центрального проектирования из точки  $P$  шкалы  $CD$  или  $EF$  являются проективными шкалами дробно-линейной функции, а между этими величинами установится двойное отношение четырех точек

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} : \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_4}.$$

Таким образом, ангармоническое, или двойное, отношение четырех точек является инвариантом дробно-линейной функции.



Фиг. 2

Это свойство дробно-линейной функции позволило разработать различные графические методы получения проективных шкал. Поэтому, несмотря на возможность построения проективных шкал функции по уравнениям того или иного вида, обычно применяется проективное преобразование шкал, производимое графическими методами\*.

И. Н. Денисюк следующим образом излагает вопрос о проективном преобразовании шкал\*\*»: «На фиг. 3 плоскость чертежа совмещена с плоскостью, проходящей через шкалу  $AC$  функции  $f$ , и шкалу  $AB$ , получающуюся ее проектированием из центра проекции  $P$ .  $A$  есть точка пересечения обеих шкал. Выберем проектирующую плоскость так, чтобы точка  $A$  совпадала с началом отсчета шкалы  $AC$ , тогда на шкале  $AB$  точка  $A$  будет соответствовать значению  $f = 0$ .

Через  $P$  проводим прямую, параллельную  $AC$ . Она пересечет прямую  $AB$  в точке  $B$ . Очевидно, что  $B$  соответствует значению  $f = \infty$ . Обозначим  $AB = d$ ;  $PB = z$ . Пусть на шкале  $AC$  функция отложена в

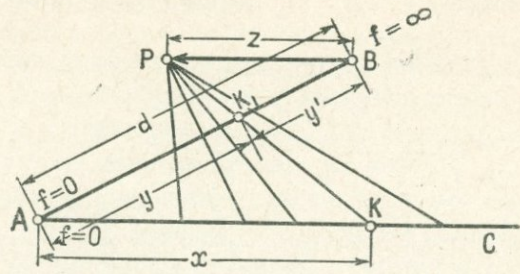
ших из центра проектирования и пересекающих две прямые, расположенные под углом друг к другу, образуют четыре пары точек, для которых существует равенство ангармонических отношений.

\* В качестве обратного примера можно привести номограммы к тахеометрическим формулам, составленные В. Н. Высоцким, в которых шкалы построены по их уравнениям.

\*\* Текст, заключенный в кавычки, и фиг. 3 и 4 взяты из последней работы И. Н. Денисюка [8]; лишь для единства изложения изменены некоторые буквенные обозначения, и добавлена стрелка у полюсного расстояния  $z$  (фиг. 3), которое нами рассматривается как вектор. Отрезок  $x$  представляет собой значение функции  $f(u)$ , отложенное в масштабе единицы.

масштабе единицы, тогда точка  $K$  шкалы  $AC$ , соответствующая значению функции  $f$ , перейдет при проектировании в точку  $K_1$  шкалы  $AB$ . Пусть  $K_1B = y'$ ;  $AK_1 = y$ . Очевидно,  $y + y' = d$ .

Каноническая форма проективного преобразования прямой шкалы



Фиг. 3

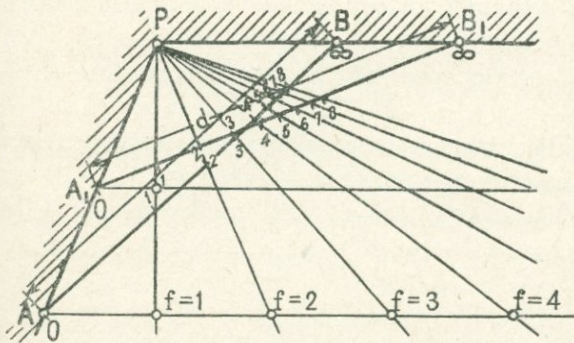
$$y' = \frac{d}{1 + \frac{x}{z}} \quad (2.4)$$

Имеем

$$y = \frac{d}{1 + \frac{z}{x}} \quad (2.5)$$

**Спектр шкалы. Его выбор.** Будем отрезок  $AB$  передвигать в плоскости чертежа так, как это показано на фиг. 4. При этом расстояние  $AB = d$  не изменится. Меняться будет только расстояние  $PB = z$ . Мы видим, что распределение делений на шкале будет при этом меняться. Поэтому параметр  $z$  в уравнениях (2.4) и (2.5) характеризует только распределение делений на шкале, или спектр шкалы. Мы  $z$  тоже будем называть спектром проективно преобразованной шкалы.

При увеличении спектра деления передвигаются слева направо, сбегаемость увеличивается. При уменьшении спектра деления передвигаются справа налево, сбегаемость уменьшается.



Фиг. 4

Из фиг. 3 видно, что в результате проективного преобразования шкала равномерная (по  $f$ ) превратилась в шкалу сходящуюся. Значит, при проективном преобразовании можно улучшить качество шкалы. Мы видим, что, варьируя  $z$ , можно менять

сбегаемость. В частности, можно подобрать  $z$  так, чтобы в данных пределах шкала наименее отличалась от логарифмической».

В настоящей работе применена несколько измененная терминология. Центр проекции  $P$  назван полюсом; этот термин был введен, по видимому, в 1924 г. Г. Швердтом [21]. Соответственно, вместо термина «спектр» мы применяем полюсное расстояние.

## Терминология проективных шкал

Ниже описываются некоторые термины, которые применяются или заново вводятся для проективных шкал в дополнение к имеющимся в литературе и к терминам, данным для функциональных шкал (§ 1).

*Первичной шкалой* назовем шкалу, служащую исходной при графическом построении проективной шкалы путем центрального проектирования. Коэффициент первичных шкал представляет собой вектор, направленный в сторону возрастания функции.

*Критическими точками* проективной шкалы называются точки, в которых значение функции делается равным нулю или стремится к бесконечности. Каждая шкала имеет по две критические точки. Критическую точку проективной шкалы, в которой значение функции первичной шкалы делается равным нулю, назовем *нулевой критической* точкой; она является началом проективной шкалы. Критическую точку, в которой значение функции первичной шкалы стремится к бесконечности, назовем *бесконечной критической* точкой; она является концом проективной шкалы. Отсюда следует, что проективная шкала направлена от нулевой критической точки к бесконечной.

*Длиной  $d$*  проективной шкалы назовем расстояние между критическими точками.

*Полюсным расстоянием  $z$*  проективной шкалы назовем вектор, имеющий началом конец проективной шкалы и концом—полюс ее. Знак полюсного расстояния зависит от направления вектора; если он направлен в ту же сторону, что и первичная шкала, то его знак положителен; если он направлен в противоположную сторону, то его знак отрицателен.

*Параметром преобразования\**  $p$  проективной шкалы мы назовем частное от деления значения функции на отношение между отрезками, в котором точка с соответствующей пометкой делит длину шкалы [19]. Отсюда видно, что параметр преобразования проективной шкалы—безразмерная величина.

*Приведенной длиной  $b$*  проективной шкалы назовем произведение параметра преобразования на длину проективной шкалы

$$b = pd. \quad (2.6)$$

Приведенная длина шкалы имеет знак параметра преобразования; ее размерность—L.

## Внутреннее и внешнее проектирование

Первичная шкала представляет собой прямую с помеченными точками, направленную в сторону возрастания функции. На шкале выделяется нулевая точка, представляющая особый интерес; в этой точке значе-

---

\* Термин «параметр преобразования» не следует смешивать с термином «параметр наилучшего преобразования», введенным М. В. Пентковским [12].

ние функции равняется нулю. Если функция такова, что ее наименьшее значение равняется нулю, то нулевая точка является началом первичной шкалы. Если же наименьшее значение функции отлично от нуля, то первичная шкала начинается в точке, положение которой относительно нулевой точки определяется наименьшим значением функции и коэффициентом шкалы.

При проектировании первичной шкалы  $AB$  из полюса  $P$  на прямую, идущую под углом к первичной шкале, могут представиться два случая\* положения этого носителя проективной шкалы (фиг. 2).

1. Носитель проективной шкалы  $CD$  пересекает луч  $PR$ , идущий из полюса  $P$  параллельно первичной шкале в направлении к ее бесконечной точке. Такой случай расположения проективной шкалы мы называем внутренним проектированием, а полученную шкалу—*внутренней проективной шкалой*.

2. Носитель проективной шкалы  $EF$  не пересекает луча  $PR$ , идущего из полюса  $P$  к бесконечной точке первичной шкалы. Такой случай расположения проективной шкалы мы называем внешним проектированием, а полученную шкалу—*внешней проективной шкалой*.

Носитель проективной шкалы может пересекать первичную шкалу в произвольной точке. Обычно носитель проективной шкалы проводят таким образом, чтобы он пересекал первичную шкалу в нулевой точке. Однако такое условие не является обязательным, и носитель проективной шкалы может пересекать первичную шкалу как области положительных, так и отрицательных абсцисс.

Ниже будут подробно рассмотрены уравнения внутренних и внешних проективных шкал, полученных при проектировании на прямые, проходящие через нулевые точки первичных шкал, а затем вкратце рассмотрен общий случай проектирования на прямые, не проходящие через нулевые точки.

### Уравнение внутренней проективной шкалы

Найдем вид уравнения проективной шкалы, полученной при внутреннем проектировании на прямую, проходящую через нулевую точку первичной шкалы. Установим соотношение между распределением пометок на шкале  $AB$  и величиной полюсного расстояния  $z$ , т. е. составим уравнение шкалы  $AB$ . Проведем произвольный луч из полюса  $P$  к какой-либо точке  $K$  первичной шкалы  $AC$  (фиг. 3); пусть этот луч пересекается со шкалой  $AB$  в точке  $K_1$ . Обозначим отрезок  $AK$  через  $x$ , а отрезок  $AK_1$ , отсекаемый лучом  $PK$  на проективной шкале  $AB$ , через  $y$ .

Из подобия треугольников  $PBK_1$  и  $AKK_1$  имеем

$$y = \frac{xd}{x+z},$$

где  $d$ —длина шкалы  $AB$ .

\* См. также стр. 49.

Если на прямой  $AC$  построена какая-либо функциональная шкала  $f(u)$ , то величина отрезка  $x$  связана со значением функции выражением

$$x = \frac{1}{a} f(u).$$

Подставляя это значение в предыдущее выражение и производя преобразование, получим

$$y = \frac{f(u) d}{f(u) + az}. \quad (2.7)$$

Сравнивая это выражение с (2.3), убеждаемся, что оно представляет уравнение проективной шкалы функции  $F(u)$ , начало которой совпадает с началом шкалы  $f(u)$ . Действительно, из (2.3) при  $f(u) = 0$  и при  $r=0$  имеем  $F(u)=0$ ; значения остальных величин выражения (2.3) следующие:  $q = d$ ;  $s = 1$ ;  $t = az$ .

Итак, для построения внутренней проективной шкалы функции, выражаемой уравнением (2.7), по заданным: первичной функции  $f(u)$ , длине шкалы  $d$ , полюсному расстоянию  $z$  и коэффициенту первичной шкалы  $a$  нужно построить шкалу  $AC$  функции  $f(u)$ , пользуясь заданным коэффициентом шкалы  $a$  (фиг. 3); под произвольным углом к этой шкале в нулевой точке  $A$  провести прямую  $AB$  длиной  $d$ ; через точку  $B$  этой прямой провести прямую  $PB$ , параллельную прямой  $AC$ ; отложить на прямой  $PB$  в сторону, противоположную направлению первичной шкалы  $AC$ , полюсное расстояние  $z$  и получить таким образом полюс  $P$ ; провести лучи  $PK$  из точки  $P$  к пометкам  $K$  шкалы функции  $f(u)$  и на пересечении  $K_1$  этих лучей с прямой  $AB$  надписать те же пометки, что и на шкале  $AC$ .

Если отсчет по шкале  $AB$  ведется от точки  $B$ , в которую спроектировалась пометка, соответствующая  $f(u) \rightarrow \infty$ , то уравнение шкалы примет вид  $y' = d - y$ . Учитывая, что отрезок  $y'$  направлен в сторону, противоположную положительному направлению проективной шкалы от  $A$  до  $B$ , перед уравнением шкалы необходимо поставить знак минус. Подставив значение  $y$  из (2.7), получаем

$$y' = - \frac{azd}{f(u) + az}. \quad (2.8)$$

Пометки точек проективной шкалы в крайних критических точках будут составлять: 0 в точке  $A$  и  $\infty$  в точке  $B$ . При изменении  $f(u)$  от 0 до  $\infty$  величина  $\frac{f(u)}{f(u) + az}$  изменяется от 0 до 1; так как это отношение является множителем выражения (2.7), то отсюда следует, что длина  $d$  проективной шкалы является модулем шкалы функции  $F(u)$ .

Подставляя (2.7) и (2.8) в выражение (2.2), получим для внутренних проективных шкал

$$p = -az, \quad (2.9)$$

где  $z$ —модуль вектора полюсного расстояния. Отсюда следует, что *параметры преобразования внутренних проективных шкал всегда являются отрицательными величинами.*

Величина параметра преобразования внутренних проективных шкал может колебаться от нуля (когда  $z=0$  и вся шкала сгущается в бесконечной критической точке  $B$ ) до минус бесконечности (когда  $z \rightarrow \infty$  и вся шкала сгущается в нулевой критической точке  $A$ ).

Положительное направление шкал отвечает направлению возрастания функции; поэтому начало внутренней проективной шкалы находится в нулевой критической точке, а конец ее—в бесконечной. Отсюда, внутренние проективные шкалы направлены от точки  $A$  к точке  $B$ .

В соответствии с (2.9) переписываем уравнение внутренней проективной шкалы, отсчитанное от нулевой критической точки

$$y = \frac{f(u)d}{f(u) - p}. \quad (2.10)$$

Уравнение шкалы, отсчитанное от бесконечной критической точки, получаем из (2.8), применяя (2.9),

$$y' = \frac{pd}{f(u) - p} \quad (2.11)$$

или, подставляя значение  $b$  из (2.6), находим:

$$y' = \frac{b}{f(u) - p}. \quad (2.12)$$

Важно отметить, что если первичная шкала является *равномерной*,

$$x = \frac{u}{a},$$

то проективная шкала, построенная по уравнениям от (2.10) до (2.12), на всем интервале  $0 < u < \infty$  является *сходящейся*.

Рассмотрим случай построений проективных шкал таких функций, которые ни при каких значениях аргумента не принимают бесконечных значений, как, например, функция синуса. Первичная шкала таких функций имеет конечную длину, определяемую из вида функции и предельных значений аргумента по формуле

$$h = \frac{1}{a} [f(u)_2 - f(u)_1].$$

Пусть на носителе  $AC$  построена первичная шкала такой функции и пусть точки  $A$  и  $K$  определяют собой начало и конец этой шкалы (фиг. 3). При проектировании такой шкалы  $AK$  на прямую  $AB$  из полюса  $P$  получается проективная шкала  $AK_1$ . В таких проективных шкалах следует различать фактическую длину проективной шкалы  $AK_1$  и расчетную длину  $AB=d$ , входящую в уравнение шкалы (2.10). Так, например, в случае построения проективной шкалы синуса уравнение этой шкалы будет

$$y = \frac{\sin u}{\sin u - p} d$$

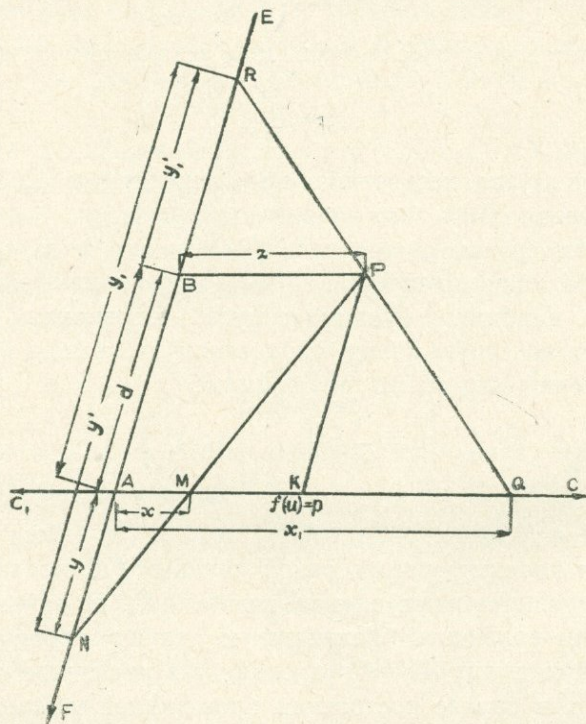
и фактическая длина ее  $AK_1$  составит

$$y = \frac{d}{1-p}$$

Тем же путем надо действовать и при построении проективных шкал тех функций, которые ни при каких значениях аргумента не принимают нулевых значений, как, например, функция секанса. В этом случае начало первичной шкалы будет в некоторой точке  $K$  (фиг. 3), абсцисса  $x$  которой отвечает наименьшему значению функции. Фактическая длина проективной шкалы секанса будет равна  $K_1B$ .

### Уравнение внешней проективной шкалы

Рассмотрим функциональные зависимости, характеризующие внешнее проектирование на прямую, проходящую через нулевую точку  $A$  первичной шкалы  $AC$  (фиг. 5). Через точку  $A$  этой шкалы проведем прямую  $EF$  под произвольным углом к прямой  $AC$  и будем проектировать на нее шкалу  $AC$  из некоторого полюса  $P$ , выбранного так, чтобы прямая  $EF$  не пересекала луча, идущего из полюса к бесконечной точке первичной шкалы. Отметим на шкале  $AC$  точку  $K$ , в которой значение функции равняется параметру преобразования,  $f(u) = p$ . Пусть произвольная точка  $M$  на шкале  $AC$  соответствует значению  $f(u) < p$ .



Фиг. 5

Луч  $PM$ , проведенный из полюса к точке  $M$  первичной шкалы, проектируется на прямую  $EF$  в точке  $N$ . Обозначим расстояние точки  $M$  от начала шкалы  $AC$  через  $x$ , а длину отрезка  $AN$  через  $y$ . Проведем через полюс  $P$  прямую  $PB$ , параллельную первичной шкале  $AC$ , до пересечения с прямой  $EF$  в точке  $B$  и обозначим длину отрезка  $PB$  через  $z$ .

Из подобия треугольников  $PBN$  и  $MAN$  имеем

$$y = \frac{xd}{z-x},$$

где  $d$  — длина отрезка, заключенного между точками  $A$  и  $B$ .

Если на прямой  $AC$  построена какая-либо функциональная шкала  $f(u)$ , то

$$x = \frac{1}{a} f(u).$$

Подставляя это значение в предыдущее выражение и производя преобразование, находим уравнение шкалы  $EF$

$$y = - \frac{f(u)d}{f(u) - az}. \quad (2.13)$$

Найдем критические точки и полюсное расстояние этой проективной шкалы.

Критическими точками являются те точки проективной шкалы  $EF$ , которые соответствуют значениям первичной функции  $f(u)$ , равным нулю и стремящимся к бесконечности. Имеем, при  $f(u) = 0$ ,  $y = 0$ , т. е. нулевой критической точкой является точка  $A$ . Деля числитель и знаменатель выражения (2.13) на  $f(u)$ , избавляемся от неопределенности этого выражения при  $f(u) \rightarrow \infty$ . Отсюда, при  $f(u) \rightarrow \infty$  находим  $y = -d$ , т. е. бесконечной критической точкой является точка  $B$ . Тогда полюсным расстоянием будет вектор, имеющий началом бесконечную критическую точку  $B$  и концом полюс  $P$ .

Если уравнение проективной шкалы отсчитывается от бесконечной критической точки  $B$ , то из фиг. 5 видно, что  $y' = d + y$ , или, применяя (2.13), находим

$$y' = - \frac{azd}{f(u) - az}. \quad (2.14)$$

Подставив (2.13) и (2.14) в (2.2), получим для внешних проективных шкал

$$p = az. \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что *параметры преобразования внешних проективных шкал всегда являются положительными величинами.*

Величина параметра преобразования внешних проективных шкал может колебаться от нуля (когда  $z = 0$  и вся шкала сгущается в критической точке  $A$ ) до плюс бесконечности (когда  $z \rightarrow \infty$  и вся шкала сгущается в критической точке  $B$ ).

Пользуясь уравнениями (2.6) и (2.15), переписываем (2.13) и (2.14) так:

$$y = -\frac{f(u)d}{f(u) - p} \quad (2.16)$$

и

$$y' = -\frac{pd}{f(u) - p} \quad (2.17)$$

или

$$y' = -\frac{b}{f(u) - p} \quad (2.18)$$

Так как в рассматриваемом случае  $0 < f(u) < p$ , то знаменатель уравнений (2.16) до (2.18) должен быть отрицательным; поэтому величины  $y$  и  $y'$  являются положительными и должны откладываться от точек  $A$  и  $B$ , соответственно, в направлении к  $F$ .

В случае, если  $f(u) > p$ , необходимо провести луч  $QP$  от произвольной точки  $Q$  первичной шкалы (фиг. 5) до пересечения с прямой  $EF$ . Рассматривая треугольники  $PBR$  и  $QAR$  и действуя аналогичным путем, получим на основании геометрических соотношений

$$y_1 = \frac{f(u)d}{f(u) - p} \quad \text{и} \quad y_1' = \frac{pd}{f(u) - p}$$

Так как  $0 < p < f(u) < \infty$ , то знаменатель этих выражений должен быть положительным и, следовательно, величины  $y_1$  и  $y_1'$  также получаются положительными. Поскольку эти отрезки должны откладываться в направлении, обратном положительному направлению внешней проективной шкалы (от  $B$  к  $E$ , фиг. 5), то перед этими выражениями необходимо поставить знак минус. Тогда они принимают вид уравнений от (2.16) до (2.18), полученный для случая  $f(u) < p$ .

На основании уравнений (2.9) и (2.15) заключаем, что если проективная шкала проходит через нулевую точку первичной шкалы, то параметр преобразования  $p$  проективной шкалы равняется произведению коэффициента  $a$  первичной шкалы и полюсного расстояния  $z$  проективной шкалы, с учетом знака полюсного расстояния.

Анализируя уравнение (2.16), устанавливаем следующее. При возрастании  $f(u)$  в пределах  $0 < f(u) < p$  величина  $y$  также возрастает, пометки проективной шкалы пробегают все значения от критической точки  $A$  в сторону возрастания значения  $y$ . При  $f(u) = p$  значение  $y$  является бесконечно большим или, иными словами, значению функции первичной шкалы, равному параметру преобразования внешней проективной шкалы, соответствует бесконечно удаленная точка проективной шкалы. При дальнейшем увеличении значения  $f(u)$  величина  $y$  становится отрицательной, т. е. пометки проективной шкалы исчезают в положительном направлении к  $F$  и возникают со стороны отрицательных абсцисс—со стороны  $E$ . При возрастании  $f(u)$  в пределах  $p < f(u) < \infty$ , абсолютная величина  $y$  постепенно уменьшается и в пределе, при  $f(u) \rightarrow \infty$ , она делается равной  $-d$ , т. е. спроектированная точка сливается с бесконечной критической точкой  $B$ .

Таким образом, внешние проективные шкалы содержат бесконечно удаленную точку; они направлены в сторону возрастания функции от нулевой критической точки  $A$  в сторону  $F$  по направлению к бесконечно удаленной точке, а затем с другой стороны пространства, от  $E$  к бесконечной критической точке  $B$  (фиг. 5). Отсюда видно, что положительные направления внутренних и внешних проективных шкал взаимно противоположны.

Необходимо отметить, что если первичная шкала является *равномерной*  $x = \frac{u}{a}$ , то внешняя проективная шкала в интервале  $0 < f(u) < p$  является *расходящейся*, а в интервале  $p < f(u) < \infty$  — *сходящейся*. Как известно, расходящиеся шкалы обладают наименее удовлетворительным распределением величины относительной погрешности вдоль шкалы. Поэтому только в тех случаях, когда первичная шкала является сходящейся, в результате внешнего проектирования начальных ее участков, в интервале  $0 < f(u) < p$  могут получиться удобные для практических целей проективные шкалы. По этой же причине большое практическое значение имеют конечные участки внешних проективных шкал в интервале  $p < f(u) < \infty$ .

### Общий случай проектирования

В общем случае построения проективной шкалы носитель ее может не проходить через нулевую точку первичной шкалы. Как и в рассмотренном выше частном случае прохождения носителя через эту точку, построение может быть произведено при внутреннем и внешнем проектировании. Последовательно рассмотрим эти случаи.

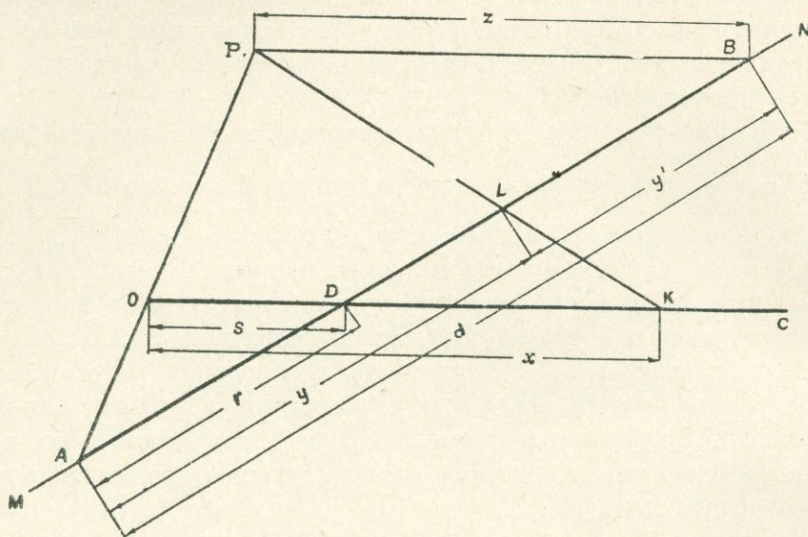
Внутреннее проектирование имеет место, когда луч от полюса  $P$  к бесконечной точке первичной шкалы пересекает проективную шкалу. Здесь могут представиться два случая расположения проективной шкалы: в одном случае она пересекает первичную шкалу в области положительных абсцисс, а в другом — отрицательных.

Допустим, что абсцисса точки первичной шкалы, в которой ее пересекает проективная шкала, является положительной величиной (фиг. 6).

Пусть  $OC$  — первичная шкала функции  $f(u)$  с коэффициентом шкалы  $a$ ,  $MN$  — носитель проективной шкалы, пересекающий первичную шкалу в точке  $D$  с абсциссой  $s$ , а  $P$  — полюс. Нулевую критическую точку  $A$  проективной шкалы находим, проводя из полюса  $P$  луч  $PO$  и продолжая его до пересечения с носителем проективной шкалы, а для нахождения бесконечной критической точки  $B$  проводим прямую  $PB$  параллельно первичной шкале  $OC$ . По предыдущему, отрезок  $AB$  представляет собой длину  $d$  проективной шкалы. Пусть пометка точки  $D$  равна  $(u)_0$ .

Проводим из полюса  $P$  луч  $PK$  к произвольной точке  $K$  первичной шкалы; пусть этот луч пересекает проективную шкалу в точке  $L$ . Обоз-

начим расстояние точки  $L$  от нулевой  $A$  и бесконечной  $B$  критических точек через  $y$  и  $y'$ , а отрезок  $AD$ , отсекаемый лучом  $PA$  на проективной шкале, через  $r$  (фиг. 6).



Фиг. 5

Из подобия треугольников  $PBL$  и  $LKD$  имеем

$$y = \frac{dx - ds + zr}{z - s + x}. \quad (2.19)$$

Из подобия треугольников  $PAB$  и  $OAD$  находим

$$r = \frac{ds}{z}.$$

Подставляя это значение в (2.19) и имея в виду, что  $x = \frac{f(u)}{a}$  и  $s = \frac{f(u)_0}{a}$ , получаем уравнение проективной шкалы, отсчитанное от нулевой критической точки

$$y = \frac{f(u)}{f(u) + az - f(u)_0} d. \quad (2.20)$$

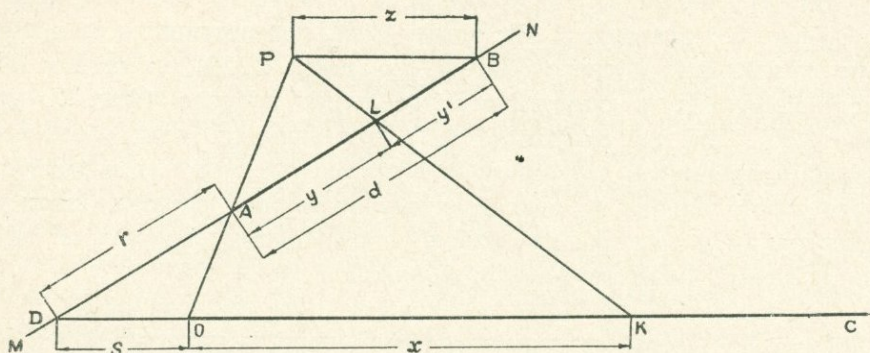
Уравнение шкалы, отсчитанное от бесконечной критической точки, будет иметь вид  $y' = d - y$  или

$$y' = - \frac{az - f(u)_0}{f(u) + az - f(u)_0} d. \quad (2.21)$$

Здесь впереди поставлен знак минус, так как отрезок  $y'$  направлен в сторону, обратную положительному направлению проективной шкалы (также у ур. 2.25)

Подставив (2. 20) и (2. 21) в выражение (2. 2), получим для случая, когда внутренняя проективная шкала пересекает первичную шкалу в области положительных абсцисс,

$$p = -az + f(u)_0. \quad (2.22)$$



Фиг. 7

Рассмотрим теперь случай, когда абсцисса точки первичной шкалы, в которой ее пересекает проективная шкала, является отрицательной величиной, т. е.  $f(u)_0 < 0$  (фиг. 7). Применяя те же обозначения, записываем из подобия треугольников  $FBL$  и  $LKD$

$$y = \frac{dx + ds - zr}{z + s + x}. \quad (2.23)$$

Из подобия треугольников  $PAB$  и  $OAD$  имеем

$$r = \frac{ds}{z}.$$

Подставляя это значение в (2. 23) и имея в виду, что  $x = \frac{f(u)}{a}$  и  $s = \frac{f(u)_0}{a}$ , получаем уравнение проективной шкалы, отсчитанное от нулевой критической точки,

$$y = \frac{f(u)}{f(u) + az + f(u)_0} d. \quad (2.24)$$

Уравнение проективной шкалы, отсчитанное от бесконечной критической точки, будет иметь вид:  $y' = d - y$  или

$$y' = - \frac{az + f(u)_0}{f(u) + az + f(u)_0} d. \quad (2.25)$$

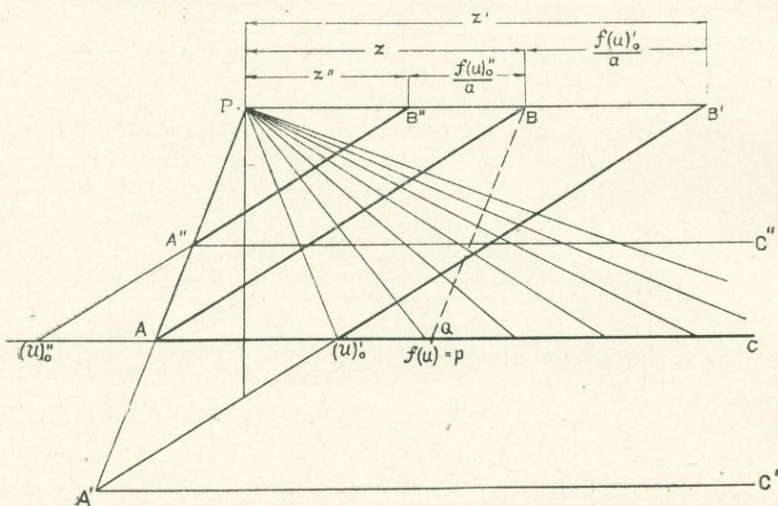
Подставив (2. 24) и (2. 25) в выражение (2. 2), получим для случая, когда внутренняя проективная шкала пересекает первичную шкалу в области отрицательных абсцисс,

$$p = -az - f(u)_0. \quad (2.26)$$

Легко видеть, что если переписать уравнения проективных шкал (2. 20) и (2. 21), используя выражение (2.22), или уравнения шкал

(2. 24) и (2. 25), используя выражение (2. 26), то получим знакомые уравнения (2. 10) и (2. 11) внутренних проективных шкал.

Для обобщения результатов, полученных для трех случаев расположения внутренней проективной шкалы, соединим их на одном чертеже (фиг. 8): шкалу  $AB$ , пересекающую первичную шкалу в нулевой точке (фиг. 3, уравнение 2. 9); шкалу  $A'B'$ , пересекающую ее в области положительных абсцисс (фиг. 6, уравнение 2. 22), и шкалу  $A''B''$ , пересекающую ее в области отрицательных абсцисс (фиг. 7, уравнение 2.26). Эти же значки (' и '') применим и для обозначения остальных элементов указанных шкал. Заметим, что для возможности такого сопоставления во всех трех случаях угол наклона шкал был принят одним и тем же; как известно, величина этого угла не играет роли и может быть взята произвольной.



Фиг. 8

Рассматривая полюсные расстояния этих трех проективных шкал (фиг. 8), заключаем, что они связаны соотношениями, вытекающими из упомянутых уравнений:

$$\text{из (2. 9)} \quad z = -\frac{p}{a};$$

$$\text{из (2. 22)} \quad z' = -\frac{p}{a} + \frac{f(u)_0'}{a} = z + \frac{f(u)_0'}{a};$$

$$\text{из (2. 26)} \quad z'' = -\frac{p}{a} - \frac{f(u)_0''}{a} = z - \frac{f(u)_0''}{a}.$$

Рассматривая полюс  $P$  с расходящимися из него лучами, и три параллельные проективные шкалы  $AB$ ,  $A'B'$  и  $A''B''$ , замечаем, что эти шкалы имеют различную длину, но одинаковые значения параметра преобразования  $p=p'=p''$ , так как любой луч делит все эти шкалы в одном и том же отношении; поэтому параметр преобразования любой

из этих шкал равняется параметру преобразования шкалы, проходящей через нулевую точку первичной шкалы. Эти одинаковые значения параметра преобразования  $p$  шкал  $AB$ ,  $A'B'$  и  $A''B''$  можно представить себе как произведения полюсных расстояний  $z$ ,  $z'$  и  $z''$  и коэффициентов  $a$ ,  $a'$  и  $a''$  первичных шкал  $AC$ ,  $A'C'$  и  $A''C''$ , соответственно (фиг. 8).

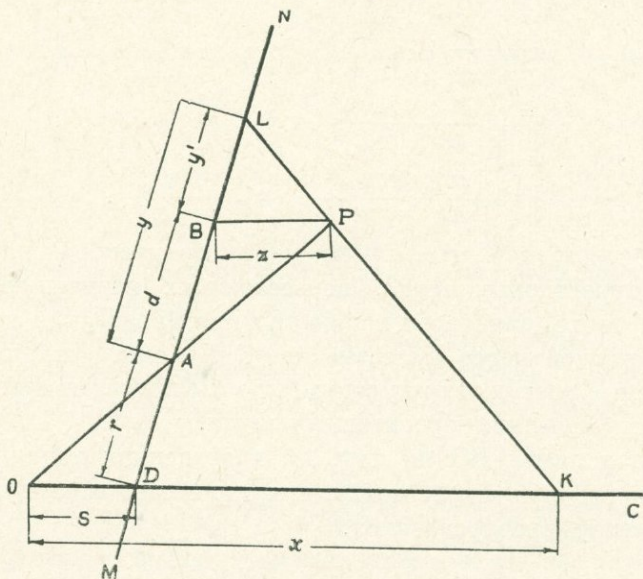
$$p = az = a'z' = a''z''.$$

Отсюда видно, что в случае, если проективная шкала пересекает первичную шкалу не в ее нулевой точке, то параметр преобразования этой шкалы равняется произведению коэффициента первичной шкалы на величину полюсного расстояния такой фиктивной проективной шкалы, которая имеет тот же наклон, что и рассматриваемая, но проходит через нулевую точку первичной шкалы.

На фиг. 8 пунктирная линия  $BQ$ , проведенная параллельно  $PA$ , отсекает на шкале  $AC$  точку, в которой значение функции равняется параметру преобразования.

Перейдем к случаю внешнего проектирования; такое проектирование имеет место, когда луч от полюса к бесконечной точке первичной шкалы не пересекает проективную шкалу. Ограничимся рассмотрением сходящегося участка внешней проективной шкалы, пересекающей первичную шкалу в области положительных абсцисс (фиг. 9). Применим те же обозначения, которые были приняты для случая внутреннего проектирования (фиг. 6). Из подобия треугольников  $PBL$  и  $LKD$  находим

$$y = \frac{dx - ds + zr}{x - z - s}. \quad (2.27)$$



Фиг. 9

Из подобия треугольников  $PAB$  и  $ODA$  имеем

$$r = \frac{ds}{z}.$$

Подставляя это выражение в (2.27) и имея в виду, что  $x = \frac{f(u)}{a}$  и  $s = \frac{f(u)_0}{a}$ , получаем уравнение проективной шкалы, отсчитанное от нулевой критической точки,

$$y = - \frac{f(u)}{f(u) - az - f(u)_0} d. \quad (2.28)$$

Знак минус перед дробью показывает, что отсчет величины  $y$  ведется в направлении, обратном положительному направлению шкалы.

Уравнение шкалы, отсчитанное от бесконечной критической точки, будет иметь вид  $y' = d + y$  или

$$y' = - \frac{az + f(u)_0}{f(u) - az - f(u)_0} d. \quad (2.29)$$

Подставив (2.28) и (2.29) в выражение (2.2), получим для случая, когда внешняя проективная шкала пересекает первичную шкалу в области положительных абсцисс,

$$p = az + f(u)_0. \quad (2.30)$$

Действуя тем же путем, можно было бы найти, что если носитель внешней проективной шкалы пересекает первичную шкалу в области отрицательных абсцисс, то параметр преобразования составит

$$p = az - f(u)_0. \quad (2.31)$$

Из уравнений (2.15), (2.30) и (2.31) находим соотношения между полюсными расстояниями, иллюстрируемые фиг. 10, составленной аналогично фиг. 8:

$$\text{из (2.15)} \quad z = \frac{p}{a};$$

$$\text{из (2.30)} \quad z' = \frac{p}{a} - \frac{f(u)_0'}{a} = z - \frac{f(u)_0'}{a};$$

$$\text{из (2.31)} \quad z'' = \frac{p}{a} + \frac{f(u)_0''}{a} = z + \frac{f(u)_0''}{a}.$$

Таким образом, и в этом случае параметр преобразования любой из внешних проективных шкал, пересекающих первичную шкалу в произвольной точке, равняется параметру преобразования проективной шкалы, проходящей через нулевую точку первичной шкалы.

Аналогичные рассуждения можно было бы привести и для расходящегося участка внешних проективных шкал.

Пунктирная линия  $PQ$  на фиг. 10, проведенная параллельно  $AB$ , отсекает на первичной шкале точку, в которой значение функции равняется параметру преобразования.

### Каноническая форма уравнений проективных шкал

На основании изложенного, можно записать каноническую форму уравнений проективных шкал, отсчитанных от нулевой критической

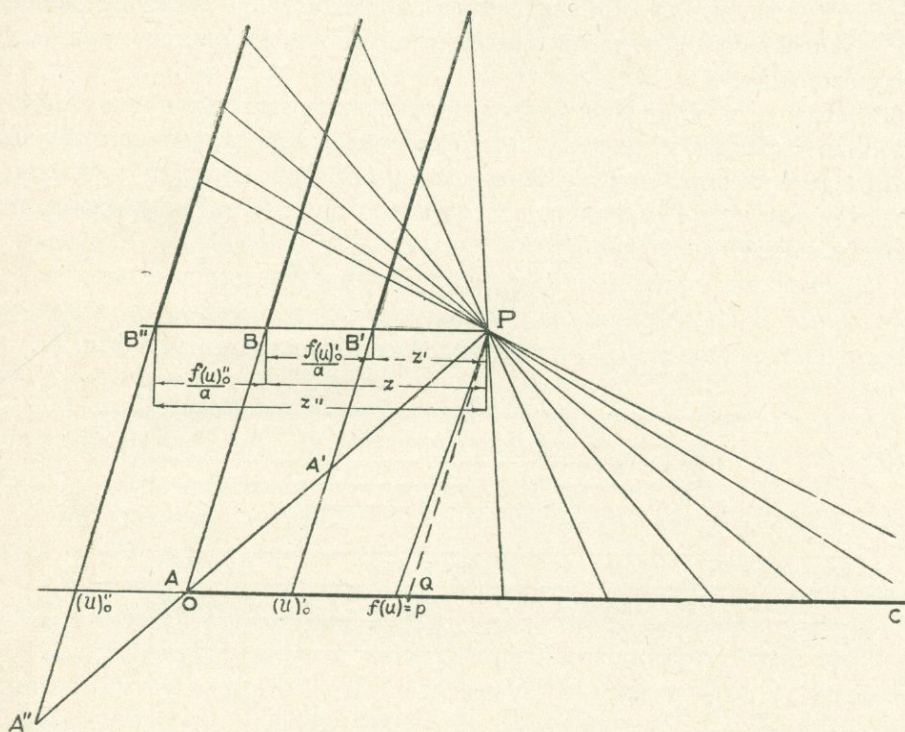
точки

$$y = \pm \frac{f(u)d}{f(u) - p} \quad (2.32)$$

и от бесконечной критической точки

$$y' = \pm \frac{b}{f(u) - p}, \quad (2.33)$$

где знак плюс отвечает внутренней проективной шкале, а минус — внешней. Величины  $p$  и  $b$ , входящие в эти уравнения, берутся со своими знаками.



Фиг. 10

Из последнего уравнения можно видеть, что если приведенная длина  $b=pd$  проективной шкалы остается постоянной и уменьшается параметр преобразования, делаясь в пределе равным нулю, то длина такой шкалы увеличивается и стремится к бесконечности. Нулевая критическая точка шкалы удаляется в бесконечность и уравнение шкалы принимает вид

$$y' = \pm \frac{b}{f(u)}, \quad (2.34)$$

т. е. и внутренняя и внешняя проективные шкалы переходят в функциональные шкалы функции обратной пропорциональности. В этом случае приведенная длина проективной шкалы переходит в модуль функциональной шкалы. Этот модуль равен расстоянию от бесконечной критической точки шкалы до той точки шкалы, в которой значение функции равняется единице.

### Центр проективной шкалы

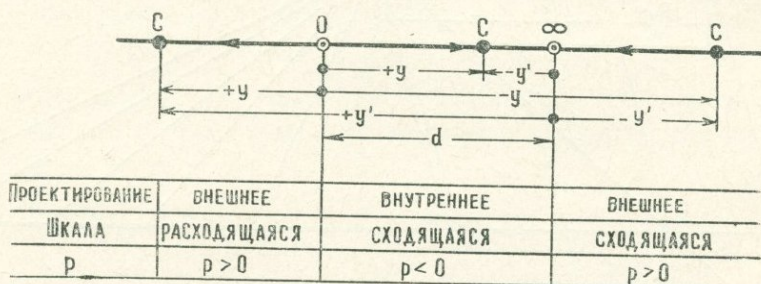
Точка проективной шкалы, в которой значение функции равняется единице, представляет известный интерес; эту точку проективной шкалы мы называем ее *центром*. Из (2. 2) видно, что при  $f(u)_c = 1$

$$p = \frac{u_c'}{u_c}, \quad (2.35)$$

т. е. центр проективной шкалы делит длину шкалы на два направленных отрезка; отношение расстояния центра от бесконечной критической точки к расстоянию от нулевой критической точки равняется параметру преобразования.

Отрезки  $u_c$  и  $u_c'$  во внутренних проективных шкалах направлены в различные стороны и поэтому знак параметра преобразования отрицательный. Во внешних проективных шкалах оба отрезка  $u_c$  и  $u_c'$  направлены в одну и ту же сторону и поэтому знак параметра преобразования положительный.

Направления проективных шкал при внутреннем и внешнем проектировании и правило знаков для определения параметров преобразования по положению центра  $C$  проективной шкалы показаны на фиг. 11.



Фиг. 11

### § 3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ШКАЛ

Хотя градуирование шкалы заданной функции в нужном масштабе и не представляет собой принципиальных трудностей и считается известным, должны быть указаны некоторые приемы, облегчающие это построение.

Задача ставится следующим образом: дана функция и пределы значения переменной; требуется построить шкалу при данном значении коэффициента шкалы. Среди различных методов построения функциональных шкал можно указать следующие:

1. *Построение шкалы по ее уравнению*; этот общеизвестный способ применяется в самом общем случае, когда не могут быть предложены более простые методы.

2. *Копирование готовых шкал* применяется в тех случаях, когда в распоряжении имеется готовая шкала данной функции в данных пределах переменной и при данном коэффициенте шкалы.

3. *Графические методы градуирования шкал* применяются при наличии шкалы данной функции и в данных пределах переменной, но при другом значении коэффициента шкалы.

4. *Фотографический метод градуирования шкал* может применяться в тех же случаях, в которых применяются и графические методы.

Рассмотрим подробнее три последних метода.

### Копирование готовых шкал

При наличии *готовых шкал надлежащего качества* этот способ является наиболее простым и точным, и к нему нужно по возможности прибегать; большой вклад в этот вопрос был сделан И. Н. Денисюком.

Иногда высказывается взгляд на неприемлемость копирования готовых шкал вследствие меньшей точности этого приема по сравнению с построением по уравнениям шкал. Такая точка зрения не выдерживает критики, так как в любом случае при построении шкалы по уравнению вычисленные значения расстояния от начальной точки представляют собой отрезки, которые должны откладываться в некотором масштабе; эти отрезки получаются с масштабных линеек и, следовательно, построение шкал по уравнениям ничем не точнее.

Практически копирование может применяться при построении только равномерных и логарифмических шкал. Для равномерных шкал могут служить различные масштабные линейки, находящие применение в чертежной и геодезической практике, а для логарифмических шкал — шкалы, имеющиеся на обеих сторонах логарифмических линеек.

Остановимся подробнее на этом последнем случае, как более сложном и менее известном.

Для наших целей наиболее пригодны широко распространенные общетехнические линейки\*. Нашей промышленностью выпускаются логарифмические линейки трех размеров; градуированная часть этих линеек имеет длину 125, 250 и 500 мм. Мы их называем карманной, обыкновенной и большой линейкой соответственно. Встречаются также прецизионные логарифмические линейки, полная длина шкалы которых равна 1000 мм, и карманные линейки со шкалами длиной 150 мм.

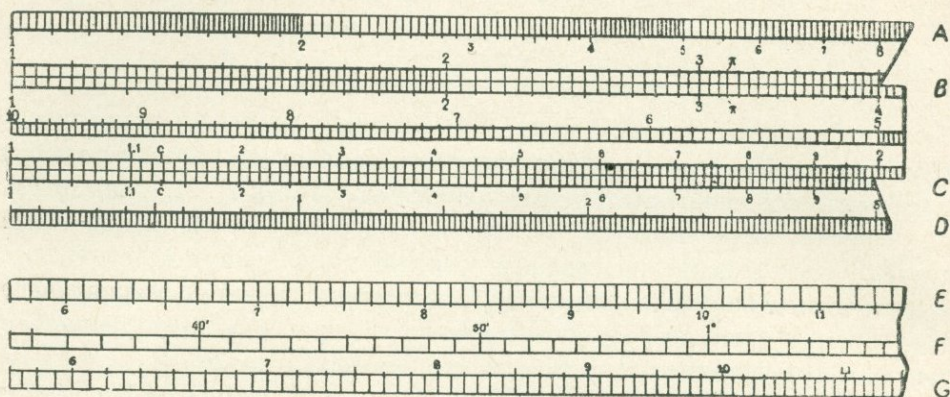
На лицевой стороне общетехнических линеек имеется несколько шкал, из которых интерес представляют следующие четыре (фиг. 12 вверху).

Шкала *A*, расположенная сверху, состоящая из трех одинаковых интервалов и служащая для вычисления кубов чисел; она называется кубической шкалой.

Две тождественные шкалы *B*, расположенные под кубической шкалой, одна из которых находится на корпусе линейки, а другая — на движущейся части линейки или ее движке. Эти шкалы состоят из двух одинаковых интервалов и служат для вычисления квадратов чисел; они называются квадратичными шкалами.

\* В некоторых случаях могут найти применение и специальные логарифмические линейки, как-то: электротехнические, химические, строительные и т. д.; на этих случаях не будем останавливаться.

Две тождественные шкалы *C*, расположенные ниже квадратичных шкал\*, одна из которых находится на движке, а другая—на корпусе. Эти шкалы имеют один интервал и служат для обычных вычислений—умножения и деления. Они называются нормальными шкалами.



Фиг. 12

Шкала *D*, расположенная под нормальными шкалами и служащая для вычисления мантисс десятичных логарифмов; она имеет также один интервал и называется шкалой логарифмов чисел.

Нормальная, квадратичная и кубичная шкалы являются логарифмическими шкалами, последняя же шкала логарифмов чисел—равномерная.

Интервал логарифмической функции для нормальной шкалы *C* равен единице, для квадратичной шкалы *B* равен двум и для кубичной шкалы *C* равен трем.

На оборотной стороне движка логарифмической линейки имеются три шкалы логарифмов тригонометрических функций (фиг. 12 внизу):

шкала *E* синусов углов (*Sin*),

шкала *F* синусов и тангенсов малых углов (*S T*),

шкала *G* тангенсов углов (*Tg*).

Верхняя шкала *E* служит для вычисления синусов углов между  $5^{\circ}44'$  ( $\lg \sin 5^{\circ}44'21'' = -1$ ) и  $90^{\circ}$  ( $\lg \sin 90^{\circ} = 0$ ), следовательно и для косинусов углов, дополнительных до  $90^{\circ}$ , т. е. в пределах между  $0^{\circ}$  и  $84^{\circ}16'$ ;

средняя шкала *F* служит для вычисления синусов и тангенсов малых углов в пределах между  $0^{\circ}34'23''$  ( $\lg \sin 0^{\circ}34'22'',7 = \lg \operatorname{tg} 0^{\circ}34'22'',6 = -2$ ) и  $5^{\circ}44'$ , а следовательно, для косинусов углов от  $84^{\circ}15'39''$  до  $89^{\circ}25'37''$  и котангенсов углов от  $84^{\circ}17'22''$  до  $89^{\circ}25'37''$ ;

нижняя шкала *G* служит для вычисления тангенсов углов в пределах между  $5^{\circ}43''$  ( $\lg \operatorname{tg} 5^{\circ}42'38'' = -1$ ) и  $45^{\circ}$  ( $\lg \operatorname{tg} 45^{\circ} = 0$ ), а следовательно, и для котангенсов углов, дополнительных до  $90^{\circ}$ , т. е. в пределах между  $45^{\circ}$  и  $84^{\circ}17'$ .

Из сказанного видно, что интервал логарифмической тригонометрической функции каждой шкалы равен единице.

\* Между этими шкалами и квадратичными на движке часто помещается так называемая обратная шкала, не представляющая для нас интереса.

Имея интервалы функции и длины шкал, нетрудно вычислить коэффициенты шкал различных градуировок логарифмических линеек. В табл. 1 приведены все эти значения; число различных логарифмических шкал на этих линейках достигает 20.

Таблица 1

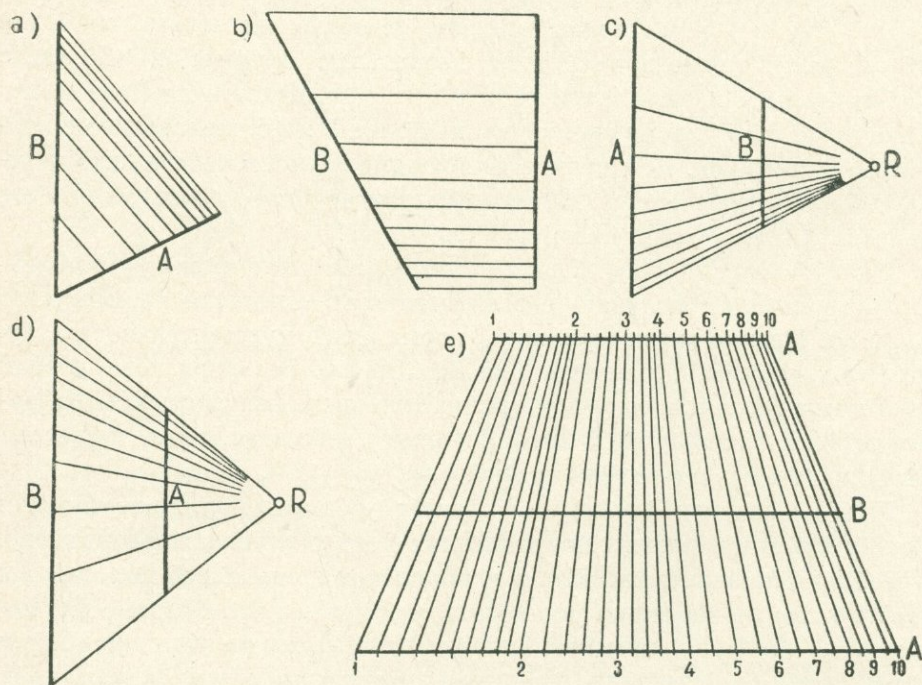
Значения коэффициентов шкал различных логарифмических линеек, см<sup>-1</sup>

Тип линейки	Длина шкалы см	Наименование шкал				
		нормальная А	квадратичная В	кубическая С	логарифмов чисел D	тригонометрические E, F и G
Прецизионная . . . . .	100	0,01	0,02	0,03	0,01	0,01
Большая . . . . .	50	0,02	0,04	0,06	0,02	0,02
Обыкновенная . . . . .	25	0,04	0,08	0,12	0,04	0,04
Карманная . . . . .	15	0,067*	0,133*	0,20	0,067	0,067*
Карманная . . . . .	12,5	0,08	0,16	0,24	0,08	0,08

\* Эти шкалы предпочтительнее употреблять совместно, для получения сочетаний, дающих коэффициенты шкал вспомогательных переменных  $0,067 + 0,133 = 0,20$ , удобные для дальнейших расчетов.

### Градуирование шкал графическими методами

Покажем способы графического градуирования тех шкал, для которых по тем или иным причинам не может быть применен описанный выше метод непосредственного копирования шкал с готовых линеек.



Фиг. 13

Эти методы могут применяться в тех случаях, когда имеется готовая шкала надлежащего качества, в данных пределах изменения переменной, но построенная при другом значении коэффициента шкалы. Задачей построения является изменение коэффициента шкалы.

На фиг. 13 показано несколько способов графического градуирования шкал или, точнее, графического изменения коэффициента шкалы. Все эти способы основаны на принципе пропорционального деления, и различие заключается лишь во взаимном расположении исходной *A* и спроектированной *B* шкал. В одних случаях применяется параллельный пучок лучей (фиг. 13 а, б), в других лучи выходят из центра *R* (фиг. 13 с и d). На фиг. 13 е показана «арфа», предложенная Г. Швердтом для получения логарифмических шкал разных модулей [21]. Способы применения этих приемов ясны из чертежей и не нуждаются в дополнительных разъяснениях.

### Градуирование шкал фотографическим методом

Более изящным и технически точным является фотографический метод. Он заключается в фотосъемке на пленку или пластинку исходной, в частности логарифмической шкалы (хотя бы с обыкновенной счетной линейки) и переносе ее через фотоувеличитель на фотографическую бумагу. Всегда можно установить расстояние между объективом увеличителя и фотобумагой таким образом, чтобы получить требуемое изменение модуля логарифмической шкалы.

Для получения лучшего результата в обыкновенных условиях рекомендуется применять следующие типы аппаратуры и фотоматериалы.

Для съемки—зеркальные камеры, дающие негативы размером  $6 \times 6$  см; могут также применяться зеркальные камеры  $24 \times 36$  мм, с дополнительным приближающим кольцом, заменяющим двойное растяжение меха; объектив со светосилой не более  $1 : 3.5$ , желательно с просветленной оптикой. При съемке необходимо пользоваться только центральной частью объектива (для точности, но не для глубины); для этого объектив следует задиафрагмировать до 11.

Для увеличения удобно пользоваться автоматическим увеличителем, позволяющим получать с этих негативов отпечатки размером до  $18 \times 24$  см. Пленка мелкозернистая, нормальной чувствительности, бумага глянцевая, особо контрастная № 6 или 7. Безукоризненные отпечатки могут быть получены при применении очень контрастной недеформирующейся фотобумаги с металлической фольгой «Агфа», применяемой для точных штриховых работ.

При назначении увеличения следует учесть деформацию бумаги; так как бумага в разных направлениях деформируется неравномерно, то необходимо шкалы печатать в направлении наименьшей деформации бумаги, которую несложно установить опытным путем. Готовые фотоотпечатки не следует накатывать на стекло, так как при этом происходит существенная деформация бумаги, которая при высыхании закрепляется.

Для правильной установки увеличителя удобно воспользоваться самой нижней шкалой  $D$  (фиг. 12), имеющейся на всех логарифмических линейках и служащей для вычисления логарифмов чисел. Как известно, эта шкала является равномерной.

Легко видеть, что коэффициент нормальной шкалы  $C$  счетной линейки численно равен разности пометок концов отрезка шкалы  $D$  логарифмов чисел, приходящихся на 1 см ее длины. Коэффициент квадратичной шкалы  $B$  вдвое больше, а кубичной  $A$ —втрое.

Это объясняется тем, что обе шкалы (нормальная  $C$  и логарифмов чисел  $D$ ) обладают одинаковым интервалом функции, равным единице, и одной и той же длиной, поэтому они должны иметь одинаковый по величине коэффициент шкалы. Единственная разница заключается в том, что одна из этих шкал (нормальная  $C$ ) имеет логарифмическую характеристику, а другая (логарифмов чисел  $D$ )—равномерную.

При проективном преобразовании логарифмической шкалы на параллельную плоскость, что имеет место при фотографическом методе, происходит пропорциональное изменение коэффициентов обеих шкал—коэффициента логарифмической шкалы  $C$ , которая будет использована для градуирования, и коэффициента равномерной шкалы  $D$ , выполняющей вспомогательную роль в процессе. Более удобно судить о величине этого преобразования по равномерной шкале  $D$ , чем по логарифмической шкале  $C$ , почему она и используется для этой цели.

Понятно, что такое же преобразование претерпевают квадратичная  $B$  и кубичная  $A$  шкалы линейки, коэффициенты шкал которых в 2 и в 3 раза больше коэффициента шкалы нормальной линейки.

Поэтому, чтобы получить логарифмическую шкалу, обладающую требуемым коэффициентом, необходимо так установить фотоувеличитель, чтобы участок шкалы  $D$  логарифмов чисел, длиной в 1 см, соответствовал искомому коэффициенту шкалы, и тогда использовать нормальную шкалу  $C$ , или был вдвое меньше и использовать квадратичную шкалу  $B$ , или был втрое меньше и использовать кубичную шкалу  $A$ .

Например, если необходимо получить шкалу, обладающую коэффициентом 0,51, можно воспользоваться кубичной шкалой  $A$  линейки и установить фотоувеличитель так, чтобы изображение отрезка шкалы  $D$  логарифмов чисел с разностью пометок  $\frac{0,51}{3} = 0,17$  имело фактическую длину 1 см.

Практически рекомендуется поступать следующим образом. Вырежьте из черной, плотной (фотографической) бумаги эталон—полоску шириной около 1 см и длиной *точно* 10 см. Вложите в кассету фотоувеличителя пленку с негативом логарифмической шкалы и включите лампу увеличителя; получите изображение нужного для съемки интервала шкалы. Положите эталон на столик фотоувеличительного аппарата. Разместите эталон вдоль изображения равномерной шкалы логарифмов чисел. Установите увеличение аппарата таким образом, чтобы на всю длину эталона приходился интервал шкалы  $D$  логарифмов чисел, равный удесятеренному коэффициенту шкалы, который необходимо

получить фотографическим путем. Эту установку необходимо произвести очень тщательно. После этого выключите лампу фотоувеличителя (или включите красный светофильтр), положите фотобумагу и экспонируйте ее.

Например, если нужно получить шкалу с коэффициентом шкалы 0,07, то против эталона должен разместиться интервал шкалы  $D$  логарифмов чисел, равный  $0,07 \times 10 = 0,70$ ; так, если один конец эталона приходится против пометки шкалы  $D$  логарифмов чисел 0,15, то против другого конца эталона должна находиться пометка  $0,15 + 0,70 = 0,85$ .

Нормальной шкалой  $C$  линейки удобно пользоваться для получения градуировок с коэффициентом шкалы до 0,10; в этом последнем случае против эталона длиной 10 см укладывается вся длина градуировки логарифмической линейки, так как  $0,10 \times 10 = 1,00$ .

Для получения градуировок с более высоким коэффициентом шкалы следует переходить к квадратичным или кубическим шкалам. Квадратичная шкала  $B$  позволяет получить градуировки с коэффициентом шкалы до 0,20, а кубическая — до 0,30. При этом против эталона длиной 10 см должен приходиться интервал шкалы логарифмов чисел, равный двадцатикратному коэффициенту шкалы, который должен быть получен (при пользовании квадратичной шкалой  $B$ ), или тридцатикратному коэффициенту шкалы (при пользовании кубической шкалой  $A$ ). Для получения градуировок с более высокими значениями коэффициентов шкал следует пользоваться эталоном длиной 5 см и соответственно изменять интервалы шкалы логарифмов чисел.

Если имеются сомнения в отношении деформации фотобумаги, то необходимо вырезать из нее вдоль длинной стороны полосу шириной около 1 см и длиной точно 10 см и проявить ее на свету обычным способом. Если после высушивания проявленной полоски (без ее накатки на стекло) длина ее будет отличаться от первоначальной, то необходимо внести поправку на деформацию.

Проще всего это сделать следующим образом. Если, допустим, после высушивания бумага имеет длину 99 мм, т. е. полоска в 10 см укоротилась на 1 мм, то полоска черной фотобумаги, служащая в качестве эталона, должна быть удлинена на 1 мм, т. е. иметь длину 101 мм, и т. д.

Следует указать, что выпускаемые нашей промышленностью сорта фотобумаги дают незначительную деформацию, которой можно, как правило, пренебречь.

Полученные фотокопии преобразованных градуировок используются для градуирования шкал точно таким же образом, как это описано выше для стандартных градуировок, имеющих на логарифмических или других готовых линейках.

#### § 4. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ШКАЛ

##### Выбор наилучшего значения параметра преобразования

Одной из задач проективного преобразования шкал является получение проективных шкал, качество которых соответствовало бы прак-

тическим целям. Характер распределения пометок на шкале зависит от величины параметра преобразования  $p$ ; выбирая то или иное значение этой величины, можно легко изменять вид проективных шкал, сгущать или разрежать пометки в той или иной области. Поэтому надлежащим выбором параметра преобразования можно получить рациональные проективные шкалы.

Вопросу о наилучшем проективном преобразовании шкал посвящены труды ряда ученых. Эта задача может быть решена аналитическим, номографическим и графическим методами. В отношении аналитического и номографического методов за недостатком места ограничимся ссылкой на литературу [11, 12, 13], и остановимся на графическом методе.

Большой вклад в эту задачу был сделан И. Н. Денисюком [6, 9], которому принадлежит графический метод выбора наилучшей величины спектра шкалы (т. е. полюсного расстояния). Этот метод позволяет получать проективные шкалы, характер распространения пометок которых наиболее приближается к заданному. В общем случае величина полюсного расстояния построенных таким образом проективных шкал может иметь любое, некруглое значение, которая может оказаться неудобной для дальнейших выкладок.

Для применения описываемого в настоящей работе метода расчета и построения цепных номограмм существенно, чтобы параметры преобразования проективных шкал имели круглые значения. Исходя из этого, ниже излагается видоизмененный метод И. Н. Денисюка, целью которого является не нахождение наилучшего значения полюсного расстояния, а определение наилучшего значения параметра преобразования. Это значение затем округляется и в таком виде вводится в дальнейшие расчеты.

### Построение проективной шкалы

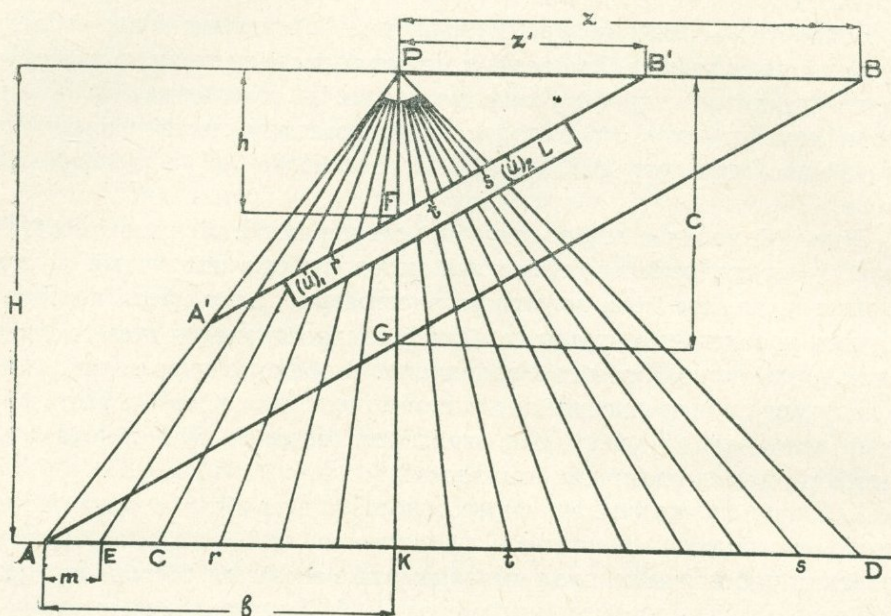
Задача ставится следующим образом: дана первичная функция  $f(u)$  и параметр преобразования  $p$ . Требуется построить проективную шкалу заданной длины  $d$ . Решение задачи распадается на два этапа:

- 1) построение первичной шкалы функции  $f(u)$  при произвольном коэффициенте шкалы  $a$ ;
- 2) построение проективной шкалы заданной длины  $d$  при параметре преобразования  $p$ .

Первичная шкала строится одним из двух указанных в § 3 методов построения функциональных шкал—по уравнению или копированием готовой шкалы. Первичная шкала строится на прямой  $CD$  на отдельном листе чертежной бумаги (фиг. 14). Способ построения первичной функциональной шкалы зависит от вида функции. Эти вопросы изложены в предыдущем параграфе.

Кроме точек первичной шкалы  $CD$ , независимо от пределов этой шкалы, на чертеже должны быть помечены еще две точки: нулевая точка  $A$  (точка, где значение функции  $f(u)$  делается равным нулю) и мо-

дульная точка  $E$  (точка, где значение функции  $f(u)$  делается равным единице). Нетрудно видеть, что расстояние  $m$  между точками  $A$  и  $E$  равно модулю шкалы или величине обратной коэффициенту шкалы  $m = \frac{1}{a}$  что может служить для контроля построения первичной шкалы.



Фиг. 14

На произвольном расстоянии  $H$  от первичной шкалы (фиг. 14) выбираем точку—полюс проективной шкалы  $P$ . Из этого полюса проводим лучи ко всем пометкам первичной шкалы  $CD$  и к обоим упомянутым точкам—нулевой  $A$  и модульной  $E$ .

На отдельной полоске бумаги  $L$  изображаем тот вид шкалы, который следует придать проективной шкале, в соответствии с целями номограммы; для этого в произвольном масштабе показывается желательный характер распределения пометок\*.

Обычно приходится делать выбор между двумя видами шкал—равномерной или логарифмической. Напомним, что равномерная шкала обеспечивает постоянное значение предельной абсолютной погрешности ответа в любом участке шкалы, а логарифмическая шкала—постоянное значение предельной относительной погрешности ответа. Поэтому, добиваясь возможного приближения к этим типам шкал, соответственно достигается приближение действительных погрешностей к указанным предельным значениям.

Попутно заметим, что для получения этих двух видов характера распределения пометок вместо полоски бумаги можно воспользоваться

\* Во избежание загромождения чертежа, на фиг. 14 показаны только некоторые пометки (см. ниже).

готовыми градуировками: для равномерной шкалы—масштабной линейкой, а для логарифмической—одной из шкал логарифмической линейки.

Полоску бумаги  $L$  с желательным характером распределения пометок или одну из указанных линеек с градуировкой размещаем на чертеже против пучка лучей, расходящихся из полюса  $P$ , и ищем такое положение этой полоски, при котором имело бы место наибольшее приближение пометок полоски  $L$  бумаги к лучам, идущим к соответственным пометкам первичной шкалы.

Практически для возможно близкого подхода к осуществлению «наилучшего приближения» в смысле П. Л. Чебышева\* поступаем так: отмечаем на полоске  $L$  (фиг. 14) две точки  $r$  и  $s$ , отличающиеся от точек, соответствующих заданным пределам  $(u)_1$  и  $(u)_2$  изменения переменной  $u$  и отстоящие от этих предельных точек на одинаковом расстоянии, так что  $f(u)_1 < f(u)_r < f(u)_s < f(u)_2$  и отрезки  $(u)_1 r = s (u)_2$ . Отмечаем по первичной шкале  $CD$  положения обеих точек  $r$  и  $s$ , и, кроме того, находим на этой шкале еще одну точку  $t$ , расположенную посередине между точками  $r$  и  $s$ : проводим из полюса  $P$  лучи ко всем трем пометкам  $r$ ,  $s$  и  $t$  первичной шкалы  $CD$ . Отмечаем на полоске  $L$  желаемое положение пометки  $t$ , в соответствии с теми целями, для которых строится проективная шкала. Двигая полоску  $L$  так, чтобы обе крайние точки  $r$  и  $s$  все время находились на соответствующих лучах, фиксируем то положение полоски  $L$ , при котором точка  $t$  попадает на свой луч.

Если нулевая и модульная точки находятся вне пределов первичной шкалы, то они при этом не должны приниматься в расчет, так как важно достичь приближения расположения пометок проективной шкалы к желаемому только на интервале, ограниченном пределами изменения переменной. После того как найдено наилучшее положение полоски  $L$  (или линейки с градуировкой), вдоль ее края проводится линия  $A'B'$ , секущая лучи, идущие из полюса  $P$ . Затем через нулевую точку  $A$  первичной шкалы  $CD$  проводится прямая  $AB$ , параллельная линии  $A'B'$ , до пересечения с прямой  $PB$ , проведенной из полюса  $P$  параллельно первичной шкале. Полученная точка пересечения  $B$  является бесконечной критической точкой проективной шкалы  $AB$ . Отрезок  $PB$ , полученный при этом построении, представляет собой полюсное расстояние  $z$  проективной шкалы  $AB$ , а шкала  $AB$ —искомую проективную шкалу.

В самом деле, характер распределения пометок шкалы  $AB$  наилучшим образом приближается к таковому на полоске  $L$ , так как прямые  $A'B'$  и  $AB$  параллельны и поэтому отрезки, отсекаемые на них пучком

\* Приближение функций в смысле П. Л. Чебышева означает нахождение по данной функции  $f(u)$  такой приближающей функции  $F(u)$ , чтобы последняя на целом отрезке  $[r, s]$  равномерно мало отличалась от заданной функции  $f(u)$ ; мерой уклонения приближающей функции от заданной служит выражение  $\mu = \max [f(u) - F(u)]$ ,  $r \leq u \leq s$ . В простейшей интерполяционной задаче приближающая функция определяется из условия совпадения ее значения со значениями заданной функции в фиксированном числе точек—узлов интерполяции.

лучей, проходящих через произвольную точку  $P$ , будут пропорциональны.

Этот способ позволяет определять полюсное расстояние и в том случае, когда ни одна из критических точек  $A$  и  $B$  не помещается в поле чертежа. В этом случае автор рекомендует поступать следующим образом. Перед тем как строить пучок лучей, на первичной шкале  $CD$  функции  $f(u)$  выбирают произвольную точку  $K$ , соответствующую какой-либо круглой пометке  $f(u)_k$ . Вычисляют расстояние нулевой критической точки  $A$  от этой пометки

$$b = \frac{f(u)_k}{a}.$$

К точке  $K$  восстанавливают перпендикуляр  $KP$  и на этом перпендикуляре на произвольном расстоянии  $H$  назначают полюс  $P$ . Дальнейшее построение делается аналогично описанному: из точки  $P$  проводятся лучи к пометкам первичной шкалы и прямая  $PB$ , параллельная этой шкале. Пользуясь полоской  $L$ , устанавливают ее наилучшее положение в рассматриваемом интервале первичной шкалы. Пусть  $B'$ —точка пересечения направления полоски  $L$  с линией  $PB'$ , и  $F$ —точка пересечения луча  $PK$  с линией  $A'B'$ ; обозначим расстояние точки  $F$  от полюса  $P$  через  $h$ .

Для понимания дальнейшего будем пользоваться тем же чертежом (фиг. 14), но будем помнить, что точки  $A$  и  $B$  недоступны, так как находятся за пределами листа бумаги.

Допустим, что удалось продолжить прямую  $CD$ , отложить на ней от точки  $K$  отрезок  $AK$ , равный  $b$ , и провести прямую  $AB$ , параллельную  $FB'$ . Пусть эта прямая сечет луч  $PK$  в точке  $G$ ; обозначим расстояние  $PG$  через  $c$ .

Из подобия треугольников  $PBG$  и  $PB'F$  имеем

$$\frac{z'}{h} = \frac{z}{c}, \quad (4.1)$$

откуда

$$z = \frac{c}{h} z'. \quad (4.2)$$

Из подобия прямоугольных треугольников  $PBG$  и  $AKG$  имеем

$$\frac{b}{H-c} = \frac{z}{c}.$$

Правая часть этой пропорции равна правой части выражения (4. 1); приравнявая левые части и преобразуя, находим

$$c = H - \frac{hb}{z'}.$$

Подставляя это выражение в (4.2), получаем

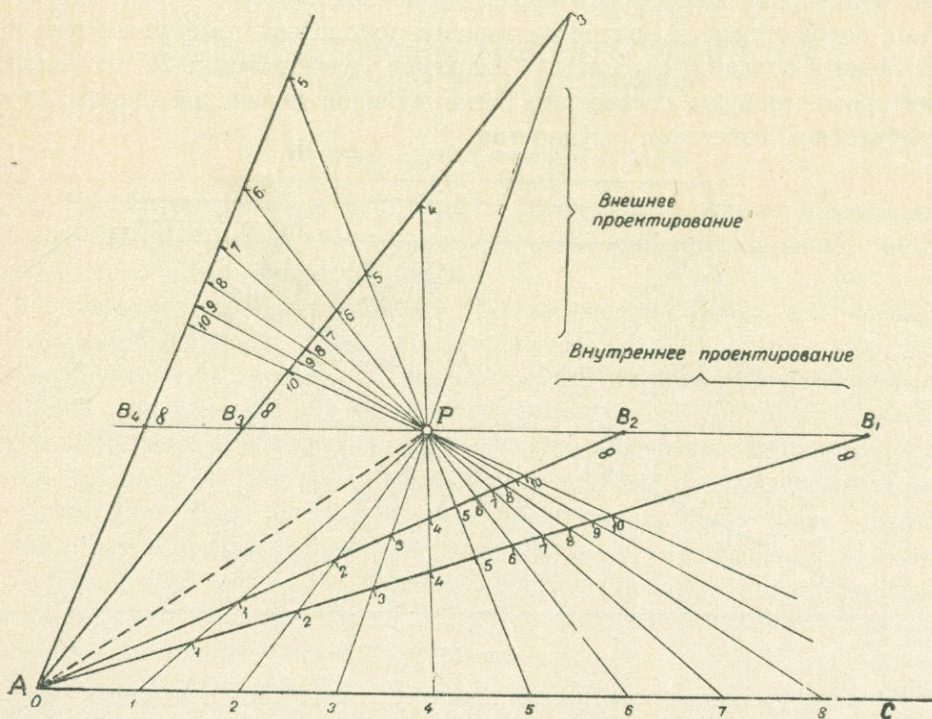
$$z = \frac{H}{h} z' - b. \quad (4.3)$$

Все величины, входящие в правую часть этого уравнения, известны; это позволяет вычислить и полюсное расстояние  $z$ .

После того, как найдено полюсное расстояние  $z$ , можно определить параметр преобразования  $p = az$ .

Как указывалось выше, целесообразно округлять найденные значения параметров преобразования.

Рассмотрим связь между положением полосы  $L$  и характером распределения пометок на проективной шкале. Если вращать полосу  $L$  вокруг какой-либо точки  $F$  (фиг. 14) в направлении, обратном часовой стрелке, то получим ряд проективных шкал; все эти шкалы будут начинаться в точке  $A$  и пересекать прямую  $PB$  в различных точках, пробегая значения между точками  $B$  и  $P$ . На фиг. 15 показаны различные шкалы, получаемые при вращении полосы  $L$  и распределение пометок на них; во избежание загромождения чертежа соответствующие этим проективным шкалам положения полосы  $L$  не показаны.



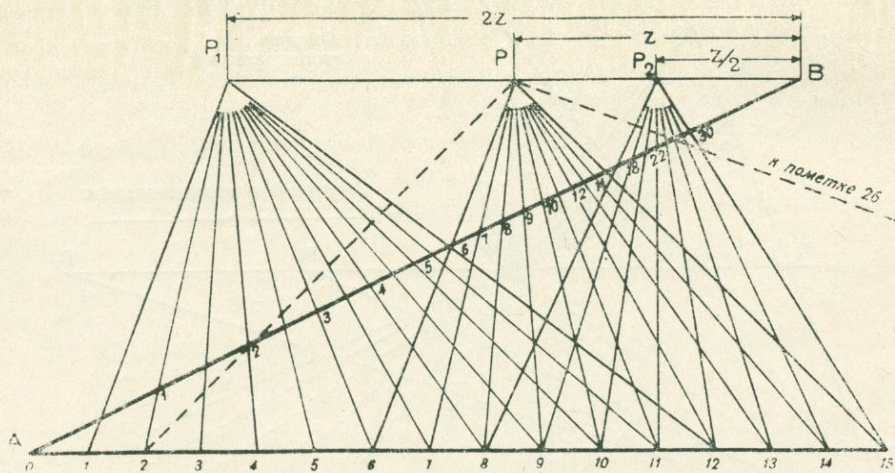
Фиг. 15

Легко видеть, что пока точка  $B$  при вращении полосы не достигла полюса  $P$ , луч, соединяющий полюс с бесконечной пометкой первичной шкалы, пересекает проективную шкалу и получаются внутренние проективные шкалы  $AB_1, AB_2, \dots$ ; длина этих шкал постепенно уменьшается, а сходимость точек увеличивается. В момент, когда полоска делается параллельной прямой  $AP$ , вся шкала сгущается в точке  $B$ , сливающейся с полюсом  $P$ . При дальнейшем вращении полосы в направлении, обратном часовой стрелке, точка пересечения прямой  $PB$  с проективной шкалой оказывается слева, луч, соединяющий полюс с бесконечной пометкой первичной шкалы, не пересекает проективную шкалу, и проектирование делается внешним. По мере перемещения точки  $B$  сходимость

проективной шкалы уменьшается. Заметим, что при этом мы получаем сходящийся участок внешней проективной шкалы, для которого  $f(u) > p$ .

### Применение вспомогательных полюсов

При проведении лучей из полюса  $P$  к пометкам первичной шкалы получаются невыгодные условия пересечения лучей с краевыми участками проективной шкалы. Помня, что расположение пометок определяется только величиной параметра преобразования, рекомендуется вести лучи от полюса  $P$  (фиг. 16) только к тем пометкам первичной шкалы, которые пересекают носитель наклонной шкалы  $AB$  под углом не менее  $45^\circ$ . На фиг. 16 такими являются лучи к пометкам 6, 7, 8 и т. д. до пометки 15. Лучи к меньшим пометкам (например, луч к пометке 2, показано пунктиром) пересекают проективную шкалу под очень острым углом, затрудняющим получение точного положения пометки на шкале  $AB$ . Лучи к большим пометкам (например, луч к пометке 26, показано пунктиром) требуют построения очень длинной первичной шкалы, что представляет известные неудобства.



Фиг. 16

При построении проективных шкал рекомендуется применять вспомогательные полюсы с измененным полюсным расстоянием; в данном случае полюсы  $P_1$  с полюсным расстоянием  $2z$  и  $P_2$  с полюсным расстоянием  $\frac{z}{2}$ . Из полюса  $P_1$  проводим лучи к пометкам той же первичной шкалы и надписываем пометки *вдвое меньшие*; так, луч к пометке 4 первичной шкалы определяет точку с пометкой 2 на проективной шкале. Из полюса  $P_2$  проводим лучи к тем же пометкам первичной шкалы  $AC$  и надписываем пометки *вдвое большие*; так, луч к пометке 13 первичной шкалы определяет точку с пометкой 26 на проективной шкале. Понятно, что в зависимости от величины расчетного полюсного расстояния  $z$  вспомогательные полюсы могут строиться на других расстояниях от точки  $B$ , например, удесятеренном и т. д.

Вспомогательные полюсы могут применяться при построении как внутренних, так и внешних проективных шкал.

## II. ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ

### § 5. НОМОГРАФИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

#### Цепные номограммы и шкалы

Рассматриваемые в настоящем исследовании цепные номограммы принадлежат к обширному и практически наиболее важному классу номограмм из выравненных точек.

Свое название номограммы из выравненных точек для функции трех переменных получили вследствие того, что пометки любых трех точек, взятых на трех ее шкалах, и лежащие на одной прямой, удовлетворяют уравнению, для которого построена номограмма. Поэтому, если даны два значения двух переменных номограммы, безразлично каких, то значение третьей переменной находится простым проведением прямой (или даже прикладыванием линейки) через две точки, соответствующие заданным значениям переменных и определением значения третьей переменной на пересечении проведенной прямой с соответствующей шкалой. Поэтому линия, которая строится для решения задачи, называется *разрешающей прямой*.

Большинство инженерных формул содержит более чем три переменных. Одним из наиболее удобных способов номографирования формул с числом переменных, большим трех, является построение цепных номограмм.

Цепными номограммами называются номограммы, состоящие из ряда шкал, расположенных в определенном порядке в поле чертежа, и служащие для представления уравнений со многими переменными\*. Для получения значения одной из переменных данного уравнения, зная значения остальных переменных, необходимо через соответствующие точки на шкалах заданных переменных провести определенным обра-

\* Для представления уравнений со многими переменными часто применяются составные номограммы, в которые могут входить как шкалы, так и сетки, градуированные элементы в подвижной плоскости и др. Отсюда видно, что цепные номограммы представляют собой частный случай составных номограмм, когда в них входят только шкалы.

зом ряд разрешающих прямых и получить результат на шкале искомой переменной.

Каждая из переменных данного уравнения представлена на цепной номограмме одной шкалой; кроме того, на номограмме имеются вспомогательные шкалы, служащие для целей проведения разрешающих прямых. Задача расчета и построения цепных номограмм заключается в том, чтобы правильно градуировать каждую шкалу и рационально расположить ее в поле чертежа.

В основу составления цепных номограмм положен следующий принцип. Заданное уравнение со многими переменными

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad (5.1)$$

заменяют системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1(u_1, u_2, \rho_1) &= 0 \\ f_2(\rho_1, u_3, \rho_2) &= 0 \\ \dots &\dots \\ f_{n-2}(\rho_{n-3}, u_{n-1}, u_n) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5.2)$$

каждое из которых содержит три переменных; для этого вводятся вспомогательные переменные  $\rho_i$ . Каждая вспомогательная переменная  $\rho_i$  входит в два уравнения системы.

Для каждого из уравнений системы (5.2) строится элементарная номограмма с тремя шкалами; она называется *звеном* цепной номограммы. Шкалы вспомогательных переменных  $\rho_i$  попарно делаются тождественными. Затем элементарные номограммы соединяют друг с другом таким образом, чтобы тождественные шкалы вспомогательных переменных слились.

При этом, очевидно, шкалы вспомогательных переменных не нуждаются в градуировке\*; их называют немymi шкалами.

При пользовании цепной номограммой последовательно проводят разрешающие прямые через все ее звенья. При переходе от одного звена к другому автоматически достигается исключение вспомогательных переменных и таким образом производится возврат от заменяющей системы уравнений (5.2) с тремя переменными в каждом к заданному уравнению (5.1) со многими переменными.

Число переменных уравнений цепных номограмм может быть любым; необходимо только таким образом производить разъединение переменных заданного уравнения, чтобы каждая заданная независимая переменная входила только в одно уравнение системы (5.2), заменяющей заданное уравнение со многими переменными.

Общим недостатком цепных номограмм является их невысокая точность, делающаяся более заметной при большом количестве переменных, вследствие постепенного накопления графических ошибок при пользовании номограммой. Однако в большинстве случаев инженерной

\* В настоящей работе применена следующая дифференциация терминов: *градуировани*  $e$  — нанесение делений на шкалу (процесс); *градуировка* — деления на шкале (результат).

практики точность цепных номограмм вполне достаточна, т. к. величины, входящие в расчеты, сами имеют малую точность, и тем самым определяют малую точность ответа; поэтому погрешность, вносимая вследствие некоторого накопления графических ошибок, не оказывает существенного влияния на результат.

### Условия номографируемости уравнений со многими переменными

Приведем здесь выкладки, которые позволяют в некоторых частных случаях\* преобразовать уравнение (5.1) в систему уравнений (5.2). Пусть уравнение (5.1) может быть преобразовано таким образом, чтобы в одну часть входили две переменные  $u_1$  и  $u_2$ , а во вторую часть—остальные, т. е. допустим, что уравнение (5.1) может быть записано в следующей форме

$$F_{11}(u_1, u_2) = F_{12}(u_3, u_4 \cdot \cdot \cdot u_n).$$

Обозначим каждую из частей этого уравнения буквой  $\rho_1$  и запишем:

$$F_{11}(u_1, u_2) = \rho_1, \quad (5.3)$$

$$F_{12}(u_3, u_4 \cdot \cdot \cdot u_n) = \rho_1. \quad (5.4)$$

Выражение (5.3) может быть переписано в виде:

$$f_1(u_1, u_2, \rho_1) = 0,$$

что представляет собой первое уравнение системы (5.2).

Пусть уравнение (5.4) может быть преобразовано таким образом, чтобы в одну часть входили две переменные  $\rho_1$  и  $u_3$ , а во вторую часть—остальные, т. е. уравнение (5.4) может быть записано в следующей форме:

$$F_{21}(\rho_1, u_3) = F_{22}(u_4, u_5 \cdot \cdot \cdot u_n).$$

Обозначим каждую из частей этого уравнения через  $\rho_2$  и напишем:

$$F_{21}(\rho_1, u_3) = \rho_2, \quad (5.5)$$

$$F_{22}(u_4, u_5 \cdot \cdot \cdot u_n) = \rho_2. \quad (5.6)$$

Выражение (5.5) может быть переписано в виде

$$f_2(\rho_1, u_3, \rho_2) = 0,$$

что представит собой второе уравнение системы (5.2). Продолжив же рассуждения в отношении уравнения (5.6), на  $(n-3)$  шаге этого разъединения переменных исходного уравнения (5.1) придем к выражению:

$$F_{n-3,1}(\rho_{n-4}, u_{n-2}) = F_{n-3,2}(u_{n-1}, u_n).$$

Приравнивая каждую из частей этого уравнения переменной  $\rho_{n-3}$ , получим уравнения:

\* Общая формулировка условия разъединяемости уравнения с 4 переменными была дана французским математиком Э. Гурса; более простой вывод этого условия был позже предложен Р. Соро. Обобщение этой теоремы для случая функции многих переменных было дано О. В. Ермоловой [10]. Встречающиеся в инженерной практике уравнения в большинстве случаев настолько просты, что не приходится пользоваться теоремой Гурса или Ермоловой, так как разъединение переменных совершается без особого труда.

$$F_{n-3,1}(\rho_{n-4}, u_{n-2}) = \rho_{n-3},$$

$$F_{n-3,2}(u_{n-1}, u_n) = \rho_{n-3},$$

которые могут быть переписаны так:

$$f_{n-3}(\rho_{n-4}, u_{n-2}, \rho_{n-3}) = 0,$$

$$f_{n-2}(\rho_{n-3}, u_{n-1}, u_n) = 0.$$

Полученные выражения представляют собой последние две строки системы уравнений (5.2).

Необходимым и достаточным условием для построения элементарных номограмм из выравненных точек является возможность представления каждого из уравнений системы (5.2) в виде уравнения Массо.

Уравнением Массо называется равенство нулю определителя, элементы каждой из строк которого представляют собой функции одной переменной, а последний столбец состоит из единиц; значения функции первого столбца представляют собой абсциссы, а второго—ординаты точек шкал номограммы.

Для пояснения сказанного рассмотрим первое уравнение системы (5.2)

$$f_1(u_1, u_2, \rho_1) = 0.$$

Пусть в координатной системе  $XOY$  нанесены три (вообще криволинейные) шкалы, соответствующие трем переменным  $u_1$ ,  $u_2$  и  $\rho_1$ ; пусть шкалы заданы следующими параметрическими уравнениями:

$$\text{для шкалы } u_1 \quad x = \varphi_{11}(u_1) \quad y = \psi_{11}(u_1),$$

$$\text{для шкалы } u_2 \quad x = \varphi_{12}(u_2) \quad y = \psi_{12}(u_2),$$

$$\text{для шкалы } \rho_1 \quad x = \varphi_{13}(\rho_1) \quad y = \psi_{13}(\rho_1).$$

Всякой тройке значений  $(u_1)_1$ ,  $(u_2)_1$  и  $(\rho_1)_1$ , удовлетворяющих этим уравнениям, соответствует тройка точек, лежащих на разрешающей прямой номограммы. Уравнение Массо записывается так:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}(u_1) & \psi_{11}(u_1) & 1 \\ \varphi_{12}(u_2) & \psi_{12}(u_2) & 1 \\ \varphi_{13}(\rho_1) & \psi_{13}(\rho_1) & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Условие расположения точек  $[\varphi_{11}(u_1)_1, \psi_{11}(u_1)_1]$ ,  $[\varphi_{12}(u_2)_1, \psi_{12}(u_2)_1]$  и  $[\varphi_{13}(\rho_1)_1, \psi_{13}(\rho_1)_1]$  на одной прямой заключается в равенстве нулю этого определителя.

Для второго уравнения  $f_2(\rho_1, u_3, \rho_2)$  системы (5.2) будем иметь

$$\begin{vmatrix} \varphi_{21}(\rho_1) & \psi_{21}(\rho_1) & 1 \\ \varphi_{22}(u_3) & \psi_{22}(u_3) & 1 \\ \varphi_{23}(\rho_2) & \psi_{23}(\rho_2) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.8)$$

и т. д.

Для выполнения условий общности шкал каждой из вспомогательных переменных  $\rho_1, \rho_2, \dots$ , попарно связывающих два соседних уравнения системы (5.7), (5.8) ..., достаточно, чтобы строки для каждой из

вспомогательных переменных (которые, как легко видеть, входят в два смежных определителя) были тождественны.

Так, общей строкой для определителей (5.7) и (5.8) должна являться третья строка первого и первая строка второго, т. е.

$$\varphi_{13}(\rho_1) = \varphi_{21}(\rho_1) \quad \text{и} \quad \psi_{13}(\rho_1) = \psi_{21}(\rho_1)$$

и т. д.

### Геометрическая структура звеньев цепных номограмм с прямолинейными шкалами

Геометрическая структура цепных номограмм определяется геометрической структурой ее звеньев, которая в свою очередь зависит от вида соответствующих уравнений системы (5.2). Классификация номографируемых уравнений с тремя переменными содержится в литературе [4, 5, 11, 12]; для уравнений со многими переменными она дана в работе автора [16]. Ограничимся рассмотрением этого вопроса в применении к цепным номограммам с прямолинейными шкалами.

Номографическим порядком уравнений со многими переменными мы называем число различных функций заданных переменных, получающихся после развертывания цепи уравнений Массо, исключения вспомогательных переменных и упрощения. Уравнения, порядок которых равен числу переменных, мы называем *изономными* уравнениями, т. е. уравнениями равного номографического порядка. Уравнения цепных номограмм с прямолинейными шкалами являются изономными; соответственно, уравнения их звеньев имеют третий номографический порядок, т. е. каждая переменная представлена одной функцией.

Жанром звена номограммы называется число криволинейных шкал в номограмме. Отсюда следует, что звенья цепных номограмм с прямолинейными шкалами относятся к нулевому жанру. Из теории номографирования уравнений с тремя переменными известно, что номограммы нулевого жанра могут служить для представления первой или второй канонических форм уравнений; для третьей канонической формы не может быть построена номограмма нулевого жанра. Все нижеследующее относится к номограммам нулевого жанра, т. е. к номограммам с прямолинейными шкалами.

Первая каноническая форма уравнений\* номограмм представляет собой действие умножения или деления функции. Эта форма уравнения имеет четыре вида записи; в записи Р. Соро [29] она выглядит так:

$$\dot{f}_1(u_1) \cdot \dot{f}_2(u_2) \cdot \dot{f}_3(u_3) = 1, \quad (5.9)$$

в записи М. В. Пентковского [12]

$$\dot{f}_1(u_1) \cdot \dot{f}_2(u_2) = \dot{f}_3(u_3), \quad (5.10)$$

\* Канонические формы уравнений третьего номографического порядка были даны Р. Соро [29] в следующей записи  
 I:  $f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_3(u_3) = 0$ ;  
 II:  $f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot f_3(u_3) = 1$ ; III:  $f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_3(u_3) - f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot f_3(u_3) = 0$ .  
 Н. А. Глаголев [4] логично обменял нумерацию первой и второй форм; при новой нумерации оказалось, что дискриминант  $\Delta$  общего уравнения 3-го порядка имеет следующие значения: для первой канонической формы  $\Delta > 0$ , для второй  $\Delta = 0$  и для третьей  $\Delta < 0$ .

в записи Б. А. Невского [11]

$$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = f_3(u_3), \quad (5.11)$$

наконец, она может быть записана и так:

$$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = \frac{1}{f_3(u_3)}. \quad (5.12)$$

Вторая каноническая форма уравнений представляет собой действие сложения (и вычитания) функции; она имеет вид

$$f_1(u_1) + f_2(u_2) = f_3(u_3). \quad (5.13)$$

Уравнение первой канонической формы переводится во вторую путем логарифмирования; обратное преобразование позволяет перевести уравнение из второй канонической формы в первую.

Каждая из этих канонических форм уравнений характеризуется свойственной ей геометрической структурой номограммы. Номограммы первой канонической формы уравнений представляют собой три прямые шкалы, не пересекающиеся в одной точке. Наоборот, все три шкалы номограммы второй канонической формы уравнений пересекаются в одной точке, действительной или бесконечно удаленной.

Звенья цепных номограмм первой канонической формы уравнений в общем случае являются треугольными номограммами. Все три шкалы таких номограмм являются проективными. Если точка, в которой сливаются бесконечные критические точки двух проективных шкал треугольной номограммы, удаляется в бесконечность, то соответствующие проективные шкалы превращаются в функциональные, и номограмма переходит в номограмму с наклонными шкалами.

Звенья цепных номограмм второй канонической формы уравнений в общем случае являются радиантными номограммами. Шкалы таких номограмм могут быть как проективные, так и функциональные. Значения функций каждой из шкал в точке пересечения стремятся к бесконечности. Если точка пересечения шкал удаляется в бесконечность, то проективные шкалы превращаются в функциональные, и радиантная номограмма переходит в номограмму с параллельными шкалами.

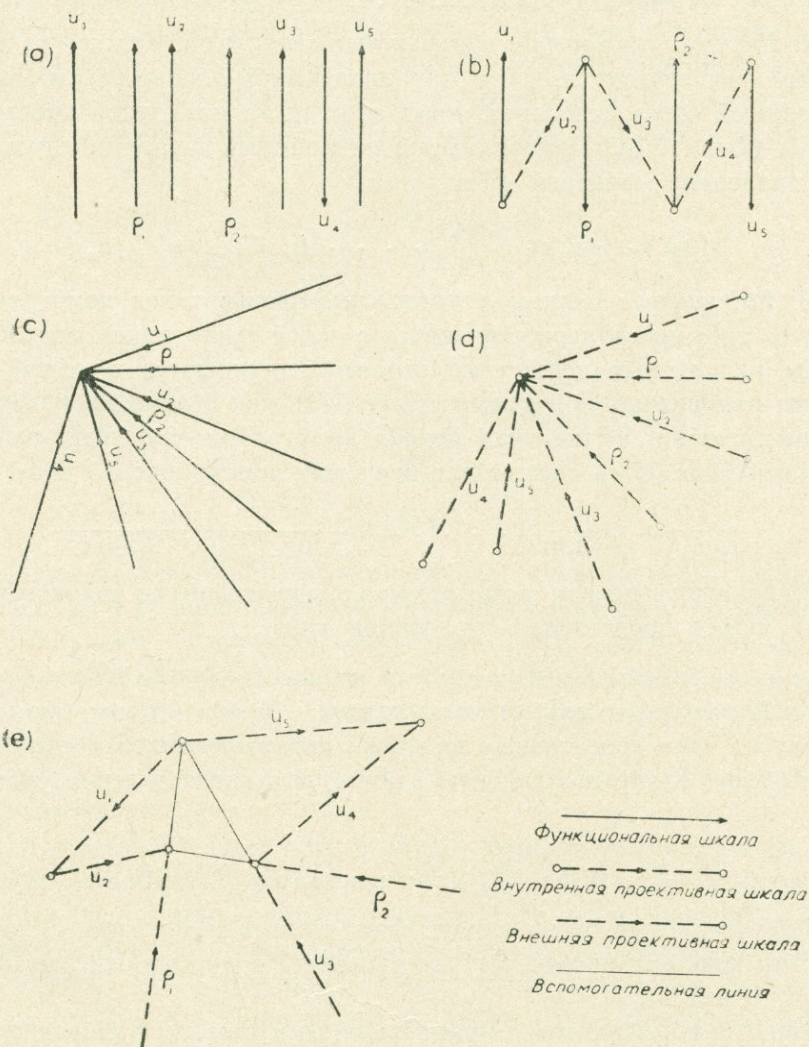
В общем случае уравнения системы (5.2) являются различными в номографическом отношении элементами, в соответствии с чем отдельные звенья номограммы уравнения (5.1) будут обладать различной геометрической структурой. Однако геометрическая структура отдельных звеньев номограммы не может быть независимой друг от друга, так как шкалы вспомогательных переменных  $\rho_1, \rho_2, \dots$  обязательно должны быть общими.

Общность шкал вспомогательных переменных, попарно соединяющих звенья цепных номограмм, является, по существу единственным дополнительным условием, накладываемым при увеличении числа переменных номографируемого уравнения свыше трех. Принципиально важно, чтобы каждая пара общих шкал соседних звеньев относилась к шкалам одного и того же типа—функциональным или проективным.

Понятно, что вид функции при этом должен быть одинаковым. В этом случае надлежащим подбором параметров этих шкал легко сделать их тождественными, и таким образом соединить звенья цепной номограммы. Если же эти пары шкал вспомогательных переменных соседних звеньев будут относиться к различным типам шкал, то никаким подбором параметров эти шкалы не могут быть сделаны тождественными и, следовательно, соединение звеньев делается невозможным.

### Типы цепных номограмм с прямолинейными шкалами

Цепные номограммы с прямолинейными шкалами могут содержать как однородные в номографическом отношении, так и разнородные элементы и, соответственно, иметь различную геометрическую структуру.



Фиг. 17

Различаются четыре типа цепных номограмм с прямолинейными шкалами, состоящие из однородных элементов. Эти типы цепных номо-

грамм для функции пяти переменных схематически показаны на фиг. 17. Здесь функциональные шкалы показаны сплошными жирными линиями со стрелкой у конца, направленной в сторону возрастания функции. Проективные шкалы показаны жирным пунктиром с кружками, соответствующими критическим точкам; стрелки в середине проективных шкал показывают направление возрастания функции.

Упомянутые четыре основных типа цепных номограмм с прямолинейными шкалами из однородных элементов следующие:

1. *Цепные номограммы с параллельными шкалами.* Каждое из звеньев такой номограммы состоит из трех параллельных функциональных шкал (фиг. 17 а). Эти номограммы служат для представления уравнений вида\*

$$f_1(u_1) + f_2(u_2) + \dots + f_{n-1}(u_{n-1}) = f_n(u_n).$$

2. *Цепные номограммы с наклонными шкалами.* Каждое из звеньев номограммы состоит из двух параллельных функциональных шкал и проходящей через начальные точки этих шкал наклонной проективной шкалы (фиг. 17 б). Номограммы с наклонными шкалами служат для представления уравнений вида

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot \frac{f_3(u_3)}{f_4(u_4)} \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1}) = f_n(u_n).$$

3. *Радиянтные цепные номограммы.* Звенья таких номограмм состоят из трех шкал, пересекающихся в одной точке; таким образом, все шкалы радиантных цепных номограмм пересекаются в одной точке. Шкалы радиантных номограмм могут быть как функциональными, так и проективными. Радиантная цепная номограмма с функциональными шкалами (фиг. 17 с) служит для представления уравнений вида

$$\frac{1}{f_1(u_1)} + \frac{1}{f_2(u_2)} + \dots + \frac{1}{f_{n-1}(u_{n-1})} = \frac{1}{f_n(u_n)}.$$

Радиянтная цепная номограмма с проективными шкалами (фиг. 17 d) может представлять уравнения вида

$$f_1(u_1) + f_2(u_2) + \dots + f_{n-1}(u_{n-1}) = f_n(u_n).$$

4. *Треугольные цепные номограммы.* Звенья таких номограмм состоят из трех проективных шкал, не пересекающихся в одной точке (фиг. 17 е). Такие номограммы служат для представления уравнений вида

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot \frac{f_3(u_3)}{f_4(u_4)} \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1}) = f_n(u_n).$$

Перечисленные выше четыре типа цепных номограмм с прямолинейными шкалами из однородных элементов подробно описаны ниже, в главах III—VIII.

Цепные номограммы с прямолинейными шкалами из разнородных элементов могут иметь различный вид и, соответственно, представлять различные виды уравнений со многими переменными. Число таких

\* Номографируемые уравнения даются в общем виде.

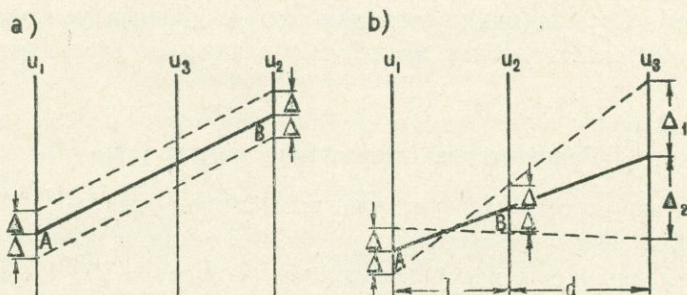
видов цепных номограмм является неограниченным. Их краткая характеристика содержится в главе IX.

### Внутреннее и внешнее пересечение

Несмотря на различную геометрическую структуру звеньев цепных номограмм, существует одно общее для всех типов важное обстоятельство, касающееся взаимного расположения двух заданных и одной ответной шкалы в звеньях номограммы. Оно обуславливает величину линейной погрешности определения положения ответной точки при данной величине смещения разрешающей прямой.

В звеньях цепных номограмм могут встретиться два случая, которые мы называем *внутренним* и *внешним пересечениями*.

Внутренним пересечением является случай, когда шкалы заданных переменных  $u_1$  и  $u_2$  находятся по краям звена, а ответная шкала переменной  $u_3$ —внутри него (фиг. 18 а). Такими являются, например, звенья номограммы с параллельными шкалами, имеющими одинаковое направление, или номограммы с внутренними наклонными шкалами и другие.



Фиг. 18

Внешним пересечением является случай, когда шкалы заданных переменных  $u_1$  и  $u_2$  занимают одно из крайних и среднее положение в звене номограммы, а ответная шкала  $u_3$ —другое крайнее (фиг. 18 б). Такими являются, например, звенья номограммы с параллельными шкалами, имеющими разное направление, или номограммы с внешними наклонными шкалами и т. д.

Рассмотрим роль этого фактора на примере звена номограммы с параллельными шкалами.

Пусть линия  $AB$  (фиг. 18) является точным положением разрешающей прямой. Вследствие погрешности графических работ проводимая разрешающая прямая отклоняется от этого положения; обозначим предельную абсолютную погрешность проведения разрешающей прямой через  $\Delta$  и отложим эту величину по обе стороны от точек  $A$  и  $B$ . Очевидно, что разрешающая прямая может занимать любое положение в поле чертежа, лишь бы она пересекала указанные отрезки длиной  $2\Delta$ , отложенные на шкалах заданных переменных  $A$  и  $B$ .

Установим величину предельной абсолютной погрешности определения положения точки на ответной шкале переменной  $u_3$ .

При внутреннем пересечении (фиг. 18 а) наибольшая погрешность определения ответной точки будет иметь место в том случае, когда прямая смещена параллельно самой себе вверх или вниз по номограмме; величина этой погрешности равна предельной абсолютной погрешности  $\Delta$ .

При внешнем пересечении (фиг. 18 б) наибольшая погрешность определения ответной точки будет иметь место в том случае, когда разрешающая прямая проходит через одно крайнее *нижнее* и другое крайнее *верхнее* положения на шкалах заданных переменных. Величины этих погрешностей  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  превосходят величину предельной абсолютной погрешности  $\Delta$ .

Из чертежа (фиг. 18 б) видно, что с увеличением отношения  $d:l$  между длинами отрезков разрешающей прямой до ответной и заданной шкал величина погрешности в положении ответной точки быстро возрастает. Так, при  $d:l=1$  погрешность  $\Delta_1=3\Delta$ , а при  $d:l=2$ ,  $\Delta_1=5\Delta$ .

Таким образом, номограммы, звенья которых обладают внутренним пересечением разрешающих прямых, позволяют получить положение отчетной точки значительно точнее, чем номограммы с внешним пересечением. Отсюда видно, что при прочих равных условиях *всегда следует предпочитать звенья номограмм, имеющих внутреннее пересечение.*

### Графическое оформление номограмм

Общим вопросом, касающимся всех типов цепных номограмм, является их графическое оформление, размножение и пользование ими. Эти вопросы изложены в существующей литературе [7, 11, 12]. Здесь будут сделаны некоторые дополнения, имея в виду главным образом те номограммы, которые должны размножаться не типографским, а фототрафическим путем.

Графическое оформление номограмм складывается из следующих операций: размещение на чертеже в надлежащих местах носителей всех шкал как заданных функций, так и вспомогательных переменных; градуирование шкал и оформление номограммы пояснительными надписями.

Все необходимые для размещения носителей шкал данные получают в результате расчетов, и для различных типов цепных номограмм излагаются в соответствующих разделах работы.

Номограммы следует строить на ватмане. Построение начинается с построения осевой линии; в большинстве случаев она проводится в нижней части чертежа. Далее, пользуясь результатами расчета номограммы, вычерчиваются носители шкал. На них отмечают концы шкал, а затем приступают к градуированию. Если для градуирования шкал должны быть использованы готовые шаблоны, например логарифмические линейки, то градуировку следует переносить на ватман с помощью полоски бумаги. Эта работа должна быть произведена очень аккуратно.

Как правило, следует показывать штрихи с одной стороны. Расстояние между пометками должно составлять от 1 до 4 мм и во всяком случае быть не менее 0,5 мм и не более 5 мм.

Для облегчения пользования номограммой, последняя должна быть снабжена ключом, показывающим последовательность перехода от одной шкалы к другой, и примером расчета. Готовую номограмму копируют на кальку.

После того, как номограмма вычерчена, оформлена и снабжена надписью, ее следует размножить. Если номограмма не предназначена для типографского издания и имеет своим назначением применение в местных условиях (лаборатория, завод, конструкторское бюро и т. д.), то размножение номограммы удобнее всего производить путем печатания на фотобумаге, контактным способом. Исходя из этого, готовой номограмме следует придавать размеры, принятые для фотобумаги, а именно: 13×18, 18×24, 24×30 и 30×40 см.

При накатке готовых отпечатков на стекло происходит значительная деформация бумаги, в особенности в направлении движения валика (от 2 до 4%), которая при высыхании бумаги закрепляется. Во избежание этого фотоотпечатки не следует накатывать.

### Пользование номограммой

Вопрос о том, как пользоваться номограммой, иногда считается само собой разумеющимся и ему не уделяют должного внимания. Между тем это далеко не так, и в особенности для цепных номограмм, содержащих большое число шкал, должны быть указаны приемы, позволяющие производить построение разрешающих прямых с возможной точностью. В противном случае может произойти накопление значительной графической ошибки, которая существенно снизит точность ответа, не говоря уже о возможности грубых просчетов в порядке применения шкал.

Если имеется готовая номограмма с тремя шкалами, размноженная типографским или литографским путем, то, вообще говоря, можно было бы при построении разрешающих прямых пользоваться линейкой и карандашом. Однако при этом номограмма скоро приходит в негодность. Поэтому даже в этом случае не рекомендуется применять такой способ пользования номограммой.

Если же номограмма с тремя шкалами размножена контактным фотографическим путем с калек, то получаемая номограмма состоит из белых линий на глянцевом черном фоне. Понятно, что проведение карандашных линий на такой номограмме представляет собой практически трудную задачу.

Поэтому основным методом фиксирования точки на такой номограмме должен являться укол тонкой иглой; игла должна не *прокалывать* шкалы номограммы, а лишь слегка их *укалывать*. Тогда номограмма может служить долго.

При пользовании непрозрачной (деревянной) линейкой трудно находить ее правильное положение на шкалах заданных функций. Поэ-

тому лучше применять прозрачные целлулоидные линейки, так как они позволяют легко интерполировать шкалу между ее делениями. Для номограммы с тремя переменными удобно применять прозрачные целлулоидные линейки с прочерченной на них тонкой рисккой и накладывать их на номограмму так, чтобы поверхность линейки, на которой нанесена риска, была обращена к номограмме; это избавляет отсчеты по шкале от параллакса\* [11].

Для цепных номограмм со многими переменными способ прозрачной линейки с рисккой неприменим, так как точка, полученная на немой шкале вспомогательной переменной, должна служить исходным пунктом для построения следующей разрешающей прямой; будучи прикрыта прозрачной линейкой, она недоступна для этих построений.

Для укальвания шкал номограмм удобно применять специальные острия, которые легко изготовить самому, вставив с помощью плоскогубцев тонкую швейную иглу (со стороны ушка) в карандаш с торца. Работа с такими остриями производится с большой точностью и быстротой. При этом существенно уменьшает погрешность нахождения точки пересечения разрешающей прямой со шкалой [7].

Интерполяция на шкалах заданных переменных производится укальванием при отсутствии линейки, следовательно, она свободна от влияния величины угла наклона разрешающей прямой в шкале; после приложения линейки к двум остриям на двух шкалах заданных переменных звена производится укальвание третьей шкалы звена, и результат читается после удаления линейки, т. е. опять-таки независимо от угла наклона разрешающей прямой.

---

\* Параллаксом называется перспективное смещение рассматриваемого предмета при изменении точки наблюдения.

### III. ТЕОРИЯ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ

#### § 6. ХАРАКТЕРИСТИКА ПОНЯТИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ

##### Структура цепных номограмм с параллельными шкалами

Для номографирования соотношений между многими переменными, в особенности для обычно встречающихся в инженерной практике несложных формул, предпочтительнее пользоваться элементарным методом. Цепные номограммы с параллельными шкалами, имеющие весьма широкое распространение в практике и легко поддающиеся расчету, дают хорошее подтверждение этого положения.

Цепные номограммы с параллельными шкалами служат для номографирования второй канонической формы уравнений со многими переменными вида

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i) = f_n(u_n), \quad (6.1)$$

разрешаемых в номограммах нулевого жанра; здесь

$u_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  — заданные независимые переменные,  
 $u_n$  — зависимая переменная и  
 $f_i(u_i) (i=1, 2, \dots, n)$  — непрерывные, монотонные (по крайней мере в изучаемой области) функции.

Как известно, одним из важных преимуществ номографического расчета по сравнению с любым другим является возможность найти любую из  $n$  переменных, если заданы остальные  $n-1$ . С этой точки зрения все переменные заданного уравнения равноправны. Сделанное выше разделение переменных на независимые и зависимую имеет только тот смысл, что оно облегчает формулирование связи между заданными и искомой величинами. Совершенно ясно, что путем простого преобразования уравнения (6.1) любая переменная этого уравнения может быть сделана зависимой, и поэтому выводимые ниже зависимости окажутся справедливыми для любой перестановки.

При разьединении переменных уравнение (6.1) заменяется эквивалентной ему системой уравнений с тремя переменными вида

$$\left. \begin{aligned} f_1(u_1) + f_2(u_2) &= \rho_1 \\ \rho_1 + f_3(u_3) &= \rho_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \rho_{n-3} + f_{n-1}(u_{n-1}) &= f_n(u) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-3}$  — вспомогательные переменные.

Естественно, что эта замена не является единственной; путем перестановки членов уравнения (6.1) может быть принята другая последовательность заданных функций в уравнении (6.1) и соответственно получены другие значения вспомогательных переменных. С точки зрения принципов описываемого метода номографирования это не имеет значения. С другой стороны, практически важный вопрос о рекомендуемой последовательности расположения переменных в уравнении (6.1) и соответственно, значение вспомогательных переменных подробнее освещен в § 9.

Существующие способы построения цепных номограмм с параллельными шкалами для решения уравнения (6.1) требуют определения параметров шкал всех вспомогательных переменных  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-3}$  системы (6.2).

Этот метод уже при пяти переменных является довольно трудоемким, при большом же числе переменных громоздкость расчета еще более возрастает. Кроме того, отсутствует возможность контроля результатов подсчета, так как при переходе от одного звена к другому может произойти накопление ошибок расчета, которое может быть установлено только после построения номограммы, и сравнения результатов номографического и аналитического расчетов. В случае расхождения этих результатов проверка правильности построения сводится по существу к повторному выполнению тех же расчетов, так как не существует метода контроля расчета отдельных звеньев.

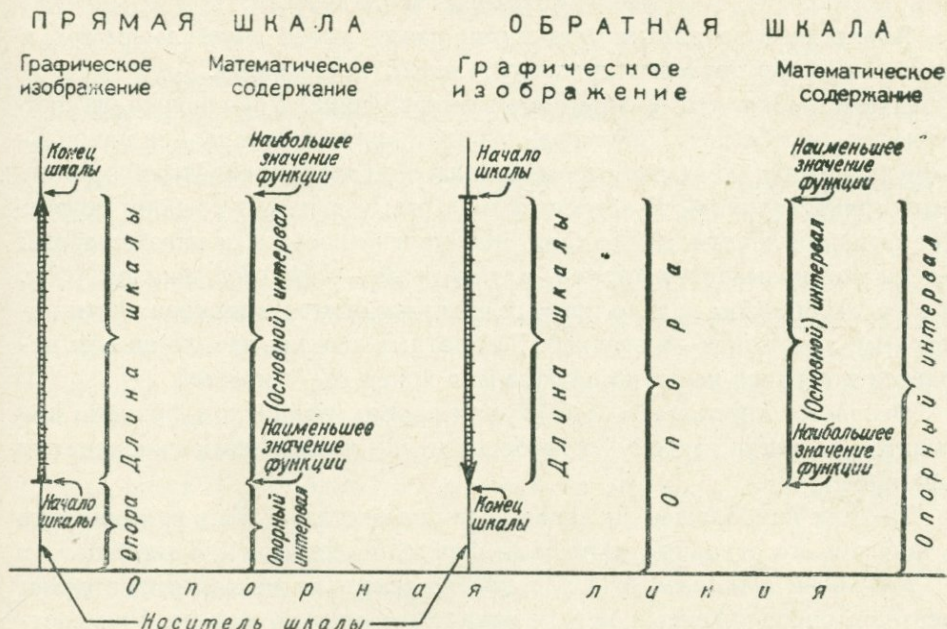
В настоящей работе, исходя из установленного автором одного общего свойства цепных номограмм с параллельными шкалами [15], изложен метод номографирования уравнения со многими переменными, не требующий вычисления параметров шкал вспомогательных переменных.

Некоторые положения, вытекающие из указанного свойства, позволяют осуществить контроль расчета как всей номограммы, так и отдельных ее элементов. Алгебраические зависимости между характеристиками номограммы дают возможность рационально варьировать ее конструктивные элементы, еще до построения номограммы и придавать номограмме наиболее целесообразный вид.

#### Характеристика функций и шкал

Здесь приводятся определения ряда терминов и понятий, которые были введены в дополнение и уточнение к имеющимся в литературе определениям. Они относятся к любым цепным номограммам. Некоторые дополнительные термины и определения, относящиеся только к номограммам с наклонными шкалами, описаны ниже, в соответствующем разделе работы.

Изучаемые в настоящем параграфе элементы шкалы и соответствующие им функции приведены на фиг. 19.



Фиг. 19

Предельные значения изучаемых функций достигаются при значениях аргумента, равных тем пределам переменной, которые должны быть изображены на шкале. В номографии принято называть нижним и верхним пределами переменной те наименьшее и наибольшее значения, которые принимает переменная на шкале. Эти общепринятые определения не позволяют достаточно полно дифференцировать те понятия, которыми оперирует настоящая работа. Поэтому автор при анализе цепных номограмм был вынужден применить несколько отличные понятия.

Различаются *наибольшее*  $f(u)_2$  и *наименьшее*  $f(u)_1$  значения функции. Предельное значение переменной, соответствующее наибольшему значению функции, называется *дистальным* пределом переменной; наименьшему значению функции соответствует *проксимальный\** предел переменной. Поэтому для возрастающих функций дистальный предел переменной отвечает верхнему его пределу в обычном понимании, а проксимальный—его нижнему пределу. Для убывающих функций дистальный предел переменной соответствует нижнему пределу переменной, а проксимальный—верхнему.

Для семантического понимания этих терминов надо представить себе наблюдателя, расположенного на носителе шкалы таким образом, чтобы вся рабочая шкала была бы расположена перед ним в сторону

\* Дистальный (лат.—distalis)—дальше отстоящий; проксимальный (лат.—proximus)—ближайший.

возрастания функции; тогда ближайший к наблюдателю конец шкалы будет проксимальным, а дальний—дистальным; соответственно должны быть обозначены и пометки концевых точек шкалы.

Аналогично заданным функциям различаются *наибольшее*  $(p)_2$  и *наименьшее*  $(p)_1$  значения вспомогательных переменных.

Принимается, что шкалы имеют направление. *Начало шкалы* соответствует наименьшему значению функции, а *конец шкалы*—ее наибольшему значению. Таким образом, шкалы всегда направлены в сторону возрастания функции. В зависимости от того, в какую сторону возрастает функция, шкала может быть направлена вверх или вниз\*; первый вид шкалы называется *прямой*, а второй вид—*обратной* шкалой (фиг. 19). Таким образом начало прямых шкал находится в нижней части номограмм, а их конец—в верхней. В обратных шкалах начало шкалы находится в верхней части номограммы, а конец ее—в нижней.

*Основным интервалом*  $A(R)**$  или просто *интервалом* функции называется разность между наибольшим и наименьшим значениями функции.

Так как наибольшее значение функции всегда больше наименьшего ее значения, то основные интервалы функции всегда положительны.

*Рабочими шкалами*  $h(t)$ , или, кратко, *шкалами*, называются отрезки носителя, расположенные между началом и концом шкалы. Они соответствуют основным интервалам функции. Так как шкалы функции имеют направление, то естественно считать, что длины параллельных шкал являются алгебраическими величинами, т. е. приписывать им знак. Длины прямых шкал имеют знак плюс, а обратных шкал—знак минус.

*Коэффициентом шкалы*  $a(r)$  называется вектор, длина которого равна отношению основного интервала функции к длине шкалы и который направлен вдоль носителя шкалы; так как основные интервалы функции всегда положительны, то направление коэффициента шкалы всегда соответствует знаку длины шкалы, т. е. коэффициент прямых шкал положителен и направлен вверх; коэффициент обратных шкал отрицателен и направлен вниз.

*Плечом шкалы* относительно данной точки называется длина отрезка перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки на носитель шкалы.

*Моментом коэффициента шкалы*  $M(N)$  относительно данной точки называется произведение коэффициента шкалы на его плечо относительно той же точки.

Момент коэффициента шкалы считается положительным, когда наблюдателю, находящемуся в точке, относительно которой берется момент, представляется, что коэффициент шкалы стремится вращать шкалу справа налево, т. е. против движения часовой стрелки.

Прямая, лежащая в плоскости номограммы, перпендикулярная к носителям всех шкал, называется *опорной линией*. Удобно, когда опор-

\* Принимается, что в цепных номограммах с параллельными и наклонными шкалами все функциональные шкалы имеют вертикальное направление.

\*\* В скобках даны символы для вспомогательных переменных.

ная линия расположена в нижней части номограммы и не пересекает ни одну шкалу.

*Опорой*  $g(s)$  называется отрезок носителя шкалы, имеющий началом точку пересечения носителя шкалы с опорной линией и концом—начало основной шкалы.

Опоры, направленные вверх, называются *прямыми* опорами, а направленные вниз—*обратными* опорами.

Аналогично принятому в отношении шкал условимся считать, что длины прямых опор положительны, а длины обратных опор отрицательны.

Для дальнейшего существенную роль будет играть также понятие опорного интервала функции, вследствие чего необходимо допустить, что изучаемые функции продолжаемы до опорной линии и что в отрезке от начала основной шкалы до опорной линии функции также монотонны, как и в пределах основного интервала функции.

Для того чтобы это допущение всегда имело место, нужно его учесть при выборе положения опорной линии, так как не всякая функция может быть продолжена.

*Опорным интервалом*  $B(S)$  функции называется произведение коэффициента шкалы на длину опоры.

Знак опорного интервала определяется сочетанием знаков коэффициентов шкал и соответствующих длин шкал. Так, если начала рабочих шкал располагаются выше опорной линии, то отсюда следует, что длины опор всех шкал положительны, а длины прямых шкал—положительны и обратных—отрицательны. Поэтому для прямых шкал будем иметь: основной и опорный интервалы положительны (произведение положительного коэффициента шкалы на положительную длину шкалы или опоры, соответственно). Для обратных шкал будем иметь: основной интервал положителен (произведение отрицательного коэффициента шкалы на отрицательную длину шкалы), а опорный интервал отрицателен (произведение отрицательного коэффициента шкалы на положительную длину опоры). При расположении начала рабочих шкал ниже опорной линии знаки опорных интервалов соответственно изменяются.

### Звенья цепных номограмм и составляющие их шкалы.

В первом звене имеем две шкалы для заданных функций  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$  и одну шкалу для вспомогательной переменной  $\rho_1$ ; во всех следующих звеньях, кроме последнего,—по две шкалы для вспомогательных переменных  $\rho_1, \rho_2 \cdot \cdot \cdot \rho_{n-3}$  и одну шкалу для очередной заданной функции:  $f_3(u_3), f_4(u_4) \cdot \cdot \cdot \cdot f_{n-2}(u_{n-2})$ . Наконец, в последнем звене имеется по одной шкале для последней вспомогательной переменной  $\rho_{n-3}$ , для последней и предпоследней заданных функций:  $f_{n-1}(u_{n-1})$  и  $f_n(u_n)$ .

Функции или вспомогательные переменные, стоящие в левых частях равенства (6.2), называются *слагаемыми* функциями или переменными, стоящие в правых частях этих равенств,—*суммарными*. Так, в первом

равенстве этой системы суммарными слагаемыми будут функции  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$ , а суммарной переменной —  $\rho_1$ . Во втором равенстве слагаемыми будут функция  $f_3(u_3)$  и переменная  $\rho_1$ , а суммарной переменной  $\rho_2$ .

Таким образом, все заданные функции и их шкалы являются слагаемыми функциями и шкалами, а все вспомогательные переменные и их шкалы — попеременно суммарными (по отношению к стоящим левее их в системе уравнений (6.2)) и слагаемыми (по отношению к стоящим правее их в той же системе).

### Функциональная связь между параметрами слагаемых и суммарных функций

Установим те функциональные связи, которые разрешают, исходя из параметров шкал заданных функций, непосредственно, т. е. без производства промежуточных вычислений, определять параметры любой вспомогательной суммарной переменной, и в том числе функции зависимой переменной, так как она может быть рассматриваема, как последняя вспомогательная переменная.

Следует указать, что в номографии часто рассматриваются случаи, когда заданы не только пределы изменения зависимых переменных  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ), но и пределы изменения зависимой переменной  $u_n$ . Это, казалось бы, позволяет допустить возможность случая, когда две номограммы, имеющие одинаковыми все заданные функции независимых переменных  $f_i(u_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) и пределы изменения этих переменных и одинаковыми функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$ , могут иметь различные пределы изменения этой последней переменной, т. е. что пределы переменной  $u_n$  могут не зависеть от пределов изменения переменных  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ).

Однако такое представление только кажущееся. На самом деле, все параметры шкалы функции зависимой переменной для данного вида функциональной зависимости  $f_n(u_n)$  и для данного типа и схемы номограммы, в том числе пределы изменения переменной  $u_n$ , *однозначно* связаны с параметрами шкал функции независимых переменных.

Правда, в этом случае можно получить две номограммы с различными пределами шкал функций зависимой переменной, но это различие кажущееся, так как оно происходит вследствие отсечения части шкалы этой функции (§ 9). Полная длина шкалы функции зависимой переменной, а следовательно, и пределы этой переменной находятся в строгом соответствии с выбранным типом и схемой номограммы.

### Параметры шкал функции зависимой переменной и вспомогательных переменных

Для построения шкалы функции зависимой переменной необходимо знание следующих величин:

- 1) Расстояния носителя этой шкалы от какой-либо из шкал независимых переменных или немых.
- 2) Положения начала и конца шкалы и длину ее.
- 3) Величин проксимального и дистального пределов зависимой

переменной или, что то же самое, пометки точек шкалы у ее начала и конца, для чего необходимо знание наименьшего и наибольшего значений функции этой переменной.

4) Интервала функции зависимой переменной и коэффициента ее шкалы, которые дадут возможность составить уравнение шкалы и, следовательно, градуировать ее.

Все параллельные шкалы функций независимых переменных могут быть произвольно расположены в поле чертежа и при их назначении руководствуются только соображениями точности построения и удобства пользования.

Расположение шкал вспомогательных переменных определяется принятым расположением шкал заданных функций; поэтому параметры шкал вспомогательных переменных, будучи функционально связаны с параметрами шкал функции независимых переменных, должны быть вычислены. Так как шкалы вспомогательных переменных остаются неммыми, для их построения достаточно знания расстояний носителей этих шкал от начала номограмм или от какой-либо из шкал независимых переменных.

Все изложенное необходимо для построения номограммы. Помимо того, является весьма желательным иметь возможность контроля расчета и построения как всей номограммы, так и ее отдельных звеньев.

### Свойства предельных значений и интервалов функций

Нижеследующие свойства предельных значений и интервалов суммарных функций очевидны.

*Наибольшее (наименьшее) значение* любой суммарной вспомогательной переменной равно алгебраической сумме наибольших (наименьших) значений слагаемых функций независимых переменных.

$$(\rho_k)_2 = \sum_{i=1}^{k+1} f_i(u_i)_2 ; \quad (\rho_k)_1 = \sum_{i=1}^{k+1} f_i(u_i)_1 . \quad (6.3)$$

Так как функцию зависимой переменной можно рассматривать как последнюю из суммарных вспомогательных переменных, то отсюда следует, что *наибольшее (наименьшее) значение функции* зависимой переменной равно алгебраической сумме наибольших (наименьших) значений всех заданных функций независимых переменных.

$$f_n(u_n)_2 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_2 ; \quad f_n(u_n)_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_1 . \quad (6.4)$$

Так как интервал функции равен разности между наибольшим и наименьшим значениями функции, то отсюда следует, что:

*Интервал* любой суммарной вспомогательной переменной равен сумме интервалов слагаемых функций независимых переменных, т. е.

$$R_k = \sum_{i=1}^{k+1} A_i . \quad (6.5)$$

Рассматривая функцию зависимой переменной как последнюю суммарную вспомогательную переменную, выводим:

*Интервал функций* зависимой переменной равен сумме интервалов всех заданных функций независимых переменных, т. е.

$$A_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i . \quad (6.6)$$

Применяя эти же соображения к опорным интервалам шкал вспомогательных переменных, и имея в виду, что они могут обладать различными знаками, заключаем, что

*Опорный интервал* любой суммарной вспомогательной переменной равен алгебраической сумме опорных интервалов слагаемых функций независимых переменных:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k+1} B_i . \quad (6.7)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что:

*Опорный интервал функции* зависимой переменной равен алгебраической сумме опорных интервалов всех заданных функций независимых переменных,

$$B_n = \sum_{i=1}^{n-1} B_i \quad (6.8)$$

*Уравнения шкал.*

На основании (1.3), уравнение шкалы всегда должно иметь вид

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \frac{1}{a_i} [f_i(u_i) - f_i(u_{i1})] , \\ y_k &= \frac{1}{r_k} [\rho_k - (\rho_k)_1] , \\ y_n &= \frac{1}{a_n} [f_n(u_n) - f_n(u_{n1})] , \end{aligned} \right\} , \quad (6.9)$$

где

$y_i$  — ордината шкалы  $i$ -й функции независимой переменной,

$y_k$  — ордината шкалы  $k$ -й вспомогательной переменной, а

$y_n$  — ордината шкалы функции зависимой переменной.

Отсюда, *ордината шкалы\** любой функции (как заданных функций независимых переменных, так и вспомогательных переменных и функции зависимой переменной) всегда равна отношению разности значения функции и ее наименьшего значения к коэффициенту шкалы этой функции. Перед уравнением шкалы функции, имеющей положительные значения, стоит знак плюс, а перед уравнением шкалы функции, имеющей отрицательные значения, — минус.

\* Здесь имеются в виду вертикальные функциональные шкалы номограмм с параллельными и наклонными шкалами; поэтому понятие «ордината» эквивалентно расстоянию от начала шкалы до рассматриваемой точки шкалы.

Перейдем к изложению двух основных теорем для номограммы с параллельными шкалами и следствий из них.

### Теорема 1 о коэффициенте шкалы суммы функции

Коэффициент шкалы любой суммарной вспомогательной переменной равен алгебраической сумме коэффициентов шкал слагаемых функций независимых переменных:

$$r_k = \sum_{i=1}^{k+1} a_i. \quad (6.10)$$

Так как функцию зависимой переменной можно рассматривать как последнюю из суммарных вспомогательных переменных, то отсюда вытекает следствие:

Коэффициент шкалы функции зависимой переменной равен алгебраической сумме коэффициентов шкалы всех заданных функций независимых переменных, т. е.

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i. \quad (6.11)$$

### Теорема 2 о моменте коэффициента шкалы

Момент коэффициента шкалы любой суммарной вспомогательной переменной относительно произвольной точки равен алгебраической сумме моментов коэффициентов шкал слагаемых функций независимых переменных относительно той же точки:

$$N_k = \sum_{i=1}^{k+1} M_i. \quad (6.12)$$

Рассматривая функцию зависимой переменной, как последнюю суммарную вспомогательную переменную, выводим следствие.

Момент коэффициента шкалы функции зависимой переменной относительно произвольной точки равен алгебраической сумме моментов коэффициентов шкал всех заданных функций независимых переменных относительно той же точки, т. е.

$$M_n = \sum_{i=1}^{n-1} M_i. \quad (6.13)$$

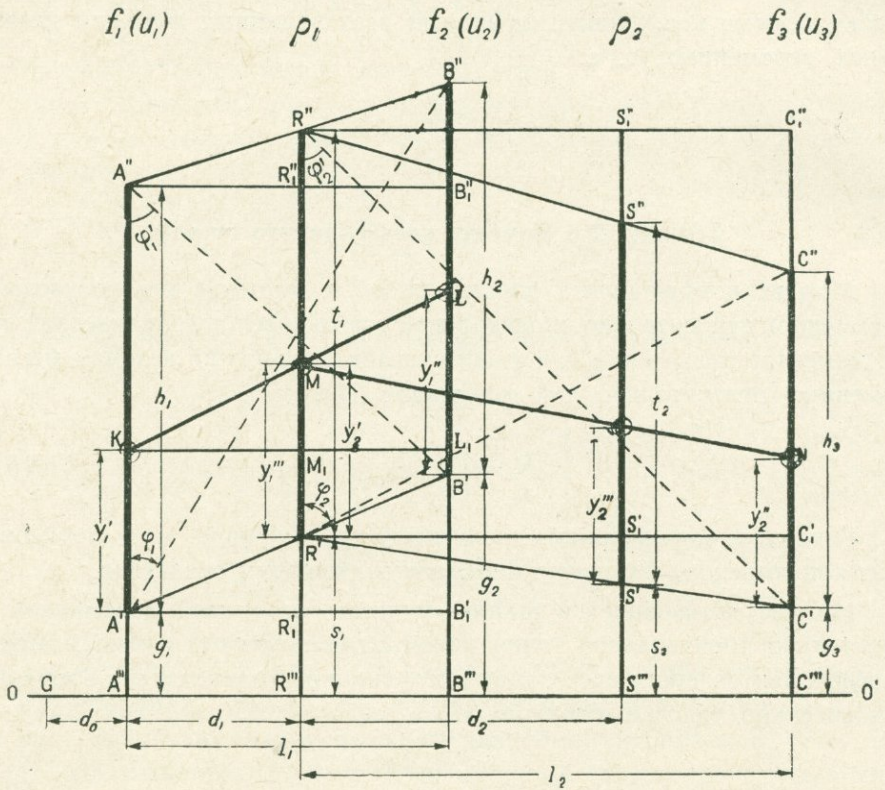
Приведенные выше формулы и теоремы дают возможность без труда вычислить все необходимые данные для построения номограмм. Ниже (§ 7) приведены доказательства этих формул и теорем. Если читатель интересуется только практическим применением изложенных теорем к расчету и построению номограмм, то он может прямо перейти к следующей главе IV, где изложены приемы расчета и построения цепных номограмм с параллельными шкалами.

§ 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ПАРАМЕТРЫ ШКАЛ, И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Длина опоры и шкалы вспомогательной переменной первого звена

Рассмотрим первое звено номограммы для первого уравнения системы (6.2).

Допустим, что прямые шкалы  $A'A''$  и  $B'B''$ , служащие для изображения функциональных зависимостей  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$ , имеют длины  $h_1$  и  $h_2$  соответственно, а начала шкал  $A'$  и  $B'$  находятся на расстоянии  $g_1$  и  $g_2$  от опорной линии  $OO'$  (фиг. 20). В частном случае эта прямая может проходить через начало одной или нескольких шкал.



Фиг. 20

Поместим шкалу вспомогательной переменной  $\rho_1$  между шкалами заданных функций. Пусть линия  $R'R''$  представляет ее шкалу; допустим, что она расположена на расстоянии  $d_1$  от шкалы функции  $f_1(u_1)$ ; обозначим длину шкалы  $\rho_1$  через  $t_1$ , а расстояние начала шкалы  $R'$  от опорной линии  $OO'$  через  $s_1$ . Определим вначале эти величины.

Так как назначением шкалы  $R'R''$  вспомогательной переменной  $\rho_1$  является связь между шкалами  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$ , и так как эта связь должна обеспечиваться для любого сочетания точек, выбранных на

этих шкалах, то необходимо и достаточно, чтобы концы шкал  $R'R''$  находились на прямых  $A'B'$  и  $A''B''$ , соединяющих концы шкал функции  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$ ; отсюда можно определить длину  $t_1$  шкалы вспомогательной переменной  $\rho_1$  и расстояние  $s_1$  ее начала от опорной линии  $OO'$ .

Проводим прямую  $A'B'_1$ , параллельную опорной линии  $OO'$ ; из подобия треугольников  $A'R'R'_1$  и  $A'B'B'_1$  получаем

$$s_1 = \frac{d_1}{l_1} (g_2 - g_1) + g_1. \quad (7.1)$$

Аналогично, проводим прямую  $A''B''_1$ , параллельную  $OO'$ ; исходя из подобия треугольников  $A''R''R''_1$  и  $A''B''B''_1$  и применяя (7.1), определяем

$$t_1 = \frac{d_1}{l_1} (h_2 - h_1) + h_1. \quad (7.2)$$

### Уравнение геометрической связи первого звена

Найдем теперь выражение геометрической связи между шкалами; разрешающая прямая  $KL$  отсекает на шкалах заданных функций  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$  отрезки  $y_1'$  и  $y_1''$  соответственно, а на шкале вспомогательной переменной  $\rho_1$  — отрезок  $y_1'''$ . Индекс «1» у всех этих величин означает, что они относятся к первому звену. Проводя прямую  $KL_1$ , параллельную опорной линии  $OO'$ , получаем подобные треугольники  $KMM_1$  и  $KLL_1$ , откуда находим

$$\frac{y_1''' + s_1 - y_1' - g_1}{d_1} = \frac{y_1'' + g_2 - y_1' - g_1}{l_1}.$$

Преобразуя это выражение и заменяя  $s_1$  его значением из (7.1), получим уравнение геометрической связи

$$\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{l_1}\right) y_1' + \frac{1}{l_1} y_1'' = \frac{1}{d_1} y_1'''. \quad (7.3)$$

### Адекватность уравнения геометрической связи

Покажем, что номограмма, обладающая уравнением геометрической связи вида (7.3), может служить для решения уравнений типа

$$f_1(u_1) + f_2(u_2) = \rho_1. \quad (7.4)$$

Умножив это уравнение на произвольное число  $u$  и прибавив к обеим частям равенства произвольные числа  $v$  и  $w$ , мы не нарушим равенства и получим

$$u f_1(u_1) + v + u f_2(u_2) + w = u \rho_1 + v + w.$$

Сравнивая его с (7.3), замечаем, что, для того чтобы номограмма с уравнением геометрической связи (7.3) могла служить для решения заданного уравнения (7.4), необходимо, чтобы имели место следующие равенства

$$\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{l_1}\right) y_1' = u f_1(u_1) + v,$$

$$\frac{1}{l_1} y_1'' = u f_2(u_2) + \omega ,$$

$$\frac{1}{d_1} y_1''' = u \rho_1 + v + \omega .$$

Отсюда уравнения шкал принимают следующий вид:

$$y_1' = u \frac{l_1 d_1}{l_1 - d_1} f_1(u_1) + v \frac{l_1 d_1}{l_1 - d_1} , \quad (7.5)$$

$$y_1'' = u l_1 f_2(u_2) + \omega l_1 , \quad (7.6)$$

$$y_1''' = u d_1 \rho_1 + v d_1 + \omega d_1 . \quad (7.7)$$

Вводя обозначения

$$p_1' = u \frac{l_1 d_1}{l_1 - d_1} , \quad (7.8)$$

$$q_1' = v \frac{l_1 d_1}{l_1 - d_1} , \quad (7.9)$$

$$p_1'' = u l_1 , \quad (7.10)$$

$$q_1'' = \omega l_1 , \quad (7.11)$$

перепишем выражения (7.5) и (7.6) так:

$$y_1' = p_1' f_1(u_1) + q_1' , \quad (7.12)$$

$$y_1'' = p_1'' f_2(u_2) + q_1'' . \quad (7.13)$$

Найдем, каким условиям должны удовлетворять значения произвольно выбранных ранее величин  $u$ ,  $v$  и  $\omega$  для того, чтобы они позволили выразить уравнения шкал (7.5) и (7.6) в простом виде (7.12) и (7.13).

Из уравнений от (7.8) до (7.11) определяем

$$u = \frac{p_1''}{l_1} , \quad (7.14)$$

$$\omega = \frac{q_1''}{l_1} , \quad (7.15)$$

$$v = \frac{q_1' p_1''}{p_1' l_1} . \quad (7.16)$$

Расстояние  $d_1$  шкалы функции  $\rho_1$  от шкалы функции  $f_1(u_1)$  находим из (7.8) и (7.14)

$$d_1 = \frac{p_1' l_1}{p_1' + p_1''} . \quad (7.17)$$

Выразим, наконец, уравнение (7.7) шкалы функции  $\rho_1$  в тех же величинах, которые приняты для уравнения (7.12) и (7.13) первых двух шкал; для этого подставляем найденные выражения для  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  и  $d_1$ , из уравнений от (7.14) до (7.17) в выражение (7.7)

$$y_1''' = \frac{p_1' p_1''}{p_1' + p_1''} \rho_1 + \frac{p_1' q_1'' + p_1'' q_1'}{p_1' + p_1''} . \quad (7.18)$$

### Уравнения шкал функции первого звена

Перейдем к определению уравнений шкал  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$ ; иными словами, подберем такие значения величин  $p_1'$ ,  $p_1''$ ,  $q_1'$  и  $q_1''$ , чтобы в пределах чертежа разместились заданные значения переменных  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда уравнение (7.18) шкалы получится как функция найденных параметров уравнений шкал  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$ .

Параметры уравнения (7.12) получаются из следующих условий при  $u_1 = (u_1)_1$   $y_1' = 0$ ; при  $u_1 = (u_1)_2$   $y_1' = h_1$ .

Применяя их к (7.12), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= p_1' f_1(u_1)_1 + q_1', \\ h_1 &= p_1' f_1(u_1)_2 + q_1', \end{aligned} \quad (7.19)$$

откуда

$$p_1' = \frac{h_1}{f_1(u_1)_2 - f_1(u_1)_1}.$$

Но знаменатель этого выражения равен интервалу функции  $A_1$ , поэтому

$$p_1' = \frac{1}{a_1}.$$

Подставляя это значение в (7.19), находим

$$q_1' = -\frac{f_1(u_1)_1}{a_1}.$$

Параметры уравнения (7.13) получаются из условия

при  $u_2 = (u_2)_1$   $y_1'' = 0$ ; при  $u_2 = (u_2)_2$   $y_1'' = h_2$ .

Аналогично получаем

$$p_1'' = \frac{1}{a_2} \quad \text{и} \quad q_1'' = -\frac{f_2(u_2)_1}{a_2}.$$

Подставив в выражения (7.18) и (7.17) полученные значения  $p_1'$ ,  $p_1''$ ,  $q_1'$  и  $q_1''$ , находим уравнение шкалы вспомогательной переменной  $\rho_1$

$$y_1''' = \frac{\rho_1 - [f_1(u_1)_1 + f_2(u_2)_1]}{a_1 + a_2} \quad (7.20)$$

и расстояние  $d_1$  шкалы переменной  $\rho_1$  от начала звена

$$d_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} l_1. \quad (7.21)$$

### Доказательство теоремы о коэффициенте шкалы

Рассмотрим предельные значения вспомогательной переменной  $\rho_1$ ; они определяются из условия, что концы шкалы этой переменной лежат на прямых, соединяющих концы шкал заданных функций  $f_1(u_1)$  и  $f_2(u_2)$ , т. е.

при  $\rho_1 = (\rho_1)_1$   $y_1''' = 0$ ; при  $\rho_1 = (\rho_1)_2$   $y_1''' = t_1$ .

Для наименьшего значения  $(\rho_1)_1$  из (7.20) имеем

$$0 = \frac{(\rho_1)_1 - [f_1(u_1)_1 + f_2(u_2)_1]}{a_1 + a_2},$$

откуда находим (ср. 6.3)

$$(\rho_1)_1 = f_1(u_1)_1 + f_2(u_2)_1. \quad (7.22)$$

Для наибольшего значения  $(\rho_1)_2$  из (7.20) получаем

$$t_1 = \frac{(\rho_1)_2 - [f_1(u_1)_1 + f_2(u_2)_1]}{a_1 + a_2}. \quad (7.23)$$

Длину  $t_1$  шкалы вспомогательной переменной  $\rho_1$  определяем из (7.2) и (7.21)

$$t_1 = \frac{a_1 h_1 + a_2 h_2}{a_1 + a_2}, \quad (7.24)$$

или, заменяя произведения в числителе через интервалы, имеем

$$t_1 = \frac{A_1 + A_2}{a_1 + a_2}. \quad (7.25)$$

Сравнивая это выражение с (7.23), получаем

$$(\rho_1)_2 = A_1 + A_2 + f_1(u_1)_1 + f_2(u_2)_1,$$

а заменяя интервалы функции разностями предельных значений функции (ср. 6.3), имеем

$$(\rho_1)_2 = f_1(u_1)_2 + f_2(u_2)_2. \quad (7.26)$$

Сравнивая последние два выражения, находим, что интервал вспомогательной переменной равен сумме интервалов слагаемых функций (ср. 6.5)

$$R_1 = (\rho_1)_2 - (\rho_1)_1 = A_1 + A_2. \quad (7.27)$$

Но

$$r_1 = \frac{R_1}{t_1};$$

подставляя сюда значения  $t_1$  из (7.25) и  $R_1$  из (7.27), находим

$$r_1 = a_1 + a_2, \quad (7.28)$$

т. е., что коэффициент шкалы суммарной вспомогательной переменной равен сумме коэффициентов шкал слагаемых функции независимых переменных. Этот вывод соответствует теореме о коэффициенте шкалы в применении к первому звену.

### Доказательство теоремы о моменте коэффициента шкалы

Для дальнейшего необходимо знание длины опоры  $s_1$ . Эта величина получится из (7.1), если подставить вместо  $d_1$  его значение из (7.21); тогда найдем

$$s_1 = \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2}{a_1 + a_2}. \quad (7.29)$$

Определим моменты коэффициентов шкал относительно некоторой точки  $G$ , находящейся на расстоянии  $d_0$  от шкалы первой функции независимой переменной  $f_1(u_1)$  (фиг. 20).

Из чертежа видно, что момент коэффициента шкалы первой слагаемой функции  $f_1(u_1)$  относительно точки  $G$  равен

$$M_1 = a_1 d_0. \quad (7.30)$$

Момент коэффициента шкалы второй слагаемой функции  $f_2(u_2)$  относительно той же точки равен

$$M_2 = a_2(d_0 + l_1) . \quad (7.31)$$

Наконец, момент коэффициента шкалы суммарной вспомогательной переменной  $\rho_1$  равен

$$N_1 = r_1(d_0 + d_1) . \quad (7.32)$$

На основании теоремы о коэффициенте шкалы переписываем (7.21) так:

$$r_1 d_1 = a_2 l_1 .$$

Прибавляя к левой части этого равенства\* выражение  $r_1 d_0$ , а к правой—равное ему  $(a_1 + a_2) d_0$ , получим

$$r_1 d_0 + r_1 d_1 = (a_1 + a_2) d_0 + a_2 l_1 ,$$

или, преобразуя, имеем

$$r_1(d_0 + d_1) = a_1 d_0 + a_2(d_0 + l_1) .$$

Подставляя сюда выражения (7.30) до (7.32), находим

$$N_1 = M_1 + M_2 .$$

Этим доказывается теорема о моменте коэффициента шкал для первого звена.

#### Случай отрицательных значений функции

Приведенные выше уравнения были выведены в том предположении, что складываемые значения функции положительны. Если же значение одной из функций, например  $f_2(u_2)$ , отрицательно, то ее можно представить в виде  $-f_2(u_2)$ , где функция  $f_2(u_2)$  снова имеет положительное значение. Тогда, рассматривая сумму

$$f_1(u_1) + [-f_2(u_2)] = \rho_1 ,$$

нетрудно убедиться в том, что все выведенные выше уравнения справедливы и для этого случая.

Естественно шкалы функций, имеющих отрицательное значение, складывать в направлении, обратном принятому для шкалы функции, имеющей положительное значение; иными словами, начало шкалы будет соответствовать наибольшему абсолютному значению функции независимой переменной, а конец ее—наименьшему значению этой величины.

В результате указанной замены легко получить следующие выражения для отрицательных значений функции;

интервал функции  $A_2 = f_2(u_2)_1 - f_2(u_2)_2$ ;

уравнение шкалы заданной функции

$$y_1'' = -\frac{1}{a_2} [f_2(u_2) - f_2(u_2)_1] ;$$

уравнение шкалы вспомогательной переменной

$$y_1''' = \frac{\rho_1 - [f_1(u_1)_1 - f_2(u_2)_1]}{a_1 + a_2} ;$$

наименьшее значение вспомогательной переменной

$$(\rho_1)_1 = f_1(u_1)_1 - f_2(u_2)_1 ;$$

наибольшее значение вспомогательной переменной

$$(\rho_1)_2 = f_1(u_1)_2 - f_2(u_2)_2 .$$

Сравнивая эти выражения с найденными ранее для случая положительных значений функций уравнениями (7.22) и (7.26), замечаем, что предельные значения вспомогательных переменных равны алгебраическим суммам соответствующих предельных значений заданных функций.

### Уравнение геометрической связи второго звена

Переходим ко второму звену номограммы; оно является номограммой соотношения

$$\rho_1 + f_3(u_3) = \rho_2$$

и содержит две шкалы для вспомогательных переменных  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и одну шкалу для заданной функции независимой переменной  $f_3(u_3)$ ; при этом шкала  $\rho_1$  соединяет второе звено с первым, а шкала  $\rho_2$  — со следующим, третьим звеном номограммы (фиг. 20).

Шкала вспомогательной переменной  $\rho_1$  была изучена ранее. Шкала функции  $f_3(u_3)$  имеет длину  $h_3$ , а ее начало отстоит на расстоянии  $g_3$  от опорной линии; сама шкала функции  $f_3(u_3)$  отстоит от шкалы переменной  $\rho_1$  (начало звена) на расстоянии  $l_2$ . Шкала вспомогательной переменной  $\rho_2$  имеет длину  $t_2$ . Эта величина определяется из условия, что начало и конец шкалы должны находиться на линиях  $R'C'$  и  $R''C''$ , соединяющих соответствующие начала и концы шкал  $\rho_1$  и  $f_3(u_3)$ . Начало шкалы переменной  $\rho_2$  отстоит на расстоянии  $s_2$  от опорной линии. Это расстояние также определяется из упомянутого условия.

Разрешающая прямая  $MN$  отсекает на шкалах  $\rho_1$ ,  $f_3(u_3)$  и  $\rho_2$  отрезки  $y_2'$ ,  $y_2''$  и  $y_2'''$ , соответственно. Уравнение геометрической связи между этими тремя шкалами, аналогично (7.3), напишется так

$$\left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{l_2} \right) y_2' + \frac{1}{l_2} y_2'' = \frac{1}{d_2} y_2''' ,$$

где  $d_2$  — расстояние между шкалами функций  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Индекс «2» у всех этих величин обозначает, что они относятся ко второму звену номограммы.

### Уравнения шкал функции второго звена

Аналогично (7.12) и (7.13), уравнения шкал  $\rho_1$  и  $f_3(u_3)$  будут

$$y_2' = p_2' \rho_1 + q_2' , \tag{7.33}$$

$$y_2'' = p_2'' f_3(u_3) + q_2'' . \tag{7.34}$$

Но для уравнения шкалы вспомогательной переменной  $\rho_1$  ранее было найдено выражение (7.20). Сравнивая его с (7.33), находим параметры этого последнего уравнения

$$p_2' = \frac{1}{a_1 + a_2} ,$$

$$q_2' = - \frac{f_1(u_1)_1 + f_2(u_2)_1}{a_1 + a_2} .$$

Для определения параметров уравнения (7.34) рассмотрим пределы шкалы этой функции. Они определяются из условия

$$\text{при } u_3 = (u_3)_1 \quad y_2'' = 0; \quad \text{при } u_3 = (u_3)_2 \quad y_2'' = h_3.$$

Подставляя эти значения в (7.34) и действуя аналогично вышеизложенному, получаем

$$p_2'' = \frac{1}{a_3} \quad \text{и} \quad q_2'' = -\frac{f_3(u_3)_1}{a_3}.$$

Уравнение шкалы переменной  $\rho_2$  напомним аналогично (7.18) так:

$$y_2''' = \frac{p_2' p_2''}{p_2' + p_2''} \rho_2 + \frac{p_2' q_2'' + p_2'' q_2'}{p_2' + p_2''}.$$

Подставляя в него полученные нами значения параметров  $p_2'$ ,  $p_2''$ ,  $q_1'$  и  $q_2''$  для второго звена, получим

$$y_2''' = \frac{\rho_2 - [f_1(u_1)_1 + f_2(u_2)_1 + f_3(u_3)_1]}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Расстояние  $d_2$  найдется подстановкой тех же значений в выражение, аналогичное (7.17),

$$d_2 = \frac{p_2' l_2}{p_2' + p_2''}.$$

Имеем

$$d_2 = \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3} l_2. \quad (7.35)$$

#### Доказательство основных теорем для второго звена

Определим из чертежа длину  $t_2$  шкалы вспомогательной переменной  $\rho_2$  (фиг. 20). Проводя горизонтальную линию  $R_1'C_1'$ , получаем подобные треугольники  $R'C'C_1'$  и  $R'S'S_1'$ , из которых находим:

$$s_2 = s_1 - \frac{d_2}{l_2} (s_1 - g_3).$$

Подставляя сюда значение  $d_2$  из (7.35) и заменяя  $s_1$  его значением из (7.29), определяем

$$s_2 = \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

На основании определения можем переписать это выражение так:

$$s_2 = \frac{B_1 + B_2 + B_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Проводя горизонтальную линию  $R''C_1''$ , получаем подобные треугольники  $R''C''C_1''$  и  $R''S''S_1''$ , откуда следует

$$\frac{t_1 + s_1 - h_3 - g_3}{l_2} = \frac{t_1 + s_1 - t_2 - s_2}{d_2}.$$

Произведя несложное преобразование и учитывая (7.24), (7.29) и (7.35), а также теорему о коэффициенте шкалы и определения, получим

$$t_2 = \frac{a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Заменяя произведения в числителе на основании определения и применяя следствие (6.3), записываем

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{R_2}{t_2}.$$

Отсюда следует, что сумма  $a_1 + a_2 + a_3$  является коэффициентом шкалы переменной  $\rho_2$ , так как, согласно определению, коэффициентом шкалы любой функции является отношение интервала этой функции к ее длине. Обозначая коэффициент шкалы  $\rho_2$  через  $r_2$ , получим

$$r_2 = a_1 + a_2 + a_3. \quad (7.36)$$

Этот вывод соответствует теореме о коэффициенте шкалы в применении ко второму звену.

Подставляя (7.36) в (7.35), находим

$$r_2 d_2 = a_3 l_2. \quad (7.37)$$

Согласно определению, произведения, входящие в последнее равенство, представляют собой моменты коэффициентов шкал функций второго звена относительно точки, взятой на носителе шкалы первой функции данного звена. Прибавляя к левой части выражения (7.37) произведение  $r_2(d_0 + d_1)$ , а к правой части—равную ему величину  $(a_1 + a_2 + a_3) \times (d_0 + d_1)$ , мы не изменяем последнего равенства; тогда будем иметь

$$r_2(d_0 + d_1 + d_2) = a_1(d_0 + d_1) + a_2(d_0 + d_1) + a_3(d_0 + d_1 + l_2).$$

Преобразовывая это выражение и заменяя моментами произведения коэффициентов шкал на плечи, получим окончательно

$$N_2 = M_1 + M_2 + M_3,$$

где  $N_1$  и  $M_1$ —моменты коэффициентов шкал вспомогательных переменных и заданных функций номограммы относительно точки  $G$ , находящейся на расстоянии  $d_0$  от начала номограммы соответственно. Последний вывод соответствует теореме о моменте коэффициента шкал в применении ко второму звену номограммы.

Было бы нетрудно доказать методом полной математической индукции справедливость обеих теорем для любого звена цепной номограммы.

### Уравнения для функции зависимой переменной

Пользуясь выведенными выше зависимостями, можно найти выражения для параметров любой суммарной (вспомогательной) функции.

Исходя из сказанного, находим следующие выражения для функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$ :

$$\text{Наименьшее значение функции} \quad f_n(u_n)_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_1.$$

$$\text{Наибольшее значение функции} \quad f_n(u_n)_2 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_2.$$

Интервал  $A = f_n(u_n)_2 - f_n(u_n)_1 = \sum_{i=1}^{n-1} A_i.$

Коэффициент шкалы  $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$

Опорный интервал  $B = \sum_{i=1}^{n-1} B_i.$

Длина шкалы  $h = \frac{A_n}{a_n}.$

Длина опоры  $g_n = \frac{B_n}{a_n}.$  (7.38)

Расстояние  $d_{n-2}$  носителя шкалы функции  $f_n(u_n)$  от носителя шкалы последней вспомогательной переменной  $\rho_{n-3}$

$$d_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{a_n} l_{n-2}. \quad (7.39)$$

Расстояние  $L_n$  носителя шкалы функции  $f_n(u_n)$  от начала номограммы

$$L_n = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i+1}}{r_i} l_i.$$

Уравнение шкалы

$$y_n = \frac{f_n(u_n) - f_n(u_n)_1}{a_n}. \quad (7.40)$$

Изложенные выше свойства цепных номограмм с параллельными шкалами являются общими свойствами этой функциональной зависимости. Рассмотренные два типа шкал—прямые и обратные—переходят друг в друга при проективном преобразовании, сохраняющем параллельность носителей шкал. Этот вопрос подробнее изложен в главе X.

#### IV. РАСЧЕТ И ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

##### § 8. РАСЧЕТ, КОНТРОЛЬ И ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПНОЙ НОМОГРАММЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

###### Расчет шкал функции

При построении цепных номограмм с параллельными шкалами для уравнения со многими переменными может быть получено большое количество вариантов, так как имеется много величин, выбор которых произволен.

Произвольными являются порядок расположения шкал, значения коэффициентов шкал для различных функций, выбор длин опор, направление шкал (прямые и обратные), методы градуирования, расстояние шкал друг от друга и т. д.

Правильность выбора каждого из этих факторов определяет собой качество получаемой номограммы. Ниже дается анализ этих факторов, облегчающий составление рациональных цепных номограмм.

Для построения градуированных шкал функции заданной переменной необходимо знание следующих величин: пределов изменения переменной, длины шкалы, расположения пометок на шкале и положения самой шкалы, т. е. ее расстояние от начала номограммы и длины опор. Понятно, что вид функциональной зависимости, изображаемой данной шкалой, также должен быть известен.

Для получения удачной номограммы большое значение имеет правильный выбор пределов переменной. Естественно стремление к тому, чтобы номограмма была универсальной, охватывающей все возможные случаи; поэтому иногда назначают слишком широкие пределы изменения переменных. В результате приходится или строить мелкие шкалы с пониженной точностью, или же применять очень длинные шкалы и тем чрезмерно увеличивать размеры номограммы.

Поэтому в ряде случаев целесообразно отбрасывать крайние, редко встречающиеся значения переменных и оставлять реально необходимый интервал изменения. При этом надо считаться со степенью точности исходных данных, так как может получиться, что сужение пределов изменения переменной не улучшит номограммы, а лишь затруднит пользование ею. Поясним это примером.

Пусть возможные пределы изменения температуры  $T$  воды при гранулометрическом анализе грунта составляют от  $10^\circ$  до  $30^\circ$ , а измеренные температуры произойдут с точностью до  $0,2$ . В большинстве случаев температура воды при опыте колеблется между  $15$  и  $25^\circ$ . Спрашивается, не имеет ли смысла сузить пределы шкалы до этих значений и тем сократить длину шкалы.

Удобная для заданных параметров ( $10^\circ \leq T \leq 30^\circ$ ) шкала может иметь длину около  $10$  см (см. номограмму на фиг. 28). Длиной той же шкалы в узких пределах (от  $15$  до  $25^\circ$ ) составляет всего  $5,3$  см. Ясно, что не имеет смысла отбрасывать интервалы шкалы от  $10$  до  $15^\circ$  и от  $25$  до  $30^\circ$ , хотя они и редко употребляются, так как укорочение шкалы не принесет ей никакой пользы. На той же номограмме дана шкала для времени отсчетов  $t$ ; это время обычно колеблется между  $10$  секундами и  $100$  часами, хотя в некоторых исследовательских работах и может достигать до  $200$ — $300$  часов. Ввиду такого широкого интервала изменения переменной шкала на номограмме получается очень длинной, поэтому здесь целесообразнее отбросить редко применяемый интервал от  $100$  до  $300$  часов; и даже в этом случае длина шкалы составляет  $28,48$  см (фиг. 28).

После того как установлены пределы изменения заданных переменных, необходимо выяснить, который из этих пределов является проксимальным и дистальным. Это зависит от двух факторов—направления шкалы (прямой или обратной) и характера функции на данном интервале (возрастающей или убывающей).

Если заданная функция возрастающая, то дистальный и проксимальный пределы переменной суть наибольшее и наименьшее ее значения соответственно; если же функция убывающая, то эти пределы переменной меняются местами, а именно: наибольшее значение убывающей функции отвечает проксимальному пределу переменной, а наименьшее ее значение—дистальному.

Поясним изложенное примером. Если, допустим, задано, что значения переменных изменяются между  $2$  и  $5$  и функция имеет вид  $y = u^2$ , то наименьшее значение функции будет  $4$ , а наибольшее— $25$ ; тогда проксимальным пределом переменной будет  $2$ , а дистальным— $5$ . То же самое будет иметь место и для таких функций, как  $y = \lg u$ ,  $y = -\frac{1}{3u}$  или  $y = \lg \sin u$  (на интервале  $0^\circ \leq u \leq 90^\circ$ ) и т. д.

Если же функция имеет вид  $y = -\frac{1}{u}$ , то наименьшее значение функции для тех же пределов изменения переменной будет  $\frac{1}{5}$ , а наибольшее  $\frac{1}{2}$ ; тогда проксимальным пределом переменной будет  $5$ , дистальным— $2$ . То же самое будет иметь место для таких функций, как  $y = -4u$ ,  $y = -\lg u$  или  $y = \lg \cos u$  (на интервале  $0^\circ \leq u \leq 180^\circ$ ) и т. д. Это можно также видеть из табл. 2.

Проксимальный и дистальный пределы переменных в зависимости  
от вида функции

Вид функции	Наименьшее значение функции	Наибольшее значение функции	Проксимальный предел переменной	Дистальный предел переменной
$u^2$	4	25	2	5
$-4u$	-20	-8	5	2
$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	5	2
$-\frac{1}{3u}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{15}$	2	5
$\lg u$	0,3010	0,6990	2	5
$-\lg u$	-0,6990	-0,3010	5	2

На прямых шкалах во всех случаях наименьшее значение функции находится внизу номограммы, а наибольшее ее значение—вверху. На обратных шкалах расположение предельных значений функции противоположное: наименьшее значение функции находится вверху, а наибольшее—внизу. Понятно, что все сказанное относительно расположения проксимального и дистального пределов переменной определяется видом функции—возрастающей или убывающей. Расположение наименьшего и наибольшего значений переменных и их функции показано в табл. 3

Таблица 3

Схема расположения предельных значений функций и переменных  
на номограмме для разных типов шкал

Тип шкалы	Вид функции	Значения функции		Значения переменных	
		наименьшее	наибольшее	проксимальное	дистальное
Прямая	Возрастающая	Внизу	Вверху	Внизу	Вверху
	Убывающая	Внизу	Вверху	Вверху	Внизу
Обратная	Возрастающая	Вверху	Внизу	Вверху	Внизу
	Убывающая	Вверху	Внизу	Внизу	Вверху

После того как установлены предельные значения переменных и их функции, могут быть найдены интервалы этих функций.

Хотя длины шкал  $h$  и могут быть выбраны произвольно, а затем по этим величинам, на основании (1.5), вычислены коэффициенты шкал, целесообразно эти действия совершать в обратном порядке—задаваться величиной коэффициента шкалы и определять отсюда длину шкалы. Длины опор  $g$  также могут быть выбраны произвольно; это позволяет найти опорные интервалы этих шкал. Понятно, что если выбор

длины опор подчинен какому-либо закону, то опорные интервалы шкал будут получаться в принудительном порядке.

Перейдем к шкалам вспомогательных переменных. Интервалы вспомогательных переменных определяются как сумма интервалов слагаемых функций; коэффициенты шкал этих функций находятся на основании теоремы о коэффициенте шкалы.

Естественно, что если все шкалы цепной номограммы прямые, то коэффициенты всех шкал являются положительными величинами и их знаки можно не учитывать; если же некоторые из шкал обратные, то следует принимать во внимание знаки коэффициентов шкал.

Нет необходимости определять длины шкал и опор вспомогательных переменных, так как шкалы этих переменных остаются немymi и поэтому опора на номограмме ничем не отличается от шкалы; необходимо только, чтобы линия—носитель шкалы была достаточно длинна для того, чтобы можно было бы делать все построения.

Следующим шагом явится определение тех же величин для градуированной шкалы функции зависимой переменной. Пользуясь приведенными в конце § 7 формулами, последовательно определяются предельные значения этой функции, ее интервал, коэффициент и длина шкалы этой функции. Для определения длины опоры необходимо предварительно найти ее интервал, а затем, зная коэффициент шкалы, найти длину опоры. Таким образом определяются положения начала и конца шкалы функции зависимой переменной на носителе шкалы. Пометки этих точек вычисляются из найденных предельных значений этой функции.

Для подсчетов расстояний между шкалами должны служить полученные значения коэффициентов шкал заданных и вспомогательных переменных. Все выражения, необходимые для определения параметров шкалы функции зависимой переменной, приведены в конце § 7.

Градуирование шкал должно производиться на основании уравнений шкал, если только не могут быть применены какие-либо специальные графические методы градуирования (§ 3).

### Алгоритм номограммы

Аддитивные свойства параметров шкал вспомогательных переменных и функции зависимой переменной позволяют составить алгоритм для расчета номограммы или, короче, алгоритм номограммы. Этот алгоритм показан в табл. 4.

В общем алгоритме для каждой заданной функции и вспомогательной переменной отводится отдельная строка. В строках для функций независимых переменных ведется расчет всех параметров, необходимых для построения шкалы. В строках для вспомогательных переменных расчет сводится к определению положения носителя шкалы.

На основании выводов предыдущей главы, под таблицей значений для функций независимых переменных проводится черта и суммированием определяются величины для функции зависимой переменной. Сам алгоритм показывает последовательность расчета номограммы.

Согласно этому алгоритму, расчет и построение номограммы с параллельными шкалами следует вести следующим образом.

Заданное уравнение следует привести к виду (6.2) и определить форму всех функций, входящих в его состав (столбец 2). Для каждой независимой переменной  $u_i$  уравнения (6.2) задаются те предельные значения, между которыми может колебаться значение переменной данной функции. Далее определяются предельные наименьшее и наибольшее значения функции и вписываются в столбцы 5 и 6; только после этого можно установить, которое из предельных значений переменной является проксимальным и дистальным, и соответствующие значения переменной вписать в столбцы 3 и 4.

Знак предельных значений определяется знаком функции независимой переменной. Интервалы функции определяются как разность между предельными значениями функции (столбец 7).

Далее определяются: интервал функции зависимой переменной, как сумма интервалов функции независимых переменных; наименьшее значение функции зависимой переменной, как алгебраическая сумма наименьших значений всех функций независимых переменных; и, наконец, наибольшее значение функции зависимой переменной, как алгебраическая сумма наибольших значений всех функций независимых переменных (строка\* для  $u_n$ , столбцы 5, 6 и 7).

Затем следует выбрать направление шкал заданных функций независимых переменных. Этот знак проставляется в следующем столбце 8, в котором написаны заданные длины шкал функции переменных; знаки плюс (+) или минус (—) указывают направление шкалы—прямое или обратное. Понятно, что в столбце длин шкал суммирование не производится. Вычисление длины шкалы функции зависимой переменной можно сделать только после того, как будет определен коэффициент ее шкалы. В столбце 9 должны быть помещены результаты вычислений коэффициентов шкал для каждой заданной функции независимой переменной\*\*. Алгебраическая сумма этих коэффициентов равняется коэффициенту шкалы функции зависимой переменной. Теперь можно вернуться к столбцу 8, и, имея интервал функции зависимой переменной  $u_n$  (сумма, стоящая в нижней строке столбца 7) и коэффициент ее шкалы (сумма, стоящая в нижней строке столбца 9), определить длину шкалы зависимой переменной (вписывается в нижнюю строку столбца 8).

В столбце 10 вписаны заданные длины опор функции независимых переменных. Естественно, что, как и в случае с их шкалами, здесь суммирование не производится. Предварительно вычисляются опорные интервалы всех заданных функций (столбец 11). Алгебраическая сумма этих интервалов представляет собой опорный интервал функции зависимой переменной; эта сумма написана в нижней строке столбца 11. Имея опорный интервал (сумма величин, стоящих в столбце 11, и вписанная

\* Ниже этой строки в табл. 4 дана строка контроля расчета.

\*\* Как указывалось, целесообразнее, задавшись значениями коэффициентов шкал (столбец 9), вычислять длины шкал (столбец 8). Принципиальной разницы здесь нет.

Переменные	Вид функции	Пределы переменных		Значения функции		Интервал функции	Длина шкалы	Коэффициент шкалы	Длина опоры	Опорный интервал функции	Коэффициент шкалы вспомогательной функции	Уравнение шкалы	Наименование шкалы, от которой отсчитывается расстояние до данной шкалы	Расстояние данной шкалы от шкалы, указанной в столбце 14	Плечо шкалы относительно начала номограммы	Момент коэффициента шкалы относительно начала номограммы
		проксимальный	дистальный	наименьшее	наибольшее											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$u_i$	$f_i(u_i)$	$(u_i)_1$	$(u_i)_2$	$f_i(u_i)_1$	$f_i(u_i)_2$	$A_i = f_i(u_i)_2 - f_i(u_i)_1$	$\pm h_i$	$\pm a_i = \frac{A_i}{h_i}$	$g_i$	$H_i = \pm a_i g_i$	—	$y_i = \frac{f_i(u_i) - f_i(u_i)_1}{a_i}$	$\varphi_{i-2}$	$l_{i-1}$	$L_i = D_{i-2} + l_{i-1}$	$M_i = \pm a_i L_i$
$\varphi_k$	$\varphi_k$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$r_k = \sum_{i=1}^{k+1} a_i$	—	$\varphi_{k-1}$	$d_k = \frac{a_{k+1}}{r_{k-1}} l_k$	$D_k = \sum_{i=1}^k d_i$	—
$u_n$	$f_n(u_n)$	$(u_n)_1$	$(u_n)_2$	$f_n(u_n)_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_1$	$f_n(u_n)_2 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_2$	$A_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i$	$\pm h_n = \frac{A_n}{a_n}$	$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$	$g_n = \frac{B_n}{a_n}$	$H_n = \sum_{i=1}^{n-1} H_i$	—	$y_n = \frac{f_n(u_n) - f_n(u_n)_1}{a_n}$	$\varphi_{n-3}$	$d_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{r_{n-3}} l_{n-3}$	$L_n = \sum_{i=1}^{n-2} d_i$	$M_n = \sum_{i=1}^{n-1} M_i$
Контроль	—	—	—	—	—	$A_n = f_n(u_n)_2 - f_n(u_n)_1$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$M_n = a_n L_n$

Примечание: В алгоритм в строку для вспомогательной переменной вписываются лишь те величины, определение которых является обязательным для расчета номограммы. В остальных случаях в этой строке поставлено тире.

в его нижней строке) и коэффициент шкалы функции зависимой переменной (сумма, стоящая в нижней строке столбца 9), вычисляем длину опоры этой функции (вписывается в нижнюю строку столбца 10).

Коэффициенты шкал вспомогательных переменных  $\rho_k$  вычислены в столбце 12; для этих переменных выделены отдельные строки между использованными ранее строками для заданных функций независимых переменных. Эти коэффициенты необходимы для вычисления расстояния между шкалами.

В следующем столбце 13 приведены уравнения шкал; все необходимые для написания данные содержатся в соответствующих строках столбцов 5 и 9.

Дальнейшая часть алгорифма содержит подсчет расстояний. В столбце 14 поименованы шкалы, от которых отсчитываются расстояния до данных шкал. Определение расстояния шкал ведется от шкал вспомогательных переменных, кроме первого звена, где расстояние отсчитывается от шкалы первой заданной функции.

Затем назначаются расстояния  $l_i \dots$  от шкал вспомогательных переменных до шкал функции независимых переменных и вычисляются расстояния  $a_i$  между шкалами вспомогательных переменных; все эти данные вписываются в столбец 15 алгорифма. В следующем столбце 16 подсчитаны расстояния от начала номограммы до шкал всех функций; эти данные необходимы для расположения шкал на чертеже. Если при этом окажется, что некоторые шкалы располагаются очень близко друг к другу, можно изменить расстояние  $l_i$  для любого участка номограммы. При этом изменении все последующие шкалы сдвинутся на равное расстояние в ту или другую сторону.

Наконец, в последнем столбце 17 подсчитаны моменты коэффициентов шкал функции независимых переменных относительно начала номограммы; они представляют собой произведения величин, стоящих в столбцах 9 и 16. Правило знаков при определении моментов коэффициентов шкал указано выше. Алгебраическая сумма моментов коэффициентов шкал, написанная в последней строке столбца 17, представляет собой момент коэффициента шкалы функции зависимой переменной относительно начала номограммы.

### Контроль расчета номограммы

Вычисления, относящиеся к контролю расчета номограммы, выделены в дополнительную строку под алгорифмом.

Правильность определения предельных значений функции проверяется с помощью уравнения

$$f_n(u_n)_2 - f_n(u_n)_1 = A_n,$$

где величины  $f_n(u_n)_2$ ,  $f_n(u_n)_1$  и  $A_n$  представляют собой суммы, выписанные в нижней строке столбцов 5, 6 и 7, соответственно. В случае правильности подсчета интервал функции зависимой переменной равен разности предельных значений этой функции.

Правильность определения взаимных расстояний шкал проверяется на основании уравнения

$$M_n = a_n L_n,$$

где величины  $M_n$  и  $a_n$  представляют собой суммы, стоящие в нижней строке столбцов 17 и 9 соответственно, а  $L_n$  — расстояние шкалы функции зависимой переменной от начала номограммы. В случае правильности подсчета, сумма моментов коэффициентов шкал заданных функций независимых переменных должна равняться моменту коэффициента шкалы функции зависимой переменной.

### Построение номограммы

Для построения номограммы вычерчивается горизонтальная опорная линия, к которой на расстояниях, определенных согласно столбцу 16 табл. 4, восстанавливаются перпендикуляры. На этих перпендикулярах от опорной линии откладываются длины опор, а затем длины шкал функции всех переменных, с учетом, конечно, их направления. После построения номограммы опорная линия и опоры могут быть стерты.

Все шкалы функций независимых и зависимых переменных градуируются согласно уравнениям шкал (столбец 13, табл. 4). Шкалы для вспомогательных переменных служат только для перехода от одной шкалы заданной функции к другой; поэтому они остаются немymi.

## § 9. РАЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ

### Общие соображения

Рассмотренный в предыдущем параграфе общий метод построения номограмм с параллельными шкалами позволяет провести весь расчет и составить суждение о достоинствах полученной номограммы еще до вычерчивания ее, только на основании анализа алгорифма; равным образом в номограмму могут быть внесены все исправления, если они потребуются, как, например, могут быть изменены длины опор или шкал, сближены или раздвинуты сами шкалы и т. д. Не менее важна и возможность производства контроля номограммы еще до ее построения.

Пользуясь изложенным общим методом, можно получить любое число различных решений каждой задачи, т. е. различных номограмм, удовлетворяющих данному уравнению. Можно, однако, указать некоторые пути, позволяющие выбрать наиболее рациональные решения.

### Номограммы с центрированными шкалами

Рассмотрим расстояния начал шкал от опорной линии или длины опор. Если все шкалы номограммы имеют приблизительно одинаковую длину, то их можно опереть на одну общую линию. Если же длины шкал заметно отличаются друг от друга, то такой прием будет невыгоден, так как угол, образуемый крайними диагональными положениями разрешающих прямых с направлением шкал, будет заметно разли-

чен, и в неблагоприятных случаях он может оказаться недопустимо острым\*. Вследствие этого целесообразно размещать середины всех шкал на одной линии, перпендикулярной к направлению шкал.

Рассмотрим случай, когда все шкалы номограммы прямые (т. е. не обратные). Требованию центрирования шкал не трудно удовлетворить, если опорную линию провести через начало самой длинной из шкал заданных функций независимых переменных, длины же опор остальных заданных функций независимых переменных определить из равенства

$$g_i = \frac{h_{\max} - h_i}{2}, \quad (9.1)$$

где

$h_{\max}$  — длина наиболее длинной шкалы,

$h_i$  — длины шкал заданных функций,

$g_i$  — длины опор тех же функций.

По аналогичной формуле определится и длина опоры  $g_n$  функции зависимой переменной.

Это можно видеть из следующих преобразований

$$\begin{aligned} g_n = \frac{B_n}{a_n} &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} B_i}{a_n} = \frac{h_{\max} \sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i h_i}{2 a_n} = \\ &= \frac{a_n (h_{\max} - h_n)}{2 a_n} = \frac{h_{\max} - h_n}{2}. \end{aligned}$$

Полученное выражение совпадает с (9.1) при  $i=n$ .

В тех случаях, когда должна быть центрирована обратная шкала, определение длины опор может быть произведено по формулам, получаемым из выражения (9.1) путем изменения знака у длин шкал. Поэтому длины опор обратных шкал составляют

$$g_i = \frac{h_{\max} + h_i}{2}, \quad (9.2)$$

где обозначения остаются теми же, что и в (9.1).

Ценные номограммы со шкалами, удовлетворяющими условию размещения середин шкал на одной линии, перпендикулярной к направлению шкал, назовем номограммами с *центрированными* шкалами.

### Номограммы со слившимися шкалами

Следующий шаг в направлении рационализации номограммы будет заключаться в устранении хотя бы части немых шкал.

\* При косом пересечении шкал разрешающей прямой действительное положение точек пересечения устанавливается с погрешностью, зависящей от величины угла встречи этих линий. Так, при угле встречи, равном  $20^\circ$ , графическая погрешность определения точки пересечения приблизительно в 3 раза больше погрешности определения при встрече под прямым углом [12]. Это положение распространяется на все виды номограмм из выравненных точек.

Действительно, при большом количестве независимых переменных номограмма может оказаться сильно загроможденной различными шкалами, часть которых служит только для проведения разрешающих прямых; так, например, номограмма, служащая для представления соотношения с 8 независимыми переменными, помимо 8 шкал для этих переменных и одной шкалы для зависимой переменной, должна содержать также 6 немых шкал для вспомогательных переменных, а всего 15 шкал.

Можно значительно упростить номограмму с прямыми шкалами, без ущерба для ее точности, и придать ей большую законченность, если устранить некоторые из немых шкал, слив их с градуированными шкалами для функции независимых переменных\*. В этом случае такая слившаяся шкала будет использована дважды, — вначале как градуированная шкала, *через* которую будет проводиться разрешающая прямая, а затем как немая шкала, *на* которой одна из последующих разрешающих прямых отсечет точку для дальнейших построений. Примеры таких слияний шкал номограммы можно найти в атласах номограмм.

Преимуществом слияния шкал является улучшение внешнего вида номограммы вследствие уменьшения числа шкал, изображаемых на чертеже. Недостатком слияния шкал является несколько большая сложность пользования шкалами и возможность графических ошибок, впрочем, исчезающая при некотором навыке. Показанный ниже строгий порядок расположения шкал, их нумерации и проведения разрешающих прямых гарантирует от ошибочных построений.

Можно было бы пойти весьма далеко в направлении слияния шкал и устранить все немые шкалы, кроме первой, которая необходима по условиям пользования номограммой. Таким образом, все остальные немые шкалы должны будут слиться с градуированными шкалами; тогда окажется, что все шкалы номограммы будут расположены в поле чертежа в принудительном порядке. В некоторых случаях, которые будут ниже указаны, такое решение задачи может оказаться приемлемым, и в результате получится номограмма, имеющая законченный и лаконичный вид\*\*.

Приведем вначале те выкладки, которые позволяют вести расчет расстояний между шкалами, а затем установим условия практической применимости номограммы с полностью слившимися шкалами.

#### **Расстояние между шкалами в номограммах с полностью слившимися шкалами**

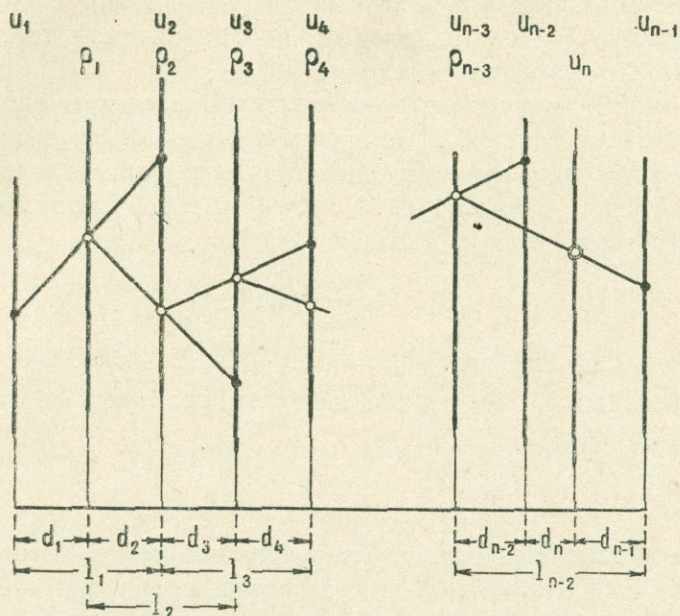
Номограммы с полностью слившимися шкалами должны содержать всего одну немую шкалу для первой вспомогательной переменной  $\varrho_1$ ;

---

\*\* Впервые слияние немой шкалы с градуированной было, кажется, осуществлено в номограмме для определения теоретической мощности паровой машины, составленной Р. Соро [29].

\*\* Такова, например, номограмма для гранулометрического анализа грунтов (фиг. 28).

расстояние этой шкалы от начала номограммы обозначим через  $d_1$  и определим расстояния между остальными шкалами.



Фиг. 21

Из фиг. 21 следует, что расстояние от шкалы вспомогательной переменной  $\rho_1$  до следующей шкалы функции  $f_2(u_2)$  равно  $d_2 = l_1 - d_1$ .

На основании (7.21) имеем

$$l_1 = \frac{a_1 + a_2}{a_2} d_1.$$

Применяя это выражение к предыдущему уравнению, находим

$$d_2 = \frac{a_1}{a_2} d_1. \quad (9.3)$$

Точно так же расстояние между шкалами функции  $f_2(u_2)$ , с которой слилась шкала  $\rho_2$  и  $f_3(u_3)$ , составляет  $d_3 = l_2 - d_2$ .

Перепишав (7.35), получим

$$l_2 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} d_2.$$

Подставив это выражение в предыдущее, найдем

$$d_3 = \frac{a_1 + a_2}{a_3} d_2.$$

Заменяя  $a_1 + a_2$  на основании теоремы о коэффициенте шкалы, имеем

$$d_3 = \frac{r_1}{a_3} d_2. \quad (9.4)$$

Поступая аналогично, найдем расстояние между шкалами функции  $f_3(u_3)$ , с которой слилась иная шкала  $\rho_2$  и т. д.

Шкала функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$  отстоит от шкалы предпоследней функции независимой переменной  $f_{n-2}(u_{n-2})$  на расстоянии  $d_n$ . Шкала последней заданной функции  $f_{n-1}(u_{n-1})$  независимой переменной отстоит от шкалы функции  $f_n(u_n)$  зависимой переменной на расстоянии  $d_{n-1}$ .

В этой части номограммы устанавливаются следующие соотношения (фиг. 21). Расстояние  $d_{n-2}$  до шкалы функции  $f_{n-2}(u_{n-2})$  предпоследней независимой переменной определяется в результате решения предшествующей цепи уравнений (9.3), (9.4) и т. д., поэтому его можно считать известным. Оно составляет

$$d_{n-2} = \frac{r_{n-4}}{a_{n-2}} d_{n-3}.$$

Из фиг. 21 видно, что  $d_{n-1} = l_{n-2} - (d_{n-2} + d_n)$ .

На основании (7.39) можем написать, пользуясь обозначениями, принятыми на фиг. 21,

$$d_{n-2} + d_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} l_{n-2}$$

(в формуле (7.39)  $d_{n-2}$  обозначает расстояние между шкалами функции  $f_{n-2}$  и  $f_n(u_n)$ ; на фиг. 21 это расстояние составляет  $d_{n-2} + d_n$ ).

Сравнивая его с предыдущим выражением, определяем

$$d_{n-1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} l_{n-2},$$

а так как на основании (6.11)

$$a_n - a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} a_i,$$

то

$$d_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} a_i}{a_n} l_{n-2}. \quad (9.5)$$

Полученные таким образом расстояния  $d_i$  последовательно суммируются; найденные величины представляют собой расстояния шкал от начала номограммы.

При суммировании расстояний не следует забывать последовательности действия в правой заключительной части номограммы. К абсциссе шкалы функции предпоследней независимой переменной  $f_{n-2}(u_{n-2})$  следует прибавить расстояние  $d_n$  до шкалы функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$ , а к этой последней—расстояние  $d_{n-1}$  до шкалы функции последней независимой переменной  $f_{n-1}(u_{n-1})$ .

#### Условие применимости номограммы с полностью слившимися шкалами

Применение номограммы с полностью слившимися шкалами не может быть рекомендовано во всех случаях; найдем те условия, когда

такие номограммы дадут наилучшее решение задачи; это, очевидно, будет в том случае, когда в результате такого принудительного размещения шкал в поле чертежа все шкалы номограммы окажутся расположенными на равных расстояниях друг от друга. Для этого необходимо приравнять вычисленные выше расстояния между шкалами друг к другу, т. е. принять  $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_{n-2} = d_n = d_{n-1}$ .

Из рассмотрения уравнений (9.3), (9.4), (9.5) и т. д. видно, что это условие будет удовлетворено, если будут иметь место равенства\*

$$a_2 = a_1,$$

$$a_3 = a_1 + a_2,$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.....

$$a_{n-2} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-3},$$

$$a_{n-1} = (2a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2}),$$

$$a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}.$$

Эта система уравнений шкал имеет простое и изящное решение\*\*

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \dots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n = 1 : 1 : 2 : 2^2 : \dots : 2^{n-4} : 2^{n-2} : 3 \times 2^{n-3}. \quad (9.6)$$

Легко видеть, что при соблюдении этих условий все шкалы будут расположены на равных расстояниях друг от друга.

Отсюда видна эффективность метода слияния шкал в тех случаях, когда отношение интервалов функций различных переменных приближается к выражению (9.6), так как в этом случае можно получить шкалы приблизительно одинаковой длины, расположенные на равных расстояниях друг от друга\*\*\*.

Из последнего выражения можно также усмотреть, что если при составлении номограммы безразлична последовательность чередования шкал, то целесообразно их размещать в порядке возрастания значения коэффициента шкалы. Однако заметим, что такой подбор коэффициентов не всегда выгоден на практике, так как иногда бывает удобнее руководствоваться иной последовательностью шкал, в частности для номограмм, предназначенных для массовой обработки данных\*\*\*\*.

К выводу (9.6) можно, впрочем, прийти и на основании иных соображений. Рассмотрим сумму моментов коэффициентов шкал функ-

\* Предпоследняя строка получена из (9.5), принимая  $d_{n-1} = d_{n-2} = d_n$ , откуда

$$a_n = 3 \sum_{i=1}^{n-2} a_i, \text{ но так как } a_n = \sum_{i=1}^{n-2} a_i + a_{n-1}, \text{ то } a_{n-1} = 2 \sum_{i=1}^{n-2} a_i. \text{ Последняя строка напи-}$$

сана на основании следствия из теоремы о коэффициенте шкалы.

\*\* Этот результат интересен тем, что он дает решение разностно-суммового урав-

$$\text{нения } a_n - a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} a_i, \text{ являющегося разностным аналогом интегро-дифференциаль-$$

ного уравнения.

\*\*\* Номограмма такого вида приведена на фиг. 28.

\*\*\*\* Так, например, при определении коэффициента фильтрации грунта по условиям обработки лабораторных данных удобнее вначале применять шкалу  $e$  (коэффициент шкалы  $a = 0,04 \text{ см}^{-1}$ ), а затем шкалу  $T$  ( $a = 0,02 \text{ см}^{-1}$ ); поэтому приходится нарушать указанный порядок расположения шкал. Номограмма для коэффициента фильтрации с такими значениями коэффициентов шкалы была опубликована ранее [18].

ции относительно точек, находящихся на шкалах суммарных функций. Момент коэффициента шкалы суммарной функции относительно такой точки равен нулю, поэтому остаются только моменты коэффициентов шкал слагаемых функций. Отсюда следует, что моменты коэффициентов шкал слагаемых функций каждого звена должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Но так как, согласно условию, в каждом звене номограммы плечи моментов коэффициентов шкал слагаемых функций должны быть равны друг другу, то отсюда заключаем, что должны быть равны и сами коэффициенты шкал. Отсюда следует, что в первом звене коэффициенты шкал  $a_1$  и  $a_2$  должны быть равны друг другу, в остальных же звеньях коэффициенты шкал  $a_3, a_4 \dots$  правых слагаемых функций  $f_3(u_3), f_4(u_4) \dots$  должны равняться коэффициентам шкалы  $r_1, r_2 \dots$  левых слагаемых переменных  $\rho_1, \rho_2 \dots$  соответственно, т. е.:  $r_1 = a_3, r_2 = a_4$  и т. д., а подставляя сюда значения коэффициентов шкал вспомогательных переменных, получим найденное ранее, но на основании иных соображений, соотношение (9.6).

### Номограммы с частично слившимися шкалами

Если полное слияние шкал нежелательно, то целесообразно слить хотя бы часть немых шкал с градуированными и тем добиться компактности номограммы, уменьшив число шкал, размещаемых на номограмме. Для этих расчетов следует пользоваться теоремой о моментах коэффициентов шкал.

Легко видеть, что звенья цепных номограмм, содержащие прямые и обратные шкалы, не позволяют сливать градуированные шкалы функций независимых переменных с немymi шкалами вспомогательных переменных, так как последние представляют крайние шкалы звеньев и разрешающие прямые всей номограммы образуют последовательную цепочку; в номограмме же с прямыми шкалами разрешающие прямые последовательных звеньев располагаются в елочку (фиг. 21) и одна и та же шкала может быть использована дважды.

Цепные номограммы со шкалами, удовлетворяющие этим условиям, называются номограммами с *частично слившимися* шкалами.

### Номограммы с обратными шкалами

Цепные номограммы с прямыми шкалами имеют тот недостаток, что коэффициент шкалы функций зависимой переменной, при большом числе переменных номографируемого уравнения, сильно возрастает в результате суммирования коэффициентов шкал слагаемых функций (§ 7). Поэтому ответные шкалы, по которым читается результат номографического действия, получаются слишком мелкими, что ведет к понижению точности отсчета.

С другой стороны, получаемые на таких шкалах пределы зависимой переменной, отвечающие суммированию предельных значений функции независимых переменных, часто получаются чрезвычайно широкими и не имеющими практического значения. Таким образом, получается слишком мелкая ответная шкала, концевые части которой

к тому же практически бесполезны\*. Целесообразно уменьшить коэффициент шкалы функции зависимой переменной, увеличив таким образом ее полную длину, и тут же отбросить практически неиспользуемые концы шкалы. Вследствие этого действительная длина ответной шкалы делается такой, какая представится наиболее выгодной.

Для уменьшения коэффициента шкалы функций зависимой переменной в номограмму можно ввести обратные шкалы. В самом деле, как известно:

1) коэффициент шкалы суммарной функции при различном направлении шкал равняется разности коэффициентов шкал слагаемых функций;

2) для того, чтобы шкала суммарной функции оказалась расположенной вправо от шкал слагаемых функций, необходимо, чтобы коэффициент шкалы второй слагаемой функции звена был бы по абсолютной величине большим, чем коэффициент шкалы первой слагаемой функции.

Последнее условие определяет собой положение обратных шкал. Вопрос решается в результате сопоставления выбранных коэффициентов шкал слагаемых функций. Если большинство шкал этих функций обладает малыми значениями коэффициентов шкал, а одна из функций имеет высокое значение этого коэффициента, то можно воспользоваться этим обстоятельством и получить не очень высокое значение коэффициента шкалы функции зависимой переменной. Для этого следует вначале сложить все упомянутые малые величины коэффициентов (т. е. дать ряд прямых шкал), и затем вычесть эту сумму из величины коэффициента шкалы функции, обладающей высоким значением этого коэффициента (т. е. дать одно звено с обратными шкалами).

Если обратная шкала должна быть расположена в первом звене номограммы, то выгоднее сделать ее первой шкалой; тогда все остальные шкалы будут прямыми, а их коэффициенты положительными величинами.

### Номограммы с усеченными шкалами

Если одна из функций обладает высоким значением коэффициента шкалы, превышающим сумму величин всех остальных коэффициентов шкал, то ее можно сделать последней слагаемой функцией номограммы, а ее шкалу назначить обратной. Как указывалось выше, это приведет к значительному удлинению ответной шкалы функции зависимой переменной, что позволит отбросить неиспользуемые ее участки и оставить только *используемую* шкалу.

Определим положение начала и конца используемой шкалы ответной функции. Пусть  $(u_n)_3$  и  $(u_n)_4$  означают проксимальный и дистальный пределы переменной ответной используемой шкалы соответственно. Из предыдущего (§ 7) имеем уравнение шкалы функций зависимой переменной (уравнение 7.40)

\* Подробнее об этом см. в § 13.

$$y_n = \frac{f_n(u_n) - f_n(u_n)_1}{a_n}.$$

Используемый участок длины шкалы функции  $f_n(u_n)$  будет иметь начало в точке, определяемой ординатой

$$(y_n)_3 = \frac{f_n(u_n)_3 - f_n(u_n)_1}{a_n}, \quad (9.7)$$

а конец ее в точке с ординатой

$$(y_n)_4 = \frac{f_n(u_n)_4 - f_n(u_n)_1}{a_n}. \quad (9.8)$$

Длина шкалы составит

$$h_n' = (y_n)_4 - (y_n)_3 = \frac{f_n(u_n)_4 - f_n(u_n)_3}{a_n}.$$

Как указывалось, в рациональных номограммах все шкалы должны быть центрированы. Естественно, что такой же центрированной окажется и полная шкала функции  $f_n(u_n)$ , имеющая пределами функции величины  $f_n(u_n)_1$  и  $f_n(u_n)_2$ . Однако используемая шкала ответной функции окажется центрированной только в том случае, если ее отброшенные концы имеют равную длину. Во всех остальных случаях эта шкала окажется нецентрированной.

Положение начала и конца используемой шкалы определяется на основании (9. 1), (9. 7) и (9. 8) следующим образом:

$$(y_n')_3 = \frac{h_{\max} - h_n}{2} + \frac{f_n(u_n)_3 - f_n(u_n)_1}{a_n},$$

$$(y_n')_4 = \frac{h_{\max} - h_n}{2} + \frac{f_n(u_n)_4 - f_n(u_n)_1}{a_n},$$

где  $(y_n')_3$  и  $(y_n')_4$  — расстояния начала и конца используемой длины шкалы от опорной линии соответственно.

Описанные цепные номограммы, имеющие в своем составе различно направленные параллельные шкалы\*, вводимые с целью уменьшения коэффициента ответной шкалы и отбрасывания ее бесполезных участков, назовем *номограммами с обратными усеченными шкалами*.

### Номограммы с логарифмическими шкалами

Изложенные выше приемы направлены к улучшению качества построения и применимы к любым цепным номограммам с параллельными шкалами. В случае, если было задано уравнение первой канонической формы, то, как известно, оно может быть приведено ко второй форме путем его логарифмирования.

\* Изменение направлений шкал для улучшения качества номограмм применялось и другими авторами (см. номограмму для определения напряжения кручения вала, составленную И. Н. Денисюком [8]).

Уравнения такого вида, содержащие сумму логарифмических функций, практически наиболее важны, и в отношении их имеется возможность применить еще один прием, существенно облегчающий построение номограммы.

Уравнения, левая часть которых представляет собой произведение линейных и тригонометрических функций, возведенных в некоторую степень, имеют следующий общий вид:

$$[F_1(u_1)]^{m_1} [F_2(u_2)]^{m_2} \cdot \cdot \cdot [F_{n-1}(u_{n-1})]^{m_{n-1}} = F_n(u_n), \quad (9.9)$$

где  $u_i (i=1, 2 \cdot \cdot \cdot n)$  — некоторые переменные,  $m_i (i=1, 2 \cdot \cdot \cdot n-1)$  — любые, положительные или отрицательные числа, а  $F_i(u_i) (i=1, 2 \cdot \cdot \cdot n)$  — непрерывные, монотонные функции, по крайней мере в изучаемой области.

Уравнения этого вида путем логарифмирования приводятся к второй канонической форме

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i) = f_n(u_n), \quad (9.10)$$

где

$$f_i(u_i) = m_i \lg F_i(u_i) \quad (i=1, 2 \cdot \cdot \cdot n-1).$$

В отношении тех функций выражения (9.9), которые являются независимыми переменными  $u_i$  или являются линейными функциями вида  $\nu u_i + \omega$ , или, наконец, представляют собой простые тригонометрические функции вида  $\sin \nu u$ ,  $\lg \nu u$  и т. д., где  $\nu$  и  $\omega$  — круглые числа, целесообразно сделать так, чтобы коэффициенты шкал имели не случайное значение, а принять их такими же, как и на готовых логарифмических линейках (табл. 1). В этом случае градуирование шкал номограмм делается чрезвычайно простой операцией, так как оно сводится к копированию соответствующих участков этих шкал. Этот метод подробно описан в § 3.

Если величины  $\nu$  и  $\omega$  в упомянутых выше случаях линейных и простых тригонометрических функций не являются круглыми числами, то и в этом случае может быть применен метод копирования градуировок, но так как необходимо, чтобы градуировка шкал была выражена в круглых числах, то положение пометок точек должно определяться путем графической интерполяции.

В отношении функций выражения (9.9), которые являются степенными функциями вида  $\nu u^m$  или тригонометрическими функциями вида  $\sin^m \nu u$ ,  $\lg^m \nu u$  и т. д., где  $\nu$  и  $m$  — действительные числа, расчет и построение в общем остаются такими же, как это было указано для случая линейных функций. Единственное отличие заключается в необходимости дифференциации понятия коэффициента шкалы. Для этих случаев должны различаться:

*расчетный* коэффициент шкалы  $a_i$ , характеристика которого дана выше (уравнение 1.5) и

графический коэффициент шкалы  $a_i'$

$$a_i' = \frac{\lg F_i(u_i)_2 - \lg F_i(u_i)_1}{h_i},$$

характеризующий ту логарифмическую шкалу, которая применяется для градуирования.

Соотношение между этими двумя коэффициентами видно из следующего

$$a_i = \frac{f_i(u_i)_2 - f_i(u_i)_1}{h_i} = \frac{m_i \lg F_i(u_i)_2 - m_i \lg F_i(u_i)_1}{h_i} = m_i a_i'. \quad (9.11)$$

Метод копирования логарифмических шкал, вообще говоря, не относится к градуированию шкалы функции зависимой переменной, так как коэффициент шкалы этой функции не может быть произвольно задан, а получается в результате алгебраического суммирования коэффициентов шкал всех заданных функций независимых переменных.

Однако надлежащим подбором слагаемых часто удается получить такое значение суммы, которое соответствовало бы одной из шкал, указанных в табл. 1. Так, на фиг. 28, 29, 30, 33 и 37 представлены номограммы, в которых удалось так подобрать коэффициенты шкал функции заданных переменных, чтобы оказалось возможным копировать и шкалу функции зависимой переменной. В общем, учитывая достаточный выбор коэффициентов шкал (табл. 1), это достигается сравнительно легко. В литературе [8, 11, 13] можно найти многие практические указания для подбора соответствующих линеек.

Может оказаться, что сумма коэффициентов шкал функции заданных переменных не соответствует ни одному из значений коэффициентов шкал, указанных в табл. 1; тогда градуирование такой шкалы не может быть сделано методом копирования с логарифмической линейки.

В отдельных случаях положение может быть исправлено путем некоторого изменения коэффициентов шкал слагаемых функций. Если это сделать невозможно, то шкала функции зависимой переменной должна быть градуирована графическим или фотографическим способами, описанными в § 3.

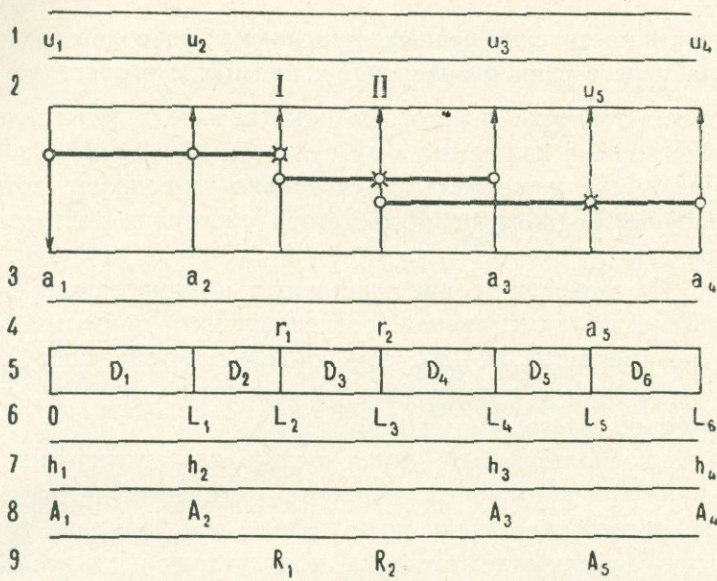
### Схема номограммы

При конструировании номограммы удобно составить ее схему, в которой можно в определенном порядке вести вычисление всех горизонтальных расстояний (фиг. 22). Так как задачей этого построения является определение не длин шкал, а только их взаимных расстояний, то будем все шкалы показывать на схеме отрезками равной длины.

Вверху схемы в две строки показаны обозначения шкал—в первой строке наименования независимых переменных, а во второй строке суммарных функций—вспомогательных и зависимой переменной. В целях удобства пользования номограммой вспомогательные перемен-

ные обозначены римскими цифрами; в тех случаях, когда немые шкалы сливаются со шкалами заданных функций, римские цифры оказываются под буквами, обозначающими соответствующие переменные. Обозначение для функций зависимой переменной поставлено также во второй строке, так как она является последней суммарной функцией.

Строки



Фиг. 22

Под отрезками, изображающими шкалы, помещено семь строк; из них верхняя строка, или по общему счету третья сверху, предназначена для коэффициентов шкал заданных функций независимых переменных, следующая строка, или четвертая сверху,—для коэффициентов шкал вспомогательных переменных и шкалы функции зависимой переменной. В пятую сверху строку вписаны взаимные расстояния  $D$  между шкалами, а в шестой строке даны расстояния шкал от начала (левого края) номограммы. Описание последних трех строк дается ниже.

Пространство между вертикальными линиями, изображающими шкалы, использовано для схем, иллюстрирующих уравновешивание моментов коэффициентов шкал слагаемых функций независимых переменных каждого звена относительно точки, взятой на носителе шкалы суммарной функции.

Стрелки у концов отрезков шкал показывают направление шкал. На фиг. 22 показан пример схемы номограммы уравнения с 5 переменными, причем шкала первой функции взята обратной, а все остальные шкалы—прямыми.

Последовательно изображенные отрезки горизонтальных прямых показывают плечи коэффициентов шкал, кружки на них—шкалы слагаемых функций, для которых определяется коэффициент шкалы (урав-

новешиваемые силы), а крестик—шкалы суммарных функций, относительно которых определяются моменты коэффициентов шкал (точка вращения рычага). В звеньях, имеющих шкалы разных направлений, эти плечи образуют рычаг первого рода (фиг. 22, первое звено). В звеньях, имеющих шкалы одинаковых направлений, эти плечи образуют рычаг второго рода (фиг. 22—второе и третье звенья).

**Точность построения цепной номограммы; величина предельного угла пересечения разрешающих прямых с носителями шкал**

Вопросы точности построения номограммы и вычисления по ним достаточно хорошо изложены в литературе [11, 12] и здесь мы их повторять не будем; ниже излагаются только те вопросы, которые вытекают из существа описываемого метода расчета и построения цепных номограмм.

Одно из требований, предъявляемых к номограмме, заключается в том, чтобы угол, образуемый разрешающими прямыми с ответной шкалой, не превышал 20—30°; эти предельные значения относятся к крайним возможным положениям разрешающей прямой, что вообще встречается не часто.

Можно воспользоваться двумя путями для увеличения угла встречи разрешающей прямой со шкалами: уменьшить высоту шкал или увеличить расстояние между ними. Оба эти приема невыгодны: в первом случае уменьшается высота номограммы и вместе с ней и точность отчета, а во втором случае увеличивается ширина номограммы и она может оказаться растянутой. Понятно, что приходится соразмерно пользоваться обоими путями.

Не останавливаясь на общих вопросах определения величины погрешности решения, получаемого по номограмме, приведем те выражения, которые позволяют определить один из важных факторов этой погрешности—минимальный угол между разрешающей прямой и носителем ответной шкалы.

На фиг. 20 пунктирными линиями  $A''B'$ ,  $A'B''$ ,  $R''C'$  и  $R'C''$  показаны предельные диагональные положения разрешающих прямых на номограмме, состоящей из прямых шкал. Из чертежа видно, что для первого звена номограммы наименьшие углы пересечения могут быть определены из условий

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{h_2 + g_2 - g_1}{l_1} \quad (9.12)$$

и

$$\operatorname{ctg} \varphi_1' = \frac{h_1 + g_1 - g_2}{l_1} \quad (9.13)$$

В случае, если шкалы центрированы, величины опор  $g_1$  и  $g_2$  определяются из (9.1); тогда имеем

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \operatorname{ctg} \varphi_1' = \frac{h_1 + h_2}{2l_1} \quad (9.14)$$

Наименьшие углы пересечения для второго звена определяются из условий

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = \frac{h_3 + g_3 - s_1}{l_2} \quad (9.15)$$

и

$$\operatorname{ctg} \varphi_2' = \frac{t_1 + s_1 - g_3}{l_2} \quad (9.16)$$

При центрировании шкал, пользуясь (9.1) и (7.29), находим

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = \operatorname{ctg} \varphi_2' = \frac{1}{2l_2} \left( \frac{R_1}{r_1} + h_3 \right) \quad (9.17)$$

Аналогично определится и угол  $\varphi_3$  для третьего звена с центрированными шкалами

$$\operatorname{ctg} \varphi_3 = \frac{1}{2l_3} \left( \frac{R_2}{r_2} + h_4 \right) \quad (9.18)$$

Различный вид формул (9.14) с одной стороны и (9.17) и (9.18) — с другой, только кажущийся; на самом деле выражение (9.14) может быть переписано так

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{1}{2l_i} \left( \frac{A_1}{a_1} + h_2 \right),$$

чем доказывается общий вид всех написанных выше уравнений для наименьшего угла между разрешающими прямыми и носителями ответных центрированных шкал.

Поэтому, в общем виде для  $i$ -го звена номограммы с прямыми шкалами величина предельного угла при центрировании шкал составляет:

$$\operatorname{ctg} \varphi_i = \frac{1}{2l_i} \left( \frac{R_{i-1}}{r_{i-1}} + h_{i+1} \right), \quad (9.19)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n-2$ , и

$$\frac{R_0}{a_0} = \frac{A_1}{a_1}.$$

Рассмотрим случай, когда обе шкалы звена — обратные. Тогда выражения для первого звена приобретают такой вид

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{h_1 - g_1 + g_2}{l_1} \quad (9.20)$$

и

$$\operatorname{ctg} \varphi_1' = \frac{h_2 - g_2 + g_1}{l_1} \quad (9.21)$$

Эти выражения могут быть получены из (9.12) и (9.13), если в последних изменить знак длин опор  $g_1$  и  $g_2$  на обратный. При центрировании обратных шкал первого звена получается выражение (9.14).

Аналогично, для второго звена получаем выражения

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = \frac{t_1 - s_1 + g_3}{l_2} \quad (9.22)$$

и

$$\operatorname{ctg} \varphi_2' = \frac{h_3 - g_3 + s_1}{l_2}, \quad (9.23)$$

которые могут быть получены из (9.15) и (9.16) изменением знака у длин опор  $s_1$  и  $g_3$ . При центрировании обратных шкал второго звена получается выражение (9.17).

Если одна из шкал прямая, а другая обратная, то выражения для предельного угла несколько усложняются; ограничимся первым звеном. Имеем для случая, если первая шкала прямая, а вторая—обратная

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{g_2 - g_1}{l_1} \quad (9.24)$$

и

$$\operatorname{ctg} \varphi_1' = \frac{h_1 + g_1 + h_2 - g_2}{l_1}. \quad (9.25)$$

В таких случаях проще не пользоваться готовыми формулами, а непосредственно записывать выражения для углов пересечения, пользуясь чертежом номограммы.

Во всех приведенных выше формулах от (9.12) до (9.25) под  $l_i$  следует понимать расстояние между шкалами слагаемых функций.

#### Номограмма для определения предельного угла пересечения шкал

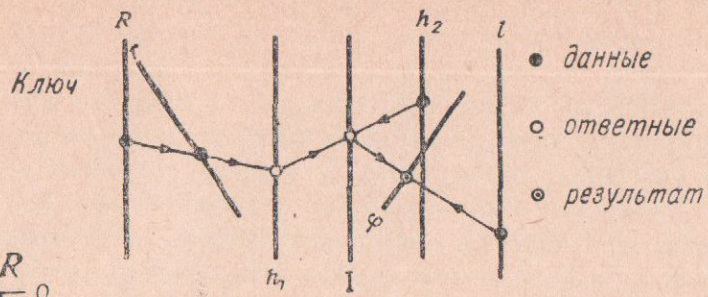
Для облегчения контроля наименьших углов пересечения разрешающих прямых с ответными центрированными шкалами при построении номограмм с параллельными шкалами может служить номограмма (фиг. 23). Эта цепная номограмма служит для представления ур. (9.14) и (9.17); она состоит из трех звеньев: первое и третье звенья с наклонными шкалами и второе—с параллельными. Расчет этой номограммы приведен в конце § 22.

В тех случаях, когда должна применяться формула (9.14), т. е. для контроля наименьших углов пересечения в первом звене проектируемой номограммы, используются второе и третье звенья номограммы. Если же применяется формула (9.17), т. е. для контроля наименьших углов пересечения в остальных звеньях проектируемой номограммы, используются все три звена номограммы.

Номографическое определение величины угла пересечения шкал производится для каждого звена проектируемой номограммы. Номограмма для определения предельного угла состоит из следующих шкал:

1) вертикальная обратная шкала  $R$ , на которой отыскивается точка, соответствующая интервалу вспомогательной функции левой шкалы звена проектируемой номограммы;

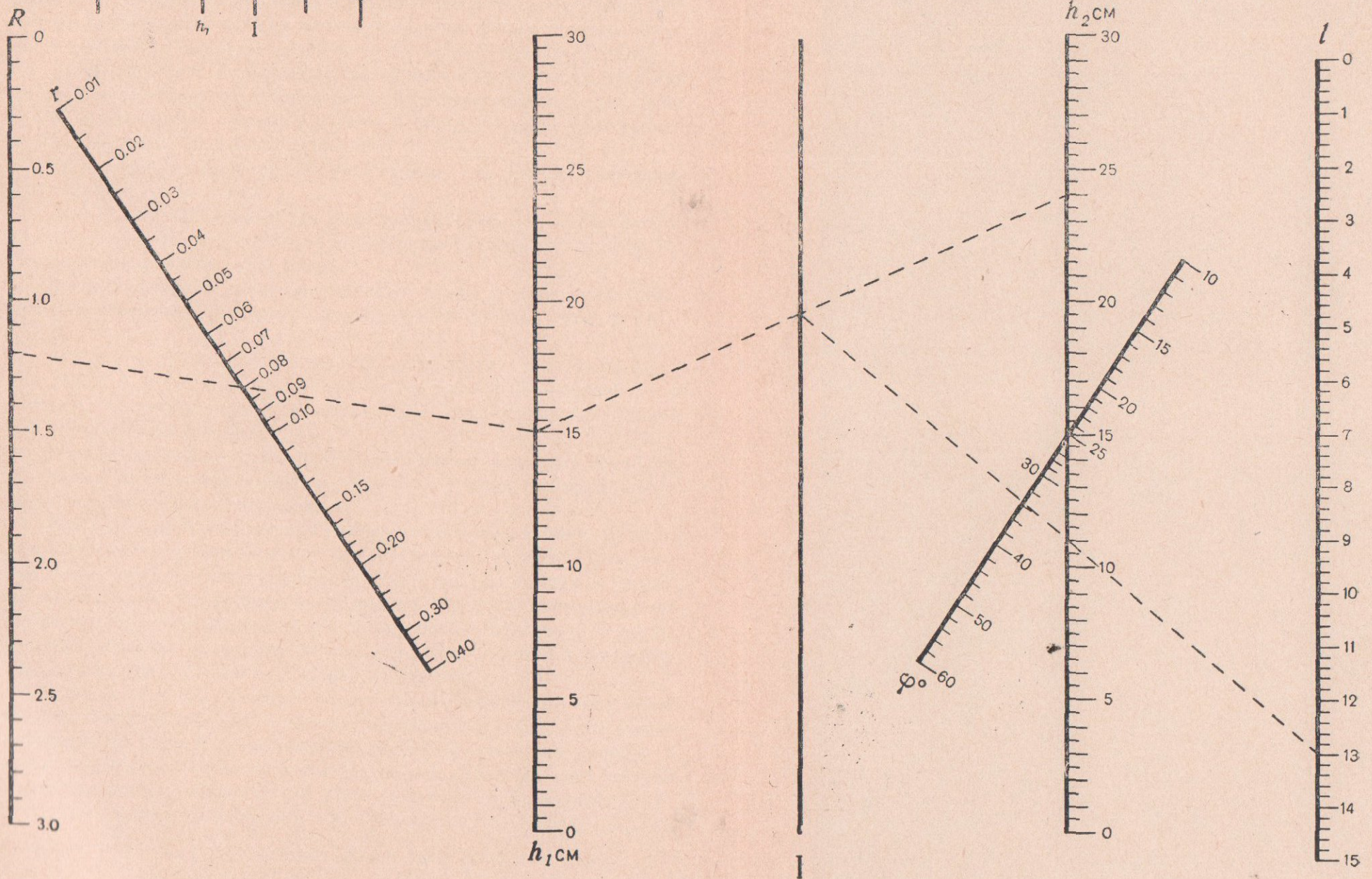
2) наклонная шкала  $r$  для коэффициента шкалы вспомогательной переменной левой шкалы звена проектируемой номограммы;



$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{h_1 + h_2}{2l} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2l} (R + h_2)$$

Пример

Дано:  $R=1.20$ ,  $r=0.08$ ,  $h_2=24$  см,  $l=13$  см. Результат:  $\varphi=34^\circ$



Фиг. 23. Номограмма для определения предельного угла пересечения разрешающей прямой с вертикальной шкалой.

Հունդը ուղիղից և ուղղագիծ սանդղակից կազմված ամենափոքր անկան որոշման նոմոգրամը:

Nomogram for determination of least angle between solution lines and vertical scales.

3) вертикальная прямая шкала  $h_1$ , длины левой шкалы звена. Если в левом конце звена находится градуированная шкала функции независимой переменной (т. е. при расчете первого звена проектируемой номограммы), то положение точки на шкале  $h_1$  отыскивается по ее пометке. Если же в левом конце звена находится шкала вспомогательной переменной (т. е. при расчете остальных звеньев проектируемой номограммы), то для определения положения точки на шкале  $h_1$  проводится разрешающая прямая в первом звене номограммы (фиг. 23);

4) вертикальная прямая шкала  $h_2$ , длины шкалы правого конца звена; это всегда шкала заданной функции независимой переменной;

5) немая шкала I; разрешающая прямая второго звена отсекает на этой шкале точку, от которой построение переходит в третье звено;

6) вертикальная обратная шкала ширины  $l$  звена (расстояние между шкалами слагаемых функций);

7) наклонная шкала предельного угла  $\varphi$  пересечения разрешающих прямых со шкалами.

Для облегчения применения номограммы (фиг. 23) можно ввести три дополнительные строки в схему номограммы, показанную на фиг. 22. Продолжаем описание этой схемы.

В седьмую строку схемы вписываются длины шкал функции независимых переменных, согласно алгоритму номограммы (табл. 4, столбец 8).

В восьмую строку для тех же шкал вписываются интервалы функции (табл. 4, столбец 7); эти записи размещаются симметрично под записями в третьей строке (коэффициентов шкал заданных функций независимых переменных).

В девятой строке суммируются интервалы заданных функций; эти записи симметричны записям четвертой строки (коэффициентов шкал вспомогательных переменных).

При совместном пользовании номограммой и схемой (фиг. 22 и 23) рассматривают последовательные рычаги (модели звеньев). При этом для левого конца каждого рычага берутся  $R$  и  $r$  из девятой и четвертой строк схемы, для правого конца рычага берется  $h_2$  из седьмой строки; величина  $l$  вычисляется по пятой или шестой строкам. Для первого звена величина  $h_1$  берется из седьмой строки. Способ применения номограммы (фиг. 23) иллюстрирован на примере, см. § 10.

Заметим, что при решении той же задачи конструирования номограммы можно искать не величину предельного угла  $\varphi$  пересечения разрешающей прямой с вертикальной шкалой при заданной ширине  $l$  звена, а непосредственно ту наименьшую ширину звена, при которой удовлетворяет условие  $\varphi = 20^\circ$ . В этом случае вместо уравнений (9.14) и (9.17) следует пользоваться выражениями  $l = 0,182(h_1 + h_2)$  и  $l = 0,182 \left( \frac{R_1}{r_1} + h_2 \right)$ , для которых может быть построена цепная номограмма, состоящая всего из двух звеньев. Ее нетрудно построить, пользуясь указаниями, содержащимися в главе IX.

## Последовательность шкал цепных номограмм

Правильная последовательность расположения шкал в цепных номограммах имеет существенное значение, и важность ее увеличивается по мере увеличения числа переменных. Отсутствие четкости в системе расположения шкал может привести к путанице при проведении разрешающих прямых и явиться источником грубых ошибок.

Из рекомендуемых в литературе [11] двух типов расположения шкал: диктованный ход и симметричное расположение,—первое может представить большие удобства. Однако для уравнивания с числом переменных, превышающих пять—шесть, необходимы более строгие указания о последовательности шкал, исключающие возможность каких-либо ошибок.

В настоящей работе принят следующий принцип. Все шкалы функции независимых переменных обозначаются символом данной переменной; этот символ следует ставить *над* шкалами. Шкалы вспомогательных переменных обозначаются римскими цифрами. Эти цифры следует ставить *под* шкалами. Ответная шкала функции зависимой переменной обозначается символом этой переменной; естественно, что этот символ также ставится *под* шкалой. Таким образом, шкалы всех функций независимых переменных обозначены сверху, а все ответные шкалы—снизу.

При этом способе обозначения слившиеся шкалы будут иметь оба обозначения—символ независимой переменной, когда эта шкала используется как градуированная шкала заданной функции, и римскую цифру, когда эта шкала используется как немая шкала вспомогательной переменной.

Шкалы функции независимых переменных, имеющие верхние символы, должны располагаться на номограмме *строго* в той последовательности, в которой они должны применяться при проведении разрешающих прямых. Так, в номограмме коэффициента фильтрации грунта (фиг. 26) шкала  $e_0$  может быть применена только после того, как была использована шкала  $A$ . То же относится и к ответным шкалам, символами которых служат римские цифры; так, на той же номограмме шкала III может быть применена только после того, как были применены шкалы I и II.

При проведении разрешающих прямых следует придерживаться следующего мнемонического правила: разрешающая прямая проводится от шкалы суммарной функции (обозначено внизу) к очередной шкале заданной функции независимой переменной (обозначено сверху) и засекает ответную точку на шкале следующей суммарной функции (обозначено снизу). Лишь в первом звене разрешающая прямая проводится через данные точки на двух шкалах заданных функций независимых переменных, имеющих обозначения сверху.

Может быть, для единства метода следовало бы в таких случаях обозначение первой шкалы помещать также внизу, или называть пер-

вую шкалу также и нулевой вспомогательной шкалой, понимая в этом случае, что шкала первой функции независимой переменной эквивалентна некоторой суммарной функции, т. е. может рассматриваться как следующая сумма:  $0 + f_1(u_1) = f_1(u_1)$ .

Как правило, все шкалы следует располагать последовательно в одном направлении, т. е. слева направо. Однако при применении обратных шкал такое расположение может представить неудобства, так как в звеньях с различно направленными шкалами ответная шкала является крайней и поэтому в номограмме пропадает значительная площадь. В таких случаях можно один раз изменять направление последовательности *только* шкал заданных функций и обозначать такую последовательность в ключе номограммы. Ответные же шкалы (немые шкалы вспомогательных переменных и градуированная шкала функции зависимой переменной), *безусловно*, должны быть расположены в строгой последовательности слева направо.

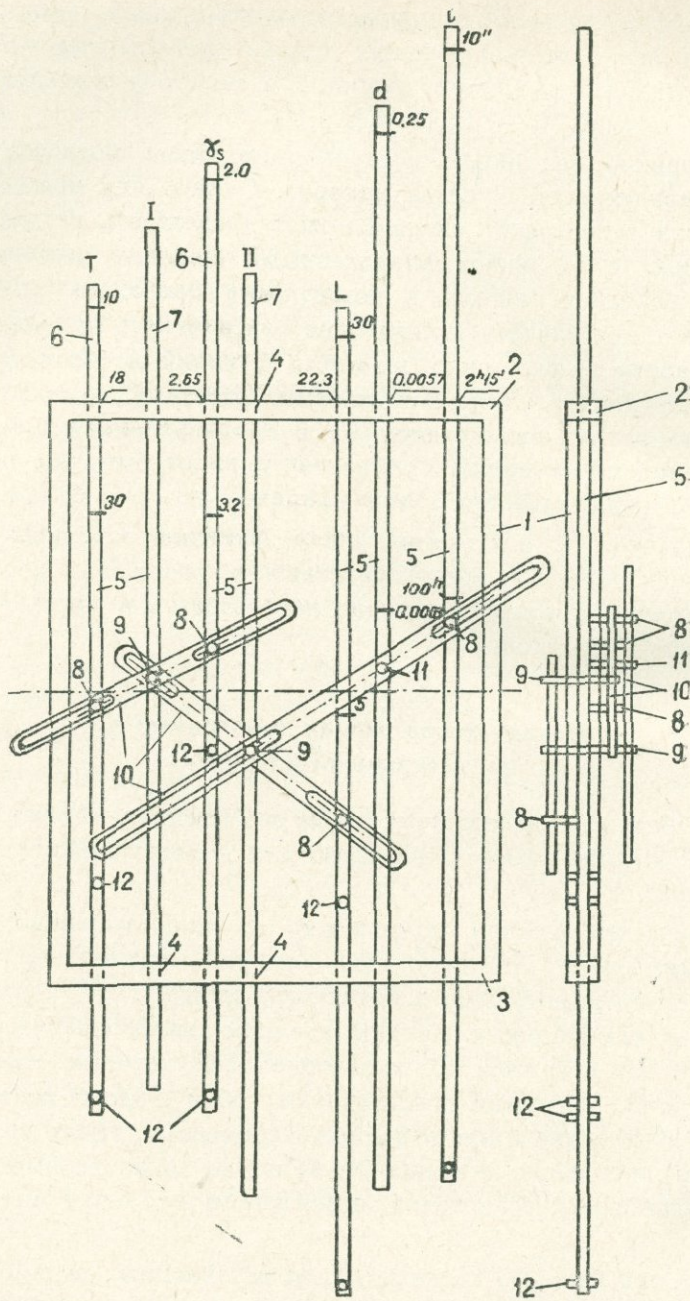
Желательно, что вся группа шкал функции заданных переменных, имеющих обратную последовательность, умещалась в том свободном промежутке, который возможно использовать в звене с различно направленными шкалами.

#### Механическая цепная номограмма с параллельными шкалами

Основываясь на изложенных выше положениях, можно построить механическую номограмму, пригодную для демонстрации; она изображена на фиг. 24.

Механическая цепная номограмма с параллельными шкалами представляет собой металлическую рамку 1, размерами, несколько превышающими номограмму в высоту и в ширину. В верхней 2 и нижней 3 горизонтальных полках сделаны калиброванные соосные отверстия 4 для стержней 5, положение осей которых соответствует носителям шкал. Стержни представляют собой шкалы; поэтому верхняя часть 6 стержней для заданных переменных имеет градуировку соответствующих шкал; стержни 7 для немых шкал не имеют градуировки. Естественно, что в такой номограмме не могут быть слитые шкалы.

В середине каждого стержня 6 для независимых переменных имеется палец 8, выступающий попеременно с передней стороны для нечетных звеньев и с задней—для четных звеньев. В середине стержней 7 для вспомогательных переменных устраивается двухсторонний палец 9. С одной стороны (попеременно с передней или задней стороны) палец заканчивается осью, на которой может качаться деталь 10, представляющая собой полосу с прорезями. В эти прорези входят пальцы стержней соответствующих шкал слагаемых функций. Наконец, в середине стержня для шкалы зависимой переменной имеется только один палец



Фиг. 24

11 с осью, на которой может качаться полоска с прорезями. Стержни для шкал имеют ограничители 12. На фиг. 24 представлен в двух проекциях чертеж механической номограммы для гранулометрического анализа грунтов. Сама номограмма приведена на фиг. 28.

Работа с механической цепной номограммой производится следующим образом. Выдвигая одновременно первую и вторую градуированные шкалы независимых переменных таким образом, чтобы нужные пометки этих шкал стали против наружной поверхности верхнего пояса рамки, и предоставляя при этом стержню шкалы вспомогательной переменной возможность свободно перемещаться в своих направляющих, мы, по существу, производим деформативное преобразование (глава X) первого звена, при котором шкалы перемещаются вдоль носителей, а разрешающая прямая сливается с наружной поверхностью верхнего пояса рамки. Так как три шкалы первого звена связаны друг с другом при помощи полоски с прорезью таким образом, что три точки (пальцы шкал) находятся на одной прямой, то ясно, что при таком деформативном преобразовании первого звена стержень шкалы вспомогательной переменной автоматически займет нужное положение.

Далее, придерживая неподвижным стержень шкалы первой вспомогательной переменной и передвигая стержень шкалы третьей независимой переменной, устанавливаем последний таким образом, чтобы нужная пометка пришлась против той же разрешающей полки уголка. При этом, очевидно, произойдет деформативное преобразование второго звена, и стержень шкалы вспомогательной переменной второго звена автоматически займет нужное положение. Продолжая, таким образом, каждый раз придерживать неподвижным первую немую шкалу каждого звена и переставляя третью градуированную шкалу, находим положение второй немой шкалы. В последнем звене этим же путем автоматически установится градуированная шкала зависимой переменной, что позволит сделать отсчет результата.

Шкалы механической номограммы (фиг. 24) установлены таким образом, чтобы дать решение формулы для примера, приведенного пунктиром на фиг. 28.

## § 10. ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММ С ЧАСТИЧНО СЛИВШИМИСЯ ШКАЛАМИ

Покажем на нескольких примерах применение предложенного метода построения цепных номограмм с параллельными шкалами. Вначале с возможной полнотой опишем построение цепных номограмм с частично слившимися шкалами, а затем последовательно рассмотрим случаи построения цепных номограмм с вполне слившимися, обратными и усеченными шкалами. В заключение покажем пример построения номографических блоков. Во всех приводимых примерах будет применен аналитический метод расчета.

### Номографируемая формула

Коэффициентом фильтрации грунта называется скорость просачивания воды через образец грунта при толщине слоя воды над

образцом, равным толщине слоя грунта, при условно принятой температуре 20°C; коэффициент фильтрации выражается в сантиметрах в секунду. Формула для определения коэффициента фильтрации грунта дана автором [18, 30] в следующем общем виде

$$k = 2,3 \frac{a}{A} L \frac{1+e}{1+e_0} \frac{u}{t} \lg \frac{h_1}{h_2}, \quad (10.1)$$

где 2,3—множитель для перевода десятичных логарифмов в натуральные,

$a$  — площадь сечения трубки пьезометра в квадратных сантиметрах,

$A$  — площадь сечения образца грунта в квадратных сантиметрах,

$L$  — высота слоя грунта в сантиметрах,

$e$  — коэффициент пористости грунта при испытании на фильтрацию,

$e_0$  — начальный коэффициент пористости грунта при закладке образца в прибор,

$u = \frac{\gamma_T}{\gamma_{20}}$  — коэффициент, вводимый для приведения результатов испытания при температуре  $T^\circ\text{C}$  к условной температуре 20°C; здесь  $\gamma_T$  и  $\gamma_{20}$  — коэффициенты вязкости воды при температуре  $T$  и 20°C, соответственно,

$t$  — промежуток времени в секундах, в течение которого уровень воды в пьезометре опускается от  $h_1$  до  $h_2$ , и

$h_1$  и  $h_2$  — напоры воды в пьезометрической трубке в сантиметрах, в начале и в конце интервала времени, соответственно.

Формула (10.1) позволяет определить коэффициент фильтрации грунта в двух случаях:

1) когда определение коэффициента фильтрации проводится после предварительной консолидации в компрессионном приборе; в этом случае следует принять  $e=e_1$ , где  $e_1$  — коэффициент пористости грунта после консолидации; и

2) когда определение коэффициента фильтрации производится без предварительной консолидации; в этом случае надо принять  $e=e_0$ .

К результатам подсчета не предъявляется высоких требований в отношении точности результата, так как коэффициенты фильтрации грунта изменяются в пределах нескольких порядков (для песков от  $10^{-2}$  до  $10^{-4}$  см/сек, для глин от  $10^{-6}$  до  $10^{-8}$  см/сек). Поэтому номограмма должна давать величину коэффициента фильтрации грунта с точностью порядка 5%.

Логарифмированием формулы (10.1) приводим ее к виду

$$\lg 2,3 a - \lg A + \lg L + \lg(1+e) - \\ - \lg(1+e_0) + \lg u - \lg t + \lg \lg \frac{h_1}{h_2} = \lg k. \quad (10.2)$$

## Пределы изменения переменных

Установим пределы изменения переменных функций (10.2). Пусть номограмма должна служить для обработки результатов опыта на фильтрацию, получаемых при следующих условиях.

Площадь сечения  $a$  трубок пьезометра может колебаться между 0,8 и 1,5 кв. см, что соответствует значениям диаметра  $d$  трубок от 1,0 до 1,4 см (округленно).

Площадь сечения  $A$  образца грунта изменяется между 25 и 55 кв. см, что соответствует значениям диаметра  $D$  образцов грунта от 5,6 до 8,4 см (округленно); в большинстве приборов диаметр образца колеблется между 6 и 7 см\*.

Высота образца  $L$  изменяется в пределах между 1,0 и 2,5 см.

Коэффициенты пористости грунта  $e$  и  $e_0$  могут колебаться между 0,5 и 2,6; поэтому пределами изменения величин  $1+e$  и  $1+e_0$  будут 1,5 и 3,6.

Температура  $T$  при испытании может изменяться между 4 и 30°C. Коэффициенты вязкости воды для этих температур составляют  $\eta_4 = 1,5674$  и  $\eta_{30} = 0,8007$  сантипуаз соответственно; коэффициент вязкости воды при 20°C составляет  $\eta_{20} = 1,0050$  сантипуаз; поэтому пределами величин  $u = \frac{\eta_1}{\eta_{20}}$  будут 0,7967 и 1,5596; так как градуировка шкалы будет дана в температурах, приводим таблицу значений температурной поправки  $u$  (табл. 5).

Наименьший промежуток времени  $t$  между отсчетами по пьезометру 1 минута или 60 секунд, наибольший—1 сутки или 86400 секунд.

Отношение напоров  $\frac{h_1}{h_2}$  колеблется между 1,05 и 2,0; их логарифмы имеют пределами 0,0212 и 0,3010.

## Расположение шкал номограммы

Полезно, чтобы размещение шкал на номограмме представило удобство при пользовании ею, в особенности при обработке результатов серийных лабораторных опытов; правильный учет этого обстоятельства повышает ценность номограммы.

Обычно один и тот же образец грунта испытывается на фильтрацию при различных значениях коэффициента пористости, соответствующих различным давлениям на грунт; при каждом значении коэффициента пористости грунта делается несколько отсчетов, обычно от 4 до 7. Поэтому в таблице результатов лабораторных опытов имеются следующие две серии данных.

1. Данные, характеризующие размеры прибора и измерения грунта; сюда относятся площадь сечения образца  $A$ , площадь трубки  $a$ , высота слоя грунта  $L$  и коэффициенты пористости грунта  $e_0$  и  $e$ . Эти

\* Не имеет смысла уменьшать пределы шкалы до 6—7 см, так как и для более широких пределов 5,0—8,4 см можно получить вполне удовлетворительную шкалу. Лишь при определении ширины звена номограммы не будем учитывать крайних, редко употребляемых участков шкалы (см. ниже).

Значения коэффициентов вязкости воды  $\gamma_T$  в сантипуазах и температурной поправки  $u$  для разных температур

$T^\circ$	$\gamma_T$	$u$	$T^\circ$	$\gamma_T$	$u$	$T^\circ$	$\gamma_T$	$u$
1	1,7313	1,7227	11	1,2713	1,2650	21	0,9810	0,9761
2	1,6728	1,6645	12	1,2363	1,2301	22	0,9579	0,9531
3	1,6191	1,6110	13	1,2028	1,1968	23	0,9353	0,9306
4	1,5674	1,5596	14	1,1709	1,1651	24	0,9142	0,9096
5	1,5188	1,5112	15	1,1404	1,1347	25	0,8937	0,8892
6	1,4728	1,4655	16	1,1111	1,1056	26	0,8737	0,8693
7	1,4284	1,4213	17	1,0828	1,0774	27	0,8545	0,8602
8	1,3860	1,3791	18	1,0559	1,0506	28	0,8360	0,8318
9	1,3462	1,3395	19	1,0299	1,0248	29	0,8180	0,8139
10	1,3077	1,3012	20	1,0050	1,0000	30	0,8007	0,7967

величины являются неизменными для всех опытов на фильтрацию с данным образцом грунта.

2. Данные, характеризующие различные этапы опыта для каждого значения коэффициента пористости; сюда относится: температура воды  $T$ , отношение напоров  $\frac{h_1}{h_2}$  и время  $t$ , в течение которого напор уменьшается от  $h_1$  до  $h_2$ . Эти данные различны как для разных значений коэффициента пористости грунта, так и для разных этапов испытаний, проведенных при неизменной величине этого коэффициента.

Поэтому для большего удобства обработки результатов опыта номограмма должна быть разделена на две части: в левой части должны быть размещены шкалы, относящиеся к первой серии опытных данных, и в правой части—шкалы, относящиеся ко второй серии данных.

При пользовании номограммой вначале проводятся разрешающие прямые в ее левой части и на соответственной шкале вспомогательной переменной определяется маячная точка  $R$ , которая суммирует значения величин первой серии данных.

Все дальнейшие действия сосредотачиваются в правой части номограммы. Маячная точка  $R$  является исходным пунктом для вычисления коэффициента фильтрации для всех опытов, проведенных при данном значении коэффициента пористости грунта. Работа весьма облегчается, так как вместо проведения семи разрешающих прямых\* достаточно провести только три прямые между маячной точкой  $R$  и ответной шкалой  $k$ .

В соответствии с изложенным должна быть принята следующая последовательность записи переменных в алгоритме; вначале должны идти данные, относящиеся к первой серии:  $a$ ,  $A$ ,  $e_0$ ,  $e$  и  $L$ , а затем ко второй серии  $T$ ,  $h_1/h_2$  и  $t$ .

\* Номограмма уравнения с восьмью независимыми переменными состоит из семи звеньев.

## Алгоритм номограммы для определения коэффициента фильтрации грунта

Переходим к алгоритму номограммы, который составляем по форме табл. 4. Расчет расстояний между шкалами будем вести отдельно на схеме номограммы по форме, приведенной на фиг. 22. Все решения в алгоритме (табл. 6) ведем с точностью до четырех знаков.

Второй столбец алгоритма служит только для наименования независимых переменных. В шестой строке переменная названа температурой  $T^\circ$ , хотя в расчет входит температурная поправка  $u$ ; дело в том, что лишь температура является действительным аргументом функции, температурная же поправка является функцией температуры. Аналитический вид этой функции не дан, и функциональная зависимость задана в виде табл. 5; так как должна быть построена функциональная шкала, на которой пометками явятся значения температуры  $T$ , то нет надобности иначе называть указанную строку.

В третьем столбце записан вид функции, согласно уравнению (10.2). Имея заданные пределы изменения переменных, вычисляем предельные значения и вписываем наименьшее и наибольшее ее алгебраические значения, соответственно, в столбцы 6 и 7. Все логарифмы в этих столбцах даны в виде обычных положительных или отрицательных чисел. Так, например, в седьмой строке вместо найденного по таблице логарифмов значения  $\lg 0,3010 = \bar{1},4786$  написано значение  $-0,5214$ . При пределах шкал отрицательных функций ставится знак минус. Следует обращать внимание на знаки величин, стоящих в столбцах 6 и 7. Знаки этих величин определяются как знаками, стоящими перед функциями в уравнении (10.2), так и значениями самих функций. Так, знаки, стоящие перед наименьшими значениями функций в разных строках столбца 6, соответствуют следующим случаям:

+0,2648 и +0,1761 означают положительное значение логарифмической функции, перед которой в уравнении (10.2) стоит знак плюс;

-1,7404 и -0,5563 означают положительное значение функции, перед которой стоит знак минус;

-0,0987 и -1,6739 означают отрицательное значение функции, перед которой стоит знак плюс;

Если бы какая-либо из функций, перед которой в уравнении (10.2) стоит знак минус, имела проксимальным пределом переменной величину меньше единицы, то наименьшее значение логарифмической функции было бы отрицательной величиной; однако в столбце 6 стояла бы положительная величина, так как это соответствовало бы отрицательному значению функции, перед которой стоит знак минус.

После заполнения столбцов 6 и 7 можно определить и вписать в столбцы 4 и 5 соответствующие им проксимальные и дистальные предельные значения переменных.

Таблица 6

Алгоритм ценной номограммы для определения коэффициента фильтрации грунтов  $k = 2,3 \frac{a}{A} L \frac{1+e}{1+e_0} \cdot \frac{u}{t} \cdot \lg \frac{h_1}{h_2}$

№ строк	Переменные $u$	Вид функции $f(u)$	Пределы переменных		Предельные значения функции		Интервал функции $A$	Коэффициент шкалы $a$	Длина шкалы $h$	Длина опоры $g$	Опорный интервал $B$	Расстояние от начала номограммы $L$	Моменты коэффициентов шкалы $M$
			проксимальный $(u)_1$	дистальный $(u)_2$	наименьшее $f(u)_1$	наибольшее $f(u)_2$							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	$a$	$\lg 2,3a$	1,84	3,45	0,2648	0,5378	0,2730	0,02	13,65	3,12	0,0625	0	0
2	$A$	$-\lg A$	55	25	-1,7404	-1,3979	0,3425	0,02	17,12	1,39	0,0278	4	0,08
3	$e_0$	$-\lg (1+e_0)$	3,6	1,5	-0,5563	-0,1761	0,3802	0,02	19,01	0,44	0,0089	8	0,16
4	$e$	$\lg (1+e)$	1,5	3,6	0,1761	0,5563	0,3802	0,02	19,01	0,44	0,0089	12	0,24
5	$L$	$\lg L$	1,0	2,5	0	0,3979	0,3979	0,02	19,90	0	0	16	0,32
6	$T$	$\lg u$	0,7967	1,5596	-0,0987	0,1930	0,2917	0,02	14,58	2,66	0,0532	0	0,40
7	$h_1/h_2$	$\lg \lg h_1/h_2$	0,0212	0,3010	-1,6739	-0,5214	1,1525	0,08	14,41	2,75	0,2200	21	1,68
8	$t$	$-\lg t$	86400	60	-4,9365	-1,7782	3,1583	0,16	19,74	0,08	0,0128	22,5	3,60
9	$k$	$\lg k$	$2,72 \cdot 10^{-9}$	$6,47 \cdot 10^{-3}$	-8,5649	-2,1886	6,3763	0,36	17,71	1,09	0,3941	18	6,48
10	Контроль		—	—	—	—	6,3763	—	—	1,09	—	—	6,48
11	$k$	$\lg k$	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-2}$	-9,0000	-2,0000	7,0000	0,36	19,44	-0,12	—	—	—

В восьмом столбце определяются интервалы функции, как разность величин, стоящих в предыдущих двух столбцах. Интервалы функции являются положительными величинами.

Под последней строкой алгоритма проводим горизонтальную линию и выписываем данные для шкалы коэффициента фильтрации грунта  $k$ . Суммируя столбцы 6 и 7, получаем логарифмы наименьшего и наибольшего значений коэффициента фильтрации  $k$  соответственно. Имеем:  $\lg k_1 = -8,5649 = -9,4351$ , откуда проксимальный предел шкалы равен  $k_1 = 2,72 \cdot 10^{-9}$  см/сек. Тем же путем получаем:  $\lg k_2 = -2,1886 = -3,8114$ , откуда дистальный предел шкалы  $k_2 = 6,47 \cdot 10^{-3}$  см/сек.

Суммируя величины в столбце 8, получаем интервал функции коэффициента фильтрации ( $A_9 = 6,3763$ ).

В девятом столбце даны значения коэффициентов шкал; они назначены из числа коэффициентов шкал логарифмических счетных линеек (табл. 1) с таким расчетом, чтобы получающиеся при этом длины шкал находились в пределах между 10 см и 20 см.

Под чертой подсчитана сумма коэффициентов шкал; она представляет собой коэффициент шкалы функции зависимой переменной ( $a_9 = 0,36$ ).

В десятом столбце вычислены длины шкал номограммы; они получены как отношения интервалов функций (столбец 8) к коэффициенту шкалы (столбец 9). Таким же путем найдена и длина шкалы  $k$ .

В одиннадцатом столбце вычислены длины опор шкал функции. Опорную линию проводим через начало самой длинной шкалы, в данном случае через начало шкалы  $L$ ; длина ее шкалы равна  $h_{\max} = 19,90$  см. Длина опоры шкалы  $L$  равна нулю. Длины опор остальных шкал определяются на основании уравнений (9.1); так, длина опоры шкалы  $A$  составляет:

$$g_2 = \frac{h_{\max} - h_2}{2} = \frac{19,90 - 17,12}{2} = 1,39 \text{ см.}$$

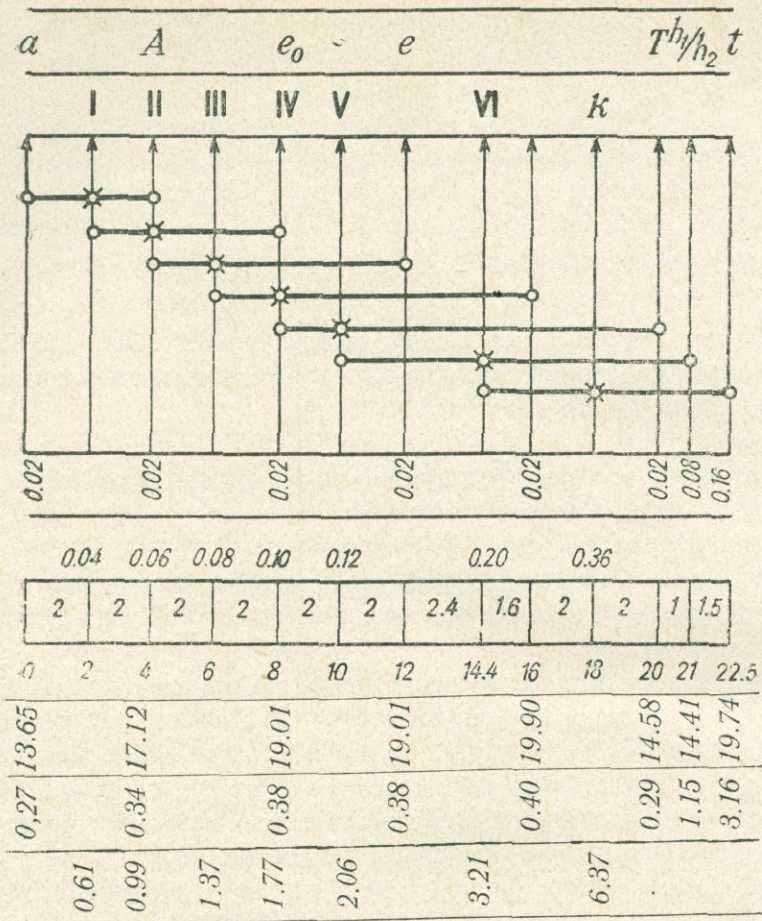
Длина опоры шкалы коэффициента фильтрации грунта  $k$  определяется по той же формуле (9.1)

$$g_9 = \frac{h_{\max} - h_9}{2} = \frac{19,90 - 17,71}{2} = 1,09 \text{ см.}$$

В двенадцатом столбце подсчитаны значения опорных интервалов функций; они равны произведению значений, содержащихся в девятом и одиннадцатом столбцах. Опорный интервал функции зависимой переменной получается как сумма опорных интервалов составляющих функций ( $B = 0,3941$ ).

### Схема номограммы

На этом заканчивается основная часть алгоритма номограммы. Перейдем к назначению расстояний между шкалами. Для этого составляем схему номограммы (фиг. 25).



Фиг. 25

Начнем с первого звена номограммы. Оно состоит из шкал  $a$ ,  $I$  и  $A$ . Проводим три вертикальные линии, изображающие линии носителей шкал, и обозначим эти шкалы символами соответствующих функций; над первой линией пишем  $a$  (в первой строке), над второй  $I$  (во второй строке) и над третьей  $A$  (в первой строке). Под вертикальными линиями в третьей строке пишем коэффициенты шкал этих функций: 0,02 под  $a$  и 0,02 под  $A$ ; в четвертой строке пишем коэффициент шкалы функции  $I$ , равный сумме коэффициентов этих шкал, т. е. 0,04. Так как коэффициенты шкал положительны, то вертикальные линии показываем в виде стрелок, направленных вверх.

Назначаем произвольное расстояние между шкалами  $a$  и  $I$ , например  $d = 2$  см, и вписываем его в пятую строку. Расстояние между шкалами  $I$  и  $A$  определяем на основании теоремы о моментах коэффициентов шкал. Легко видеть, что взаимное расстояние между шкалами  $I$  и  $A$  будет равно  $z_1 = \frac{0,02}{0,02} \cdot 2 = 2$  см. Это расстояние также вписываем в пятую строку.

Весь этот подсчет легко проверить на средней части схемы, где показан рычаг второго рода длиной 4 см, вращающийся вокруг точки, находящейся на расстоянии 2 см от конца, и нагруженный по концам двумя силами по 0,02 единицы; видно, что этот рычаг будет находиться в равновесии, т. е. звено подсчитано правильно.

Переходим ко второму звену I—II— $e_0$ .

Полученное ранее расстояние между шкалами I и A, равное 2 см, является приемлемым для взаимного расстояния между шкалами, поэтому мы сливаем шкалу II со шкалой A.

Проводим вертикальную линию для шкалы  $e_0$  и подписываем под нею коэффициент шкалы (0,02). Коэффициент шкалы II равен сумме коэффициентов шкал I и  $e_0$ , и составляет  $0,04+0,02=0,06$ . Это значение подписываем под линией шкалы II (которая слилась с линией шкалы A) в четвертой строке.

Расстояние между шкалами II и  $e_0$  определим аналогично предыдущему, из выражения  $z_2 = \frac{0,04 \cdot 2}{0,02} = 4$  см. Полученное расстояние проверяем по соответствующей модели рычага второго рода.

Переходим к третьему звену II—III— $e$ . Полученное выше расстояние между шкалами II и  $e_0$ , равное 4 см, слишком велико для того, чтобы оставить его неиспользованным. Поэтому мы помещаем сюда шкалу очередной вспомогательной функции III. Выбираем для шкалы III положение в середине между шкалами II и  $e_0$ , т. е. на расстоянии 2 см от шкалы II.

Изобразим на схеме линии шкал III и  $e$  и подпишем в третьей и четвертой строках соответствующие коэффициенты шкал: 0,02 для  $e$  и 0,08 для III. Расстояние между шкалами III и  $e$  составит  $z_3 = \frac{0,06}{0,02} \cdot 2 = 6$  см. Соответствующая проверка на модели рычага показана по схеме.

Продолжая те же рассуждения, мы найдем полезным слить шкалу IV со шкалой  $e_0$  ( $z_4 = 8$  см), и оставим неслитыми шкалу V ( $z_5 = 10$  см) и шкалу VI ( $z_6 = 6,6$  см). Все это показано на схеме и не требует дополнительных разъяснений.

### Расстояние от начала номограммы до шкалы функции зависимой переменной

В последнем звене номограммы вместо очередной немой шкалы вспомогательной переменной должна находиться градуированная шкала функции зависимой переменной; из соображений ясности чертежа не будем сливать шкалы. Поэтому расположим шкалу  $k$  в широком промежутке между шкалами  $L$  и  $T$  и определим положение шкал  $k$  и  $t$ , сообразуясь с полем чертежа.

Естественно разместить шкалу  $k$  посередине между шкалами  $L$  и  $T$ , на расстоянии 2 см от первой. Таким образом, задаемся расстоянием шкалы  $k$  от шкалы VI, равным 3,6 см. Отсюда может быть определено положение шкалы  $t$ ; ее расстояние от шкалы VI определяется так:

$$z_7 = \frac{0,36}{0,16} \cdot 3,6 = 8,1 \text{ см.}$$

Так как расстояние от шкалы VI до шкалы  $h_1/h_2$  составляет 6,6 см, то шкала  $t$  отстоит от шкалы  $h_1/h_2$  всего на расстоянии 1,5 см, что вполне приемлемо. Правильность назначения взаимных расстояний шкал последнего звена также проверяем на модели с рычагом.

Расстояние всех шкал от начала номограммы показано в шестой строке схемы.

Вернемся к алгоритму номограммы (табл. 6). Полученные расстояния между началом номограммы и шкалами функции (шестая строка схемы номограммы) выписываются в тринадцатый столбец алгоритма, а в следующем столбце подсчитываются моменты коэффициентов шкал относительно начала номограммы. Суммируя эти величины, получаем момент коэффициента шкалы функции зависимой переменной ( $M_9=6,48$ ).

### Контроль расчета

Перед тем как перейти к построению номограммы, покажем, как проверить правильность всех вычислений еще до вычерчивания номограммы.

Правильно рассчитанный алгоритм номограммы с параллельными шкалами должен удовлетворять следующим трем условиям:

1) Разность предельных значений функции зависимой переменной (столбцы 6 и 7) равна интервалу функции этой переменной (столбец 8). В нашем случае:  $-2,1886 - (-8,5649) = 6,3763$ , что совпадает со значением  $A_9$ , стоящим в девятой строке восьмого столбца алгоритма.

2) Длина опоры шкалы функции зависимой переменной (столбец 11) равна отношению опорного интервала этой функции (столбец 12) к коэффициенту шкалы (столбец 9). В нашем случае  $\frac{0,3941}{0,36} = 1,09 \text{ см}$ , что совпадает со значением  $g_9$ , стоящим в девятой строке одиннадцатого столбца алгоритма.

3) Момент коэффициента шкалы функции зависимой переменной относительно начала номограммы равен сумме моментов коэффициентов шкал слагаемых функции относительно той же точки. В нашем случае:  $0,36 \cdot 18 = 6,48$ , что совпадает со значением  $M_9$ , стоящим в девятой строке четырнадцатого столбца алгоритма.

Таким образом, номограмма рассчитана правильно.

### Предельный угол, образуемый разрешающими прямыми

До того как приступить к построению номограммы, убедимся в том, что шкалы номограммы не расположены чересчур близко друг к другу, то есть, что наименьший угол, образуемый разрешающими прямыми с носителями шкал, нигде не меньше, чем допустимый нижний предел  $20^\circ$ .

Для этой проверки воспользуемся номограммой предельного угла пересечения шкал (фиг. 23). В схему номограммы вписываем для шкал

функции независимых переменных длины шкал  $h$  и, округляя до сотых долей, интервалы функции  $A$  (седьмая и восьмая строки схемы фиг. 25); в последней строке схемы суммированием определяем интервалы  $R$  вспомогательных переменных.

В первом звене для шкалы  $A$  учитываем только обычно применяемый интервал переменной  $6 < D < 7$  см, откуда  $29 < A < 38$  см<sup>2</sup>; длина этого участка шкалы  $A$  составляет 5,9 см. По номограмме для  $h_1 = 13,65$  см,  $h_2 = 5,9$  см и  $l = 4$  см получаем  $\varphi_1 = 22^\circ$  (округляя до целых градусов).

Для второго звена при  $R = 0,61$ ,  $r = 0,04$ ,  $h_2 = 19,01$  см и  $l = 6$  см по номограмме находим  $\varphi_2 = 20^\circ$ . Для третьего звена при  $R = 0,99$ ,  $r = 0,06$ ,  $h_2 = 19,01$  см и  $l = 8$  см получаем  $\varphi_3 = 25^\circ$ . Для четвертого звена, при  $R = 1,37$ ,  $r = 0,08$ ,  $h_2 = 19,90$  см и  $l = 10$  см, имеем  $\varphi_4 = 28^\circ$ . Для пятого звена при  $R = 1,77$ ,  $r = 0,10$ ,  $h_2 = 14,58$  см и  $l = 12$  см находим  $\varphi_5 = 37^\circ$ . Для шестого звена при  $R = 2,06$ ,  $r = 0,12$ ,  $h_2 = 14,41$  см и  $l = 11$  см определяем  $\varphi_6 = 35^\circ$ . Наконец, для седьмого звена, при  $R = 3,21$ ,  $r = 0,20$ ,  $h_2 = 19,74$  см и  $l = 8,1$  см, получаем  $\varphi_7 = 25^\circ$ .

Таким образом, ни в одном случае разрешающие прямые не образуют с носителями шкал углов более острых, чем предельно допустимый угол  $20^\circ$ ; не следует забывать, что только в исключительных случаях разрешающие прямые будут занимать показанное на фиг. 20 предельное положение, вообще же величины углов с носителями шкал будут больше, чем вычисленные выше. Отсюда заключаем, что расстояния между шкалами найдены правильно.

### Градуирование шкал

Покажем, как производится градуирование различных шкал номограммы. Заметим, что выбранный пример расчета и построения номограммы обладает той особенностью, что почти каждая шкала его градуируется по-своему и, таким образом, имеется возможность показать различные приемы.

Начнем со шкалы  $a$ ; из табл. 6 видно, что коэффициент ее шкалы равен 0,02; таким коэффициентом шкалы обладает нормальная шкала большой логарифмической линейки длиной 50 см (см. табл. 1). В результате построения, выполненного как описано выше (§ 8), чертим на бумаге носитель шкалы и показываем ее начало и конец. Отыскиваем на нормальной шкале большой линейки пометку 0,8 и прикладываем ее к началу шкалы номограммы; копируем с линейки участок, расположенный между пометками 0,8 и 1. Затем переносим линейку вдоль носителя шкалы, прикладываем начало логарифмической линейки к точке на чертеже, которая имеет пометку 1, и продолжаем копирование линейки на участке, расположенном между пометками 1 и 1,5. Если расчет и построение выполнены правильно, то точка с пометкой 1,5 должна совпасть с концом шкалы, что служит контролем градуировки.

Для градуирования шкалы  $A$  продельваем то же самое, но предварительно перевертываем линейку таким образом, чтобы пометки ее

возрастали сверху вниз; поэтому пометка 25 линейки оказывается у начала шкалы, а пометка 55—у конца ее. Это является следствием того, что перед функцией стоит знак минус.

В ряде случаев вместо площадей сечения трубки пьезометра  $a$  и объема грунта  $A$  могут быть даны их диаметры  $d$  и  $D$ ; для того чтобы не производить предварительно вычисления площади сечения, с левой стороны соответствующих шкал дана градуировка для  $d$  и  $D$ . Для этой цели применены шкалы с коэффициентом 0,01, полученные фотографическим путем. Детали этого изложены ниже, в примере построения номограммы с усеченными шкалами (§ 13).

Для градуирования шкалы  $e_0$  необходимо взять на большой логарифмической линейке участок, расположенный между пометками 1,5 и 3,6, и скопировать его так же, как это было сделано в отношении шкалы  $A$ , то есть приложить точку с пометкой 1,5 к концу шкалы, а с пометкой 3,6—к началу ее. Для шкалы  $e$  надо поступить наоборот—приложить точку с пометкой 1,5 к началу шкалы, а точку с пометкой 3,6—к концу. Помня, однако, что обе функции имеют вид  $g(1+e)$ , подписываем пометки шкалы на единицу *меньшие*, чем это читается на линейке; таким образом, пометки на шкале  $e_0$  будут убывать от 2,6 у конца шкалы до 0,5—у начала ее и, наоборот, для шкалы  $e$ —возрастать от 0,5 у начала шкалы до 2,6 у ее конца.

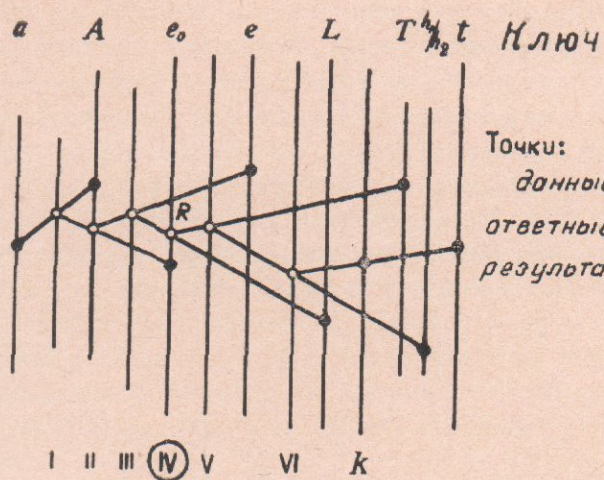
Для градуирования шкалы  $L$  необходимо применить ту же логарифмическую линейку. Градуирование ничем не отличается от описанного для шкалы  $a$ .

Для градуирования шкалы температур  $T$  надо воспользоваться той же нормальной шкалой большой логарифмической линейки ( $a_6=0,02$ ); однако на линейке отсутствуют деления, отвечающие значениям  $u$  в табл. 6; поэтому пометки градуировки должны быть получены путем отсчетов с линейки на глаз.

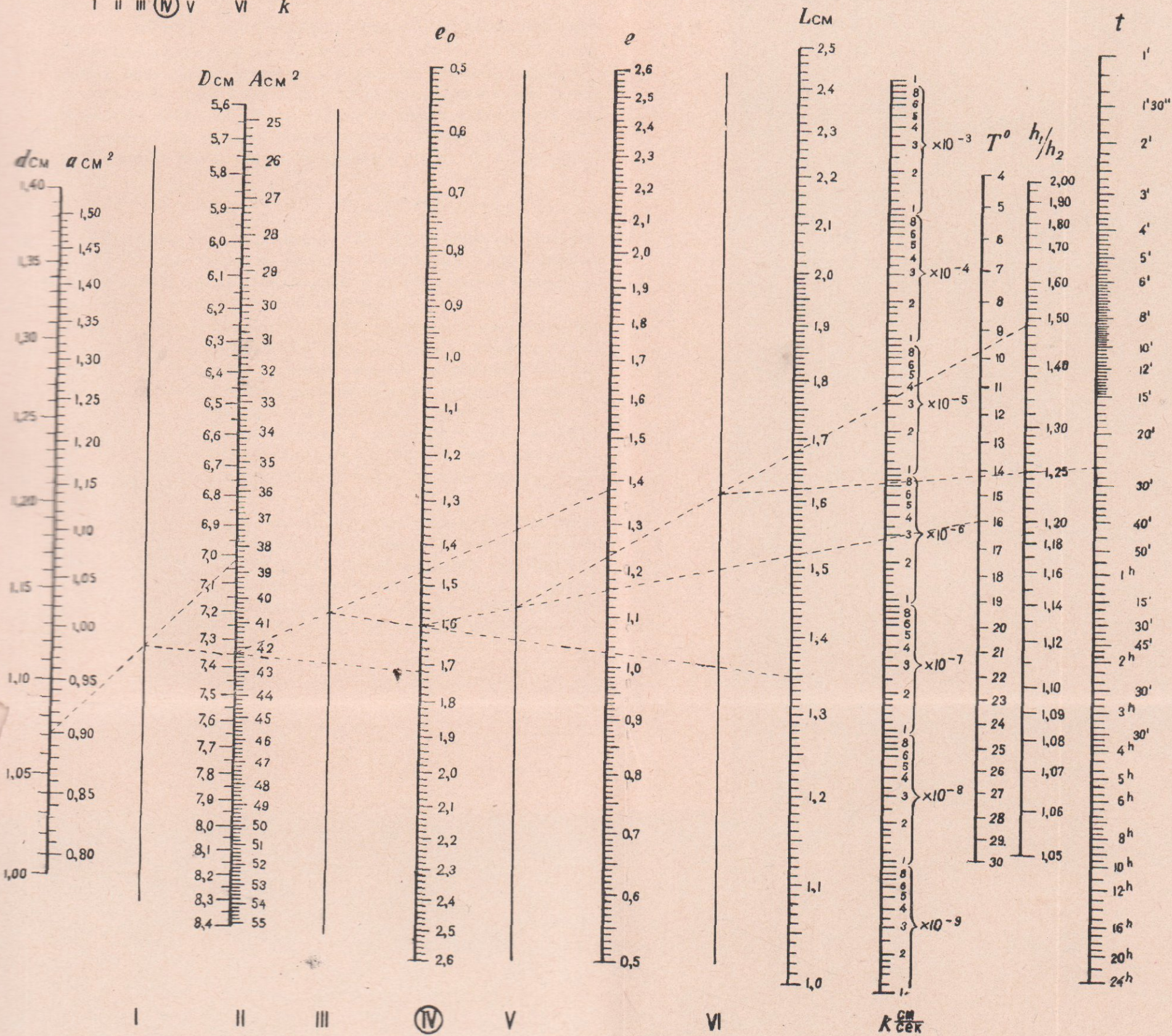
На шкале  $h_1/h_2$  должны быть изображены значения функции  $\lg \lg h_1/h_2$ ; так как мы пользуемся для градуирования логарифмической линейкой, то необходимо предварительно вычислить значения  $\lg h_1/h_2$ , затем, так же как и для шкалы  $T$ , определить на глаз соответствующие пометки точек на линейке и перенести полученные длины на шкалу\*.

Градуирование шкалы  $t$  необходимо произвести не в секундах, а в минутах и часах; при этом на участке между  $1'=60''$  и  $10'=600''$  деления наносятся через каждые  $10''$ ; на участке между  $10'$  и  $15'=900''$ —через каждые  $20''$ ; на участке между  $15'$  и  $20'=1200''$ —через каждые  $1'$ , или  $60''$ , и т. д. Поэтому в ряде случаев деления могут быть получены путем непосредственного копирования, в других же случаях их придется брать на глаз. Этого не произошло бы при градуировании всей шкалы в секундах; однако пользование такой шкалой на участке, где время измеряется часами, затруднительно, так как пришлось бы каждый раз переводить часы в секунды.

\* На электротехнических линейках имеются шкалы  $\lg \lg$ ; поэтому в таких случаях можно шкалы копировать непосредственно.



$$k = 2,3 \frac{a}{A} L \frac{1+e}{1+e_0} \frac{u}{t} \lg \frac{h_1}{h_2}$$



Пример:  $a = 0,90 \text{ см}^2$ ;  $A = 38,5 \text{ см}^2$ ;  $e_0 = 1,72$ ;  $e = 1,38$ ;  $L = 1,35 \text{ см}$ ;  $T^{\circ} = 16^{\circ}\text{C}$ ;  $h_1/h_2 = 1,48$ ;  $t = 26 \text{ мин}$  Результат:  $k = 7,65 \cdot 10^{-6} \text{ см/сек}$

Фиг. 26. Номограмма для определения коэффициента фильтрации связных грунтов при переменном напоре.

Փոփոխական ճնշման տակ գապակցված զրուստների ձճանցման գործակցի որոշման նոմոգրամը:

Nomogram for computation of permeability of cohesive soils by variable head.

Единственной шкалой, для которой нельзя воспользоваться методом копирования делений с логарифмической линейки (непосредственно или беря их на глаз), а приходится изменять модуль шкалы, является шкала функции зависимой переменной—коэффициента фильтрации грунта  $k$ ; причиной этого является то обстоятельство, что ни одна логарифмическая шкала не обладает коэффициентом шкалы, равным  $a_0=0,36$ . Поэтому градуирование этой шкалы производим путем пропорционального деления, как это схематически показано на фиг. 13 а. Для этого под углом к линии шкалы  $k$  проводим вспомогательную прямую, на которую копируем градуировку с кубической шкалы карманной линейки ( $a=0,24$ ), как наиболее близкую к искомой шкале, которая должна иметь  $a=0,36$ . Затем проводим параллельные линии и переносим эту градуировку на шкалу  $k$  (§ 8); ясно, что при копировании делений с логарифмической линейки на вспомогательную шкалу не приходится брать отсчеты на глаз, так как все необходимые деления имеются на линейке.

Пределы шкалы  $k$  целесообразно округлить до целых порядков; тогда пределами переменной шкалы  $k$  будут  $1 \cdot 10^{-9}$  и  $1 \cdot 10^{-2}$  см/сек. Соответствующий подсчет длины шкалы для этих пределов переменной  $k$  дан в последней строке табл. 6. Для вычисления длины опоры нельзя воспользоваться формулой (9.1), поскольку шкала  $k$  для новых пределов переменной не является центрированной. Начало шкалы  $k$  должно располагаться ниже, чем подсчитанное в строке 9, на величину

$$\frac{(-8,5649) - (-9,0000)}{0,36} = \frac{0,4351}{0,36} = 1,21 \text{ см,}$$

откуда длина опоры шкалы равняется  $1,09 - 1,21 = -0,12$  см. Полученную градуировку повторяем на шкале  $k$  номограммы 7 раз. Пометки точек представляем в виде произведений, в которых второй множитель равняется десяти в отрицательной степени.

Приведем итоги сказанного. Во всех тех случаях, когда функции имеют вид простой логарифмической функции  $y = \lg a$ , иными словами, когда функция в заданном уравнении является независимой переменной, или когда, в более сложных случаях, пометки точек представляют круглые значения аргумента логарифмических функций, возможно непосредственное копирование делений с логарифмических линеек; в нашем примере такими были шкалы  $a$ ,  $A$  и  $L$ . То же самое имеет место, когда функция имеет вид  $\lg(mu+n)$ , где  $m$  и  $n$ —круглые числа; такими были шкалы  $e$  и  $e_0$ .

Во всех же тех случаях, когда логарифмическая функция имеет сложный вид (например, логарифм логарифма, как в случае шкалы  $\eta_1/h_2$ , или логарифмы непоказанной функциональной зависимости между температурой воды и отношением ее вязкости при этой температуре к вязкости при  $20^\circ$ , как в случае шкалы  $T$ ), метод непосредственного копирования может быть применен только тогда, когда получаемая под

збачом логарифма величина помечена на логарифмической шкале; для остальных же значений аргумента деления на логарифмической шкале должны читаться на глаз. Но даже в этом случае предлагаемый метод градуирования имеет преимущество перед обычно применяемым способом построения шкал по уравнениям, так как отсчеты, взятые с логарифмической линейки на глаз, не менее точны, чем результаты построения с помощью масштабной линейки; работа же значительно облегчается, так как отпадает необходимость вычисления значений логарифмической функции.

### Способ применения номограммы

Номограмма для определения коэффициента фильтрации грунта представлена на фиг. 26.

Все шкалы заданных функций показаны на номограмме в той последовательности, в которой они должны применяться.

Разрешающие прямые последовательно проводятся от шкал, имеющих символ *внизу*, к шкалам, имеющим символ *вверху*, и засекают точки на шкалах, имеющих символ *внизу*; лишь в первом звене разрешающая прямая проводится через данные точки на двух шкалах заданных функций. В рассматриваемом случае разрешающая прямая проводится через  $a$  (вверху) и  $A$  (вверху), засекается же ответная точка на шкале I (внизу).

Во всех остальных звеньях, включая и последнее звено, разрешающие прямые проводятся по общему правилу, а именно:

через I (внизу) и  $e_0$  (вверху) отсекается II (внизу);

через II (внизу) и  $e$  (вверху) отсекается III (внизу);

через III (внизу) и  $L$  (вверху) отсекается IV (внизу);

через IV (внизу) и  $T$  (вверху) отсекается V (внизу);

через V (внизу) и  $h_1/h_2$  (вверху) отсекается VI (внизу);

через VI (внизу) и  $t$  (вверху) отсекается  $k$  (внизу).

Обозначение шкалы «IV» взято в кружок для того, чтобы показать, что на этой шкале отсекается маячная точка  $R$ .

Покажем применение полученной номограммы на примере. Пусть дано: площадь сечения пьезометра  $a=0,90 \text{ см}^2$ , площадь сечения кольца комфильметра  $A=38,5 \text{ см}^2$  (соответственно диаметру кольца  $D=7 \text{ см}$ ), высота кольца  $L=1,35 \text{ см}$ , начальный коэффициент пористости  $e_0=1,72$ , конечный коэффициент пористости  $e=1,38$ , температура воды  $T=16^\circ$  (соответственно температурная поправка  $u=1,106$ ), отношение напоров  $h_1/h_2=1,48$ , интервал времени  $t=26 \text{ минут}=1560 \text{ сек}$ . Проводя разрешающие прямые, как это показано пунктиром на номограмме, получаем коэффициент фильтрации  $k=7,8 \times 10^{-6} \text{ см сек}^{-1}$ .

В правильности результата можно убедиться, произведя параллельный аналитический расчет

$$k = \frac{2,3 \cdot 0,90 \cdot 1,35 \cdot (1 + 1,38) \cdot 1,106 \cdot \lg 1,48}{38,5 \cdot (1 + 1,72) \cdot 1560} =$$

$$= 7,65 \cdot 10^{-6} \text{ см сек}^{-1}, \text{ т. е. ошибка } 2\%.$$

## § 11. ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММ С ПОЛНОСТЬЮ СЛИВШИМИСЯ ШКАЛАМИ

### Номографируемое уравнение и пределы изменения переменных

Для гранулометрического анализа грунтов, производимого ареометрическим или пипеточным методами, применяется формула, позволяющая определять наибольший диаметр частиц грунта в любое время седиментации. Согласно закону Стокса, этот наибольший диаметр частиц составляет в миллиметрах

$$d = \sqrt{\frac{18}{g} \cdot \frac{\eta}{\gamma_s - \gamma_w} \cdot \frac{L}{t}}, \quad (11.1)$$

где

$\eta$  — коэффициент вязкости взвешивающей среды в сантипуазах,

$\gamma_s$  — объемный вес частиц грунта,

$\gamma_w$  — объемный вес среды; в случае воды  $\frac{\gamma_s}{\gamma_w} = 1,0$ ,

$g$  — ускорение силы тяжести;  $g = 981 \text{ см сек}^{-2}$ ,

$L$  — среднее расстояние, которое проходит частица грунта в процессе седиментации, равная расстоянию от поверхности суспензии до центра водоизмещения луковицы ареометра при ареометрическом методе анализа или до нижнего конца пипетки, при пипеточном методе анализа, в сантиметрах и

$t$  — период седиментации в секундах.

Подставляя известные величины в (11.1), получаем

$$d = \sqrt{0,0184 \frac{\eta}{\gamma_s - 1} \cdot \frac{L}{t}} = 0,135 \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_s - 1} \cdot \frac{L}{t}}$$

Логарифмируя, находим

$$\lg d = \frac{1}{2} \lg 0,0184 \eta - \frac{1}{2} \lg (\gamma_s - 1) + \frac{1}{2} \lg L - \frac{1}{2} \lg t.$$

Пределы изменения переменных следующие:

Температура  $T$  при испытании может изменяться между 10 и 30°, коэффициенты вязкости  $\eta$  воды для этих температур составляют 1,3077 и 0,8007 сантипуаз, соответственно (табл. 5).

Объемный вес  $\gamma_s$  частиц грунта может колебаться между 2,0 и 3,2 г см<sup>-3</sup>.

Длина пути  $L$  частиц грунта изменяется между 5 и 30 см.

Время седиментации  $t$  колеблется между 10 сек и 100 часами.

### Расчет, построение и контроль номограммы

Расчет номограммы ведем в таблице-алгоритме (табл. 7). Она отличается от ранее примененной табл. 6 тем, что в нее введены столб-

цы для двух различных коэффициентов шкалы—для расчетного  $a$  и для графического  $a'$  (см. выше, § 9)—и добавлен столбец для показателя степени  $m$ .

Заполнение столбцов 1—8 не требует пояснений. В столбец 9 «графический коэффициент шкалы  $a$ » для всех функций независимых переменных вписываются произвольно выбираемые коэффициенты шкал, применительно к имеющимся логарифмическим линейкам, согласно табл. 1. Расчетный коэффициент шкалы  $a$  для всех функций независимых переменных (столбец 10) получается умножением значений столбцов 7 и 9. Суммируя величины столбца 10, получаем расчетный коэффициент шкалы функции зависимой переменной  $a_d = 0,12$ . После этого может быть найден графический коэффициент шкалы этой функции; для этого нужно разделить расчетный коэффициент шкалы этой функции на показатель ее степени; в данном случае

$$a_d' = \frac{a_d}{m_d} = \frac{0,12}{1} = 0,12 \text{ см}^{-1}.$$

Заметим, что удалось так подобрать графические (а следовательно и расчетные) коэффициенты шкал заданных функций независимых переменных, что полученное путем подсчетов значение графического коэффициента шкалы функции зависимой переменной ( $a_d' = 0,12$ ) оказалось соответствующим табл. 1. Поэтому для градуирования и этой шкалы можно применить логарифмическую линейку.

Весь произведенный до этого расчет не был связан с определенным расположением шкал на номограмме. Теперь можно заняться этим вопросом.

Выше было показано (§ 9), что если при составлении номограммы безразлична последовательность чередования шкал, то целесообразно их размещать в порядке возрастания значений коэффициента шкал. Так как в данном случае не поставлено никаких других требований, то видно, что принятая в алгоритме (табл. 7) последовательность шкал является наиболее целесообразной, так как расчетные коэффициенты шкал возрастают.

Расчет остальных частей табл. 7 ведется аналогично описанному выше и на нем не будем останавливаться. Схема номограммы представлена на фиг. 27. Как видно из схемы, сливаем шкалу второй вспомогательной переменной со шкалой объемного веса  $\gamma_s$ , таким образом, эта номограмма обладает вполне слившимися шкалами. Все шкалы размещаются на равных расстояниях друг от друга, соответствующих 3 см.

Контроль расчета номограммы показывает полную сходимость, то есть номограмма рассчитана правильно.

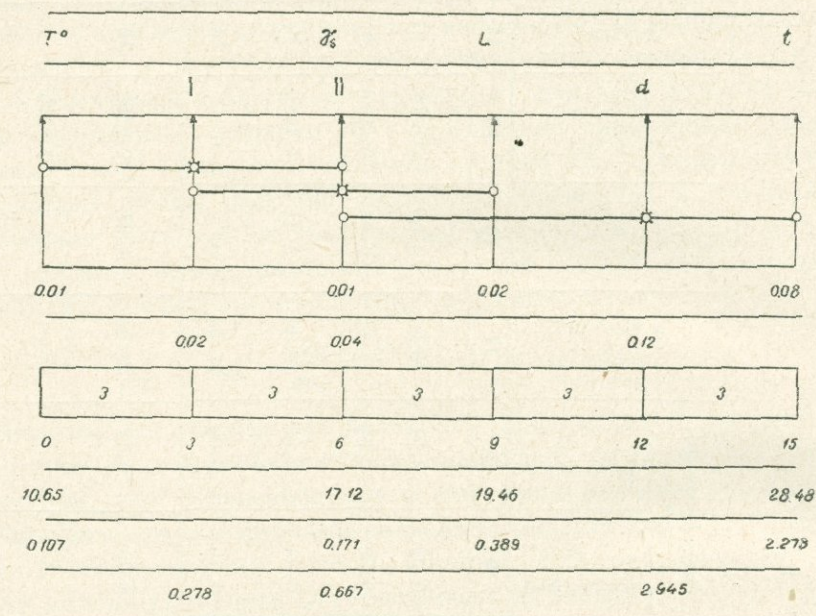
Для определения величины предельных углов, образуемых разрешающими прямыми, заполняем последние три строки схемы (фиг. 27) и пользуемся номограммой (фиг. 23). Получаем (округляя до

Алгоритм цепной номограммы для вычисления наибольшего диаметра частиц при ареометрическом анализе грунта

$$d = 0.135 \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_s - 1} \cdot \frac{L}{t}}$$

Переменная $u$	Вид функции $f(u)$	Пределы переменных		Значения функций		Показатель степени $m$	Интервал функции $A$	Коэффициенты шкалы		Длина шкалы $h$	Длина опоры $g$	Опорный интервал $B$	Расстояние от начала номограммы $L$	Моменты коэффициента шкалы относительно начала номограммы $M$
		проксимальный $(u)_1$	дистальный $(u)_2$	наименьшее $f(u)_1$	наибольшее $f(u)_2$			графический $a'$	расчетный $a$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\eta$	$\frac{1}{2} \lg 0,0184 \eta$	0,8007	1,3077	-0,9165	-0,8100	0,5	0,1065	0,02	0,01	10,65	8,92	0,0892	0	0
$\gamma_s$	$-\frac{1}{2} \lg (\gamma_s - 1)$	3,2	2	-0,1712	0	0,5	0,1712	0,02	0,01	17,12	5,68	0,0568	6	0,06
$L$	$\frac{1}{2} \lg L$	5	30	0,3495	0,7386	0,5	0,3891	0,04	0,02	19,46	4,51	0,0902	9	0,18
$t$	$-\frac{1}{2} \lg t$	$36 \cdot 10^4$	10	-2,7782	-0,5000	0,5	2,2782	0,16	0,08	28,48	0	0	15	1,20
$d$	$\lg d$	0,000304	0,2686	-3,5164	-0,5714	1	2,9450	0,12	0,12	24,54	1,97	0,2362	12	1,44
	Контроль	—	—	—	—	—	2,9450	—	—	—	—	0,2364	—	1,44

целых градусов): для первого звена  $\varphi_1 = 23^\circ$ , для второго  $\varphi_2 = 20^\circ$ , и для третьего  $\varphi_3 = 22^\circ$ , иными словами, значения углов, образуемых разрешающими прямыми с носителями шкал, находятся в допустимых пределах.



Фиг. 27

Номограмма для определения наибольшего диаметра частиц грунта представлена\* на фиг. 28. На номограмме приведены ключ к пользованию ею и пунктиром показан пример расчета. Вверху слева показан ход решения для разных практических случаев применения формулы гранулометрического анализа.

Алгоритм номограммы для

Переменные	Вид функции	Пределы переменных		Значения функций		Показатель степени	Интервал функции
		проксимальный	дистальный	наименьшее	наибольшее		
$g$	$2 \lg g$	1	10	0	2	2	2
$h$	$2 \lg h$	1	10	0	2	2	2
$P$	$\lg P$	1	10000	0	4	1	4
Контроль		—	—	—	—	—	4

\* Эта номограмма была опубликована автором в 1954 г. [17]. В статье было показано преимущество номограммы, показанной на фиг. 28, по сравнению с широко распространенной номограммой для той же формулы (11.1), составленной А. Казаранде. Номограмма автора введена в Болгарский государственный стандарт [14].

Ход решения

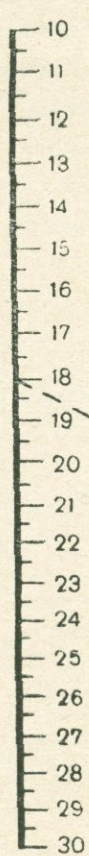
$$d? \begin{cases} T - \gamma_s \rightarrow I \\ I - L \rightarrow II \\ II - t \rightarrow d \end{cases}$$

$$L? \begin{cases} T - \gamma_s \rightarrow I \\ d - t \rightarrow II \\ I - II \rightarrow L \end{cases}$$

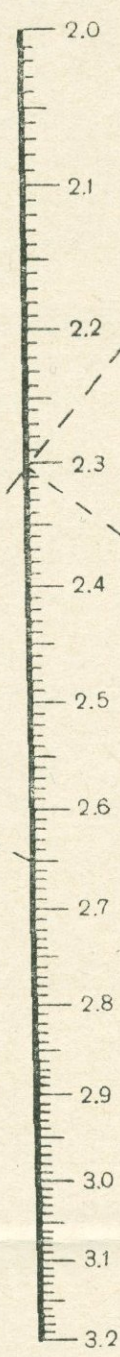
$$t? \begin{cases} T - \gamma_s \rightarrow I \\ I - L \rightarrow II \\ II - d \rightarrow t \end{cases}$$

$$d = 0.135 \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_s - 1} \cdot \frac{L}{t}}$$

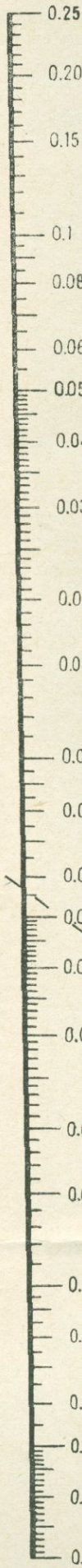
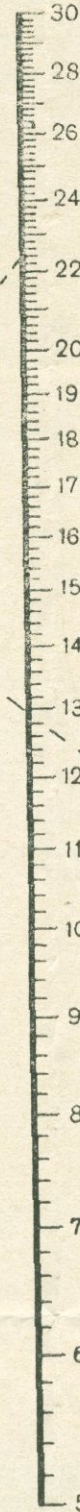
$T^\circ$



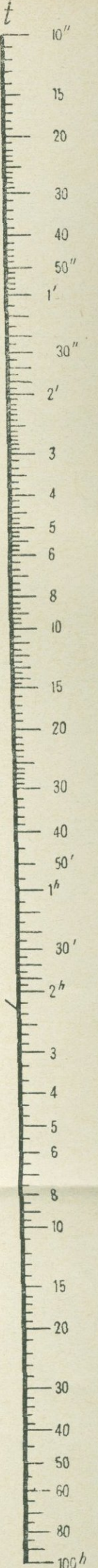
$\gamma_s \text{ г/см}^3$



$L$

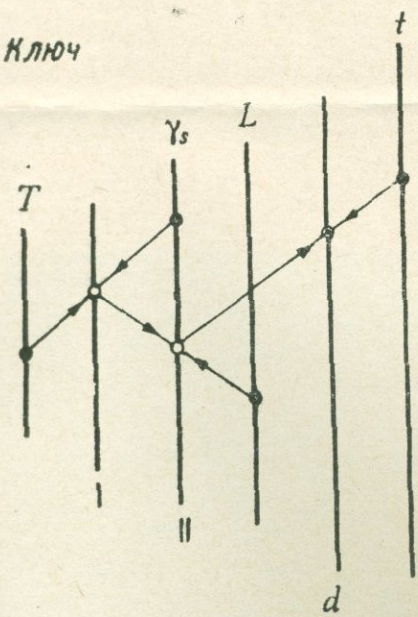


$d_{\text{мм}}$



$t$

Ключ



- данные
- ответные
- результат

Пример

Дано:  $T=18^\circ$ ,  $\gamma_s=2.65$ ,  $L=22.3$ ,  $t=2^h 15'$ . Результат:  $d=0.0057$

Фиг. 28. Номограмма для гранулометрического анализа грунтов.

Փրունտների մասնիկաչափական անալիզի համար նոմոգրամը:  
Nomogram for granulometric analysis of soils

## Расчет номограммы для определения весов засечек

Рассмотренный выше пример построения номограммы с полностью слившимися шкалами одновременно иллюстрировал построение номограммы уравнения, содержащего степенные функции. В этом отношении приведенный пример отличается той особенностью, что входящие в уравнение (11.1) независимые переменные имели степень более низкую ( $1/2$ ) по сравнению со степенью, которой обладает зависимая переменная (1). Из столбца 9 (табл. 7) видно, что если бы все переменные имели одинаковую степень, то, оставляя шкалы независимых переменных как они есть, нужно было бы градуировать шкалу  $d$  при значении коэффициента шкалы, равном 0,24, и, следовательно, применить вдвое более мелкую шкалу. Поэтому структура уравнения (11.1) оказалась благоприятной в том отношении, что позволила применить более крупную шкалу.

В противоположном случае, когда степень зависимой переменной ниже, чем степень входящих в уравнение независимых переменных, интервал функции зависимой переменной сильно возрастает. Это заставляет применять шкалы ответных функций с высокими значениями коэффициента шкалы и, следовательно, получать весьма мелкие шкалы. В таких случаях иногда может оказаться полезным сокращение пределов независимых переменных. В качестве примера рассмотрим номограмму для определения весов  $P$  засечек при многолучевом дифференциальном методе прямых засечек для наблюдений за движением оползней, производимом по формуле Н. Г. Келля,

Таблица 8

определения весов засечек  $P = g^2 h^2$

Коэффициент шкалы		Длина шкалы	Длина опоры	Опорный интервал	Расстояние от начала номограммы	Момент коэффициента шкалы относительно начала номограммы
графический	расчетный					
0.04	0.08	25	0	0	0	0
0.04	0.08	25	0	0	20	1.60
0.16	0.16	25	0	0	10	1.60
—	—	—	—	—	—	1.60

$$P = g^2 h^2, \tag{11.2}$$

которая после логарифмирования приводится к виду

$$\lg P = 2 \lg g + 2 \lg h,$$

Здесь  $g$ —градиенты лучей\*, являющихся основаниями инверсионных треугольников,  $h$ —высоты этих треугольников. Пределы изменения переменных  $g$  и  $h$  могут быть достаточно широкими (от 0,3 до 30  $сс/мм$  или от 0,1 до 10  $сек/мм$ ). Поэтому интервал каждой из логарифмической функции независимых переменных составляет 4, следовательно интервал функции переменной  $P$  составляет 8.

Для получения более компактной и точной номограммы сужаем заданные пределы переменных до одного логарифмического интервала (от 1 до 10). В тех случаях, когда значение одной из переменных уравнения (11.2) будет больше, чем верхний предел 10, будем искать на соответствующей шкале величину, в 10 раз меньшую, и, согласно формуле, увеличивать полученный ответ в 100 раз и обратно.

Обе шкалы переменных  $g$  и  $h$  будут совершенно идентичными. Тогда ответная шкала переменной  $P$  расположится в середине номограммы. Расчет ведем в форме алгоритма (табл. 8), который не требует пояснений. Готовая номограмма для определения весов засечек показана на фиг. 29.

## § 12. ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММ С ОБРАТНЫМИ ШКАЛАМИ

### Номографируемое уравнение

При расчете сети для ведения систематических инструментальных наблюдений за смещением оползневых реперов определение начальных координат оползневых точек, для их нанесения на план, производится по формулам (см. чертеж на фиг. 30)  $x = x_1 + \Delta x$  и  $y = y_1 + \Delta y$ , где  $x$  и  $y$ —координаты точки  $C$  оползневой сети,  $x_1$  и  $y_1$ —координаты точки  $A$  опорной сети, определенные методами триангуляции, и  $\Delta x$  и  $\Delta y$ —приращения координат точки  $A$  опорной сети, вычисляемые по формулам:

$$\Delta x = b \cos \alpha_b \text{ и } \Delta y = b \sin \alpha_b, \quad (12.1)$$

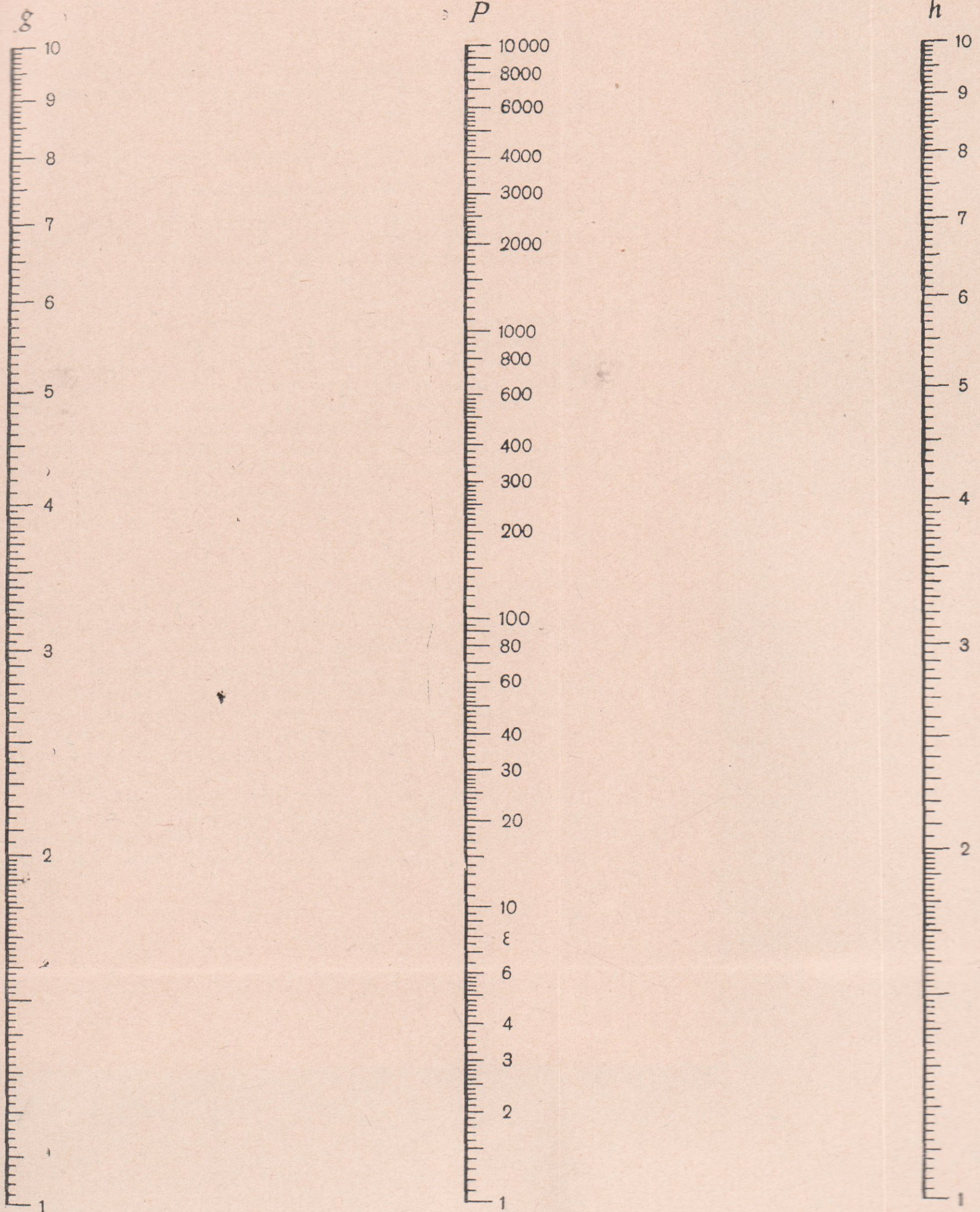
где  $b$ —сторона треугольника  $ABC$ , соединяющая опорную точку  $A$  с оползневой точкой  $C$ , и  $\alpha_b$ —дирекционный угол этой стороны.

Величина стороны  $b$  определяется из соотношения

$$b = \frac{c}{\sin C} \sin B, \quad (12.2)$$

\* Градиентом прямой засечки называется вектор, направленный перпендикулярно к лучу с опорной точки на наблюдаемую в сторону возрастания угла, под которым наблюдается луч (т. е. вправо от наблюдателя). По величине градиент прямой засечки равен  $g = \frac{\rho}{s}$ , где  $\rho$ —мера радиана, а  $s$ —длина луча. В метрических мерах градиент выражается в  $сс/мм$ , а в градусной— $сек/мм$  (см. также § 14).

$$P = g^2 h^2$$



Фиг. 29. Номограмма для определения весов засечек.

Նշանաբանուման կշիռների որոշման նոմոգրամը:

Nomogram for determination of weights of interfections

где  $A$  и  $B$ —точки опорной сети и внутренние углы треугольника при них;  $C$ —оползневая точка и внутренний угол треугольника при ней;  $c$ —сторона треугольника  $ABC$ , соединяющая опорные точки  $A$  и  $B$ .

Подставляя (12.2) в (12.1), получим

$$\Delta x = \frac{c}{\sin C} \sin B \cos \alpha_B \quad \text{и} \quad \Delta y = \frac{c}{\sin C} \sin B \sin \alpha_B. \quad (12.3)$$

Заданные пределы изменения переменных следующие:

длины сторон  $b$  и  $c$  могут изменяться между 40 и 400 м;

внутренние углы треугольника  $A$ ,  $B$  и  $C$  могут изменяться между 20 и 170°;

дирекционный угол  $\alpha_B$  может изменяться между 0 и 360°.

### Конструкция номограммы

До того как приступить к номографированию уравнения, произведем исследование его и входящих в него элементов; это поможет нам лучше понять его особенности и составить в результате более рациональную номограмму. Практика построения цепных номограмм показывает, что такими исследованиями не следует пренебрегать.

1) Так как опорные точки  $A$  и  $B$ , представляющие собой вершины треугольника (см. чертеж на фиг. 30), являются взаимозаменяемыми, то для контроля грубых ошибок и для повышения точности вычисления, определения приращения координат по номограмме должны делаться дважды, т. е. по отношению к обоим опорным точкам. Понятно, что в этих определениях опорные точки меняют свои обозначения. Так, если координаты оползневой точки  $R_k(x_k, y_k)$  определяются по отношению к опорным точкам  $R_i(x_i, y_i)$  и  $R_j(x_j, y_j)$ , то эти координаты получаются из следующих параллельных выражений

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} x_k &= x_i + \Delta x_{i-j}, & y_k &= y_i + \Delta y_{i-j}, \\ x_k &= x_j + \Delta x_{j-i}, & y_k &= y_j + \Delta y_{j-i}, \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

где  $\Delta x_{i-j}$  и  $\Delta y_{i-j}$ —приращения координат точки  $C$  по лучу, направленному с опорной точки  $R_i$  на опорную точку  $R_j$ .

Номограмма должна быть составлена с таким расчетом, чтобы дать возможность удобного расчета приращений координат по отношению к координатам обеих опорных точек.

Отсюда следует, что в номограмме вначале должны быть расположены шкалы, общие для производства обоих параллельных вычислений, а затем уже частные шкалы для каждого из вычислений. К таким общим шкалам относятся шкалы длины стороны  $c$  и угла при оползневой точке  $C$ .

2) Хотя номограмма и предназначена для вычисления приращения координат оползневых точек, необходимо, чтобы ее можно было применять к определению длины стороны треугольника по данной стороне и двум противолежащим углам, производимому по формуле (12.2).

Кроме того, желательно, чтобы ее можно было применять для определения приращения координат по данной длине стороны и ее дирекционному углу, по формулам (12.1).

Отсюда следует, что хотя в окончательные уравнения (12.4) величина стороны  $b$  не входит, и поэтому длина  $b$  должна рассматриваться как вспомогательная переменная, но при раздельном применении номограммы для уравнения (12.1) величина  $b$  является заданной независимой переменной, а при раздельном пользовании для уравнения (12.2) величина  $b$  является зависимой переменной. Поэтому шкала вспомогательной переменной  $b$  должна иметь градуировку.

3) Длина стороны  $c$ , получаемая в результате вычисления триангуляционной сети, охватывающей опорные точки, часто может даваться в логарифмической форме. Желательно, чтобы нахождение точки на шкале  $c$  не требовало предварительного определения величины  $c$  по ее логарифму. Поэтому должна иметься возможность определения положения точки на шкале как по заданному  $c$ , так и по заданному  $\lg c$ .

4) Так как единственной именованной величиной в формуле (12.3) является множитель — длина стороны  $c$ , то это дает возможность расширить заданные пределы изменения переменной  $c$  и использовать номограмму для более широких пределов длин сторон, т. е. меньших, чем 40 м, и больших, чем 400 м. Таким образом, номограмма может рассматриваться, как периодическая, как это делается при пользовании логарифмической линейкой, т. е. может служить для любых значений длин стороны  $c$ . Так, если длина стороны  $c$  равна 850 м, то достаточно произвести расчет по номограмме для  $c=85$  м и результат умножить на 10.

5) С целью увеличения точности номограммы ограничим пределы изменения дирекционного угла  $\alpha_b$  и углов треугольника  $B$  и  $C$  первым квадрантом; остальные же значения этих углов, пользуясь известными из тригонометрии соотношениями, будем приводить к углам первого квадранта.

6) Заметив, что

$$\sin \alpha_b = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_b \right),$$

упростим задачу и составим для определения обоих приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$  всего одну номограмму, на которой для шкалы дирекционного угла  $\alpha_b$  будет дано две градуировки, из которых первая будет применяться для определения приращений  $\Delta x$ , а вторая для  $\Delta y$ . Поэтому дальнейший расчет ведем только для первой формулы (12.3).

Логарифмируем первое уравнение (12.3):

$$\lg \Delta x = \lg c - \lg \sin C + \lg \sin B + \lg \cos \alpha_b.$$

Применение логарифмических функций для номографирования уравнения заставляет изменить нижний предел дирекционного угла, так как необходимо, чтобы логарифмируемая функция для заданных пределов изменения переменных не обращалась в нуль. Вследствие

этого устанавливаем пределы шкалы  $\alpha_b$  от  $0^\circ$  до  $89^\circ 25' 37''$  (соответственно,  $\lg \cos \alpha_b$  изменяется от 0 до  $-2$ ). Для увеличения точности шкалы разбиваем ее на два интервала: от  $0^\circ$  до  $84^\circ 15' 39''$  ( $0 > \lg \cos \alpha_b > -1$ ) и от  $84^\circ 15' 39''$  до  $89^\circ 25' 37''$  ( $-1 > \lg \cos \alpha_b > -2$ ). Поэтому строим две шкалы приращений координат для этих двух интервалов дирекционных углов. Отсюда следует, что номограммой нельзя будет пользоваться только для узкого интервала дирекционного угла от  $89^\circ 25' 37''$  до  $90^\circ$ .

Таким образом, комбинированная номограмма должна заменить две различные номограммы для разных пределов изменения переменной  $\alpha_b$ , показанных в табл. 9, и давать возможность определять как длину стороны  $b$ , так и приращения координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Таблица 9

Номограммы	Первая	Вторая
Сторона $c$ . . . . .	40—400 м	40—400 м
Угол $C$ . . . . .	$20^\circ$ — $90^\circ$	$20^\circ$ — $90^\circ$
Угол $B$ . . . . .	$20^\circ$ — $90^\circ$	$20^\circ$ — $90^\circ$
Угол $\alpha_b$ . . . . .	$0^\circ$ — $84^\circ 15' 39''$	$84^\circ 15' 39''$ — $89^\circ 25' 37''$

#### Расчет и построение номограммы

Расчет номограммы приведен в табл. 10.

Из рассмотрения этого алгоритма можно установить, что номограмма имеет одну обратную шкалу для функции  $\lg \sin C$ ; коэффициент шкалы, длина шкалы и опорный интервал этой функции являются отрицательными величинами. Не будем останавливаться на ходе выполнения табл. 10; читатель может в нем легко разобраться. Сделаем несколько замечаний:

1. Пределы длины стороны  $b$ , получившиеся равными 13,68 и 1170 м., чрезмерно широкие; как указывалось, в действительности они колеблются между 40 и 400 м. Поэтому отбрасываем оба бесполезных конца шкалы длины стороны (от 13,68 до 40 м и от 400 до 1170 м). Легко видеть, что оставшаяся часть шкалы будет опять центрированной, так как отброшенные отрезки шкалы соответствуют одинаковым интервалам функции, равным 0,4660 и, следовательно, имеют одинаковую длину, равную  $\frac{0,4660}{0,04} = 11,65$  см.

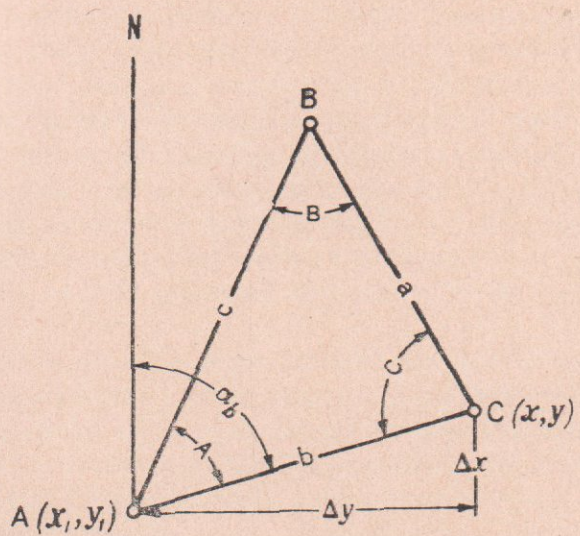
2. Как указывалось, при определении приращений координат оползневых точек часто приходится пользоваться результатами вычислений опорной сети, производимых согласно известным методам триангуляций. При этих вычислениях для длин сторон треугольников, соединяющих две опорные точки  $A$  и  $B$  даются не их абсолютные значения, а логарифмы. Для того чтобы при определении приращений координат не приходилось вначале определять длины сторон треугольника  $c$  по данному логарифму, а затем пользоваться номограммой, воспользуемся

Таблица 10

Алгоритм комбинированной цепной номограммы с обратными шкалами для вычисления координат оползневых реперов

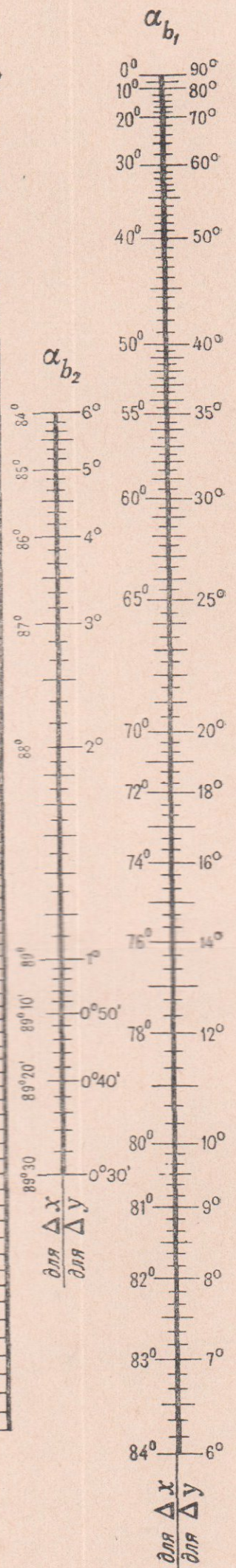
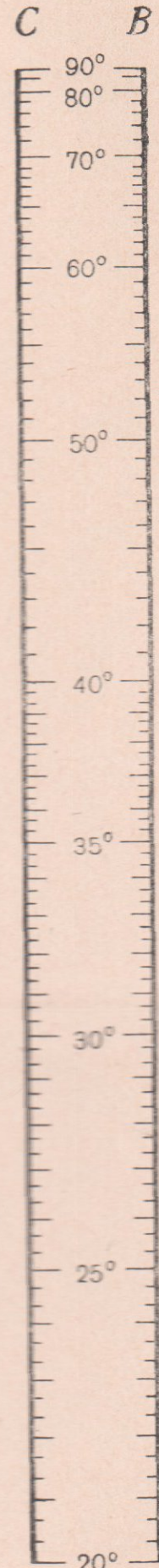
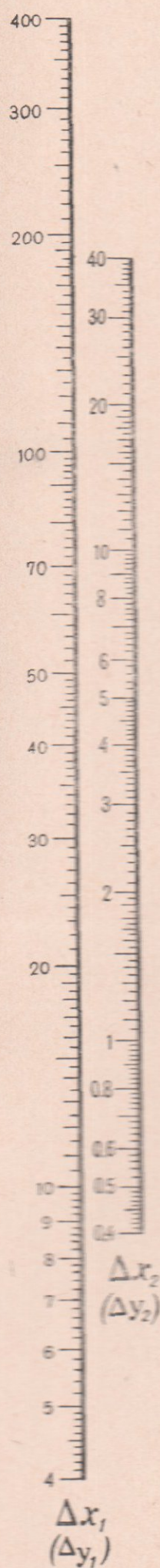
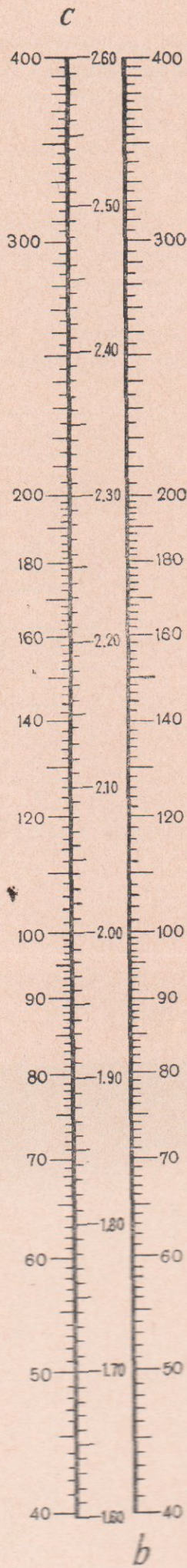
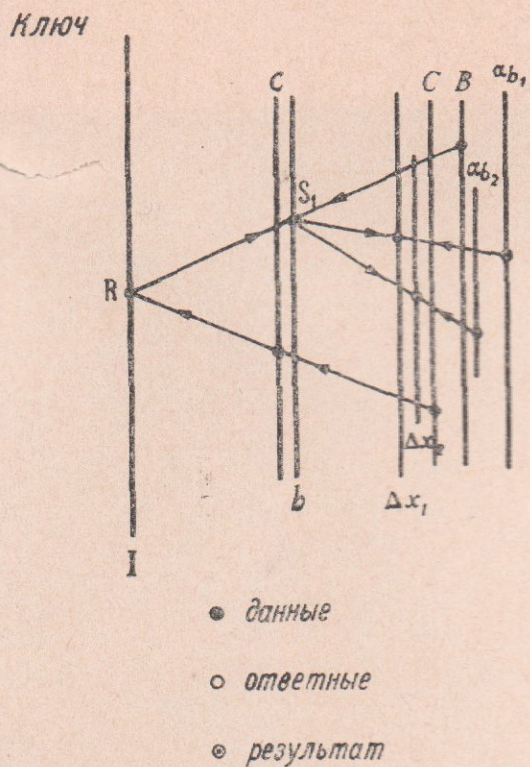
$$\Delta x = b \cos \alpha_b = \frac{c}{\sin C} \sin B \cos \alpha_b \text{ и } \Delta y = b \sin \alpha_b = \frac{c}{\sin C} \sin B \sin \alpha_b$$

Переменные $a$	Вид функции $f(a)$	Пределы переменных		Значения функции		Интервал функции $A$	Коэффициент шкалы $a$	Длина шкалы $h$	Длина споры $g$	Опорный интервал функции $B$	Расстояние от начала номограммы $L$	Момент коэффициента шкалы относительно начала номограммы $M$
		проксимальный $(a)_1$	дистальный $(a)_2$	наименьшее $f(a)_1$	наибольшее $f(a)_2$							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$c$	$\lg c$	40	400	1,6021	2,6021	1,0000	0,04	25,00	0	0	10	0,40
$C$	$-\lg \sin C$	90°	20°	0	0,4660	0,4660	-0,02	-23,30	24,15	-0,4830	20	-0,40
$B$	$-\lg \sin B$	20°	90°	-0,4660	0	0,4660	0,02	23,30	0,85	0,0170	22	0,44
$b$	$\lg b$	13,68	1170	1,1361	3,0681	1,9320	0,04	48,30	-11,65	-0,4660	11	0,44
	Контроль	—	—	—	—	1,9320	—	—	—	-0,4660	—	0,44
Первый интервал дирекционного угла $\alpha_b$												
$b$	$\lg b$	40	400	1,6021	2,6021	1,0000	0,04	25,00	0	0	11	0,44
$\alpha_1$	$\lg \cos \alpha_1$	84°15'39''	0°	-1,0000	0	1,0000	0,04	25,00	0	0	25	1,00
$\Delta x_1$	$\lg \Delta x_1$	4	400	0,6021	2,6021	2,0000	0,08	25,00	0	0	18	1,44
	Контроль	—	—	—	—	2,0000	—	—	—	0	—	1,44
Второй интервал дирекционного угла $\alpha_b$												
$b$	$\lg b$	40	400	1,6021	2,6021	1,0000	0,04	25,00	0	0	11	0,44
$\alpha_2$	$\lg \cos \alpha_2$	89°25'37''	84°15'39''	-2,0000	-1,0000	1,0000	0,08	12,50	6,25	-0,5000	23	1,84
$\Delta x_2$	$\lg \Delta x_2$	0,4	40	-0,3979	1,6021	2,0000	0,12	16,67	4,17	0,5000	19	2,28
	Контроль	—	—	—	—	2,0000	—	—	—	0,5004	—	2,28



$$x = x_1 + \Delta x; \quad \Delta x = b \cos \alpha_b = \frac{c}{\sin C} \sin B \cos \alpha_b$$

$$y = y_1 + \Delta y; \quad \Delta y = b \sin \alpha_b = \frac{c}{\sin C} \sin B \sin \alpha_b$$



Фиг. 30. Номограмма для вычисления приращения координат.

Ուղղանկյունի անձանքի արժեքի հաշվարկը:

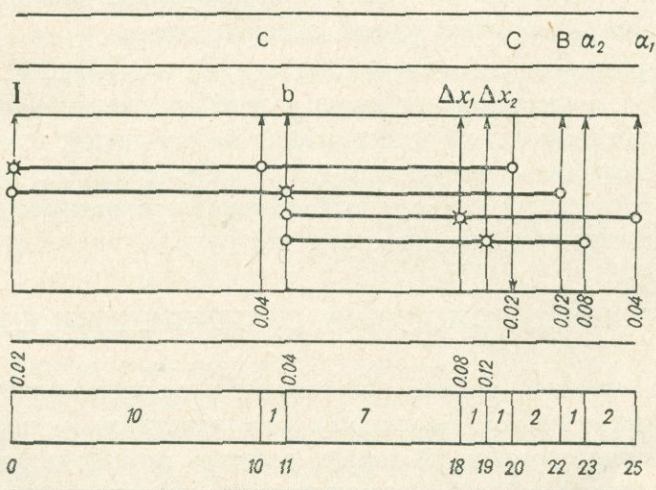
Nomogram for computation of increments of coordinates

свойствами логарифмической шкалы, примененной при градуировании шкалы  $c$ . Помня, что коэффициент ее шкалы равен  $0,04 \text{ см}^{-1} = 4 \text{ м}^{-1}$ , замечаем, что интервалу функции, равному единице, соответствует длина шкалы  $0,25 \text{ м}$ . Поэтому логарифм длины стороны  $c$ , разделенный на четыре, составит расстояние в метрах от точки с пометкой 1 до соответствующей точки на шкале  $c$ . Для удобства пользования у шкалы  $c$  справа сделана равномерная градуировка, позволяющая получить точку на шкале по данному логарифму стороны.

3. Как указывалось выше, вместо немой шкалы второй вспомогательной переменной введена ответная градуированная шкала стороны  $b$ . В случае, если определение величины  $b$  не должно производиться, отсчеты по этой шкале не берутся, т. е. она используется как немая шкала.

Таким образом, в тех случаях, когда номограмма должна служить для определения длины стороны  $b$  по формуле (12.2), используется только левая часть номограммы (шкалы заданных переменных  $c, C, B$ , немая  $I$  и ответная  $b$ ). Для определения приращений координат по формуле (12.1) используется только правая часть номограммы (шкалы заданных переменных  $b$  и  $\alpha_b$  и ответная  $\Delta x (\Delta y)$ ). Для определения же приращения координат по формуле (12.3) используется вся номограмма (шкалы заданных переменных  $c, C, B, \alpha_b$ , немые  $I$  и  $b$  и ответная  $\Delta x (\Delta y)$ ).

4. Для удобства пользования шкалами дирекционного угла  $\alpha_b$  в процессе градуирования несколько изменяем пределы переменной. Градуирование малой шкалы начинаем от  $0^\circ 30'$  (пользуясь уравнением шкалы и таблицей логарифмов) и доводим до  $6^\circ$  (копируя начальный участок следующего интервала шкалы синусов той же карманной линейки); градуирование большой шкалы также начинаем от  $6^\circ$ , отбрасывая начальный участок шкалы.



Фиг. 31

Контроль расчета номограммы (табл. 10) показывает полную сходимость, т. е. номограмма рассчитана правильно.

Схема номограммы представлена на фиг. 31. Из схемы видно, что номограмма не имеет слившихся шкал. Первая немая шкала вынесена вперед. Аналогичные шкалы расположены рядом: шкалы сторон  $b$  и  $c$ , шкалы углов  $B$  и  $C$ , шкалы дирекционных углов  $\alpha_b$  (два интервала) и шкалы приращения координат  $\Delta x(\Delta y)$  (два интервала).

Правильность назначения расстояний между шкалами проверяем по формулам (9.14) и (9.17).

Необходимые величины получаем из табл. 10. Округляя до целых градусов, имеем для первого звена  $\varphi_1 = 23^\circ$ ; для второго  $\varphi_2 = 25^\circ$ ; для третьего в первом интервале изменения  $\alpha_b$ ,  $\varphi_3' = 29^\circ$ ; то же во втором интервале  $\varphi_3'' = 33^\circ$ , т. е. значения углов, образуемых разрешающими прямыми с носителями шкал, находятся в допустимых пределах, удовлетворяющих целям получения точных величин.

Номограмма для вычисления приращений координат оползневых реперов представлена на фиг. 30. На номограмме показан ключ к пользованию.

При пользовании номограммой вначале через пометки на шкалах  $C$  и  $c$  проводятся разрешающие прямые первого звена и на шкале  $I$  находится маячная точка  $R$ . От маячной точки  $R$  вначале проводится разрешающая прямая к значению внутреннего угла  $B$  треугольника при одной из опорных точек и на шкале  $b$  определяется длина стороны треугольника  $b$ . Эта же точка является второй маячной точкой  $S_1$ . От нее проводятся две разрешающие прямые к значениям дирекционного угла: первая разрешающая прямая проводится к значению, помеченному на шкале  $\alpha_b$  слева, и на шкале приращений  $\Delta x$  ( $\Delta y$ ) читается ответная величина приращения  $\Delta x$ . Вторая разрешающая прямая проводится от той же маячной точки  $S_1$  к тому же значению дирекционного угла, помеченному на шкале  $\alpha_b$  справа, и на той же шкале приращений  $\Delta x$  ( $\Delta y$ ) читается ответная величина  $\Delta y$ . Полученные величины представляют собой приращение координат первой опорной точки.

Теперь возвращаемся к маячной точке  $R$  и проводим разрешающую прямую к значению внутреннего угла  $B$  треугольника при второй опорной точке; на шкале  $b$  определяется длина другой стороны треугольника и замечается маячная точка  $S_2$ . От нее, аналогично предыдущему, проводятся две разрешающие прямые к значениям дирекционного угла  $\alpha_b$  и читаются ответные величины приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

### § 13. ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММ С УСЕЧЕННЫМИ ШКАЛАМИ

Усечение ответной шкалы производится с целью отбрасывания неиспользуемых участков шкалы. Расчет номограммы производится описанным выше способом. В конце расчета производится усечение последней ответной шкалы. Промежуточные немые ответные шкалы остаются без рассмотрения; известно, что такие шкалы могут быть

произвольно продолжены в обе стороны и их длины не представляют интереса\*.

В качестве примера этого рода составим номограмму формулы для определения мощности при обработке металлов резанием

$$N = B v d^{0,8} S^{0,7}, \quad (13.1)$$

где коэффициент  $B$  имеет значения: 0,0118; 0,0142; 0,0186; 0,0312 и 0,0405; пределы изменения остальных переменных следующие:

Скорость резания $v$	от 2 до 15 м.мин <sup>-1</sup>
Диаметр обрабатываемой детали $d$	от 3 до 25 мм;
Подача $S$	от 1 до 15 мм/об;
Потребляемая мощность $N$	от 0,1 до 10 лощ. сил.

Расчет и построение номограммы этой формулы содержится в работе Б. А. Невского [11]. Покажем применение к этой формуле предлагаемого метода расчета и построения номограмм, поставив при этом условием возможность копирования градуировки логарифмических шкал для всех без исключения функций.

Логарифмируя (13.1), имеем

$$\lg N = \lg B + \lg v + 0,8 \lg d + 0,7 \lg S.$$

Расчет номограммы ведем в табл. 11.

Полученные величины графических коэффициентов шкал отвечают табл. 1 и поэтому все шкалы могут быть скопированы с соответствующих шкал логарифмических линеек.

Для шкалы функции зависимой переменной в алгоритме даны три строки. В первой строке содержатся данные об этой шкале, полученные описанным выше расчетным путем. Такую шкалу мы называем полной.

Полученные пределы переменной этой шкалы значительно шире, чем это требуется по заданным условиям. Длина полной шкалы получилась равной 18,56 см. В третьей строке для этой шкалы дан расчет используемой шкалы, определяемой заданными пределами этой переменной. Длина используемой шкалы оказалась равной 12,5 см.

Определим длину опоры используемой шкалы, т. е. расстояние  $g_{N'}$  начала используемой шкалы от опорной линии; можно видеть, что она составит

$$g_{N'} = g_N + \frac{f(N)_3 - f(N)_1}{a_N},$$

где

$(N)_1$  — проксимальный предел переменной  $N$ , соответствующий началу полной шкалы;

$(N)_3$  — проксимальный предел той же переменной, соответствующий началу используемой шкалы;

\* Практически должна делаться проверка того, чтобы в звеньях с обратными шкалами крайнее положение разрешающей прямой не выходило чрезмерно за пределы рамки номограммы, например за одну треть высоты шкалы; такая проверка делается графическим путем, после построения номограммы.

Алгоритм цепной номограммы с усеченными шкалами формулы  
 для определения мощности при обработке металлов резанием  $N = B v d^{0,8} S^{0,7}$

Переменные $u$	Вид функции $f(u)$	Пределы переменных		Значения функции		Показатель степени $m$	Интервал функции $A$	Коэффициент шкалы		Длина		Опорный интервал функции $B$	Расстояние от начала номограммы $L$	Момент коэффициента шкалы относительно начала номограммы $M$
		проксимальный $(u)_1$	дистальный $(u)_2$	наименьшее $f(u)_1$	наибольшее $f(u)_2$			графический $a'$	расчетный $a$	шкалы $h$	опоры $g$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$B$	$\lg B$	0,0118	0,0405	-1,9231	-1,3926	1	0,5355	0,06	0,06	8,92	1,01	0,0606	0	0
$v$	$\lg v$	2	15	0,3010	1,1761	1	0,8751	0,08	0,08	10,94	0	0	7	0,530
$S$	$0,7 \lg S$	1	15	0	0,8233	0,7	0,8233	0,12	0,084	9,80	0,57	0,0479	46	1,344
$d$	$0,8 \lg d$	3	25	0,3817	1,1179	0,8	0,7362	0,08	-0,064	11,50	11,22	-0,7181	2	-0,128
$N$	$\lg N$	0,0568	53,05	-1,2454	1,7247	1	2,9701	0,16	0,16	18,56	-3,81	-0,6096	11,1	1,776
Контроль	—	—	—	—	—	—	2,9701	—	—	—	—	-0,6096	—	1,776
$N$	$\lg N$	0,1	10	-1,0000	1,0000	1	2,0000	0,16	0,16	12,50	-2,28	—	—	—

$g_N$ —длина опоры полной шкалы  $N$ .

$a_N$ —коэффициент шкалы переменной  $N$ .

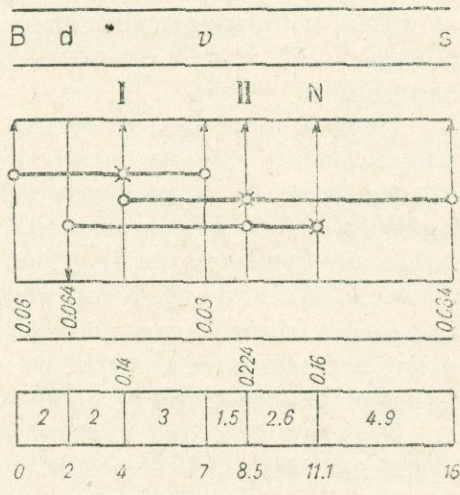
Подставляя сюда величины из алгорифма, получаем:

$$g_N' = -3,81 + \frac{(-1,0000) - (-1,2454)}{0,16} = -2,28.$$

Эта величина вписана в столбец длины опоры используемой шкалы  $N$ .

Схема номограммы представлена на фиг. 32, сама номограмма на фиг. 33. При пользовании номограммой, в соответствии с общим правилом, указанным выше (§ 9), все ответные шкалы, помеченные снизу (вторая строка схемы номограммы), применяются в строгой последовательности слева направо, т. е. I—II—N. Шкалы заданных переменных применяются в такой последовательности:  $B-v-S-d$

На номограмме показан ключ и приведен пример расчета.



Фиг. 32.

## § 14. НОМОГРАФИЧЕСКИЕ БЛОКИ ДЛЯ МАССОВОГО ПОСТРОЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ НОМОГРАММ

### Номографические блоки

В производственной, лабораторной или расчетной практике часто приходится пользоваться номограммами, в которых некоторые шкалы должны использоваться не по всей своей длине, а только в некоторых точках. Пометки этих точек определяются параметрами машин, данными сортамента, связями с сетью и т. д. Если, например, должна быть составлена номограмма уравнения, в которое в качестве независимой переменной входит момент сопротивления швеллера, то нет надобности градуировать эту шкалу в единицах момента сопротивления ( $см^3$ ), а можно показать только те пометки, которые соответствуют реальным случаям. Таким образом, шкала может выродиться в совокупность точек, а пометками их могут служить номера профилей по сортаменту\*.

\* Такковы, например, несколько номограмм Н. М. Герсеванова [3]: номограмма для подбора сечений двутавровых балок, подвергающихся изгибающему моменту, в которой на шкале момента сопротивления показаны номера профилей балок; номо-

В ряде случаев шкалы номограммы могут иметь реальное значение на всем протяжении, но в применении к данному объекту реальными оказываются только некоторые точки, другой же объект связан с иными точками и т. д. В частности, с таким явлением приходится встречаться, когда одна из шкал номограммы бывает связана с тарифовочными данными.

В этих случаях можно идти по одному из следующих путей: 1) можно пользоваться стандартной номограммой и закреплять на них пометки точек, соответствующие индивидуальным характеристикам данного объекта, и 2) можно составить для каждого объекта индивидуальную номограмму.

Первый путь удобен, когда в распоряжении инженера имеются размноженные типографским или литографским путем номограммы, отпечатанные на белой бумаге. На таких номограммах можно легко выделить и закрепить тушью необходимые точки. Однако в тех случаях, когда номограмма должна строиться на кальке и размножаться путем контактной печати на фотобумаге, закрепление точек на гладкой черной бумаге готовой номограммы делается очень затруднительным. Для таких случаев более целесообразен второй путь, заключающийся в применении номографических блоков.

*Номографическими блоками* были названы неполные номограммы, лишенные градуировки шкалы той переменной, которая должна выродиться в совокупность точек, различную для каждого отдельного случая. Вместо градуированной шкалы дается носитель шкалы, опорная линия и уравнение шкалы, на основании которых могут быть легко найдены необходимые пометки точек.

Номографические блоки наклеиваются на листы белой бумаги, на которые затем наносят носитель отброшенной шкалы; на этом носителе строят и закрепляют необходимые точки.

### Анализ номографируемого уравнения

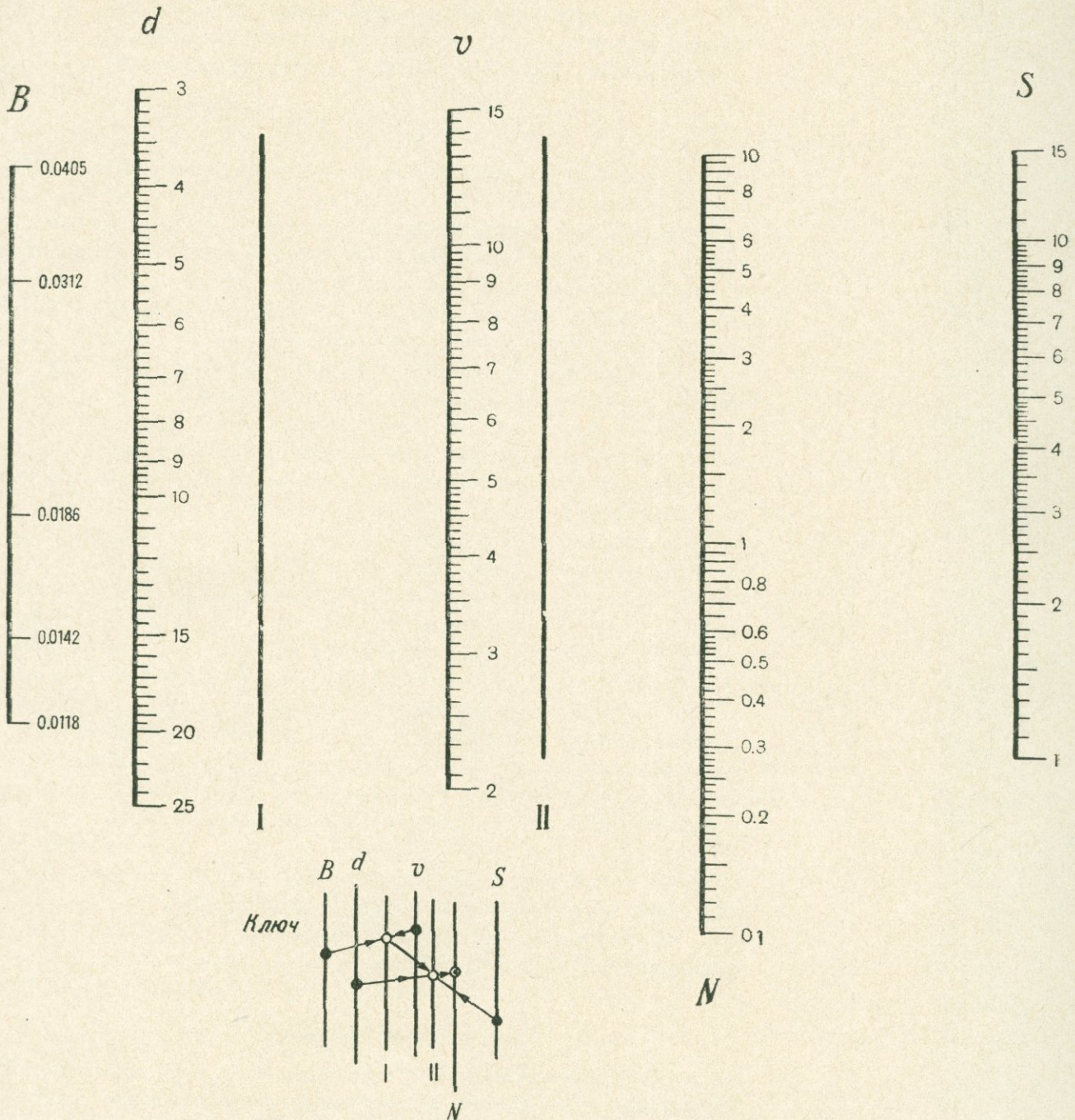
В качестве примера расчета и построения номографических блоков рассмотрим номограмму для вычисления смещения оползневых реперов графическим дифференциальным методом.

При ведении систематических инструментальных наблюдений методом прямых засечек перемещение  $d$  линии положения луча определяется по формуле

$$d = \frac{\delta}{g}, \quad (14.1)$$

грамма для определения изгибающих моментов, в которой разные случаи опирания и загрузки показаны в виде точек с номерами, согласно схеме; номограмма для расчета стропил, взятая из испанского альбома Секо, содержащая шкалу веса крыши, которая выродилась в точки, соответствующие разным типам покрытий (толевому, цинковому, железному и т. д.). А. Ливенс [24] приводит номограмму для вычисления расхода воды при истечении в атмосферу в зависимости от типа выходного отверстия, в котором шкала для коэффициента расхода, кроме градуировки, содержит также штрихи, соответствующие схемам, показывающим разные типы выходного отверстия.

$$N = Bvd^{0.8}S^{0.7}$$



Фиг. 33. Номограмма для определения мощности при обработке металлов резанием  
 Մետաղները կտրելիս հաստոցների կարողության որոշման նոմոգրամը:  
 Nomogram for determination of horse-power by machining of metals

где

$d$ —перемещение линии положения луча в миллиметрах.

$\delta$ —угловое смещение репера в метрических (сс) или градусных (") секундах (приращение направления луча) и

$g$ —градиент линии положения в сс/мм или "/мм; градиент  $g$  связан с расстоянием  $s$  между реперами соотношением

$$g = \frac{636,6}{s} \text{ сс/мм или } g = \frac{206,3}{s} \text{ "/мм.}$$

При дифференциальном методе наблюдения составляется альбом наблюдений, на каждом листе которого графическим способом определяется полное смещение репера. Удобно для обработки материала помещать на тот же лист и индивидуальную номограмму формулы смещения, на которой вместо градуировки шкалы градиентов линий положения на носителе ее были бы показаны пометки только тех точек, которые отвечают градиентам лучей на данный оползневой репер от нескольких (3—5) опорных реперов, с которых он наблюдается.

При таком решении задачи индивидуальные номограммы для всех оползневых реперов будут состоять всего из двух шкал: угловых  $\delta$  и линейных  $d$  смещений. Эти номограммы будем чертить на кальке, размножать их фотографическим (контактным) путем и наклеивать на листы альбома. На тех же листах альбома будем вычерчивать положения точек, отвечающих градиентам лучей от различных опорных реперов и помечать эти точки номерами этих реперов (фиг. 34 а). Тогда при обработке материала наблюдений линейка должна попросту прикладываться к точке, помеченной номером опорного репера и к точке углового смещения  $\delta$ , а ответ должен читаться на шкале линейного смещения  $d$ . При таком методе обработки полевых материалов помимо значительного облегчения работы устраняется возможность допущения грубых ошибок при неправильном нахождении пометок точек на шкале градиентов  $g$ . Выгода же построения блоков заключается в том, что достаточно иметь всего 2—3 кальки для разных пределов градиентов, чтобы строить индивидуальные номограммы для неограниченного числа реперов.

Описанные номографические блоки в течение многих лет с успехом применяются при обработке результатов наблюдений за движением оползневых реперов, проводимых Институтом геологических наук Армянской академии наук на ряде крупных оползней Армении, Северного Кавказа, Поволжья и др.

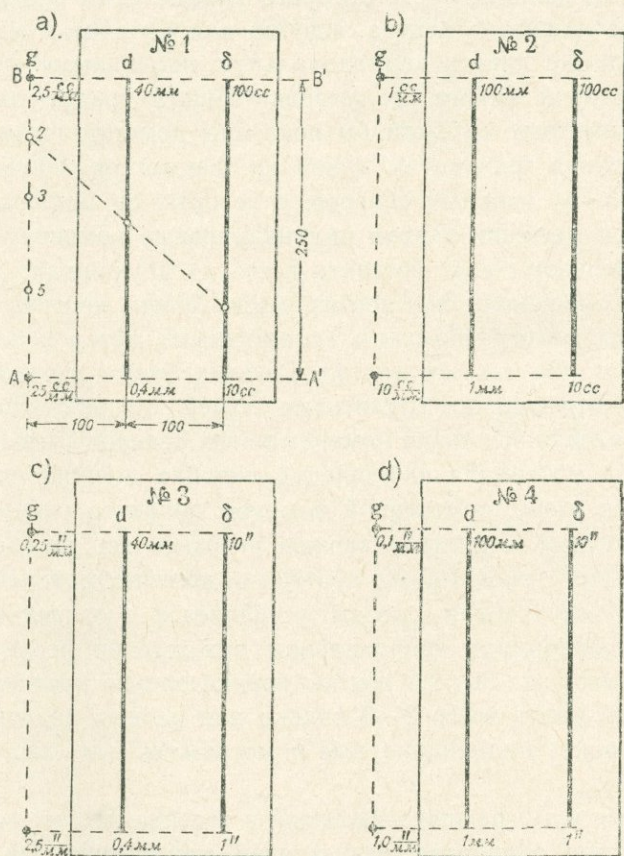
### Расчет номографического блока

Переходим к расчету и построению номографического блока и его применению для получения индивидуальных номограмм на эпюрах смещений.

Логарифмируя (14.1), приводим его ко второй канонической форме уравнений

$$\lg d = \lg \delta - \lg g.$$

Расстояние  $s$  между опорными и оползневыми реперами может изменяться в широких пределах — от 25 до 2000 м; на мелких оползнях оно составляет 25—200 м, на средних оползнях в верховых частях его 50—400 м, и в низовых частях 100—800 м; наконец, на крупных оползнях оно составляет от 250 до 2000 м. Поэтому хотя общее отношение пределов расстояний и достаточно широкое ( $2000 : 25 = 80$ ), для индивидуальных номограмм, предназначенных для конкретных реперов, оно окажется значительно суженным, и отношение пределов расстояний не превысит 10. Соответственно этому и отношение пределов значений градиентов  $g$  в последнем уравнении не должно превышать 10.

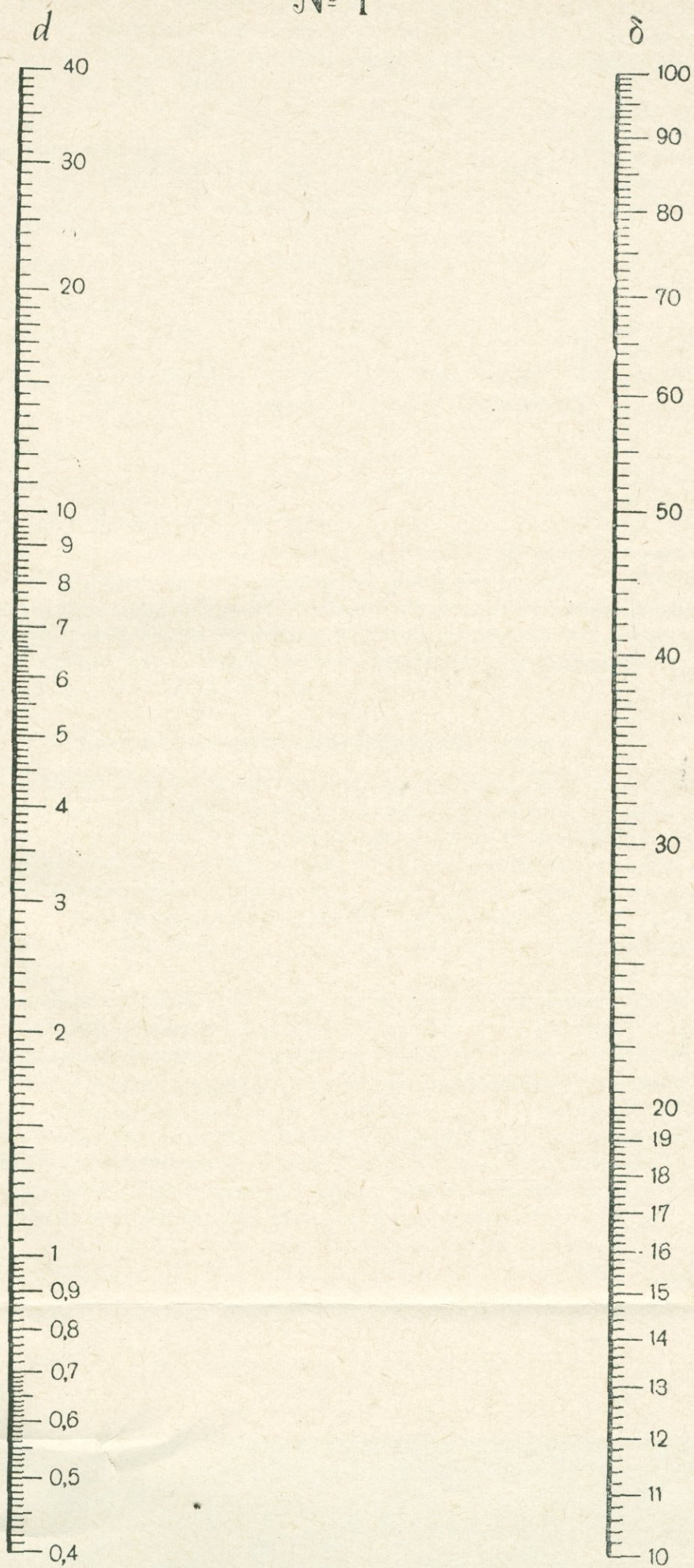


Фиг. 34

Угловое смещение  $\delta$  измеряется в метрических или градусных секундах. Так как оно может изменяться в весьма широких пределах, то шкалу  $\delta$  делаем цикличной, давая ей предел от 0 до 10 или от 10 до 100. Тогда аналогично правилам, применяемым к логарифмическим линейкам, пометка 20 может также означать 2, 200, 2000 и т. д. Естественно, должно делаться соответствующее изменение порядка результата.

Для возможности построения индивидуальных номограмм для различных реперов и для различных систем градуировки лимба теодолитов применяем четыре типа номографических блоков, согласно табл. 12.

Номограмма состоит из трех прямых шкал длиной по 25 см: крайние шкалы для независимых переменных  $g$  и  $\delta$  имеют коэффициент



Фиг. 35. Номографический блок для вычисления смещений оползневых реперов.  
Սողաքային հենանշերի տեղաշարժման հաշվարկի նոմոգրաֆիկ բլոկը:  
Nomographic bloc for computation of displacement of landslide bench-marks

шкалы  $0,04 \text{ см}^{-1}$ , а средняя шкала для зависимой переменной  $d$  имеет коэффициент шкалы  $0,08 \text{ см}^{-1}$ . Шкалы расположены на расстоянии  $10 \text{ см}$  друг от друга; таким образом, общая ширина номограммы составляет  $20 \text{ см}$  (фиг. 34).

Таблица 12

Номографический блок	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Размерность	
Пределы угловых смещений $\delta$ . . . . .	10—100	10—100	1—10	1—10	сс или "	
Пределы градиентов $g$ . . . . .	2,5—25	1—10	0,25—2,5	0,1—1,0	сс/мм или "/мм	
Длины $s$ лучей*при	$\left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ в сс} \\ \delta \text{ в " } \end{array} \right.$	25—255	64—637	255—2546	—	м
		—	21—206	83—825	206—2063	м
Пределы линейных смещений $d$ . . . . .	0,4—40	1—100	0,4—40	1—100	мм	

\*Длины лучей округлены до целых метров.

Номографический блок состоит из двух шкал—углового смещения  $\delta$  и линейного смещения  $d$ . Градуировка шкал копируется с логарифмических линеек: шкала  $\delta$ —с нормальной шкалы обыкновенной линейки, длиной  $25 \text{ см}$ ; шкала  $d$ —с квадратичной шкалы той же линейки; пометки концов шкал—согласно фиг. 34. Готовый номографический блок № 1 представлен на фиг. 35.

### Способ применения номографических блоков

Номографический блок наклеивается на лист альбома, на котором строится эпюра смещений соответствующего оползневому репера, а затем карандашом делается построение, показанное на фиг. 34а: через концы шкал  $d$  и  $\delta$  проводятся линии  $AA'$  и  $BB'$ , отвечающие предельным положениям разрешающей прямой; на этих линиях влево от шкалы  $d$  откладываются отрезки, равные  $100 \text{ мм}$ . Полученные точки  $A$  и  $B$  соединяются прямой. Пометки точек  $A$  и  $B$  показаны на схеме номографических блоков.

Пользуясь полоской бумаги, на линию  $AB$  с логарифмической линейки, имеющей коэффициент шкалы  $\sigma = 0,04 \text{ см}^{-1}$  (нормальная шкала обыкновенной линейки), переносятся положения точек, отвечающие градиентам лучей от опорных точек до рассматриваемой оползневой точки. Естественно, что при этом логарифмическая линейка должна быть так расположена, чтобы пометки, соответствующие пределам градиентов (табл. 12), оказались у точек  $A$  и  $B$ . Затем полученные пометки шкалы градиентов закрепляются тушью и помечаются номерами опорных реперов, все же карандашные построения стираются.

## V. РАСЧЕТ И ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ ГРАФИЧЕСКИМ И ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДАМИ

### § 15. СТАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ

#### Статическая аналогия

Изложенные выше теоремы, относящиеся к цепным номограммам с параллельными шкалами, свидетельствуют о существовании статической аналогии, могущей иметь известное практическое значение. Эта аналогия формулируется следующим образом [20]:

«Если рассматривать номограмму с параллельными шкалами, как невесомое твердое тело, а коэффициенты шкал заданных функций независимых переменных, как параллельные силы, приложенные к этому телу, то коэффициент шкалы функции зависимой переменной может рассматриваться как равнодействующая всех приложенных сил».

Указанная аналогия характеризуется такими параллелями:

Статика	Номография
Линии действия сил	Носители шкал функций
Величины сил	Коэффициенты шкал функций
Направления сил	Знаки коэффициентов шкал функций
Плечи сил	Плечи коэффициентов шкал функций
Моменты сил	Моменты коэффициентов шкал функций
Приложенные силы	Коэффициенты шкал заданных функций независимых переменных
Равнодействующие групп сил, отсчитанных от начала поля сил	Коэффициенты шкал вспомогательных переменных
Равнодействующая всех сил	Коэффициент шкалы функции зависимой переменной

Это позволяет применить условия равновесия твердого тела, находящегося под действием параллельных, расположенных в одной плоскости сил к номограмме с параллельными шкалами. Описываемая ана-

логия выражается следующим образом (присваивая разные знаки силам, имеющим различное направление):

#### Статика

Равнодействующая сила равна алгебраической сумме всех приложенных сил

Момент равнодействующей силы относительно любой точки равен алгебраической сумме моментов всех приложенных сил относительно той же точки

#### Номография

Коэффициент шкалы функции зависимой переменной равен алгебраической сумме коэффициентов шкал всех заданных функций зависимых переменных

Момент коэффициента шкалы функции зависимой переменной относительно любой точки равен алгебраической сумме моментов коэффициентов шкал всех заданных функций независимых переменных относительно той же точки

#### Доказательство статической аналогии

Докажем справедливость указанной аналогии и тем самым установим возможность ее применения в расчетах.

Пусть дана цепная номограмма с параллельными шкалами, построенная для соотношения с  $n$  переменными:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i) = f_n(u_n). \quad (15.1)$$

Вообразим, что в плоскости номограммы расположены некоторые силы  $P_i$  ( $i=1, 2 \dots n-1$ ), линии действия которых совпадают с носителями шкал функции независимых переменных, величины этих сил выбраны пропорциональными коэффициентам шкал соответствующих функций, а знаки соответствуют знакам коэффициентов шкал (считая, например, силы, направленные вверх, положительными, а вниз—отрицательными), т. е.

$$P_i = m a_i \quad (i=1, 2 \dots n-1). \quad (15.2)$$

Равнодействующая  $P_n$  всех приложенных параллельных сил по знаку, величине и положению будет удовлетворять следующим равенствам:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n-1} P_i, \quad (15.3)$$

$$P_n l_n = \sum_{i=1}^{n-1} P_i l_i, \quad (15.4)$$

где  $l_i$  есть расстояние  $i$ -той шкалы от произвольной точки  $G$ , взятой на плоскости номограммы, а  $l_n$ —расстояние равнодействующей  $P_n$  от той же точки  $G$ .

Учитывая значение  $P_i$  из (15.2), перепишем (15.3) в виде

$$P_n = \sum_{i=1}^{n-1} m a_i,$$

но так как алгебраическая сумма коэффициентов шкал всех заданных функций независимых переменных равна коэффициенту шкалы функции зависимой переменной, т. е.

$$\sum_{i=1}^{i-1} a_i = a_n,$$

то

$$P_n = m a_n. \quad (15.5)$$

Таким образом, коэффициентом пропорциональности равнодействующей силы и коэффициента шкалы суммарной функции зависимой переменной является та же величина  $m$ , которая была выбрана в качестве коэффициента пропорциональности между приложенными силами и коэффициентами шкал слагаемых функций независимых переменных.

Из (15.4) имеем, подставляя в него значения  $P_i$  из (15.2),

$$P_n l_n = \sum_{i=1}^{n-1} m a_i l_i. \quad (15.6)$$

Но алгебраическая сумма моментов коэффициентов шкал всех заданных функций независимых переменных равна моменту коэффициента шкалы функции зависимой переменной, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i l_i = a_n l_n,$$

где  $l_n$  — расстояние шкалы функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$  от произвольной точки  $G$ . Подставив это выражение в (15.6) и учитывая (15.5), имеем:

$$m a_n l_n = m a_n l_n,$$

откуда

$$l_n = L_n.$$

т. е. линия действия силы  $P_n$ , найденная методами статики, будет совпадать с носителем шкалы функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$ .

Таким образом установлено, что равнодействующая всех приложенных к номограмме сил по величине и положению отвечает коэффициенту шкалы  $a_n$  суммарной функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$ .

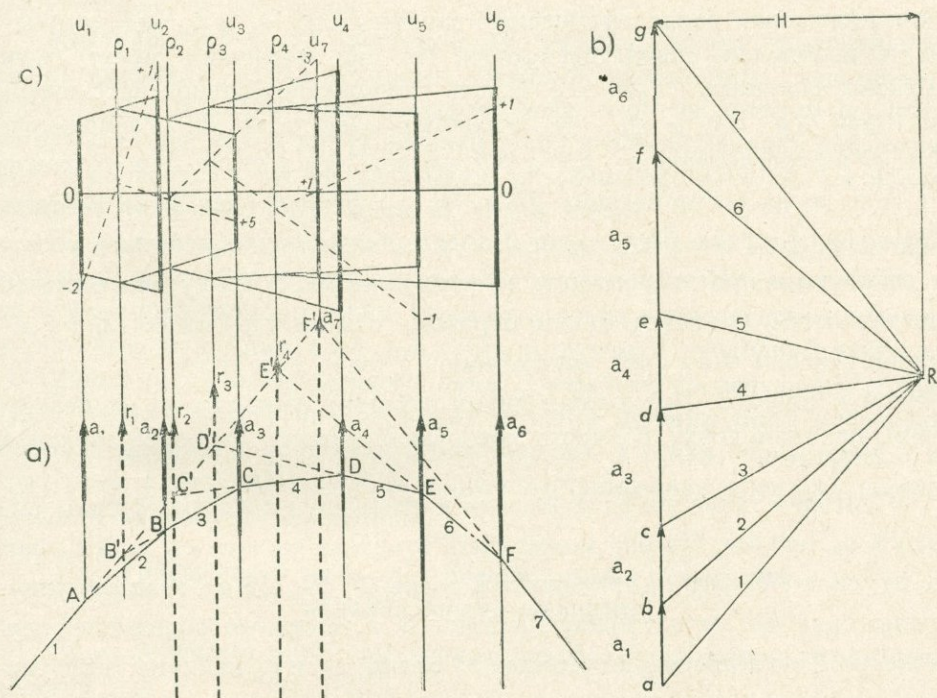
Повторив такие же рассуждения в отношении любой группы сил, которым мы заменили коэффициенты шкал функции, мы получили бы аналогичный результат. Если отсчитывать такие группы от начала номограммы, то полученные равнодействующие групп сил окажутся аналогичными коэффициентам шкал вспомогательных переменных.

#### Веревочный многоугольник

На основании установленной выше статической аналогии могут быть предложены графоаналитический и графический методы расчета

и построения цепных номограмм с параллельными шкалами, использующие свойства веревочного многоугольника [20].

Построение веревочного многоугольника для случая параллельных сил, пропорциональных коэффициентам шкал, показано на фиг. 36. Левая половина этого чертежа (фиг. 36 а) называется *полем сил*. Здесь приложенные силы показаны стрелками и обозначены  $a_i$  ( $i=1, 2 \dots 6$ )



Фиг. 36

На правой половине чертежа (фиг. 36 б), называемой *планом сил*, произведено сложение всех приложенных сил. Сила, соединяющая начало первой силы  $a_1$  с концом последней силы  $a_6$ , представляет собой по величине равнодействующую всех сил. Обозначим ее через  $a_7$ .

Для определения ее положения на поле сил строим веревочный многоугольник. Выбираем на плане сил (фиг. 36 б) некоторый полюс  $R$  на произвольном расстоянии  $H$  от многоугольника сил (выродившегося в отрезок прямой). Расстояние  $H$  называется полюсным расстоянием веревочного многоугольника. Соединяем полюс с вершинами многоугольника сил  $a, b, c, d, e, f$  и  $g$  лучами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, называемыми полюсными лучами. Выбираем на линии действия силы  $a_1$  (фиг. 36 а) произвольную точку  $A$  и, проводя прямые до последующих вертикальных линий, строим многоугольник  $ABCDEF$  таким образом, чтобы одноименные прямые на фиг. 36 б (план сил) и фиг. 36 а (поле сил) были между собой параллельны.

Прямые 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 на фиг. 36 а можно рассматривать как силы, равнодействующие данным силам  $a_1$  до  $a_6$ . Действительно, рассматривая треугольник сил  $Rab$  (фиг. 36 б), заключаем, что сила  $ab$ , равная  $a_1$ , является равнодействующей силы  $aR_1$  направленной от  $a$  к  $R$ , и силы  $Rb$ , направленной от  $R$  к  $b$ , и, следовательно, может быть ими заменена. Точно так же сила  $bc$ , равная  $a_2$ , является равнодействующей сил  $bR$  и  $Rc$  и также может быть ими заменена. Тогда взамен нахождения положения равнодействующей заданных сил  $a_1$  и  $a_2$  можно отыскивать положение равнодействующей тех сил, которыми могут быть заменены заданные силы, т. е. искать положение равнодействующей сил  $aR$ ,  $Rb$ ,  $bR$  и  $Rc$ , что, очевидно, одно и то же. Разложение силы  $a_1$  на составляющие  $aR$  и  $Rb$  производим в точке  $A$ , а разложение сил  $a_2$  на составляющие  $bR$  и  $Rc$  — в точке  $B$  (фиг. 36 а). Но сила  $Rb$  у точки  $A$  и сила  $bR$  у точки  $B$  имеют общую линию действия, равны по величине и противоположны по направлению, поэтому они взаимно уничтожаются. Остается, таким образом, отыскивать положение равнодействующей силы  $aR$ , приложенной к точке  $A$ , и силы  $Rc$ , приложенной к точке  $B$ . Продолжая линии действия этих сил до их пересечения, находим точку  $B'$ , через которую проходит равнодействующая  $r_1$ .

Повторяя такие же рассуждения в отношении следующей силы  $cd$ , равной  $a_3$ , найдем, что она может быть заменена силами  $cR$  и  $Rd$  (фиг. 36 б); сила  $cR$ , будучи приложена к точке  $C$  (фиг. 36 а), взаимно уничтожает силу  $Rc$ , приложенную к точке  $B$  и имеющую общее с ней направление. Тогда равнодействующая  $r_2$  сил  $a_1$ ,  $a_2$ , и  $a_3$  найдется в результате сложения оставшихся сил:  $aR$ , приложенной к точке  $A$ , и  $Rd$ , приложенной в точке  $C$ . Равнодействующая  $r_2$  проходит через точку  $C'$  пересечения линии действия указанных сил (фиг. 36 а).

Таким же путем определяются и положения остальных равнодействующих  $r_3 = \sum_{i=1}^4 a_i$  и  $r_4 = \sum_{i=1}^5 a_i$  и, наконец, равнодействующей всех приложенных сил  $a_7 = \sum_{i=1}^6 a_i$ .

Полученный в результате такого построения многоугольник, состоящий из линий 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 (фиг. 36 а), носит название веревочного многоугольника.

Если некоторые из шкал номограммы являются обратными (§ 9), то коэффициенты этих шкал должны откладываться на плане сил (фиг. 36 б) в направлении, обратном тому, которое принято для коэффициентов прямых шкал. Однако во всех случаях правило сложения сил ос-

тается. как известно из статики, общим: начало последующей силы прикладывается к концу предыдущей силы; сила, соединяющая начало предыдущей силы с концом последующей, является равнодействующей этих двух сил. Так как, согласно установленной статической аналогии, носители шкал слагаемых функций должны рассматриваться как линии действия приложенных сил, а носители шкал суммарных функций как линии действия равнодействующих сил, то для построения веревочного многоугольника с целью определения положения носителей всех шкал устанавливается следующее

**правило.** Задаемся произвольным расположением вертикальных линий—носителей шкал заданных функций независимых переменных (поле сил). Отдельно строим многоугольник сил, на котором последовательно откладываем коэффициенты шкал функций заданных переменных, сообразуясь с их направлением, и выбираем точку  $R$  на произвольном полюсном расстоянии  $H$  (план сил).

Проводим лучи от полюса  $R$  к концам отрезков, изображающих коэффициенты шкал функций заданных переменных. На поле сил строим веревочный многоугольник, последовательно проводя прямые между носителями шкал, параллельные соответствующим лучам на плане сил.

Точки пересечения *первого* луча с каждым последующим лучом будут лежать на вертикалях, через которые должны быть проведены носители шкал вспомогательных переменных, а точка пересечения *первого* луча с последним лучом определит положение носителя шкалы функции зависимой переменной.

### Графический метод построения цепных номограмм с параллельными шкалами

Вначале рассмотрим применение метода к уравнению, имеющему простой вид

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots}{u_k u_{k+1} u_{k+2} \cdot \dots} = u_n,$$

которое после логарифмирования имеет вид

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \lg u_3 + \dots - \lg u_k - \lg u_{k+1} - \lg u_{k+2} \cdot \dots = \lg u_n. \quad (15.7)$$

Здесь  $u_i$  ( $i=1, 2 \dots n-1$ )—независимые переменные или их простые тригонометрические функции, непрерывные и монотонные в заданных пределах изменения переменных. Градуирование шкал этих функций может быть произведено графическим методом, путем копирования соответствующих участков логарифмических линеек. Для возможности осуществления этого коэффициенты шкал функции (15.7) должны быть выбраны согласно табл. 1.

Назначаем коэффициенты шкал каждой из функций независимых переменных, руководствуясь заданными пределами изменения этих переменных, имеющимся набором логарифмических линеек и желательными размерами номограммы; кроме того, подберем коэффициенты шкал таким образом, чтобы сумма коэффициентов шкал заданных функций также отвечала коэффициенту шкалы одной из имею-

щихся линеек (это условие не является обязательным, так как применением графических методов можно получить логарифмическую шкалу, обладающую любым коэффициентом шкалы).

Затем строим план сил (фиг. 36 б) и веревочный многоугольник на поле сил (фиг. 36 а). Эти построения выше были подробно описаны. Продолжаем линии носителей шкал вверх (фиг. 36 с).

После того как на чертеже определились положения носителей шкал заданных функций и вспомогательных переменных, займемся размещением шкал на этих носителях.

С целью увеличения угла, образуемого крайними диагональными положениями разрешающей прямой\* с направлениями шкал, целесообразно центрировать шкалы номограммы, иными словами, располагать их в поле чертежа таким образом, чтобы середины их лежали на одной прямой, перпендикулярной к носителям шкал. Как известно, чем острее угол встречи разрешающей прямой с отметкой шкалы, тем больше геометрическая погрешность нахождения ответной точки.

Зная коэффициенты шкал функции, выбираем соответствующие шкалы логарифмических линеек, находим на них пометки точек, отвечающие заданным пределам переменных, и измеряем масштабной линейкой расстояние между этими пометками. Они представляют собой длины шкал.

На чертеже (поле сил) проводим прямую  $OO$ , перпендикулярную к направлению шкал, и откладываем на носителях шкал полученные длины шкал заданных функций независимых переменных так, чтобы середины шкал пришлись на этой прямой (фиг. 36 с). Длины шкал всех заданных функций выделены жирными линиями.

Для того чтобы копировать шкалы, достаточно знать пометки хотя бы одной из точек на каждой шкале. Такими точками являются концы шкал, отвечающие заданным пределам переменных.

Одновременно помечаем на каждом носителе шкал *положение начала логарифмических шкал*, с которых производится копирование, и надписываем около этих точек значения логарифмической функции. Если, например, градуируется шкала функции  $\lg u$ , коэффициент шкалы которой равен 0,02 и пределы изменения переменной  $400 < u < 750$ , то берем нормальную шкалу большой линейки (табл. 1), находим на ней пометки 4 и 7,5 и с помощью масштабной линейки измеряем расстояние между этими точками (13,65 см); эту длину шкалы делим пополам и откладываем по обе стороны от центральной линии  $OO$ . Этим путем получаем положение концов шкалы. Затем копируем участок линейки, заключенный между пометками 4 и 7,5. Кроме этого, показываем на носителе шкалы точку, отвечающую пометке 1 (начало логарифмической шкалы), *независимо* от того, находится ли эта точка в пределах интересующего нас участка (от 4 до 7,5) или нет. Рядом с точкой, от-

\* Разрешающая прямая может иметь следующие предельные положения (фиг. 20): нижнее  $A'B'$ , верхнее  $A''B''$  и диагональные  $A'B''$  и  $A''B'$ .

вечающей началу линейки, пишем значение логарифмической функции, в данном случае 2 ( $\lg 100=2$ ).

Так же поступаем со всеми остальными шкалами функции независимых переменных. Затем проводим крайние разрешающие прямые через концы шкал и на пересечениях их с носителями шкал соответствующих вспомогательных переменных получаем концы этих шкал, в том числе шкалы функции зависимой переменной  $u_7$ .

Теперь проводим разрешающие прямые через сделанные пометки точек, отвечающие началам логарифмических шкал, и получаем на носителе шкалы функции зависимой переменной точку. Значение логарифмической функции в этой точке получаем алгебраическим суммированием значений, надписанных на носителях шкал слагаемых функций. Так, на фиг. 36 с это значение получено в результате следующего суммирования:  $-2+1+5-3-1+1=+1$ . Оно надписано на шкале функции  $u_7$ .

Наконец, прикладываем в полученной точке начало логарифмической линейки, коэффициент шкалы которой равен сумме коэффициентов шкал слагаемых функций, и производим копирование градуировки участка между концами шкалы функции зависимой переменной. Для получения пометок точек этой шкалы принимаем в расчет значение логарифмической функции в точке, где приложено начало логарифмической линейки. Так, если логарифмическая функция в такой точке имела значение  $+1$ , как на фиг. 36 с, то пометка этой точки равна 10. Направление шкалы функции зависимой переменной определяется направлением равнодействующей всех сил. Имея направление шкалы, коэффициент шкалы и пометку одной точки, нетрудно дать ее градуировку. Наконец, проверку величины предельного угла, образуемого разрешающими прямыми, производим графическим путем с помощью транспортира. Таким образом, без каких-либо вычислений удастся построить законченную номограмму, и проверить ее, применяя одни только графические методы.

### Графоаналитический метод построения цепных номограмм с параллельными шкалами

Если номографируемое уравнение имеет более общий вид (9.9), то, приводя его логарифмированием к виду (9.10), удобно применить для построения номограммы графоаналитический метод.

Предварительно по заданным пределам изменения переменных  $(u_i)_1$  и  $(u_i)_2$  должны быть вычислены наименьшее  $f_i(u_i)_1$  и наибольшее  $f_i(u_i)_2$  значения функции независимых переменных. Затем вычисляются интервалы  $A_i$  функции независимых переменных  $f_i(u_i)$ , назначаются величины графических коэффициентов шкал  $a_i'$ , согласно табл. 1, вычисляются расчетные коэффициенты шкал  $a_i$  и определяются длины  $h_i$  этих шкал. Действия удобно производить в таблице (см. табл. 13, столбцы 1—11).

Аналогичные величины для шкалы функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$  получаются суммированием в том порядке, как это показано в нижней строке таблицы.

Алгоритм к графоаналитическому методу построения цепной номограммы с параллельными шкалами

Переменные	Вид функции	Пределы переменных		Значение функций		Показатель степени	Интервал функции	Коэффициент шкалы		Длина шкалы	Уравнение шкалы
		прикисимальный	дистальный	наименьшее	наибольшее			графический	расчетный		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$u_i$	$f_i(u_i)$	$(u_i)_1$	$(u_i)_2$	$f_i(u_i)_1$	$f_i(u_i)_2$	$m_i$	$A_i = f_i(u_i)_2 - f_i(u_i)_1$	$a_i'$	$a_i = m_i a_i'$	$h_i = \frac{A_i}{a_i}$	$y_i = \frac{f_i(u_i)_2 - f_i(u_i)_1}{a_i}$
$u_n$	$f_n(u_n)$	$(u_n)_1$	$(u_n)_2$	$f_n(u_n)_1 =$ $= \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_1$	$f_n(u_n)_2 =$ $= \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_2$	1	$A_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i$	$a_n$	$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$	$h_n = \frac{A_n}{a_n}$	$y_n = \frac{f_n(u_n) - f_n(u_n)_1}{a_n}$
Контроль				—	—	—	$A_n = f_n(u_n)_2 - f_n(u_n)_1$	—	—	—	—

Для контроля правильности расчета вычисляется интервал  $A_n$  функции зависимой переменной, как разность наибольшего и наименьшего предельных значений функции этой переменной, и полученный результат сравнивается с величиной интервала этой функции, полученной путем суммирования значений интервалов функции независимых переменных.

Затем можно перейти к построениям, описанным выше методом. Контролем правильности построения является совпадение концов шкалы функции зависимой переменной, полученных путем непосредственного построения и найденных при проведении крайних положений разрешающих прямых всех звеньев номограммы. Градуирование шкал функции производим описанным выше способом. Если номографируемое соотношение имеет самый общий вид, то градуирование шкал придется вести по их уравнениям. В этом случае в табл. 13 должны быть выписаны также уравнения шкал (столбец 12).

### Слияние шкал

При построении цепной номограммы графическим или графоаналитическим методами целесообразно идти обратным путем—вначале построить план сил, а затем перейти к полю сил и последовательно строить линии носителей шкал, выбирая их положение таким образом, чтобы удобнее разместить носители шкал вспомогательных переменных и функции зависимой переменной. В частности, таким путем можно легко осуществить частичное слияние шкал вспомогательных переменных с носителями шкал функции независимых переменных, и, устранив, таким образом, часть немых шкал, добиться компактности номограммы и лучшего использования площади чертежа, без ущерба для точности.

Для этого необходимо поступать следующим образом. Построив произвольно носители шкал первых двух функций независимых переменных, определяем графическим методом положение носителя шкалы первой вспомогательной переменной. Из предыдущего (§ 9) известно, что в любой номограмме со слившимися шкалами первая немая шкала необходима по условиям построения.

Пусть теперь решено слить вторую немую шкалу со шкалой второй заданной переменной, или, выражаясь языком статики, иметь общую линию действия равнодействующей силы  $r_2$ , где  $r_2 = r_1 + a_3$ , и силы  $a_2$ . Таким образом, известны положение равнодействующей  $r_2$  и одной из ее составляющих  $r_1$ , требуется найти положение второй составляющей  $a_3$ .

Для того чтобы силы  $r_2$  и  $a_2$  имели общую линию действия, необходимо, чтобы на плане сил (фиг. 36 б) слились следующие две точки: не поименованная на чертеже точка пересечения *первого* луча с линией действия силы  $a_2$ , и точка  $C'$ , находящаяся на пересечении *первого* луча с четвертым лучом, через которую проходит линия действия равнодействующей  $r_2$ . Так как положение первой точки определено в результате предыдущего построения и, следовательно, является неизмен-

ным, то нам остается лишь приближать к ней вторую точку—точку пересечения первого луча с четвертым. Отсюда следует, что для получения положения линии действия силы  $\gamma_2$  необходимо провести четвертый луч через точку пересечения первого луча с линией действия силы  $a_2$ . Точка пересечения третьего луча, построенного при точке  $B$ , и четвертого луча, построенного при точке  $C'$ , определит положение второй составляющей  $a_3$ . Таким же способом нужно действовать для слияния и остальных шкал. На этом основании формулируем следующее

**правило.** Для слияния носителя шкалы любой суммарной вспомогательной переменной с данным носителем шкалы функций независимой переменной следует на поле сил через точку пересечения *первого* луча с данным носителем шкалы функции независимой переменной провести луч, соответствующий коэффициенту шкал той суммарной вспомогательной переменной, носитель которой должен быть слит, и вести этот луч на поле сил до пересечения с предыдущим лучом. Точка пересечения указанных двух лучей определит положение носителя шкалы соответствующей функции независимой переменной.

Преимуществом графического и графоаналитического методов является наглядность и значительная легкость построения цепных номограмм. Поэтому эти методы построения цепных номограмм, кроме своего прямого назначения, могут найти применение при предварительных расчетах номограмм для сравнения вариантов, в качестве демонстрационной схемы для наглядного представления о влиянии коэффициентов шкал на расположение носителей шкал и т. п.

Некоторым недостатком этих методов является накопление графических ошибок построения, которое может сделаться заметным при очень большом числе переменных. В этих случаях графический и графоаналитический способы менее точны по сравнению с описанным в главе IV аналитическим методом. Поэтому при большом числе переменных он может быть рекомендован только в тех случаях, когда к результатам построения не предъявляется повышенных требований в отношении точности. При небольшом числе переменных графический и графоаналитические методы дают достаточно точные результаты; это иллюстрируется приведенным ниже примером.

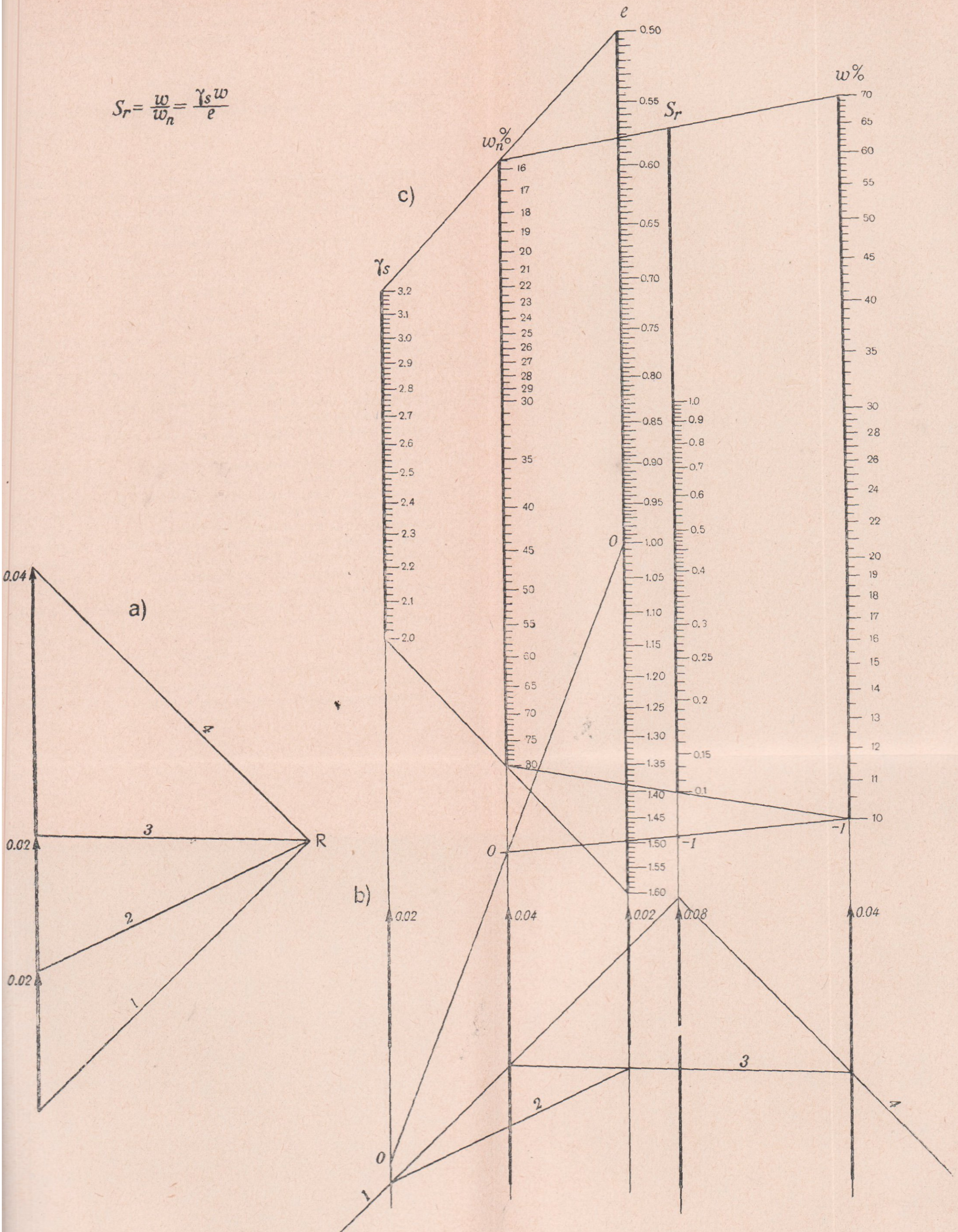
## § 16. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ЦЕПНОЙ НОМОГРАММЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

### Номографируемое уравнение и пределы изменения переменных

Построим номограмму уравнения для определения степени насыщения  $S_r$  грунтов; так называется отношение естественной влажности грунта  $w$  к его полной влагоемкости  $w_n$ , т. е.

$$S_r = \frac{w}{w_n}. \quad (16.1)$$

$$S_r = \frac{w}{w_n} = \frac{\gamma_s w}{e}$$



Фиг. 37. Номограмма для определения степени насыщения грунтов.  
 Գրունտների ջրահագեցման աստիճանի որոշման նոմոգրամը:  
 Nomogram for computation of degree of saturation of soils

Полная влагоемкость грунта представляет собой влажность, теоретически соответствующую полному заполнению пор грунта водой; она получается как отношение коэффициента пористости грунта  $e$  к объемному весу частиц  $\gamma_s$ , т. е.

$$w_n = \frac{e}{\gamma_s}. \quad (16.2)$$

Объединяя эти выражения, получаем формулу для вычисления степени насыщения грунта  $S_r$ :

$$S_r = \frac{w\gamma_s}{e}. \quad (16.3)$$

Номограмма должна быть построена как для решения основного уравнения (16. 3), так и обеих составляющих его уравнений (16. 1) и (16. 2). Это будет достигнуто в том случае, если градуировать шкалу первой вспомогательной переменной  $w_n$ .

Пределы изменения независимых переменных уравнения (16. 3) следующие:  $2,0 \leq \gamma_s \leq 3,2$ ;  $0,5 \leq e \leq 1,6$ ;  $0,1 \leq w \leq 0,7$  (или  $10\% \leq w \leq 70\%$ )

Логарифмируя уравнение (16. 3), получаем

$$\lg S_r = \lg \gamma_s - \lg e + \lg w. \quad (16.4)$$

#### Построение шкал

Выбираем для шкал этих переменных следующие коэффициенты шкал: для  $\gamma_s$  —  $0,02 \text{ см}^{-1}$ , для  $e$  —  $0,02 \text{ см}^{-1}$  и для  $w$  —  $0,04 \text{ см}^{-1}$ ; коэффициенты шкал суммарных переменных получаются: для  $w_n$ :  $0,02 + 0,02 = 0,04 \text{ см}^{-1}$  и для  $S_r$ :  $0,02 + 0,02 + 0,04 = 0,08 \text{ см}^{-1}$ .

Все перечисленные значения коэффициентов шкал соответствуют табл. 1, и поэтому все эти шкалы могут быть построены путем непосредственного копирования шкал соответствующих логарифмических линейек.

Устанавливаем следующую последовательность шкал в номограмме: в начале номограммы помещаем шкалы удельного веса  $\gamma_s$  и коэффициента пористости  $e$ ; первая суммарная шкала этого звена, согласно уравнению (16. 2), является шкалой полной влагоемкости  $w_n$  грунта. Во втором звене слагаемыми являются шкалы полной влагоемкости  $w_n$  и естественной влажности  $w$ ; суммарная шкала этого звена, согласно уравнению (16. 1), является шкалой степени насыщения  $S_r$  грунта. Тогда при пользовании номограммой мы будем применять:

для уравнения (16. 2) — левую половину номограммы, т. е. шкалы заданных переменных  $\gamma_s$  и  $e$ , и ответную шкалу  $w_n$ ;

для уравнения (16. 1) — правую половину номограммы, т. е. шкалы заданных переменных  $w_n$  и  $w$ , и ответную шкалу  $S_r$ ;

для уравнения (16. 3) — всю номограмму, т. е. шкалы заданных переменных  $\gamma_s$ ,  $e$  и  $w$ , немую шкалу  $w_n$  и ответную шкалу  $S_r$ .

Построение номограммы начинаем с плана сил. На вертикальной прямой (фиг. 37 а) в указанной выше последовательности откладываем

коэффициенты шкал заданных переменных. Так как все шкалы прямые (коэффициенты шкал положительны), то на многоугольнике сил эти коэффициенты представлены векторами, направленными вверх.

Затем на плане сил выбираем полюс  $R$  на произвольном полюсном расстоянии  $H$  и проводим лучи 1, 2, 3 и 4 к концам отрезков, изображающих коэффициенты шкал.

Далее переходим к полю сил (фиг. 37 б). Задаемся произвольным расположением носителей шкал заданных переменных  $\gamma_s$ ,  $e$  и  $w$  на поле сил, и строим веревочный многоугольник, состоящий из сторон 1, 2, 3 и 4, как это было указано выше (§ 15). На пересечении первого луча с третьим получаем точку, через которую проходит носитель шкалы  $w_n$ , а на пересечении первого луча с четвертым — точку, через которую проходит носитель шкалы  $S_r$ .

Продолжаем носители шкал всех функций вверх (фиг. 37 с) и проводим осевую линию\*. Измеряем с помощью масштабной линейки длины шкал слагаемых функций. Для этого берем большую линейку (длиной 50 см) и измеряем на нормальной шкале этой линейки ( $a = 0,02 \text{ см}^{-1}$ ) расстояние между пометками 2,0 и 3,2; оно составляет 10,21 см; такова длина шкалы  $\gamma_s$ .

Переходим к шкале  $e$ ; коэффициент ее равен также  $0,02 \text{ см}^{-1}$ ; поэтому пользуемся той же нормальной шкалой большой линейки. Так как пределы изменения переменной составляют 0,5 и 1,6, то измеряем на указанной шкале расстояние между пометками 5 и 10, прибавляем к найденной величине расстояние между пометками 1 и 1,6 и получаем, таким образом, длину шкалы  $e$ ; она равна 25,26 см.

Наконец, на квадратичной шкале той же линейки измеряем расстояние между пометками 1 и 7; получаемая величина (21,18 см) представит длину шкалы  $w$ .

Разделив длины шкал слагаемых функций  $\gamma_s$ ,  $e$  и  $w$  пополам, откладываем полученные величины по обе стороны от осевой линии и получаем положение концов этих шкал. Проводя крайние разрешающие прямые через верхние и нижние концы этих шкал, отсекаем на носителях шкал суммарных функций  $w_n$  и  $S_r$  положение верхних и нижних концов шкал соответственно.

### Градуирование шкал

Переходим к градуированию шкал. Прикладываем большую логарифмическую линейку к носителю шкалы  $\gamma_s$  так, чтобы пометка 2 совпала с нижним концом шкалы, а пометка 3,2 — с верхним. Копируем градуировку и помечаем на носителе шкалы начало логарифмической линейки; слева от шкалы надписываем 0 ( $\lg 1 = 0$ ). Так же поступаем и со шкалой  $e$ ; помня, однако, что функция  $e$  имеет отрицательные значения (см. ур. 16.4), располагаем пометку 1,6 у нижнего конца, а по

\* На фиг. 37 с осевая линия не показана. Она делит все шкалы номограммы пополам.

метку 0,5—у верхнего. Кроме того, отмечаем точку, соответствующую началу линейки (пометка 1) и надписываем рядом значение логарифмической функции, равное 0 (слева от шкалы).

Для шкалы  $w$  используем квадратичную шкалу этой же линейки, располагая начало линейки (пометка 1) у нижнего конца шкалы и пометку 7—у верхнего. Так как влажность грунтов принято выражать в процентах, то соответственно надписываем пометки этой шкалы (от 10 до 70%). У точки, где находилось начало логарифмической линейки, надписываем значение функции, равное  $-1$ .

Переходим к градуированию шкал суммарных функций. Проведя разрешающую прямую через обозначенные на шкалах  $\gamma_s$  и  $e$  точки с надписанными значениями 0 и 0, получаем на носителе шкалы  $w_n$  точку со значением функции, также равным нулю. К этой точке прикладываем начало соответствующей логарифмической линейки и копируем градуировку на участке между концами этой шкалы (от 0,156 до 0,8). Не следует забывать, что функция  $w_n$  имеет отрицательные значения; из (16.1) видно, что  $\lg S_r = \lg w - \lg w_n$ .

Поэтому наименьшему значению функции  $w_n$  соответствует большее значение переменной, т. е. пометки шкалы  $w_n$  будут расти сверху вниз; отсюда следует, что необходимо приложить к точке со значением функции, равным 0, *верхний* конец логарифмической линейки. Интересующий нас участок этой линейки окажется между точками 8 и 1,56; так как значение функции у верхнего конца линейки равно 0, а, следовательно, аргумент логарифмической функции равен 1, то понятно, что пометки концов шкалы  $w_n$  будут 0,3 и 0,156; градуировку записываем в процентах, как это принято в отношении влажности (т. е. надписываем от 16 до 80%).

Тем же путем градуируем шкалу  $S_r$ . Значение логарифмической функции в точке, засекаемой разрешающей прямой, проведенной через точки 0 и  $-1$ , составит  $-1$  (это видно из  $0-1=-1$ ). Прикладывая сюда начало квадратичной шкалы обыкновенной линейки ( $a=0,08 \text{ см}^{-1}$ ), копируем шкалу на нужном участке. Нижний конец шкалы будет иметь пометку 0,125, а верхний—4,48. Заметив, что степень насыщения грунта не может составлять величины большие единицы, даем градуировку шкалы  $S_r$  только на интервале от 0,125 до 1,0; таким образом, шкала  $S_r$  оказывается нецентрированной.

Готовая номограмма для определения степени насыщения грунтов представлена на фиг. 37.

## VI. ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ С НАКЛОННЫМИ ШКАЛАМИ

### § 17. ТЕОРИЯ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ С НАКЛОННЫМИ ШКАЛАМИ

#### Структура цепных номограмм с наклонными шкалами

Цепные номограммы с наклонными шкалами служат для номографирования первой канонической формы уравнений вида

$$f_1(u_1) \frac{f_2(u_2) \cdot f_3(u_3) \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1})}{f_4(u_4) \cdot f_5(u_5) \cdot \dots} = f_n(u_n), \quad (17.1)$$

разрешаемых в номограммах нулевого жанра.

После разъединения переменных эти уравнения заменяются эквивалентной системой уравнений с тремя переменными вида

$$\left. \begin{aligned} f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) &= \rho_1 \\ \rho_1 \cdot f_3(u_3) &= \rho_2 \\ \frac{\rho_2}{f_4(u_4)} &= \rho_3 \\ \frac{\rho_3}{f_5(u_5)} &= \rho_4 \\ &\dots \dots \dots \\ \rho_{n-3} \cdot f_{n-1}(u_{n-1}) &= f_n(u_n), \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

где  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-3}$  — вспомогательные переменные.

Цепные номограммы с наклонными шкалами состоят из звеньев, каждое из которых содержит две параллельные вертикальные шкалы и одну наклонную. Вертикальные шкалы являются функциональными шкалами; они могут быть направлены в одну сторону или в разные.

Иногда применяется название зет-номограммы или  $N$ -номограммы в отношении тех номограмм, которые состоят из двух параллельных, направленных в разные стороны шкал и одной пересекающей их шкалы. Такое название возникло вследствие сходства таких номограмм с латинскими буквами  $Z$  или  $N$ . Это, очевидно, имеет место в тех случаях, когда точки пересечения шкал находятся в пределах чертежа. Однако в общем случае точки пересечения шкал могут и не находиться на чертеже. Если же параллельные шкалы направлены в одну сторону, то вид полученной номограммы вообще не имеет ничего общего с буквами  $Z$  или  $N$ .

Отличительной чертой таких номограмм является *наклон* одной из шкал по отношению к остальным двум параллельным шкалам. Такие номограммы в дальнейшем называются *номограммами с наклонной шкалой*.

Носители наклонных шкал пересекают вертикальные шкалы и проходят через их начала, т. е. через те точки вертикальных шкал, в которых значение функции делается равным нулю. Наклонные шкалы являются *проективными* шкалами; они могут располагаться на этом носителе как внутри звена, т. е. между вертикальными шкалами, так и вне его. В первом случае расположения наклонных шкал мы называем их *внутренними* наклонными шкалами, а во втором случае—*внешними* наклонными.

Различным может быть также и взаимное расположение критических точек проективных шкал: нулевая критическая точка может находиться справа, а бесконечная—слева, и наоборот. В зависимости от того, как расположены критические точки, номограмма представляет действие умножения или деления функции. Соответственно мы называем наклонные шкалы:

*множительными*, когда с началом первой функциональной шкалы звена сливается бесконечная критическая точка проективной шкалы, и *делительными*, когда с началом первой функциональной шкалы звена сливается нулевая критическая точка проективной шкалы.

ВИДЫ НАКЛОННЫХ ШКАЛ	<i>Внутренние</i>	<i>Внешние</i>	ВИД НОМОГРАФИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ
<i>Множительные</i>			$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) = f_3(u_3)$
<i>Делительные</i>			$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = f_3(u_3)$

Фиг. 38

На фиг. 38 дана сводка схем различного типа номограмм с наклонными шкалами и показаны виды номографируемых уравнений.

При построении цепных номограмм с наклонными шкалами на вертикальных носителях будем располагать функциональную шкалу первой заданной функции независимой переменной, все шкалы вспомогательных переменных, и ответную функциональную шкалу функции зависимой переменной. Тогда на наклонных носителях расположатся проективные шкалы всех заданных функций независимых переменных, кроме первой.

## Ограниченность применения цепных номограмм с наклонными шкалами

Цепные номограммы с наклонными шкалами, служащие для умножения или деления функции, находят значительно меньшее применение по сравнению с цепными номограммами с параллельными шкалами. Дело в том, что вид заданного уравнения еще не обязывает к применению определенного типа номограмм. Так, первая каноническая форма уравнений вида (17.1) путем логарифмирования может быть приведена ко второй канонической форме уравнений вида (6.1) и, следовательно, вместо одного типа цепной номограммы может быть применен другой тип.

Цепная номограмма с параллельными шкалами для уравнения (6.1), полученного после логарифмирования уравнения (17.1), будет иметь следующие преимущества перед цепной номограммой с наклонными шкалами, построенной для исходного уравнения (17.1):

1. Почти во всех звеньях цепной номограммы с параллельными шкалами имеет место внутреннее пересечение разрешающих прямых с ответными шкалами, что приводит к значительно меньшим значениям геометрической погрешности определения положения ответной точки, тогда как в большинстве звеньев цепной номограммы с наклонными шкалами разрешающие прямые имеют внешнее пересечение с ответными шкалами и соответственно увеличивается погрешность ответа.

2. В цепных номограммах с параллельными шкалами возможно слияние шкал; в цепных номограммах с наклонными шкалами такая возможность полностью отсутствует.

3. В цепных номограммах с параллельными шкалами разрешающие прямые почти во всех звеньях располагаются «в елочку» (§ 9) и поэтому часть площади номограммы используется дважды; в номограммах с внутренними наклонными шкалами разрешающие прямые располагаются «в цепочку», поэтому площадь номограммы используется только один раз, что ведет к увеличению полной ширины номограммы.

4. Все шкалы цепной номограммы с параллельными шкалами являются логарифмическими шкалами\* и, следовательно, предельная относительная погрешность результата автоматически получается постоянной, т. е. не зависит от положения ответной точки на шкале; в цепных номограммах с наклонными шкалами шкалы первой заданной функции и функции зависимой переменной имеют логарифмическую характеристику лишь в том случае, если в заданном уравнении (17.1) эти функции являются логарифмическими. Что же касается наклонных шкал, то качество их определяется не только качеством шкал соответствующих им функций, но и характером их дальнейшего преобразования. При определенных условиях качество наклонных шкал может оказаться выше качества шкал исходных функций и может более или менее приближаться к логарифмической шкале.

---

\* За исключением тех случаев, когда функции уравнения (17.1) являются экспоненциальными функциями; при логарифмировании таких функций получаются нелогарифмические функции; так, если  $f(u) = e^u$ , то  $\ln f(u) = u$ .

5. Расчет и построение логарифмических шкал цепной номограммы может производиться более простыми приемами, сравнительно с теми, которые применяются при построении проективных шкал номограммы с наклонными шкалами; как правило, они сводятся к копированию готовых логарифмических шкал.

Перечисленными причинами объясняется значительно меньшее распространение номограмм с наклонными шкалами по сравнению с номограммами с параллельными шкалами. Влияние этих причин усиливается при увеличении числа переменных номографируемого уравнения, и при числе переменных выше пяти такие номограммы, кажется, еще не применялись\*. Этим объясняется и меньшее внимание, которое уделяется в настоящей работе цепным номограммам с наклонными шкалами, несмотря на их значительный теоретический интерес.

### Цепные номограммы с внутренними множительными наклонными шкалами

Показанные на схеме (фиг. 38) различные типы номограмм с наклонными шкалами имеют много общего. Для того, чтобы не повторяться, здесь будут подробно описаны номограммы с внутренними наклонными шкалами, а затем охарактеризованы номограммы с внешними наклонными шкалами. В конце работы (§ 23) будет показано, что при определенном проективном преобразовании номограммы с внутренними наклонными шкалами переходят в номограммы с внешними наклонными шкалами.

Рассмотрим номограмму с внутренней множительной наклонной шкалой, служащую для представления первой канонической формы уравнений

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) = f_3(u_3). \quad (17.3)$$

Если номограмма с наклонной шкалой входит в состав цепной номограммы, являясь ее звеном, то для применения полученных решений необходимо заменить функции соответствующими вспомогательными переменными, согласно структуре уравнений (17.2).

В дальнейшем изложении будем, по возможности, прибегать к образам и определениям, которые были применены при исследовании номограмм с параллельными шкалами, как в целях единства изложения, так и для облегчения ввода звеньев этого рода в цепные номограммы изученного ранее типа.

Номограмма состоит из трех шкал, две из которых вертикальны и параллельны друг другу, а третья наклонна. Внутренняя наклонная шкала имеет по одной общей точке с каждой из параллельных шкал. Это те критические точки, в которых значение функции делается равным нулю или бесконечно велико.

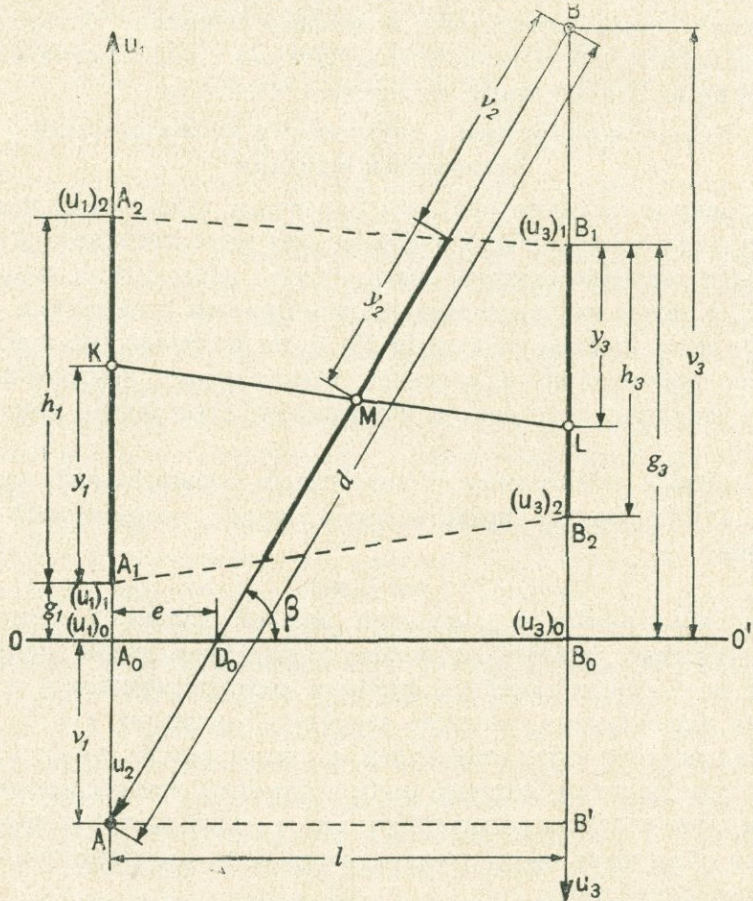
Рассмотрим тот более общий случай, когда критические точки проективной шкалы не помещаются на поле чертежа. Тогда номограмма с наклонной шкалой приобретает вид, показанный на фиг. 39. При ее рас-

\* В качестве примера такой номограммы может служить цепная номограмма с наклонными шкалами для формулы  $Q_{II} = 2l \sqrt{\frac{l^3}{r}}$ , состоящая из трех звеньев, которая была дана Ф. Юрга [22].

смотрении следует принять, что поле чертежа приблизительно ограничивается точками  $A_0$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_0$ .

### Вертикальные шкалы

Шкала одной из заданных функций  $f_1(u_1)$  направлена вверх; шкала функции зависимой переменной  $f_3(u_3)$  направлена вниз. По принятой терминологии (§ 6) первая шкала является прямой, а коэффициент ее положителен; вторая шкала является обратной, а коэффициент ее отрицателен. Шкала второй функции независимой переменной  $f_2(u_2)$  наклонна. Ее характеристика будет дана ниже.



Фиг. 39

Заданное уравнение представляем в таком виде:

$$\frac{f_3(u_3)}{f_1(u_1)} = f_2(u_2); \quad (17.4)$$

в дальнейшем будем считать заданными шкалы функций  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$ .

Зададимся значением пределов переменных  $u_1$  и  $u_3$ :

$$(u_1)_1 \leq u_1 \leq (u_1)_2 \quad \text{и} \quad (u_3)_1 \leq u_3 \leq (u_3)_2.$$

Выберем коэффициенты шкалы  $a_1$  и  $a_3$  и определим длины шкал

$$h_1 = \frac{f_1(u_1)_2 - f_1(u_1)_1}{a_1} \quad \text{и} \quad h_3 = - \frac{f_3(u_3)_2 - f_3(u_3)_1}{a_3}.$$

Длина шкалы функции  $f_3(u_3)$  получилась отрицательной, так как эта шкала является обратной.

Построим эти шкалы. Выберем опорную линию  $OO'$  и построим линии носителей шкал функции  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$  перпендикулярно к опорной линии  $OO'$  на произвольном взаимном расстоянии  $l$ . Для построения шкал зададимся произвольными значениями длин опорных шкал  $g_1$  и  $g_3$ . Так как шкала функции  $f_3(u_3)$  является обратной, то начало шкалы этой функции находится сверху носителя в точке  $B$ .

Уравнения шкал функции  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$ , отсчитанные от опорной линии  $OO'$ , на основании известных из предыдущего соображений, составляют

$$g_1 + y_1 = g_1 + \frac{f_1(u_1) - f_1(u_1)_1}{a_1} \quad \text{и} \quad g_3 - y_3 = g_3 - \frac{f_3(u_3) - f_3(u_3)_1}{a_3}.$$

Сделанная замена заданного уравнения (17.3) уравнением (17.4) и связанное с ней изменение номенклатуры независимых переменных не должны влиять на характер функциональной зависимости, связывающей переменные изучаемого уравнения. Иначе обстоит дело с пределами переменных.

В уравнении (17.3), когда заданы переменные  $u_1$  и  $u_2$ , разрешающая прямая обладает *внешним* пересечением и поэтому крайние значения переменной  $u_3$  определяются *противоположными* значениями пределов переменных  $u_1$  и  $u_2$ ; вследствие этого предельные значения переменной  $u_3$  получаются широкими.

В уравнении (17.4), которым заменено заданное уравнение (17.3), разрешающие прямые имеют *внутреннее* пересечение и поэтому крайние значения переменной  $u_3$  определяются *односторонними* значениями переменных  $u_1$  и  $u_2$ ; вследствие этого значения пределов переменного  $u_3$  получаются более узкими.

Так как заданным является уравнение (17.3), и предельные значения функции зависимой переменной  $u_3$  определяются значениями пределов переменных  $u_1$  и  $u_2$ , то при замене его уравнением (17.4) пределы переменной  $u_3$  оказываются суженными, вследствие перехода от внешнего пересечения на внутреннее.

В большинстве случаев это является допустимым, так как крайние значения переменных встречаются не часто, а их противоположные сочетания еще более редки, а иногда и практически невозможны. Так, если составлена номограмма для определения объема каменных блоков, размером от 10 см до 2 м в стороне, то случай блока шириной 2 м и высотой 10 см нереальный.

В необходимых случаях положение может быть исправлено увеличением значений пределов переменной  $u_3$ , но следует иметь в виду, что такое увеличение надо производить весьма корректно, так как в противном случае интервал функции  $f_3(u_3)$  будет получаться чрезмерно большим, что принудит принять также высокие значения коэффициента шкалы  $a_3$  и в результате получить слишком мелкую шкалу.

Поэтому рекомендуется поступать следующим образом: заданное уравнение (17.3) заменить уравнением (17.4); при номографировании уравнения (17.4) исходить из тех значений пределов переменной  $u_3$ , которые получаются при *односторонних* сочетаниях пределов переменных  $u_1$  и  $u_2$ ; строить шкалы всех функций; если при анализе полученной номограммы окажется, что шкала переменной  $u_3$  недостаточно охватывает реальные значения, которые должна давать номограмма, то продолжать градуирование этой шкалы по тому же закону в нужную сторону и на нужное расстояние.

### Наклонная шкала

Носителем наклонной шкалы является прямая  $AB$ , соединяющая начала вертикальных шкал. В множительных наклонных шкалах нулевая критическая точка располагается в точке  $B$ , а бесконечная точка — в точке  $A$ .

Положительное направление шкалы  $u_2$  показано на фиг. 39. В соответствии с этим первичная шкала, применяемая для градуирования наклонной шкалы  $u_2$ , должна располагаться на носителе шкалы  $u_3$ , а полюсное расстояние  $z_2$  откладывается вдоль носителя шкалы  $u_1$ .

Найдем положение критических точек  $A$  и  $B$ . Из чертежа (фиг. 39) видно, что  $v_1 = A_0A = A_1A - A_1A_0$  или

$$v_1 = g_1 - \frac{f_1(u_1)_1}{a_1}. \quad (17.5)$$

Если полученная при вычислении по этой формуле величина  $v$  получится положительной, то она откладывается вверх от опорной линии, если же отрицательной, то вниз.

Точно так же  $v_3 = B_0B = B_0B_1 + B_1B$  или

$$v_3 = g_3 + \frac{f_3(u_3)_1}{a_3}.$$

Соединив точки  $A$  и  $B$ , можно бы получить носитель шкалы переменной  $u_2$ . Но так как может оказаться, что точки  $A$  и  $B$  не помещаются в поле чертежа, необходимо уметь построить носитель этой шкалы, не имея точек  $A$  и  $B$ . Найдем длину этой шкалы. Из фиг. 39 видно, что  $AB = \sqrt{(AB')^2 + (B'B)^2}$  или, заменяя, получим

$$d = \sqrt{l^2 + (v_1 + v_3)^2}.$$

Положение носителя шкалы переменной  $u_2$  в поле чертежа определится, если будут известны: точка  $D_0$ , пересечения носителя шкалы с опорной линией  $OO'$  и угловой коэффициент  $k$  носителя шкалы, определяемый углом  $BD_0B_0$ . Точка  $D_0$  называется *осевой точкой* наклонной шкалы.

Из подобия треугольников  $AA_0D_0$  и  $D_0BB_0$  находим расстояние  $e$  точки  $D_0$  от первой шкалы

$$e = \frac{v_1}{v_1 + v_3} l. \quad (17.6)$$

Наклон шкалы переменной  $u_2$  к опорной линии  $OO'$  определяется из

$$k = \operatorname{tg} \beta = \frac{v_1 + v_3}{l} \quad (17.7)$$

и уравнение носителя шкалы переменной  $u_2$  будет

$$y = \frac{v_1 + v_3}{l} x - v_1, \quad (17.8)$$

где абсцисса  $x$  отсчитывается от начала координат, находящегося в точке пересечения опорной линии  $OO'$  с носителем шкалы функции  $f_1(u_1)$ .

Положение концов шкалы переменной  $u_2$ , отвечающих предельным значениям этой переменной, может быть найдено на пересечении носителя шкалы с крайними положениями разрешающих прямых  $A_1B_2$  и  $A_2B_1$ . Было бы несложно дать аналитические выражения для координат этих точек, но их можно проще получить путем графического построения, тем более, что знание этих точек и не требуется для выполнения градуирования шкалы.

Перейдем к построению шкалы  $u_2$ . Проведем разрешающую прямую  $KL$  и установим зависимость между отрезками, отсекаемыми ею на шкалах переменных. Обозначим длины отрезков, отсекаемых на шкалах переменных  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ , через  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  соответственно; обозначим расстояние начала шкалы переменной  $u_2$  от нулевой критической точки  $B$  через  $v_2$ .

Из подобия треугольников  $AKM$  и  $BLM$  получаем уравнение геометрической связи

$$\frac{v_1 + g_1 + y_1}{v_3 - g_3 + y_3} = \frac{d - v_2 - y_2}{v_2 + y_2}. \quad (17.9)$$

В левой части этого выражения стоят длины отрезков шкал функции  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$ , отсчитанные от начала шкал до пометок, отсекаемых разрешающей прямой. Очевидно, что эти отрезки равны значениям функции в данной точке, деленным на коэффициенты шкал, т. е.

$$v_1 + g_1 + y_1 = \frac{f_1(u_1)}{a_1} \quad \text{и} \quad v_3 - g_3 + y_3 = \frac{f_3(u_3)}{a_3}.$$

Подставив эти значения в (17.9) и преобразовав выражение, получим

$$v_2 + y_2 = \frac{\frac{f_3(u_3)}{a_3} d}{\frac{f_3(u_3)}{a_3} + \frac{f_1(u_1)}{a_1}}. \quad (17.10)$$

Умножая числитель и знаменатель правой части этого уравнения на  $\frac{a_3}{f_1(u_1)}$  и заменив отношение функции, на основании (17.4) получим уравнение наклонной шкалы

$$y_2 = \frac{f_2(u_2) d}{f_2(u_2) + \frac{a_3}{a_1}} - v_2. \quad (17.11)$$

Если шкала начинается в нулевой критической точке  $B$ , то  $z_2 = 0$ , и уравнение шкалы принимает вид

$$y_2 = \frac{f_2(u_2) d}{f_2(u_2) + \frac{a_3}{a_1}}. \quad (17.12)$$

Как и следовало ожидать, получено уравнение проективной шкалы; она может быть построена путем проективного преобразования шкалы функции  $f_2(u_2)$ . Сравнивая это выражение с найденным ранее уравнением (2.7) внутренней проективной шкалы, находим

$$\frac{a_3}{a_1} = a_2 z_2. \quad (17.13)$$

Но из (2.9) следует, что  $a_2 z_2 = -p_2$ ; подставляя это выражение в (17.13), получаем

$$a_1 p_2 = -a_3, \quad (17.14)$$

т. е. коэффициент  $a_3$  шкалы произведения функции равен произведению коэффициента  $a_1$  вертикальной шкалы функции первого множителя и параметра преобразования  $p_2$  внутренней наклонной шкалы функции второго множителя, взятому с обратным знаком.

В случае, если вместо рассмотренного уравнения с тремя переменными имелось бы звено, полученное в результате разъединения переменных уравнений со многими переменными, т. е. первое уравнение системы (17.2)  $f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) = \rho_1$ , то полученные выводы не должны изменяться. Для единства символов необходимо обозначить коэффициент шкалы вспомогательной переменной  $\rho_1$  через  $r_1$ . Переписав (17.14), получим

$$a_1 p_2 = -r_1. \quad (17.15)$$

Точно так же для второго звена уравнения системы (17.2)  $\rho_1 \cdot f_3(u_3) = \rho_2$ , которым было заменено заданное уравнение (17.1), следует написать

$$r_1 p_3 = -r_2.$$

Здесь перед  $r_2$  также поставлен знак минус, чтобы показать, что и этот коэффициент шкалы имеет знак, противоположный знаку коэффициента шкалы  $\rho_1$ . Подставляя это выражение в (17.15), получим для второго (четного) звена

$$a_1 p_2 p_3 = r_2. \quad (17.16)$$

Продолжая, записываем для третьего (нечетного) звена

$$a_1 p_2 p_3 p_4 = -r_3. \quad (17.17)$$

Отсюда видно, что, вводя в цепь номограмм внутренние наклонные шкалы, обладающие отрицательным значением параметра преобразования, необходимо каждый раз изменять знак коэффициента ответной функциональной шкалы.

Таким образом можно было бы написать значение коэффициента любой вертикальной шкалы произведения функции.

Подставляя (17.14) в (17.12), получаем окончательно уравнение шкалы переменной  $u_2$ .

$$y_2 = \frac{f_2(u_2)d}{f_2(u_2) - p_2}. \quad (17.18)$$

Это выражение полностью соответствует уравнению (2.10) внутренней проективной шкалы функции  $f_2(u_2)$  при параметре преобразования  $p_2$ , отсчитанному от нулевой критической точки.

### Цепные номограммы с внутренними делительными наклонными шкалами

Пусть требуется составить номограмму выражения

$$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = f_3(u_3). \quad (17.19)$$

Перепишем это уравнение таким образом

$$\frac{f_1(u_1)}{f_3(u_3)} = f_2(u_2). \quad (17.20)$$

Это выражение отличается от (17.4) тем, что здесь функции вертикальных шкал  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$  обменялись своими местами. Поэтому к этому случаю можно применить все выводы, сделанные в отношении рассмотренных ранее номограмм, служащих для произведения функции, если взаимно заменить вертикальные шкалы. Отсюда следует, что для номографирования частного двух функций необходимо расположить первичную шкалу, служащую для градуирования наклонной шкалы, на носителе шкалы  $f_1(u_1)$ ; поместить полюс наклонной шкалы на носителе шкалы  $f_3(u_3)$ ; совместить нулевую критическую точку наклонной шкалы с началом вертикальной шкалы  $f_1(u_1)$ . Номограммы с таким устройством наклонных шкал мы называем номограммами с *делительными* наклонными шкалами\*.

На основании сказанного составим выражения для коэффициента функциональной шкалы переменной  $u_3$ , заменив в выражении (17.14) индексы у величин, соответствующих вертикальным шкалам. Тогда получим

$$\frac{a_1}{p_2} = -a_3, \quad (17.21)$$

т. е. коэффициент  $a_3$  шкалы частного двух функций равен частному от деления коэффициента  $a_1$  вертикальной шкалы функции делимого на параметр преобразования  $p_2$  внутренней делительной наклонной шкалы функции делителя, взятому с обратным знаком.

Полученный вывод представляет собой основное отношение для функции частного.

\* Таким образом, делительная шкала является перевернутой по отношению к множительной шкале. Перевертывание наклонной шкалы для деления функции параллелизуется с перевертыванием делителя при действиях с дробями.

В случае номограммы со многими переменными вида

$$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2) \cdot f_3(u_3) \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1})} = f_n(u_n) \quad (17.22)$$

этот вывод для первого звена запишется так

$$\frac{a_1}{p_2} = -r_1.$$

Повторяя рассуждения, которые позволили от (17.15) перейти к (17.17), найдем для второго (четного) звена

$$\frac{a_1}{p_2 p_3} = r_2,$$

для третьего (нечетного) звена

$$\frac{a_1}{p_2 p_3 p_4} = -r_3$$

и т. д.

Таким образом, в каждом случае введение в цепь номограммы звеньев с внутренними наклонными шкалами, обладающими отрицательными значениями параметров преобразования, приводит к изменению знака коэффициента шкалы.

Уравнение проективной шкалы переменной  $u_2$  остается в прежнем виде (17.18); оно отсчитывается от нулевой критической точки, сливающейся с начальной точкой функциональной шкалы переменной  $u_1$ .

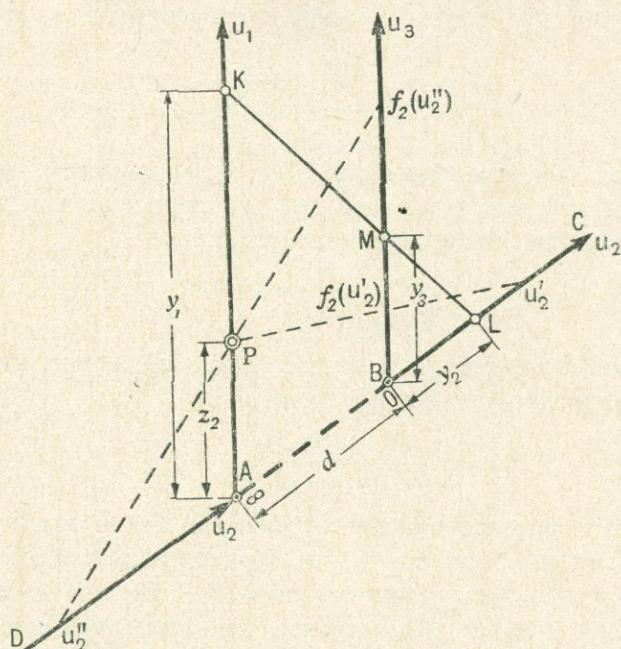
#### Цепные номограммы с внешними множительными наклонными шкалами

Для номографирования уравнений, представляющих собой произведение функции, могут служить также номограммы с внешними наклонными шкалами. Эти номограммы содержат две вертикальные, направленные в одну сторону, функциональные шкалы функции  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$ , и одну внешнюю наклонную шкалу функции  $f_2(u_2)$ , бесконечная критическая точка которой сливается с началом шкалы  $f_1(u_1)$ , а нулевая точка с началом шкалы  $f_3(u_3)$  (фиг. 38).

Общий вид номограммы с внешней наклонной шкалой показан на фиг. 40. Вертикальные шкалы  $u_1$  и  $u_3$  направлены в одну сторону. Наклонная шкала  $u_2$  распадается на два участка: расходящаяся шкала  $BC$  для значений функции  $0 < f_2(u_2) < p_2$  и сходящаяся шкала  $DA$  для значений функции  $p_2 < f_2(u_2) < \infty$ .

Ответная шкала функции зависимой переменной  $f_3(u_3)$  (или немая шкала вспомогательной переменной  $p_1$  в случае уравнения со многими переменными) располагается между шкалами функции независимых переменных  $u_1$  и  $u_2$ . Поэтому номограммы с внешними наклонными шкалами обладают внутренним пересечением разрешающих прямых, и, следовательно, крайние значения переменной определяются односторонними значениями переменных  $u_1$  и  $u_2$ .

Для получения уравнения геометрической связи проведем разрешающую прямую  $KL$ , отсекающую на шкалах переменных  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  отрезки  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  соответственно.



Фиг. 40

Из подобия треугольников  $AKL$  и  $BML$  имеем

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{y_2}{d + y_2} \quad (17.23)$$

Уравнения шкал функций  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$ , отсчитанные от начальных точек, запишутся так:

$$y_1 = \frac{f_1(u_1)}{a_1} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{f_3(u_3)}{a_3}.$$

Подставив эти значения в (17.23), получим

$$\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{f_3(u_3)}{f_1(u_1)} = \frac{y_2}{d + y_2}.$$

Умножив обе стороны заданного уравнения (17.4) на величину  $\frac{a_1}{a_3}$ , будем иметь

$$\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{f_3(u_3)}{f_1(u_1)} = \frac{a_1}{a_3} f_2(u_2).$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, видим, что для того, чтобы номограмма, представленная на фиг. 40 и характеризующая уравнением геометрической связи (17.23), могла служить для представления заданного уравнения (17.4), необходимо, чтобы имело место равенство



$$v_1 = -g_1 - \frac{f_1(u_1)}{a_1} \quad \text{и} \quad v_3 = -g_3 - \frac{f_3(u_3)_1}{a_3}.$$

Знак минус у опор получился вследствие того, что на чертеже (фиг. 41) начала шкал переменных  $u_1$  и  $u_3$  находятся ниже опорной линии  $OO'$ .

После того как обе вертикальные шкалы построены на произвольном расстоянии  $l$  друг от друга и найдено положение критических точек  $A$  и  $B$ , может быть построен носитель шкалы переменной  $u_2$ . Если критические точки  $A$  и  $B$  не помещаются на чертеже, то положение этого носителя может быть найдено независимым путем по положению осевой точки  $D_0$  и угловому коэффициенту  $k = \operatorname{tg} \beta$ .

Из чертежа (фиг. 41) видно, что длина наклонной шкалы  $AB = \sqrt{(AA')^2 + (A'B)^2}$  или, заменяя, получаем

$$d = \sqrt{(v_1 - v_3)^2 + l^2}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников  $AA_0D_0$  и  $AA'B$  находим расстояние  $e$  осевой точки  $D_0$  от носителя шкалы  $u_1$

$$e = \frac{v_1}{v_1 - v_3} l.$$

Угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} \beta$  равен

$$k = \frac{v_1 - v_3}{l}$$

и уравнение носителя шкалы переменной  $u_2$  будет

$$y = \frac{v_1 - v_3}{l} x - v_1,$$

где абсцисса  $x$  отсчитывается от начала координат, находящегося в точке пересечения опорной линии  $OO'$  с носителем шкалы функции  $f_1(u_1)$ .

Для градуирования шкалы переменной  $u_2$  необходимо построить первичную шкалу функции  $f_2(u_2)$  на носителе шкалы  $f_3(u_3)$ , а затем спроектировать ее из полюса  $P$ , находящегося на носителе шкалы  $f_1(u_1)$  (фиг. 40).

Подставляя в выражение параметра преобразования этой шкалы (17.24) его значение, согласно (2.6) получаем

$$a_2 z_2 = \frac{a_3}{a_1}.$$

Отсюда устанавливается величина полюсного расстояния  $z_2$  проективной шкалы переменной  $u_2$  в зависимости от коэффициентов вертикальных шкал функции  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$  и коэффициента первичной шкалы функции  $f_2(u_2)$ .

Переписывая (17.24), находим

$$a_1 p_2 = a_3, \quad (17.26)$$

т. е. коэффициент  $a_3$  шкалы произведения функции равен произведению коэффициента  $a_1$  вертикальной шкалы функции одного множителя на

параметр преобразования  $p_2$  внешней наклонной шкалы функции другого множителя.

Если вместо рассмотренного уравнения с тремя переменными имелись бы звенья, полученные в результате разъединения переменных уравнения со многими переменными, (уравнение 17.2), то, действуя вышеуказанным методом, получился бы такой ряд формул:

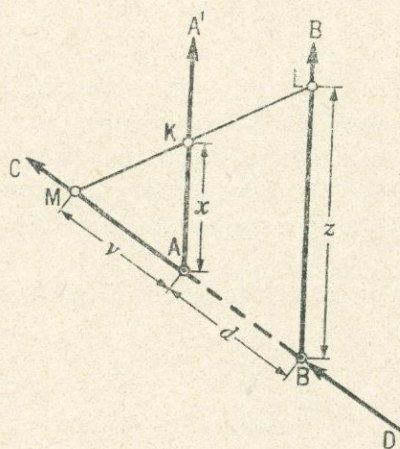
$$\text{для первого звена} \quad a_1 p_2 = r_1;$$

$$\text{для второго звена} \quad a_1 p_2 p_3 = r_2.$$

Заметим, что если шкала переменной  $u_1$  направлена вверх, как это сделано на фиг. 40, то коэффициенты шкал  $r_1, r_2 \dots$  вспомогательных переменных в номограммах с внешними наклонными шкалами являются положительными величинами, в соответствии со знаками коэффициента шкалы  $a_1$  и параметров преобразования  $p_2, p_3 \dots$

### Цепные номограммы с внешними делительными наклонными шкалами

Рассмотрим теперь номограмму с внешней делительной наклонной шкалой, служащую для представления уравнения (17.19), а затем сделаем общие выводы. Такая номограмма представлена на фиг. 42. Как указывалось, нулевая критическая точка наклонной шкалы сливается с началом вертикальной шкалы  $f_1(u_1)$ .



Фиг. 42

Повторяя рассуждения, которые позволили заменить уравнение (17.19) уравнением (17.20), находим, что и к данному случаю можно применить все выводы, сделанные в отношении внешних множительных шкал, если взаимно заменить вертикальные шкалы переменных  $u_1$  и  $u_3$ . Это позволяет составить выражение для коэффициентов функциональной шкалы переменной  $u_3$ , заменив в уравнении (17.24) индексы у величин, соответствующих вертикальным шкалам; отсюда получаем

$$\frac{a_1}{p_2} = a_3, \quad (17.27)$$

т. е. коэффициент  $a_3$  шкалы частного двух функций равен частному от деления коэффициента  $a_1$  вертикальной шкалы функции делимого на параметр преобразования  $p_2$  внешней делительной наклонной шкалы функции делителя.

Распространяя полученный вывод на номограммы, служащие для представления уравнения со многими переменными вида (17.22), получаем

$$\frac{a_1}{p_2 p_3 \cdot \cdot \cdot p_{n-1}} = a_n .$$

На основании всего изложенного в отношении номограмм с наклонными шкалами может быть сформулирована

**Теорема 3 о коэффициенте шкалы произведения (частного) функции .**

Коэффициент шкалы произведения (частного) функции равен произведению (частному) коэффициента вертикальной шкалы первой функции независимой переменной на параметры преобразования всех проективных множительных (делительных) наклонных шкал остальных функций независимых переменных. Так, для уравнения цепной номограммы (17.1) можно написать

$$a_1 \frac{p_2 p_3 \cdot \cdot \cdot p_{n-1}}{p_4 p_5 \cdot \cdot \cdot p_{n-1}} = a_n . \quad (17.28)$$

Знак результата зависит от знаков, входящих в формулу величин, а именно, знак вертикальной *прямой* шкалы *положительный*, а обратной—*отрицательный*; знак параметра преобразования *внешней* наклонной шкалы *положительный*, а *внутренней*— *отрицательный*.

**Расчетные формулы для шкалы произведения (частного) функции**

В дополнение к уравнению (17.28) дадим сводку формулировок и уравнений для расчета шкалы произведения (частного) функции, применительно к уравнению (17.1).

1. Наибольшее значение произведения (частного) функции равно произведению (частному) наибольших значений множительных и наименьших значений делительных функций независимых переменных

$$f_n(u_n)_2 = f_1(u_1)_2 \frac{f_2(u_2)_2 \cdot f_3(u_3)_2 \cdot \cdot \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_2}{f_4(u_4)_1 \cdot f_5(u_5)_1 \cdot \cdot \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_1} .$$

2. Наименьшее значение произведения (частного) функции равно произведению (частному) наименьших значений множительных и наибольших значений делительных функций независимых переменных

$$f_n(u_n)_1 = f_1(u_1)_1 \frac{f_2(u_2)_1 \cdot f_3(u_3)_1 \cdot \cdot \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_1}{f_4(u_4)_2 \cdot f_5(u_5)_2 \cdot \cdot \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_2} .$$

3. Интервал произведения (частного) функции равен разности наибольшего и наименьшего значений произведения (частного) функции

$$A_n = f_n(u_n)_2 - f_n(u_n)_1 .$$

4. Длина шкалы функции независимой переменной равна отношению интервала функции к коэффициенту шкалы, т. е.

$$h_n = \frac{A_n}{a_n} .$$

5. Уравнение шкалы произведения функции равно отношению разности функции и ее наименьшего значения к коэффициенту шкалы, т. е.

$$y_n = \frac{f_1(u_n) - f_n(u_n)_1}{a_n}$$

Все эти выводы непосредственно вытекают из изложенного и их доказательство не представляет труда.

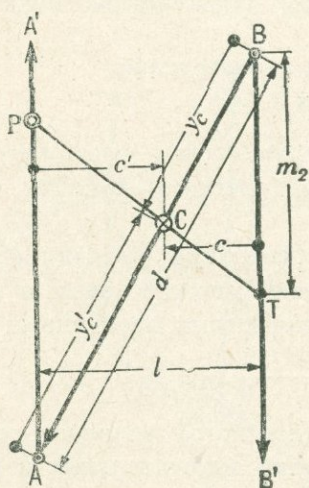
### Центр номограммы

Проведем луч  $PT$  от полюса  $P$  к той точке  $T$  первичной шкалы функции  $f_2(u_2)$ , в которой значение этой функции делается равным единице (фиг. 43),  $f_2(u_2)_c = 1$ ; тогда отрезок  $BT$  составит

$$BT = \frac{f_2(u_2)_c}{a_2} = \frac{1}{a_2} = m_2, \quad (17.29)$$

т. е. численно равняется модулю первичной шкалы  $f_2(u_2)$ . Согласно определению, луч  $PT$  пересекает наклонную шкалу в точке  $C$ , являющейся центром проективной шкалы. Точку  $C$  мы называем *центром номограммы*. Так как пометки точек на лучах совпадают, то отсюда следует, что пометка  $(u_2)_c$  центра  $C$  номограммы на наклонной шкале может быть получена из условия  $f_2(u_2)_c = 1$ .

Если функция  $f_2(u_2)$  равна аргументу  $u_2$ , что в инженерных расчетах случается очень часто, то пометка точки  $T$  равняется единице. Таковую же пометку имеет в этом случае центр номограммы.



Фиг. 43

Установим положение центра  $C$  номограммы. В случае номограммы с внутренней наклонной шкалой (фиг. 43), в подобных треугольниках  $APC$  и  $BCT$  отношение соответственных сторон равно отношению высот. На этом основании пишем

$$\frac{y'_c}{y_c} = \frac{c'}{c}, \quad (17.30)$$

где  $c$  и  $c'$  — направленные отрезки, равные проекциям расстояний центра проективной шкалы от нулевой и бесконечной критических точек соответственно. На основании (2.35) переписываем последнее выражение

$$p_2 = \frac{c'}{c}. \quad (17.31)$$

Такое же выражение можно написать и для номограммы с внешней наклонной шкалой. В отношении знака параметра преобразования см. § 2 (стр. 42).

Из уравнений (17.30) и (17.31) видно, что величина параметра преобразования равна отношению расстояния  $c'$  от центра номограммы

до той вертикальной шкалы, на которой расположена бесконечная критическая точка  $A$ , к расстоянию  $c$  до той вертикальной шкалы, на которой расположена нулевая критическая точка  $B$ . Отсюда следует, что в случае множительных наклонных шкал берется отношение расстояния от центра номограммы до первой шкалы звена к расстоянию от этого центра до третьей шкалы, а в случае делительных наклонных шкал—наоборот.

Подставив в (17.31) значение параметра преобразования из (17.21) для внутренних шкал и (17.27) для внешних шкал получаем для любых множительных шкал

$$a_1 c' = a_3 c.$$

Аналогично, для любых делительных шкал получим

$$a_1 c = a_3 c'.$$

Произведения, стоящие в обеих сторонах двух последних выражений, являются моментами коэффициентов вертикальных шкал относительно центра номограммы. Отсюда следует, что в любых видах номограмм с наклонными шкалами моменты коэффициентов вертикальных шкал относительно центра номограммы равны друг другу по величине и по направлению.

В номограммах с внутренними наклонными шкалами центр номограммы находится между вертикальными шкалами. В номограммах с внешними наклонными шкалами центр номограммы находится на начальном, расходящемся участке, если  $p_2 > 1$ , и на конечном, сходящемся участке, если  $p_2 < 1$ ; наконец, если  $p_2 = 1$ , то центр номограммы удален в бесконечность.

Описанные выше свойства центра номограммы имеют известный практический интерес. На номограммах с наклонными шкалами не показаны ни первичная шкала, служившая для градуирования, ни полюс наклонной шкалы; часто не имеется и критических точек. В этом случае трудно определить параметр преобразования такой шкалы. На основании соотношения (17.31) это делается довольно просто. По заданному уравнению  $f_2(u_2)$  устанавливается такое значение переменной  $u_2$ , при котором значение функции равнялось бы единице. Точка с этой пометкой является центром номограммы. Измерив расстояние от этой точки до соответствующих вертикальных шкал, находим параметр преобразования из отношения этих величин.

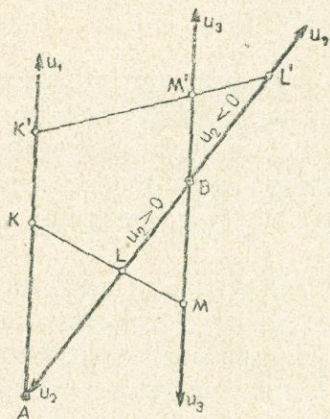
### Номограмма с внутренней и внешней шкалами

В некоторых случаях инженерной практики значение одной из переменных уравнений (17.3) или (17.19) колеблется около нуля, принимая небольшие по абсолютной величине положительные и отрицательные значения. В этих случаях целесообразно сочетание внутренней и внешней шкал на одной номограмме. Тогда на одной из шкал (например внутренней) откладываются положительные значения переменной  $u_2$ , а на другой (соответственно внешней)—отрицательные. Схема такой номограммы показана для случая множительных шкал

на фиг. 44. При положительных значениях  $u_2$  будем иметь номограмму с внутренней наклонной шкалой (разрешающая прямая  $KLM$ ), а при отрицательных—с внешней (разрешающая прямая  $K'L'M'$ ). Аналогично можно строить такие номограммы и для случая делительных шкал. В этом случае должны быть продлены за нулевую точку в отрицательную область шкалы  $u_1$  и  $u_2$ .

### Номограммы уравнений с постоянными множителями

В заключение необходимо сделать одно замечание: теорема о коэффициенте шкалы произведения (частного) функции имеет в виду, что



Фиг. 44

номографируемое уравнение состоит из двух элементов, один из которых умножается или делится на другой. Если номографируемое уравнение содержит также и постоянные коэффициенты, то они должны рассматриваться совместно с одним из элементов.

Пусть задано уравнение

$$A f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) = f_3(u_3),$$

где  $A$ —действительное число.

Это число можно ввести в виде множителя в каждую из трех функций уравнения. Нетрудно видеть, что это равносильно градуированию соответственных шкал при новых графических параметрах, связь которых с расчетными параметрами нетрудно установить.

Так, вводя  $A$  в первую функцию, необходимо градуировать шкалу  $f_1(u_1)$  при графическом коэффициенте шкалы

$$a_1' = \frac{a_1}{A}. \quad (17.32)$$

Вводя величину  $A$  во вторую функцию, строим наклонную шкалу  $f_2(u_2)$  при графическом параметре преобразования

$$p_2' = \frac{p_2}{A}.$$

Наконец, вводя эту величину в третью функцию, градуируем шкалу этой функции при графическом коэффициенте шкалы

$$a_3' = A a_3.$$

Отсюда заключаем, что один и тот же результат может быть достигнут, сделав градуировку шкалы множимого более мелкой (крупной) или шкалу произведения более крупной (мелкой). Пример расчета номограммы приведен в конце следующего параграфа.

## Механическая модель цепных номограмм с наклонными шкалами

Описанные выше простые соотношения между характеристиками различных шкал номограмм с наклонными шкалами позволяют создать простую механическую модель, наглядно иллюстрирующую эти соотношения.

Механической моделью проективной шкалы является спаренная шестерня, с одинаковым шагом зубьев\*, насаженная на ось, проходящую через центр шкал. Радиусы начальных окружностей этой шестерни равны расстояниям от центра шкалы до критических точек.

Механической моделью функциональных шкал является зубчатая рейка с тем же самым шагом зубьев, направленная вдоль носителей вертикальных шкал. Как и в установленной ранее статической аналогии цепных номограмм с параллельными шкалами, коэффициенты функциональных шкал моделируются силами.

Механической моделью номограммы с наклонной шкалой является система, состоящая из зубчатой рейки, заменяющей функциональную вертикальную шкалу множимой или делимой функции; спаренной зубчатой шестерни, заменяющей наклонную проективную шкалу множителя или делителя; и второй зубчатой рейки, заменяющей вертикальную функциональную шкалу произведения или частного. Таким образом, градуированные вертикальные шкалы моделируются зубчатыми рейками, катящимися без скольжения по соответствующим зубчатым колесам, моделирующим наклонные проективные шкалы.

Передаточный эффект любого механизма «по скорости» является обратным передаточному эффекту «по силе»\*\* (в силу закона сохранения энергии, работа, равная произведению силы на путь в единицу времени, т. е. на скорость, должна быть постоянной). Так как рассматриваемая механическая модель служит для преобразования сил, поэтому будем принимать в расчет только ее передаточный эффект, который, как видно из сказанного, является обратным передаточному отношению. Передаточный эффект модели равняется параметру преобразования наклонной шкалы.

На фиг. 45 а показана номограмма с внутренней наклонной шкалой, а на фиг. 45 б ее механическая модель. Так как в номограммах с на-

\* Ниже приводятся определения некоторых терминов, относящихся к геометрии зацепления цилиндрических зубчатых колес.

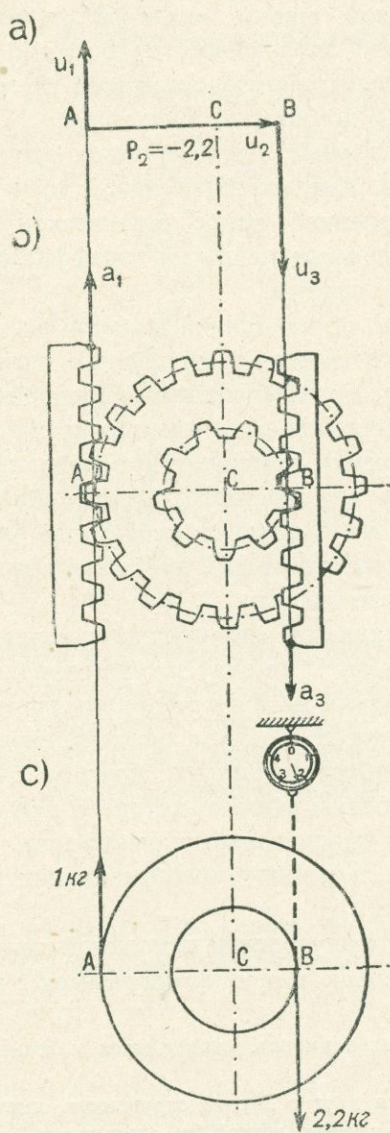
Начальные окружности—соприкасающиеся друг с другом окружности, имеющие общие оси с зубчатыми колесами и катящиеся одна по другой без скольжения.

Полюс зацепления—точка касания начальных окружностей сопряженной пары зубчатых колес.

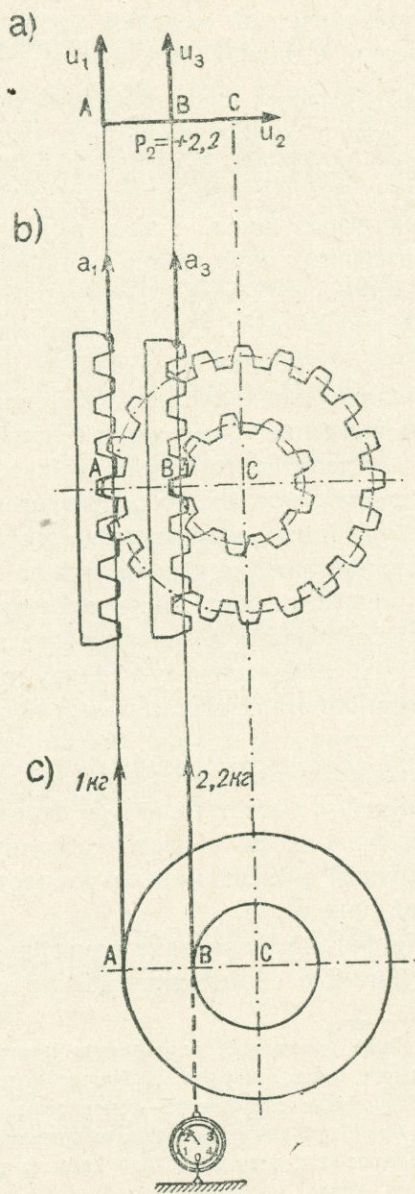
Передаточное отношение—отношение скорости ведущего звена механизма к скорости ведомого звена; для цилиндрической зубчатой пары передаточное число равняется отношению числа зубьев ведомого колеса к числу зубьев ведущего колеса.

\*\* В дальнейшем мы применяем выражение «передаточный эффект» для обозначения передаточного отношения «по силе».

лонными шкалами величина угла наклона шкалы не играет роли, го наклонная шкала на фиг. 45 а образует прямые углы с вертикальными шкалами. На номограмме показаны нулевая и бесконечная критические точки  $A$  и  $B$ , и центр номограммы  $C$ , и написана величина параметра преобразования. На механической модели (фиг. 45 б) показан центр спаренных шестерен  $C$  и радиусы начальных окружностей  $CA$  и  $CB$ ;



Фиг. 45



Фиг. 46

соотношение между силами, приложенными к зубчатым рейкам, показывает передаточный эффект модели; он равен параметру преобразования наклонной шкалы номограммы.

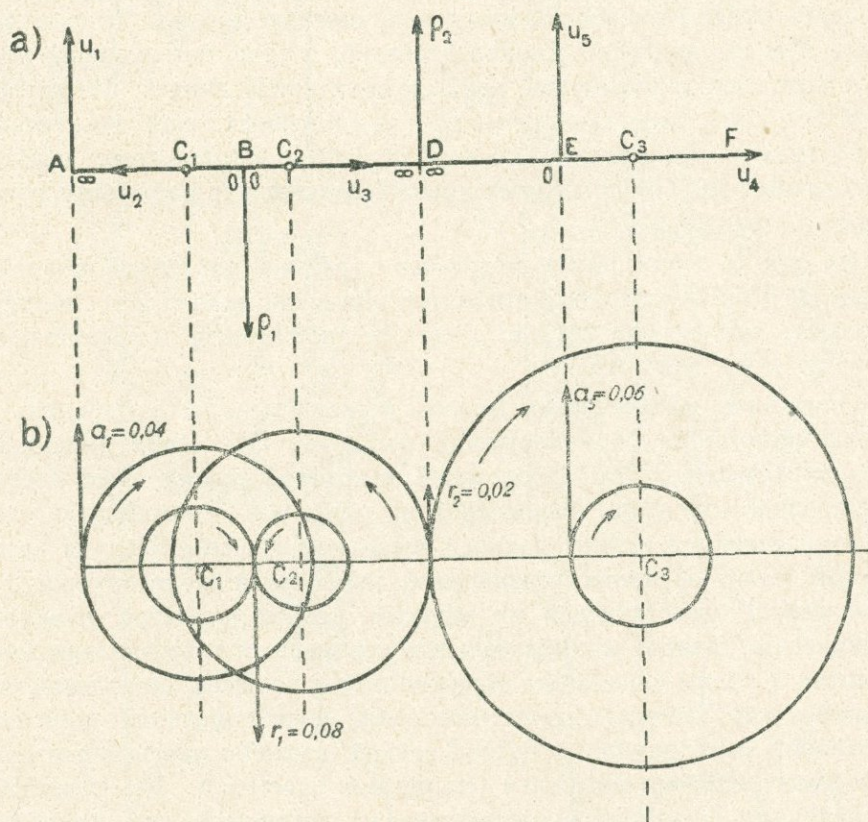
Описанная механическая модель имеет то преимущество, что зубчатые рейки могут работать как на растяжение, так и на сжатие, и поэтому модель получается очень наглядной. Однако для упрощения механизма можно представить себе модель (фиг. 45 с), состоящую из спаренных цилиндрических колес—шкивов (наклонная шкала) и навитых на них тросов, через которые прилагаются усилия (функциональные шкалы). Такую модель удобно рассматривать в равновесном состоянии; поэтому последний шкив должен быть закреплен, а усилие в тросе (реакция) будет равно по величине и обратно по знаку результирующему усилию системы. Вследствие этого направление троса в последнем звене будет противоположным направлению шкалы. На фиг. 45 с усилие в ободке показано жирной стрелкой, а трос, измеряющий реакцию с помощью динамометра, показан пунктирной линией. Из фиг. 45 с видно, что силы, действующие на шкивы спаренных колес, по величине и по направлению моделируют коэффициенты вертикальных шкал, а передаточный эффект спаренных колес соответствует параметру преобразования наклонной шкалы.

На фиг. 46 а показана номограмма с внешней наклонной шкалой, а на фиг. 46 б и с —соответствующие механические модели. Эти чертежи построены аналогично фиг. 45 и для их понимания дополнительных объяснений не требуется.

Описанная механическая модель может быть распространена на цепную номограмму с наклонными шкалами. Последняя заменяется многоступенчатой зубчатой передачей, в которой каждое звено состоит из спаренной шестерни, насаженной на одну ось, проходящую через центр проективной шкалы данного звена номограммы. Первая вертикальная шкала функции независимой переменной моделируется зубчатой рейкой, действующей на ведущее колесо зубчатой передачи: вертикальные шкалы вспомогательных переменных представлены касательными к обеим начальным окружностям в полюсах зацеплений сопряженных пар зубчатых колес; последняя шкала функции зависимой переменной модулируется зубчатой рейкой, воспринимающей движение от ведомого колеса последней спаренной шестерни. Коэффициенты вертикальных шкал будут соответствовать величинам сил, приложенных к зубчатым рейкам, а параметры преобразования наклонных шкал—передаточным эффектам «по силе», обратным обычно применяемым передаточным отношениям «по скорости».

Упрощенная механическая модель цепной номограммы с наклонными шкалами представляет собой многоступенчатую фрикционную передачу, состоящую из спаренных цилиндрических колес, для каждого звена номограммы. Эти спаренные колеса насажены на оси, проходящие через центры звеньев. Соответствующие колеса соседних звеньев катятся без скольжения друг по другу. Не находящиеся в контакте цилиндрические колеса первого и последнего звена представляют собой шкивы, на которые навиты тросы.

Коэффициенты шкалы первой функции независимой переменной соответствуют усилию, сообщаемому модели тросом первого шкива, параметры преобразования шкал остальных функций независимых переменных соответствуют передаточным эффектам спаренных цилиндров «по силе», коэффициенты шкал вспомогательных переменных изображаются касательными усилиями, передающимися благодаря трению от одного цилиндра к другому, а коэффициент шкалы функции независимой переменной равен по величине и обратен по знаку реактивному усилию в тросе последнего шкива, удерживающему всю систему в равновесии.



Фиг. 47

На фиг. 47 а показана схема номограммы, содержащей одно звено с внутренней множительной наклонной шкалой  $AB$ , одно звено с внутренней делительной наклонной шкалой  $BD$  и одно звено с внешней множительной наклонной шкалой  $EF$ . Эта номограмма служит для представления уравнения

$$\frac{f_1(u_1) \cdot f_2(u_2)}{f_3(u_3)} f_4(u_4) = f_5(u_5). \quad (17.33)$$

В каждом звене показаны положения критических точек (0 и  $\infty$ ) и центры звеньев номограммы  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ ; стрелки показывают направление шкал. Коэффициент шкалы  $f_1(u_1)$  равняется  $\alpha_1 = 0,04 \text{ см}^{-1}$  (пря-

мая шкала); параметры преобразования остальных шкал, согласно чертежу, составляют

$$p_2 = \frac{AC_1}{BC_1} = -2; \quad p_3 = \frac{DC_2}{BC_2} = -4; \quad p_4 = \frac{DC_3}{EC_3} = +3.$$

Отсюда по формуле (17. 28) находим коэффициент шкалы  $u_5$

$$a_5 = \frac{0,04 \cdot (-2)}{-4} 3 = 0,06 \text{ см}^{-1},$$

т. е. прямая шкала с коэффициентом  $0,06 \text{ см}^{-1}$ .

Механическая модель этой номограммы показана на фиг. 47 в. Ее устройство понятно из чертежа и объяснений не требует.

Действие механической модели однозначно определяется взаимным расположением спаренных колес, т. е. геометрической структурой цепной номограммы. Независимо от того как размещены критические точки на наклонных шкалах, иными словами, являются ли эти шкалы множительными или делительными, соотношение между силами, приложенными к модели, будет одним и тем же. Так, например, если сделать наклонную шкалу второго звена номограммы множительной, поменяв положения критических точек 0 и  $\infty$ , но оставив неизменным центр  $C_2$  звена номограммы, то параметр преобразования составит

$$p_2 = \frac{BC_2}{DC_2} = -\frac{1}{4}.$$

Соответственно заменяем заданное уравнение таким

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot f_3(u_3) \cdot f_4(u_4) = f_5(u_5).$$

По формуле (17. 28) находим для данного случая

$$a_5 = 0,04 (-2) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3 = 0,06 \text{ см}^{-1},$$

т. е. тот же результат, что и до произведенной замены. Таким образом, механическая модель остается неизменной, если не изменяется геометрическая структура номограммы.

Механическая модель номограммы может найти применение в качестве демонстрационных схем при изучении номографии и, возможно, в счетных устройствах.

## § 18. РАСЧЕТ И ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ С НАКЛОННЫМИ ШКАЛАМИ

### Состав номограммы

Покажем те практические приемы, которыми следует руководствоваться при расчете и построении цепных номограмм с наклонными шкалами. Для возможности составления цепной номограммы заданное уравнение (17.1) со многими переменными должно быть разьединено

и заменено эквивалентной системой уравнений (17.2) с тремя переменными в каждом.

Первое звено содержит две градуированные и одну немую шкалы. Градуированными являются вертикальная шкала для первой функции независимой переменной  $f_1(u_1)$  и наклонная шкала для второй функции  $f_2(u_2)$ . Немой является вертикальная шкала вспомогательной переменной  $\rho_1$ .

Второе и все последующие (кроме последнего) звенья содержат по две вертикальные, параллельные немые шкалы для вспомогательных переменных и по одной наклонной градуированной шкале для очередной функции независимой переменной. Последнее звено содержит одну вертикальную шкалу для последней вспомогательной переменной, одну наклонную шкалу для последней заданной функции независимой переменной и одну вертикальную шкалу для функции зависимой переменной.

### Ход решения задачи

Для построения цепной номограммы с наклонными шкалами необходимо правильно рассчитать и целесообразно расположить все шкалы номограммы. Ввиду большого количества величин, выбор которых произволен, может получиться множество вариантов, ценность которых будет весьма различной. Удачное номографирование уравнения со многими переменными есть результат опыта, который приобретается со временем. Однако существует ряд способов, позволяющих рационально решить задачу, исходя из некоторых общих положений. Здесь изложен ход решения задачи и попутно указано на эти предпосылки. Многие из них не являются обязательными и, возможно, читатель сам найдет лучшие решения. Толкнуть его на эти поиски является одной из задач автора.

Расчет и построение цепной номограммы с наклонными шкалами будем производить в следующей последовательности:

1. Определение коэффициента функциональной шкалы первой функции независимой переменной.

2. Определение коэффициентов первичных шкал и определение параметров преобразования проективных шкал остальных функций независимых переменных.

2. Определение коэффициентов шкал и пределов вспомогательных переменных и функций зависимой переменной.

4. Установление положения критических точек и центрирование вертикальных шкал.

5. Установление расстояний между вертикальными шкалами и определение ширины номограммы.

6. Установление положения наклонных шкал и вычерчивание носителей всех шкал.

7. Построение вертикальных и наклонных шкал.

Расчет номограммы будем вести в табличной форме алгорифма, по своей схеме близкого к описанным выше для номограмм с параллельными шкалами (табл. 14). Рассмотрим последовательно перечисленные вопросы.

### **Определение коэффициента функциональной шкалы первой функции независимой переменной**

Выше, на ряде примеров номограмм с параллельными шкалами было показано то важное значение, которое имеет правильный выбор коэффициентов функциональных шкал. Не меньшее значение он имеет и для номограмм с наклонными шкалами.

При назначении величин коэффициента шкал первой функции (множимого или делимого) необходимо исходить из двух условий:

1) шкала должна иметь надлежащую длину, удовлетворяющую практическим требованиям, предъявляемым к ней при пользовании,

2) величина коэффициента шкалы должна быть такой, чтобы им было удобно пользоваться при построении шкалы и применить по возможности графические методы градуирования.

Шкала первой функции независимой переменной вертикальная и поэтому к ней применимы все те соображения, которыми следует руководствоваться при выборе коэффициентов шкал в номограммах с параллельными шкалами; они изложены в главе IV. Данные для шкалы  $f_1(u_1)$  вписываются в первую строку алгорифма (табл. 14).

### **Определение коэффициентов первичных шкал и параметров преобразования проективных шкал остальных функций независимых переменных**

Для наклонных шкал всех остальных функций независимых переменных вначале должны быть назначены коэффициенты первичных шкал и построены эти шкалы, затем найдены полюсные расстояния, с помощью которых эти первичные шкалы будут преобразованы в проективные, и, наконец, вычислены значения параметров преобразования. Однако целесообразно изменить этот порядок расчета.

Величина коэффициента первичной шкалы определяет собой длину первичной шкалы. Удобно, когда величина выбранного коэффициента первичной шкалы позволяет при ее построении воспользоваться методом копирования готовых шкал. Так как выбор таких шкал, вообще говоря, невелик, то обычно приходится довольствоваться одной из немногих доступных шкал, или строить первичную шкалу по ее уравнению, выбрав соответствующее округленное значение коэффициента шкалы.

Величина параметра преобразования определяет характер распределения пометок на проективной шкале, и поэтому имеет весьма существенное значение; характер распределения пометок должен быть таков, чтобы наилучшим образом отвечать целям номограммы. Эта величина является также расчетной характеристикой, определяющей параметры шкал вспомогательных переменных и функции зависимой переменной.

Согласно теореме (уравнение 17.28), значение коэффициента шкалы функции зависимой переменной получается в результате ряда простых математических действий, в которых участвуют значения параметров преобразования проективных шкал независимых переменных. Удобно, когда эти параметры имеют круглые значения; в этом случае обычно удается так подобрать их величины, чтобы коэффициент шкалы функции зависимой переменной имел также круглое значение, и для градуирования его шкалы можно было бы применить метод копирования готовых шкал.

Метод нахождения наилучшего значения параметра преобразования описан в § 4. Полученные округленные значения коэффициентов первичных шкал и параметров преобразования каждой наклонной шкалы вписываются в соответствующие столбцы 7 и 9 алгорифма (табл. 14). Знак параметра преобразования ставится в зависимости от того, при каком проектировании была получена наклонная шкала (плюс при внешнем проектировании и минус при внутреннем).

Все построения для определения параметров преобразования делаются для обоих случаев—умножения и деления функции совершенно одинаковым образом. Целью этих построений является только нахождение округленных значений параметров преобразования; эффект умножения или деления будет достигнут соответствующим расположением первичных шкал и полюсов наклонных шкал.

Таким образом, из трех связанных друг с другом величин,  $a$ ,  $p$  и  $z$ , необходимых для построения наклонных шкал, мы назначаем округленные значения двух величин  $a$  и  $p$ , и получаем вычислением значение третьей величины  $z$ . В § 4 было показано, что применением вспомогательных полюсов можно устранить неудобства, связанные с неудовлетворительной величиной полюсного расстояния.

#### Определение коэффициентов шкал и пределов вспомогательных переменных и функций зависимой переменной

После того как найдены параметры преобразования шкал заданных функций, можно определить коэффициенты шкал всех вспомогательных переменных на основании уравнения (17.28) и вписать их в соответствующий столбец 7 алгорифма. Знаки у этих коэффициентов в таблице должны определяться известным способом, в зависимости от знаков коэффициента  $a_1$  первой вертикальной шкалы и параметров преобразования наклонных шкал.

Далее определяем наименьшее и наибольшее значения функций независимых переменных, подставляя значения соответствующих пределов переменных в выражения функции, и вписываем в алгорифм (столбцы 5 и 6). Определение наибольшего и наименьшего значений вспомогательных переменных производится по соответствующим формулам, аналогичным номографируемому уравнению (17.1),

$$(p_i)_1 = f_1(u_1)_1 \frac{f_2(u_2)_1 \cdot f_3(u_3)_1 \cdot \dots}{f_4(u_4)_1 \cdot f_5(u_5)_1 \cdot \dots} f_{i+1}(u_{i+1})_1,$$

Алгоритм цепной номограммы с наклонными шкалами

Переменные	Функции	Пределы переменных		Значения функции		Коэффициенты первичных и вертикальных шкал	Полное расстояние	Параметры преобразования	Расстояние от нулевой критической точки до		Расстояние от нулевой критической точки до осевой линии	Длина первичных и вертикальных шкал	Расстояния от осевой линии до			Уравнения первичных и вертикальных шкал	Ширина звена	Расстояние осевой точки наклонной шкалы от начала звена	Угловой коэффициент посылки наклонной шкалы
		проксимальный	дистальный	наименьшее	наибольшее				начала вертикальной шкалы	конца вертикальной шкалы			начала первичной шкалы	конца первичной шкалы	полуса				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$u_1$	$f_1(u_1)$	$(u_1)_1$	$(u_1)_2$	$f_1(u_1)_1$	$f_1(u_1)_2$	$a_1$	—	—	$v_0'$	$v_0''$	$-v_0$	$h_1$	—	—	—	$y_1 = \frac{f_1(u_1) - f_1(u_1)_1}{a_1}$	—	—	—
$u_2$	$f_2(u_2)$	$(u_2)_1$	$(u_2)_2$	$f_2(u_2)_1$	$f_2(u_2)_2$	$-a_2$	$z_2$	$-p_2$	—	—	—	$-h_2$	$s_2'$	$s_2''$	$t_2'$	$y_2 = \frac{f_2(u_2) - f_2(u_2)_1}{a_2}$	$l_2$	$e_2$	$k_2$
$\rho_1$	$\rho_1$	—	—	$(\rho_1)_1$	$(\rho_1)_2$	$r_1$	—	—	$-v_1'$	$-v_1''$	$v_1$	—	—	—	—	—	—	—	—
$u_3$	$f_3(u_3)$	$(u_3)_1$	$(u_3)_2$	$f_3(u_3)_1$	$f_3(u_3)_2$	$a_3$	$z_3$	$-p_3$	—	—	—	$h_3$	$s_3'$	$s_3''$	$t_3'$	$y_3 = \frac{f_3(u_3) - f_3(u_3)_1}{a_3}$	$l_3$	$e_3$	$k_3$
$\rho_2$	$\rho_2$	—	—	$(\rho_2)_1$	$(\rho_2)_2$	$r_2$	—	—	$v_2'$	$v_2''$	$-v_2$	—	—	—	—	—	—	—	—
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$								
$\rho_{n-3}$	$\rho_{n-3}$	—	—	$(\rho_{n-3})_1$	$(\rho_{n-3})_2$	$\pm r_{n-3}$	—	—	$\pm v_{n-3}'$	$\pm v_{n-3}''$	$\pm v_{n-3}$	—	—	—	—	—	—	—	—
$u_{n-1}$	$f_{n-1}(u_{n-1})$	$(u_{n-1})_1$	$(u_{n-1})_2$	$f_{n-1}(u_{n-1})_1$	$f_{n-1}(u_{n-1})_2$	$-a_{n-1}$	$z_{n-1}$	$\pm p_{n-1}$	—	—	—	$\pm h_{n-1}$	$s_{n-1}'$	$s_{n-1}''$	$t_{n-1}'$	$y_{n-1} = \frac{f_{n-1}(u_{n-1}) - f_{n-1}(u_{n-1})_1}{a_{n-1}}$	$l_{n-1}$	$e_{n-1}$	$k_{n-1}$
$u_n$	$f_n(u_n)$	$(u_n)_1$	$(u_n)_2$	$f_n(u_n)_1$	$f_n(u_n)_2$	$a_n$	—	—	$v_n'$	$v_n''$	$v_n$	—	—	—	—	$y_n = \frac{f_n(u_n) - f_n(u_n)_1}{a_n}$	—	—	—

$$(\rho_1)_2 = f_1(u_1)_2 \cdot \frac{f_2(u_2)_2 \cdot f_3(u_3)_2 \cdot \dots \cdot f_{i+1}(u_{i+1})_2}{f_4(u_4)_2 \cdot f_5(u_5)_2 \cdot \dots \cdot f_{i+1}(u_{i+1})_2} \cdot \dots$$

При составлении алгоритма нужно последовательно умножать или делить пределы предыдущей вспомогательной переменной на предельные значения очередных функций независимых переменных, согласно структуре уравнения (17.1).

Тем же способом производится определение предельных значений функции зависимой переменной.

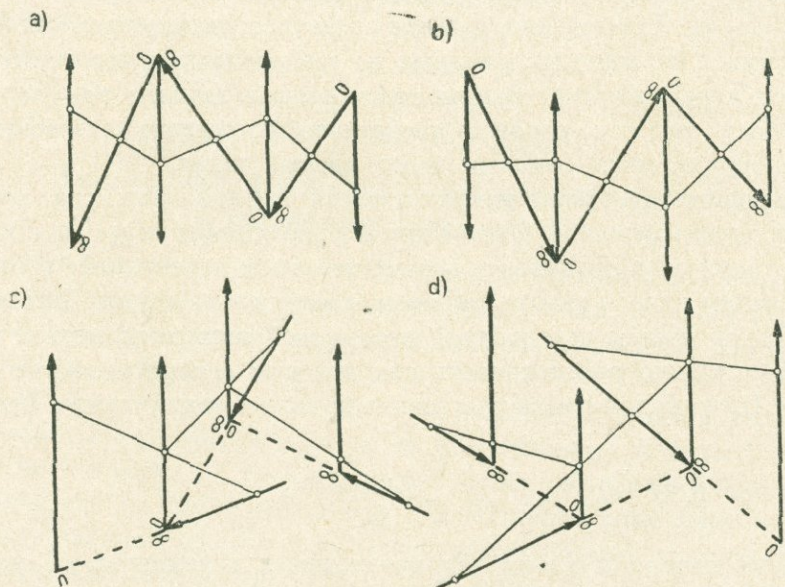
$$f_n(u_n)_1 = f_1(u_1)_1 \cdot \frac{f_2(u_2)_1 \cdot f_3(u_3)_1 \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_1}{f_4(u_4)_1 \cdot f_5(u_5)_1 \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_1}$$

$$f_n(u_n)_2 = f_1(u_1)_2 \cdot \frac{f_2(u_2)_2 \cdot f_3(u_3)_2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_2}{f_4(u_4)_2 \cdot f_5(u_5)_2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}(u_{n-1})_2}$$

Эти результаты вписываются в соответствующие столбцы 5 и 6 алгоритма. При записи данных следует обращать внимание на знаки этих величин.

### Установление положения критических точек и центрирование вертикальных шкал

В цепной номограмме с внутренними наклонными шкалами расположение носителей шкал напоминает схему стержней в раскосной металлической ферме с чередующимися восходящими и нисходящими раскосами.



Фиг. 48

Действительно, так как в таких номограммах вертикальные шкалы имеют различное направление, то отсюда следует, что начальные точки этих шкал попеременно располагаются то вверх, то вниз. Наклонные же шкалы всегда проводятся от одной начальной точки

вертикальных шкал к другой и располагаются внутри звеньев. Отсюда ясно, что если носитель наклонной шкалы в каком-либо звене является восходящим, то в обоих соседних звеньях носитель будет нисходящим (фиг. 48 а и б).

Расположение нулевой и бесконечной критических точек на наклонных шкалах последовательных звеньев определяется видом того действия (умножения или деления), которое должно быть произведено в данном звене. На фиг. 48 а показана схема цепной номограммы для умножения функций, а на фиг. 48 б—для их деления. Геометрическая структура обеих номограмм совершенно одинакова и различие заключается лишь в расположении критических точек наклонных шкал.

В цепной номограмме с внешними наклонными шкалами последние всегда располагаются вне звеньев. Так как начальные участки внешних наклонных шкал в интервале  $0 < f(u) < p$  являются расходящимися и не имеют практического значения, рассмотрим взаимное расположение вертикальных шкал конечных (сходящихся) участков наклонных шкал в интервале  $p < f(u) < \infty$ . На фиг. 48 с и d показаны схемы цепных номограмм с внешними делительными и множительными шкалами соответственно; они определяются расположением критических точек наклонных шкал.

Тонкие линии на всех четырех схемах (фиг. 48) показывают ход построения разрешающих прямых, а стрелки у шкал—их направления.

Установим положение критических точек шкал. Выше (§ 9) была показана необходимость центрирования шкал номограммы с параллельными шкалами. Естественно, что все сказанное распространяется и на номограммы с наклонными шкалами, за тем различием, что в этом случае будут центрироваться только вертикальные шкалы; это является достаточным, так как крайнее предельное положение разрешающих прямых определяется концами вертикальных шкал.

Определим расстояния начала и конца вертикальных шкал от критических точек (фиг. 49). Обозначим эти расстояния через  $v$  с индексом, соответствующим индексу вспомогательной переменной; кроме того, обозначим начало шкалы штрихом, а концы их—двумя. Для первой вертикальной шкалы независимой переменной применим индекс нуль, так как ее можно рассматривать как нулевую вспомогательную переменную. Тогда будем иметь расстояние начала и конца шкалы функции  $f_1(u_1)$

$$v_0' = \frac{f_1(u_1)_1}{a_1} \quad \text{и} \quad v_0'' = \frac{f_1(u_1)_2}{a_1}, \quad (18.1)$$

расстояние начала и конца вспомогательных переменных

$$v_i' = \frac{(p_i)_1}{r_i} \quad \text{и} \quad v_i'' = \frac{(p_i)_2}{r_i} \quad (18.2)$$

и, наконец, расстояние начала и конца функции зависимой переменной

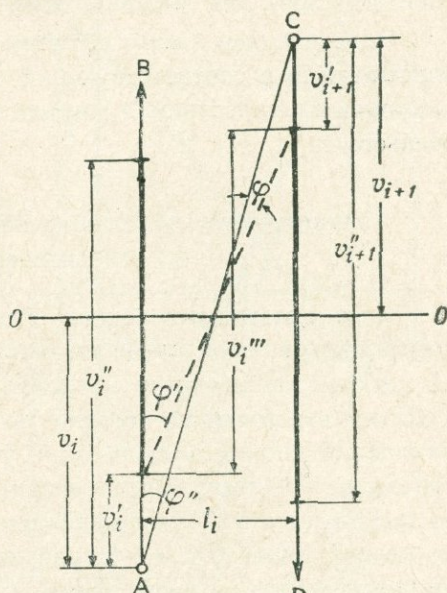
$$v_n' = \frac{f_n(u_n)_1}{a_n} \quad \text{и} \quad v_n'' = \frac{f_n(u_n)_2}{a_n}. \quad (18.3)$$

Все эти результаты вписываются в столбцы 10 и 11 алгоритма (табл. 14). Знак этих величин положительный для прямых шкал и отрицательный для обратных.

Следующей задачей является центрирование вертикальных шкал; найдем положение критических точек, при котором эти шкалы центрируются. Для этого необходимо, чтобы концы шкал располагались на равном расстоянии от некоторой осевой линии  $OO$  (фиг. 49). Из чертежа видно, что в случае прямой шкалы  $AB$  положение критической точки  $A$  определяется ординатой

$$v_i = - \frac{v_i' + v_i''}{2}. \quad (18.4)$$

Знак минус показывает, что точка  $A$  откладывается вниз от осевой линии  $OO$ . По такой же формуле определяется положение критической



Фиг. 49

точки  $C$  обратной шкалы  $CD$ . Здесь величины  $v_i'$  и  $v_{i+1}'$  имеют знак минус и поэтому результат  $v_{i+1}$  получает знак плюс, т. е. критическая точка откладывается вверх от осевой линии  $OO$ .

Результаты вычислений величин  $v_i$  для каждой вертикальной шкалы вписываются в алгоритм (столбец 12).

### Установление расстояний между вертикальными шкалами и определение ширины номограммы

При установлении расстояния между вертикальными шкалами будем руководствоваться теми же соображениями, которые были высказаны при определении ширины звеньев номограммы с параллельными шкалами (§ 9).

На фиг. 49 пунктиром показано крайнее положение разрешающей прямой. Она образует угол  $\varphi'$  с направлением вертикальных шкал. Обозначим через  $\varphi''$  угол между тем же направлением и носителем наклонной шкалы. Тогда  $\varphi = \varphi' - \varphi''$  представит собой наименьший угол между крайним положением разрешающей прямой и носителями шкал. Необходимо, чтобы этот угол был не менее  $20^\circ$ . Беря тангенсы обеих сторон этого выражения и подставляя

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{l}{v'''} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi'' = \frac{l}{v_1 + v_2},$$

получим после несложных преобразований уравнение

$$l^2 \operatorname{tg} \varphi - l(v_1 + v_2 - v''') + (v_1 + v_2)v''' \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad (18.5)$$

откуда можно найти ширину звена  $l$ .

Заметим, что если рабочие участки шкал начинаются в критических точках, то  $v_1 + v_2 = v'''$ , откуда  $\varphi = 0$ . В таких случаях требованию  $\varphi \geq 20^\circ$  удовлетворить невозможно и приходится искать компромиссное решение для ширины звена.

Подсчитанные таким образом ширины звеньев цепной номограммы вписываются в соответствующий столбец 18 алгоритма, в строках для наклонных шкал. Полная ширина номограммы равна сумме ширин всех звеньев.

#### Установление положения наклонных шкал и вычерчивание носителей всех шкал

Если номограмма такова, что все критические точки, положение которых было определено на основании формулы (18.4), помещаются на чертеже, то носители наклонных шкал могут быть легко построены. Если же эти точки на чертеже не помещаются, то положение носителя наклонной шкалы должно быть установлено независимым путем. Способ этого построения был указан в предыдущем параграфе. Аналогично выражению (17.6) вычисляем расстояние от начала  $i$ -го звена до осевой точки  $D_i$ , в которой носитель наклонной шкалы  $i$ -го звена пересекается с осевой линией (фиг. 50)

$$e_i = \frac{v_i l_i}{v_i - v_{i+1}}. \quad (18.6)$$

При подстановке в эту формулу величин  $v_i$  и  $v_{i+1}$  надо учитывать их знаки. Формула применима как к номограммам с внутренними, так и с внешними наклонными шкалами. Если в последнем случае получится знак плюс, то точка пересечения  $D_i$  находится вправо от первой вертикальной шкалы, если минус—то влево.

Полученные по формуле (18.6) величины  $l_i$  вписываются в соответствующий столбец 19 алгоритма, в строку для наклонной шкалы.

На основании тех же соображений записываем формулу для определения величины углового коэффициента носителя наклонной шкалы. Этот коэффициент равняется (фиг. 50)

$$k_i = \operatorname{tg} \beta_i = - \frac{v_i - v_{i+1}}{l_i}. \quad (18.7)$$

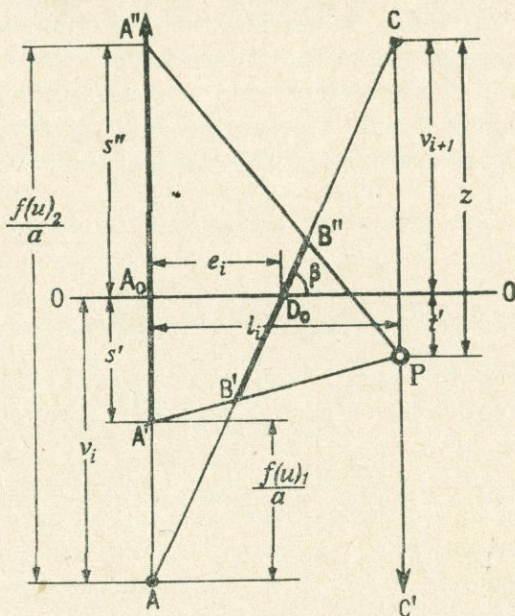
Эта формула применима к номограммам с внутренними и внешними наклонными шкалами.

Знак углового коэффициента покажет направление носителя: если получится знак плюс, то носитель восходящий, если знак минус—то нисходящий. Значения углового коэффициента  $k_i$  вписываются в столбец 20 алгоритма.

Теперь можно вычертить носители всех шкал. В середине листа бумаги проводится горизонтальная прямая—осевая линия. Перпенди-

кулярно к ней, на взаимных расстояниях  $l_i$  (столбец 13 алгорифма), проводятся прямые—носители вертикальных шкал. Если размеры чертежа позволяют, то показываются также и критические точки. Соединяя их прямыми, получаем носители наклонных шкал. Для контроля правильности построения служат величины расстояний до осевых точек  $D_i$  (столбец 18 алгорифма); они должны равняться действительным расстояниям на чертеже.

В тех случаях, когда критические точки не помещаются на чертеже, носители наклонных шкал строятся по осевой точке  $D_i$  и угловому коэффициенту  $k_i$  (столбцы 19 и 20 алгорифма).



Фиг. 50

### Построение вертикальных и наклонных шкал

Градуирование вертикальных шкал первой функции независимой переменной  $f_1(u_1)$  и функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$  производится по значениям коэффициентов шкал  $a_1$  и  $a_n$  соответственно: начала и концы этих шкал определяются по (18.1) и (18.3). Однако построение этих шкал лучше произвести после того, как будут построены наклонные шкалы. Вертикальные шкалы для вспомогательных переменных являются немymi. Определение начала и конца этих шкал по (18.2) имеет целью только центрирование рабочих участков этих шкал.

Для построения наклонных шкал предварительно должны быть вычерчены первичные шкалы и найдены положения полюсов. Для этих построений удобно использовать немые носители шкал вспомогательных переменных. Таким образом, для каждой наклонной шкалы один из примыкающих к ней носителей вспомогательных переменных используется для построения первичной шкалы, а другой— для размещения на нем полюса. Из предыдущего ясно, что первичные шкалы должны располагаться на носителе той вертикальной шкалы данного звена, которая примыкает к нулевой критической точке наклонной шкалы, а полюсное расстояние откладываться на носителе той вертикальной шкалы, которая примыкает к бесконечной критической точке наклонной шкалы.

В дальнейшем изложении для общности будет рассмотрен случай, когда критические точки наклонных шкал не помешаются на чертеже. Следовательно, нужно уметь построить первичную шкалу и полюсное расстояние, не имея на чертеже критических точек, и пользуясь вычисленным выше расстоянием  $v$  от осевой линии  $OO$  (уравнение 18. 4).

Обозначим начало и конец рабочих участков первичной шкалы через  $A'$  и  $A''$  соответственно (фиг. 50); расстояния  $s'$  и  $s''$  этих точек от осевой линии  $OO$  определяются из выражений

$$s' = \frac{f(u)_1}{a} + v_s, \quad (18.8)$$

$$s'' = \frac{f(u)_2}{a} + v_s, \quad (18.9)$$

где  $v_s$  — расстояние от осевой линии до нулевой критической точки той вертикальной шкалы, на носителе которой размещается *первичная шкала* функции  $f(u)$ .

На фиг. 50 показан случай построения делительной наклонной шкалы; поэтому первичная шкала располагается на левой вертикальной шкале звена, а полюс — на правой. По этой причине величина  $v_s$  в формулах (18. 8) и (18. 9) соответствует  $v_i$  на фиг. 50. В случае построения множительных наклонных шкал расположение первичной шкалы и полюса было бы обратным.

При вычислении по этим формулам величины, входящие в правые стороны, берутся с их знаками; полученный знак величин  $s'$  и  $s''$  покажет направление, в котором должны быть отложены эти расстояния от опорной линии  $OO$  для получения концов первичных шкал. Полученные значения  $s'$  и  $s''$  вписываются в столбцы 14 и 15 алгоритма.

Как указывалось, значения коэффициентов первичных шкал в этих формулах могут быть произвольными; следует соразмерно назначать величины  $a$ , имея в виду удобство построения и размещения первичной шкалы на ее носителе. Имея  $a$  и  $p$ , можно вычислить значения полюсного расстояния  $z, z = \frac{p}{a}$ . Эти значения вписываются в восьмой столбец алгоритма (табл. 14). Теперь можно определить расстояние полюса  $P$  от осевой линии

$$t' = z + v_p, \quad (18.10)$$

где  $v_p$  есть расстояние от осевой линии до нулевой критической точки той вертикальной шкалы, на носителе которой размещается *полюс*  $P$ ; величина  $v_p$  берется со своим знаком. По указанной выше причине величине  $v_p$  в формуле (18.10) соответствует  $v_{i+1}$  на фиг. 50.

Знак полюсного расстояния для внешних наклонных шкал соответствует знаку первичной шкалы, а для внутренних наклонных шкал является обратным. Знак величин  $t'$  показывает, по какую сторону от осевой линии должен быть расположен полюс. Вычисленные значения  $t'$  вписываются в столбец 16 алгоритма.

Следующим этапом является построение первичной шкалы на соответствующем носителе.

Если функция  $f_i(u_i)$  и коэффициент шкалы  $a_i$  таковы, что для построения шкалы можно воспользоваться готовым шаблоном (например, масштабной линейкой), то с этого шаблона производится копирование градуировки, прикладывая к точке  $A'$  начало используемого участка линейки. Контролем правильности построения служит совпадение конца этого участка с точкой  $A''$ . Если нельзя подобрать такой шаблон, то первичная шкала строится по ее уравнению (столбец 17 алгоритма).

Имея первичную шкалу  $A'A''$ , полюс  $P$  и носитель наклонной шкалы, можно приступить к ее градуированию, пользуясь описанным выше способом построения проективной шкалы (§ 4).

Теперь остается построить две вертикальные шкалы: для первой функции зависимой переменной  $f_1(u_1)$  и для функции зависимой переменной  $f_n(u_n)$ . Их построение производится обычным методом, разработанным для номограмм с параллельными шкалами; поэтому на них не будем останавливаться. Все остальные вертикальные шкалы остаются без градуировки; они являются немymi шкалами вспомогательных переменных.

После того как номограмма построена, следует ее проверить, подставляя в заданное уравнение различные значения переменных и производя сравнение результатов аналитического и номографического методов расчета. Если номограмма удовлетворяет требованиям и, следовательно, расчет и построение произведены правильно, то можно приступить к ее оформлению, т. е. снабдить надписью, ключом пользования, примером расчета и т. д. На этих вопросах мы не будем останавливаться, так как они подробно изложены в разделе о цепных номограммах с параллельными шкалами.

## VII. ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ

### § 19. ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОМОГРАММЫ

#### Структура треугольных номограмм

В общем случае номограммы нулевого жанра первой канонической формы уравнений состоят из трех прямолинейных шкал, не пересекающихся в одной точке; шкалы, служащие для представления каждой из функции уравнения, взаимно пересекаются в трех точках. В основе геометрической структуры таких номограмм лежит треугольник. Поэтому они называются треугольными. Не следует понимать, что шкалы располагаются по сторонам треугольника; в такой геометрической фигуре было бы невозможно провести разрешающую прямую, пересекающую все три стороны. Часть шкал располагается на продолжении сторон треугольника.

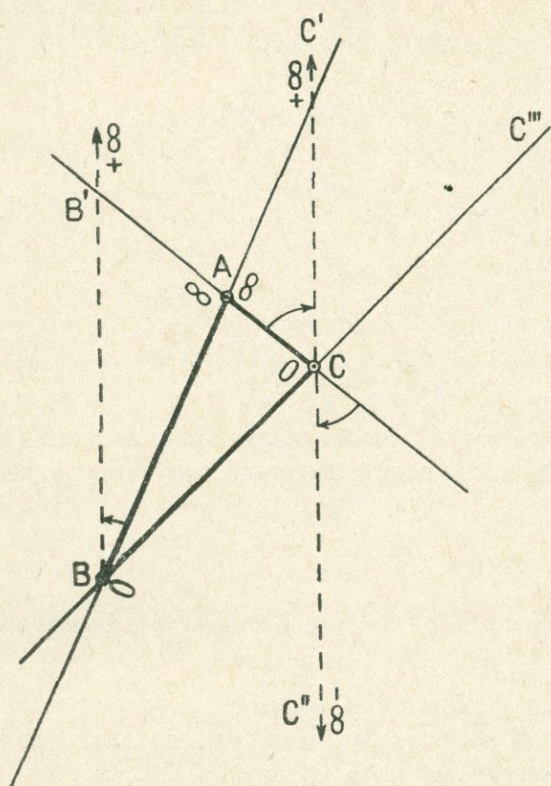
Три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  пересечения шкал являются критическими точками номограммы (фиг. 51). Значение функции в критических точках равно нулю или стремится к бесконечности. Взаимное расположение критических точек треугольной номограммы может быть любым; соответственно этому изменяется и структура номографируемого уравнения.

Все три шкалы треугольной номограммы являются проективными шкалами. На сторонах треугольника  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  между критическими точками могут располагаться внутренние проективные шкалы (жирные линии, фиг. 51), а на продолжении этих сторон — внешние (тонкие линии).

Если такая вершина  $A$  треугольника, в которой сливаются бесконечные критические точки шкал функции  $f_1(u_1)$  и  $f_3(u_3)$ , удаляется в бесконечность, то треугольная номограмма превращается в рассмотренную в предыдущих параграфах номограмму с наклонной шкалой: такая номограмма показана на фиг. 51 пунктирными линиями. Естественно, что при таком удалении в бесконечность точки  $A$  шкалы  $BA$  и  $CA$  должны повернуться вокруг точек  $B$  и  $C$ , как это показано стрелками. Шкала  $BC$  при этом может оставаться неизменной.

При таком преобразовании может получиться как номограмма с внешней наклонной шкалой, состоящая из двух функциональных пря-

мых шкал  $BB'$  и  $CC'$  и проективной внешней шкалы  $CC'''$ , так и номограмма с внутренней наклонной шкалой, состоящая из функциональной прямой шкалы  $BB'$ , функциональной обратной шкалы  $CC''$  и проективной внутренней шкалы  $BC$ .



Фиг. 51

В зависимости от взаимного расположения рабочих частей шкал, треугольные номограммы могут быть двух родов. В треугольных номограммах первого рода разрешающие прямые  $KLM$  пересекают две внутренние шкалы  $AB$  и  $BC$  и одну внешнюю  $CC'$  (фиг. 52 а), а в треугольных номограммах второго рода — три внешние шкалы  $AA'$ ,  $AB'$  и  $CC'$  (фиг. 52 б). Заметим, что во всех трех чертежах, показанных на фиг. 51, 52 а и б, в основе лежат одинаковые треугольники  $ABC$ .

### Уравнение геометрической связи

На фиг. 53 показана треугольная номограмма первого рода, состоящая из двух внутренних проективных шкал  $AB$  и  $BC$  длиной  $d_1$  и  $d_2$  соответственно, и внешней проективной шкалы  $CD$ , длиной\*  $d_3$ . Проведем разрешающую прямую  $KLM$ , введем обозначения углов и отрезков сторон и составим уравнение геометрической связи.

\* Длина проективной шкалы, согласно определению (§ 2), равна расстоянию между ее критическими точками; поэтому длина внешней шкалы  $CD$  равна отрезку  $AC$ .

Из треугольника  $ABC$  следует соотношение между сторонами треугольника и внутренними углами

$$\frac{\sin \alpha}{d_1} = \frac{\sin \beta}{d_2} = \frac{\sin \gamma}{d_3}.$$

Из треугольника  $BKL$  следует  $\frac{\sin \delta}{m} = \frac{\sin \varepsilon}{k}$ , откуда

$$\sin \delta = \frac{m}{k} \sin \varepsilon. \quad (19.1)$$

Из треугольника  $CLM$  следует  $\frac{\sin \varepsilon}{q} = \frac{\sin \zeta}{n}$ , откуда

$$\sin \zeta = \frac{n}{q} \sin \varepsilon. \quad (19.2)$$

Из треугольника  $AKM$  следует

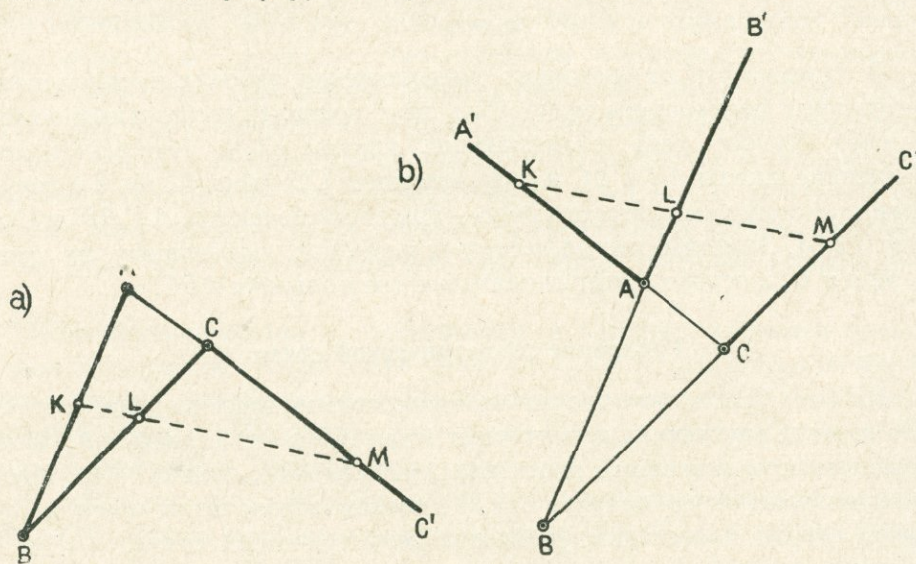
$$\frac{\sin(\pi - \delta)}{d_3 + q} = \frac{\sin \zeta}{l}. \quad (19.3)$$

Но  $\sin(\pi - \delta) = \sin \delta$ ; подставляя это значение в (19.3) и применяя (19.1) и (19.2), после преобразования получим уравнение геометрической связи

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{n}{m} = \frac{q}{d_3 + q}. \quad (19.4)$$

### Параметры преобразования и структура номографируемых уравнений

Различаются четыре типа взаимного расположения критических точек треугольной номограммы; каждому из этих типов соответствует особый вид номографируемого уравнения. На фиг. 54 показаны типы



Фиг. 52

расположения критических точек и направления внутренних шкал треугольника.

Основным является тип I, соответствующий круговому вращению всех шкал в одном направлении, безразлично в каком; на фиг. 54 для типа I показано вращение по часовой стрелке. В остальных типах II—IV часть шкал имеет в различных комбинациях обратное направление.

Треугольная номограмма типа I служит для представления уравнения

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot f_3(u_3) = 1, \quad (19.5)$$

т. е. канонической формы в записи Соро (ур. 5.9).

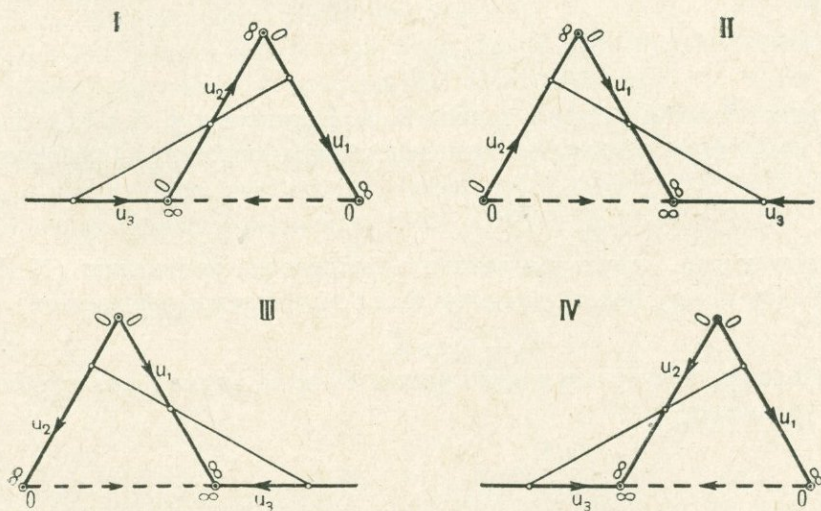
Обозначив расстояние пометки точки на шкале от нулевой критической точки через  $y$ , а от бесконечной точки — через  $y'$  для треугольных номограмм типа I записываем (фиг. 54):

$$k = y_1; \quad l = y_1'; \quad m = y_2'; \quad n = y_2; \quad q = y_3' \text{ и } d_3 + q = y_3.$$

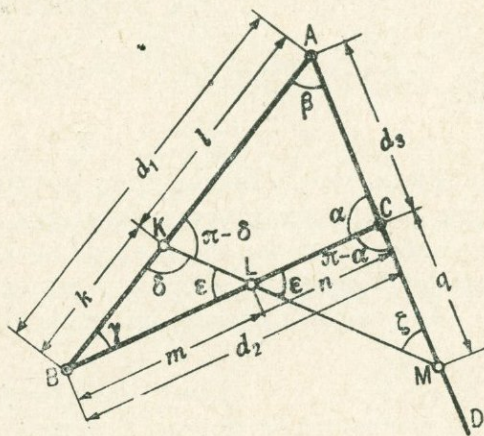
Подставляя эти значения в (19.4), и умножив обе стороны на  $v\omega$ , получим уравнение геометрической связи

$$\frac{y_1'}{y_1} v \cdot \frac{y_2'}{y_2} \omega = \frac{y_3'}{y_3} v\omega. \quad (19.6)$$

Для того чтобы уравнение геометрической связи (19.6) могло служить для представления уравнения (19.5), необходимо, чтобы были соблюдены следующие равенства:



Фиг. 54



Фиг. 53

$$\frac{y_1}{y_1'} v = f_1(u_1); \quad \frac{y_2}{y_2'} w = f_2(u_2) \text{ и } \frac{y_3}{y_3'} \cdot \frac{1}{vw} = f_3(u_3).$$

Сравнивая эти равенства с (2.2), находим  $v = p_1$ ;  $w = p_2$ ;  $\frac{1}{vw} = p_3$ , откуда получаем\*

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 1, \quad (19.7)$$

т. е. выражение, аналогичное уравнению (19.5).

Рассматривая длины проективных шкал треугольной номограммы как векторы, направленные в сторону возрастания функции на *внутренних* сторонах треугольника (показано стрелками на фиг. 54), записываем

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 = 0. \quad (19.8)$$

Связь между видом этого уравнения и номографируемым уравнением (19.5) легко устанавливается на основании следующего мнемонического правила: прологарифмируйте данное уравнение и вместо логарифмов функции напишите векторы длин шкал.

Треугольная номограмма типа II служит для представления уравнения

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) = f_3(u_3), \quad (19.9)$$

т. е. канонической формы в записи М. В. Пентковского (ур. 5.10). Производя выкладки аналогично приведенным выше, получаем соотношение параметров преобразования шкал

$$p_1 \cdot p_2 = p_3, \quad (19.10)$$

т. е. выражение, структура которого аналогична уравнению (19.9).

Векторы длин шкал связаны уравнением

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{a}_3. \quad (19.11)$$

Треугольная номограмма типа III служит для представления уравнения

$$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = f_3(u_3), \quad (19.12)$$

т. е. канонической форме в записи Б. А. Невского (ур. 5.11). Для этого типа номограмм получаем соотношение параметров преобразования

$$\frac{p_1}{p_2} = p_3, \quad (19.13)$$

т. е. выражение, структура которого аналогична уравнению (19.12).

Связь между векторами длин шкал выражается уравнением

$$\bar{d}_1 - \bar{d}_2 = \bar{d}_3. \quad (19.14)$$

Наконец, треугольная номограмма IV типа служит для представления уравнения

$$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = \frac{1}{f_3(u_3)}, \quad (19.15)$$

\* Этот вывод непосредственно вытекает из теоремы Менелая Александрийского—древнегреческого астронома и математика I в. н. э.

т. е. канонической форме в записи (5.12).

Соотношение параметров преобразования проективных шкал этой номограммы

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{p_3}. \quad (19.16)$$

Векторы длин шкал связаны уравнением

$$\overline{d_1} - \overline{d_2} = -\overline{d_3}. \quad (19.17)$$

Все эти выводы убедительно показывают, что параметры преобразования проективных шкал связаны соотношениями, аналогичными структуре номографируемых уравнений, векторы же длин шкал связаны уравнениями, которые легко записать на основании мнемонического правила.

Описание треугольных номограмм впервые было дано Н. А. Глаголевым [4]. Треугольные номограммы редко удаются и их практическое значение невелико. Поэтому ограничим дальнейшее только несколькими замечаниями.

Уравнения шкал функции, отсчитанные от бесконечной критической точки, имеют следующий вид (уравнение 2.33)

$$y_1' = \pm \frac{p_1 d_1}{f_1(u_1) - p_1}; \quad y_2' = \pm \frac{p_2 d_2}{f_2(u_2) - p_2} \quad \text{и} \quad y_3' = \pm \frac{p_3 d_3}{f_3(u_3) - p_3}.$$

В треугольных номограммах устанавливается следующее правило знаков. В номограммах первого рода параметры преобразования двух внутренних проективных шкал отрицательны, и поэтому их произведение или частное является положительным; действительно третья шкала является внешней, и поэтому ее параметр преобразования положителен. В номограммах второго рода все три шкалы являются внешними, имеющими положительные параметры преобразования.

Для уравнения со многими переменными вида (17.1) могут быть построены цепные треугольные номограммы, состоящие из звеньев, подобных описанным выше. При этом могут произвольно комбинироваться как треугольные номограммы первого и второго родов всех четырех типов, так и номограммы с наклонными шкалами. Если цепная номограмма состоит из звеньев, представляющих треугольные номограммы, то в основе такого построения лежит цепь треугольников, напоминающих триангуляционную сеть.

## VIII. РАДИАНТНЫЕ ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ

### § 20. ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ ШКАЛАМИ

#### Радиантные номограммы с тремя шкалами

В общем случае номограммы нулевого жанра второй канонической формы уравнений с тремя переменными состоят из трех прямолинейных шкал, проходящих через одну точку, называемую критической. Эта точка имеет пометки, для которых все три функции, входящие в уравнение номограммы, обращаются в бесконечность. Внешне такие номограммы напоминают лучи или радиусы, расходящиеся из одной точки; поэтому их называют *радиантными* или радиальными.

Указанная особенность радиантных номограмм— обращение функций в бесконечность в критической точке—определяет собой область их применения и характер шкал. В тех случаях, когда номографируемое уравнение имеет вид

$$f_1(u_1) + f_2(u_2) = f_3(u_3), \quad (20.1)$$

должны применяться специальные виды шкал, позволяющих получать точки, значения функций в которых стремились бы к бесконечности. Такими шкалами являются различные проективные шкалы дробных функций (§ 2) и функциональная шкала функции обратной пропорциональности (§ 1).

Радиантные номограммы особенно удобны для номографирования второй канонической формы уравнений, когда эти последние имеют вид

$$\frac{1}{F_1(u_1)} + \frac{1}{F_2(u_2)} = \frac{1}{F_3(u_3)}, \quad (20.2)$$

т. е. когда рассматриваются перевернутые функции\*. Из предыдущего видно, что значения функции  $F_i(u_i)$  ( $i=1, 2, 3$ ) уравнения (20.2) в критической точке делаются равными нулю. Случай, когда на номограмме должны быть изображены нулевые и близкие к ним значения функций, практически весьма реальны. Поэтому принято считать, что радиант-

\* Ниже для краткости перевернутыми функциями называются функции, значение которых выражено в виде единицы, деленной на значение какой-либо другой функции. Соответственно прямыми функциями для краткости называются функции, представленные в обычном виде.

ные номограммы должны применяться главным образом для номографирования уравнений вида (20.2) или приводимых к этому виду.

Однако такое ограничение не является обязательным, и радиантные номограммы могут с равным успехом применяться для номографирования уравнений, содержащих как прямые, так и перевернутые функции.

### Радиантные цепные номограммы

Анализ номограмм с пересекающимися в одной точке шкалами представляет известный теоретический интерес, а полученные выводы позволяют в ряде случаев использовать эти зависимости для построения удобных инженерных номограмм. Такие радиантные номограммы могут быть применены для представления исходных уравнений второй канонической формы вида (20.1)

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i) = f_n(u_n), \quad (20.3)$$

уравнений, содержащих перевернутые функции вида (20.2)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{F_i(u_i)} = \frac{1}{F_n(u_n)} \quad (20.4)$$

и их любые комбинации.

При разъединении переменных уравнений (20.3) получается система уравнений второй канонической формы

$$\left. \begin{aligned} f_1(u_1) + f_2(u_2) &= \rho_1, \\ \rho_1 + f_3(u_3) &= \rho_2, \\ \dots & \\ \rho_{n-3} + f_{n-1}(u_{n-1}) &= f_n(u_n). \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

Для каждого звена этой системы строится радиантная номограмма с тремя шкалами. Так как в точке пересечения шкал первого звена значение вспомогательной переменной  $\rho_1$  стремится к бесконечности, то отсюда следует, что та же самая точка является и точкой пересечения всех шкал второго звена, так как и здесь должно быть соблюдено условие стремления к бесконечности значений всех функций в точке пересечения и т. д. Вследствие этого радиантные цепные номограммы представляют собой веер шкал, пересекающихся в одной точке: градуированных шкал для заданных функций и немых шкал для вспомогательных переменных. Поэтому такие номограммы иногда называют веерными номограммами.

При разъединении переменных уравнения (20.4) получается система уравнений вида



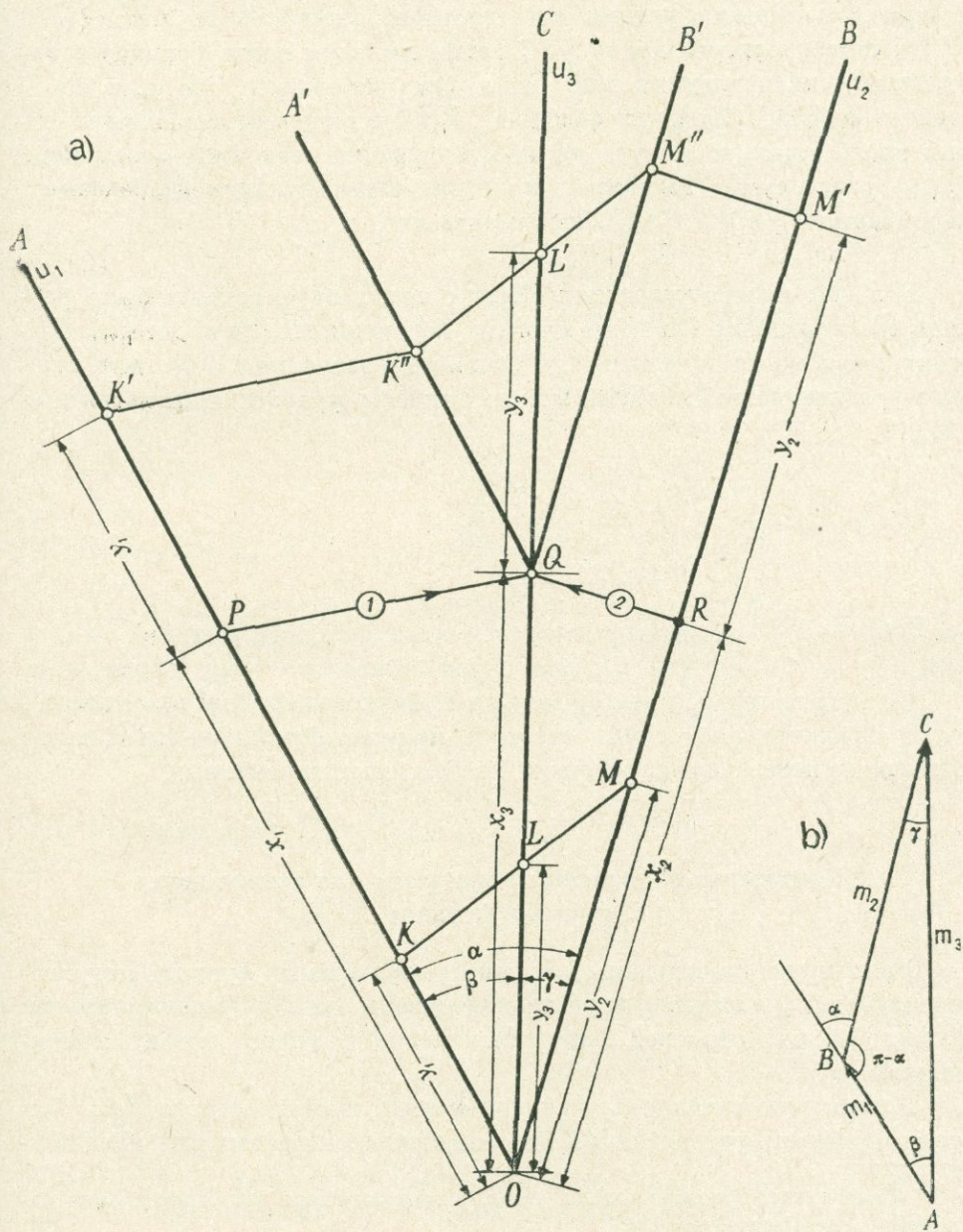
$$\frac{k}{F_1(u_1)} = \frac{\sin \gamma}{y_1}; \quad \frac{k}{F_2(u_2)} = \frac{\sin \beta}{y_2} \quad \text{и} \quad \frac{k}{F_3(u_3)} = \frac{\sin \alpha}{y_3}.$$

Вводя обозначения

$$a_1 = \frac{k}{\sin \gamma}; \quad a_2 = \frac{k}{\sin \beta} \quad \text{и} \quad a_3 = \frac{k}{\sin \alpha}, \quad (20.8)$$

получаем уравнения шкал номограмм

$$y_1 = \frac{F_1(u_1)}{a_1}; \quad y_2 = \frac{F_2(u_2)}{a_2} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{F_3(u_3)}{a_3}. \quad (20.9)$$



Фиг. 55

Систему уравнения (20.8) можно записать и в таком виде

$$a_1 \sin \gamma = a_2 \sin \beta = a_3 \sin \alpha = k,$$

а так как величина модуля шкалы  $m_i$  является обратной величине коэффициента шкалы  $a_i$ ,  $m_i = \frac{1}{a_i}$ , то переписываем последнее уравнение так

$$\frac{\sin \gamma}{m_1} = \frac{\sin \beta}{m_2} = \frac{\sin \alpha}{m_3}. \quad (20.10)$$

Это выражение представляет собой соотношение между сторонами и противолежащими углами косоугольного треугольника  $ABC$  (фиг. 55, b); стороны треугольника  $ABC$  равны модулям шкал функции и параллельны направлениям этих шкал. Отсюда следует, что если представить себе модули шкал функции  $F_i(u_i)$  в виде векторов, направленных вдоль шкал, то модуль  $m_3$  шкалы функции зависимой переменной  $F_3(u_3)$  равен сумме векторов\*  $m_1$  и  $m_2$  шкал функции независимых переменных  $F_1(u_1)$  и  $F_2(u_2)$ , соответственно, т. е.

$$\overline{m_1} + \overline{m_2} = \overline{m_3}. \quad (20.11)$$

Если бы вместо уравнения (20.2) с тремя переменными было рассмотрено уравнение (20.4) со многими переменными, то после разъединения переменных и замены его системой уравнения (20.6), для каждого уравнения этой системы можно написать уравнения, аналогичные (20.11)

$$\overline{m_1} + \overline{m_2} = \overline{n_1},$$

$$\overline{n_1} + \overline{m_3} = \overline{n_2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\overline{n_{n-3}} + \overline{m_{n-1}} = \overline{n_n},$$

где  $\overline{m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — векторы модулей шкал заданных функций,  $\overline{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-3$ ) — векторы модулей шкал вспомогательных переменных.

Отсюда видно, что вектор модуля функциональной шкалы перевернутой функции равен сумме векторов модулей функциональных шкал слагаемых перевернутых функций независимых переменных,

$$\overline{m_1} + \overline{m_2} + \dots + \overline{m_{n-1}} = \overline{m_n}. \quad (20.12)$$

### Построение радиантных номограмм для суммы двух прямых функций

Радиантные номограммы для суммы двух прямых функций могут содержать как различные проективные шкалы, так и функциональные шкалы функций обратной пропорциональности, равно как их комбинацию.

Рассмотрим вначале случай применения проективных шкал. Для этого применим уравнение (20.7) геометрической связи для представ-

\* Графическое сложение модулей шкал, рассматриваемых как отрезки, было показано Н. А. Глаголевым [4].

ления уравнения вида (20.1). Умножив уравнение (20.1) на произвольное число  $k$  и прибавив к обеим частям этого уравнения произвольные величины  $v$  и  $w$ , мы не нарушим равенства; тогда получим

$$kf_1(u_1) + v + kf_2(u_2) + w = kf_3(u_3) + v + w.$$

Уравнение геометрической связи (20.7) может служить для решения последнего уравнения, если удовлетворяются следующие равенства:

$$kf_1(u_1) + v = \frac{\sin \gamma}{y_1}; \quad kf_2(u_2) + w = \frac{\sin \beta}{y_2} \quad \text{и} \quad kf_3(u_3) + v + w = \frac{\sin \alpha}{y_3},$$

откуда

$$y_1 = \frac{\frac{1}{k} \sin \gamma}{f_1(u_1) + \frac{v}{k}}; \quad y_2 = \frac{\frac{1}{k} \sin \beta}{f_2(u_2) + \frac{w}{k}} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{\frac{1}{k} \sin \alpha}{f_3(u_3) + \frac{v+w}{k}}. \quad (20.13)$$

Сравнивая эти выражения с (2.12), заключаем, что они соответствуют уравнениям проективных шкал, полученных при внутреннем проектировании, когда отсчет ведется от бесконечной критической точки, если:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для шкалы } u_1: \quad p_1 = -\frac{v}{k}; \quad b_1 = \frac{\sin \gamma}{k} \\ \text{для шкалы } u_2: \quad p_2 = -\frac{w}{k}; \quad b_2 = \frac{\sin \beta}{k} \\ \text{для шкалы } u_3: \quad p_3 = -\frac{v+w}{k}; \quad b_3 = \frac{\sin \alpha}{k} \end{array} \right\} \quad (20.14)$$

Отсюда следует, что

$$p_1 + p_2 = p_3 \quad (20.15)$$

или, учитывая, что параметры преобразования внутренних проективных шкал отрицательны, переписываем так

$$-p_1 - p_2 = -p_3. \quad (20.16)$$

Из условий (20.14) также вытекает

$$\frac{\sin \gamma}{b_1} = \frac{\sin \beta}{b_2} = \frac{\sin \alpha}{b_3} = k. \quad (20.17)$$

Это выражение представляет собой соотношение между сторонами и противолежащими углами косоугольного треугольника (ср. фиг. 55, b). Отсюда следует

$$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{b}_3. \quad (20.18)$$

Так как параметры преобразования внутренних проективных шкал отрицательны, то векторы приведенных длин таких шкал направлены в сторону, обратную положительному направлению внутренних шкал, т. е. от бесконечной критической точки к нулевой.

На основании (2.6) и (20.15) находим, что длина проективной шкалы суммы двух прямых функций, представленных внутренними проективными шкалами, равна

$$d_3 = \frac{b_3}{p_1 + p_2}. \quad (20.19)$$

### Применение внешних проективных шкал в радиантных номограммах для суммы двух прямых функций

Покажем, что радиантные номограммы могут содержать также и проективные шкалы, полученные при внешнем проектировании. Умножим уравнение (20.1) на произвольную величину  $k$ , и вычтем из обеих сторон произвольные величины  $v$  и  $w$ ; произведя действия, аналогичные тем, которые привели к (20.13), получим уравнения шкал

$$y_1 = \frac{\frac{1}{k} \sin \gamma}{f_1(u_1) - \frac{v}{k}}; \quad y_2 = \frac{\frac{1}{k} \sin \beta}{f_2(u_2) - \frac{w}{k}} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{\frac{1}{k} \sin \alpha}{f_3(u_3) - \frac{v+w}{k}}. \quad (20.20)$$

Эти уравнения соответствуют уравнению (2.18) шкалы, полученной при внешнем проектировании (отсчет от бесконечной критической точки), если удовлетворяются следующие условия:

$$\text{для шкалы } u_1: \quad p_1 = \frac{v}{k}; \quad -b_1 = \frac{\sin \gamma}{k};$$

$$\text{для шкалы } u_2: \quad p_2 = \frac{w}{k}; \quad -b_2 = \frac{\sin \beta}{k};$$

$$\text{для шкалы } u_3: \quad p_3 = \frac{v+w}{k}; \quad -b_3 = \frac{\sin \alpha}{k}.$$

Отсюда видно, что выражение (20.15) сохраняет силу и в этом случае. Далее имеем

$$\frac{-\sin \gamma}{b_1} = \frac{-\sin \beta}{b_2} = \frac{-\sin \alpha}{b_3} = k$$

или в другой записи

$$\bar{b}_1' + \bar{b}_2' = \bar{b}_3', \quad (20.21)$$

где  $\bar{b}_i'$  — векторы, противоположные векторам  $\bar{b}_i$ .

Отсюда следует, что условие (20.18) сохраняется и для случая внешних проективных шкал, если вместо векторов приведенных длин  $\bar{b}_i$  рассматривать противоположные векторы  $\bar{b}_i'$ . Так как векторы приведенных длин внешних проективных шкал направлены вдоль шкал в сторону возрастания функции, то противоположные векторы направлены от критической точки номограммы в сторону, обратную направлениям шкал, т. е. так же, как и в случае внутренних шкал.

Длина проективной шкалы определяется по (20.19).

Рассмотрим, наконец, случай, когда одна из шкал слагаемых функций внутренняя, а другая — внешняя. Пусть внешней шкалой является

шкала функции  $f_2(u_2)$ . Умножим уравнение (20.1) на произвольную величину  $k$ , и прибавим к обеим сторонам произвольную величину  $v-w$ ; аналогично изложенному выше, найдем уравнения шкал

$$y_1 = \frac{\frac{1}{k} \sin \gamma}{f_1(u_1) + \frac{v}{k}}; \quad y_2 = \frac{\frac{1}{k} \sin \beta}{f_2(u_2) - \frac{w}{k}} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{\frac{1}{k} \sin \alpha}{f_3(u_3) + \frac{v-w}{k}}$$

Первое уравнение этой системы соответствует уравнениям (20.13), а второе—уравнениям (20.20). Отсюда видно, что должны быть удовлетворены следующие равенства

$$\text{для внутренней шкалы } u_1: \quad p_1 = -\frac{v}{k}; \quad b_1 = \frac{\sin \gamma}{k};$$

$$\text{для внешней шкалы } u_2: \quad p_2 = \frac{w}{k}; \quad b_2' = \frac{\sin \beta}{k}.$$

Характер шкалы  $u_3$  зависит от значения величин  $v$  и  $w$ . Если  $v > w$ , то шкала  $u_3$ —внутренняя проективная шкала, и равенства имеют вид

$$p_3 = -\frac{v-w}{k} < 0; \quad b_3 = \frac{\sin \alpha}{k}.$$

Если  $v < w$ , то шкала  $u_3$ —внешняя проективная шкала, и равенства имеют вид

$$p_3 = -\frac{v-w}{k} > 0; \quad b_3 = \frac{\sin \alpha}{k}.$$

Наконец, если  $v = w$ , то шкала  $u_3$  представляет собой функциональную шкалу функции обратной пропорциональности и равенства имеют вид

$$p_3 = -\frac{v-w}{k} = 0; \quad b_3 = \frac{\sin \alpha}{k}.$$

Применяя эти выражения к уравнению шкалы  $u_3$ , получим

$$y_3 = \frac{b_3}{f_3(u_3)},$$

откуда видно, что  $b_3$  является модулем шкалы функции обратной пропорциональности; обозначая этот модуль через  $m_3$ , записываем

$$y_3 = \frac{m_3}{f_3(u_3)}. \quad (20.22)$$

В тех случаях, когда ответная шкала  $u_3$ —одна из проективных шкал, находим значение параметра преобразования

$$-p_1 + p_2 = \pm p_3, \quad (20.23)$$

где знак перед  $p_3$  ставится в зависимости от значения величин  $p_1$  и  $p_2$ . Длина  $d_3$  шкалы, на основании (2.6) и (20.23), составляет

$$d_3 = \frac{b_3}{p_3}. \quad (20.24)$$

При  $p_3=0$  ответная шкала  $u_3$  переходит в шкалу функции обратной пропорциональности; из (20.24) видно, что длина такой шкалы делается бесконечной.

Если бы вместо исходного уравнения (20.1) с тремя переменными было взято уравнение (20.3) со многими переменными, то после разьединения переменных получилась бы система уравнений (20.5), для каждого из которых строилась номограмма из трех проективных (внутренних или внешних) шкал. Это позволяет обобщить написанные выше уравнения. Вместо уравнений (20.15), (20.16) или (20.23) будем иметь

$$p_1 \pm p_2 = q_1,$$

$$q_1 \pm p_3 = q_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$q_{n-3} \pm p_{n-1} = p_n,$$

где  $q_i (i=1, 2 \dots n-3)$  — параметры преобразования проективных шкал вспомогательных переменных. Отсюда следует

$$p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{n-3} = p_n. \quad (20.25)$$

На этом основании формулируется

#### Теорема 4 о параметре преобразования шкалы суммарной функции

Параметр преобразования проективной шкалы любой суммарной функции (или функции зависимой переменной) равен алгебраической сумме параметров преобразования проективных шкал слагаемых функций независимых переменных. Положительные значения параметров преобразования соответствуют проективным шкалам, полученным при внешнем проектировании, а отрицательные — при внутреннем.

Вместо уравнений (20.18) или (20.21) получим для уравнения (20.3) со многими переменными

$$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{c}_1,$$

$$\bar{c}_1 + \bar{b}_3 = \bar{c}_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\bar{c}_{n-3} + \bar{b}_{n-1} = \bar{b}_n$$

где  $\bar{c}_i (i=1, 2 \dots n-3)$  — векторы приведенных длин проективных шкал вспомогательных переменных.

Отсюда видно, что вектор приведенной длины проективной шкалы прямой функции зависимой переменной равен сумме векторов приведенных длин проективных шкал слагаемых прямых функций независимых переменных

$$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \dots + \bar{b}_{n-1} = \bar{b}_n. \quad (20.26)$$

При этом для внутренних проективных шкал берутся сами векторы приведенных длин, а для внешних — противоположные векторы\*. Во всех

\* Вместо применения противоположных векторов для внешних проективных шкал можно было бы произвести вычитание векторов приведенных длин этих шкал.

случаях эти векторы направлены от критической точки номограммы вдоль шкал.

### Применение функциональных шкал в радиантных номограммах для суммы двух прямых функций

Применение проективных шкал в радиантных номограммах для представления уравнений, содержащих прямые функции, не является единственным способом разрешения таких уравнений. Легко показать, что такие номограммы могут состоять и из функциональных шкал, а именно шкалы функции обратной пропорциональности.

Умножим уравнение (20.1) на произвольную величину  $k$  и, сравнив с уравнением геометрической связи (20.7), составим систему уравнений шкал переменных

$$y_1 = \frac{\sin \gamma}{k f_1(u_1)}; \quad y_2 = \frac{\sin \beta}{k f_2(u_2)} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{\sin \alpha}{k f_3(u_3)}.$$

Для всех трех шкал получены уравнения шкалы функции обратной пропорциональности. Обозначая через  $m_i$  модули этих шкал

$$m_1 = \frac{\sin \gamma}{k}; \quad m_2 = \frac{\sin \beta}{k} \quad \text{и} \quad m_3 = \frac{\sin \alpha}{k},$$

находим связь между этими модулями

$$\frac{\sin \gamma}{m_1} = \frac{\sin \beta}{m_2} = \frac{\sin \alpha}{m_3} = k$$

или в другой записи

$$\overline{m_1} + \overline{m_2} = \overline{m_3}. \quad (20.27)$$

Уравнения шкал номограммы имеют вид

$$y_1 = \frac{m_1}{f_1(u_1)}; \quad y_2 = \frac{m_2}{f_2(u_2)} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{m_3}{f_3(u_3)}.$$

Из (20.27) видно, что вектор модуля функциональной шкалы прямой функции зависимой переменной равен сумме векторов модулей функциональных шкал слагаемых прямых функций независимых переменных.

### Построение радиантных номограмм для суммы прямой и перевернутой функции

Радиантные номограммы могут быть построены также и для уравнений, содержащих прямые и перевернутые функции. Рассмотрим применение уравнения геометрической связи (20.7) к такому уравнению

$$f_1(u_1) + \frac{1}{f_2(u_2)} = f_3(u_3).$$

Умножим обе части этого уравнения на некоторую величину  $k$  и прибавим к ним произвольную величину  $v$ ; производя действия, аналогичные описанным выше, получим систему уравнений шкал

$$y_1 = \frac{\frac{1}{k} \sin \gamma}{f_1(u_1) + \frac{v}{k}}; \quad y_2 = \frac{\sin \beta}{k} F_2(u_2) \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{\frac{1}{k} \sin \alpha}{f_3(u_3) + \frac{v}{k}}. \quad (20.28)$$

Первое и третье уравнения для прямых функций этой системы представляют собой уравнения (2.12) внутренних проективных шкал, когда отсчет ведется от бесконечной критической точки, где параметры преобразования

$$p_1 = p_3 = -\frac{v}{k}, \quad (20.29)$$

а величины

$$b_1 = \frac{\sin \gamma}{k}, \quad (20.30)$$

$$b_3 = \frac{\sin \alpha}{k}. \quad (20.31)$$

Эти же уравнения можно сравнить с уравнениями (2.18) внешних проективных шкал, когда отсчет ведется от бесконечной критической точки; в этом случае параметры преобразования равны

$$p_1 = p_3 = \frac{v}{k},$$

а приведенные длины шкал составляют

$$b_1 = \frac{\sin \gamma}{k} \quad \text{и} \quad b_3 = \frac{\sin \alpha}{k}.$$

Для того, чтобы не повторяться, ограничимся изложением случая применения внутренних шкал.

Второе уравнение системы (20.28) для перевернутой функции является уравнением функциональной шкалы при коэффициенте шкалы  $a_2 = \frac{k}{\sin \beta}$  или при модуле шкалы  $m_2 = \frac{\sin \beta}{k}$ ; отсюда находим значение величины

$$k = \frac{\sin \beta}{m_2}. \quad (20.32)$$

Из (20.30) и (20.31) определяем

$$\frac{\sin \gamma}{b_1} = \frac{\sin \alpha}{b_3} = k.$$

Объединяя это выражение с (20.32), находим

$$\frac{\sin \gamma}{b_1} = \frac{\sin \beta}{m_2} = \frac{\sin \alpha}{b_3} = k, \quad (20.33)$$

откуда непосредственно следует

$$\overline{b_1} + \overline{m_2} = \overline{b_3}. \quad (20.34)$$

Сравнивая это выражение с (20.11), полученными для уравнений, содержащих перевернутые функции, и (20.18) и (20.21)—для уравнений с прямыми функциями, приходим к важному выводу о том, что

понятию модуля  $m$  функциональных шкал соответствует понятие приведенной длины  $b$  проективных шкал\*, т. е. что в *радиантных номограммах модуль функциональных шкал эквивалентен приведенной длине проективных шкал.*

При совместном применении функциональных и проективных шкал для номографирования уравнений, содержащих прямые и перевернутые функции, соответственно должны быть составлены характеристические уравнения, связывающие параметры преобразования шкал слагаемых функций. В этих уравнениях *условно следует принимать значение параметра преобразования функциональных шкал равным нулю.*

Выше было показано (20.22), что если параметр преобразования шкал принимает нулевое значение, то такая проективная шкала превращается в функциональную, а именно в шкалу функции обратной пропорциональности\*\*.

В отношении остальных видов функциональных шкал мы не имеем доказательств равенства нулю их параметров преобразования, хотя это логично допустить. То обстоятельство, что характеристические уравнения, связывающие параметры преобразования шкал функции, удовлетворяются при условном принятии равенства нулю параметра преобразования любых функциональных шкал, не является, конечно, доказательством указанного допущения, и *faute de mieux* может рассматриваться лишь как основание мнемонического правила.

Отсюда следует, что соотношение (20.29) между параметрами преобразования шкал радиантной номограммы для суммы прямой и перевернутой функции можно записать так

$$p_1 + 0 = p_3,$$

т. е. теорема о параметре преобразования проективной шкалы, служащей для суммирования двух прямых функций, сохраняет свою силу и для случая суммирования прямой и перевернутой функции, осуществляемого с помощью проективной и функциональной шкал соответственно, если принять, что параметр преобразования функциональной шкалы равен нулю.

Важно отметить, что если при суммировании прямой и перевернутой функций шкала одной из слагаемых функций является проективной,

---

\* Это можно видеть также и из уравнения (20.22), в котором величина  $m_3$  является модулем функциональной шкалы функции обратной пропорциональности, в которую перешла проективная шкала.

\*\* Следует различать следующие два случая, когда параметр преобразования принимает нулевое значение. В § 2 было указано, что при стремлении к нулю полюсного расстояния параметры преобразования шкал также стремятся к нулю, а сами шкалы сгущаются в одной из критических точек проективной шкалы. Так как длина шкалы  $d$  при этом остается постоянной, то приведенная длина  $b = pd$  проективной шкалы также стремится к нулю.

В отличие от этого, при переходе проективных шкал в шкалы функции обратной пропорциональности приведенная длина  $b$  шкалы остается постоянной, и при уменьшении параметра преобразования до нуля соответственно длина  $d$  шкалы увеличивается до бесконечности.

то шкала суммарной функции также является проективной. Это непосредственно вытекает из условия (20.29). Длина ответной шкалы определяется из приведенной длины проективной шкалы и параметра преобразования по уравнению (20.24).

Рассматривая уравнение со многими переменными, содержащее прямые и перевернутые функции

$$f_1(u_1) + F_2 \frac{1}{f_2(u_2)} + f_3(u_3) + F_4 \frac{1}{f_4(u_4)} + \dots + f_{n-1}(u_{n-1}) = f_n(u_n), \quad (20.35)$$

можно на основании вышеизложенного сразу записать уравнение модулей функциональных шкал и приведенных длин проективных шкал

$$\bar{b}_1 + \bar{m}_2 + \bar{b}_3 + \bar{m}_4 + \dots + \bar{b}_{n-1} = \bar{b}_n \quad (20.36)$$

и уравнение параметров преобразования шкал

$$p_1 + 0 + p_3 + 0 + \dots + p_{n-1} = p_n. \quad (20.37)$$

### Построение радиантных цепных номограмм

Радиантные цепные номограммы открывают такие же широкие возможности для составления вариантов номограмм и выбора наилучшего, как и цепные номограммы с параллельными шкалами. Их важным преимуществом по сравнению с последними является большая гибкость и приспособляемость, поскольку имеется возможность произвольно изменять характеристики шкал применением различного вида проективных шкал для представления прямых функций.

В методическом отношении наиболее существенное различие заключается в том, что расчет номограмм с параллельными шкалами основан главным образом на аналитических выкладках, а при построении радиантных номограмм большое значение приобретают графические приемы.

Радиантные цепные номограммы для самого общего случая уравнений со многими переменными строятся известным способом: задаваясь значением приведенных длин проективных шкал для прямых функций и модулей функциональных шкал для обратных функций независимых переменных и их направлениями, производится сложение этих векторов: для прямых функций строятся внутренние или внешние проективные шкалы по заданным приведенным длинам  $b_i$  и параметрам преобразования  $p_i$  или, наконец, функциональные шкалы функции обратной пропорциональности по модулям шкал  $m_i$ ; для перевернутых функций строятся функциональные шкалы по заданным модулям  $m_i$  шкал; для проективной шкалы функции зависимой переменной определяется ее проведенная длина  $b_n$  из (20.36) и параметр преобразования  $p_n$  из (20.37), и из их соотношения определяется длина шкалы

$$d_n = \frac{b_n}{p_n}.$$

Зная вид функции зависимой переменной и задаваясь коэффициентом шкалы, можно построить первичную шкалу, а затем, имея длину проек-

тивной шкалы и параметр преобразования, построить проективную шкалу; наконец, зная направление носителя этой шкалы и ее бесконечную критическую точку,—встроить в номограмму ответную шкалу.

К этому можно добавить несколько общих замечаний. Если носители шкал заданных переменных располагать под очень острыми углами друг к другу, то это приводит к существенному увеличению векторов приведенных длин или модулей шкал вспомогательных переменных и, следовательно, шкалы зависимой переменной. Для устранения этого угол между носителями шкал должен быть увеличен.

Если для слагаемых прямых функций применять только внутренние проективные шкалы, то для суммарной функции получим проективную шкалу, обладающую высоким значением параметра преобразования (20.25). Это однозначно определяет распределение пометок на ответной шкале, которое может оказаться невыгодным с точки зрения практических требований, поставленных перед номограммой. Кроме того, действительная длина ответной шкалы такой номограммы может получиться малой (сравните уравнение 20.19). Таким образом, можно получить короткую ответную шкалу с невыгодным распределением пометок.

Введя в номограмму шкалы с внешним проектированием, можно получить для ответной шкалы суммарной функции проективную шкалу с невысоким значением параметра преобразования (20.25), которая поэтому может оказаться более длинной.

Это обстоятельство имеет особенно важное значение при построении цепных номограмм, так как, рационально сочетая внутренние и внешние проективные шкалы, можно получать удобные ответные шкалы. Здесь можно провести аналогию с цепными номограммами с параллельными шкалами, в которых применением прямых и обратных шкал достигался такой же эффект в отношении коэффициента шкал суммарной функции.

Практически важно, что в радиантных номограммах находят применение только сходящиеся участки внешних проективных шкал, так как именно эти участки примыкают к бесконечной критической точке (фиг. 11). Это является благоприятным обстоятельством, так как сходящиеся шкалы обладают хорошими качествами (см. также стр. 31). Отсюда также следует, что при применении внешних проективных шкал величина параметра преобразования должна быть существенно меньше наименьшего значения функции, поскольку участок внешней проективной шкалы, примыкающий к этой величине, сильно растягивается. В сказанном можно убедиться, рассмотрев две внешние проективные шкалы, примененные в радиантных номограммах (фиг. 57): на фиг. 57, б внешняя шкала  $u_2$  при параметре преобразования  $p=+2$  сильно растянулась при значении  $u < 5$ , а на фиг. 57, а внешняя шкала  $u_2$  при параметре преобразования  $p=+6$  растянулась при  $u < 11$ .

В отношении направлений векторов приведенных длин проективных шкал (обычных векторов для внутренних шкал и противоположных—



шкалы относительно бесконечной критической точки  $B'$  определяется отрезками  $y_p'$  и  $y_d'$  (уравнение 2.12)

$$y_p' = \frac{b}{f(u)_1 - p} \quad \text{и} \quad y_d' = \frac{b}{f(u)_2 - p}.$$

Очевидно, что при построении радиантных номограмм нужно совместить точку  $B'$  с критической точкой номограммы.

Аналогично при построении внешней проективной шкалы действительная длина равняется отрезку  $D''E''$ ; положение проксимального  $D''$  и дистального  $E''$  концов этого отрезка относительно бесконечной критической точки  $B''$  определяется на основании (2.18) из

$$y_p'' = -\frac{b}{f(u)_1 - p} \quad \text{и} \quad y_d'' = -\frac{b}{f(u)_2 - p}.$$

### Пример построения радиантных номограмм

В качестве примера, иллюстрирующего приведенные выше положения, построим схемы радиантных номограмм для самого простого уравнения  $u_1 + u_2 = u_3$ , в которых для шкал заданных переменных  $u_1$  и  $u_2$  будут применены различного типа шкалы.

На фиг. 57, а показана радиантная номограмма, в которой заданные переменные представлены внутренними проективными шкалами. Шкалы характеризуются следующими данными:

шкала  $u_1$  :  $p_1 = -4$ ;  $d_1 = 8$  см;  $b_1 = -32$  см;

шкала  $u_2$  :  $p_2 = -6$ ;  $d_2 = 10$  см;  $b_2 = -60$  см.

Произвольно расположив носители этих шкал, прикладываем к точке их пересечения в произвольном масштабе векторы приведенных длин, производим их графическое сложение и направляем вдоль вектора  $b_3$  носитель шкалы  $u_3$ . Из чертежа имеем  $b_3 = -82$  см. Параметр преобразования  $p_3 = -4 - 6 = -10$ . Отсюда длина шкалы

$$d_3 = \frac{-82}{-10} = 8,2 \text{ см.}$$

Откладываем это расстояние на шкале  $u_3$ . Проводя разрешающую прямую через нулевые критические точки шкал  $u_1$  и  $u_2$  (пунктирная линия), убеждаемся в правильности построения. Теперь остается построить три внутренние проективные шкалы по данным длинам шкал и параметрам преобразования, пользуясь приемами, описанными в § 4, и расположить бесконечные критические точки шкал в точке их пересечения.

На фиг. 57, б показан случай, когда независимые переменные представлены различными проективными шкалами:

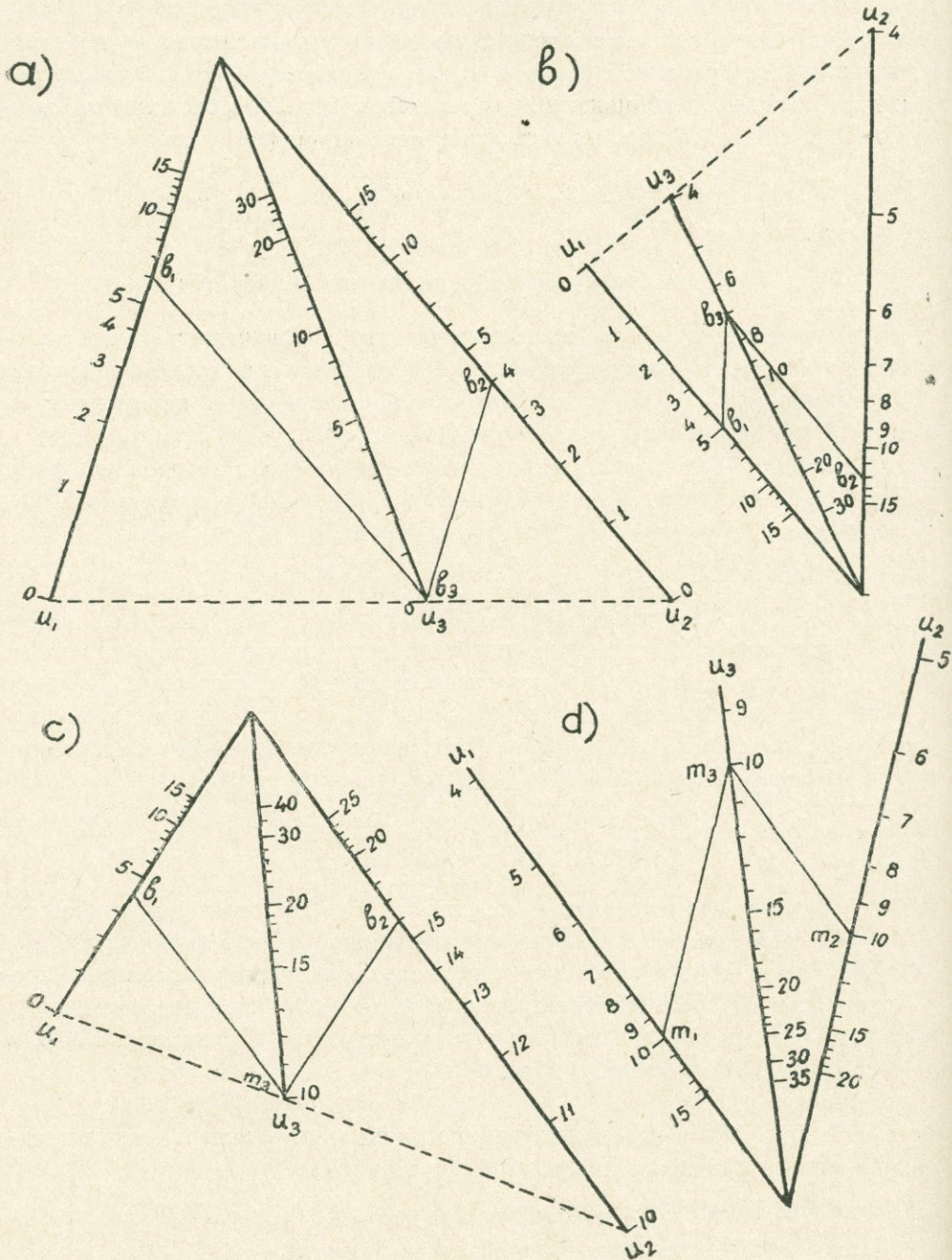
шкала  $u_1$ —внутренняя:  $p_1 = -5$ ;  $d_1 = 6$  см;  $b_1 = -30$  см;

шкала  $u_2$ —внешняя:  $p_2 = +2$ ;  $d_2 = 8$  см;  $b_2 = +16$  см.

Производя построения и подсчеты, определяем, что шкала  $u_3$ —внутренняя проективная шкала

$$p_3 = -3; b_3 = -43,5 \text{ см}; d_3 = 14,5 \text{ см}.$$

На фиг. 57, с показан случай, когда независимые переменные также представлены различными проективными шкалами, но шкала зависимой переменной—функциональная. Пусть



Фиг. 57

шкала  $u_1$ —внутренняя:  $p_1 = -6$ ;  $d_1 = 5$  см;  $b_1 = -30$  см;

шкала  $u_2$  —внешняя:  $p_2 = +6$ ;  $d_2 = 6$  см;  $b_2 = +36$  см.

Производя построения и подсчеты, определяем, что переменная  $u_3$  представлена функциональной шкалой функции обратной пропорциональности, имеющей значение модуля шкалы  $m_3 = 55$ . Уравнение этой

$$\text{шкалы } y_3 = \frac{55}{u_3}.$$

Наконец, на фиг. 57,d показан случай, когда все три шкалы радиантной номограммы—функциональные. Модули шкал переменных следующие:  $m_1 = 30$  см;  $m_2 = 40$  см;  $m_3 = 64$  см.

## § 21. НОМОГРАММЫ СО СВОБОДНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ШКАЛАМИ

### Возможность перенесения шкал

В сделанном выше рассмотрении предполагалось, что в точке  $O$  сливаются начальные (нулевые) точки всех функциональных шкал функции  $F_i(u_i)$  и бесконечные критические точки проективных шкал функции  $f_i(u_i)$ . Покажем, что это ограничение не является обязательным, и что шкалы могут быть произвольно передвинуты вдоль носителя шкалы.

Перенесем ближайшие к критической точке концы отрезков  $u_i$ , отсекаемых на шкалах переменных  $u_i$  разрешающей прямой  $KLM$  вдоль соответствующих шкал, на произвольные расстояния  $x_i (i = 1, 2, 3)$  в сторону «от критической точки» (фиг. 55, а) и соединим полученные точки ломаной  $PQR$ . Тогда концы отрезков  $u_i$  займут новое положение  $K', L'$  и  $M'$  соответственно;  $PK' = OK = y_1$ ;  $QL' = OL = y_3$ ,  $RM' = OM = y_2$ . Из точки  $Q$  проведем две вспомогательные прямые:  $QA'$  параллельно шкале  $OA$  и  $QB'$ , параллельно шкале  $OB$ . Из точки  $L'$  параллельно разрешающей прямой  $KM$  проведем прямую  $K''M''$  до пересечения со вспомогательными прямыми  $QA'$  и  $QB'$ . Соединим точку  $K'$  с  $K''$  и точку  $M'$  с  $M''$ .

Треугольники  $OKM$  и  $QK''M''$  равны, так как каждый из них распадается на два треугольника, имеющих общие стороны  $OL$  и  $QL'$ , которые равны по построению. Остальные две стороны этих треугольников образованы взаимно параллельными сторонами. Отсюда следует, что  $QK'' = OK = y_1$  и  $QM'' = OM = y_2$ .

Четырехугольник  $PQK''K'$  имеет две равные и параллельные стороны  $PK' = QK'' = y_1$ , и, следовательно, он является параллелограммом; отсюда следует, что стороны  $PQ$  и  $K'K''$  взаимно параллельны. То же относится и к четырехугольнику  $QRM''M'$ , в котором взаимно параллельны и равны стороны  $QM'' = RM' = y_2$  и, следовательно, прямая  $QP$  параллельна  $M''M'$ .

Таким образом, при перенесении концов шкал\* переменных  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  из критической точки  $O$  в произвольно выбранные точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  геометрическая связь между пометками шкал вместо разрешающей прямой  $KM$  осуществляется ломаной линией  $K''K'''M'''M'$ . Для проведения разрешающей ломаной линии от пометок  $K'$  и  $M'$  на шкалах функции  $u_1$  и  $u_2$  проводятся прямые  $K'K''$  и  $M'M''$ , параллельно соответствующим участкам опорной линии  $PQR$  до пересечения с вспомогательными прямыми  $QA'$  и  $QB'$  в точках  $K''$  и  $M''$ , а затем эти точки соединяются собственно разрешающей прямой  $K''M''$ , отсекающей на шкале третьей переменной  $u_3$  ответную точку  $L'$ .

Нетрудно убедиться в том, что безразлично, в какую сторону вдоль шкал переносятся концы шкалы, если только при этом сохраняется их направление. Если концы шкал перенесены вдоль носителей в противоположную по отношению к критической точке сторону, т. е. «за критическую точку» (фиг. 58), то шкалы начинают сходить и обмениваются своими местами: слева располагается шкала  $u_2$ , а справа шкала  $u_1$ . Это приводит к изменению взаимного положения прямых, составляющих разрешающую ломаную  $K'K''M'''M'$ . На чертеже показано также сложение векторов модулей шкал, которое осуществляется в критической точке  $O$ .

Опыт составления радиантных цепных номограмм показывает, что при большом числе переменных возникает скученность шкал возле критической точки. Даже при градуировании шкал с одной стороны размещение делений связано с большими трудностями, при наличии же градуировки с двух сторон дело становится безнадежным. Описанный выше прием позволяет совершенно свободно располагать шкалы в поле чертежа и обеспечивать размещение делений даже при двусторонней градуировке. Это имеет немалое значение в тех случаях, когда некоторые шкалы обращаются в бинарные.

Нетрудно видеть, что введенные нами разрешающие ломаные представляют собой графическое обобщение разрешающих прямых; последние представляют собой тот частный случай, когда боковые отрезки  $K'K''$  и  $M'M'$  ломаных вырождаются в точки. Здесь подчеркивается графический характер этого обобщения, так как для удовлетворения уравнению Массо три точки должны лежать именно на прямой.

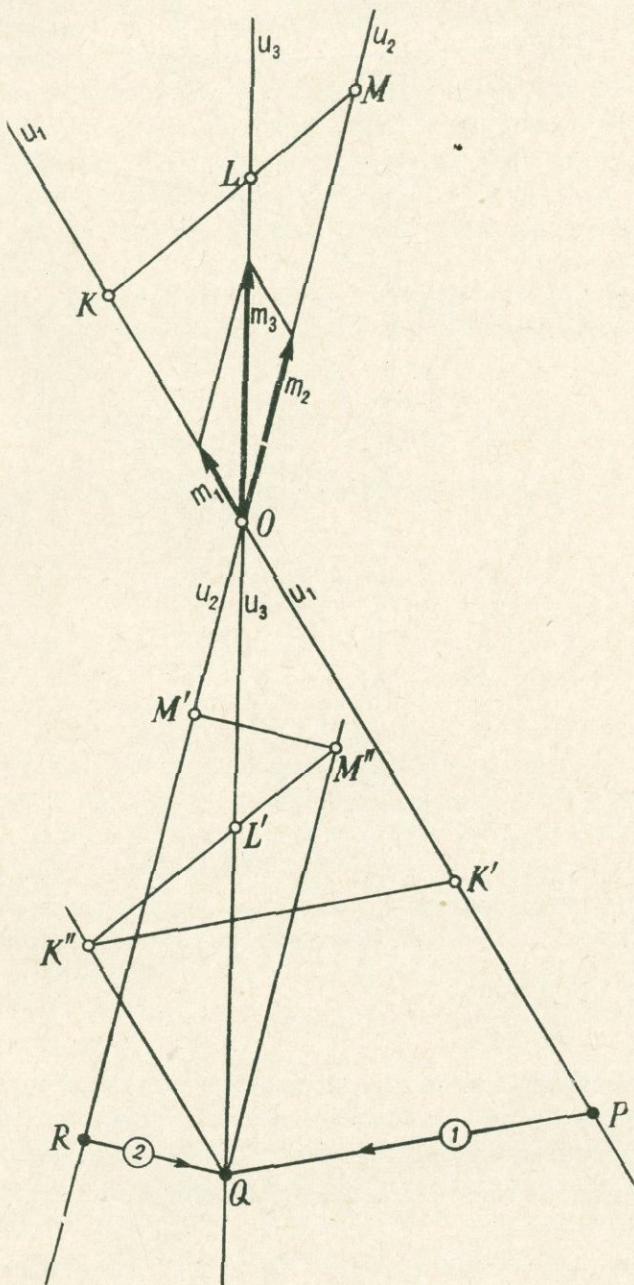
### Структура номограммы со свободно расположенными шкалами

Важным преимуществом осуществленного построения является отделение критической точки  $O$ , в которой производится сложение векторов модулей шкал перевернутых функции  $F_i(u_i)$  (или приведенных длин шкал прямых функций  $f_i(u_i)$ ) от конечных точек шкал, в которых значение функции  $F_i(u_i) = 0$  (или  $f_i(u_i) \rightarrow \infty$ ). Это дает возможность свободно располагать шкалы таких функций в поле чертежа.

\* В радиантных номограммах шкалы направлены к критической точке, и поэтому в этой точке сливаются концы всех шкал; эти концы соответствуют бесконечным значениями слагаемых функций.

В окончательном виде номограмма со свободно расположенными шкалами для уравнения с тремя переменными  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  вида (20.1) содержит в себе следующие элементы (фиг. 59):

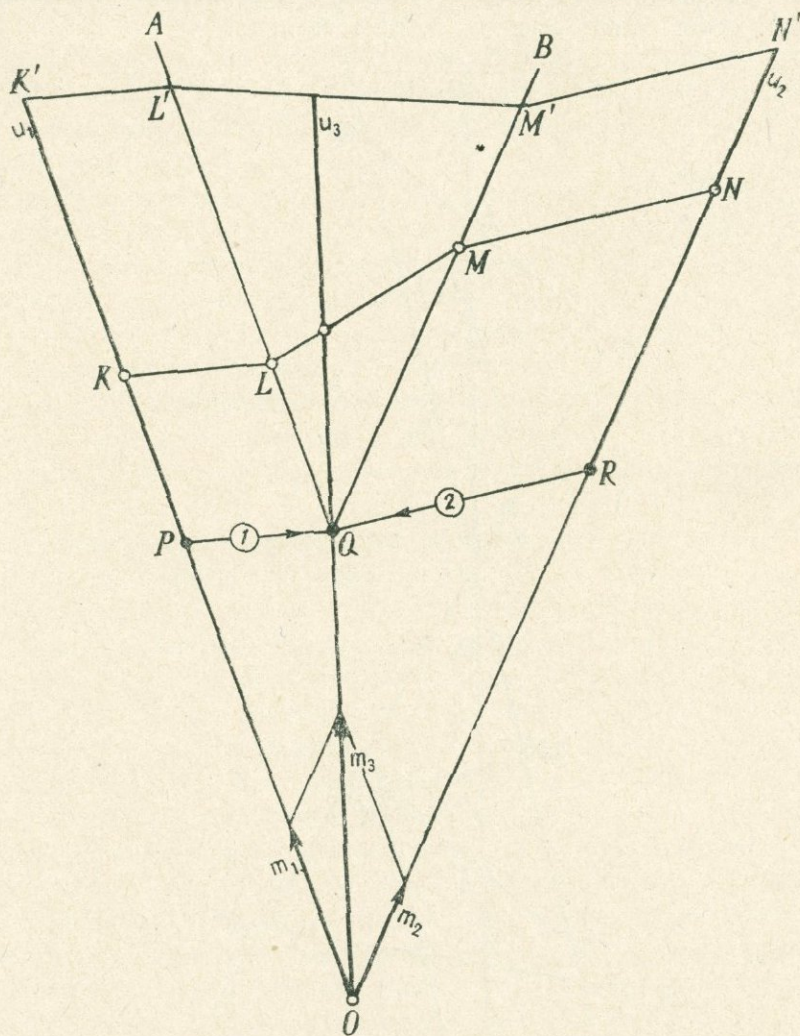
1) две шкалы  $u_1$  и  $u_2$  для функции заданных переменных, произвольно расположенные в поле чертежа с произвольным расположением конечных точек шкал  $P$  и  $R$  соответственно;



Фиг. 58

2) построение, сделанное в точке  $O$  пересечения носителей шкал заданных функций: сложение векторов приведенных длин проективных

шкал прямых функций и модулей функциональных шкал перевернутых функций переменных  $u_1$  и  $u_2$ ; суммарный вектор  $b_3$  или  $m_3$  по величине и направлению соответствует приведенной длине проективной шкалы или модулю функциональной шкалы зависимой переменной  $u_3$ ;



Фиг. 59

3) носитель шкалы функции зависимой переменной  $u_3$ , на котором в произвольной точке  $Q$  располагается конец этой шкалы;

4) две вспомогательные линии  $QA$  и  $QB$ , проведенные из конца шкалы функции зависимой переменной и параллельные шкалам заданных функций  $u_1$  и  $u_2$ ;

5) две вспомогательные линии  $QP$  и  $QR$ , соединяющие конец  $Q$  шкалы функции зависимой переменной с концами  $P$  и  $R$  шкал заданных функций независимых переменных. Эти линии снабжаются символами, облегчающими проведение разрешающей ломаной  $KLMN$ .

Длина шкалы переменной  $u_3$  определяется предельным положением разрешающей ломаной  $K'L'M'N'$ .

### Цепные номограммы со свободно расположенными шкалами

Пользуясь показанным выше приемом, можно построить цепную номограмму со свободно расположенными шкалами для функции многих переменных вида (20.3).

После разъединения переменных и введения вспомогательных переменных это уравнение заменяется системой уравнений с тремя переменными в каждом. Для каждого уравнения этой системы описанным выше способом строится звено номограммы со свободно расположенными шкалами, причем шкалы вспомогательных переменных  $\rho_1, \rho_2, \dots$  являются общими.

Для того чтобы не повторяться, ограничимся показом схемы цепной номограммы со свободно расположенными шкалами для функции пяти переменных

$$f_1(u_1) + \frac{1}{F_2(u_2)} + f_3(u_3) + \frac{1}{F_4(u_4)} = f_5(u_5), \quad (21.1)$$

которая после разъединения переменных заменяется такой системой уравнений

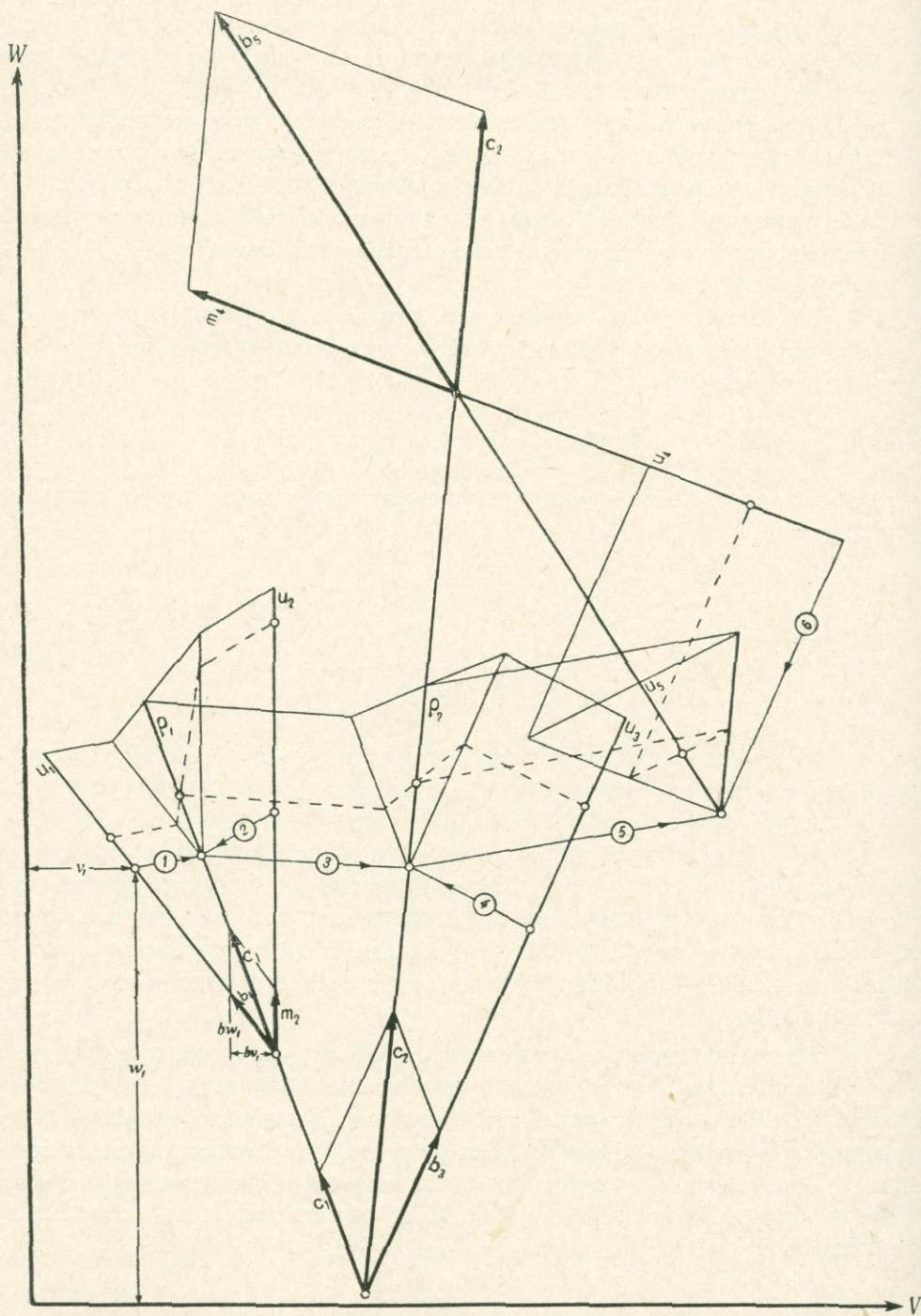
$$\left. \begin{aligned} f_1(u_1) + \frac{1}{F_2(u_2)} &= \rho_1 \\ \rho_1 + f_3(u_3) &= \rho_2 \\ \rho_2 + \frac{1}{F_4(u_4)} &= f_5(u_5) \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Схема построения номограммы показана на фиг. 60. Номограмма состоит из трех звеньев. В первых двух звеньях шкалы перенесены «от критической точки» и поэтому их направления расходятся ( $u_1$  и  $u_2$ ;  $\rho_1$  и  $u_3$ ). В третьем звене шкалы перенесены «за критическую точку» и поэтому они сходятся ( $\rho_2$  и  $u_4$ ). Модули функциональных шкал функции  $F_i(u_i)$  обозначены буквой  $m_i$ , приведенные длины проективных шкал функции  $f_i(u_i)$  — буквой  $b_i$ , а приведенные длины шкал вспомогательных переменных — буквой  $c_i$  с индексами, соответствующими индексам этих переменных.

Линии с номерами в кружках и стрелками, соединяющие конечные точки шкал, показывают последовательность проведения разрешающих ломаных. Пунктирной линией показан ход решений для значений переменных  $u_1, u_2, u_3$  и  $u_4$ , обозначенных кружками на соответствующих шкалах. Такими же кружками показаны ответные значения на шкалах вспомогательных переменных  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и, наконец, на шкале зависимой переменной  $u_5$ .

## Общий алгоритм цепной номограммы со свободно расположенными шкалами

Расчет и построение цепных номограмм со свободными шка-  
лами целесообразно вести графическим путем, так как при этом воз-



Фиг. 60

можно наилучшим образом располагать шкалы в поле чертежа, достигая лучшей обозримости номограммы и т. д. После составления схемы номограммы должен быть произведен ее контроль. Такой контроль удобнее всего осуществлять применением таблицы—алгорифма номограммы.

Алгорифм номограммы, изображенной на фиг. 60, показан в табл. 15. На чертеж наносятся координатные оси  $V$  и  $W$ . После того как положение шкал окончательно установлено, измеряются координаты  $v$  и  $w$  конечных точек этих шкал\*.

Графическим путем определяются проекции модулей  $m_v$  и  $m_w$  или приведенных длин  $b_v$  и  $b_w$  шкал на координатные оси; такое построение удобно делать при точках, в которых производилось сложение векторов модулей или приведенных длин шкал, проводя через эти точки прямые, параллельные соответствующим координатным осям.

Заполнение таблицы не представляет труда.

В столбцы 2 и 3 вписываются переменные и вид функции заданного уравнения, в столбцы 4 и 5—проксимальные и дистальные пределы переменных, а в столбцы 6 и 7—соответствующие им наименьшее и наибольшее значение функций. В столбце 8 вычисляются значения интервалов функциональных шкал; для проективных шкал этот столбец не заполняется.

В столбце 9 вписываются принятые значения коэффициентов функциональных шкал для перевернутых функций и параметров преобразования проективных шкал для прямых функций; параметры преобразования для шкал вспомогательных переменных определяются алгебраическим суммированием параметров преобразования проективных шкал слагаемых функции.

В столбце 10 вписываются принятые значения длин проективных шкал; для функциональных шкал здесь производится подсчет длины шкалы по формуле (1.5)  $h_i = \frac{A_i}{a_i}$ .

В столбце 11 производится расчет приведенных длин проективных шкал  $b_i = p_i d_i$  и модулей функциональных шкал  $m_i = \frac{1}{a_i}$ . Значения приведенных длин проективных шкал вспомогательных переменных получаются из чертежа измерением длин векторов, найденных в результате суммирования соответствующих векторов, изображающих приведенные длины проективных шкал и модули функциональных шкал.

В столбцы 12 и 13 в строки для заданных переменных (строки 1, 2, 5 и 8) вписываются результаты измерения проекции приведенных длин и модулей шкал, рассматриваемые как алгебраические величины, т. е. с учетом их знака. В строках для вспомогательных переменных и для зависимой переменной (строки 3, 6 и 9) производится алгебраическое суммирование. В строках для контроля (строки 4, 7 и 10) вписыва-

\* Чтобы не загромождать чертежа (фиг. 60), координаты конца шкалы и проекции приведенной длины показаны только для первой шкалы  $u_1$ .

ются результаты измерения проекций приведенных длин проективных шкал соответствующих вспомогательных переменных. При правильном геометрическом сложении векторов приведенных длин и модулей шкал величины, стоящие в строках 3 и 4, 6 и 7, 9 и 10, должны быть попарно равными.

В столбцы 14 и 15 вписываются результаты измерений координат конечных точек всех шкал,—функции заданных переменных  $v_i$  и  $w_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ), вспомогательных переменных  $v_i'$  и  $w_i'$  ( $i=1, 2, \dots, n-3$ ) и функции зависимой переменной  $v_n$  и  $w_n$ .

В столбцах 16 и 17 подсчитываются величины моментов проекции приведенных длин и модулей шкалы относительно начала координат; в строках для заданных переменных (строки 1, 2, 5 и 8) в столбец 16 вписывается произведение величин, стоящих в столбцах 12 и 15, а в столбец 17— произведение величин, стоящих в столбцах 13 и 14. В строках для вспомогательных переменных и зависимой переменной (строки 3, 6 и 9) производится суммирование соответствующих величин. В строках для контроля (строки 4, 7 и 10) в столбец 16 вписаны произведения величин, стоящих в столбцах 12 и 15, а в столбец 17—произведение величин, стоящих в столбцах 13 и 14. При правильном расположении концов шкал величины, стоящие в строках 3 и 4, 6 и 7, 9 и 10, должны быть попарно равными.

#### Пример построения номограммы со свободно расположенными шкалами графическим методом

В качестве иллюстрации к изложенному методу построения номограммы со свободными шкалами произведем расчет номограммы уравнения

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = u_3 \quad (21.3)$$

и построим ее. Пределы переменных  $0 \leq u_1 \leq 10$ ;  $0 \leq u_2 \leq 1$ .

Для переменной  $u_1$  строим проективную шкалу при произвольно выбранном параметре преобразования  $p_1 = -2$  и длине шкалы  $d_1 = 10$  см (фиг. 61, а). Для этого строим функциональную шкалу  $AC$  длиной\* 10 см ( $a_1 = 1$  см<sup>-1</sup>), под произвольным углом к ней откладываем заданную длину шкалы  $d_1$ , и из полученной точки  $B$  проводим прямую  $BP$  параллельно  $AC$ ; на этой прямой на расстоянии  $z_1 = \frac{p_1}{a_1} = 2$  см отмечаем полюс  $P$ . Проектируя из этого полюса шкалу  $AC$  на прямую  $AB$ , получаем шкалу переменной  $u_1$ .

Произвольно располагаем в поле чертежа носитель шкалы  $u_1$  и выбираем на нем положение конечной точки  $Q_1$  (фиг. 61, б). Переносим проективную шкалу  $AB$  на этот носитель, совместив бесконечную критическую точку с точкой  $Q_1$ .

Шкала второй заданной функции  $u_2$  функциональная. Выбираем для нее произвольный модуль  $m_2 = 10$  см и произвольно располагаем шкалу в поле чертежа.

\* При изготовлении клише размеры чертежа (фиг. 61) уменьшились; поэтому фактически коэффициент шкалы  $a_1 = 1,4$  см<sup>-1</sup>.

Общий алгоритм цепной номограммы со свободно расположенными шкалами уравнения

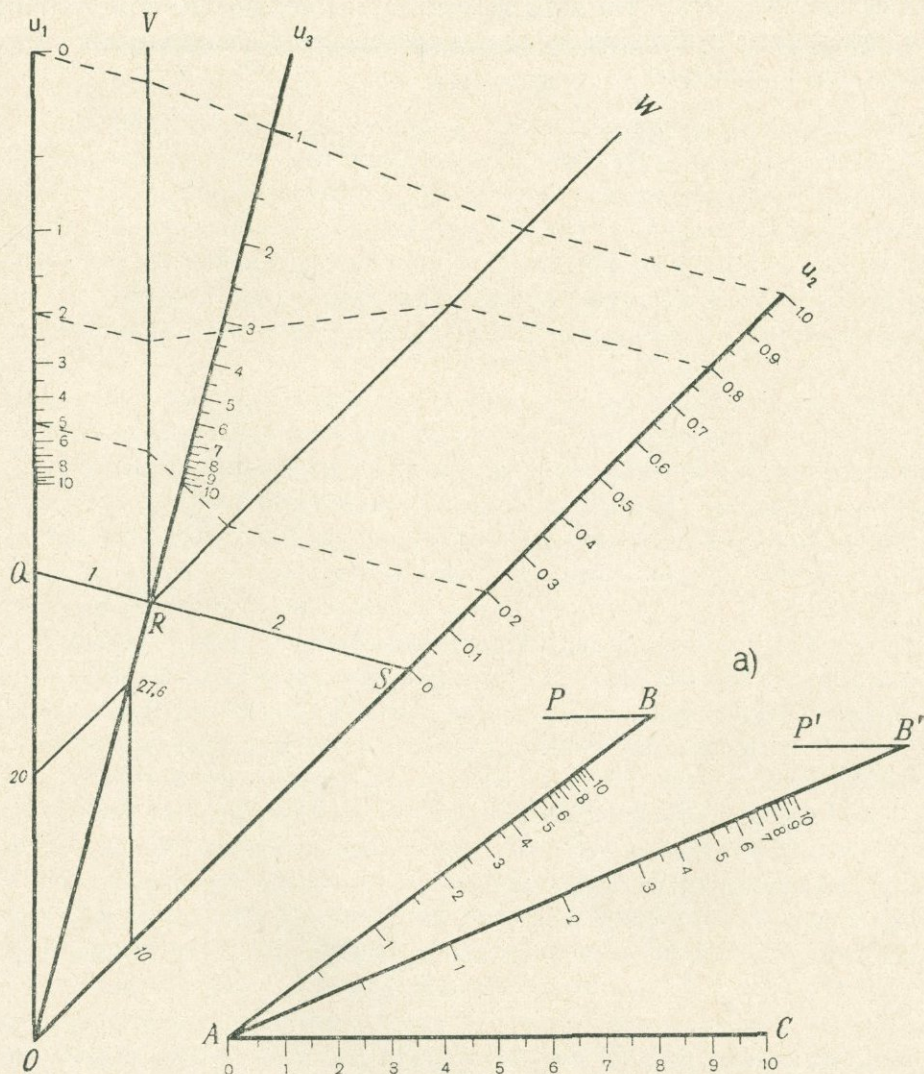
$$f_1(u_1) + \frac{1}{F_2(u_2)} + f_3(u_3) + \frac{1}{F_4(u_4)} = f_5(u_5)$$

№ строк	Переменные	Вид функции	Пределы переменных		Значения функции		Интервал	Параметр преобразования или коэффициент шкалы	Длина шкалы	Приведенная длина или модуль	Проекция приведенных длин или модулей шкал на координатные оси		Координаты конечных точек шкал относительно осей		Моменты проекции приведенных длин или модулей шкал относительно начала координат	
			проксимальный	дистальный	наименьшее	наибольшее					V	W	V	W	V	W
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$u_1$	$f_1(u_1)$	$(u_1)_1$	$(u_1)_2$	$f_1(u_1)_1$	$f_1(u_1)_2$	—	$p_1$	$d_1$	$b_1 = p_1 d_1$	$b_{v1}$	$b_{w1}$	$v_1$	$w_1$	$M_{v1} = b_{v1} v_1$	$M_{w1} = b_{w1} v_1$
2	$u_2$	$\frac{1}{F_2(u_2)}$	$(u_2)_1$	$(u_2)_2$	$\frac{1}{F_2(u_2)_1}$	$\frac{1}{F_2(u_2)_2}$	$A_2$	$a_2$	$h_2 = \frac{A_2}{a_2}$	$m_2 = \frac{1}{a_2}$	$m_{v2}$	$m_{w2}$	$v_2$	$w_2$	$M_{v2} = m_{v2} w_2$	$M_{w2} = m_{w2} v_2$
3	—	—	—	—	—	—	—	$q_1 = p_1$	$d_1' = \frac{c_1}{q_1}$	$\bar{c}_1 = \bar{b}_1 + \bar{m}_2$	$b_{v1} + m_{v2}$	$b_{w1} + m_{w2}$	$v_1'$	$w_1'$	$M_{v1} + M_{v2}$	$M_{w1} + M_{w2}$
4	$p_1$ Контроль	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$c_{v1}$	$c_{w1}$	—	—	$N_{v1} = c_{v1} w_1'$	$N_{w1} = c_{w1} v_1'$
5	$u_3$	$f_3(u_3)$	$(u_3)_1$	$(u_3)_2$	$f_3(u_3)_1$	$f_3(u_3)_2$	—	$p_3$	$d_3$	$b_3 = p_3 d_3$	$b_{v3}$	$b_{w3}$	$v_3$	$w_3$	$M_{v3} = b_{v3} v_3$	$M_{w3} = b_{w3} v_3$
6	$p_2$ —	—	—	—	—	—	—	$q_2 = q_1 + p_3$	$d_2' = \frac{c_2}{q_2}$	$\bar{c}_2 = \bar{c}_1 + \bar{b}_3$	$b_{v1} + m_{v2} + b_{v3}$	$b_{w1} + m_{w2} + b_{w3}$	$v_2'$	$w_2'$	$M_{v1} + M_{v2} + M_{v3}$	$M_{w1} + M_{w2} + M_{w3}$
7	Контроль	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$c_{v2}$	$c_{w2}$	—	—	$N_{v2} = c_{v2} w_2'$	$N_{w2} = c_{w2} v_2'$
8	$u_4$	$\frac{1}{F_4(u_4)}$	$(u_4)_1$	$(u_4)_2$	$\frac{1}{F_4(u_4)_1}$	$\frac{1}{F_4(u_4)_2}$	$A_4$	$a_4$	$h_4 = \frac{A_4}{a_4}$	$m_4 = \frac{1}{a_4}$	$m_{v4}$	$m_{w4}$	$v_4$	$w_4$	$M_{v4} = m_{v4} w_4$	$M_{w4} = m_{w4} v_4$
9	$u_5$	$f_5(u_5)$	$(u_5)_1$	$(u_5)_2$	$f_5(u_5)_1$	$f_5(u_5)_2$	—	$p_5 = p_1 + p_3$	$d_5 = \frac{b_5}{p_5}$	$\bar{b}_5 = \bar{c}_2 + \bar{m}_4$	$b_{v1} + m_{v2} + b_{v3} + m_{v4}$	$b_{w1} + m_{w2} + b_{w3} + m_{w4}$	$v_5$	$w_5$	$M_{v1} + M_{v2} + M_{v3} + M_{v4}$	$M_{w1} + M_{w2} + M_{w3} + M_{w4}$
10	Контроль	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$b_{v5}$	$b_{w5}$	—	—	$M_{v5} = b_{v5} w_5$	$M_{w5} = b_{w5} v_5$

Продолжаем линии носителей шкал до их пересечения в точке  $O$  и прилагаем к этой точке вектор приведенной длины шкалы  $u_1$ , равный  $b_1 = p_1 d_1 = -2 \cdot 10 = -20$  см, и вектор модуля шкалы  $u_2$ , равный 10 см; для построения применяем масштаб 1 : 4. Произведя сложение этих векторов, получаем вектор приведенной длины шкалы  $u_3$ , равный  $b_3 = p_3 d_3 = -27,6$  см. Продолжая линию действия вектора  $b_3$ , получаем носитель шкалы  $u_3$ . Шкалу  $u_3$  мы можем произвольно расположить на этом носителе. В качестве конечной точки шкалы  $u_3$  выбираем точку  $R$  пересечения носителя с прямой, соединяющей конечные точки  $Q$  и  $S$  шкал  $u_1$  и  $u_2$  соответственно.

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = u_3$$

b)



Фиг. 61

Зная величину параметра преобразования шкалы  $u_3$ , равную параметру преобразования шкалы  $u_1$ ,  $p_3 = -2$ , определяем длину шкалы  $u_3$ ;

$$d_3 = \frac{b_3}{p_3} = \frac{-27,6}{-2} = 13,8 \text{ см.}$$

Для построения проективной шкалы  $u_3$  воспользуемся той же первичной шкалой  $AB$  (фиг. 61, а), которая служила для построения шкалы  $u_1$ . Отложим от точки  $A$  под произвольным углом прямую  $AB'$  длиной  $d_3 = 13,8$  см и проведем из точки  $B'$  прямую  $B'P'$  параллельно  $AC$ , на которой отложим полюсное расстояние  $z_3$ ,

соответствующее  $p_3$ ; имеем  $z_3 = \frac{p_3}{a_3} = 2$  см. Проводя из  $P'$  лучи к по-

меткам шкалы  $AC$ , получаем на прямой  $AB'$  проективную шкалу  $u_3$ . Переносим шкалу  $AB'$  на носитель шкалы  $u_3$  (фиг. 61, б), совмещая бесконечную критическую точку  $B'$  с выбранным концом  $R$ .

Из точки  $R$  проводим вспомогательные прямые  $RV$  и  $RW$  и проводим прямую  $QRS$ . На этом заканчивается построение номограммы. На номограмме пунктиром показаны разрешающие ломаные для следующих двух примеров

$$5 + \frac{1}{0,2} = 10 \quad \text{и} \quad 2 + \frac{1}{0,8} = 3,25.$$

## IX. ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ ИЗ РАЗНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### § 22. ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ШКАЛАМИ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ РАЗНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### Геометрическая структура цепных номограмм из разнородных элементов

В ряде случаев инженерной практики приходится пользоваться формулами со многими переменными, структура которых не соответствует уравнениям первой или второй канонических форм, но представляет собой комбинацию этих двух форм. Такие формулы при разъединении переменных заменяются системой уравнений, каждое из которых относится к первой или второй каноническим формам. Рассмотрим случай, когда такие уравнения разрешаются номограммами с прямолинейными шкалами.

Геометрическая структура каждого звена номограммы будет различной, в зависимости от структуры номографируемых уравнений и типа номограммы, выбранного для представления данного уравнения. Для каждого из типов номограммы возможно получить различные решения в соответствии с выбранными для него параметрами шкал. В результате, для цепных номограмм уравнений этого класса получается большое количество вариантов.

Однако выбор наилучшей схемы таких номограмм и их расчет сравнительно несложен, так как в основе его лежат те простые соотношения, которые были выведены выше для четырех основных типов цепных номограмм, состоящих из однородных элементов.

Составление цепных номограмм производится путем последовательного расчета звеньев, с соблюдением условия тождественности шкал вспомогательных переменных. Хотя эти шкалы и не несут на себе градуировки, они имеют точно определенное содержание; на примере фиг. 30 было показано, что при желании можно градуировать шкалы вспомогательных переменных и рассматривать их как ответные шкалы для представления соответствующих формул.

Поэтому среди немых шкал вспомогательных переменных следует различать функциональные и проективные шкалы, характеризующиеся теми же параметрами, что и аналогичные шкалы заданных функций уравнения (§ 1 и 2).

На фиг. 62 показано семь схем цепных номограмм с прямолинейными шкалами, состоящими из разнородных элементов для уравнений с пятью переменными. На всех этих схемах функциональные шкалы показаны сплошными жирными линиями со стрелкой у конца, направленной в сторону возрастания функции. Проективные шкалы показаны жирным пунктиром, ограниченными кружками, соответствующими критическими точками: внутренние проективные шкалы ограничены двумя критическими точками, а внешние—одной; как известно, другой конец таких проективных шкал удален в бесконечность. Во всех случаях для внешних проективных шкал приняты сходящиеся участки. Стрелки в середине проективных шкал показывают направление функции. Тонкими сплошными линиями показаны вспомогательные линии, поясняющие структуру номограмм.

Для каждой из схем приводится структура номографируемого уравнения и даются два характеристических уравнения, связывающих коэффициенты шкал и параметры преобразования. Во всех этих схемах цепь состоит из трех звеньев.

*Первая схема* (фиг. 62, а). Левое звено представляет номограмму с прямыми параллельными шкалами, среднее звено—номограмму с внутренней множительной наклонной шкалой и правое звено—номограмму с обратными параллельными шкалами. Вид номографируемого и характеристических уравнений следующий:

$$[f_1(u_1) + f_2(u_2)] f_3(u_3) + f_4(u_4) = f_5(u_5); \\ (a_1 + a_2)p_3 + a_4 = a_5 \quad \text{и} \quad (0+0) p_3 + 0 = 0.$$

*Вторая схема* (фиг. 62, b). Левое звено состоит из параллельных, различно направленных шкал: обратной для переменной  $u_1$  и прямой для переменной  $u_2$ . Пусть  $a_1 < a_2$  и, следовательно, ответная шкала переменной  $p_1$ —прямая и располагается справа. Среднее звено представляет собой номограмму с внутренней делительной наклонной шкалой, а правое звено—номограмму с внутренней множительной шкалой. Вид номографируемого и характеристических уравнений следующий:

$$[f_1(u_1) + f_2(u_2)] \frac{f_4(u_4)}{f_3(u_3)} = f_5(u_5); \quad (-a_1 + a_2) \frac{p_4}{p_3} = a_5 \quad \text{и} \quad (0+0) \frac{p_4}{p_3} = 0.$$

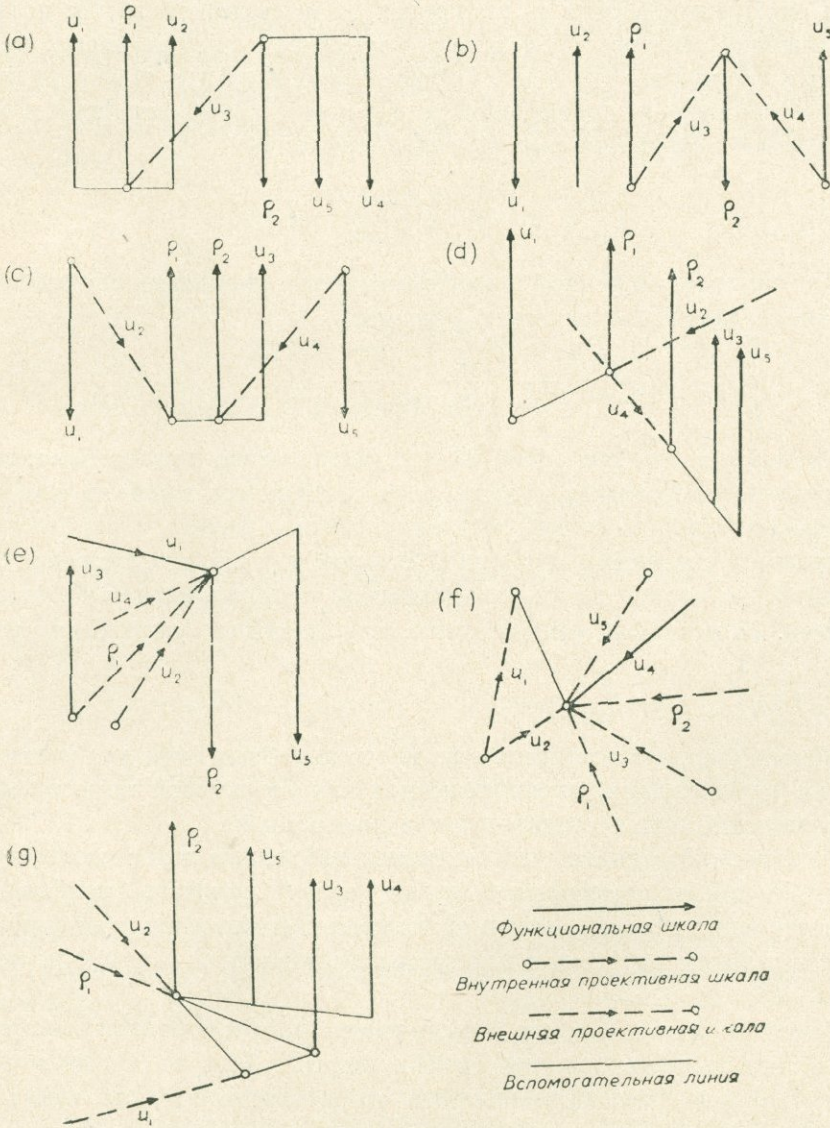
*Третья схема* (фиг. 62, с). Левое звено представляет собой номограмму с внутренней делительной шкалой, среднее звено—номограмму с прямыми параллельными шкалами и правое звено—номограмму с внутренней множительной шкалой. Вид номографируемого и характеристических уравнений такой

$$\left[ \frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} + f_3(u_3) \right] f_4(u_4) = f_5(u_5); \quad \left( \frac{a_1}{p_2} + a_3 \right) p_4 = a_5 \quad \text{и} \quad \left( \frac{0}{p_2} + 0 \right) p_4 = 0.$$

*Четвертая схема* (фиг. 62, d) отличается от предыдущей схемы только тем, что вместо внутренних наклонных шкал применены внешние наклонные шкалы на их сходящемся участке. Поэтому гео-

метрическая структура этой номограммы внешне отличается от предыдущей, хотя вид номографируемого и характеристического уравнений такой же, как и для третьей схемы.

**Пятая схема** (фиг. 62, е). Левое звено представляет собой радиантную номограмму с функциональной шкалой для переменной  $u_1$  и внутренней проективной шкалой для переменной  $u_2$ . Среднее звено является номограммой с внутренней делительной наклонной немой шкалой для вспомогательной переменной  $\rho_1$ . Правое звено является номограммой с внешней множительной наклонной шкалой (сходящийся участок) для переменной  $u_4$ . Номографируемое и характеристические уравнения имеют следующий вид:



Фиг. 62

$$\frac{f_3(u_3) \cdot f_4(u_4)}{\frac{1}{F_1(u_1)} + f_2(u_2)} = f_5(u_5); \quad \frac{a_3 p_4}{0 + p_2} = a_5 \quad \text{и} \quad \frac{0 \cdot p_4}{0 + p_2} = 0.$$

*Шестая схема* (фиг. 62, f). Левое звено представляет собой треугольную номограмму второго рода IV типа с двумя внутренними проективными шкалами для переменных  $u_1$  и  $u_2$ ; для вспомогательной, переменной  $\rho_1$  служит немая внешняя проективная шкала (сходящийся участок). Среднее звено представляет собой радиантную номограмму, состоящую из различных проективных шкал—внешней для переменной  $\rho_1$  и внутренней для переменной  $u_3$ . Вектор приведенной длины внешней шкалы  $\rho_1$  направлен к критической точке, а вектор приведенной шкалы длины внутренней шкалы  $u_3$  направлен от критической точки; поэтому при сложении этих векторов шкала переменной  $u_3$  оказывается между шкалами переменных  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Правое звено является также радиантной номограммой с проективной и функциональной шкалами. Номографируемое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{f_2(u_2)}{f_1(u_1)} + f_3(u_3) + \frac{1}{F_4(u_4)} = f_5(u_5).$$

При построении цепной номограммы этого уравнения составляются следующие характеристические уравнения:

$$\frac{p_2}{p_1} (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) + \overline{p_3 a_3} + \bar{m}_4 = \overline{p_5 a_5} \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{p_1} - p_3 + 0 = p_5.$$

*Седьмая схема* (фиг. 62, g). Левое звено представляет собой треугольную номограмму второго рода II типа, все внешние проективные шкалы которой являются сходящимися. Среднее звено является номограммой с внешней наклонной шкалой для вспомогательной переменной  $\rho_1$ , а правое звено—номограммой с параллельными прямыми шкалами. Номографируемое и характеристические уравнения имеют вид

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot f_3(u_3) + f_4(u_4) = f_5(u_5); \quad p_1 p_2 a_3 + a_4 = a_5 \quad \text{и} \quad p_1 p_2 \cdot 0 + 0 = 0.$$

Можно было бы построить еще много подобных схем для уравнений с пятью переменными, отличающимися как структурой номографируемых уравнений, так и составом шкал номограммы.

Из сказанного видно, что, применяя найденные выше соотношения, для любой схемы номограммы можно сразу написать необходимые для построения шкалы зависимой переменной значения коэффициента функциональной шкалы или параметра преобразования и длины проективной шкалы.

Заметим, что в цепных номограммах из разнородных элементов шкалы иногда обмениваются своими ролями. Так, из изложенного в главе VI можно было бы заключить, что наклонные шкалы могут служить только для представления функции независимых переменных.

Однако в левом звене пятой схемы (фиг. 62, е) наклонная шкала является внутренней проективной *немой* шкалой для вспомогательной переменной  $\rho_1$ . В среднем звене седьмой схемы (фиг. 62, г) *немая* внешняя наклонная шкала служит для представления вспомогательной переменной  $\rho_1$ .

### Пример расчета и построения цепной номограммы с прямолинейными шкалами, состоящей из разнородных элементов

В качестве применения описанных выше приемов произведем расчет и построение цепной номограммы для уравнения с пятью переменными\*, служащего для определения предельного угла пересечения разрешающей прямой и ответной шкалы в номограмме с параллельными шкалами. Эта номограмма была описана выше (стр. 102, см. фиг. 23).

Величина предельного угла для первого звена номограммы составляет (9.14)

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{h_1 + h_2}{2l_1}.$$

Для последующих звеньев (9.19):

$$\operatorname{ctg} \varphi_i = \frac{1}{2l_i} \left( \frac{R_{i-1}}{r_{i-1}} + h_{i+1} \right).$$

Переписываем эти уравнения так:

$$(h_1 + h_2) \operatorname{tg} \varphi_1 = 2l_1, \quad (22.1)$$

$$\left( \frac{R_{i-1}}{r_{i-1}} + h_{i+1} \right) \operatorname{tg} \varphi_i = 2l_i. \quad (22.2)$$

Заменяем уравнение (22.2) следующей системой

$$\frac{R_{i-1}}{r_{i-1}} = \rho_1, \quad (22.3)$$

$$\rho_1 + h_{i+1} = \rho_2, \quad (22.4)$$

$$\rho_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_i = 2l_i. \quad (22.5)$$

Соответственно, заменяем уравнение (22.1) такой системой

$$h_1 + h_2 = \rho_2, \quad (22.6)$$

$$\rho_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 2l_1. \quad (22.7)$$

Сравнивая (22.4) с (22.6) и (22.5) с (22.7), замечаем, что номограмма уравнения (22.2) может служить для представления уравнения (22.1), если только шкалу вспомогательной переменной  $\rho_1$  градуировать, представив ее как шкалу  $h_1$ .

\* Изящная цепная номограмма уравнения с пятью переменными  $a \cos^2 \beta + b \cos \alpha = c$ , состоящая из двух номограмм с наклонными шкалами и одной с параллельными шкалами, дана Р. Кервином [23]. Такую же структуру имеет и описываемая здесь номограмма.

Пределы изменения переменных следующие:  $0,2 \leq R \leq 3,0$  ;  
 $0,01 \leq r \leq 0,40 \text{ см}^{-1}$  ;  $5 \leq h \leq 30 \text{ см}$  ;  $10^0 \leq \varphi \leq 60^0$  и  $5 \leq l \leq 15 \text{ см}$ .

Номограмма будет состоять из трех звеньев:

- 1) звено с делительной наклонной шкалой для уравнения (22.3);
- 2) звено с параллельными шкалами для уравнения (22.4);
- 3) звено с множительной наклонной для уравнения (22.5).

Первое звено номограммы имеет две вертикальные шкалы для переменных  $R$  и  $h_1$  и наклонную шкалу для переменной  $r$ . Исходя из размеров номограммы, удобно назначить длины вертикальных шкал  $R$  и  $h_1$  равными  $15 \text{ см}$ ; соответственно получаем величину коэффициента шкалы  $R$  равной  $a_R = -0,2 \text{ см}^{-1}$ . Приняв величину параметра преобразования делительной внутренней наклонной шкалы  $p_r = -0,1$ , получим для шкалы  $h_1$  (соответствующей переменной  $r_1$ ) значение коэффициента шкалы

$$a_{h_1} = \frac{a_R}{p_r} = \frac{-0,2}{-0,1} = 2 \text{ см}^{-1},$$

т. е. шкала  $h_1$  является прямой вертикальной шкалой с коэффициентом шкалы  $2 \text{ см}^{-1}$ .

Второе звено номограммы имеет две одинаковые прямые вертикальные шкалы  $h_1$  и  $h_2$  с коэффициентами шкалы  $2 \text{ см}^{-1}$  и ответную шкалу  $I$  для вспомогательной переменной  $r_2$  с коэффициентом шкалы

$$r_1 = a_{h_1} + a_{h_2} = 2 + 2 = 4 \text{ см}^{-1},$$

т. е. шкала  $I$  является прямой вертикальной шкалой с коэффициентом шкалы  $4 \text{ см}^{-1}$ ; она расположена посередине между шкалами  $h_1$  и  $h_2$ .

Третье звено номограммы имеет одну прямую вертикальную шкалу  $I$  вспомогательной переменной  $r_2$  с коэффициентом шкалы  $r_1 = 4 \text{ см}^{-1}$ , одну множительную внутреннюю наклонную шкалу для величины тангенса предельного угла  $\varphi$  и одну вертикальную шкалу для расстояния  $l$ .

Примем величину параметра преобразования  $p_\varphi$  равной  $p_\varphi = -0,5$ ; тогда расчетный коэффициент шкалы величины  $2l$  составит  $a_l = r_1 p_\varphi = 4 \cdot (-0,5) = -2 \text{ см}^{-1}$ , т. е. шкала  $l$  является обратной вертикальной шкалой с коэффициентом шкалы  $-2 \text{ см}^{-1}$ ; ее длина составляет  $15 \text{ см}$ .

Таким образом, длина всех вертикальных шкал составляет  $15 \text{ см}$ . Ширину первых двух звеньев номограммы примем равной  $10 \text{ см}$ .

В поле третьего звена находятся две перекрещивающиеся шкалы: вертикальная шкала  $h_2$  второго звена и наклонная шкала  $\varphi$  третьего звена. Для улучшения внешнего вида номограммы и облегчения пользования ею необходимо, чтобы в точке пересечения шкал находились круглые значения пометок обеих шкал. Для этого направляем наклонную шкалу  $\varphi$  так, чтобы она пересекала вертикальную шкалу в ее середине (пометка 15), и располагаем вертикальную шкалу  $l$  на таком расстоянии от шкалы  $h_2$ , чтобы в точке пересечения шкал  $h_2$  и  $\varphi$  получилась круглая пометка  $\varphi = 25^\circ$ .

Расстояние  $e_2$  между шкалами  $h_2$  и  $l$  находим из рассмотрения отношения сторон подобных треугольников

$$\frac{y}{y'} = \frac{e_2}{e_1}, \quad (22.8)$$

где  $e_1$ — расстояние между шкалами  $l$  и  $h_2$ ,  
 $y$  и  $y'$ —расстояния пометки  $\varphi = 25^\circ$  от нулевой и бесконечной критических точек соответственно.

Сравнивая с (2.2), находим

$$e_2 = \frac{f(u)}{p_\varphi} \cdot e_1.$$

Значение функций  $f(u) = \operatorname{tg} \varphi$  в точке пересечения шкал составляет  $\operatorname{tg} 25^\circ = 0,466$ ; подставляя  $p_\varphi = -0,5$  и  $e_1 = 5$  см, получаем

$$e_2 = \frac{0,466}{0,5} 5 = 4,66 \text{ см.}$$

Все вертикальные шкалы равномерные. Их градуирование осуществляем в соответствии со значением коэффициентов шкал. Исключение составляет шкала  $l$ . Функция этой переменной имеет вид  $2l$ . Поэтому в соответствии с (17.32) необходимо различать расчетный коэффициент шкалы  $a_1 = 2 \text{ см}^{-1}$  и вдвое меньший графический коэффициент  $a_1' = 1 \text{ см}^{-1}$ . Этот коэффициент шкалы и применен для градуирования вертикальной шкалы  $l$ .

Переходим к градуированию наклонных шкал. Из уравнения (22.3) видно, что функция  $r$  линейная и, следовательно, первичная шкала для построения наклонной шкалы этой функции должна быть равномерной. Так как шкала  $r$  является делительной, то первичная шкала должна разместиться на носителе шкалы  $R$ , а полюс—на носителе шкалы  $h_1$ . Для того чтобы не делать новых построений, воспользуемся в качестве первичной шкалы имеющейся градуировкой шкалы  $R$ ; коэффициент ее шкалы равен  $0,2 \text{ см}^{-1}$ . На основании (2.9) величина полюсного расстояния  $z_r$  шкалы  $r$  равняется

$$z_r = \frac{p_r}{a_R} = \frac{-0,1}{-0,2} = 0,5 \text{ см.}$$

Для нахождения полюса  $z_r$  необходимо отложить эту величину от начала шкалы  $h_1$  в сторону, противоположную направлению первичной шкалы  $R$ , т. е. расположить полюс на шкале  $h_1$  в точке с пометкой  $l$  (на расстоянии  $0,5$  см от критической точки). Градуирование наклонной шкалы  $r$  при таком значении полюсного расстояния является практически невозможным, так как лучи от такого полюса пересекают носитель шкалы  $r$  под весьма острыми углами. Поэтому назначаем ряд вспомогательных полюсов, каждый из которых позволяет градуировать часть шкалы  $r$  (§ 4). Из первого вспомогательного полюса, находящегося на шкале  $h_1$  в точке с пометкой  $20$ , т. е. при 20-кратном полюсном расстоянии проводим лучи к пометкам  $0,2, 0,3, 0,4 \dots$  шкалы  $R$  и полу-

чаем на проективной шкале  $r$  в 20 раз меньше пометки 0,01; 0,015; 0,02 и т. д. соответственно. Последний луч из этого полюса можно провести к нижнему концу шкалы  $R$ , т. е. к пометке 3,0. Этот луч дает на шкале  $r$  пометку 0,15. Таким образом, из первого вспомогательного полюса получаем деления шкалы  $r$  от 0,01 до 0,15. Для дальнейшего градуирования шкалы назначаем второй вспомогательный полюс в точке шкалы  $h_1$  с пометкой 10, т. е. при 10-кратном полюсном расстоянии; это позволяет довести градуирование шкалы  $r$  до пометки 0,30. Наконец, из третьего вспомогательного полюса в точке шкалы  $h_1$  с пометкой 5 (при 5-кратном полюсном расстоянии) получаем остальные пометки шкалы  $r$  (от 0,32 до 0,40).

Наклонная шкала функции  $\operatorname{tg} \varphi$  является множительной, поэтому первичная шкала ее должна располагаться на шкале переменной  $l$ ,

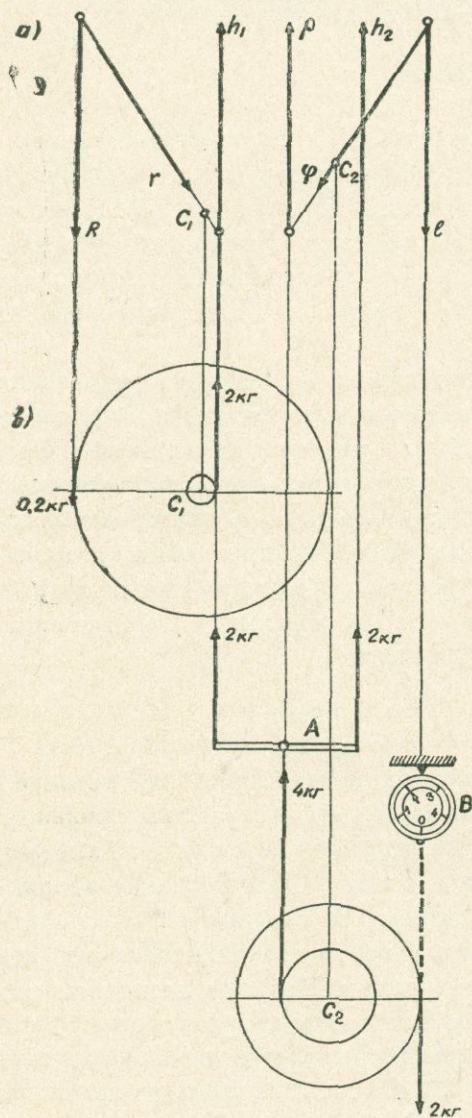
а полюс — на шкале  $l$ . Графический коэффициент шкалы  $l$  равен  $1 \text{ см}^{-1}$ . Поэтому величина полюсного расстояния шкалы  $\varphi$  равняется

$$z_{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{a_1'} = \frac{-0,5}{-1} = 0,5 \text{ см.}$$

Как и в предыдущем случае, назначим вспомогательные полюсы с полюсными расстояниями 2,5; 5 и 10 см и соответственно проводим лучи. Для получения значений функции  $\operatorname{tg} \varphi$ , откладываемых на первичной шкале  $l$ , пользуемся таблицей натуральных значений функции тангенса.

Готовая номограмма представлена на фиг. 23. Она имеет удобные размеры и достаточно компактна. При определении предельного угла по формуле (9.14) разрешающие прямые проводятся во втором и третьем звеньях, при определении этого угла по формуле (9.19) используются все три звена. Схема разрешающих прямых показана на ключе.

Механическая модель этой цепной номограммы показана на



Фиг. 63

фиг. 63. Первое и третье звенья номограммы (звенья с наклонными шкалами) моделируются спаренными шкивами  $C_1$  и  $C_2$  с навитыми на них тросами. Отношение радиусов колес равняется значениям параметров преобразования ( $p_r = -0,1$  и  $p_\varphi = -0,5$ ), а центры шкивов расположены в центрах соответствующих звеньев. Второе звено номограммы с параллельными шкалами моделируется равноплечим коромыслом  $A$ .

Усилия, приложенные к модели, изображают коэффициенты шкал независимых переменных, а усилие, измеряемое динамометром  $B$ , — коэффициент шкалы  $I$ . Устройство модели и ее работа понятны из чертежа.

Модель наглядно показывает, как отражается на показаниях динамометра изменение действующих на модель усилий (т. е. коэффициентов шкал) или изменения соотношения между радиусами колес спаренных шкивов (т. е. параметров преобразования), при условии сохранения равновесия.

## Х. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕПНЫХ НОМОГРАММ

### § 23. ПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ШКАЛ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

#### Виды преобразования номограмм

Важным приемом, позволяющим улучшить форму номограммы, не изменяя ее внутренней структуры, является коллинеарное\* преобразование плоскости. Так называется вид проективного преобразования, в котором точки одной плоскости переводятся в точки другой или той же самой плоскости, причем точки, лежащие на прямой, переходят в точки, также лежащие на прямой. Самый общий вид коллинеации отвечает проектированию данной фигуры из произвольной точки вне ее плоскости на какую-либо другую плоскость. Зависимость между декартовыми координатами соответственных точек  $x$  и  $y$  первоначальной и  $x'$  и  $y'$  преобразованной плоскостей выражается так:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}; \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad (23.1)$$

где  $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3)$  — постоянные числа, причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Частным видом коллинеарного преобразования является аффинное преобразование\*\*, которое характеризуется тем, что всякие параллельные прямые преобразуются в параллельные же прямые. Аффинное преобразование представляется формулами (23.1) при  $a_3 = b_3 = 0$  и  $c_3 = 1$

$$x' = a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{и} \quad y' = a_2x + b_2y + c_2. \quad (23.2)$$

Коллинеарное и, в особенности, аффинное преобразование с успехом применяются для улучшения вида номограмм с немногими, в частности с тремя переменными. В отношении цепных номограмм со многими переменными этот общий метод является слишком громоздким, так как преобразование, которое является удовлетворительным для одного звена, может оказаться ухудшающим качество другого. Поэтому в цен-

\* Коллинеарный [лат. com (cum) — вместе, linearis — линейный] — солинейный.

\*\* Аффинный (лат. affinitas — родство) — родственный или похожий.

ных номограммах большое значение имеют такие приемы преобразования, которые могут применяться порознь к отдельным звеньям. Так как шкалы вспомогательных переменных являются общими для соседних звеньев, необходимо, чтобы при этом изменялось только их положение, но не сами шкалы.

Преобразования такого рода представляют собой частный случай аффинных преобразований, при которых шкалы взаимно смещаются друг относительно друга, сохраняя свои основные элементы (длину, расположение пометок).

Преобразования этого типа были \* описаны в литературе [11, 12]; сюда входят сжатие по направлению осей  $X$ ,  $Y$  или по произвольному направлению и сдвиг вдоль осей  $X$  и  $Y$ . Для обобщения этих случаев преобразования напрашивается термин «деформативное преобразование». Из перечисленных видов деформативного преобразования в цепных номограммах широкое применение находит преобразование при сдвиге вдоль оси  $Y$ , осуществляемое по уравнениям

$$x' = x \text{ и } y' = a_2 x + y + c_2. \quad (23.3)$$

Они получаются из (23.2) при  $a_1 = b_2 = 1$  и  $b_1 = c_1 = 0$ .

Центрирование номограмм с параллельными шкалами представляет собой часто применяемый случай деформативного преобразования номограмм; другие примеры были рассмотрены в номограммах с наклонными шкалами. Деформативное преобразование звеньев положено в основу механической цепной номограммы, описание которой было дано в конце § 9.

Интересной областью применения коллинеарного преобразования номограмм является установление связи между различными элементами цепных номограмм; ниже будет показана эта связь для следующих случаев:

- 1) проективная связь между прямыми и обратными шкалами в номограммах с параллельными шкалами,
- 2) проективная связь между внутренними и внешними шкалами в номограммах с наклонными шкалами,
- 3) проективная связь между коэффициентами функциональных шкал и параметрами преобразования проективных шкал.

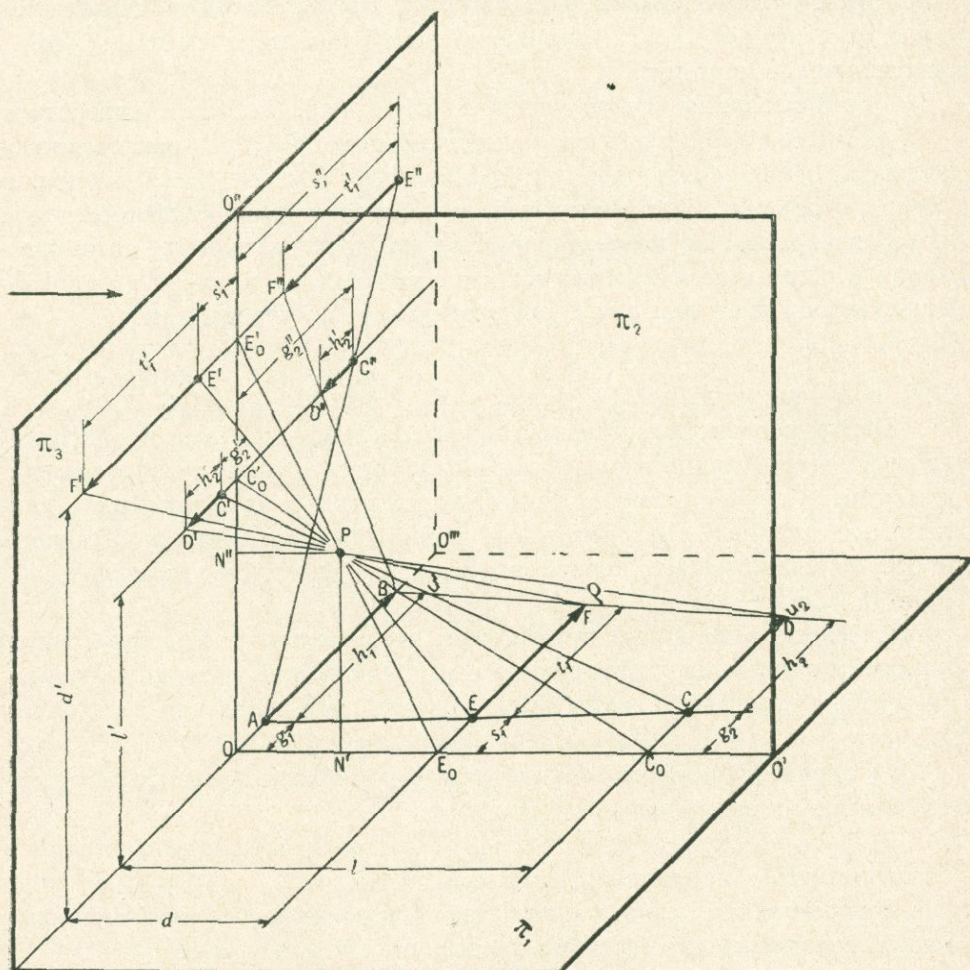
### Проективная связь между прямыми и обратными шкалами

Рассмотрим тот случай аффинного преобразования номограммы с параллельными шкалами, при котором изменяется направление шкал.

Такой случай имеет место при центральном проектировании номограммы, находящейся в плоскости  $\pi_1$ , из точки  $P$  на такую плоскость  $\pi_3$ , чтобы плоскости, проходящие через перпендикуляры  $PN'$  и  $PN''$ , опущенные из точки  $P$  на обе плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_3$ , и перпендикулярные к носителям шкал обеих номограмм, сливались во всех точках. Пример такого проектирования показан на фиг. 64. При преобразовании этого вида характеристики шкал сохраняются, но изменяется взаимное положение, а иногда их направление. Однако некоторые прямые и точки не

изменяют своего положения. Такие элементы плоскости являются инвариантными элементами преобразования.

Совмещая плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_3$ , легко убедиться, что инвариантными являются прямая  $OO'''$  (являющаяся общей для плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_3$ ) и перпендикулярная к ней прямая  $OO'$ , с которой сливается прямая  $OO''$ . Шкала, проходящая через точку  $O$ , является инвариантной во всех точках.



Фиг. 64

На прямой  $OO'$  инвариантными являются две точки: точка  $O$  пересечения прямых  $OO'$  с  $OO''$  и не показанная на фиг. 64 точка  $R$ , называемая главной инвариантной точкой. Положение точки  $R$  легко определить из рассмотрения плоскости  $\pi_2$  (фиг. 65); точка  $R$  находится на пересечении опорной линии  $OO'$  с прямой  $SR$ , проходящей через центр перспективы  $P$  и образующей равные углы с обеими опорными линиями  $OO'$  и  $OO''$ : если плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_3$  взаимно перпендикулярны, то прямая  $SR$  образует угол  $45^\circ$  с линией  $OO'$ .

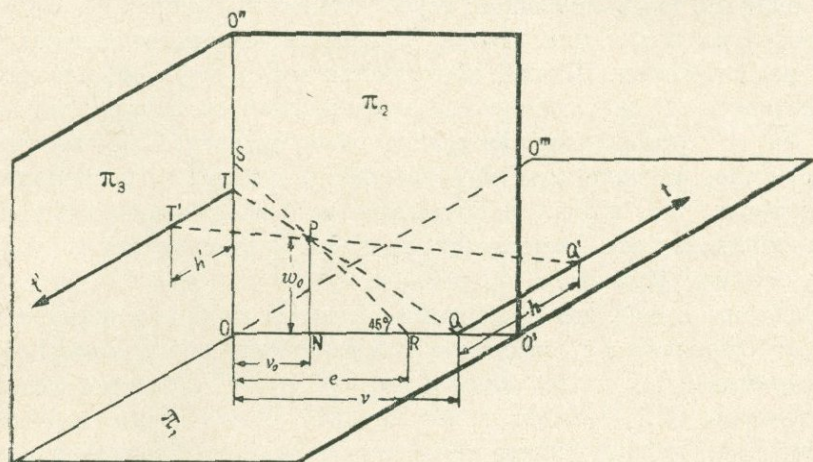
Из подобия треугольников  $SOR$  и  $PNR$  находим

$$e = v_0 + w_0,$$

т. е. расстояние главной инвариантной точки  $R$  от точечно-инвариантной прямой  $OO'''$  равно сумме координат  $v_0$  и  $w_0$  центра перспективы  $P$ .

— Так как инвариантными являются точка  $R$  и все точки прямой  $OO'''$ , то очевидно, что инвариантным является и весь пучок прямых, проходящих через точку  $R$  и точки прямой  $OO'''$ . Инвариантным является также носитель шкалы, проходящий через точку  $R$ ; при проективном преобразовании плоскости в себя эта шкала сохраняет положение своего носителя, но направление ее изменяется на обратное.

Найдем связь между значениями коэффициентов шкалы до и после



Фиг. 65

преобразования. На фиг. 65 показан носитель  $t$  шкалы некоторой функции, находящейся на плоскости  $\pi_1$ , и носитель  $t'$  шкалы той же функции после преобразования на плоскость  $\pi_3$ . Отрезок  $h$  на шкале  $t$  представляет длину шкалы, отвечающей произвольному интервалу функции  $A$ ; после преобразования этот отрезок превращается в  $h'$ . Коэффициенты шкал составляют: до преобразования  $a = \frac{A}{h}$ , после преобразо-

вания  $a' = \frac{A}{h'}$ , откуда

$$a' = -a \frac{h}{h'}. \quad (23.4)$$

Знак минус у длины шкалы  $t'$  показывает изменение направления шкалы.

Обозначим лучи, идущие в плоскости  $\pi_2$  от центра перспективы  $P$  до носителей шкалы  $t$  и  $t'$ , через  $PQ$  и  $PT$  соответственно. Из подобия треугольников  $TOQ$  и  $PNQ$  имеем  $PQ:PT = NQ:ON$ . Из подобия треугольников  $PQQ'$  и  $PTT'$  находим  $PQ:PT = QQ':TT'$ . Сравнивая, находим  $NQ:ON = QQ':TT'$ , откуда, подставляя значения отрезков, получаем

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{h}{h'};$$

сравнивая это выражение с (23.4), находим соотношение между коэффициентами шкал

$$a' = a \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right). \quad (23.5)$$

Уравнение (23.5) отражает все изменения, которые претерпевает коэффициент функциональных шкал в зависимости от соотношения между абсциссой  $v_0$  центра перспективы  $P$  и абсциссой  $v$  носителя шкалы  $t$ .

В области, расположенной левее\* точки  $N$  (фиг. 65),  $v < v_0$  и, следовательно,  $a' < a$ , т. е. шкала удаляется, сохраняет свое направление и растягивается. Шкала, проходящая через точку  $N$ , удаляется в бесконечность. Если перемещать первоначальную шкалу вправо от точки  $N$ , то преобразованная шкала возвращается с другой стороны пространства, изменив свое направление. В области, расположенной правее точки  $N$ ,  $v > v_0$  и, следовательно, преобразованная шкала является обратной; она стягивается по мере удаления первоначальной шкалы вправо. При  $v = 2v_0$ ,  $a' = -a$ .

Вернемся к фиг. 64. Номограмма с тремя прямыми шкалами  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$ , лежащая в плоскости  $\pi_1$ , преобразовалась в номограмму с одной прямой  $AB$  и двумя обратными  $C'D'$  и  $E'F'$  шкалами, лежащую на плоскости  $\pi_3$ . Для того чтобы придать номограмме удобный вид, производим ее деформативное преобразование. С этой целью переносим обратные шкалы вдоль их носителей, соблюдая условие, чтобы тройки значений пометок шкал, соответствующих их началам  $A$ ,  $C''$  и  $E''$  и их концам  $B$ ,  $D''$  и  $F''$ , лежали на прямых. После этого номограмма приобретает окончательный вид, показанный на той части плоскости  $\pi_3$ , которая расположена позади плоскости  $\pi_2$ .

### Проективная связь между внутренними и внешними наклонными шкалами

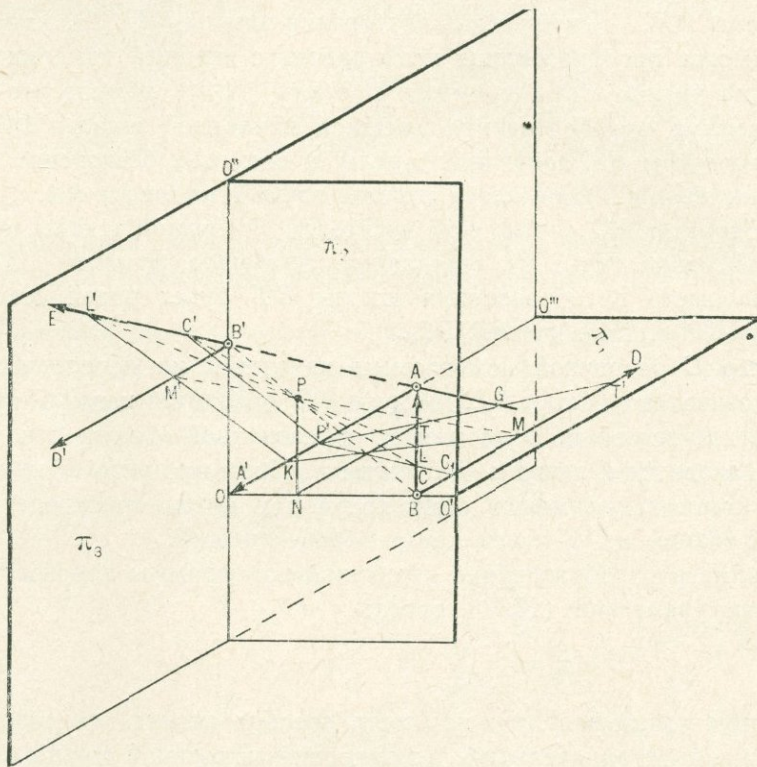
Рассмотрим тот случай аффинного преобразования номограммы с наклонными шкалами, при котором изменяется направление одной из вертикальных шкал.

Из предыдущего (фиг. 65) видно, что для этого необходимо расположить центр перспективы  $P$  таким образом, чтобы основание  $N$  перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на плоскость  $\pi_1$  номограммы, находилось между вертикальными шкалами; известно, что при  $v > v_0$  преобразованная шкала изменяет свое направление.

На фиг. 66 показана номограмма с наклонной шкалой, находящаяся на плоскости  $\pi_1$ ; она состоит из вертикальных шкал: обратной  $AA'$  и

\* Точки  $N, R, Q \dots$ , расположенные на опорной линии  $OO'$ , принадлежат также и фронтальной плоскости  $\pi_2$ .

прямой  $BD$  и внутренней наклонной множительной шкалы  $BA$ . Центр перспективы  $P$  располагается на плоскости  $\pi_2$ , проходящей через опорную прямую  $OO'$ , на которой расположена критическая точка  $B$ , и перпендикулярной к плоскости  $\pi_1$ . Проектирование номограммы производится на плоскость  $\pi_3$ , проходящую через носитель шкалы  $AA'$  и также перпендикулярную к плоскости  $\pi_1$ .



Фиг. 66

Из предыдущего видно, что шкала  $AA'$  является точно-инвариантной прямой. Преобразованная номограмма расположена на плоскости  $\pi_3$ ; она состоит из двух обратных вертикальных шкал  $AA'$  и  $B'D'$  и внешней наклонной множительной шкалы  $B'E$  (начальный участок). Разрешающая прямая  $KLM$  исходной номограммы переходит в разрешающую прямую  $KM'L'$  преобразованной номограммы.

Известный интерес может представить возможность наглядного представления значения параметра преобразования номограммы с внешней шкалой. Выше было показано, что параметр преобразования равен тому значению функции  $f_2(u_2)$ , при котором пометка наклонной шкалы удаляется в бесконечность (при  $p_2 = f_2(u_2)$ , из (17.25) следует  $u_2 \rightarrow -\infty$ ).

Такое удаление шкалы в бесконечность отвечает прохождению носителя шкалы через основание перпендикуляра  $N$ , опущенного из центра перспективы  $P$  на первичную плоскость номограммы  $\pi_1$ .

Из фиг. 66 видно, что такой точкой внутренней наклонной шкалы  $BA$ , которая удаляется в бесконечность при центральном проектирова-

нии из центра перспективы  $P$ , является точка  $T$ , находящаяся на прямой  $TN$ , параллельной направлению вертикальных шкал и проходящей через основание перпендикуляра  $N$ . Если точка  $P'$  является полюсом проективной шкалы функции  $f_2(u_2)$  на плоскости  $\pi_1$ , то ясно, что величине функции  $f_2(u_2)$ , при которой точка шкалы  $B'E$  преобразованной номограммы удаляется в бесконечность, соответствует точка  $T'$  первичной шкалы  $BD$ , служащей для построения шкалы  $BA$ . Так как величина параметра преобразования номограммы с внешней наклонной шкалой равна именно этому значению функции  $f_2(u_2)$ , то ясно, что величина параметра преобразования внешней наклонной шкалы  $B'E$  измеряется отрезком  $BT'$  первичной шкалы, а пометкой бесконечно удаленной точки шкалы  $B'E$  является пометка точки  $T$  на шкале  $BA$ .

На прямой  $BD$ , служащей носителем первичной шкалы функции  $f_2(u_2)$ , показана точка  $C_1$ , отвечающая значению функции  $f_2(u_2)=1$ ; тогда параметр преобразования шкалы  $B'E$  будет равен отношению отрезков  $BT'$  и  $BC_1$ ,  $p_2=BT'/BC_1$ .

Центр  $C$  первичной номограммы находится на пересечении луча  $P'C_1$  с носителями шкалы  $BA$ . На луче  $P'C'$  находится центр  $C'$  преобразованной номограммы. В плоскости, образованной обоими лучами  $P'C_1$  и  $P'C'$ , находится и центр перспективы  $P$ . Поэтому центр  $C'$  преобразованной номограммы может быть получен и путем непосредственного проектирования из  $C$  через центр перспективы  $P$ .

Параметр преобразования первичной номограммы плоскости  $\pi_1$  на основании уравнения (17.14) равен:

$$p_2 = -\frac{a_3}{a_1}. \quad (23.6)$$

Знак минус показывает, что параметр преобразования внутренней наклонной шкалы отрицательный. Для внешней наклонной шкалы преобразованной номограммы плоскости  $\pi_3$  будем иметь (сравните с (17.26))

$$p_2' = \frac{a_3'}{a_1}. \quad (23.7)$$

Так как носитель шкалы  $f_1(u_1)$  сливается с точно-инвариантной прямой  $OO'''$ , то коэффициент шкалы функции  $f_1(u_1)$  после преобразования остается неизменным, вследствие чего записываем  $a_1'=a_1$ .

При преобразовании шкалы функции  $f_3(u_3)$  происходит изменение коэффициента шкалы, выражаемое уравнением (23.5)

$$a_3' = a_3 \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right).$$

Подставляя это значение в (23.7), получаем

$$p_2' = \frac{a_3}{a_1} \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right),$$

а заменяя отношение коэффициентов шкал на основании (23.6), найдем величину параметра преобразования

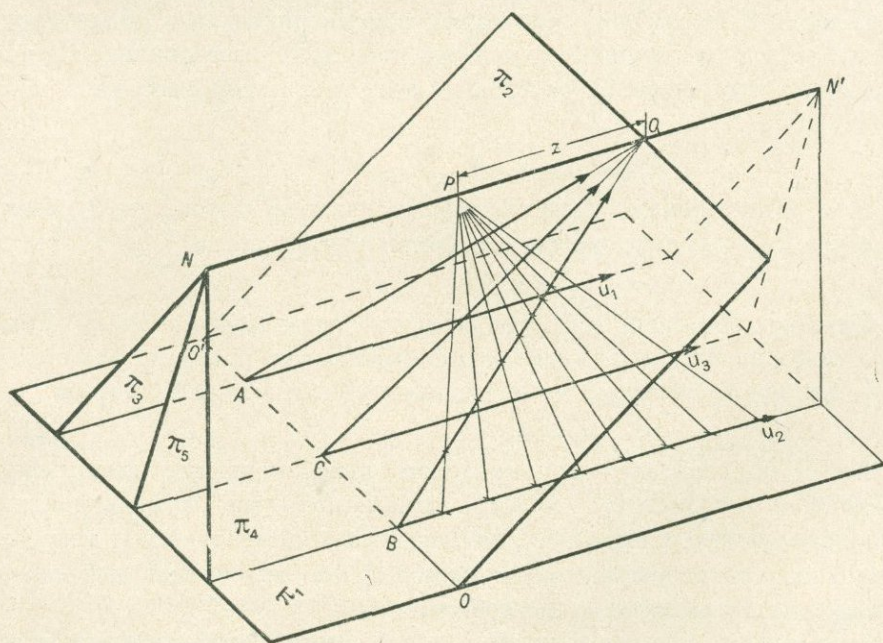
$$p_2' = -p_2 \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right). \quad (23.8)$$

Уравнение (23.8) показывает все изменения, которые претерпевает проективная шкала в зависимости от соотношения между абсциссами центра перспективы  $P$  и носителя вертикальной шкалы  $u_3$ . Если шкала  $u_3$  расположена левее точки  $N$  (фиг. 66), то  $v < v_0$  и  $p_2' < 0$  и, следовательно, наклонная шкала остается внутренней. Если же шкала  $u_3$  находится правее точки  $N$ , то  $v > v_0$  и знак параметра преобразования  $p_2$  становится положительным, т. е. внутренняя наклонная шкала превращается во внешнюю.

Сравнивая (23.8) с (23.5), убеждаемся в полной аналогии, существующей между коэффициентами функциональных шкал и параметрами преобразования проективных шкал при их аффинном преобразовании.

### Проективная связь между коэффициентами функциональных шкал и параметрами преобразования проективных шкал

Рассмотрим вначале случай коллинеарного преобразования номограммы с параллельными шкалами, когда последняя переходит в радиантную номограмму. Для этого необходимо, чтобы бесконечно удаленная точка первоначальной номограммы переводилась в бесконечную критическую точку преобразованной номограммы; тогда параллельные шкалы переводятся в шкалы, сходящиеся в одной точке.



Фиг. 67

На фиг. 67 показан случай коллинеарного преобразования номограммы с прямыми параллельными шкалами, находящейся на плоскости  $\pi_1$ , путем ее центрального проектирования из точки  $P$  на плоскость  $\pi_2$ , проходящую через осевую линию  $OO'$ , в которой значения функ-

ции  $f_i(u_i)$  ( $i=1, 2, 3$ ) равны нулю. Обозначим точки пересечения носителей шкал  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  с опорной линией через  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Проведем через центр перспективы  $P$  прямую  $NN'$ , параллельную носителям шкал номограммы. Пусть эта прямая пересекает плоскость  $\pi_2$  в точке  $Q$ . Проведем через прямую  $NN'$  и носители шкал  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  три плоскости  $\pi_3$ ,  $\pi_4$  и  $\pi_5$  соответственно.

Прямые  $AQ$ ,  $BQ$  и  $CQ$  представляют собой следы пересечения плоскостей  $\pi_3$ ,  $\pi_4$  и  $\pi_5$  с плоскостью  $\pi_2$ . При центральном проектировании из точки  $P$  номограммы плоскости  $\pi_1$  на плоскость  $\pi_2$  параллельные функциональные шкалы  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  переводятся в сходящиеся проективные шкалы  $AQ$ ,  $BQ$  и  $CQ$ .

Рассматривая последовательно плоскости  $\pi_3$ ,  $\pi_4$  и  $\pi_5$ , мы обнаружим на каждой из них: одну из шкал  $u_1$ ,  $u_2$  или  $u_3$  первоначальной номограммы; наклоненные к ним проективные шкалы  $AQ$ ,  $BQ$  или  $CQ$  преобразованной номограммы, пересекающиеся с функциональными шкалами  $u_1$ ,  $u_2$  или  $u_3$  в точках, где значение функции  $f_i(u_i)$  равно нулю (нулевая критическая точка); критическую точку  $Q$ , в которой значение функции  $f_i(u_i)$  стремится к бесконечности (бесконечная критическая точка); и центр проекции  $P$ , находящийся на расстоянии  $z$  от бесконечной критической точки  $Q$ . Так как пометки шкал первоначальной номограммы проектируются на шкалы преобразованной радиантной номограммы из точки  $P$ , то эту точку мы можем рассматривать, как полюс проективных шкал, а расстояние  $z$  назвать полюсным расстоянием. Из чертежа видно, что полюсные расстояния всех трех преобразованных шкал равны, т. е.

$$z_1 = z_2 = z_3 = z. \quad (23.9)$$

Для номограммы с параллельными шкалами плоскости  $\pi_1$  имеем известное соотношение между коэффициентами шкал

$$a_1 + a_2 = a_3. \quad (23.10)$$

Умножив обе части этого уравнения на некоторую величину  $z$ , мы не изменяем равенства  $a_1 z + a_2 z = a_3 z$ , а учитывая (23.9), переписываем  $a_1 z_1 + a_2 z_2 = a_3 z_3$ , откуда, на основании уравнения (2.9), имеем

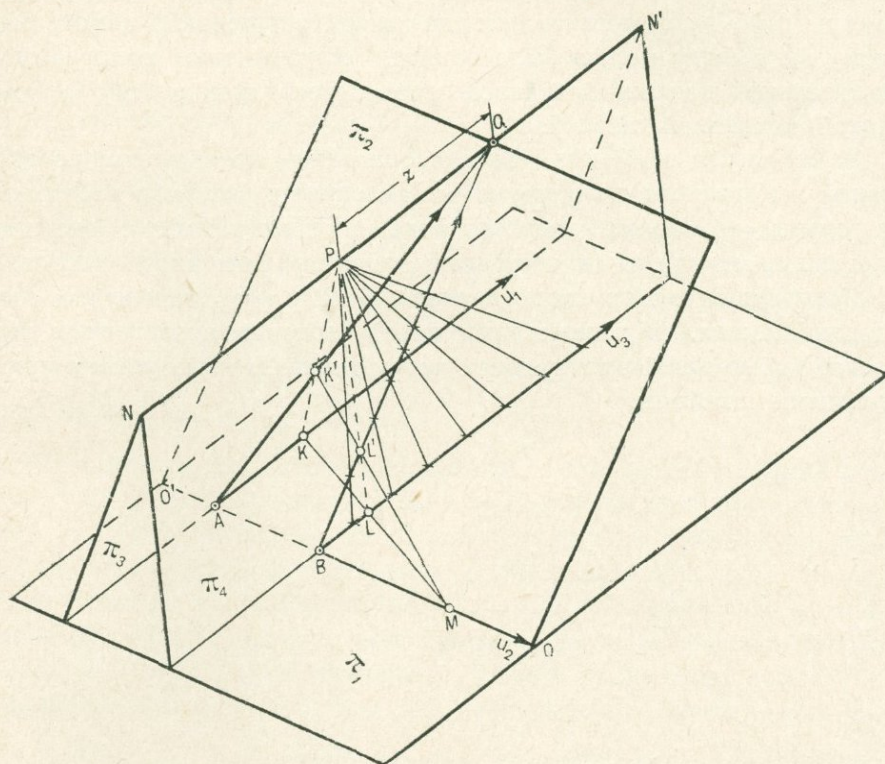
$$p_1 + p_2 = p_3. \quad (23.11)$$

Таким образом, при коллинеарном преобразовании номограммы аддитивное соотношение между коэффициентами функциональных шкал номограммы с параллельными шкалами переводится в такое же аддитивное соотношение между параметрами преобразования проективных шкал радиантных номограмм.

Рассмотрим, наконец, случай коллинеарного преобразования номограммы с внешней наклонной множительной шкалой, когда она переводится в треугольную номограмму; как известно, для этого бесконечно удаленная точка первоначальной номограммы должна переводиться в критическую точку преобразованной номограммы.

На фиг. 68 представлен такой случай коллинеарного преобразования номограммы с двумя прямыми шкалами  $u_1$  и  $u_3$  и внешней наклон-

ной шкалой  $u_2$ , находящейся на плоскости  $\pi_1$ , путем ее центрального проектирования из точки  $P$  на плоскость  $\pi_2$ , проходящую через носитель шкалы  $u_2$ . Прямая  $OO'$  пересечения плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  является точечно-инвариантной прямой описываемого преобразования. Аналогично предыдущему, обозначим критические точки шкал  $u_1$  и  $u_3$  через  $A$  и  $B$  соответственно; проведем через точку  $P$  прямую  $NN'$ , параллельную носителям вертикальных шкал  $u_1$  и  $u_3$ , и обозначим через  $Q$  точку пересечения этой прямой с плоскостью  $\pi_2$ . Проведем через прямую  $NN'$  и носители шкал  $u_1$  и  $u_2$  две плоскости  $\pi_3$  и  $\pi_4$  соответственно.



Фиг. 68

Прямая  $NN'$  принадлежит одновременно обеим плоскостям  $\pi_3$  и  $\pi_4$ , а прямые  $AQ$  и  $BQ$  представляют следы пересечения этих плоскостей с плоскостью  $\pi_2$ . На фиг. 68 показано, что в результате проектирования из точки  $P$  первичной номограммы плоскости  $\pi_1$  на плоскость  $\pi_2$  получается треугольная номограмма первого рода (тип II), служащая для умножения функции.

На каждой из плоскостей  $\pi_3$  и  $\pi_4$  имеются: первичные шкалы  $u_1$  или  $u_3$ ; наклонные шкалы  $AQ$  или  $BQ$ ; общий полюс  $P$ , находящийся на полюсном расстоянии  $z_1 = z_2 = z$ .

Для номограммы с внешней множительной наклонной шкалой плоскости  $\pi_1$  имеем (17.26)

$$a_1 p_2 = a_3, \quad (23.12)$$

а умножив обе стороны на величину полюсного расстояния  $z_1 = z_3$ , получим  $a_1 z_1 \cdot p_2 = a_3 z_3$ , откуда, на основании уравнения (2.9), записываем

$$p_1 \cdot p_2 = p_3. \quad (23.13)$$

Таким образом, при коллинеарном преобразовании номограммы с наклонными шкалами, характеристическое уравнение, связывающее коэффициенты функциональных шкал и параметры преобразования наклонных шкал, аналогичное структуре номографируемого уравнения, переводится в такое же аналогичное уравнение, связывающее параметры преобразования проективных шкал треугольной номограммы. К тому же выводу можно было прийти, если вместо номограммы с множительной наклонной шкалой рассмотреть номограмму с делительной наклонной шкалой.

Заслуживает внимания, что при описанном проективном преобразовании номограммы с внутренними наклонными шкалами переходят в треугольные номограммы первого рода, а номограммы с внешними наклонными шкалами—в треугольные номограммы второго рода.

Показанная выше важная аналогия между коэффициентами функциональных шкал и параметрами преобразования проективных шкал красной нитью проходит через всю теорию цепных номограмм с прямыми шкалами.

## ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В цепных номограммах с прямолинейными шкалами применяются два принципиально различных типа шкал—функциональные и проективные.

В функциональных шкалах значения аргумента  $u$  даются в виде пометок, а значения функции  $f(u)$ —в виде отрезков, отложенных в некотором масштабе от начальной точки. Характеристическим элементом функциональных шкал является коэффициент  $a$  шкалы (размерность  $L^1$ ); он соответствует тому значению функции, которое приходится на единицу длины шкалы. Коэффициент шкалы представляет собой величину, обратную модулю  $m$  шкалы,  $m = \frac{1}{a}$ .

Функциональные шкалы направлены в сторону возрастания значения функции; коэффициент шкалы представляет собой вектор, направление которого совпадает с направлением шкалы. Если все функциональные шкалы данной номограммы параллельны друг другу, то коэффициенты шкал могут рассматриваться, как алгебраические величины (например, коэффициенты направленных вверх шкал являются положительными, а вниз—отрицательными). Если в радиантных номограммах функциональная шкала служит для представления перевернутой функции  $F(u) = \frac{1}{f(u)}$ , то вместо вектора коэффициента шкалы должен рассматриваться вектор модуля шкалы.

В проективных шкалах значения аргумента  $u$  даются также в виде пометок, а значения функции  $f(u)$  равняются отношению  $g$  между направленными отрезками, в котором точки с этими пометками делят данный отрезок прямой, представляющей собой длину  $d$  проективной шкалы. Характеристическим элементом проективной шкалы является параметр преобразования  $p$  (безразмерная величина), представляющий собой частное от деления значения функции на величину отношения  $g$ .

$$p = \frac{f(u)}{g}.$$

В зависимости от того, в каком отношении делится длина шкалы, получаются внутренние ( $p < 0$ ) и внешние ( $p > 0$ ) проективные шкалы. Проективные шкалы ограничены критическими точками, в которых

значение функции равняется нулю или стремится к бесконечности. Внешние проективные шкалы содержат несобственную точку, в которой значение функции равняется параметру преобразования.

Другой характеристикой проективной шкалы является ее длина, которая в треугольных номограммах рассматривается как вектор, направленный от нулевой к бесконечной критической точке. В радиантных номограммах применяется вектор приведенной длины  $b$  шкалы,  $b=pd$ ; учитывая знак параметра преобразования, во внешних проективных шкалах направление вектора приведенной длины шкалы совпадает с направлением шкалы, а во внутренних шкалах этот вектор направлен в противоположную сторону.

При совместном применении функциональных и проективных шкал в радиантных номограммах векторы приведенных длин проективных шкал эквивалентны векторам модулей функциональных шкал; параметр преобразования функциональных шкал в этом случае может быть принят равным нулю.

При номографировании уравнений со многими переменными последние путем введения вспомогательных переменных заменяются системой уравнений с тремя переменными в каждом. Для каждого из уравнений с тремя переменными строится элементарная номограмма, причем шкалы для вспомогательных переменных попарно делаются тождественными. Различаются четыре типа элементарных номограмм с прямолинейными шкалами: с параллельными и наклонными шкалами, треугольные и радиантные. Первый и четвертый типы служат для сложения или вычитания функции, а второй и третий типы—для умножения или деления функции. Соответственно этому различаются четыре типа цепных номограмм, состоящих из однородных элементов. Характеристические элементы номограмм связаны соотношениями, аналогичными структуре номографируемых уравнений.

Для номограмм с параллельными шкалами доказывается, что: (1) коэффициент шкалы зависимой переменной равен алгебраической сумме коэффициентов шкал всех слагаемых функций независимых переменных и (2) момент коэффициента шкалы зависимой переменной равен алгебраической сумме моментов коэффициентов шкал всех слагаемых функций независимых переменных. На этом основании устанавливается статическая аналогия между коэффициентами шкал номограммы с параллельными шкалами и системой параллельных сил, приложенных к телу; эта аналогия позволяет выполнять графический расчет и построение цепных номограмм этого типа методом веревочного многоугольника.

Применение различно направленных (прямых и обратных) шкал в номограммах с параллельными шкалами позволяет сокращать значение коэффициента шкалы зависимой переменной и тем улучшать качество этой шкалы. Расчет номограммы и его контроль могут выполняться в табличной форме, пользуясь алгоритмом.

В радиантных цепных номограммах все шкалы направлены к точке пересечения шкал, которая является бесконечной критической точ-

Аддитивность характеристических элементов шкал номограмм второй канонической формы уравнений

Тип номограммы	Уравнение номограммы	Тип шкал независимых функций: (а) первой, (б) второй	Характеристические элементы		Характеристические уравнения		Тип шкалы зависимой переменной на основании анализа характеристических уравнений																												
			Коэффициент, модуль, или приведенная длина шкалы	Параметр преобразования	коэффициентов и длин шкал	параметров преобразования																													
1	2	3	4	5	6	7	8																												
Параллельные шкалы	$f_1(u_1) + f_2(u_2) = f_3(u_3)$	(а) функциональная	$a_1$	0	$a_1 + a_2 = a_3$	$0 + 0 = 0$	Функциональная шкала с коэффициентом шкалы $a_3$																												
		(б) функциональная	$a_2$	0				Радикантная для прямых функций	$f_1(u_1) + f_2(u_2) = f_3(u_3)$	(а) проективная	$b_1$	$p_1$	$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{b}_3$	$p_1 + p_2 = p_3$	Проективная шкала с параметром преобразования $p_3$ и приведенной длиной шкалы $b_3$	(б) проективная	$b_2$	$p_2$	Радикантная для перевернутых функций	$\frac{1}{F_1(u_1)} + \frac{1}{F_2(u_2)} = \frac{1}{F_3(u_3)}$	(а) функциональная	$m_1$	0	$\bar{m}_1 + \bar{m}_2 = \bar{m}_3$	$0 + 0 = 0$	Функциональная шкала с модулем шкалы $m_3$	(б) функциональная	$m_2$	0	Радикантная для прямых и перевернутых функций	$f_1(u_1) + \frac{1}{F_2(u_2)} = f_3(u_3)$	(а) проективная	$b_1$	$p_1$	$\bar{b}_1 + \bar{m}_2 = \bar{b}_3$
Радикантная для прямых функций	$f_1(u_1) + f_2(u_2) = f_3(u_3)$	(а) проективная	$b_1$	$p_1$	$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{b}_3$	$p_1 + p_2 = p_3$	Проективная шкала с параметром преобразования $p_3$ и приведенной длиной шкалы $b_3$																												
		(б) проективная	$b_2$	$p_2$				Радикантная для перевернутых функций	$\frac{1}{F_1(u_1)} + \frac{1}{F_2(u_2)} = \frac{1}{F_3(u_3)}$	(а) функциональная	$m_1$	0	$\bar{m}_1 + \bar{m}_2 = \bar{m}_3$	$0 + 0 = 0$	Функциональная шкала с модулем шкалы $m_3$	(б) функциональная	$m_2$	0	Радикантная для прямых и перевернутых функций	$f_1(u_1) + \frac{1}{F_2(u_2)} = f_3(u_3)$	(а) проективная	$b_1$	$p_1$	$\bar{b}_1 + \bar{m}_2 = \bar{b}_3$	$p_1 + 0 = p_3$	Проективная шкала с параметром преобразования $p_3$ и приведенной длиной шкалы $b_3$	(б) функциональная	$m_2$	0						
Радикантная для перевернутых функций	$\frac{1}{F_1(u_1)} + \frac{1}{F_2(u_2)} = \frac{1}{F_3(u_3)}$	(а) функциональная	$m_1$	0	$\bar{m}_1 + \bar{m}_2 = \bar{m}_3$	$0 + 0 = 0$	Функциональная шкала с модулем шкалы $m_3$																												
		(б) функциональная	$m_2$	0				Радикантная для прямых и перевернутых функций	$f_1(u_1) + \frac{1}{F_2(u_2)} = f_3(u_3)$	(а) проективная	$b_1$	$p_1$	$\bar{b}_1 + \bar{m}_2 = \bar{b}_3$	$p_1 + 0 = p_3$	Проективная шкала с параметром преобразования $p_3$ и приведенной длиной шкалы $b_3$	(б) функциональная	$m_2$	0																	
Радикантная для прямых и перевернутых функций	$f_1(u_1) + \frac{1}{F_2(u_2)} = f_3(u_3)$	(а) проективная	$b_1$	$p_1$	$\bar{b}_1 + \bar{m}_2 = \bar{b}_3$	$p_1 + 0 = p_3$	Проективная шкала с параметром преобразования $p_3$ и приведенной длиной шкалы $b_3$																												
		(б) функциональная	$m_2$	0																															

Тип номограммы	Уравнение номограммы	Тип шкал независимых переменных: (а) первой, (б) второй	Характеристические элементы		Характеристические уравнения		Тип шкалы зависимой переменной на основании анализа характеристических уравнений
			коэффициент или длина шкалы	параметр преобразования	коэффициентов или длин шкал	параметров преобразования	
1	2	3	4	5	6	7	8
Наклонные множительные шкалы	$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) = f_3(u_3)$	(а) функциональная	$a_1$	0	$a_1 p_2 = a_3$	$0 \cdot p_2 = 0$	Функциональная шкала с коэффициентом шкалы $a_3$
Наклонные делительные шкалы	$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = f_3(u_3)$	(б) проективная	$d_2$	$p_2$	$\frac{a_1}{p_2} = a_3$	$\frac{0}{p_2} = 0$	
Треугольные*	Тип I $\infty - 0; \infty - 0; \infty - 0$	(а) проективная	$d_1$	$p_1$	$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = \bar{d}_3$	$p_1 \cdot p_2 = p_3$	Проективная шкала длиной $a_3$ с параметром преобразования $p_3$
	Тип II $\infty - 0; \infty - 0; 0 - \infty$						
	Тип III $\infty - 0; 0 - \infty; 0 - \infty$	$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = f_3(u_3)$	$d_1$	$p_1$	$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 = 0$	$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 1$	
	Тип IV $\infty - 0; 0 - \infty; \infty - 0$	$\frac{f_1(u_1)}{f_2(u_2)} = \frac{1}{f_3(u_3)}$					

\* Расположение критических точек по шкалам переменных  $u_1, u_2, u_3$  на внутренних сторонах треугольника (фиг. 54), против хода часовой стрелки.

кой проективных шкал прямых функций и начальной (нулевой) точкой функциональных шкал перевернутых функций. Для этих номограмм доказывається, что: (1) параметр преобразования шкалы зависимой переменной равен алгебраической сумме параметров преобразования шкал функции всех слагаемых функции независимых переменных и (2) вектор приведенной длины или модуля шкалы зависимой переменной равен сумме векторов приведенных длин или модулей всех шкал функции независимых переменных.

Все эти зависимости для номограммы второй канонической формы уравнений иллюстрируются табл. 16. В столбцах 4 и 5 указаны характеристические элементы шкал функции, соответствующие типу шкал (столбец 3). Для каждого типа номограмм может быть составлено два характеристических уравнения: уравнение, связывающее коэффициенты шкал, модули шкал или их приведенные длины, и уравнение, связывающее параметры преобразований (столбцы 6 и 7). Структура этих уравнений аналогична структуре номографируемого уравнения (столбец 2). Совместный анализ этих уравнений однозначно определяет тип шкалы зависимой переменной и его характеристические элементы (столбец 8).

В цепных номограммах с наклонными шкалами все вертикальные шкалы являются функциональными, а наклонные—проективными. Для этих номограмм доказывається, что коэффициент шкалы зависимой переменной равняется произведению коэффициента функциональной шкалы первой независимой переменной на параметры преобразования проективных шкал функции остальных независимых переменных; все эти величины являются алгебраическими. Применение различного вида проективных шкал—внешних и внутренних, позволяет рационально подбирать значение коэффициента шкалы зависимой переменной и таким образом улучшить ее качество. Расчет номограммы с наклонными шкалами может быть произведен в табличной форме, пользуясь алгорифмом.

В треугольных цепных номограммах все шкалы являются проективными. Для этих номограмм доказывається, что: (1) параметры преобразования проективных шкал связаны соотношениями, структура которых аналогична структуре номографируемых уравнений, и (2) векторы длин шкал связаны соотношениями, аналогичными тем, которые могут быть получены путем логарифмирования номографируемого уравнения.

Применение различного вида проективных шкал (внешних и внутренних) в радиантных и треугольных номограммах позволяет рационально подбирать значение параметра преобразования и длины шкалы зависимой переменной и улучшать качество номограммы.

Указанные выше зависимости для номограмм первой канонической формы уравнений иллюстрируются табл. 17. Здесь также характеристические элементы шкал заданных независимых переменных (столбцы 4 и 5) соединяются в двух уравнениях: коэффициентов или длин шкал и параметров преобразования (столбцы 6 и 7), структура которых совершенно аналогична структуре номографируемого уравнения или получается из него на основании простого мнемонического правила.

Анализ этих уравнений позволяет также однозначно определять тип шкалы зависимой переменной и его характеристические элементы.

На этом основании все изложенные в настоящей работе принципиальные выводы могут быть сведены в одно-единственное правило:

*Для получения характеристических элементов шкалы зависимой переменной цепной номограммы (параметра преобразования и коэффициента шкалы) надо проделать над характеристическими элементами шкал независимых переменных такие же действия, которые связывают функции независимых и зависимых переменных в заданном уравнении цепной номограммы.*

В качестве иллюстрации напишем общее уравнение цепной номограммы, содержащей звенья первой и второй канонических форм уравнений,

$$f_1(u_1) \cdot f_2(u_2) \cdot \frac{f_3(u_3)}{f_4(u_4)} \cdot \dots \cdot f_{k-1}(u_{k-1}) + f_k(u_k) + f_{k+1}(u_{k+1}) + \dots + f_{n-1}(u_{n-1}) = f_n(u_n) \quad (1)$$

и сразу напишем для него совершенно аналогичное выражение коэффициента шкалы функции зависимой переменной, для случая, когда уравнение разрешается в номограммах с наклонными и параллельными шкалами

$$a_1 \cdot p_2 \cdot \frac{p_3}{p_4} \cdot \dots \cdot p_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n-1} = a_n \quad (2)$$

Если уравнение разрешается в треугольных и радиантных номограммах, то также аналогично напишется выражение для параметров преобразования

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \frac{p_3}{p_4} \cdot \dots \cdot p_{k-1} + p_k + p_{k+1} + \dots + p_{n-1} = p_n \quad (3)$$

Аналогично пишутся выражения и для предельных значений этой функции. Определение интервала функции, ее длины, положения ее шкалы и всех остальных параметров может быть произведено также легко.

Заканчивая на этом изложение теории, расчета и построения цепных номограмм с прямолинейными шкалами для функции многих переменных, автор счел бы себя вознагражденным, если бы он облегчил задачу самостоятельного конструирования номограмм для весьма распространенного класса формул, столь необходимых и, к сожалению, столь мало распространенных в практике инженерных расчетов.

ԻՆՃԵՆԵՐԱԿԱՆ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՍԱՆԳՂԱԿՆԵՐՈՎ  
ՇՂԹԱՅԱՎՈՐ ՆՈՄՈԳՐԱՄՆԵՐ

Պրոֆ., տեխն. գիտ. դոկտոր Գևորգ Տեր-Ստեփանյան

Ա մ փ ո փ ու մ

Շատ փոփոխականներով հավասարումների համար ուղղագիծ սանդղակներով նոմոգրամների ընդհանուր տեսության բացակայության պատճառով նրանց կառուցումը կապված է որոշ դժվարությունների հետ:

Քանի որ նույն հավասարման համար կարելի է կառուցել նոմոգրամների շատ տարատեսակներ, ապա նրանցից ամենահաջողը կարելի է ընտրել կառուցված նոմոգրամները համեմատելով: Հեղինակն առաջարկել է ուղղագիծ սանդղակներով նոմոգրամների ընդհանուր տեսություն և կազմել նրանց ալգորիթմները շատ փոփոխականներով հավասարումները ներկայացնելու համար: Հենվելով այդ տեսության վրա հեղինակը մշակել է նրանց հաշվարկի և կառուցման մի քանի ձևեր, որոնք թույլ են տալիս որոշել ապագա նոմոգրամի բոլոր տարրերը և մինչև կառուցումն ընտրել ամենահաջող տարատեսակը:

Աշխատությունը բաղկացած է տասը գլուխներից: Առաջին գլխում (§§ 1—4) շարադրված է ուղղագիծ սանդղակների նկարագրությունը: Այդ սանդղակները բաժանվում են երկու տիպի՝ ֆունկցիոնալ և պրոեկտիվ:

§ 1-ում նկարագրված են ուղղագիծ ֆունկցիոնալ սանդղակները, որում  $u$  արգումենտի արժեքը տրվում է նշագրման ձևով, իսկ  $f(u)$  ֆունկցիայի արժեքը հատվածի տեսքով, որը տեղադրվում է սանդղակի սկզբնական կետից որևէ մասշտաբով:

Սանդղակի  $a$  գործակիցը՝ սանդղակի  $m$  մոդուլի հակադարձ մեծություն է՝  $a = \frac{1}{m}$ : Սանդղակի գործակիցը՝ ֆունկցիայի  $A$  միջակայքի և սանդղակի  $h$  երկարության քանորդն է՝  $a = \frac{A}{h}$ , որի շափողականությունը  $L^{-1}$  (որ. սմ<sup>-1</sup>):

Սանդղակի գործակիցը վեկտոր է, որի ուղղությունը համընկնում է ֆունկցիայի աճի ուղղության հետ:

§ 2-ում նկարագրված են պրոեկտիվ սանդղակները, որոնք իրենցից ներկայացնում են ֆունկցիոնալ կախման այնպիսի պատկերում, որում  $u$  արգումենտի արժեքը տրվում է նշագրման տեսքով, իսկ  $f(u)$  ֆունկցիայի արժեքը հավասար է այն  $y$  և  $y'$  ուղղված հատվածներից  $g$  հարաբերությանը, որը

բաժանում է նշագրերը տված  $AB$  ուղիղի հատվածը՝  $g = \frac{y}{y'}$  (գծ. 3): Պրոեկտիվ սանդղակի բնութագրող տարրը՝ ձևափոխման պարամետրն է և այն հավասար է  $p = \frac{f(u)}{g}$

Պրոեկտիվ  $AB$  սանդղակը ստացվում է  $AC$  սկզբնական ֆունկցիոնալ սանդղակից, երբ այս վերջինը պրոեկտվում է  $P$  բևեռից: Պրոեկտիվ սանդղակներն ունեն երկու կրիտիկական կետեր՝  $A$  գերոյական  $B$  անվերջ:  $BP = z$  բևեռային հեռավորությունն է, որը գիտվում է իբրև վեկտոր: Ձևափոխման պարամետրը հավասար է սկզբնական սանդղակի գործակցի և բևեռային, հեռավորության արտադրյալին,  $p = az$ : Այստեղից երևում է, որ ձևափոխման պարամետրը չունի չափողականություն:

Պրոեկտիվ սանդղակի  $p$  ձևափոխման պարամետրի և  $d$  երկարության արտադրյալը կոչվում է սանդղակի  $b$  բերված երկարություն,  $b = pd$ : Պրոեկտումը՝ ներքին է, երբ ճառագայթը, որը ուղղված է  $p$  բևեռից դեպի  $AC$  սկզբնական սանդղակի անվերջ նշագրերը, հատում է  $CD$  պրոեկտիվ սանդղակը. արտաքին է, երբ նա չի հատում  $EF$  պրոեկտիվ սանդղակը (գծ. 2, տե՛ս նաև գծ. 15):

Պրոեկտիվ սանդղակի այն կետը, որի համար  $f(u)_c = 1$  կոչվում է սանդղակի կենտրոն: Պրոեկտիվ սանդղակի ձևափոխման պարամետրը զրական է արտաքին սանդղակների համար և բացասական՝ ներքինների համար: Արտաքին սանդղակներն ունեն անվերջ հեռացված կետ, որին համապատասխանում է  $f(u) = p$ :

Ներքին և արտաքին պրոեկտիվ սանդղակների հավասարման կանոնական ձևը, որը որոշում է տվյալ  $f(u)$  արժեք ունեցող նշակետի հեռավորությունը գերոյական կրիտիկական կետից (2.32) հավասարումն է, իսկ անվերջ կետից (2.33)-ն է: Այստեղ պլլուս նշանը համապատասխանում է ներքին պրոեկտիվ սանդղակներին, իսկ մինուսը—արտաքիններին:

§ 3-ում նկարագրված է ֆունկցիոնալ սանդղակների կառուցման տարբեր ձևեր՝ ա) ըստ բանաձևի, բ) պատճենահանման, գ) գրաֆիկական, դ) լուսանկարչական:

Պատճենահանումը կատարվում է պատրաստի սանդղակներից՝ հավասարաչափ և լուգարիթմական: Տարբեր չափերի լուգարիթմական քանոնների սանդղակների գործակիցների արժեքները տրվում է աղյուսակ՝ 1-ում: Այլ մեծություն ունեցող սանդղակների գործակիցները ստանալու համար կարող են օգտագործվել գրաֆիկական (գծ. 13) կամ լուսանկարչական ձևերը: Տրված է այդ ձևերի ընթացքի հակիրճ նկարագրությունը:

§ 4-ում նկարագրված է պրոեկտիվ սանդղակների կառուցման գրաֆիկական եղանակը: Ձևափոխման պարամետրի լավագույն արժեք ստանալու համար  $P$  բևեռը միացվում է  $CD$  սկզբնական սանդղակի նշագրերի հետ և փնտրում է ցանկացած ձևով աստիճանավորված  $L$  շերտիկի այնպիսի դիրք, որի դեպքում այդ շերտիկի բաժանումները համընկնում են  $P$  բևեռից տարված ճառագայթների հետ (գծ. 14):

Նկարագրված է օժանդակ բևեռի կիրառման եղանակը, որի օգնությամբ նարավոր է ստանալ պրոեկտիվ սանդղակի նույնիսկ այն նշագրերը, որոնք համապատասխանները գտնվում են սկզբնական սանդղակից զուրս կամ

այն դեպքում երբ ճարագայթները կազմում են սուր անկյուններ պրոեկտիվ սանդղակի հետ (գծ. 16):

Երկրորդ գլխում (§ 5) նկարագրված են թեք սանդղակներով նոմոգրամներ: Շատ փոփոխականներով հավասարման դեպքում, մտցնելով օժանդակ ընդ փոփոխականները, սովյալ (5. 1) բանաձևը կարելի է փոխարինել (5. 2) բանաձևերի սիստեմով, որից յուրաքանչյուրն ունի երեք փոփոխական (§ 5): Այդ հավասարումներից ամեն մեկի համար կառուցվում է երեք փոփոխականներով նոմոգրամ, որտեղ համապատասխան օժանդակ փոփոխականների սանդղակները նույնական են: Այդ տարրական նոմոգրամները կազմում են մի շղթայի հաջորդական օղակներ:

Շղթայի միջով անցիպացնելով լուծող ուղիղները (սովյալ երկու փոփոխականների սանդղակների վրա կետեր միացնող ուղիղը, որի հատումը երրորդ սանդղակի հետ պատասխանակետն է) գրաֆիկորեն արտաքսվում են բոլոր օժանդակ փոփոխականները և այդպիսով վերագարծվում է սիզբնական (5. 1) հավասարումը:

Տարբերվում են համասեռ տարրերից բաղկացած ուղղագիծ սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների շորս տիպեր՝ զուգահեռ սանդղակներով (գծ. 17a), թեք սանդղակներով (գծ. 17b), շառավղային (գծ. 17c և d) և եռանկյունային (գծ. 17e): Այդ գծագրերում ֆունկցիոնալ սանդղակները ցույց են տրված հոծ գծերով, իսկ պրոեկտիվները՝ կետագծերով:

Երրորդ գլխում (§§ 6 և 7) նկարագրված է զուգահեռ սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների տեսությունը և բացատրված են այս տեսության մեջ օգտագործված նոր տերմինները:

Ամեն մի  $f(u)$  փոփոխական ֆունկցիայի համար տարբերվում են  $f(u)_2$  մեծագույն և  $f(u)_1$  փոքրագույն արժեքներ, որոնց տարբերությունը կազմող  $A = f(u)_2 - f(u)_1$  ֆունկցիայի միջակայքը միշտ դրական է: Օժանդակ փոփոխականների համար համապատասխանորեն օգտագործված են  $(\rho)_2$ ,  $(\rho)_1$  և  $R$  սիմվոլները:

Ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքին համապատասխանում է սանդղակի մոտագույն (պրոքսիմալ) սահմանը, իսկ մեծագույն արժեքին նրա հեռագույն (դիստալ) սահմանը:

Սանդղակները սկսվում են մոտագույն սահմանով և վերջանում հեռագույնով, նրա երկարություն\* է՝  $h(t)$ : Կախված իրենց ուղղություններից սանդղակները կարող են լինել ուղիղ և հակադարձ:

Ուղիղ սանդղակների մոտագույն սահմանը գտնվում է նոմոգրամների ներքին մասում, իսկ հակադարձներինը՝ վերին մասում:

Սանդղակների գործակիցները  $a = \frac{A}{h} \left( r = \frac{R}{t} \right)$  դրական են ուղիղ սանդղակների և բացասական՝ հակադարձների դեպքում:

Սանդղակի գործակցի մոմենտը  $M(N)$  այդ գործակցի և քննարկվող կետից սանդղակի եղած հեռավորության արտադրյալն է: Սանդղակի մոտագույն սահմանի հեռավորությունը մինչև սանդղակին ուղղահայաց  $OO$  հենագիծը կոչվում է  $g$  հենակ (գծ. 20): Հենակին համապատասխանում է հենակային միջակայքը՝  $B = ag$  ( $S = rs$ ):

Վերոհիշյալ մեծությունները ադիտիվ են: Այդ լուսաբանվում է (6. 3)-ից մինչև (6. 8) հավասարումներով: Սանդղակներն աստիճանավորվում են ըստ (6. 9) հավասարման:

\*Օժանդակ փոփոխականների սիմվոլները գրված են փակագծում:

Ապացուցված են հետևյալ թեորեմաները.

**Թեորեմ 1.** Յանկացած օժանդակ գումարային (կամ կախյալ փոփոխական) ֆունկցիայի սանդղակի գործակիցը հավասար է բոլոր անկախ փոփոխականների գումարելի ֆունկցիաների սանդղակների գործակիցների հանրահաշվային գումարին (հավասարումներ 6. 10 և 6. 11):

**Թեորեմ 2.** Յանկացած օժանդակ գումարային (կամ կախյալ փոփոխականի) ֆունկցիայի սանդղակի գործակիցի մոմենտը հավասար է բոլոր անկախ փոփոխականների գումարելի ֆունկցիաների սանդղակների գործակիցների մոմենտների հանրահաշվական գումարին (հավասարումներ 6. 12 և 6. 13):

Այդ թեորեմաների ապացույցը հիմնված է (7. 3) երկրաչափական կապի հավասարման վերլուծման վրա (տե՛ս գծ. 20):

Զորրորդ գլխում (§§ 8—14) նկարագրված են զուգահեռ սանդղակներով շղթայվող նոմոգրամների հաշվարկի և կառուցման ձևերը: Սանդղակների բոլոր պարամետրների հաշվարկը կատարվում է նոմոգրամի ալգորիթմում (աղյուսակ 4): Այդ ալգորիթմում կան տողեր բոլոր  $\mathcal{N}$  անկախ փոփոխականների համար,  $\rho_k$  օժանդակ փոփոխականների համար և  $\mathcal{N}$  կախյալ փոփոխականի ֆունկցիայի համար: Վերջին տողում ցույց է տրված հաշվարկի ստուգումը (§ 8):

Այնուհետև նկարագրված են շղթայավոր նոմոգրամների ռացիոնալ կառուցման մի քանի ձևեր (§ 9): Սանդղակների կենտրոնադրումը բարձրացնում է արդյունքի գծագրական ճշտությունը (բանաձևեր 9. 1 և 9. 2, համապատասխանորեն ուղիղ և հակադարձ սանդղակների համար): Օժանդակ փոփոխականներով սանդղակների համադրումը անկախ փոփոխականներով աստիճանավորված սանդղակների հետ բարելավում է նոմոգրամը:

Հակադարձ սանդղակների օգտագործումը մեկ անկախ փոփոխականի համար նվազեցնում է կախյալ փոփոխականի սանդղակի գործակիցի արժեքը և այդպիսով մեծացնում է նրա երկարությունը: Սանդղակի անօգտակար մասերի կտրումը բարելավում է նոմոգրամը (բանաձևեր 9. 7 և 9. 8):

Ցույց է տրված, որ եթե (9. 9) բանաձևի մեջ մտնող ֆունկցիաները գծային, աստիճանային և եռանկյունաչափական են, ապա լոգարիթմելու միջոցով կարելի է բերել (9. 10) տեսքին: Անկախ փոփոխականների այդ տիպի ֆունկցիաների սանդղակների աստիճանավորումը որոշ դեպքերում կարելի է կատարել լոգարիթմական քանոններից համապատասխան սանդղակների պատճենահանմամբ (տե՛ս § 3):

Գծագիր 22-ում տրված է նոմոգրամի սխեման, որը օգտագործվում է բոլոր հորիզոնական հեռավորությունների հաշվարկի և յուրաքանչյուր օղակի ստուգման համար (բազուկների հավասարակշռություն): Նոմոգրամ՝ (գծ. 23) ծառայում է լուծող ուղիղներից և նոմոգրամի ուղղաձիգ սանդղակներից կազմված ամենափոքր անկյան մեծության որոշման համար, համաձայն (9. 14) և (9. 17) բանաձևերի: Սանդղակների օգտագործումը պետք է կատարվի խիստ հերթականությամբ, ըստ նրանց դասավորման նոմոգրամի վրա՝ ձախից դեպի աջ (§ 9):

Զուգահեռ սանդղակներով մեխանիկական շղթայավոր նոմոգրամը ցույց է տրված գծ. 24-ում: Նա բազկացած է մետաղյա շրջանակից՝ 1, որն ունի տրամաչափված անցքեր՝ 4: Այդ անցքերում ազատ կարող են շարժվել ձողեր՝ 5,

որոնց դասավորումը համապատասխանում է սանդղակների կրողների դիրքին: Չողերի վերին մասերը՝ սանդղակներն են: Անկախ փոփոխականների աստիճանավորված սանդղակների ձողերի՝ 6 միջին մասում մի մաս՝ 8 է ամբացված հաջորդաբար առջևի և հետևի կողմերից կենտ ու զույգ օղակներին համապատասխան: Օժանդակ փոփոխականների ձողերի՝ 7 միջին մասում մատները՝ 9 դուրս են ցցված երկու կողմից. մի ծայրը վերջանում է սոնիով, որի վրա պտտվում է մի շերտիկ՝ 10 երկու երկարավուն ճեղքերով, որոնց մեջ շարժվում են համապատասխան ձողերի մատները: Կախյալ փոփոխականի ձողի միջին մասում կա միայն մեկ մաս՝ 11 սոնիով, որի վրա պտտվում է շերտիկը: Գծ. 24-ում տրված մեխանիկական նոմոգրամը համապատասխանում է գրունտների հատիկաչափական անալիզի նոմոգրամին (գծ. 28, բանաձև 11. 1):

Մեխանիկական նոմոգրամն օգտագործելիս պետք է դուրս բաշել առաջին երկու անկախ փոփոխականների ձողերը, այնպես որ սանդղակների տվյալ նիշերը լինեն շրջանակի վերին եզրին: Դրա շնորհիվ առաջին օղակի օժանդակ համար սանդղակին համապատասխան ձողն ինքնաբերաբար կգրավի ճիշտ գիրք: Պահելով անշարժ այս ձողը և դուրս բաշելով երկրորդ օղակի աստիճանավորված սանդղակի ձողը, որոշվում է երկրորդ օղակի օժանդակ համար սանդղակի ձողի ճիշտ գիրքը և այլն: Վերջին օղակում կախյալ փոփոխականի աստիճանավորված սանդղակի գիրքը ցույց կտա արդյունքը:

Նույն շորրորդ գլխում նկարագրվում է զուգահեռ սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների անալիտիկ ձևով հաշվման և նրանց կառուցման մի քանի օրինակներ: § 10-ում տրվում է մասնակի համադրված սանդղակներով նոմոգրամի հաշվարկը և կառուցումը: Դա կապակցված գրունտների ծանցման գործակցի հաշվարկի նոմոգրամն է, երբ փորձը կատարվում է փոփոխական ճնշման տակ (գծ. 26), որը համապատասխանում է (10. 1) բանաձևին: Այդ օրինակը նկարագրված է մանրամասնորեն:

Քերվում է լրիվ համադրված սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների բնահողի մասնիկաչափական անալիզի համար (գծ. 28, բանաձև 11. 1) (§ 11): Այնուհետև տրվում է նոմոգրամ նշանահատման կշիռների որոշման համար (գծ. 29, բանաձև 11. 2):

§ 12-ում նկարագրվում է հակադարձ սանդղակներով նոմոգրամի հաշվարկը և կառուցումը: Այդ կոմբինացված նոմոգրամը (գծ. 30) ծառայում է մի շարք մեծութունների որոշման համար, որոնք օգտագործվում են գեոդեզիայում կետերի կոորդինատները հաշվարկելիս: Այդ նոմոգրամը համապատասխանում է (12. 1), (12. 2) և (12. 3) հավասարումներին:

Հետևյալ պարագրաֆը (§ 13) պարունակում է հատած հակադարձ սանդղակներով նոմոգրամների մի օրինակ, որը մետաղները կտրելիս հաստոցների կարողության որոշման նոմոգրամն է (գծ. 33, բանաձև 3. 31):

§ 14-ում նկարագրված են նոմոգրաֆիկ բլոկները: Դրանք ոչ լրիվ նոմոգրամներ են, որոնցում բացակայում է մեկ անկախ փոփոխականի սանդղակը: Այն էափոխվում է առանձին կետերի, որոնց գիրքը կախված է խնդրի պայմաններից: Համապատասխան օրդինատները կարող են հաշվվել այդ սանդղակի բանաձևի համաձայն: Այս ձևը թույլ է տալիս անհատական նոմոգրամներ: կառուցել առանձին մեքենաների, գործիքների, հաստոցների և այլնի համար, օգտագործելով նրանց մասնավոր պարամետրները: Իբրև օրինակ նկա-

րագրվում են սողանքային հենանշերի տեղաշարժման հաշվարկի նոմոգրաֆիկ բլոկները (գծ. 34 և 35, բանաձև 14. 1):

Հինգերորդ գլուխ (§§ 15 և 16) նկարագրվում է զուգահեռ սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների հաշվարկի ու կառուցման գրաֆիկական և գրաֆո-անալիտիկական ձևերը: Վերոհիշյալ երկու թեորեմաները թույլ են տալիս հաստատել հետևյալ ստատիկական համանմանությունը. «դիտելով զուգահեռ սանդղակներով նոմոգրամը որպես մի անկշիռ կարծր մարմին և անկախ փոփոխականների սանդղակների գործակիցները, որպես այդ մարմնին կիրառված զուգահեռ ուժեր, կարելի է կախյալ փոփոխականի սանդղակի գործակիցը դիտել որպես բոլոր կիրառված ուժերի համագորգ» (§ 15): Այդ համանմանությունը թույլ է տալիս պարանային բազմանկյան հատկությունները օգտագործել գրաֆիկական և գրաֆո-անալիտիկական եղանակներով նոմոգրամների հաշվման և կառուցման համար:

Շղթայավոր նոմոգրամների գրաֆիկական կառուցման համար օգտագործվում է հետևյալ հերթականությունը. անկախ փոփոխականների սանդղակների զուգահեռ կրիչները կամայական ձևով դասավորվում են թղթի վրա (գծ. 36a): Այդ փոփոխականների սանդղակների գործակիցները ընդունվում են կամայական մեծությամբ ըստ աղյուսակ 1-ի, հաշվի առնելով այդ փոփոխականների սահմանները և սանդղակի ցանկացած երկարությունը:

Գծագրի կողքին կառուցվում է ուժերի պլանը (գծ. 36b), որտեղ ուժերը համեմատական են սանդղակների գործակիցներին և համապատասխանում են սանդղակների ուղղությունը (օրինակ ուղիղ սանդղակները դեպի վեր և հակառակը): Դրանից հետո հայտնի ձևով կառուցվում է պարանային բազմանկյուն և որոշվում է ուժերի հաջորդական խմբերի համագործերի դիրքը: Այդ համագործերը համապատասխանում են օժանդակ փոփոխականների համը սանդղակների կրողներին: Վերջին բոլոր ուժերի համագործը ցույց է տալիս կախյալ փոփոխականի սանդղակի կրողի դիրքը: Այդ բոլոր կրողները շարունակվում են դեպի վեր (գծ. 36c) և անց է կացվում դրանց ուղղահայաց ՕՕ գիծը: Համապատասխան լոգարիթմական քանոնների սանդղակները, որոնք պետք է ծառայեն անկախ փոփոխականների աստիճանավորման համար, տեղադրվում են կրողների երկարությամբ և սանդղակի ուղղությամբ այն ձևով, որ այդ սանդղակների օգտագործվող մասերի կենտրոնները լինեն ՕՕ գծի վրա, ապա պատճենահանվում է սանդղակների աստիճանավորումը: Բացի դրանից կրողների վրա պետք է նշվի լոգարիթմական սանդղակի սկզբնակետի (նըշակետի) դիրքը և գրվի այդ կետի լոգարիթմական ֆունկցիայի արժեքը: Անկախ փոփոխականների սանդղակների մոտագույն և հեռագույն սահմաններով անցկացնելով հաջորդական լուծող ուղիղներ, կարելի է համապատասխանորեն գտնել բոլոր օժանդակ փոփոխականների սանդղակների և կախյալ փոփոխականի սանդղակի մոտագույն և հեռագույն սահմանների դիրքը: Նշանակետերի միջով անցկացնելով հաջորդական լուծող ուղիղները, կախյալ փոփոխականի սանդղակի կրողի վրա գտնում են մի կետ, որի համար կարելի է հաշվել լոգարիթմական ֆունկցիայի արժեքը. գծ. 36c-ի դեպքում այն հավասար է՝  $-2+1+5-3-1+1=+1$ :

Հայտնի է, որ կախյալ փոփոխականի սանդղակի գործակիցը հավասար է անկախ փոփոխականների սանդղակների գործակիցների հանրահաշվական գումարին: Վերցնելով այնպիսի լոգարիթմական սանդղակ, որի գործակիցը հավասար է այդ մեծությանը և դնելով այն կախյալ փոփոխականի կրողի

երկարութեամբ այնպես, որ նա ունենա համազորի ուղղութիւնը և նրա սկզբը-նակետը համընկնի կրողի վրա գտնված նշակետի հետ, պատճենահանվում է այդ սանդղակի աստիճանավորումը կախշալ փոփոխականի սահմանների միջակայքում: Իբրև գրաֆիկական ձևի օրինակ ցույց է տրված գրունտների շրահագեցման աստիճանի որոշման նոմոգրամը (գծ. 37, բանաձև 16. 3):

Վեցերորդ գլխում (§§ 17 և 18) ուսումնասիրվում են թեք սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամները:

Թեք սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների տեսութիւնը (17. 1) հավասարման համար, շարադրված է § 17-ում: Փոփոխականների բաժանումից հետո այն կարելի է փոխարինել (17. 2) հավասարումների սխեմայով: Թեք սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամի յուրաքանչյուր օղակն ունի երկու զուգահեռ ուղղագիծ ֆունկցիոնալ սանդղակներ առաջին և երրորդ ֆունկցիաների համար և մեկ թեք պրոեկտիվ սանդղակ երկրորդ ֆունկցիայի համար: Սանդղակները հատվում են պրոեկտիվ սանդղակների կրիտիկական կետերում, որոնք հանգիսանում են ֆունկցիոնալ սանդղակների սկզբնակետեր: Թեք սանդղակները կարող են լինել ներքին և արտաքին: Թեք սանդղակները տարբերվում են ըստ գրոյական և անվերջ կրիտիկական կետերի փոխադարձ դասավորման: Եթե գրոյական կետը գտնվում է աջ կողմում, ապա ստացվում է բազմապատկիչ սանդղակ, իսկ երբ գտնվում է ձախ կողմում՝ բաժանարար սանդղակ:

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեման.

**Թեորեմ 3.** ֆունկցիաների արտադրյալի (քանորդի) սանդղակի գործակիցը հավասար է առաջին անկախ փոփոխականի ֆունկցիայի ուղղագիծ սանդղակի գործակիցի և մնացած անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների պրոեկտիվ սանդղակների ձևափոխման պարամետրների արտադրյալին (քանորդին) (հավասարում 17. 28), հաշվի առած բոլոր արտադրիչների նշանները (ֆունկցիոնալ սանդղակների ուղղութիւնը և պրոեկտիվ սանդղակների տիպը):

Այս թեորեմայի ապացույցը հիմնված է (17. 9) երկրաչափական կապի հավասարման վերլուծման վրա (տե՛ս գծ. 39):

Պրոեկտիվ սանդղակների կենտրոնը նոմոգրամի C կենտրոնն է (գծ. 43): Երկու ուղղագիծ սանդղակների գործակիցների մոմենտներն այդ կենտրոնի նկատմամբ հավասար են:

Թեք սանդղակներով նոմոգրամի մեխանիկական մոդելը իրենից ներկայացնում է ատամնաձող՝ բազմապատկելի կամ բաժանելի ֆունկցիաների ուղղաձիգ ֆունկցիոնալ սանդղակի համար, մի զուգակցված շլանավոր ատամնանիվ՝ բազմապատկիչի կամ բաժանարարի ֆունկցիաների թեք պրոեկտիվ սանդղակի համար և մի այլ ատամնաձող՝ արտադրյալի կամ քանորդի ֆունկցիայի ուղղաձիգ ֆունկցիոնալ սանդղակի համար: Սանդղակի գործակիցներն այն ուժերն են, որոնք կիրառված են ատամնաձողի վրա, իսկ ձևափոխման պարամետրը այն հարաբերութիւնն է, ըստ որի փոխանցվում են ուժերը (այդ մեծութիւնը հակադարձ է արագութիւնների փոխանցմանը համապատասխանող փոխանցման թվին):

Ատամնանիվների կենտրոնը դա նոմոգրամի կենտրոնն է, իսկ անիվների շառավիղները հավասար են ուղղաձիգ սանդղակների հեռավորութիւնը նոմոգրամի կենտրոնից: Գծ. 45b և 46b ցույց են տալիս ներքին և արտաքին սանդղակներով գծ. 45a և 46a նոմոգրամների մեխանիկական մոդելները Թեք սանդղակներով նոմոգրամի պարզեցրած մոդելը իրենից ներկայացնում

է երկու ճոպան և երկու ճոպանանիվներից բաղկացած զուգակցված գլան, որի կենտրոնը համընկնում է նոմոգրամի կենտրոնի հետ (զծ. 45Ե և 46Ե):

Թեք սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամի մեխանիկական մոդելը՝ մի ատամնաձող է առաջին սանդղակի համար. բազմաստիճան գլանային ատամնավոր փոխանցում, որի ամեն մի օղակը բաղկացած է զուգակցված ատամնաձիվից մնացած անկախ փոփոխականի սանդղակից յուրաքանչյուրի համար և մի ատամնաձող կախյալ փոփոխականի սանդղակի համար: Այդ զուգակցված ատամնանիվների կենտրոնները գտնվում են շղթայավոր նոմոգրամի համապատասխան օղակների կենտրոններում: Առաջին անկախ փոփոխականի սանդղակի գործակիցը՝ այն ուժն է, որը կիրառված է առաջին ատամնաձողին, իսկ ձևափոխման պարամետրները՝ այն հարաբերություններն են, ըստ որոնց փոխանցվում են ուժերը: Օժանդակ սանդղակների գործակիցները՝ շոշափող ուժերն են ատամնանիվների հսկման կետերում և վերջապես, կախյալ փոփոխականի սանդղակի գործակիցը՝ ուժն է երկրորդ ատամնաձողում: Թեք սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամի պարզեցրած մոդելը բազմաստիճան գլանային շփումնային փոխանցում է ճոպաններով առաջին և վերջին ֆունկցիոնալ սանդղակների համար: Գծ. 47-ը ներկայացնում է (17. 33) հավասարման շղթայավոր նոմոգրամը և նրա պարզեցրած մեխանիկական մոդելը:

Թեք սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների հաշվարկի և կառուցման գործնական ձևերը շարադրված են § 18-ում: Հաշվարկի ընթացքը բաղկացած է հետևյալ քայլերից՝ 1) առաջին անկախ փոփոխականի ֆունկցիոնալ սանդղակի գործակիցի որոշումը, 2) մնացած բոլոր անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների սկզբնական սանդղակների գործակիցների և ձևափոխման պարամետրների որոշումը, 3) օժանդակ փոփոխականների սանդղակների գործակիցների և սահմանների որոշումը, 4) կրիտիկական կետերի դիրքերի որոշումը և ուղղագիծ սանդղակների կենտրոնացումը, 5) ուղղաձիգ սանդղակների միջտարածություն և նոմոգրամի լայնություն որոշումը, 6) թեք սանդղակների դիրքի որոշումը և նրանց կրողների գծագրումը և 7) բոլոր սանդղակների կառուցումը:

Թեք սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամի ալգորիթմը ցույց է տրված 14-րդ աղյուսակում:

Յոթերորդ գլխում (§ 19) հակիրճ նկարագրված են եռանկյունային նոմոգրամները: Նրանք ներկայացնում են առաջին ձևի կանոնական հավասարումների նոմոգրամների ընդհանուր տեսքը: Այդ նոմոգրամների բոլոր երեք սանդղակներն էլ պրոեկտիվ են: Եռանկյունային նոմոգրամները բաժանվում են երկու տեսակի: Առաջին տեսակն ունի երկու ներքին պրոեկտիվ սանդղակ և մեկ արտաքին սանդղակ, իսկ երկրորդ տեսակում բոլոր սանդղակներն էլ արտաքին են: Գծ. 53-ը համապատասխանում է երկրաչափական կապի (19. 4) հավասարմանը: Ըստ կրիտիկական կետերի դասավորման տարբերվում են չորս տիպի եռանկյունային նոմոգրամներ (զծ. 54):

Այնուհետև տրվում է տարբեր տիպի եռանկյունային նոմոգրամների կառուցվածքի, նրանց հավասարումների կառուցվածքի, ձևափոխման պարամետրների և երկարությունների վեկտորների հավասարումների միջև եղած առնչությունները:

Այսպես մենք ունենք առաջին տիպի համար՝ (19. 5), (19. 7) և (19. 8) հավասարումները, երկրորդ տիպի համար՝ (19. 9)—(19. 11), երրորդ տիպի

համար՝ (19. 12)—(19. 14) և վերջապես չորրորդ տիպի համար՝ (19. 15)—  
—(19. 17): Այստեղից երևում է, որ ձևափոխման պարամետրները կապ-  
ված են այնպիսի առնչություններով, որոնք անալոգ են համապատասխան  
նոմոգրամների հավասարումների կառուցվածքին:

Ութերորդ գլխում (§§ 20 և 21) նկարագրված են շառավղային շղթայա-  
վոր նոմոգրամները:

§ 20-ում տրված է մի կետում հատվող սանդղակներով շառավղային շղ-  
թայավոր նոմոգրամները: Շղթայավոր նոմոգրամներ կարելի է կառուցել  
(20. 1) և (20. 2) բանաձևերի համար: Առաջին դեպքում բոլոր սանդղակները  
պրոեկտիվ են, իսկ երկրորդ դեպքում ֆունկցիոնալ Շառավղային նոմոգրամ-  
ների երկրաչափական կապի (20. 7) բանաձև համապատասխանում է  
գծ. 55ա-ին:

Շառավղային նոմոգրամների ֆունկցիոնալ սանդղակները բնութագրվում  
են նրանց մոդուլներով, իսկ պրոեկտիվ սանդղակները՝ նրանց բերված երկա-  
րություններով: Սանդղակների մոդուլները և բերված երկարությունները կա-  
րող են գիտվել ինչպես վեկտորներ: Նրանց ուղղությունը որոշվում է սանդղակ-  
ների գործակցի կամ ձևափոխման պարամետրի նշանին համապատասխան:

Երկու շուռ տված ֆունկցիաների գումարի դեպքում (բանաձև 20. 2)  
կախյալ փոփոխականի սանդղակի  $m_3$  մոդուլի վեկտորը հավասար է անկախ  
փոփոխականների սանդղակների  $m_1$  և  $m_2$  մոդուլների վեկտորների գումարին  
(գծ. 55Ն, բանաձևեր 20. 11): Երկու ուղիղ ֆունկցիաների գումարի դեպքում  
(բանաձև 20. 1) նույն առնչությունը գոյություն ունի սանդղակների բերված  
երկարությունների վեկտորների միջև (բանաձև 20. 18 և 20. 21), իսկ ձևա-  
փոխման պարամետրերը կապված են (20. 15) առնչությամբ: Այդ եզրակա-  
ցությունները կարելի է տարածել նաև շատ փոփոխականներով հավասարում-  
ների վրա (բանաձևեր 20. 12, 20. 25 և 20. 26):

Թեորեմ 4. Յանկացած օժանդակ գումարելի (կամ կախյալ փոփոխա-  
կանի) ֆունկցիայի պրոեկտիվ սանդղակի ձևափոխման պարամետրը հավա-  
սար է բոլոր անկախ փոփոխականների գումարելի ֆունկցիաների պրոեկտիվ  
սանդղակների ձևափոխման պարամետրների հանրահաշվական գումարին:

Ուղիղ և շուռ տված ֆունկցիաների գումարի դեպքում համազոր ուղիղ  
ֆունկցիայի սանդղակը պրոեկտիվ է. այդ սանդղակի տարբեր տարրերը կապ-  
ված են (20. 34) առնչությամբ, որը անալոգ է (20. 11) և (20. 18) կամ (20. 21)  
հավասարումներին: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ ֆունկցիոնալ սանդղակի  
 $m$  մոդուլ գաղափարին համապատասխանում է պրոեկտիվ սանդղակների  $b$   
բերված երկարությունների գաղափարը:

Ուղիղ և շուռ տված ֆունկցիաներ պարունակող շատ փոփոխականներով  
(20. 35) հավասարման համար կարող են գրվել հետևյալ հավասարումները՝  
ա) մոդուլների և բերված երկարությունների վեկտորների գումարի (20. 36)  
հավասարումը և բ) սանդղակների ձևափոխման պարամետրերի (20. 37) հա-  
վասարումը:

Ազատ դասավորված սանդղակներով շառավղային նոմոգրամները նկա-  
րագրված են § 21-ում: Սանդղակները կարող են տեղափոխվել  $O$  կրիտիկական  
կետից, իրենց կրողների երկարությամբ, կամայական  $P$ ,  $Q$  և  $R$  կետերը  
(գծ. 55ա):

Սկզբնական նոմոգրամի  $KLM$  լուծող ուղիղի փոխարեն երկրաչափա-  
կան կապը սանդղակների միջև այս դեպքում իրագործվում է  $K'K''M''M'$  լու-

ծող բեկված գծի միջոցով, օգտագործելով  $QA'$  և  $QB'$  օժանդակ ուղիղները, որոնք անց են կացվում  $Q$  կետից՝ համապատասխանորեն  $OA$  և  $OB$  սանդղդակներին զուգահեռ:  $K'K''$  և  $M''M'$  հատվածները համապատասխանորեն զուգահեռ են  $PQ$  և  $QR$  ուղիղներին (տե՛ս նաև գծ. 59):

Գծ. 60-ը ներկայացնում է ազատ դասավորված սանդղակներով մի նոմոգրամ շատ փոփոխականներով (21. 1) հավասարման համար, որի ալգորիթմը տրված է 15-րդ աղյուսակում: Այդպիսի նոմոգրամ կառուցելիս անկախ փոփոխականների սանդղակներն ազատ տեղադրվում են թղթի վրա. նրանց կրողները շարունակվում են մինչև հատվելը: Սանդղակների բերված երկարությունների (եթե այդ ֆունկցիաներն ուղիղ են) կամ նրանց մոդուլների (եթե նրանք շուռ տված են) վեկտորների գումարումը հաջորդաբար կատարվում է համապատասխան սանդղակների կրողների հատման կետում, ըստ (21. 2) հավասարումների փոխարինող սխեմեմի կառուցվածքին: Համազորի ուղղությունը ցույց է տալիս օժանդակ փոփոխականների համը սանդղակների դիրքը: Վերջին համազորի ուղղությունը համապատասխանում է կախյալ փոփոխականի սանդղակի կրողի դիրքին: Այս սանդղակի սկզբնակետերը կարող են ազատ տեղադրվել այդ կրողի վրա: Գծ. 61 ներկայացնում է ազատ դասավորված սանդղակներով նոմոգրամի օրինակ (21. 3) հավասարման համար:

Իններորդ գլխում (§ 22) շարազրված է ոչ համասեռ տարրերով ուղղագիծ սանդղակներով շղթայավոր նոմոգրամների համառոտ նկարագրությունը: Հաճախ շատ փոփոխականներով ինժեներական հավասարումների ձևը այնպիսին է, որ նրանց հավասարումների սխեմեմով փոխարինելիս, ստացվում է առաջին և երկրորդ կանոնական ձևերի համակցություն: Այդ պատճառով էլ նոմոգրամի օղակները կոնենան տարբեր երկրաչափական կառուցվածք: Այդ նոմոգրամների կառուցումը կատարվում է օղակների հաջորդական հաշվարկի միջոցով: Գծ. 62-ում տրված են հինգ փոփոխականով հավասարման համար յոթ սխեմա: Տեքստում տրված են նրանց համապատասխան հավասարումները և բնութագրող բանաձևերը: Իբրև օրինակ տրվում է նոմոգրամի ուղղածիզ սանդղակներից և լուծող ուղիղներից կազմված ամենափոքր անկյուն նոմոգրամի հաշվարկը և կառուցումը (բանաձևեր 9. 14 և 9. 19, գծ. 23): Այդ նոմոգրամի մեխանիկական մոդելն է գծ. 63:

Վերջին տասներորդ գլուխը (§ 23) պարունակում է որոշ գիտողություններ շղթայավոր նոմոգրամների ձևափոխման վերաբերյալ:

Հարթության կոլինեար (համագիծ) ձևափոխումը մի կարևոր ձևափոխություն է, որը հնարավորություն է տալիս բարելավել նոմոգրամը առանց խախտելու նրա ներքին կառուցվածքը: Երկրաչափորեն դա նոմոգրամի պրոեկտումն է մի հարթությունից մի ուրիշ հարթության վրա: Անալիտիկորեն դա արտահայտվում է (23. 1) հավասարումների միջոցով: Կոլինեար ձևափոխման մի մասնավոր դեպքն է աֆին ձևափոխումը, երբ բոլոր զուգահեռ ուղիղները մնում են զուգահեռ և բոլոր անվերջ հեռացած կետերը մնում են որպես անվերջ հեռացած կետեր. դա արտահայտվում է (23. 2) հավասարումներով: Սովորական (երեք փոփոխականներով) նոմոգրամների ձևափոխման այդ տիպերը հարմար չեն շղթայավոր նոմոգրամների համար, քանի որ նրանք փոխում են սանդղակների բնութագրերը: Այդ պատճառով էլ վերոհիշյալ ձևափոխությունը եթե բարելավում է շղթայավոր նոմոգրամի մեկ օղակը կարող է վատթարացնել մեկ ուրիշը:

ձևափոխումը, որն ստացվում է նոմոգրամի սեզմելուց, ձգելուց կամ սահբից:

Գոյություն ունի աֆին ձևափոխման մի մասնավոր դեպք՝ դեֆորմատիվ Գեֆորմատիվ ձևափոխման դեպքում որոշ սանդղակներ մնում են ինվարիանտս և հետևաբար ձևափոխման այս ձևը կարող է կիրառվել շղթայավոր նոմոգրամների ամեն մի օղակի համար առանձին: Անալիտիկորեն սահբը Y առանցքի ուղղութիւնով արտահայտվում է (23. 3) հավասարումներով:

Այնուհետև ցույց է տրված տարբեր տիպի նոմոգրամների մեջ պրոեկտիվ առնչութիւններ: Հարթութեան աֆին ձևափոխման հետևանքով ուղիղ ֆունկցիոնալ սանդղակները դառնում են հակադարձ սանդղակներ (գծ. 64) իսկ ներքին թեք պրոեկտիվ սանդղակները՝ արտաքին սանդղակներ (գծ. 66): Հարթութեան կոլինեար պրոեկտիվ ձևափոխութեան հետևանքով զուգահեռ սանդղակներով նոմոգրամը դառնում է շառավղային (գծ. 67), իսկ թեք սանդղակներով նոմոգրամը՝ եռանկյունային (գծ. 68): Երկու դեպքում էլ սանդղակների գործակիցների միջև եղած առնչութիւնները (բանաձևեր 23. 10 և 23. 12) անալոգեն ձևափոխման պարամետրների միջև եղած առնչութիւններին (բանաձևեր 23. 11 և 23. 13): Սանդղակների գործակիցների և ձևափոխման պարամետրների միջև եղած այդ համանմանութիւնը կարմիր թելի պես անցնում է շղթայավոր նոմոգրամների տեսութեան միջով:

Եզրակացութիւնում շեշտվում է ֆունկցիոնալ և պրոեկտիվ սանդղակների միջև եղած տարբերութիւնը: Ֆունկցիոնալ սանդղակները բնորոշվում են գործակիցների արժեքով, շուտ տված ֆունկցիաների դեպքում նրանց սանդղակները բնորոշվում են մոդուլներով: Ֆունկցիոնալ սանդղակների ձևափոխման պարամետրները կարող են ընդունվել զերոյի հավասար: Պրոեկտիվ սանդղակները բնորոշում են ձևափոխման պարամետրների արժեքով: Որոշ դեպքերում պետք է հաշվի առնվի նաև այդ սանդղակների բերված երկարութիւնները:

Ֆունկցիաների գումարման կամ հանման համար ծառայող նոմոգրամների վերոհիշյալ բնորոշող տարրերի միջև գոյութիւն ունեցող հարաբերութիւնը ցույց է տրված 16-րդ աղյուսակում: Նոմոգրամների յուրաքանչյուր տիպի համար (զուգահեռ սանդղակներով կամ շառավղային) կարող են գրվել երկու բնութագրող հավասարում՝ 1) սանդղակների գործակիցների և երկարութիւնների հավասարում և 2) ձևափոխման պարամետրների հավասարում: Այդ հավասարումները ցույց են տալիս բնութագրերի ազիտիվ հատկութիւնները: Հավասարումների համատեղ վերլուծութիւնը տալիս է համազոր ֆունկցիայի սանդղակի բնութագիրը:

Ֆունկցիաների բազմապատկման կամ բաժանման համար ծառայող նոմոգրամների վերոհիշյալ բնորոշող տարրերի մեջ գոյութիւն ունեցող առնչութիւնները ցույց են տրված 17-րդ աղյուսակում: Նոմոգրամների յուրաքանչյուր տիպի համար (թեք սանդղակներով և եռանկյունային) կարող են գրվել նույն տիպի երկու բնութագրող հավասարումներ: Այդ հավասարումները անալոգ կերպով արտացոլում են նոմոգրամի հավասարման կառուցվածքը և ցույց են տալիս համազոր ֆունկցիայի սանդղակի բնութագիրը:

Հիմնվելով այս եզրակացութիւնների վրա, տվյալ աշխատութեան բոլոր տեսական դրույթները կարելի է ընդհանրացնել մի եզակի օրենքով՝ «շղթայավոր նոմոգրամի կախյալ փոփոխական ֆունկցիայի սանդղակի բնութագիրը, այսինքն նրա սանդղակի գործակիցը և ձևափոխման պարամետրը ստանալու համար, անհրաժեշտ է տրված ֆունկցիաների սանդղակների բնութագրերը

ենթարկել նույն գործողութիւններին, որոնք շղթայավոր նոմոգրամի հավասարման մեջ կապում են անկախ և կախյալ փոփոխական ֆունկցիաները»:

Այս դրույթի լուսաբանման համար տրված է (1) հավասարումը և այդ հավասարման համար անմիջապէս գրվում են երկու միանգամայն անալոգ արտահայտութիւններ՝ (2) հավասարումը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ այդ նոմոգրամը բաղկացած է թեք և զուգահեռ սանդղակներով օղակներից, իսկ (3) հավասարումը՝ այն դեպքն է, երբ այդ օղակները իրենցից ներկայացնում են եռանկյունային և շառավղային նոմոգրամներ:

# ENGINEERING CHAIN NOMOGRAMS WITH RECTILINEAR SCALES

By

George Ter-Stepanian, Professor, Dr. Techn. Sc.

## S u m m a r y

The construction of nomograms with rectilinear scales for equations with many variables involves a number of difficulties due to the lack of a general theory for such nomograms. Since many variants of the nomogram for the same equation may be constructed, the best one can be found only by trial and error. The author suggested the general theory of nomograms with rectilinear scales for equations with many variables and composed their algorithms. Several methods of their calculation and construction, based on this theory, have been worked out. These methods permit the calculation of all elements of the future nomogram and the selection of the optimum variant before the construction of the nomogram itself.

The work consists of ten chapters. In Chapter One (§§ 1—4) the rectilinear scales are outlined: scales are divided into functional and projective ones.

Functional scales are described in § 1. In these scales the arguments  $u$  are shown as marks and the functions  $f(u)$ , as distances of these marks from the origin of scales.

The coefficient  $a$  of the scale is inverse to the modulus  $m$  of the scale,  $a = \frac{1}{m}$ . The coefficient of the scale is the ratio of the interval  $A$  of the function to the length  $h$  of the scale,  $a = \frac{A}{h}$ ; its dimension is  $L^{-1}$  (i.e.  $\text{cm}^{-1}$ ). The coefficient of the scale is a vector, the direction of which corresponds to that of the increase of the function.

Projective scales are described in § 2. In these scales the arguments  $u$  are shown as marks and the functions  $f(u)$  are the ratios  $g$  of those directed segments  $y$  and  $y'$  of a straight  $AB$ , which are formed by these

marks,  $g = \frac{y}{y'}$  (Fig. 3). The characteristic element of a projective scale

is its parameter of transformation,  $p = \frac{f(u)}{g}$ .

A projective scale  $AB$  may be obtained from a primary functional scale  $AC$ , when this is projected from a pole  $P$ . Projective scales have two critical points: a zero critical point  $A$  and an infinite critical point  $B$ . The polar distance  $BP = z$  is considered as a vector. The parameter of transformation is the product of the coefficient of primary scale and of the polar distance,  $p = az$ ; hence it is dimensionless.

The reduced length  $b$  of a projective scale is a vector, which equals the product of the parameter of transformation and of the vector of the length of the projective scale,  $b = pd$ . The projecting is internal if the ray directed from the pole  $P$  to the infinite mark of the primary scale  $AB$  does intersect the projective scale  $CD$ , and external, if it does not intersect the projective scale  $EF$  (Fig. 2, see also Fig. 15).

The centre of the projective scale is the point where  $f(u)_c = 1$ . Parameters of transformation of external projective scales are positive while those of internal scales are negative. External projective scales have infinitely remote points which correspond to  $f(u) = p$ .

The canonic form of equations of projective scales, determining the distances of marks of the given  $f(u)$  values from the zero critical point is the equation (2.32) and that from the infinite critical point is the equation (2.33); here the sign plus corresponds to the internal projective scales while minus—to the external ones.

Different methods of construction of functional scales are described in § 3. They are: (a) construction by the equation; (b) copying of scales; (c) graphic methods; and (d) a photographic method.

The copying is done from commercial uniform or logarithmic scales. Values of coefficients of logarithmic scales made on different slide rules are given in Table 1. To obtain scales with differing values of coefficients of scales, graphic (Fig. 13) and photographic methods may be used. A concise description of these methods is given.

The graphic method of construction of projective scales is described in § 4. The optimum value of the parameter of transformation can be found if one draws rays from the pole  $P$  (Fig. 14) to marks of the primary scale  $CD$ , and finds the position of a strip of paper  $L$  with desirable graduation that best befits these rays.

A method of auxiliary poles  $P_1, P_2 \dots$  may be used that permits to show on the projective scale the position of such marks which are beyond the primary scale or when the rays form sharp angles with the projective scales (Fig. 16).

In Chapter Two (§ 5) chain nomograms are outlined. In the case of an equation with many variables, introducing auxiliary variables  $\rho_i$ , the given equations (5.1) may be replaced by a system of equations (5.2)

with three variables in each (§ 5). For each of these equations nomograms with three scales may be constructed, the scales for the corresponding auxiliary variables being identical. These elementary nomograms form successive links of a chain. By drawing the solution lines (straight lines connecting given points on two scales and intersecting a response point on the third one) through the chain, one graphically excludes all auxiliary variables, and thus returns to the primary equation (5.1).

Four types of chain nomograms with rectilinear scales consisting of homogeneous elements are distinguished: with parallel scales (Fig. 17a), with inclined scales (Fig. 17b), radial (Fig. 17c and d) and triangular (Fig. 17e). In these figures the functional scales are marked by full lines and the projective scales by dotted ones.

In Chapter Three (§§ 6—7) the theory of chain nomograms with parallel scales is suggested; several new terms used in this theory are defined. For each of the given functions  $f(u)$  of variables the greatest  $f(u)_2$  and the least  $f(u)_1$  values are distinguished. Their difference is the interval  $A$  of the function,  $A = f(u)_2 - f(u)_1$ ; it is always positive. For the auxiliary variables symbols  $(\rho)_2$ ,  $(\rho)_1$  and  $R$  are used, respectively.

To the least value of the function corresponds the proximal limit of the variable, and to the greatest value—its distal limit. The scale begins at its proximal limit and terminates at its distal one. The length of the scale\* is  $h(t)$ . The scale may be direct or inverse depending on its direction. The proximal limit of direct scales is to be found in the lower part of the nomogram and that of inverse scales—in the upper one.

The coefficients of the scales are the ratios  $a = \frac{A}{h} \left( r = \frac{R}{t} \right)$ ; these coefficients are positive for the direct scales and negative for the inverse ones. The moment  $M(N)$  of the coefficient of the scale is the product of this coefficient and of the distance of the scale from the point considered. The distance between the proximal limit of the scale and the basic line  $OO'$  (Fig. 20) perpendicular to scales is the base  $g(s)$ . Base interval correspond to the base,  $B = ag$  ( $S = rs$ ).

The above-mentioned quantities are additive; this is illustrated by equations (6.3) to (6.8). The scales must be graduated according to equations (6.9). The following theorems are proven:

*Theorem 1.* The coefficient of the scale of any auxiliary summary function (or the function of the dependent variable) equals the algebraic sum of the coefficients of scales of all the summing functions of the independent variables (eqs. 6.10 and 6.11).

*Theorem 2.* The moment of the coefficients of scales of any auxiliary summary function (or the function of the dependent variable) equals the algebraic sum of the moments of the coefficients of scales of all the summing functions of the independent variables (eqs. 6.12 and 6.13).

---

\* Symbols for the auxiliary variables are in brackets.

The demonstration of these theorems is based on an analysis of the equation (7. 3) of the geometric bond, see Fig. 20.

In Chapter Four (§§ 8—14) the methods of calculation and construction of the chain nomograms with parallel scales are described. The calculation of all parameters of scales is performed in an algorithm of the nomogram (Table 4). The algorithm includes lines for the given functions of the independent variables  $u_i$ , for the auxiliary variables  $\rho_k$  and for the function of the dependent variable  $u_n$ ; in the last line the control of calculation is shown (§ 8).

Further, some methods of rational construction of chain nomograms are described (§ 9). The centring of scales increases the graphic exactness of the result (eqs. 9.1 and 9.2 for direct and inverse scales, correspondingly). The confluence of some mute scales for the auxiliary variables with the graduated scales for the independent variables improves the nomogram. The use of the inverse scales for one of the independent variables diminishes the value of the coefficient of the scale for the dependent variable and therefore makes it larger. The truncation of useless parts of the resulting scale shortens its length (eq. 9.7 and 9.8).

Then the construction of chain nomograms for eq. (9.9) is discussed; such equation may be transformed into the sum of logarithmic linear, power and trigonometric functions (eq.9.10). The graduation of scales for such functions for independent variables in certain cases may be effected by copying corresponding scales of slide rules (see § 3).

The scheme of the nomogram (Fig. 22) is used for the calculation of all horizontal distances and for the control of each link (equilibrium of levels). Nomogram (Fig. 23) serves for the determination of the values of the least angles between the solution lines and the vertical scales of the nomogram, according to the eqs. (9.14) and (9.17). The scales must be used in strict succession as to their disposition on the nomogram from left to right (§ 9).

A mechanical chain nomogram with parallel scales is shown on Fig. 24. It consists of a metal frame 1 with calibrated holes 4 in which bars 5 can move freely; the disposition of the bars corresponds to the location of bearers of scales. The upper part of bars are scales. In the middle part of the bars 6 for the graduated scales for independent variables fingers 8 are made, successively on the front and on the rear sides for the odd and the even links, respectively. In the middle parts of bars 7 for the auxiliary variables two fingers 9 project on both sides; one side ends with a spindle on which a strip 10 with two slits can rotate. These slits are in constant contact with the fingers of the corresponding bars. In the middle part of the bar for the dependent variable there is only one finger 11 with a spindle for the strip. The mechanical nomogram shown on Fig. 24 corresponds to the nomogram for the granulometric analysis of the soil (Fig. 28, eq. 11.1).

Using the mechanical nomogram one pulls out the first two bars for the independent variables in such a way that the given marks of scales

be on the upper edge of the frame; then the corresponding bar for the mute auxiliary scale of the first link will automatically take the correct position. Keeping this bar immovable and pulling out the graduated scale of the second link one finds the correct position of the second auxiliary mute scale and so on. In the last link the position of the graduated scale for the dependent variable will yield the result.

In the same Chapter Four several examples of calculation of the chain nomograms with parallel scales by the analytical method are described. They also include a description of the construction of such nomograms. The calculation and the construction of a nomogram with partly confluent scales are given in § 10. This is the nomogram for the computation of permeability of cohesive soils by variable head (Fig. 26) according to eq. (10.1); this example is discussed in detail. In § 11 the chain nomogram with wholly confluent scales for the granulometric analysis of the soil is shown (Fig. 28, eq. 11.1). Then the nomogram for the determination of weight of intersections is given (Fig. 29, eq. 11.2).

In § 12 the calculation and construction of a nomogram with inverse scales are described. This combined nomogram (Fig. 30) serves for the determination of several quantities used in geodesy for the computation of increments of coordinates. This nomogram corresponds to equations (12.1) to (12.3).

The next paragraph contains an example of a nomogram with truncated scales (§ 13); it is the nomogram for the determination of horsepower by the machining of metals (Fig. 33, eq. 13.1).

In § 14 nomographic blocks are described. They represent incomplete nomograms in which one scale for the independent variable fails. This scale degenerates into separate points, the positions of which depend on the specific conditions; corresponding ordinates may be calculated according to the equation of this scale. This method enables the construction of individual nomograms for machines, devices, installations etc. using their specific parameters. As an example the nomographic blocks for calculation of the displacement of landslide marks are described (Figs. 34 and 35, eq. 14.1).

In Chapter Five (§§ 15—16) graphic and grapho-analytic methods of calculation and construction of the chain nomograms with parallel scales are described. The above-mentioned two theorems permit to formulate the following static analogy: „considering a nomogram with the parallel scales as a weightless solid body, and the coefficients of scales of independent variables as parallel forces applied to this body, one can regard the coefficient of the scale of dependent variable as the resultant of all the applied forces“ (§ 15). This analogy permits to use the properties of the funicular polygon for the calculation and the construction of the chain nomograms by means of graphic and grapho-analytic methods.

The following is the procedure used for the graphic construction of chain nomograms. The parallel bearers of the scales for independent variables are placed arbitrarily on the sheet of paper (Fig. 36a). The coeffi-

coefficients of scales for these variables are selected arbitrarily, according to Table 1, taking into consideration the limits of variables and the desired length of scales. A plan of forces is drawn on the side of the same sheet of paper (Fig. 36 b), the forces being proportional to the coefficients of scales and directed along the scales (i.e. the forces for direct scales upwards and vice versa).

Following the well-known method a funicular polygon is built and the position of the resultants of the successive groups of forces is found. These resultants correspond to the bearers of scales of the auxiliary variables; the last resultant of all forces shows the location of the bearer of the scale of the dependent variable. All these bearers are lengthened upwards (Fig. 36 c). Perpendicularly to these bearers line  $OO$  is drawn. Logarithmic scales taken from the corresponding slide rules which are meant for the graduation of the scales for independent variables are placed along these bearers in such a way as to be directed along the scales. The centres of usable parts of the scales should be on the line  $OO$ ; then the graduation of scales is copied. The position of the origin of logarithmic scales of slide rules (marks) are to be shown on the bearers and the values of the logarithmic function in these points to be written. Drawing the successive solution lines through the proximal and the distal limits of the scales for independent variables the position of corresponding limits of the scales for all auxiliary variables may be found, and for the scale of the dependent variable as well. Drawing the successive solution lines through the marks, a point on the bearer of the scale for dependent variable may be found. The value of the logarithmic function for this point can be calculated: in the case of Fig. 36 c it equals  $-2+1+5-3-1+1=+1$ . It is known that the coefficient of the scale for the dependent variable is the algebraic sum of coefficients of scales for the independent variables. Taking a logarithmic scale with the coefficient of scale equal to this value and placing this scale along the bearer of the dependent variable so that it should be directed along the resultant, we bring in line the origin of this scale with the mark on the bearer, and copy the graduation of the scale in the interval between the limits of this variable. As an example of the graphic method of construction the nomogram for the determination of the degree of saturation of soils (eq. 16.3) is given (Fig. 37).

In Chapter Six (§§ 17—18) the chain nomograms with inclined scales are dealt with.

The theory of chain nomograms with the inclined scales for eq. (17.1) is given in § 17. This equation may be replaced by the system of equations (17.2) upon separation of the variables. Each link of the chain nomogram with inclined scales has two parallel vertical functional scales for the first and the third function of the equations (17.2), and an inclined projective scale for the second function. The vertical scales intersect the projective scales at their critical points; they are the zero points of functional scales. The projective scales may be either internal or external.

The inclined scales are distinguished according to the reciprocal disposition of the zero and infinite critical points. If the zero point is on the right side, it is a multiplier scale, and if it is on the left side it is a divisor scale. The following theorem is proved:

*Theorem 3.* The coefficient of the scale of the product (quotient) of functions equals the product (quotient from the division) of the coefficient of the vertical scale for the first function of independent variable and the parameters of transformation of all projective scales of the remainder functions of the independent variables (eq. 17.28), taking into consideration the signs of all factors (the direction of the functional scales and the type of the projective scales).

The demonstration of this theorem is based on the analysis of the equation of the geometric bond (17.9), see Fig. 39.

The centre of the projective scale is the centre of the nomogram (Fig. 43). The moments of the coefficients of both vertical scales relating to this point are equal.

The mechanical model of the nomogram with inclined scales is a system consisting of a rack for the vertical functional scale of the multiplicand or the dividend function, a coupled cylindrical gear wheel for the inclined projective scale of the multiplier or the divisor function and another rack for the vertical functional scale of the product or the quotient function. The coefficients of scales are forces applied to the racks and the parameter of transformation is the ratio by which the forces are transmitted (it is inverse to the gear ratio, which corresponds to the transmission of velocities).

The centre of the gear wheels is in the centre of the nomogram, and the radii of wheels equal to the distance of vertical scales from the centre of the nomogram. Figs. 45 b and 46 b illustrate the mechanical models of nomograms with internal and external scales, shown in Figs. 45 a and 46 a, respectively. The simplified model of the nomogram with inclined scales is a coupled cylinder, consisting of two pulleys and ropes; the centre of the cylinders coincides with the centre of the nomogram (Figs. 45 c and 46 c).

The mechanical model of the chain nomogram is a rack for the first scale; a multistage cylindrical toothed gear, each link of which consists of a couple gear wheel for each of the scales of the remaining independent variables; and a rack for the scale of the dependent variable. The centres of these coupled gear wheels are in the centres of the corresponding links of the chain nomogram. The coefficient of scale of the first independent variable is the force applied to the first rack, the parameters of transformation being the ratios by which the forces are transmitted; the coefficients of the scales of the auxiliary variables are the tangential forces in points of contact of gear wheels and lastly, the coefficient of the scale for the dependent variable is the force in the second rack. The simplified model of a chain nomogram is a multistage cylindrical friction

gearing with ropes for the first and the last functional scales. Fig. 47 represents a chain nomogram for the eq. (17.33) and its simplified mechanical model.

In § 18 the practical methods of the calculation and construction of the chain nomograms with inclined scales are discussed. The procedure consists of the following steps: 1) the determination of the coefficient of functional scales for the first function of independent variable; 2) the determination of the coefficients of primary scales and of the parameters of transformation of all the remaining functions of the independent variables; 3) the determination of the coefficients of the scales and limits for the auxiliary variables; 4) the determination of the position of the critical points and the centring of vertical scales; 5) the determination of the distance between the vertical scales and of the width of the nomogram; 6) the determination of the position of the inclined scales and the drawing of their bearers; 7) the construction of all scales. In Table 14 the algorism of chain nomograms with inclined scales is shown.

In Chapter Seven (§ 19) the triangular nomograms are briefly outlined. They represent a general type of nomograms for the first canonic form of equations. All the three scales of such nomograms are projective. Two kinds of triangular nomograms are distinguished: the first contains two internal projective scales and one external projective scale while for the second kind of nomograms all scales are external. The equation (19.4) of the geometric bond corresponds to Fig. 53. According to the reciprocal disposition of the critical points four types of triangular nomograms may be distinguished (Fig. 54).

Further the relationship between the structures of the different types of the triangular nomograms, the structure of their equations, the equations connecting the parameters of transformation and the equations of vectors of lengths are given. Thus, we have for type I equations (19.5), (19.7) and (19.8); for type II equations (19.9) bis (19.11); for type III equations (19.12) bis (19.14); finally for type IV equations (19.15) bis (19.17). One can see that the parameters of transformation are connected by the relations which are analogous to structures of the equations of corresponding nomograms.

In Chapter Eight (§§ 20--21) some problems of the radial chain nomograms are outlined.

Radial chain nomograms with scales intersecting at one point are described in § 20. Radial nomograms may be constructed for both equations (20.1) and (20.2). In the first case all scales are projective while in the second case they are functional. The equation (20.7) of the geometric bond for radial nomograms correspond to the Fig. 55a.

Functional scales for the radial nomograms are characterized by their moduli and for projective scales by their reduced lengths. Moduli of scales and reduced lengths of scales may both be considered as vectors. Their direction correspondingly is determined by signs of coefficients of scales or parameters of transformation.

In the case of the sum of two overturned functions (eq. 20.2), the vector of modulus  $m_3$  of the scale of dependent variable is the sum of vectors of moduli  $m_1$  and  $m_2$  of scales of independent variables (Fig. 20.11). In the case of the sum of two direct functions (eq. 20.1), the same relationship exists between the vectors of reduced lengths of scales (eqs. 20.18 and 20.21); parameters of transformation are connected by the relation (20.15). These conclusions may also hold good for the equation with many variables (eqs. 20.12, 20.25 and 20.26).

*Theorem 4.* The parameter of transformation of the projective scale of any summary auxiliary function (or the function of the dependent variable) equals the algebraic sum of the parameters of transformation of the projective scales of all the summing functions of the independent variables.

In the case of the sum of a direct and an overturned function, the scale for resultant direct function is projective; different elements of these scales are connected by the relation (20.34), which is analogous with that of (20.11) and (20.18) or (20.21). Hence, we conclude that the concept of the modulus  $m$  of the functional scale corresponds to that of the reduced length  $b$  of the projective scale.

The following equations may be written for the equation (20.35) with many variables containing direct and overturned functions: (a) equation (20.36) of vectors of moduli and reduced lengths, and (b) equations (20.37) of the parameters of transformation of scales.

Radial nomograms with free scales are described in §21. The scales may be transferred along their bearers from the critical point  $O$  to the arbitrary points  $P$ ,  $Q$  and  $R$  (Fig. 55a). Instead of straight solution lines  $KLM$  of the primary nomogram, the geometric bond between scales in this case may be realized by means of broken solution lines  $K'K''M''M'$ , using the auxiliary straights  $QA'$  and  $QB'$ , drawn from  $Q$  parallel to the scales  $OA$  and  $OB$ , respectively; segments  $K'K''$  and  $M''M'$  are parallel to the straights  $PQ$  and  $QR$ , respectively (see also Fig. 59).

Fig. 60 represents a nomogram with free scales for the equation (21.1) with five variables; its algorithm is given in Table 15. Constructing such nomograms the scales for the independent variables are located freely on the paper; their bearers are extended down to their intersection. The addition of vectors of the moduli of scales (if the functions are direct) or of the reduced lengths (if they are overturned) is successively performed at points of intersection of bearers of the corresponding scales, according to the structure of the substituting system of equations (21.2). The direction of resultants indicate the location of the mute scales for the auxiliary variables; the direction of the last resultant is the location of the bearer of the scale of the dependent variable. The origin of this scale may be freely placed on this bearer. Fig. 61 is an example of the nomogram with free scales for the equation (21.3).

In Chapter Nine (§ 22) a concise description of chain nomograms with rectilinear scales consisting of heterogeneous elements is given. The en-

gineering equations with many variables often have such a structure that upon separating the variables a system of equations is obtained containing equations of both the first and the second canonic forms. Therefore the geometric structure of different links of the nomogram is distinct. The construction of the nomogram is based on the successive calculation of links. Fig. 62 represents seven schemes for an equation with five variables. Equations of nomograms which can be solved by these schemes and their characteristic equations are given in the text. As an example the calculation and construction of the nomogram for the limiting angles between the solution lines and the vertical scales of the nomogram is given (eqs. 9.14 and 9.19, Fig. 23). The mechanical model of this nomograms is Fig. 63.

The last paragraph (Chapter Ten, § 23), contains some considerations on the transformation of chain nomograms. Collinear transformation of the plane is an important means allowing the improvement of a nomogram without disturbing its internal structure. Geometrically it is the projection of the nomogram from one plane to the other one; analytically it is expressed by eqs. (23.1). Affine transformation is a particular case of collinear transformation, in which all parallel lines remain parallel lines and all infinitely remote points remain infinitely remote points: it is expressed by eqs. (23.2). These types of transformation of the ordinary nomograms (with three variables) are not suitable for the chain nomograms, since they alter the parameters of the scales and consequently must be applied to the nomogram as a whole. A transformation which improves one link of the chain nomogram may deteriorate another link.

Deformative transformation is a particular case of the affine transformation comprising the compression, expansion or shear of the nomogram. In consequence of some types of deformative transformation the scales remain invariable but their position changes; therefore this mode of transformation may be applied to the links of the chain nomogram separately; analytically the shear along the  $Y$  axis is expressed by eqs. (23.3).

Further, the projective relationship between the different types of nomograms is shown. Following the affine projective transformation of the plane, the direct vertical functional scales turn into inverse ones (Fig. 64) and the internal inclined projective scales turn into external ones (Fig. 66). Applying the collinear projective transformation of the plane the nomogram with parallel scales turns into a radial nomogram (Fig. 67) while the nomogram with inclined scales turns into a triangular nomogram (Fig. 68). In both cases the relationship between the coefficients of scales (23.10) and (23.12) changes into an analogical relationship between the parameters of transformation (23.11) and (23.13). This analogy between the coefficients of scales and the parameters of transformation runs all through the theory of chain nomogram.

In Conclusion, the difference between the functional and the projective scales is stressed. The functional scales are characterized by the value of the coefficient of the scale; when dealing with the overturned functions

in radial nomograms these scales are characterized by their moduli. The parameter of transformation of the functional scales may be considered equal to zero. The projective scales are characterized by the value of the parameter of transformation; in some cases the reduced lengths of these scales must be considered too.

The relationship among the above-mentioned characteristic elements for nomograms serving for addition or subtraction of functions is shown on Table 16. For each type of nomogram (with parallel scales or radial) two characteristic equations may be written: (1)—the equation of the coefficients of scales and their lengths and (2)\*—the equation of the parameters of transformation. These equations demonstrate the additive properties of these characteristics. The joint analysis of these equations reveal the characteristic of the scale for the resultant function.

The relationship among the same characteristic elements for nomograms serving for multiplication or division of functions is shown in Table 17. For each type of nomograms (with inclined scales and triangular) the same two characteristic equations may be written too. These equations analogically reflect the structure of the equation of nomogram and demonstrate the characteristic of the scale for the resultant function.

Relying on these conclusions all the theoretical statements made in this work may be summed up in an unique rule: „to get the characteristics of the scale of the resultant function of chain nomogram, i.e. coefficients of scales and parameter of transformation, it is necessary to subject the characteristics of the scales of the given functions to the same operations, which connect the given functions and the resultant function in the equation of the chain nomogram“.

As an illustration of this statement equation (1) of a chain nomogram is given and for this equation two quite analogous expressions are written right away. Expression (2) corresponds to the case when this nomogram consists of links with inclined and parallel scales, while expression (3) corresponds to the case when these links represent triangular and radial nomograms.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев П. Н., Глаголева А. А. и Глаголев А. А. Основы номографии, М.—Л., ОНТИ, 1936.
2. Гавра Д. Л. Основы номографии с примерами из машиностроения, 2 изд., М.—Л., Машгиз, 1962.
3. Герсевич Н. М. Основы номографии (теория и построение инженерных номограмм), 2 изд., М.—Л., Госнаучтехиздат, 1932.
4. Глаголев Н. А. Теоретические основы номографии, М.—Л., ОНТИ, 1934.
5. Глаголев Н. А. Курс номографии, 2 изд., М.—Л., ГИТТЛ, 1961.
6. Денисюк И. Н. О проективном преобразовании номограмм (Номогр. сборник под ред. Н. А. Глаголева), М., ОНТИ, 1935, 201—217.
7. Денисюк И. Н. Что такое номограмма и как ею пользоваться, М.—Л., ОНТИ, 1935.
8. Денисюк И. Н. Номография и составление эмпирических формул. Справочник нормировщика-машиностроителя, т. 1. М., Машиздат, 1959, 545—627.
9. Денисюк И. Н. Об эффективных формулах проективного преобразования и их применений к построению эмпирических зависимостей. Вычисл. матем., 1959, 4:162—166.
10. Ермолова О. В. Разъединение переменных в уравнении со многими переменными (обобщение условий Гурса). Уч. зап. Моск. гос. универ., 1939, 28:43—54.
11. Невский Б. А. Справочная книга по номографии, М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
12. Пентковский М. В. Номография, М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
13. Справочник по номографии (под редакцией Н. А. Глаголева), М.—Л., ОНТИ, 1937.
14. Строительная почва. Методы за лабораторно определяне на зърнометричния състав (БДС 2762—57)
15. Тер-Степанян Г. И. Об одном свойстве номограмм с параллельными шкалами. ДАН АрмССР, 1950, 12,1:3—8.
16. Тер-Степанян Г. И. О канонических формах уравнений цепных номограмм для функций многих переменных. ДАН АрмССР, 1951, 13,2:38—44.
17. Тер-Степанян Г. И. Номограмма для гранулометрического анализа грунтов. Гидротехн. строит., 1954, 1:24—25.
18. Тер-Степанян Г. И. Номограмма для определения коэффициента фильтрации грунтов. Изв. АН АрмССР, геол. и геогр. науки, 1960, 13,2:51—58; 13,3—4:111—114.
19. Тер-Степанян Г. И. О параметре преобразования проективных шкал. ДАН АрмССР, 1962, 35,5:197—202.
20. Тер-Степанян Г. И. Графический и графоаналитический методы расчета цепных номограмм с параллельными шкалами. ДАН АрмССР. 1963, 36,4:203—209.
21. Швердт Г. Номография на основе геометрии отображения, Харьков—Киев, ГНТИ Укр., 1935.
22. Jurga F., Nomografia i iné grafické metody. Bratislava, 1958.
23. Korwien H., Graphisches Rechnen (Nomographie), 6. Aufl., Leipzig, Fachbuchverlag GmbH, 1952.
24. Levens A., Nomography, New York, J. Wiley & Sons.
25. d'Ocagne M., Traité de nomographie, 2<sup>e</sup> éd. Paris, Gauthier-Villars, 1921.
26. d'Ocagne M., Calcul graphique et nomographie. Bibliothèque de mathématique appliquées de l'Encyclopédie scientifique. 3<sup>e</sup> éd., Paris, Doin, 1924.
27. Schwerdt H., Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Berlin, Springer, 1931.
28. Soreau R., Nouveaux types d'abaques. La capacité et la valence en nomographie. Mem. et Comptes Rendues de la Soc. des Ing. Civil de France, 1906.
29. Soreau R., Nomographie ou traité des abaques. 2 vols. Paris, E. Chiron, 1921.
30. Ter-Stepanian G., Nomogram for Computation of Permeability of Cohesive Soils, Géotechnique, London, 1962, 12,3:209—211.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Символы и обозначения</b> . . . . .	8
<b>I. Шкалы</b> . . . . .	11
§ 1. <b>Функциональные шкалы</b> . . . . .	—
Характеристика шкал 11. Классификация шкал 12. Характеристика функциональных шкал 13. Коэффициент шкалы 13. Виды функциональных шкал 15. Погрешность, даваемая шкалой 17. Практическая оценка характера неравномерных шкал 19.	
§ 2. <b>Проективные шкалы</b> . . . . .	20
Характеристика проективных шкал 20. Возможность построения проективных шкал графическим методом 21. Терминология проективных шкал 24. Внутреннее и внешнее проектирование 24. Уравнение внутренней проективной шкалы 25. Уравнение внешней проективной шкалы 28. Общий случай проектирования 31. Каноническая форма уравнений проективных шкал 36. Центр проективной шкалы 38.	
§ 3. <b>Методы построения функциональных шкал</b> . . . . .	38
Копирование готовых шкал 39. Градуирование шкал графическими методами 41. Градуирование шкал фотографическим методом 42.	
§ 4. <b>Методы построения проективных шкал</b> . . . . .	44
Выбор наилучшего значения параметра преобразования 44. Построение проективной шкалы 45. Применение вспомогательных полюсов 50.	
<b>II. Цепные номограммы</b> . . . . .	51
§ 5. <b>Номографирование уравнений со многими переменными</b> . . . . .	51
Цепные номограммы и шкалы 51. Условия номографируемости уравнений со многими переменными 53. Геометрическая структура звеньев цепных номограмм с прямолинейными шкалами 55. Типы цепных номограмм с прямолинейными шкалами 57. Внутреннее и внешнее пересечение 59. Графическое оформление номограмм 60. Пользование номограммой 61.	
<b>III. Теория цепных номограмм с параллельными шкалами</b> . . . . .	63
§ 6. <b>Характеристика понятий, применяемых в теории цепных номограмм</b> . . . . .	63
Структура цепных номограмм с параллельными шкалами 63. Характеристика функций и шкал 64. Звенья цепных номограмм и составляющие их шкалы 67. Функциональная связь между параметрами слагаемых и суммарных функций 68. Параметры шкал функции зависимой переменной и вспомогательных переменных 68. Свойства предельных значений и интервалов функций 69. Теорема I о коэффициенте шкалы суммы функции 71. Теорема 2 о моменте коэффициента шкалы 71.	
§ 7. <b>Функциональные зависимости, связывающие параметры шкал, и доказательства основных теорем</b> . . . . .	72
Длина опоры и шкалы вспомогательной переменной первого звена 72. Уравнение геометрической связи первого звена 73. Адекватность уравнения геометрии	

ческой связи 73. Уравнения шкал функции первого звена 75. Доказательство теоремы о коэффициенте шкалы 75. Доказательство теоремы о моменте коэффициента шкалы 76. Случай отрицательных значений функций 77. Уравнение геометрической связи второго звена 78. Уравнения шкал функции второго звена 78. Доказательство основных теорем для второго звена 79. Уравнения для функции зависимой переменной 80.

**IV. Расчет и построение цепных номограмм с параллельными шкалами аналитическим методом . . . . .**

82

**§ 8. Расчет, контроль и построение цепной номограммы с параллельными шкалами в общем случае . . . . .**

82

Расчет шкал функций 82. Алгоритм номограммы 85. Контроль расчета номограммы 87. Построение номограммы 88.

**§ 9. Рациональные методы построения цепных номограмм с параллельными шкалами . . . . .**

88

Общие соображения 88. Номограммы с центрированными шкалами 88. Номограммы со слившимися шкалами 89. Расстояние между шкалами в номограммах с полностью слившимися шкалами 90. Условие применимости номограммы с полностью слившимися шкалами 92. Номограммы с частично слившимися шкалами 94. Номограммы с обратными шкалами 94. Номограммы с усеченными шкалами 95. Номограммы с логарифмическими шкалами 96. Схема номограммы 98. Точность построения цепной номограммы; величина предельного угла пересечения разрешающих прямых с носителями шкал 100. Номограмма для определения предельного угла пересечения шкал 102. Последовательность шкал цепных номограмм 104. Механическая цепная номограмма с параллельными шкалами 105.

**§ 10. Построение номограмм с частично слившимися шкалами . . . . .**

107

Номографируемая формула 107. Пределы изменения переменных 109. Расположение шкал номограммы 109. Алгоритм номограммы для определения коэффициента фильтрации грунта 111. Схема номограммы 113. Расстояние от начала номограммы до шкалы функции зависимой переменной 115. Контроль расчета 116. Предельный угол, образуемый разрешающими прямыми 116. Градуирование шкал 117. Способ применения номограммы 120.

**§ 11. Построение номограмм с полностью слившимися шкалами . . . . .**

121

Номографируемое уравнение и пределы изменения переменных 121. Расчет, построение и контроль номограммы 121. Расчет номограммы для определения весов засечек 125.

**§ 12. Построение номограмм с обратными шкалами . . . . .**

126

Номографируемое уравнение 126. Конструкция номограммы 127. Расчет и построение номограммы 129.

**§ 13. Построение номограмм с усеченными шкалами . . . . .**

132

**§ 14. Номографические блоки для массового построения индивидуальных номограмм . . . . .**

135

Номографические блоки 135. Анализ номографируемого уравнения 136. Расчет номографического блока 137. Способ применения номографических блоков 139.

**V. Расчет и построение цепных номограмм с параллельными шкалами графическим и графоаналитическим методами . . . . .**

140

**§ 15. Статическая аналогия цепных номограмм с параллельными шкалами . . . . .**

140

Статическая аналогия 140. Доказательство статической аналогии 141. Вербочный многоугольник 142. Графический метод построения цепных номограмм с параллельными шкалами 145. Графоаналитический метод построения цепных номограмм с параллельными шкалами 147. Слияние шкал 149.

§16. Пример построения цепной номограммы с параллельными шкалами графическим методом . . . . .	150
Номографируемое уравнение и пределы изменения переменных 150. Построение шкал 151. Градуирование шкал 152.	
<b>VI. Цепные номограммы с наклонными шкалами . . . . .</b>	<b>154</b>
§17. Теория цепных номограмм с наклонными шкалами . . . . .	154
Структура цепных номограмм с наклонными шкалами 154. Ограниченность применения цепных номограмм с наклонными шкалами 156. Цепные номограммы с внутренними множительными наклонными шкалами 157. Вертикальные шкалы 158. Наклонная шкала 160. Цепные номограммы с внутренними делительными наклонными шкалами 163. Цепные номограммы с внешними множительными наклонными шкалами 164. Цепные номограммы с внешними делительными наклонными шкалами 168. Теорема 3 о коэффициенте шкалы произведения (частного) функции 169. Расчетные формулы для шкалы произведения (частного) функции 169. Центр номограммы 170. Номограмма с внутренней и внешней шкалами 171. Номограммы уравнений с постоянными множителями 172. Механическая модель цепных номограмм с наклонными шкалами 173.	
§18. Расчет и построение цепных номограмм с наклонными шкалами . . . . .	177
Состав номограммы 177. Ход решения задачи 178. Определение коэффициента функциональной шкалы первой функции независимой переменной 179. Определение коэффициентов первичных шкал и параметров преобразования проективных шкал остальных функций независимых переменных 179. Определение коэффициентов шкал и пределов вспомогательных переменных и функций зависимой переменной 180. Установление положения критических точек и центрирование вертикальных шкал 181. Установление расстояний между вертикальными шкалами и определение ширины номограммы 183. Установление положения наклонных шкал и вычерчивание носителей всех шкал 184. Построение вертикальных и наклонных шкал 185.	
<b>VII. Треугольные цепные номограммы . . . . .</b>	<b>188</b>
§19. Треугольные номограммы . . . . .	188
Структура треугольных номограмм 188. Уравнение геометрической связи 189. Параметры преобразования и структура номографируемых уравнений 190.	
<b>VIII. Радиантные цепные номограммы . . . . .</b>	<b>194</b>
§20. Цепные номограммы с пересекающимися в одной точке шкалами . . . . .	194
Радиантные номограммы с тремя шкалами 194. Радиантные цепные номограммы 195. Уравнение геометрической связи радиантных номограмм 196. Построение радиантных номограмм для суммы двух перевернутых функций 196. Построение радиантных номограмм для суммы двух прямых функций 198. Применение внешних проективных шкал в радиантных номограммах для суммы двух прямых функций 200. Теорема 4 о параметре преобразования шкалы суммарной функции 202. Применение функциональных шкал в радиантных номограммах для суммы двух прямых функций 203. Построение радиантных номограмм для суммы прямой и перевернутой функции 203. Построение радиантных цепных номограмм 206. Пример построения радиантных номограмм 209.	
§21. Номограммы со свободно расположенными шкалами . . . . .	211
Возможность перенесения шкал 211. Структура номограммы со свободно расположенными шкалами 212. Цепные номограммы со свободно расположенными шкалами 215. Общий алгоритм цепной номограммы со свободно расположенными шкалами 216. Пример построения номограммы со свободно расположенными шкалами графическим методом 218.	

<b>IX. Цепные номограммы из разнородных прямолинейных элементов . . . . .</b>	<b>221</b>
§ 22. Цепные номограммы с прямолинейными шкалами, состоящие из разнородных элементов . . . . .	221
Геометрическая структура цепных номограмм из разнородных элементов 221. Пример расчета и построения цепной номограммы с прямолинейными шкалами, состоящей из разнородных элементов 225.	
<b>X. Преобразование цепных номограмм . . . . .</b>	<b>230</b>
§ 23. Проективная связь между различными типами шкал и их характеристиками . . . . .	230
Виды преобразования номограмм 230. Проективная связь между прямыми и обратными шкалами 231. Проективная связь между внутренними и внешними наклонными шкалами 234. Проективная связь между коэффициентами функциональных шкал и параметрами преобразования проективных шкал 237.	
<b>Выводы и заключение . . . . .</b>	<b>241</b>
<b>Հաշիւներն աւտփոխութիւն . . . . .</b>	<b>245</b>
<b>English summary . . . . .</b>	<b>257</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>263</b>

ГЕОРГИИ ИСАЕВИЧ ТЕР-СТЕПАНЯН  
ИНЖЕНЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ НОМОГРАММЫ  
С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ШКАЛАМИ  
(ТЕОРИЯ, РАСЧЕТ, ПОСТРОЕНИЕ)

*Печатается по рекомендации ученого совета  
Института геологических наук АН АрмССР*

Отв. редактор Г. А. Карагебабян  
Редактор издательства Р. А. Штибел.  
Худож. оформление Л. Садомяна  
Техн. редактор М. А. Каплянян  
Корректор Г. М. Аветисян

---

ВФ 6695, заказ 181, изд. № 2352, РИСО 883, тираж 2200.

Сдано в производство 27/VI—1964 г.  
Подписано к печати 30/IX—1965 г.  
печ. л. 17 + 13 вкл., изд. 22,15 л. Бумага 70×108  
Цена с переплетом 1 р. 70 к.

---

Эчмиадзинская типография Издательства Академии наук  
Армянской ССР

INGENIEURKETTENNOMOGRAMME  
MIT GERADLINIGEN SKALEN

(Theorie, Rechnung, Konstruktion)  
Mit englischen Zusammenfassung  
Von George TER-STEPANIAN,  
Professor, Dr. techn. Wissensch.

Die Konstruktion der Nomogramme mit geradlinigen Skalen fuer die Gleichungen mit vielen Veraenderlichen enthielt eine Menge von Schwierigkeiten infolge des Mangels der allgemeinen Theorie von solchen Nomogrammen. Insofern koennen fuer dieselbe Gleichung viele Varianten der Nomogrammen konstruiert werden, findet man die beste nur durch ein Probeverfahren. Der Verfasser hat eine allgemeine Theorie der Nomogrammen mit geradlinigen Skalen fuer die Gleichungen mit vielen Veraenderlichen vorgeschlagen und seinen Algorithmus zusammengesetzt. Einige, auf diese Theorie basierte Methoden der Rechnung und der Konstruktion der Kettennomogramme mit geradlinigen Skalen sind ausgearbeitet worden. Diese Methoden lassen die Ausfuehrung der einfachen Rechnungen aller Elemente des zukuenftigen Nomogramms erzeugen und die Wahl der optimalen Variante vor der Konstruktion des Nomogramms selbst.

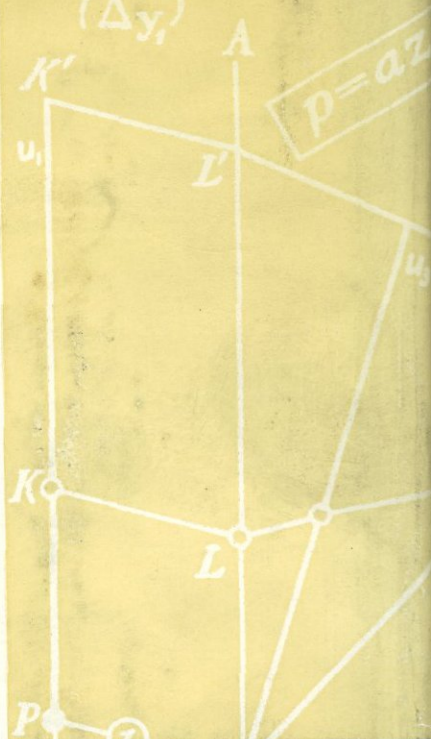
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
АКАДЕМИИ НАУК  
АРМЯНСКОЙ ССР

15128

$(\Delta y_2)$



$\Delta x_1$   
 $(\Delta y_1)$



ЕРЕВАН 1965

